

CHƯƠNG VI: HÀM SỐ $y = ax^2 (a \neq 0)$. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN.

BÀI 18. HÀM SỐ $y = ax^2 (a \neq 0)$

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. HÀM SỐ $y = ax^2 (a \neq 0)$

Nhận xét. Hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ xác định với mọi giá trị x thuộc $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = \frac{3}{2}x^2$. Hoàn thành bảng giá trị sau vào vở:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	?	?	?	?	?	?	?

Lời giải

Bảng giá trị:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{27}{2}$	6	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	6	$\frac{27}{2}$

II. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax^2 (a \neq 0)$

Cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$

- Lập bảng ghi một số cặp giá trị tương ứng của x và y .
- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , biểu diễn các cặp điểm $(x; y)$ trong bảng giá trị trên và nối chúng lại để được một đường cong là đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$.

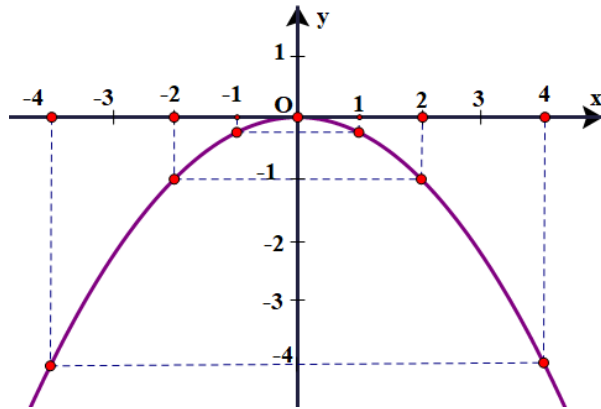
Ví dụ 2. Vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$.

Lời giải

Lập bảng một số giá trị tương ứng giữa x và y :

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
y	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	-4

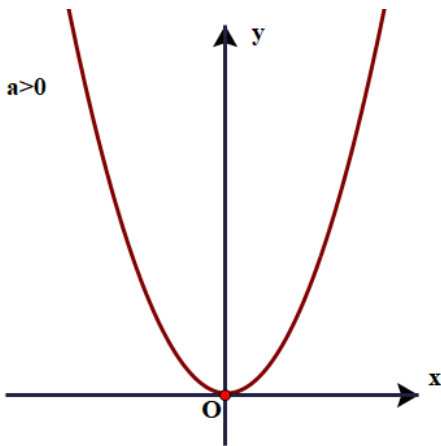
Biểu diễn các điểm $(-4; -4); (-2; -1); (-1; -\frac{1}{4}); (0; 0); (1; -\frac{1}{4}); (2; -1)$ và $(4; -4)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy và nối chúng lại ta được đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$ như hình.



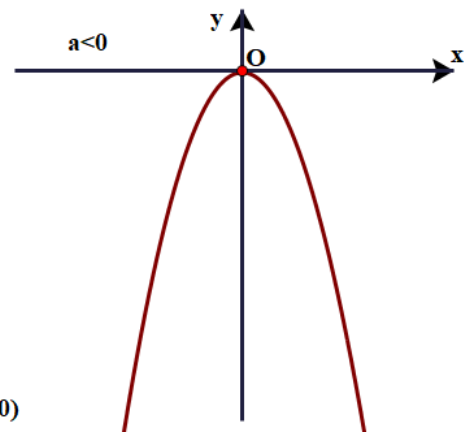
Tính chất:

Đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ là một đường cong, gọi là đường parabol, có các tính chất sau:

- Có đỉnh là gốc tọa độ O ,
- Có trục đối xứng là Oy ;
- Nằm phía trên trục hoành nếu $a > 0$ và nằm phía dưới trục hoành nếu $a < 0$.



Đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$



Chú ý:

Hai điểm (x, y) và $(-x, y)$ đối xứng nhau qua trục tung Oy .

Ví dụ 3

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = -2x^2$.

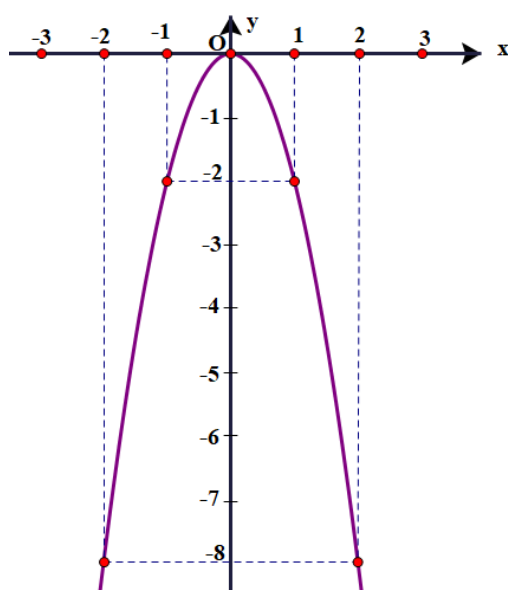
b) Tìm tọa độ các điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng $-\frac{1}{2}$ và nhận xét về tính đối xứng giữa các điểm đó.

Lời giải

a) Lập bảng một số giá trị tương ứng giữa x và y :

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-2	0	-2	-8

Biểu diễn các điểm $(-2;-8), (-1;-2), (0;0), (1;-2)$ và $(2;-8)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy và nối chúng lại ta được đồ thị của hàm số $y = -2x^2$ như hình.



b) Ta có $y = -\frac{1}{2}$ nên $-2x^2 = -\frac{1}{2}$, hay $x^2 = \frac{1}{4}$. Suy ra $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$.

Vậy có hai điểm cần tìm là $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. Hai điểm này đối xứng với nhau qua trục tung Oy.

Nhận xét.

- Khi vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$, ta cần xác định tối thiểu 5 điểm thuộc đồ thị là gốc tọa độ O và hai cặp điểm đối xứng với nhau qua trục tung Oy.

- Do đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ nhận trục tung Oy là trục đối xứng nên ta có thể lập bảng giá trị của hàm số này với những giá trị x không âm và vẽ phần đồ thị tương ứng ở bên phải trục tung, sau đó lấy đối xứng phần đồ thị đã vẽ qua trục tung ta sẽ được đồ thị của hàm số đã cho.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

6.1. Cho hàm số $y = 0,25x^2$. Hoàn thành bảng giá trị sau vào vở:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	?	?	?	?	?	?	?

6.2. Cho hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông cạnh a (cm) và chiều cao 10 cm.

a) Viết công thức tính thể tích V của lăng trụ theo a và tính giá trị của V khi $a = 2$ cm.

b) Nếu độ dài cạnh đáy tăng lên hai lần thì thể tích của hình lăng trụ thay đổi thế nào?

6.3. Diện tích toàn phần $S (\text{cm}^2)$ của hình lập phương, tức là tổng diện tích xung quanh và diện tích của hai mặt đáy là một hàm số của độ dài cạnh a (cm).

a) Viết công thức của hàm số này.

b) Sử dụng công thức nhận được ở câu a để tính độ dài cạnh của một hình lập phương có diện tích toàn phần là 54cm^2 .

6.4. Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = 3x^2$;

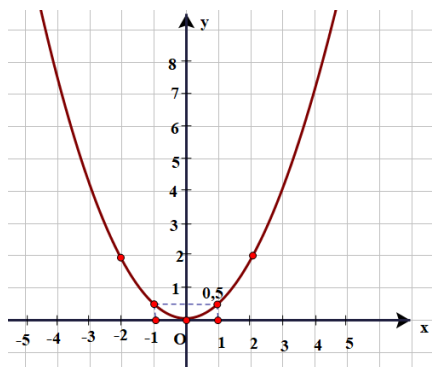
b) $y = -\frac{1}{3}x^2$

6.5. Biết rằng đường cong trong hình là một parabol $y = ax^2$.

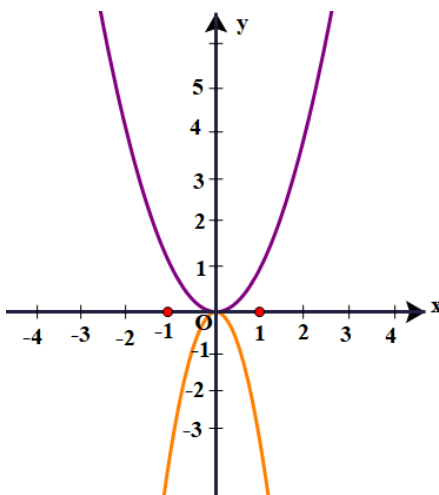
a) Tìm hệ số a .

b) Tìm tung độ của điểm thuộc parabol có hoành độ $x = -2$.

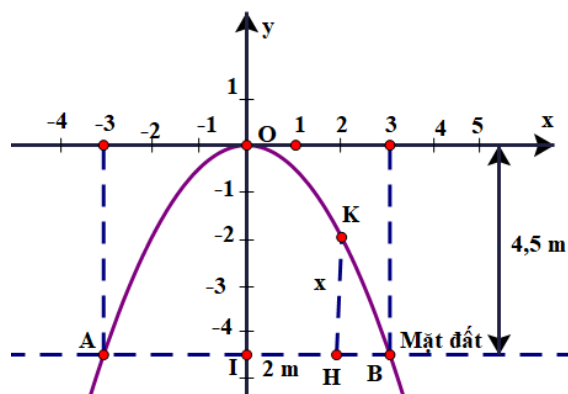
c) Tìm các điểm thuộc parabol có tung độ $y = 8$.



6.6. Trong hình có hai đường cong là đồ thị của hai hàm số $y = -3x^2$ và $y = x^2$. Hãy cho biết đường nào là đồ thị của hàm số $y = -3x^2$.



6.7. Một cổng vòm được thiết kế dạng parabol $y = ax^2$ như hình. Biết chiều rộng của chân cổng là $AB = 6\text{m}$ và chiều cao của cổng là $OI = 4,5\text{m}$.



C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Giá trị hàm số $y = f(x) = ax^2 (a \neq 0)$ tại $x = x_0$

1. Phương pháp giải

Để tính $f(x_0)$ ta thay $x = x_0$ vào $f(x)$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x) = 4x^2$. Hãy tính $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(-2)$, $f(0)$

Ví dụ 2. Diện tích S của hình tròn được tính bởi công thức $S = \pi R^2$, trong đó R là bán kính của hình tròn.

a) Dùng máy tính bỏ túi, tính các giá trị của S rồi điền vào các ô trống trong bảng sau ($\pi \approx 3,14$, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

R (cm)	0,57	1,37	2,15	4,09
$S = \pi R^2$ (cm ²)				

b) Nếu bán kính tăng gấp 3 lần thì diện tích tăng hay giảm bao nhiêu lần?

c) Tính bán kính của hình tròn, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai, nếu biết diện tích của nó bằng $79,5\text{cm}^2$.

Ví dụ 3. Một vật rơi ở độ cao so với mặt đất là 100 m. Quãng đường chuyển động S (mét) của vật rơi phụ thuộc vào thời gian t (giây) bởi công thức: $S = 4t^2$.

a) Sau 1 giây, vật này cách mặt đất bao nhiêu mét? Tương tự, sau 2 giây?

b) Hỏi sau bao lâu vật này tiếp đất?

Ví dụ 4.

Lực F của gió khi thổi vuông góc vào cánh buồm tỷ lệ thuận với bình phương vận tốc v của gió, tức là $F = av^2$ (a là hằng số). Khi vận tốc gió bằng 2m/s thì lực tác động lên cánh buồm của một con thuyền bằng 120 N (Niu-ton)

a) Tính hằng số a .



b) Hỏi khi $v = 10 \text{ m/s}$ thì lực F bằng bao nhiêu?

Cùng câu hỏi này khi $v = 20 \text{ m/s}$

c) Biết rằng cánh buồm chỉ có thể chịu được một áp lực tối đa là 12000 N , hỏi con thuyền có thể đi được trong gió bão với vận tốc 90 km/h hay không?

Dạng 2. Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^2 (a \neq 0)$

1. Phương pháp giải

Lập bảng giá trị tương ứng giữa x và y . Cho x lần lượt bằng: $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3 \dots$ rồi tìm giá trị y tương ứng bằng cách lập bảng.

Điểm $M(x_M; y_M)$ thuộc đồ thị $y = ax^2 \Leftrightarrow y_M = ax_M^2$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hàm số: $y = \frac{3}{2}x^2$, $y = -\frac{3}{2}x^2$. Điền vào những ô trống của các bảng sau rồi vẽ hai đồ thị trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{3}{2}x^2$					

x	-2	-1	0	1	2
$y = -\frac{3}{2}x^2$					

Nhận xét về tính đối xứng của hai đồ thị đối với trục Ox .

Ví dụ 2. Cho hàm số: $y = \frac{1}{2}x^2$; $y = x^2$; $y = 2x^2$.

a) Vẽ đồ thị của ba hàm số này trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Tìm ba điểm A, B, C có cùng hoành độ $x = -1,5$ theo thứ tự nằm trên ba đồ thị. Xác định tung độ tương ứng của chúng.

c) Tìm ba điểm A', B', C' có cùng hoành độ $x = 1,5$ theo thứ tự nằm trên ba đồ thị. Kiểm tra tính đối xứng của A và A', B và B', C và C' .

d) Với mỗi hàm số trên, hãy tìm giá trị x điểm hàm số đó có giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x) = x^2$.

a) Vẽ đồ thị hàm số đó.

b) Tính các giá trị $f(-8)$; $f(-1,3)$; $f(-0,75)$; $f(1,5)$.

c) Dùng đồ thị để ước lượng các giá trị $(0,5)^2$; $(-1,5)^2$; $(2,5)^2$.

d) Dùng đồ thị để ước lượng vị trí các điểm trên trục hoành biểu diễn các số $\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = -0,75x^2$. Qua đồ thị hàm số đó, hãy cho biết khi x tăng từ -2 đến 4 thì giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của y là bao nhiêu?

Dạng 3. Xác định hệ số a của hàm số $y = f(x) = ax^2$ ($a \neq 0$)

1. Phương pháp giải

Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (P) . Điểm $M(x_0; y_0) \in (P) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$.

2. Ví dụ

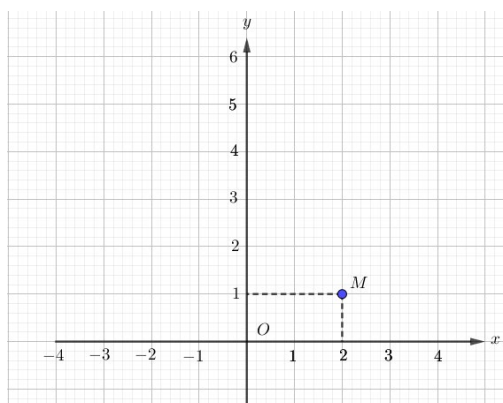
Ví dụ 1. Xác định hàm số bậc hai $y = ax^2$. Biết đồ thị đi qua điểm $A(10; 30)$.

Ví dụ 2. Trên mặt phẳng tọa độ có một điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = ax^2$.

a) Tìm hệ số a .

b) Điểm $A(4; 4)$ có thuộc đồ thị không?

c) Hãy tìm thêm hai điểm nữa (không kể điểm O) để vẽ đồ thị.

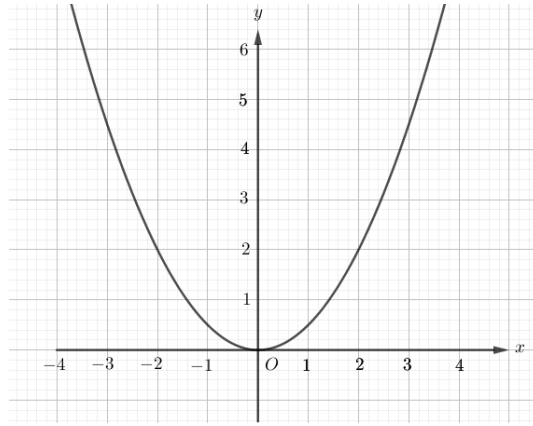


Ví dụ 3. Biết rằng đường cong hình bên là một Parabol $y = ax^2$.

a) Tìm hệ số a .

b) Tìm tung độ của điểm thuộc Parabol có hoành độ $x = -3$.

c) Tìm các điểm thuộc Parabol có tung độ $y = 8$.



Dạng 4. Tọa độ giao điểm của parabol và đường thẳng

1. Phương pháp giải

- Để tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) ta viết phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$ax^2 = bx + c \quad (1)$$

- Nếu (1) vô nghiệm thì (d) không cắt (P) .
- Nếu (1) có nghiệm thì (d) cắt (P) .

Gọi x_1 là hoành độ giao điểm thì tung độ giao điểm là $y = ax_1^2$ hoặc $y = bx_1 + c$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hai hàm số $y = \frac{1}{3}x^2$ và $y = -x + 6$

- Vẽ đồ thị của các hàm số này trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- Tìm tọa độ các giao điểm của hai đồ thị đó.

Ví dụ 2. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x + 2$.

- Tìm tọa độ giao điểm $A, B (x_A > x_B)$ của (d) và (P) .
- Tính diện tích tam giác OAB .

Dạng 5. Giải bất phương trình bằng đồ thị

1. Phương pháp giải

Cho bất phương trình $f(x) < g(x) \quad (1)$

- Vẽ đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$ trên cùng hệ trục tọa độ.
- Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị trên bằng cách giải phương trình $f(x) = g(x)$.

- Nghiệm của bất phương trình $f(x) < g(x)$ là tập hợp các giá trị x là hình chiếu của phần đồ thị $y = f(x)$ nằm dưới đồ thị $y = g(x)$ lên trục hoành.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Giải bất phương trình sau bằng đồ thị $x^2 < x + 2$

Dạng 6. Biện luận số nghiệm của phương trình bằng đồ thị

1. Phương pháp giải

Cho phương trình dạng $f(x) = m$ (m là tham số)

- Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m$ cùng phương với Ox và qua điểm có tọa độ $(0, m)$.
- Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ với đường thẳng $y = m$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình :

a) $-2x^2 = m$ b) $x|x| = m$

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho hàm số $y = -3x^2$. Lập bảng tính các giá trị của y ứng với giá trị của x lần lượt bằng: -2 ; -1 ; 0 ; $\frac{1}{3}$; 1 ; 2 .

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = x^2$

a) Chứng minh rằng $f(a) - f(-a) = 0$ với mọi a .

b) Tìm $a \in \mathbb{R}$ biết $f(a-1) = 4$.

Câu 3: Chứng minh rằng hàm số $y = -5x^2$ có các tính chất sau:

a) y không dương với mọi giá trị của x .

b) nếu $|x|$ gấp n lần thì y gấp n^2 lần.

Câu 4: Cho hàm số $y = (m+2)x^2$ ($m \neq -2$), Tìm các giá trị của m để:

a) có giá trị $y = 4$ khi $x = -1$.

b) hàm số có giá trị lớn nhất là 0 .

c) hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0 .

Câu 5: Cho hàm số $y = -x^2$

a) Vẽ đồ thị của hàm số.

b) Các điểm sau có thuộc đồ thị hay không?

$$A\left(3; \frac{9}{10}\right); \quad B\left(-5; \frac{5}{2}\right); \quad C(-10; 1)?$$

Câu 6: Xác định hệ số a để đồ thị hàm số $y = ax^2$ đi qua điểm $A(-\sqrt{3}; 9)$. Vẽ đồ thị trong trường hợp này.

Câu 7: Xác định m để đồ thị hàm số $y = (m^2 - 2)x^2$ đi qua điểm $A(1; 2)$. Với m tìm được, đồ thị hàm số có đi qua điểm $B(2; 9)$ không?

Câu 8: Cho parabol $y = \frac{1}{4}x^2$. Xác định m để các điểm sau nằm trên parabol:

$$a) A(\sqrt{2}; m) \quad b) B(-\sqrt{2}; m) \quad c) C\left(m; \frac{3}{4}\right)$$

Câu 9: a) Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc O và điểm $M(2; 4)$.

b) Viết phương trình parabol dạng $y = ax^2$ và đi qua $M(2; 4)$.

c) Vẽ parabol và đường thẳng trên cùng hệ trục tọa độ và tìm tọa độ giao điểm của chúng.

Câu 10: Trên cùng một hệ trục tọa độ, vẽ đồ thị các hàm số $y = f(x) = x^2$ và $y = g(x) = \frac{1}{2}x$.

Dựa vào đồ thị hãy giải các bất phương trình:

$$a) f(x) < g(x) \quad b) f(x) \geq g(x).$$

Câu 11: a) Xác định a để đồ thị hàm số đi qua $A(-1; 2)$

b) Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm

c) Tìm các điểm trên đồ thị có tung độ bằng 4

d) Tìm tọa độ các điểm trên đồ thị và cách đều hai trục tọa độ.

Câu 12: Dựa vào đồ thị hãy biện luận theo m số nghiệm của phương trình $2x^2 + 1 = m$

Câu 13: Cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị hàm số (P) .

1. Xác định a biết (P) đi qua điểm $A(1; -2)$.

2. Vẽ đồ thị (P) .

3. Tìm điểm thuộc (P) có hoành độ bằng 2.

Câu 14: Cho parabol $(P): y = \frac{x^2}{2}$ và đường thẳng $(d): y = x + 4$.

1. Vẽ (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ.

2. Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) .

Câu 15: Trên parabol $(P): y = x^2$, ta lấy hai điểm $A(-1; 1)$ và $B(3; 9)$. Xác định điểm C trên cung nhỏ AB của (P) sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

BÀI 19. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐỊNH NGHĨA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Phương trình bậc hai một ẩn (nói gọn là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ trong đó x là ẩn; a, b, c là những số cho trước gọi là hệ số và $a \neq 0$.

Ví dụ 1. Trong các phương trình sau, những phương trình nào là phương trình bậc hai ẩn x ? Chỉ rõ các hệ số a, b, c của mỗi phương trình đó.

a) $2x^2 - 3x + 1 = 0$;

b) $x^2 - 3 = 0$;

c) $\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{x} + 2 = 0$;

d) $-5x^2 = 0$

Lời giải

a) Phương trình $2x^2 - 3x + 1 = 0$ là phương trình bậc hai với $a = 2, b = -3, c = 1$.

b) Phương trình $x^2 - 3 = 0$ là phương trình bậc hai với $a = 1, b = 0, c = -3$.

c) Phương trình $\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{x} + 2 = 0$ không phải là phương trình bậc hai.

d) Phương trình $-5x^2 = 0$ là phương trình bậc hai với $a = -5, b = 0, c = 0$.

2. CÁCH GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN CÓ DẠNG ĐẶC BIỆT

Cách giải phương trình bậc hai một ẩn dạng khuyết

Giải một phương trình bậc hai là tìm tất cả các nghiệm của nó. Dưới đây, thông qua một số ví dụ đơn giản, ta trình bày cách giải một số phương trình bậc hai dạng $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), mà khuyết số hạng bậc nhất (tức là $b = 0$) hoặc khuyết số hạng tự do (tức là $c = 0$), bằng phương pháp đặt nhân tử chung đưa về dạng tích hoặc dùng hằng đẳng thức để đưa về trái về một bình phương.

Chú ý:

- Nếu $A \cdot B = 0$ thì $A = 0$ hoặc $B = 0$.

- Nếu $A^2 = B$ ($B \geq 0$) thì $A = \sqrt{B}$ hoặc $A = -\sqrt{B}$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $2x^2 - 4x = 0$;

b) $3x^2 + 8x = 0$

Lời giải

$$a) 2x^2 - 4x = 0$$

$$b) 3x^2 + 8x = 0$$

$$2x(x-2) = 0$$

$$x(3x+8) = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x = 2$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x = -\frac{8}{3}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 0, x_2 = 2$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 0, x_2 = -\frac{8}{3}$

Chú ý. Để giải phương trình bậc hai dạng $x^2 + bx = c$, ta có thể cộng thêm vào hai vế của phương trình với cùng một số thích hợp để vế trái có thể biến đổi thành một bình phương. Từ đó có thể giải phương trình đã cho.

Ví dụ 4. Cho phương trình $x^2 - 4x = 1$.

a) Hãy cộng vào cả hai vế của phương trình với cùng một số thích hợp để được một phương trình mà vế trái có thể biến đổi thành một bình phương.

b) Dựa vào câu a và cách giải Ví dụ 3b, hãy giải phương trình đã cho.

Lời giải

$$a) x^2 - 4x = 1$$

$$x^2 - 4x + 4 = 1 + 4$$

$$(x-2)^2 = 5$$

b) Từ kết quả câu a, ta có: $x-2 = \sqrt{5}$ hoặc $x-2 = -\sqrt{5}$, suy ra là $x = 2 + \sqrt{5}$ hoặc $x = 2 - \sqrt{5}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 2 + \sqrt{5}, x_2 = 2 - \sqrt{5}$.

3. CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Cách giải phương trình bậc hai

Để giải phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ trong trường hợp tổng quát, ta làm như sau:

- Chuyển hạng tử tự do c sang vế phải: $ax^2 + bx = -c$.

- Chia cả hai vế của phương trình cho hệ số a của x^2 : $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$.

- Cộng vào hai vế của phương trình nhận được với $\frac{b^2}{4a^2}$ để vế trái có thể biến đổi thành bình phương

của một biểu thức: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$ hay $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

Kí hiệu $\Delta = b^2 - 4ac$ và gọi là biệt thức của phương trình (Δ đọc là "đenta").

Khi đó, ta có thể viết lại phương trình cuối dưới dạng $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$.

Từ đây, ta có kết quả sau:

Xét phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$.

Tính biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 5. Cho phương trình $3x^2 + 7x - 1 = 0$.

a) Xác định các hệ số a, b, c .

b) Tính biệt thức Δ .

c) Áp dụng công thức nghiệm, giải phương trình đã cho.

Lời giải

a) Ta có: $a = 3, b = 7, c = -1$.

b) Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 49 + 12 = 61$.

c) Do $\Delta > 0$, áp dụng công thức nghiệm, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-7 + \sqrt{61}}{6}, x_2 = \frac{-7 - \sqrt{61}}{6}.$$

Ví dụ 6. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$;

b) $2x^2 + 3x + 5 = 0$.

Lời giải

a) Ta có: $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$. Do đó, phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3$

b) Ta có: $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9 - 40 = -31 < 0$. Do đó, phương trình vô nghiệm.

Chú ý. Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, với $b = 2b'$ và $\Delta' = b'^2 - ac$.

- Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$

- Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$.

- Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Các công thức ở trên gọi là công thức nghiệm thu gọn.

Ví dụ 7. Xác định a, b', c rồi dùng công thức nghiệm thu gọn giải các phương trình sau:

a) $2x^2 + 6x + 1 = 0$;

b) $x^2 - 4\sqrt{3}x + 12 = 0$.

Lời giải

a) Ta có: $a = 2, b' = 3, c = 1$ và $\Delta' = 3^2 - 2 \cdot 1 = 7 > 0$.

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{7}}{2}; x_2 = \frac{-3 - \sqrt{7}}{2}$.

b) Ta có: $a = 1, b' = -2\sqrt{3}, c = 12$ và $\Delta' = (-2\sqrt{3})^2 - 1 \cdot 12 = 0$. Do đó, phương trình có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = 2\sqrt{3}$$

4. TÌM NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI BẰNG MÁY TÍNH CẦM TAY

Sử dụng máy tính cầm tay, ta có thể dễ dàng tìm nghiệm của các phương trình bậc hai một ẩn.

Ví dụ 8. Sử dụng máy tính cầm tay, tìm nghiệm của các phương trình sau:

a) $2x^2 - 5x - 4 = 0$;

b) $9x^2 - 12x + 4 = 0$;

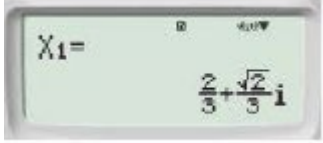
c) $-3x^2 + 4x - 2 = 0$

Lời giải

Với một loại máy tính cầm tay, sau khi mở máy ta bấm phím    để chuyển về chế độ giải phương trình bậc hai.

Tiếp theo, với từng phương trình ta thực hiện như sau:

Tìm nghiệm của phương trình	Bấm phím	Màn hình hiện	Kết luận
$2x^2 - 5x - 4 = 0$		 Bấm tiếp phím  	Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{5 + \sqrt{57}}{4}$, $x_2 = \frac{5 - \sqrt{57}}{4}$
$9x^2 - 12x + 4 = 0$			Phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{2}{3}$

$-3x^2 + 4x - 2 = 0$		 Bấm tiếp phím  	Phương trình vô nghiệm
----------------------	---	--	------------------------

Chú ý. Để hiển thị kết quả xấp xỉ ở dạng số thập phân sau khi nhận kết quả ta bấm phím 

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

6.8. Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2 + bx + c = 0$ và xác định các hệ số a, b, c của phương trình đó.

a) $3x^2 + 2x - 1 = x^2 - x$

b) $(2x + 1)^2 = x^2 + 1$.

6.9. Giải các phương trình sau:

a) $2x^2 + \frac{1}{3}x = 0$;

b) $(3x + 2)^2 = 5$.

6.10. Không cần giải phương trình, hãy xác định các hệ số a, b, c , tính biệt thức Δ và xác định số nghiệm của mỗi phương trình sau:

a) $11x^2 + 13x - 1 = 0$;

b) $9x^2 + 42x + 49 = 0$;

c) $x^2 - 2x + 3 = 0$.

6.11. Dùng công thức nghiệm của phương trình bậc hai, giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 2\sqrt{5} + 2 = 0$;

b) $4x^2 + 28x + 49 = 0$

c) $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1 = 0$.

6.12. Sử dụng máy tính cầm tay, tìm nghiệm của các phương trình sau:

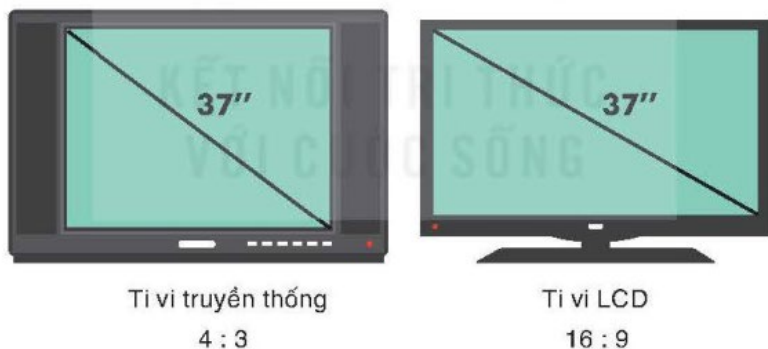
a) $0,1x^2 + 2,5x - 0,2 = 0$;

b) $0,01x^2 - 0,05x + 0,0625 = 0$;

c) $1,2x^2 + 0,75x + 2,5 = 0$

6.13. Độ cao h (mét) so với mặt đất của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu $v_0 = 19,6 \text{ m/s}$ cho bởi công thức $h = 19,6t - 4,9t^2$, ở đó t là thời gian kể từ khi phóng (giây) (theo Vật lý/ đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016). Hỏi sau bao lâu kể từ khi phóng, vật sẽ rơi trở lại mặt đất?

6.14. Kích thước màn hình ti vi hình chữ nhật được xác định bằng độ dài đường chéo. Ti vi truyền thống có định dạng 4:3, nghĩa là tỉ lệ giữa chiều dài và chiều rộng của màn hình là 4:3. Hỏi diện tích của màn hình ti vi truyền thống 37 in là bao nhiêu? Diện tích của màn hình ti vi LCD 37 in có định dạng 16:9 là bao nhiêu? Màn hình ti vi nào có diện tích lớn hơn? Ở đây, các diện tích của màn hình được tính bằng inch vuông.



6.15. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều rộng ngắn hơn chiều dài 6 m và có diện tích là 140m^2 . Tính các kích thước của mảnh vườn đó.

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định các hệ số a, b, c của phương trình bậc hai

1. Phương pháp giải

- Khai triển rồi đưa các số hạng về vế trái, vế phải bằng 0.
- Xác định các hệ số a, b, c của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Đưa các phương, trình sau về dạng $ax^2 + bx + c = 0$ chỉ rõ các hệ số a, b, c

a) $5x^2 + 2x = 4 - x$;

b) $\frac{3}{5}x^2 + 2x - 7 = 3x + \frac{1}{2}$.

c) $2x^2 + x - \sqrt{3} = \sqrt{3}x + 1$

d) $2x^2 - 2(m-1)x + m^2 = 0$, m là một hằng số

Dạng 2. Giải phương trình bậc hai dạng đặc biệt

1. Phương pháp giải

- Nếu $A \cdot B = 0$ thì $A = 0$ hoặc $B = 0$.
- Nếu $A^2 = B (B \geq 0)$ thì $A = \sqrt{B}$ hoặc $A = -\sqrt{B}$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau :

a) $x^2 - 8 = 0$;

b) $5x^2 - 20 = 0$;

c) $0,4x^2 + 1 = 0$;

d) $2x^2 + \sqrt{2}x = 0$

e) $-0,4x^2 + 1,2x = 0$

Ví dụ 2. Cho các phương trình :

$$a) x^2 + 8x = -2 \qquad b) x^2 + 2x = \frac{1}{3}$$

Hãy cộng vào hai vế của mỗi phương trình cùng một số thích hợp để được một phương trình mà vế trái thành một bình phương.

Ví dụ 3. Giải phương trình : $2x^2 + 5x + 2 = 0$

Dạng 3. Xác định số nghiệm của phương trình bậc hai

1. Phương pháp giải

- Xác định a, b, c của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)
- Tính biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ (hay $\Delta' = b'^2 - ac$)
- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có một nghiệm (nghiệm kép).
- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Không giải phương trình, hãy xác định các hệ số a, b, c , tính biệt thức Δ và xác định số nghiệm của mỗi phương trình sau :

$$\begin{array}{ll} a) 7x^2 - 2x + 3 = 0; & b) 5x^2 + 2\sqrt{10}x + 2 = 0 \\ c) \frac{1}{2}x^2 + 7x + \frac{2}{3} = 0 & d) 1,7x^2 - 1,2x - 2,1 = 0 \end{array}$$

Ví dụ 2. Không giải phương trình, hãy cho biết mỗi phương trình sau có bao nhiêu nghiệm:

$$a) 15x^2 + 4x - 2005 = 0; \qquad b) \frac{-19}{5}x^2 - \sqrt{7}x + 1890 = 0;$$

Dạng 4. Giải phương trình bậc hai

1. Phương pháp giải

- Xác định các hệ số a, b, c của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.
- Tính Δ (hoặc Δ').
- Áp dụng công thức nghiệm hoặc công thức nghiệm thu gọn của phương trình bậc hai.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Dùng công thức nghiệm của phương trình bậc hai để giải các phương trình sau:

$$\begin{array}{ll} a) 2x^2 - 7x + 3 = 0; & b) 6x^2 + x + 5 = 0; \\ c) 6x^2 + x - 5 = 0; & d) 3x^2 + 5x + 2 = 0; \\ e) y^2 - 8y + 16 = 0; & f) 16z^2 + 24z + 9 = 0. \end{array}$$

Ví dụ 2. Xác định a, b, c rồi dùng công thức nghiệm thu gọn giải các phương trình

- a) $4x^2 + 4x + 1 = 0$; b) $1385x^2 - 14x + 1 = 0$;
c) $5x^2 - 6x + 1 = 0$; d) $-3x^2 + 4\sqrt{6}x + 4 = 0$.

Ví dụ 3. Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2 + bx + c = 0$ rồi dùng công thức nghiệm thu gọn để tìm giá trị gần đúng (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai) nghiệm của các phương trình:

- a) $3x^2 - 2x = x^2 + 3$; b) $(2x - \sqrt{2})^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$;
c) $3x^2 + 3 = 2(x + 1)$; d) $0,5x(x + 1) = (x - 1)^2$.

Ví dụ 4. Giải các phương trình :

- a) $25x^2 - 16 = 0$; b) $2x^2 + 3 = 0$;
c) $4,2x^2 + 5,46x = 0$; d) $4x^2 - 2\sqrt{3}x = 1 - \sqrt{3}$.

Ví dụ 5. Giải phương trình

- a) $x^2 = 12x + 228$; b) $\frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{12} = 19$.

Dạng 3: Các bài toán có liên quan đến phương trình bậc hai

Ví dụ 1. Radar của một máy bay trực thăng theo dõi chuyển động của một ô tô trong 10 phút, phát hiện rằng vận tốc v của ô tô thay đổi phụ thuộc vào thời gian bởi công thức :

$$v = 3t^2 - 30t + 135$$

(t tính bằng phút, v tính bằng km/h).

- a) Tính vận tốc của ô tô khi $t = 5$ phút.
b) Tính giá trị của t khi vận tốc ô tô bằng 120 km/h (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Ví dụ 2. Cho phương trình (ẩn x) $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 = 0$

- a) Tính Δ'
b) Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt? Có nghiệm kép? Vô nghiệm.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Viết các phương trình sau dưới dạng: $ax^2 + bx + c = 0$ rồi xác định các hệ số a, b, c .

- a) $x^2 + 4x^2 = 4 - m^2$
b) $x^2 + p(x - 1) = 1 - p$
c) $x^2\sqrt{2} + x - 2 = -x\sqrt{2}$

Câu 2: Giải các phương trình:

- a) $4x^2 - 9 = 0$ b) $2x^2 + 5 = 0$ c) $3x^2 - 6x = 0$

Câu 3: Giải các phương trình sau

a) $4x^2 - 9 = 0$.

b) $-2x^2 + 50 = 0$.

c) $3x^2 + 11 = 0$.

Câu 4: Giải các phương trình sau

a) $x(x-2) + 4x - 8 = 0$.

b) $x^2 - 4x + 2 = 0$.

c) $2x^2 + 5x = 1$.

Câu 5: Giải các phương trình sau bằng cách đưa về dạng tích hoặc dạng $a(x+m)^2 = n$

a) $x^2 - 4x - 12 = 0$

b) $4x^2 - 4x - 3 = 0$

c) $x^2 - x - 2 = 0$

d) $x^2 - 3x - 10 = 0$

Câu 6: Giải các phương trình sau bằng cách áp dụng $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b$

a) $x^2 + 2x + 1 - 4(x^2 - 2x + 1) = 0$

b) $2x^2 - 3(2x - 3)^2 = 0$

c) $9(x-2)^2 - 4(x-1)^2 = 0$

d) $x^2 - 6x + 7 = 0$

Câu 7: Giải phương trình sau:

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$

b) $x^2 + 6x - 16 = 0$

c) $2x^2 - 6x + 1 = 0$

d) $x^2 - 6x + 7 = 0$

Câu 8: Xác định hệ số c trong phương trình $x^2 - 6x + c = 0$ để phương trình có một nghiệm là 5. Giải phương trình đó.

Câu 9: Giải các phương trình sau:

b) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 16 = 0$ b) $0,4x^2 - 7x + 30 = 0$

Câu 10: Giải các phương trình sau:

a) $3x^2 - 5x - 8 = 0$;

b) $5x^2 - \frac{10}{7}x + \frac{5}{49} = 0$;

c) $5x^2 - 3x + 15 = 0$;

d) $x^2 - 4x + 1 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) $x_1 = \frac{8}{3}; x_2 = -1$

b) $x_1 = x_2 = \frac{1}{7}$

c) Vô nghiệm

d) $x = 2 \pm \sqrt{3}$.

Câu 11: Giải các phương trình sau:

a) $3x^2 + 7x + 2 = 0$;

b) $\frac{x^2}{3} + \frac{4x}{5} - \frac{1}{12} = 0$;

c) $(5 - \sqrt{2})x^2 - 10x + 5 + \sqrt{2} = 0$;

d) $(x-1)(x+2) = 70$.

Câu 12: Giải các phương trình sau:

a) $(2 - \sqrt{5})x^2 - x + (\sqrt{5} - 1) = 0$

b) $0,4x^2 - 7x + 30 = 0$

Câu 13: Với giá trị nào của m thì phương trình sau có nghiệm:

$9x^2 - 6mx + m(m - 2) = 0$.

Câu 14: Tìm m để phương trình sau có nghiệm kép. Tính nghiệm kép đó:

a) $2x^2 - 10x + m - 1 = 0$

b) $5x^2 - 12x + m - 3 = 0$

Câu 15: Xác định m để phương trình sau vô nghiệm

a) $3x^2 - 4x + 2m = 0$

b) $m^2x^2 + mx + 5 = 0$

Câu 16: Cho phương trình $mx^2 - (2m + 1)x + (m + 1) = 0$ (m là tham số) (1)

1. Giải phương trình (1) với $m = -\frac{3}{5}$.

2. Chứng minh rằng phương trình (1) luôn luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .

3. Tìm giá trị của m để phương trình (1) có một nghiệm lớn hơn 2.

Câu 17: Chứng minh rằng phương trình $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$ luôn có nghiệm với mọi a, b, c

Câu 18: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác, chứng minh phương trình sau vô nghiệm:

$b^2x^2 - (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$.

LUYỆN TẬP CHUNG

A. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hai hàm số: $y = \frac{3}{2}x^2$ và $y = -x^2$.

- a) Vẽ đồ thị của hai hàm số này trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- b) Tìm điểm A thuộc đồ thị $y = \frac{3}{2}x^2$, điểm B thuộc đồ thị $y = -x^2$, biết rằng A và B đều có hoành độ $x = -\frac{3}{2}$.

Ví dụ 2. Giả sử số lượng cá trong một hồ nào đó tăng, giảm theo công thức:

$$P = 50(100 + 15t - t^2), 0 \leq t \leq 15.$$

Ở đây P là số lượng cá trong hồ sau t năm tính từ ngày 01 tháng 01 năm 2020, khi lần đầu tiên số lượng cá trong hồ được ước tính. Hỏi theo mô hình này, thì:

- a) Vào thời điểm nào, số lượng cá trong hồ sẽ là 7500 con?
- b) Vào thời điểm nào, số lượng cá trong hồ sẽ trở lại như tại thời điểm ban đầu vào ngày 01 tháng 01 năm 2020?

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

6.16. Biết rằng parabol $y = ax^2$ ($a \neq 0$) đi qua điểm $A(2; 4\sqrt{3})$.

- a) Tìm hệ số a và vẽ đồ thị của hàm số $y = ax^2$ với a vừa tìm được.
- b) Tìm tung độ của điểm thuộc parabol có hoành độ $x = -1$.
- c) Tìm các điểm thuộc parabol có tung độ $y = 5\sqrt{3}$.

6.17. Công thức $E = \frac{1}{2}mv^2$ (J) được dùng để tính động năng của một vật có khối lượng m (kg) khi chuyển động với vận tốc v (m/s) (theo Vật lý đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).

- a) Giả sử một quả bóng có khối lượng 2 kg đang bay với vận tốc 6 m/s. Tính động năng của quả bóng đó.
- b) Giả sử động năng của quả bóng đang bay có khối lượng 1,5 kg là 48 J, hãy tính vận tốc bay của quả bóng đó.

6.18. Chiều dài l (mét) của một con lắc đơn tỉ lệ thuận với bình phương chu kỳ T (giây) của nó (chu kỳ là thời gian để thực hiện một dao động). Con lắc đơn có chiều dài 223,4cm thì có chu kỳ 3 giây.

- a) Tìm công thức liên hệ giữa l và T .
- b) Tìm chiều dài của con lắc có chu kỳ 5 giây.
- c) Chu kỳ của con lắc có chiều dài 0,98m là bao nhiêu?

(Trong tất cả các câu trên, kết quả được tính chính xác đến hàng phần mười).

6.19. Sử dụng công thức nghiệm hoặc công thức nghiệm thu gọn, giải các phương trình sau:

- a) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0$ b) $3x^2 - 9x + 3 = 0$;
c) $11x^2 - 13x + 5 = 0$; d) $2x^2 + 2\sqrt{6}x + 3 = 0$.

6.20. Sử dụng máy tính cầm tay, tìm nghiệm gần đúng của các phương trình sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai):

- a) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$;
b) $x^2 - (\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{7} = 0$.

6.21. Từ một tấm tôn hình vuông, người ta cắt bỏ bốn hình vuông có độ dài cạnh 8 cm ở bốn góc, sau đó gấp thành một chiếc thùng có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp và có thể tích là 200cm^3 . Tính độ dài cạnh của tấm tôn hình vuông ban đầu.

6.22. Giả sử doanh thu (nghìn đồng) của một cửa hàng bán phở trong một ngày có thể mô hình hoá bằng công thức $R(x) = x(220 - 4x)$ với $30 \leq x \leq 50$, trong đó x (nghìn đồng) là giá tiền của một bát phở. Nếu muốn doanh thu của cửa hàng đạt 3 triệu đồng thì giá bán của mỗi bát phở phải là bao nhiêu?

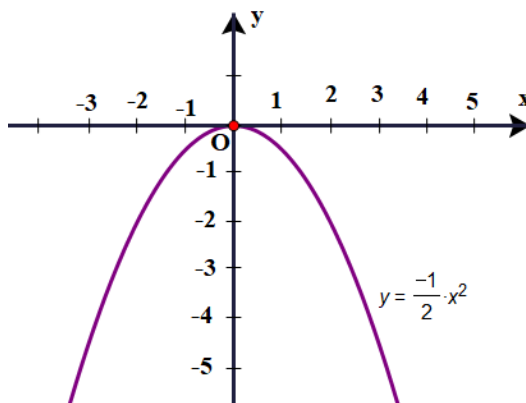
C. BÀI TẬP THÊM

Câu 1: Lực $F(\text{N})$ của gió khi thổi vuông góc vào cánh buồm tỉ lệ thuận với bình phương tốc độ $v(\text{m/s})$ của gió theo công thức: $F = av^2$, ở đó a là một hằng số. Biết rằng, khi tốc độ gió là 2m/s thì lực tác động lên cánh buồm của con thuyền bằng 120N .

- a) Tính hằng số a .
b) Khi tốc độ của gió là $v = 10\text{m/s}$ thì lực F của gió tác động lên cánh buồm là bao nhiêu?
c) Cánh buồm của thuyền chỉ chịu được lực tác động tối đa là 12000N . Hỏi con thuyền có thể ra khơi khi tốc độ của gió là 90km/h hay không? Vì sao?

Câu 2: Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ có đồ thị là parabol như hình vẽ bên.

- a) Các điểm $M(-2; -2)$; $N(2; -2)$ có thuộc parabol đó hay không?
b) Nêu nhận xét về vị trí cặp điểm M và N đối với trục Oy .



Câu 3: Cho hai hàm số $y = \frac{3}{2}x^2$ và $y = -x^2$.

- a) Vẽ đồ thị của hai hàm số này cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Tìm điểm A thuộc đồ thị $y = \frac{3}{2}x^2$, điểm B thuộc đồ thị $y = -x^2$, biết rằng A và B đều có hoành độ $y = -\frac{3}{2}$.

Câu 4: Một cổng chào được thiết kế theo hình parabol là một phần của đồ thị hàm số $y = -\frac{x^2}{2}$. Khoảng cách giữa hai chân cổng là $AB = 8\text{ m}$.
a) Tính hoành độ của hai điểm A, B.

b) Tính chiều cao của cổng.

Câu 5:

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2x$ trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy .

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Hướng dẫn: a) Vẽ parabol $y = x^2$ bằng các lập bảng giá trị (ta phải tìm ít nhất 5 giá trị).

b) Lập phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d).

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng (d) $y = \frac{1}{2}x + 2$

a) Vẽ (P) và (d) trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

c) Tìm phương trình đường thẳng (d') song song với (d) và cắt (P) tại điểm A có hoành độ bằng 2.

Câu 7: Giải các phương trình:

a) $5x^2 - 7x - 6 = 0$

b) $x^2 + 2x - 1 = 0$

c) $2x^2 + 5x + 1 = 0$

d) $2x^2 - (2\sqrt{6} + 3)x + 3\sqrt{6} = 0$.

Câu 8: Giải và biện luận phương trình (x là ẩn, m là tham số) sau:

$$x^2 - 2(m+3)x + (m^2 - 5) = 0 \quad (1)$$

1. Giải phương trình với $m = 2$.

2. Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm, nghiệm kép, vô nghiệm?

3. Tính hiệu của nghiệm lớn và nghiệm nhỏ trong trường hợp phương trình có hai nghiệm.

Câu 9: Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt: $x^2 + 2x + m - 2 = 0$

Hướng dẫn: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$

Câu 10: Tìm m để phương trình $x^2 + (2m+1)x + m^2 = 0$ có nghiệm kép và tính nghiệm kép với m vừa tìm được.

Hướng dẫn: Xem bài toán 17.

Câu 11: Chứng minh rằng phương trình $2x^2 + (2m-1)x + m-1 = 0$ luôn luôn có nghiệm với mọi m .

Hướng dẫn: Chứng tỏ $\Delta \geq 0, \forall m$.

BÀI 20. ĐỊNH LÝ VI-ET VÀ ỨNG DỤNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. ĐỊNH LÝ VIÈTE

Ta có định lý Viète như sau:

Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ thì
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Ví dụ 1. Không giải phương trình, hãy tính biệt thức Δ (hoặc Δ') để kiểm tra điều kiện có nghiệm, rồi tính tổng và tích các nghiệm của các phương trình bậc hai sau:

a) $2x^2 + 11x + 7 = 0$;

b) $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

Lời giải

a) Ta có: $\Delta = 11^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 65 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Theo định lý Viète, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{11}{2}$; $x_1 x_2 = \frac{7}{2}$

b) Ta có: $\Delta' = 6^2 - 4 \cdot 9 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm trùng nhau x_1, x_2 .

Theo định lý Viète, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{-12}{4} = 3$; $x_1 x_2 = \frac{9}{4}$.

2. ỨNG DỤNG ĐỊNH LÝ VIÈTE ĐỂ TÍNH NHẨM NGHIỆM

Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$.

- Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

- Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Ví dụ 2. Bằng cách nhẩm nghiệm, hãy giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$;

b) $5x^2 + 14x + 9 = 0$.

Lời giải

a) Ta có: $a + b + c = 1 + (-6) + 5 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 1, x_2 = 5$.

b) Ta có: $a - b + c = 5 - 14 + 9 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm: $x_1 = -1, x_2 = -\frac{9}{5}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $x^2 - 7x + 12 = 0$, biết phương trình có một nghiệm là $x_1 = 3$.

Lời giải

Gọi x_2 là nghiệm còn lại của phương trình. Theo định lý Viète, ta có: $x_1 x_2 = 12$.

Do đó, $x_2 = \frac{12}{x_1} = \frac{12}{3} = 4$.

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 3, x_2 = 4$.

3. TÌM HAI SỐ KHI BIẾT TỔNG VÀ TÍCH CỦA CHÚNG

Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình bậc hai:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$.

Ví dụ 4: Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 9, tích của chúng bằng 20.

Lời giải

Hai số cần tìm là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 9x + 20 = 0$.

Ta có: $\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 1; \sqrt{\Delta} = 1$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm: $x_1 = \frac{9-1}{2} = 4; x_2 = \frac{9+1}{2} = 5$.

Vậy hai số cần tìm là 4 và 5.

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

6.23. Không giải phương trình, hãy tính tổng và tích các nghiệm (nếu có) của các phương trình sau:

a) $x^2 - 12x + 8 = 0$;

b) $2x^2 + 11x - 5 = 0$;

c) $3x^2 - 10 = 0$;

d) $x^2 - x + 3 = 0$.

6.24. Tính nhẩm nghiệm của các phương trình sau:

a) $2x^2 - 9x + 7 = 0$;

b) $3x^2 + 11x + 8 = 0$;

c) $7x^2 - 15x + 2 = 0$, biết phương trình có một nghiệm $x_1 = 2$.

6.25. Tìm hai số u và v , biết:

a) $u + v = 20, uv = 99$;

b) $u + v = 2, uv = 15$.

6.26. Chứng tỏ rằng nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm là x_1 và x_2 thì đa thức $ax^2 + bx + c$ phân tích được thành nhân tử như sau: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Áp dụng: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 + 11x + 18$

b) $3x^2 + 5x - 2$.

6.27. Một bể bơi hình chữ nhật có diện tích 500m^2 và chu vi là 150 m. Tính các kích thước của bể bơi này.

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Không giải phương trình, tính tổng và tích các nghiệm số

1. Phương pháp giải

☐ Tính Δ và chứng tỏ $\Delta \geq 0$ để phương trình có nghiệm.

☐ Áp dụng định lý Vi-ét:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Đối với mỗi phương trình sau, kí hiệu x_1 và x_2 là hai nghiệm (nếu có).

Không giải phương trình, hãy điền vào những chỗ trống (...):

a) $2x^2 - 17x + 1 = 0$; $\Delta = \dots$; $x_1 + x_2 = \dots$; $x_1 \cdot x_2 = \dots$;

b) $5x^2 - x - 35 = 0$; $\Delta = \dots$; $x_1 + x_2 = \dots$; $x_1 \cdot x_2 = \dots$;

c) $8x^2 - x + 1 = 0$; $\Delta = \dots$; $x_1 + x_2 = \dots$; $x_1 \cdot x_2 = \dots$;

d) $25x^2 + 10x + 1 = 0$; $\Delta = \dots$; $x_1 + x_2 = \dots$; $x_1 \cdot x_2 = \dots$.

Ví dụ 2. Không giải phương trình, hãy tính tổng và tích các nghiệm (nếu có) của mỗi phương trình sau:

a) $4x^2 + 2x - 5 = 0$;

b) $9x^2 - 12x + 4 = 0$;

c) $5x^2 + x + 2 = 0$;

d) $159x^2 - 2x - 1 = 0$.

Ví dụ 3. Tìm giá trị của m để phương trình có nghiệm, rồi tính tổng và tích các nghiệm theo m .

a) $x^2 - 2x + m = 0$;

b) $x^2 + 2(m - 1)x + m^2 = 0$.

Dạng 2. Giải phương trình bằng cách nhẩm nghiệm

1. Phương pháp giải

☐ Áp dụng định lý Vi-ét:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

☐ Nhẩm: $S = x_1 + x_2 = m + n$; $P = x_1 \cdot x_2 = m \cdot n$. thì phương trình có nghiệm $x_1 = m$; $x_2 = n$.

☐ Nếu $a + b + c = 0$ thì $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{c}{a}$.

☐ Nếu $a - b + c = 0$ thì $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{c}{a}$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Dùng điều kiện $a + b + c = 0$ hoặc $a - b + c = 0$ để tính nhẩm nghiệm của mỗi phương trình sau:

a) $35x^2 - 37x + 2 = 0$;

b) $7x^2 + 500x - 507 = 0$;

c) $x^2 - 49x - 50 = 0$;

d) $4321x^2 + 21x - 4300 = 0$

Ví dụ 2. Dùng hệ thức Vi-ét để tính nhẩm các nghiệm của phương trình.

$$a) x^2 - 7x + 12 = 0 \quad b) x^2 + 7x + 12 = 0.$$

Ví dụ 3. Tính nhẩm nghiệm của các phương trình:

$$\begin{aligned} a) \quad & 1,5x^2 - 1,6x + 0,1 = 0 & b) \quad & \sqrt{3}x^2 - (1 - \sqrt{3})x - 1 = 0 \\ c) \quad & (2 - \sqrt{3})x^2 + 2\sqrt{3}x - (2 + \sqrt{3}) = 0; & d) \quad & (m - 1)x^2 - (2m + 3)x + m + 4 = 0 \text{ với } m \neq 1. \end{aligned}$$

Dạng 3. Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng.

1. Phương pháp giải

- ☐ Từ hệ thức cho trước của x, y tìm tổng $S = x + y$, tích $P = x \cdot y$.
- ☐ x, y là hai nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau:

$$\begin{aligned} a) \quad & u + v = 32, u \cdot v = 231; \\ b) \quad & u + v = -8; u \cdot v = -105; \\ c) \quad & u + v = 2; u \cdot v = 9. \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau:

$$\begin{aligned} a) \quad & u + v = 42, \quad u \cdot v = 441 \\ b) \quad & u + v = -42; \quad u \cdot v = -400 \\ c) \quad & u - v = 5; \quad u \cdot v = 24 \end{aligned}$$

Dạng 4. Phân tích $ax^2 + bx + c$ thành nhân tử

1. Phương pháp giải

Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thì $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử.

$$a) \quad 2x^2 - 5x + 3; \quad b) \quad 3x^2 + 8x + 2.$$

Ví dụ 2. Rút gọn phân thức: $P = \frac{x^2 - 9x + 8}{2x^2 - 3x + 1}$

Ví dụ 3. Rút gọn phân thức: $P = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 5\sqrt{x} + 6}$

Dạng 5. Lập phương trình bậc hai khi biết hai nghiệm của nó

1. Phương pháp giải

- ☐ Tính tổng hai nghiệm $S = x_1 + x_2$ và tích hai nghiệm $P = x_1 \cdot x_2$.
- ☐ Phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ là $X^2 - SX + P = 0$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Lập phương trình bậc hai có các nghiệm là cặp số sau:

a) 7 và 3 ;

b) $1+\sqrt{2}$ và $1-\sqrt{2}$.

Ví dụ 2.

a) Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{1}{10-\sqrt{72}}$ và $\frac{1}{10+6\sqrt{2}}$.

b) Lập phương trình bậc hai có hệ số nguyên và có một nghiệm là $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

Dạng 6. Dấu nghiệm của phương trình bậc hai

1. Phương pháp giải

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$

* Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0$.

* Phương trình có hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$

* Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

* Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m + 1 = 0$ (1)

Định m để phương trình:

a) Có hai nghiệm trái dấu;

b) Có hai nghiệm dương phân biệt

c) Có đúng một nghiệm dương.

Ví dụ 2. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm trái dấu: $x^2 + 4x + m = 0$

Ví dụ 3. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt dương: $x^2 - 2x + m = 0$

Ví dụ 4. Tìm m để phương trình $x^2 - 3x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ và thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2$.

Dạng 7. Biểu thức đối xứng giữa các nghiệm x_1, x_2 của phương trình bậc hai

1. Phương pháp giải

* Biểu thức x_1, x_2 gọi là đối xứng nếu ta thay x_1 bởi x_2 và x_2 bởi x_1 thì biểu thức không đổi.

* Biểu diễn biểu thức đối xứng qua S và P (tổng và tích các nghiệm số)

Chẳng hạn

Ví dụ 1: Xác định m để phương trình $x^2 + 2x + m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa: $3x_1 + 2x_2 = 1$.

Ví dụ 2. Cho phương trình $x^2 - 4x - m^2 - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $x_2 = -5x_1$.

Ví dụ 3. Cho phương trình $x^2 - 2(k-1)x - 4k = 0$. Tìm k để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $3x_1 - x_2 = 2$.

Ví dụ 4. Cho phương trình $x^2 - 6x + m + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $x_2 = x_1^2$.

Ví dụ 5. Tìm tham số m để phương trình $x^2 - 5x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2 = 1$.

Dạng 9. Tìm hệ thức giữa các nghiệm x_1, x_2 của phương trình bậc hai không phụ thuộc tham số

1. Phương pháp giải

- Điều kiện để phương trình bậc hai có nghiệm: $\Delta \geq 0$;
- Từ hệ thức Vi-ét tìm S, P theo tham số m ;
- Khử tham số m từ S, P để có hệ thức giữa S, P (tức là hệ thức giữa x_1, x_2) Không phụ thuộc tham số m .

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x - m - 3 = 0$ (1)

1. Giải phương trình với $m = -3$.
2. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào giá trị của m .

Ví dụ 2. Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 1 = 0$

Tìm hệ thức giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m .

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Dùng định lí Vi-ét để nhẩm nghiệm các phương trình sau:

- a) $x^2 - 10x + 16 = 0$; d) $x^2 - 7x + 10 = 0$;
b) $x^2 - 15x + 50 = 0$; e) $x^2 - 3x - 4 = 0$;
c) $x^2 - 6x + 5 = 0$; g) $x^2 - x - 20 = 0$;

Câu 2: Dùng điều kiện $a + b + c = 0$ hoặc $a - b + c = 0$ để tính nhẩm nghiệm của mỗi phương trình sau:

a) $(m+1)x^2 + 3mx + 2m - 1 = 0$ ($m \neq -1$).

b) $(2m-1)x^2 - mx - m - 1 = 0$ $\left(m \neq \frac{1}{2}\right)$.

Câu 3: Lập các phương trình bậc hai có nghiệm là các cặp số sau:

- a) 10 và 8; b) 10 và -8; c) 3 và $\frac{1}{4}$;

d) $-\frac{3}{4}$ và $-\frac{2}{3}$; e) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ và $\sqrt{2} - \sqrt{3}$;

Câu 4: Tìm hai số a, b biết tổng $S = a + b = -3$ và tích $P = ab = -4$.

Câu 5: Cho phương trình $x^2 - 5x + 2 = 0$. Không giải phương trình, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Hãy tính giá trị của biểu thức

a) $A = x_1^2 + x_2^2$. b) $B = |x_1 - x_2|$.
c) $C = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$. d) $D = \frac{x_1}{\sqrt{x_2}} + \frac{x_2}{\sqrt{x_1}}$.

Câu 6: Tìm hai số x và y biết

a) $x + y = 18$ và $xy = 77$.
b) $x + y = -3$ và $xy = 5$.
c) $x - y = 2\sqrt{3}$ và $xy = 1$.
d) $x^2 + y^2 = 34$ và $xy = -15$.

Câu 7: Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 4m - 1 = 0$ (1), với m là tham số.

1. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$.
2. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc vào tham số m .

Câu 8: Phương trình $3x^2 + 7x + m = 0$ có một trong các nghiệm bằng 1. Xác định số m và tìm nghiệm còn lại.

Câu 9: a) Phương trình $0,1x^2 - x + k = 0$ có một trong các nghiệm bằng -1 . Xác định số k và tìm nghiệm còn lại.
b) Phương trình $15x^2 + bx - 1 = 0$ có một trong các nghiệm bằng $\frac{1}{3}$. Xác định số b và tìm nghiệm còn lại.

Câu 10: Cho phương trình: $x^2 + (m+1)x + m = 0$ (1)

- a) Chứng minh phương trình (1) luôn có nghiệm. Tìm nghiệm của (1);
- b) Tìm m để $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất nếu x_1, x_2 là các nghiệm của (1).

Câu 11: Cho phương trình $2x^2 + (2m-1)x + m - 1 = 0$.

- a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa điều kiện $3x_1 - 4x_2 = 11$;
- b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm đều âm;
- c) Tìm một hệ thức giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m .

Câu 12: Xác định K để phương trình sau có nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 = 2x_2$.

a) $x^2 + 6x + K = 0$; b) $x^2 + Kx + 8 = 0$.

- Câu 13:** Xác định K để phương trình $x^2 + 2x + K = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa một trong các điều kiện sau:
- a) $x_1^2 - x_2^2 = 12$; b) $x_1^2 + x_2^2 = 1$.
- Câu 14:** Giả sử x_1, x_2 là nghiệm phương trình: $x^2 - (m-3)x + 2m+1 = 0$. Tìm hệ thức giữa x_1, x_2 không phụ thuộc m .
- Câu 15:** Cho phương trình : $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0$.
- a) Định m để phương trình có hai nghiệm trái dấu;
- b) Định m để phương trình có đúng một nghiệm âm;
- c) Định m để phương trình có một nghiệm bằng 0. Tìm nghiệm còn lại;
- d) Tìm hệ thức giữa các nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc m ;
- e) Định m để phương trình có hai nghiệm thỏa: $x_1^2 + x_2^2 = 8$.
- Câu 16:** Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ (m là tham số).
- a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.
- b) Tìm một hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình đã cho mà không phụ thuộc vào m .
- c) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x_1^2 + x_2^2$ (với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình đã cho)
- Câu 17:** Cho phương trình $x^2 - (2m-1)x + m^2 - 1 = 0$ (x là ẩn số)
- a) Tìm điều kiện của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.
- b) Định m để hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình đã cho thỏa mãn: $(x_1 - x_2)^2 = x_1 - 3x_2$.
- Câu 18:** Cho phương trình $x^2 - 10mx + 9m = 0$ (m là tham số)
- a) Giải phương trình đã cho với $m = 1$.
- b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa điều kiện $x_1 - 9x_2 = 0$
- Câu 19:** Cho phương trình $2x^2 + (2m-1)x + m - 1 = 0$ (m là tham số). Không giải phương trình, tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $3x_1 - 4x_2 = 11$
- Câu 20:** Cho phương trình $x^2 - (2m+2)x + 2m = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \leq \sqrt{2}$
- Câu 21:** Cho phương trình $x^2 + 2mx + 2m - 1 = 0$ (m là tham số). Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho. Tìm giá trị của m để $A = x_1^2x_2 + x_1x_2^2$ đạt giá trị lớn nhất.
- Câu 22:** Cho phương trình $x^2 + 4x + m + 3 = 0$ (x là ẩn)
- a) Tìm m để phương trình có nghiệm x_1, x_2
- b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2^2 = 51$

BÀI 21. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Nhận xét. Các bước giải một bài toán bằng cách lập phương trình:

Bước 1. Lập phương trình:

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải phương trình.

Bước 3. Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

Ví dụ 1: Một sân bóng đá 7 người có chiều rộng nhỏ hơn chiều dài 30 m và có diện tích bằng 1800 m^2 . Tính chiều dài và chiều rộng của sân bóng đó.

Lời giải

Gọi $x(\text{m})$ là chiều rộng của sân bóng. Điều kiện: $x > 0$.

Khi đó, chiều dài của sân bóng là $x + 30(\text{m})$.

Theo đề bài, ta có phương trình: $x(x + 30) = 1800$ hay $x^2 + 30x - 1800 = 0$.

Ta có: $\Delta' = 15^2 + 1800 = 2025, \sqrt{\Delta'} = 45$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-15 - 45}{1} = -60 \text{ (loại); } x_2 = \frac{-15 + 45}{1} = 30 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy sân bóng có chiều dài 60 m và chiều rộng 30 m.

Ví dụ 2: Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 36 km. Một tàu du lịch đi từ bến A đến bến B, nghỉ 30 phút ở bến B rồi quay lại bến A. Thời gian kể từ lúc khởi hành đến khi về đến bến A là 5,5 giờ. Hãy tìm vận tốc thực của tàu du lịch (tức là vận tốc của tàu khi nước yên lặng), biết rằng vận tốc của dòng nước là 3 km/h .

Lời giải

Gọi $x(\text{km/h})$ là vận tốc thực của tàu du lịch. Vì vận tốc của dòng nước là 3 km/h nên phải có điều kiện $x > 3$ để tàu có thể chạy ngược dòng.

Vận tốc của tàu khi xuôi dòng là $x + 3(\text{km/h})$, thời gian để tàu đi xuôi dòng là $\frac{36}{x + 3}$ (giờ).

Vận tốc của tàu khi ngược dòng là $x - 3(\text{km/h})$, thời gian để tàu đi ngược dòng là $\frac{36}{x - 3}$ (giờ).

Thời gian tàu nghỉ tại bến B là 30 phút $= 0,5$ giờ.

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{36}{x+3} + 0,5 + \frac{36}{x-3} = 5,5$ hay $\frac{36}{x+3} + \frac{36}{x-3} = 5$

Để giải phương trình này, ta quy đồng mẫu về trái của phương trình: $\frac{36(x-3) + 36(x+3)}{(x+3)(x-3)} = 5$

Nhân cả hai vế của phương trình với $(x+3)(x-3)$ để khử mẫu, ta được phương trình bậc hai

$$36(x-3) + 36(x+3) = 5(x+3)(x-3), \text{ hay } 5x^2 - 72x - 45 = 0$$

Ta có: $\Delta' = 36^2 - 5 \cdot (-45) = 1521; \sqrt{\Delta'} = \sqrt{1521} = 39$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{36-39}{5} = \frac{-3}{5} \text{ (loại); } x_2 = \frac{36+39}{5} = 15 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy vận tốc thực của tàu du lịch là 15 km / h .

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

6.28. Một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích 360m^2 . Nếu tăng chiều rộng 3 m và giảm chiều dài 4 m thì diện tích mảnh đất không đổi. Tìm các kích thước của mảnh đất đó.

6.29. Sau hai năm, số dân của một thành phố tăng từ 1200000 người lên 1452000 người. Hỏi trung bình mỗi năm dân số của thành phố đó tăng bao nhiêu phần trăm?

6.30. Một thanh sô cô la có dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài 12 cm , chiều rộng 7 cm và độ dày 3 cm . Do giá nguyên liệu cao tăng nhưng vẫn muốn giữ nguyên giá bán nên nhà sản xuất quyết định giảm 10% thể tích của mỗi thanh sô cô la. Để thực hiện việc này, nhà sản xuất dự định làm thanh sô cô la mới có cùng độ dày 3 cm như thanh cũ, nhưng chiều dài và chiều rộng sẽ giảm đi cùng một số centimét. Hỏi kích thước của thanh sô cô la mới là bao nhiêu?

6.31. Một máy bay khởi hành từ Hà Nội vào Thành phố Hồ Chí Minh, sau đó nghỉ 96 phút và tiếp tục bay về Hà Nội với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 100 km / h . Tổng thời gian của cả hành trình, kể từ khi xuất phát từ Hà Nội đến khi quay về Hà Nội là 6 giờ. Tính vận tốc của máy bay lúc đi, biết quãng đường bay Hà Nội - Thành phố Hồ Chí Minh dài khoảng 1200 km .

6.32. Một ô tô khách khởi hành từ Hà Nội đi Hải Phòng. Sau đó 30 phút, một ô tô con xuất phát từ cùng địa điểm ở Hà Nội và cũng đi về Hải Phòng trên cùng tuyến đường, với vận tốc lớn hơn vận tốc của ô tô khách là 20 km / h . Hai xe đến cùng một địa điểm ở Hải Phòng tại cùng một thời điểm. Hãy tính vận tốc của mỗi ô tô, biết rằng quãng đường Hà Nội - Hải Phòng dài khoảng 120 km .

6.33. Một xưởng may phải may 1500 chiếc áo trong thời gian quy định. Để hoàn thành sớm kế hoạch, mỗi ngày xưởng đã may được nhiều hơn 10 chiếc áo so với số áo phải may trong một ngày theo kế hoạch. Do đó, ba ngày trước khi hết thời hạn, xưởng đã may được 1320 áo. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày xưởng đó phải may xong bao nhiêu chiếc áo?

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Toán Về Quan Hệ Giữa Các Số

1. Phương pháp giải

- Tổng hai số x, y là $x + y$

- Tổng bình phương hai số x, y là $x^2 + y^2$
- Tổng nghịch đảo của hai số x, y là $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Trong lúc học nhóm, bạn Hùng yêu cầu bạn Minh và bạn Lan mỗi người chọn một số sao cho hai số này hơn kém nhau 5 đơn vị và tích của chúng phải bằng 150. Vậy hai bạn Minh và Lan phải chọn những số nào?

Ví dụ 2. Đồ em tìm được một số mà một nửa của nó trừ đi một nửa đơn vị rồi nhân với một nửa của nó bằng một nửa đơn vị.

Ví dụ 3. Tích của hai số tự nhiên liên tiếp lớn hơn tổng của chúng là 109. Tìm hai số đó.

Dạng 2: Toán Chuyển Động

1. Phương pháp giải:

☒ Sử dụng công thức $S = V.t$; trong đó S là quãng đường, V là vận tốc, t là thời gian.

Suy ra $V = \frac{S}{t}; t = \frac{S}{V}$.

☒ Nếu chuyển động dòng chảy thì

$$V_{\text{xuôi dòng}} = V_{\text{riêng}} + V_{\text{dòng nước}}$$

$$V_{\text{ngược dòng}} = V_{\text{riêng}} - V_{\text{dòng nước}}$$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Một xuồng du lịch đi từ thành phố Cà Mau đến Đất Mũi theo một đường sông dài 120 km. Trên đường đi, xuồng có nghỉ lại 1 giờ ở thị trấn Năm Căn. Khi về, xuồng đi theo đường khác dài hơn đường lúc đi 5 km với vận tốc nhỏ hơn vận tốc lúc đi là 5 km/h. Tính vận tốc của xuồng lúc đi, biết rằng thời gian về bằng thời gian đi.

Ví dụ 2: Bác Hiệp và cô Liên đi xe đạp từ làng lên tỉnh trên quãng đường dài 30km, khởi hành cùng một lúc. Vận tốc xe của bác Hiệp lớn hơn vận tốc xe của cô Liên là 3 km/h nên bác Hiệp đã đến tỉnh trước cô Liên nửa giờ. Tính vận tốc xe của mỗi người.

Ví dụ 3: Khoảng cách giữa hai bên sông A và B là 30km. Một canô đi từ bến A đến bến B , nghỉ 40 phút ở bến B rồi quay lại bến A . Kể từ lúc khởi hành đến khi về tới bến A hết tất cả 6 giờ. Hãy tìm vận tốc của canô trong nước yên lặng, biết rằng vận tốc của nước chảy là 3km/h.

Dạng 3: Toán Làm Chung Công Việc

1. Phương pháp giải

Đưa về năng suất làm việc:

Nếu đội nào đó làm xong toàn bộ công việc trong x ngày thì trong 1 ngày đội đó làm được $\frac{1}{x}$ công việc

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Hai đội thợ quét sơn một ngôi nhà. Nếu họ cùng làm thì trong 4 ngày xong việc. Nếu họ làm riêng thì đội I hoàn thành công việc nhanh hơn đội II là 6 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội phải làm trong bao nhiêu ngày để xong việc?

Ví dụ 2. Hai vòi cùng chảy vào một bể thì đầy sau 7 giờ 12 phút. Nếu mỗi vòi chảy riêng mà đầy bể thì tổng thời gian là 30 giờ. Mỗi vòi chảy riêng thì đầy bể trong thời gian là bao lâu?

Ví dụ 3. Hai đội xây dựng cùng làm chung một việc và dự định hoàn thành trong 12 ngày. Họ cùng làm chung với nhau được 8 ngày thì đội 1 được điều đi làm việc khác, đội 2 tiếp tục làm. Do cải tiến kỹ thuật, năng suất tăng gấp đôi nên đội 2 làm xong phần việc còn lại trong 3,5 ngày. Hỏi nếu mỗi đội làm một mình thì bao nhiêu ngày sẽ làm xong công việc nói trên (với năng suất bình thường)?

Dạng 4: Toán Có Nội Dung Hình Học

1. Phương pháp

Áp dụng các công thức sau:

☒ Định lý Pi-ta-go: $\triangle ABC$ vuông tại $A \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$.

☒ Diện tích hình chữ nhật: $S = a.b$; với a là chiều dài, b là chiều rộng.

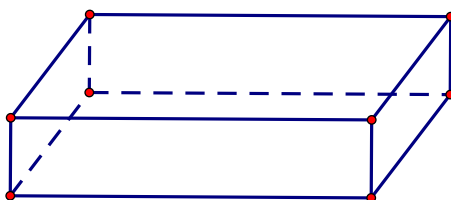
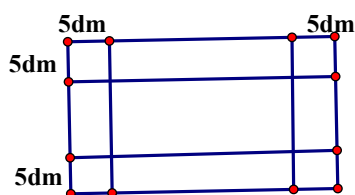
☒ Diện tích hình thang: $S = \frac{(a+b)}{2}.h$ hoặc $S = m.h$. Trong đó a, b là độ dài hai đáy; h là chiều cao; m là độ dài đường trung bình.

2. Ví dụ:

Ví dụ 1. Một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích $240 m^2$. Nếu tăng chiều rộng lên 3m và giảm chiều dài 4m thì diện tích mảnh đất không đổi. Tính kích thước của mảnh đất?

Ví dụ 2. Một hình chữ nhật có chiều rộng bằng $\frac{2}{3}$ chiều dài, diện tích hình chữ nhật là $5400 cm^2$. Tính chu vi hình chữ nhật.

Ví dụ 3: Từ một miếng tôn hình chữ nhật người ta cắt ở 4 góc bốn hình vuông có cạnh bằng 5dm để làm thành một cái thùng không nắp có dung tích $1500 dm^3$ (H.15). Hãy tính kích thước của miếng tôn lúc đầu, biết rằng chiều dài của nó gấp đôi chiều rộng.



Dạng 5: Năng suất

1. Phương pháp

☒ Khối lượng công việc = Năng suất $\times$ Thời gian.

☒ Năng suất = Khối lượng công việc $\div$ Thời gian

☒ Thời gian = Khối lượng công việc $\div$ Năng suất

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Một công nhân dự định làm 70 sản phẩm trong thời gian quy định. Nhưng do áp dụng kỹ thuật nên đã tăng năng suất thêm 5 sản phẩm mỗi giờ. Do đó, không những hoàn thành kế hoạch trước thời hạn 40 phút mà còn làm thêm được 10 sản phẩm so với dự định. Tính năng suất dự định.

Ví dụ 2. Một công nhân dự định làm 72 sản phẩm trong thời gian quy định. Nhưng thực tế xí nghiệp lại giao 80 sản phẩm. Vì vậy mặc dù người đó đã làm mỗi giờ thêm 1 sản phẩm, song thời gian hoàn thành công việc vẫn chậm hơn so với dự định 12 phút. Tính năng suất dự kiến, biết rằng mỗi giờ người đó làm không quá 20 sản phẩm.

Dạng 6: Các Dạng Khác

Ví dụ 1: Bác Thời vay 2 000 000 đồng của ngân hàng để làm kinh tế gia đình trong thời hạn 1 năm. Lẽ ra cuối năm bác phải trả cả vốn lẫn lãi. Song bác đã được ngân hàng cho kéo dài thời hạn thêm một năm nữa, số lãi của năm đầu được gộp với vốn để tính lãi năm sau và lãi suất vẫn như cũ. Hết hai năm bác phải trả tất cả là 2 420 000 đồng. Hỏi lãi suất cho vay là bao nhiêu phần trăm trong một năm?

Ví dụ 2: Miếng kim loại thứ nhất nặng 880g, miếng kim loại thứ 2 nặng 858g. Thể tích của miếng thứ nhất nhỏ hơn thể tích của miếng thứ hai là 10 cm^3 , nhưng khối lượng riêng của miếng thứ nhất lớn hơn khối lượng riêng của miếng thứ hai là 1 g/cm^3 . Tìm khối lượng riêng của mỗi miếng kim loại?

Ví dụ 3. Người ta đổ thêm 200g nước vào một dung dịch chứa 40g muối thì nồng độ của dung dịch giảm đi 10%. Hỏi trước khi đó đổ thêm nước thì dung dịch chứa bao nhiêu nước?

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Tìm hai số biết rằng tổng của chúng bằng 17 đơn vị. Nếu số thứ nhất tăng thêm 3 đơn vị, số thứ 2 tăng thêm 2 đơn vị thì tích của chúng bằng 105 đơn vị.

Câu 2: Tìm hai số biết rằng hai lần số thứ nhất hơn ba lần số thứ hai là 9 và hiệu bình phương của chúng bằng 119.

Câu 3: Một ca nô đi xuôi dòng 45km rồi ngược dòng 18km. Biết rằng thời gian đi xuôi dòng lâu hơn thời gian đi ngược dòng là 1 giờ và vận tốc đi xuôi lớn hơn vận tốc đi ngược là 6km/h. Tính vận tốc ca nô lúc ngược dòng.

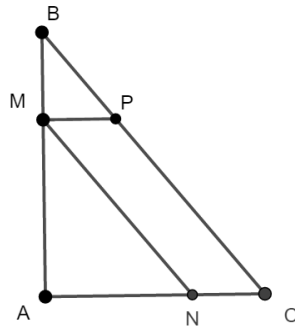
Câu 4: Hai đội cùng đào một con mương. Nếu mỗi đội làm một mình cả con mương thì thời gian tổng cộng hai đội phải làm là 25 giờ. Nếu hai đội cùng làm chung thì công việc hoàn thành trong 6 giờ. Tính xem mỗi đội làm một mình xong cả con mương trong bao lâu?

Câu 5: Hai công nhân cùng làm một công việc thì hoàn thành công việc đó trong 6 giờ 40 phút. Nếu họ làm riêng thì công nhân thứ nhất hoàn thành công việc đó ít hơn công nhân thứ hai là 3 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi công nhân phải làm trong bao lâu thì xong việc?

Câu 6: Một đa giác lồi tất cả 170 đường chéo. Hỏi đa giác đó có bao nhiêu cạnh?

Câu 7: Một thửa ruộng hình chữ nhật có diện tích là 100 m^2 . Tính độ dài các cạnh của thửa ruộng. Biết rằng nếu tăng chiều rộng của thửa ruộng lên 2m và giảm chiều dài thửa ruộng đi 5m thì diện tích thửa ruộng tăng thêm 5 m^2 .

Câu 8: Cho tam giác ABC vuông cân có $AB = AC = 12\text{ cm}$. Điểm M chạy trên AB . Tứ giác $MNCP$ là hình bình hành có đỉnh N thuộc cạnh AC (như hình bên dưới). Hỏi khi M cách A bao nhiêu thì diện tích của hình bình hành bằng 32 cm^2 .



Câu 9: Trong một phòng có 80 người họp, được sắp xếp ngồi đều trên các dãy ghế. Nếu ta bớt đi hai dãy ghế thì mỗi dãy ghế còn lại phải xếp thêm hai người mới đủ chỗ. Hỏi lúc đầu có mấy dãy ghế và mỗi dãy ghế được xếp bao nhiêu người ngồi?

Câu 10: Một phòng học có một số dãy ghế tổng cộng 40 chỗ ngồi. Do phải xếp 55 chỗ nên người ta kê thêm 1 dãy ghế và mỗi dãy ghế thêm 1 chỗ. Hỏi lúc đầu có mấy dãy ghế trong phòng?

Câu 11: Nếu mở cả hai vòi chảy vào một bể cạn thì sau 2 giờ 55 phút bể đầy nước. Nếu mở riêng từng vòi thì vòi thứ nhất làm đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì mỗi vòi chảy bao lâu đầy bể?

Câu 12: Một ca nô xuôi dòng từ bến sông A đến bến sông B cách nhau 24 km ; cũng từ A về B một chiếc bè trôi với vận tốc dòng nước là 4 km/h . Khi đến B ca nô quay lại ngay và gặp bè tại điểm C cách A là 8 km . Tính vận tốc thực của ca nô.

Câu 13: Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13 m và chiều dài lớn hơn chiều rộng 7 m . Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.

Câu 14: Hưởng ứng chiến dịch mùa hè xanh tình nguyện năm 2013, lớp 9A của trường THCS Nguyễn Văn Trỗi được giao trồng 480 cây xanh, lớp dự định chia đều số cây phải trồng cho mỗi bạn trong lớp. Đến buổi lao động có 8 bạn phải đi làm việc khác nên mỗi bạn có mặt phải trồng thêm 3 cây nữa mới xong. Tính số học sinh của lớp 9A.

Câu 15: Người ta hòa tan 8 gam chất lỏng này với 6 gam chất lỏng khác có khối lượng riêng nhỏ hơn 200 kg/m^3 để được một hỗn hợp có khối lượng riêng là 700 kg/m^3 . Tìm khối lượng riêng của mỗi chất lỏng (giả sử 2 chất lỏng không có xảy ra phản ứng hóa học).

Câu 16: Hai đội công nhân A và B dự định cùng làm một công việc trong 4 giờ 48 phút thì hoàn thành. Sau khi hai đội làm chung với nhau trong 2 giờ, thì số lượng công nhân ở đội A và đội B thay đổi nên năng suất của đội A bằng $\frac{1}{2}$ năng suất ban đầu của đội A và năng suất làm việc của đội B bằng $\frac{11}{4}$ năng suất làm việc ban đầu của đội B ; vì vậy hai đội đã hoàn thành công việc trước 48 phút so với dự định. Hỏi nếu số lượng công nhân ở đội A không bị thay đổi thì một mình đội A hoàn thành công việc trên trong mấy giờ?

LUYỆN TẬP CHUNG

A. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Cho phương trình bậc hai: $x^2 - 7x + 5 = 0$.

a) Chứng minh phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

b) Tính $A = x_1^2 - x_2^2$.

Lời giải

a) Ta có: $\Delta = 7^2 - 4 \cdot 5 = 29 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

b) Theo định lí Viète, ta có: $x_1 + x_2 = 7, x_1 x_2 = 5$.

Do đó $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 7^2 - 2 \cdot 5 = 39$.

Ví dụ 2: Có hai miếng kim loại: miếng thứ nhất nặng 600 g; miếng thứ hai nặng 640 g. Thể tích của miếng thứ nhất lớn hơn thể tích của miếng thứ hai là 120 cm^3 , nhưng khối lượng riêng của miếng thứ nhất nhỏ hơn khối lượng riêng của miếng thứ hai là 5 g/cm^3 . Tìm khối lượng riêng của mỗi miếng kim loại.

Lời giải

Gọi $x (\text{g/cm}^3)$ là khối lượng riêng của miếng kim loại thứ nhất. Điều kiện: $x > 0$.

Khối lượng riêng của miếng kim loại thứ hai là $x + 5 (\text{g/cm}^3)$.

Thể tích của miếng kim loại thứ nhất là $\frac{600}{x} (\text{cm}^3)$.

Thể tích của miếng kim loại thứ hai là $\frac{640}{x+5} (\text{cm}^3)$.

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{600}{x} - \frac{640}{x+5} = 120$.

Nhân cả hai vế của phương trình với $x(x+5)$ để khử mẫu, ta được:

$$600(x+5) - 640x = 120x(x+5), \text{ hay } 3x^2 + 16x - 75 = 0$$

Ta có: $\Delta' = 8^2 - 3 \cdot (-75) = 289; \sqrt{\Delta'} = 17$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-8-17}{3} = \frac{-25}{3} \text{ (loại); } x_2 = \frac{-8+17}{3} = 3 \text{ (thoả mãn điều kiện).}$$

Vậy khối lượng riêng của miếng kim loại thứ nhất là 3 g/cm^3 và khối lượng riêng của miếng kim loại thứ hai là 8 g/cm^3 .

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

6.34. Tính nhẩm nghiệm của các phương trình sau:

a) $\sqrt{2}x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + 1 = 0$ b) $2x^2 + (\sqrt{3} - 1)x - 3 + \sqrt{3} = 0$

6.35. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - 5x + 3 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính:

a) $x_1^2 + x_2^2$ b) $(x_1 - x_2)^2$.

6.36. Tìm hai số u và v , biết:

a) $u + v = 15, uv = 56$; b) $u^2 + v^2 = 125, uv = 22$.

6.37. Một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật, không có nắp, có đáy là hình vuông, tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy là 800cm^2 . Chiều cao của hộp là 10 cm. Tính độ dài cạnh đáy của chiếc hộp (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của cm).

6.38. Nhu cầu của khách hàng đối với một loại áo phông tại một cửa hàng được cho bởi phương trình $p = 100 - 0,02x$, trong đó p là giá tiền của mỗi chiếc áo (nghìn đồng) và x là số lượng áo phông bán được. Doanh thu R (nghìn đồng) khi bán được x chiếc áo phông là: $R = xp = x(100 - 0,02x)$. Hỏi cần phải bán được

bao nhiêu chiếc áo phông để doanh thu đạt 120 triệu đồng?

C. BÀI TẬP THÊM

Câu 1: Giải phương trình:

a) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

b) $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$

c) $2x^2 - 7x + 2 = 0$

Câu 2: Giải phương trình:

a) $(2x + 1)^2 = 8x$ (1)

b) $(3x - 1)(x + 1) = 15$ (2)

c) $2x^2 + 3x - (x - 1)(x - 2) = 0$ (3)

Câu 3: Chứng tỏ phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có các hệ số a và c trái dấu thì luôn có nghiệm.

Câu 4: Cho phương trình $2x^2 - 3x - 6 = 0$. Chứng tỏ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Tính $x_1^2 + x_2^2$ và $x_1^3 + x_2^3$.

Câu 5: Cho phương trình $x^2 - 6x + 8 = 0$. Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức $M = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$, ở đó $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình.

Câu 6: Cho phương trình $x^2 - x + m - 1 = 0$ (*).

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$.

b) Hãy tính $x_1^2 + x_2^2$ theo m .

- Câu 7:** Quãng đường AB dài 90 km, có hai ô tô khởi hành cùng một lúc. Ô tô thứ nhất đi từ A đến B, ô tô thứ hai đi từ B đến A. Sau 1 giờ hai xe gặp nhau và tiếp tục đi. Xe ô tô thứ hai tới A trước xe thứ nhất tới B là 27 phút. Tính vận tốc mỗi xe.
- Câu 8:** Một ô tô dự định đi từ A đến B cách nhau 120 km trong một thời gian đã định. Sau khi đi 1 giờ, ô tô dừng lại 10 phút. Do đó để đến B đúng như dự kiến, ô tô phải tăng vận tốc thêm 6 km/h. Tính vận tốc ban đầu của ô tô.
- Câu 9:** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì 6 giờ đầy bể. Nếu mỗi vòi chảy một mình cho đầy bể thì vòi thứ hai cần nhiều hơn vòi thứ nhất 5 giờ. Tính thời gian để mỗi vòi chảy một mình đầy bể.
- Câu 10:** Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13 m, chiều dài hơn chiều rộng là 7 m. Tính diện tích của mảnh đất.
- Câu 11:** Tích của hai số tự nhiên liên tiếp lớn hơn tổng của chúng là 109. Tìm hai số đó.
- Câu 12:** Dân số của một tỉnh sau hai năm tăng từ 2000000 người lên 2048288 người. Tính xem hàng năm trung bình dân số tăng bao nhiêu phần trăm?
- Câu 13:** Chu vi bánh sau của một máy cày lớn hơn chu vi bánh trước là 1,5 m. Khi đi trên đoạn đường dài 100 m thì bánh trước quay nhiều hơn bánh sau 15 vòng. Tính chu vi của mỗi bánh xe.
- Câu 14:** Người ta trộn 8 gam chất lỏng này với 6 gam chất lỏng khác có khối lượng riêng nhỏ hơn $0,2 \text{ g/cm}^3$ để được hỗn hợp có khối lượng riêng là $0,7 \text{ g/cm}^3$. Tìm khối lượng riêng của chất lỏng.
- Câu 15:** Miếng kim loại thứ nhất nặng 880 g, miếng kim loại thứ hai nặng 858 g. Thể tích của miếng kim loại thứ nhất nhỏ hơn thể tích của miếng kim loại thứ hai là 10 cm^3 , nhưng khối lượng riêng của miếng kim loại thứ nhất lớn hơn miếng kim loại thứ hai là 1 g/cm^3 . Tính khối lượng riêng của mỗi miếng kim loại. (Biết rằng khối lượng riêng của một vật được xác định bởi công thức $D = \frac{M}{V}$ trong đó D là khối lượng riêng tính bằng đơn vị g/cm^3 , M là khối lượng tính bằng đơn vị g, V là thể tích tính bằng đơn vị cm^3 .)

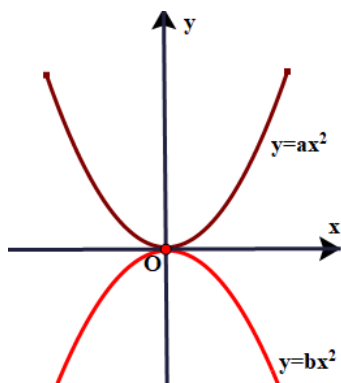
BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

A. TRẮC NGHIỆM

6.39. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$?

- A. (1;2). B. (2;1). C. (-1;2). D. $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

6.40. Hình dưới là hai đường parabol trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Khẳng định nào sau đây là đúng?



- A. $a < 0 < b$. B. $a < b < 0$. C. $a > b > 0$. D. $a > 0 > b$.

6.41. Các nghiệm của phương trình $x^2 + 7x + 12 = 0$ là

- A. $x_1 = 3; x_2 = 4$. B. $x_1 = -3; x_2 = -4$.
C. $x_1 = 3; x_2 = -4$. D. $x_1 = -3; x_2 = 4$.

6.42. Phương trình bậc hai có hai nghiệm $x_1 = 13$ và $x_2 = 25$ là

- A. $x^2 - 13x + 25 = 0$. B. $x^2 - 25x + 13 = 0$.
C. $x^2 - 38x + 325 = 0$. D. $x^2 + 38x + 325 = 0$.

6.43. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$ là

- A. 13. B. 19. C. 25. D. 5.

6.44. Chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật có chu vi 20 cm và diện tích 24cm^2 là

- A. 5 cm và 4 cm. B. 6 cm và 4 cm.
C. 8 cm và 3 cm. D. 10 cm và 2 cm.

B. TỰ LUẬN

6.45. Vẽ đồ thị của các hàm số $y = \frac{5}{2}x^2$ và $y = -\frac{5}{2}x^2$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

6.46. Cho hàm số $y = ax^2$. Xác định hệ số a , biết đồ thị hàm số đi qua điểm $A(3;3)$. Vẽ đồ thị của hàm số trong trường hợp đó.

6.47. Giải các phương trình sau:

a) $5x^2 - 6\sqrt{5}x + 2 = 0$

b) $2x^2 + 2\sqrt{6}x + 3 = 0$.

6.48. Cho phương trình $x^2 - 11x + 30 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Không giải phương trình, hãy tính:

a) $x_1^2 + x_2^2$;

b) $x_1^3 + x_2^3$.

6.49. Tìm hai số u và v , biết:

a) $u + v = 13$ và $uv = 40$;

b) $u - v = 4$ và $uv = 77$.

6.50. Các kỹ sư đảm bảo an toàn của đường cao tốc thường sử dụng công thức $d = 0,05v^2 + 1,1v$, để ước tính khoảng cách an toàn tối thiểu d (feet) (tức là độ dài quãng đường mà xe đi được kể từ khi đạp phanh đến khi xe dừng lại) đối với một phương tiện di chuyển với tốc độ v (dặm/giờ) (theo Algebra 2, NXB MacGraw-Hill, 2008). Giả sử giới hạn tốc độ trên một đường cao tốc nào đó là 70 dặm/giờ. Nếu một ô tô có thể dừng lại sau 300 feet kể từ khi đạp phanh thì ô tô đó có chạy nhanh hơn giới hạn tốc độ của đường cao tốc này không?

6.51. Bác Hương gửi tiết kiệm ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 12 tháng. Sau một năm, do chưa có nhu cầu sử dụng nên bác chưa rút sổ tiết kiệm này ra mà gửi tiếp và gửi thêm một sổ tiết kiệm mới với số tiền 50 triệu đồng, cũng với kì hạn 12 tháng. Sau hai năm (kể từ khi gửi lần đầu), bác Hương nhận được số tiền cả vốn lẫn lãi là 176 triệu đồng. Tính lãi suất năm của hình thức gửi tiết kiệm này (giả sử lãi suất không đổi trong suốt quá trình gửi).

6.52. Hai khối học sinh lớp 8 và lớp 9 của một trường trung học cơ sở tham gia lao động. Nếu làm chung thì sẽ hoàn thành công việc sau 1 giờ 12 phút. Nếu mỗi khối lớp làm riêng thì khối lớp 9 làm xong nhanh hơn khối lớp 8 là 1 giờ. Hỏi nếu mỗi khối lớp làm riêng thì sau bao lâu sẽ hoàn thành công việc?

C. BÀI TẬP THÊM

TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-7)x - m$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số của m để (P) và (d) có hai điểm chung phân biệt.

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Câu 2: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-6)x + m$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số của m nhỏ hơn 10 để (P) và (d) không có điểm chung phân biệt.

A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

Câu 3: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-9)x + m$ với m là tham số. Biết rằng (P) và (d) có đúng một điểm chung. Hỏi m có tính chất nào sau đây?

A. $4 < m < 5$.

B. $m > 5$.

C. $3 < m < 4$.

D. $m < 3$.

Câu 4: Cho parabol $(P): y = (m^2 + 1)x^2$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị của m để (P) đi qua điểm $A(2; 8)$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

- Câu 5:** Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m^2 - 4)x - m^2$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để (P) và (d) có một điểm chung.
- A. 3. B. 4. C. 2. D. 1
- Câu 6:** Cho parabol $(P): y = x^2$ và một số dương a cố định, có bao nhiêu điểm trên (P) có tung độ bằng a ?
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0
- Câu 7:** Cho parabol $(P): y = x^2$, biết rằng không có điểm trên (P) có tung độ bằng a . Hỏi a có tính chất nào sau đây
- A. $\sqrt{a^2} = a$. B. $\sqrt{a^2} = -a$. C. $|a| = a$. D. $a = 0$.
- Câu 8:** Cho parabol $(P): y = x^2$ và số a có tính chất trên (P) đúng 1 điểm có tung độ bằng a . Có bao nhiêu số a như vậy?
- A. 0. B. 1 C. 2. D. 3.
- Câu 9:** Tập nghiệm của phương trình $x^2 + x - 2 = 0$ là
- A. $S = \{1; 2\}$. B. $S = \{-2; 1\}$. C. $S = \{-2; -1\}$. D. $S = \{-1; 2\}$
- Câu 10:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$ vô nghiệm.
- A. $m < -2$. B. $m \geq -2$. C. $m > -2$. D. $m \leq -2$.
- Câu 11:** Biết phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có một nghiệm $x = 2$. Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A. $a + b + c = 0$. B. $a + b + c = 2$.
C. $4a + 2b + c = 0$. D. $c = 2$.
- Câu 12:** Cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị là parabol (P) và hàm số $y = -bx + c$ có đồ thị là đường thẳng d , với a, b là các số thực khác 0. Giả sử đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt. Chọn khẳng định đúng.
- A. $b^2 - 4ac < 0$. B. $b^2 - 4ac > 0$
C. $b^2 + 4ac < 0$. D. $b^2 + 4ac > 0$.
- Câu 13:** Biết phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có hai nghiệm phân biệt. Kết luận nào sau đây là đúng?
- A. Phương trình $ax^2 - 2bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt.
B. Phương trình $ax^2 - 2bx + c = 0$ có nghiệm kép.
C. Phương trình $ax^2 - 2bx + c = 0$ vô nghiệm.
D. Phương trình $ax^2 - 2bx + c = 0$ có nhiều nhất một nghiệm.
- Câu 14:** Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $x^2 - 2\sqrt{3}x + m - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?
- A. Vô số. B. 5. C. 6. D. 7.
- Câu 15:** Biết phương trình $3x^2 - 4x - 15 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$. Giả sử $x_1 > x_2$ khi đó biểu thức $\frac{x_1}{x_2}$ có giá trị.
- A. $\frac{5}{9}$ B. $-\frac{5}{9}$. C. -5 . D. 5.
- Câu 16:** Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2x^2 + 3x - 10 = 0$. Khi đó tích $x_1 x_2$ bằng

- A. $\frac{3}{2}$. B. $-\frac{3}{2}$. C. -5. D. 5.

Câu 17: Phương trình nào sau đây có nghiệm là $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ và $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

- A. $x^2 + 2\sqrt{3}x + 1 = 0$. B. $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$.
C. $x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0$. D. $x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0$.

Câu 18: Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2x^2 + 3x - 5 = 0$. Biểu thức $x_1^2 + x_2^2$ có giá trị là

- A. $\frac{29}{2}$. B. 29. C. $\frac{29}{4}$. D. $\frac{25}{4}$.

Câu 19: Cho phương trình $x^2 - 4x + 1 - m = 0$, với giá trị nào của m thì phương trình có 2 nghiệm thỏa mãn $5(x_1 + x_2) - 4x_1x_2 = 0$.

- A. $m = 4$. B. $m = -5$.
C. $m = -4$. D. Không có giá trị nào.

Câu 20: Năm nay tuổi mẹ gấp 3 lần tuổi Phương. Phương tính rằng 13 năm nữa thì tuổi mẹ gấp 2 lần tuổi Phương. Hỏi năm nay Phương bao nhiêu tuổi?

- A. 13 tuổi. B. 14 tuổi. C. 15 tuổi. D. 16 tuổi.

Câu 21: Chu vi một mảnh vườn hình chữ nhật là 30m. Biết chiều dài hơn chiều rộng 5 m. Tính diện tích hình chữ nhật.

- A. 100 m^2 . B. 70 m^2 . C. 50 m^2 . D. 55 m^2 .

Câu 22: Một người đi xe máy từ A đến B với vận tốc 25 km/h. Lúc về, người đó đi với vận tốc 30 km/h nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 20 phút. Tính quãng đường AB.

- A. 40 km. B. 70 km. C. 50 km. D. 60 km.

Câu 23: Một ca nô xuôi dòng từ A đến B hết 80 phút và ngược dòng hết 2 giờ. Biết vận tốc dòng nước là 3 km/h. Tính vận tốc riêng của ca nô.

- A. 16 km/h. B. 18 km/h. C. 20 km/h. D. 15 km/h.

Câu 24: Một hình chữ nhật có chu vi 278 m, nếu giảm chiều dài 21 m và tăng chiều rộng 10 m thì diện tích tăng 715 m^2 . Chiều dài hình chữ nhật là

- A. 132 m. B. 124 m. C. 228 m. D. 114 m.

Câu 25: Một hình chữ nhật có chiều rộng bằng $\frac{2}{3}$ chiều dài, diện tích hình chữ nhật đó là 5400 cm^2 , diện tích hình chữ nhật là 5400 cm^2 . Chu vi hình chữ nhật là

- A. 300 cm. B. 250 cm. C. 350 cm. D. 400 cm.

Câu 26: Một thửa ruộng hình chữ nhật có diện tích là 100 m^2 . Tính độ dài chiều dài của thửa ruộng. Biết rằng nếu tăng chiều rộng của thửa ruộng lên 2 m và giảm chiều dài 5 m thì diện tích của thửa ruộng tăng thêm 5 m^2 .

- A. 25 m. B. 15 m. C. 5 m. D. 20 m.

Câu 27: Một công nhân dự định làm 36 sản phẩm trong thời gian đã định. Sau khi làm được nửa số lượng được giao, người đó dừng lại nghỉ 30 phút. Vì vậy, mặc dù làm thêm 2 sản phẩm mỗi giờ với nửa số sản phẩm còn lại nhưng vẫn hoàn thành công việc chậm hơn dự kiến 12 phút. Tính năng suất dự kiến.

- A. 13 sản phẩm/giờ. B. 12 sản phẩm/giờ. C. 10 sản phẩm/giờ. D. 11 sản phẩm/giờ

TỰ LUẬN

Câu 1: Hàm số nào sau đây có dạng ax^2 ($a \neq 0$) ? Đối với những hàm số đó, xác định hệ số a của ax^2 .

a) $y = x^2$.

b) $y = -3x^2$.

c) $y = \frac{4x^2}{9}$.

d) $y = \frac{2}{x^2}$.

Câu 2: Cho hàm số $y = 4x^2$ ($a \neq 0$). Tính giá trị của y khi:

a) $x = 0$;

b) $x = 2$;

c) $x = -2$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = ax^2$ ($a \neq 0$). Xác định a biết rằng $f(-2) = 4$.

Câu 4: Lập bảng giá trị của hàm số $y = x^2$ và $y = -x^2$ với các giá trị x lần lượt bằng: $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$

Câu 5: Vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$.

Câu 6: Cho hàm số $y = (m+1)x^2$ và $y = 2x - 1$.

a) Tìm m để đồ thị hai hàm số cắt nhau tại điểm A có hoành độ bằng 2.

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = (m+1)x^2$ với m vừa tìm được ở câu a).

Câu 7: Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$.

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số đã cho.

b) Trên (P) lấy hai điểm A, B có hoành độ lần lượt -2 và 1. Viết phương trình đường thẳng AB.

Câu 8: Cho phương trình $x^2 - x - 10 = 0$. Chứng tỏ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ và tính $x_1^2 + x_2^2$.

Câu 9: Theo phương trình $3x^2 + 2x - 6 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = (x_1 - x_2)^2$; trong đó $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình.

Câu 10: Cho phương trình $3x^2 - 7x - 4 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình, hãy tính.

a) $A = |x_1 - x_2|$; b) $B = \frac{x_1^1}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$

- Câu 11:** Cho phương trình $x^2 - 2x + m + 2 = 0$. Tìm m để phương trình có nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 = 10$.
- Câu 12:** Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$, trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình.
- Câu 13:** Tìm m để phương trình $x^2 + 2x + m = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $3x_1 + 2x_2 = 1$.
- Câu 14:** Tìm m để phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1 - x_2 = 4$.
- Câu 15:** Tìm hai số biết rằng hai lần số thứ nhất hơn ba lần số thứ hai là 9 và hiệu các bình phương của chúng là 119.
- Câu 16:** Một tổ có kế hoạch sản xuất 350 sản phẩm theo năng suất dự định. Nếu năng suất tăng lên 10 sản phẩm thì tổ đó hoàn thành sớm 2 ngày so với giảm năng suất 10 sản phẩm mỗi ngày. Tính năng suất dự kiến.
- Câu 17:** Một nhóm thợ phải thực hiện kế hoạch sản xuất 3000 sản phẩm. Trong 8 ngày đầu, họ thực hiện đúng mức đề ra, những ngày còn lại họ đã vượt mức mỗi ngày 10 sản phẩm, nên đã hoàn thành sớm hơn dự định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày cần phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?
- Câu 18:** Một người đi xe đạp quãng đường từ A đến B dài 30km. Khi từ B về A , người đó chọn con đường khác dài hơn 6km và đi với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 3km/h, nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 20 phút. Tính vận tốc lúc đi.
- Câu 19:** Một tàu thủy chạy trên khúc sông dài 120km. Cả đi lẫn về mất 6 giờ 45 phút. Tính vận tốc tàu thủy khi nước yên lặng, biết vận tốc của dòng nước là 4km/h.
- Câu 20:** Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi 280m. Người ta làm một lối đi xung quanh vườn thuộc đất của vườn rộng 2m, diện tích đất còn lại để trồng trọt là 4256m². Tính các kích thước của vườn.
- Câu 21:** Cho một số có hai chữ số. Tìm số đó, biết rằng tổng hai chữ số của nó nhỏ hơn số đó 6 lần. Nếu thêm 25 vào tích của hai chữ số đó sẽ được số viết theo thứ tự ngược lại với số đã cho.
- Câu 22:** Một lâm trường dự định làm 75 ha rừng trong một tuần lễ. Do trồng mỗi tuần vượt mức 5 ha so với kế hoạch nên đã trồng được 80 ha và hoàn thành sớm 1 tuần. Hỏi mỗi tuần dự định trồng bao nhiêu ha rừng?

CHƯƠNG VI: HÀM SỐ $y = ax^2 (a \neq 0)$. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN.

BÀI 18. HÀM SỐ $y = ax^2 (a \neq 0)$

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. HÀM SỐ $y = ax^2 (a \neq 0)$

Nhận xét. Hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ xác định với mọi giá trị x thuộc $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = \frac{3}{2}x^2$. Hoàn thành bảng giá trị sau vào vở:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	?	?	?	?	?	?	?

Lời giải

Bảng giá trị:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{27}{2}$	6	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	6	$\frac{27}{2}$

II. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax^2 (a \neq 0)$

Cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$

- Lập bảng ghi một số cặp giá trị tương ứng của x và y .
- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , biểu diễn các cặp điểm $(x; y)$ trong bảng giá trị trên và nối chúng lại để được một đường cong là đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$.

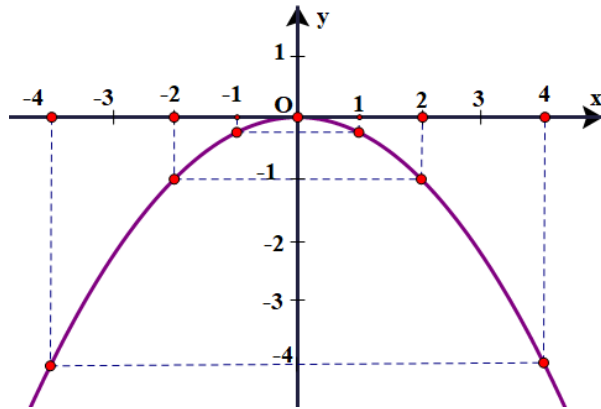
Ví dụ 2. Vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$.

Lời giải

Lập bảng một số giá trị tương ứng giữa x và y :

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
y	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	-4

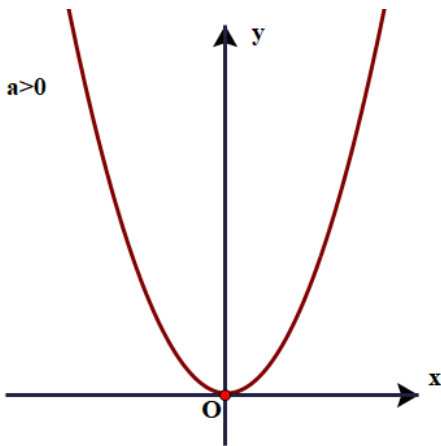
Biểu diễn các điểm $(-4; -4); (-2; -1); (-1; -\frac{1}{4}); (0; 0); (1; -\frac{1}{4}); (2; -1)$ và $(4; -4)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy và nối chúng lại ta được đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$ như hình.



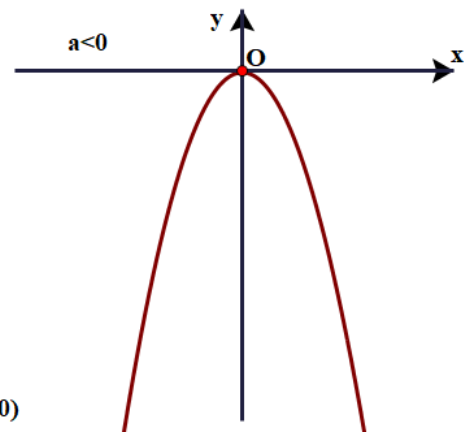
Tính chất:

Đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ là một đường cong, gọi là đường parabol, có các tính chất sau:

- Có đỉnh là gốc tọa độ O ,
- Có trục đối xứng là Oy ;
- Nằm phía trên trục hoành nếu $a > 0$ và nằm phía dưới trục hoành nếu $a < 0$.



Đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$



Chú ý:

Hai điểm (x, y) và $(-x, y)$ đối xứng nhau qua trục tung Oy .

Ví dụ 3

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = -2x^2$.

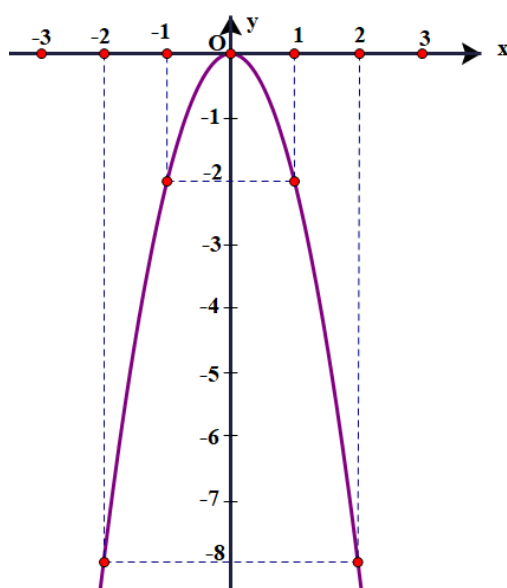
b) Tìm tọa độ các điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng $-\frac{1}{2}$ và nhận xét về tính đối xứng giữa các điểm đó.

Lời giải

a) Lập bảng một số giá trị tương ứng giữa x và y :

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-2	0	-2	-8

Biểu diễn các điểm $(-2;-8), (-1;-2), (0;0), (1;-2)$ và $(2;-8)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy và nối chúng lại ta được đồ thị của hàm số $y = -2x^2$ như hình.



b) Ta có $y = -\frac{1}{2}$ nên $-2x^2 = -\frac{1}{2}$, hay $x^2 = \frac{1}{4}$. Suy ra $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$.

Vậy có hai điểm cần tìm là $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. Hai điểm này đối xứng với nhau qua trục tung Oy .

Nhận xét.

- Khi vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$, ta cần xác định tối thiểu 5 điểm thuộc đồ thị là gốc tọa độ O và hai cặp điểm đối xứng với nhau qua trục tung Oy .

- Do đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ nhận trục tung Oy là trục đối xứng nên ta có thể lập bảng giá trị của hàm số này với những giá trị x không âm và vẽ phần đồ thị tương ứng ở bên phải trục tung, sau đó lấy đối xứng phần đồ thị đã vẽ qua trục tung ta sẽ được đồ thị của hàm số đã cho.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

6.1. Cho hàm số $y = 0,25x^2$. Hoàn thành bảng giá trị sau vào vở:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	?	?	?	?	?	?	?

Lời giải

Thay lần lượt các giá trị $x = -3; x = -2; \dots; x = 3$ vào hàm số $y = 0,25x^2$, ta được bảng giá trị:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25

6.2. Cho hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông cạnh a (cm) và chiều cao 10 cm.

a) Viết công thức tính thể tích V của lăng trụ theo a và tính giá trị của V khi $a = 2$ cm.

b) Nếu độ dài cạnh đáy tăng lên hai lần thì thể tích của hình lăng trụ thay đổi thế nào?

Lời giải

a) Thể tích của hình lăng trụ đứng đó là: $V = Bh = 10a^2 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Vậy công thức tính thể tích V của lăng trụ là $V = 10a^2 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Khi $a = 2 \text{ cm}$, thay vào công thức $V = 10a^2$, ta được: $V = 10 \cdot 2^2 = 40 \text{ (cm}^3\text{)}$

Vậy $V = 40 \text{ cm}^3$ khi $a = 2 \text{ cm}$.

b) Nếu độ dài cạnh đáy tăng lên hai lần thì độ dài cạnh đáy lúc này là $2a \text{ (cm)}$.

Thể tích của hình lăng trụ lúc này là: $V' = B' \cdot h = 10 \cdot (2a)^2 = 40a^2 = 4V \text{ (cm}^3\text{)}$

Vậy nếu độ dài cạnh đáy tăng lên hai lần thì thể tích của hình lăng trụ tăng lên 4 lần.

6.3. Diện tích toàn phần $S \text{ (cm}^2\text{)}$ của hình lập phương, tức là tổng diện tích xung quanh và diện tích của hai mặt đáy là một hàm số của độ dài cạnh $a \text{ (cm)}$.

a) Viết công thức của hàm số này.

b) Sử dụng công thức nhận được ở câu a để tính độ dài cạnh của một hình lập phương có diện tích toàn phần là 54 cm^2 .

Lời giải

a) Diện tích toàn phần của hình lập phương là: $S = 2 \cdot a^2 + 4 \cdot a^2 = 6a^2 \text{ (cm}^2\text{)}$

Vậy công thức của hàm số cần tìm là: $S = 6a^2 \text{ (cm}^2\text{)}$.

b) Ta có $S = 54 \text{ cm}^2$, thay vào công thức $S = 6a^2$, ta được: $54 = 6a^2$, hay $a^2 = 9$.

Suy ra $a = 3$ (do $a > 0$).

Vậy một hình lập phương có diện tích toàn phần là 54 cm^2 thì có độ dài cạnh bằng 3 cm .

6.4. Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = 3x^2$;

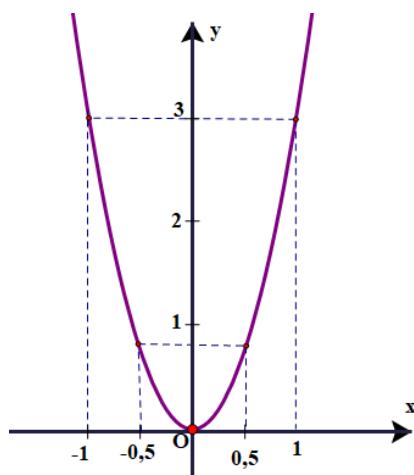
b) $y = -\frac{1}{3}x^2$

Lời giải

a) Lập bảng một số giá trị tương ứng giữa x và y :

x	-1	-0,5	0	0,5	1
$y = 3x^2$	3	0,75	0	0,75	3

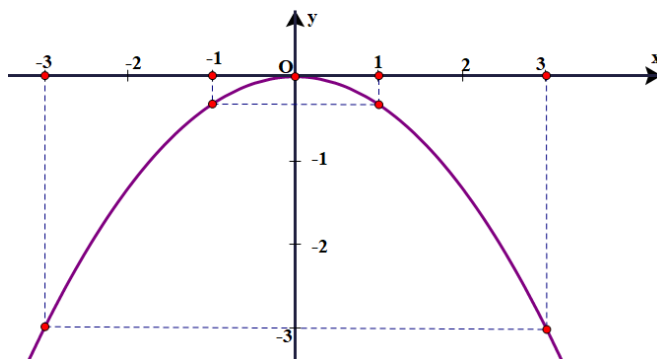
Biểu diễn các điểm $(-1;3);(-0,5;0,75);(0;0);(0,5;0,75)$ và $(1;3)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy và nối chúng lại ta được đồ thị của hàm số $y = 3x^2$ như hình vẽ dưới đây:



b) Lập bảng một số giá trị tương ứng giữa x và y :

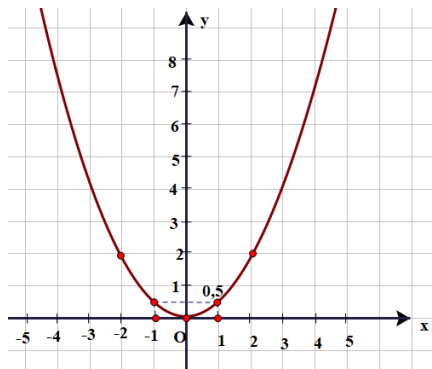
x	-3	-1	0	1	3
$y = -\frac{1}{3}x^2$	-3	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	-3

Biểu diễn các điểm $(-2;2);(-1;0,5);(0;0);(1;0,5)$ và $(2;2)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy và nối chúng lại ta được đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{3}x^2$ như hình vẽ dưới đây:



6.5. Biết rằng đường cong trong hình là một parabol $y = ax^2$.

- Tìm hệ số a .
- Tìm tung độ của điểm thuộc parabol có hoành độ $x = -2$.
- Tìm các điểm thuộc parabol có tung độ $y = 8$.



Lời giải

a) Do parabol $y = ax^2$ trong hình đi qua điểm có tọa độ $(2; 2)$ nên ta thay $x = 2$ và $y = 2$ vào hàm số $y = ax^2$ thì được: $2 = a \cdot 2^2$, hay $4a = 2$. Suy ra $a = \frac{1}{2}$.

b) Trên hình, ta thấy parabol đi qua điểm có tọa độ $(-2; 2)$.

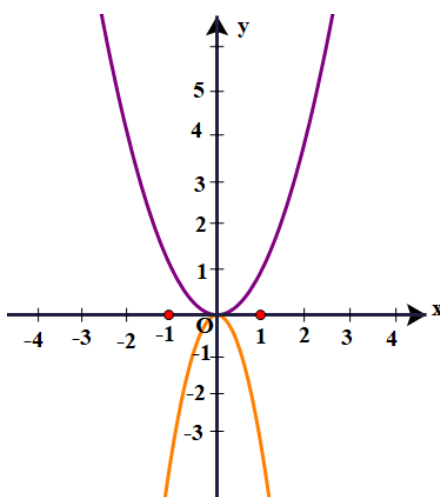
Vậy điểm thuộc parabol có hoành độ $x = -2$ thì có tung độ là 2.

c) Với $a = \frac{1}{2}$ ta có hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$.

Thay $y = 8$ vào hàm số trên, ta được: $8 = \frac{1}{2}x^2$, hay $x^2 = 16$. Suy ra $x = 4$ hoặc $x = -4$.

Vậy các điểm thuộc parabol cần tìm là $(-4; 8)$ và $(4; 8)$.

6.6. Trong hình có hai đường cong là đồ thị của hai hàm số $y = -3x^2$ và $y = x^2$. Hãy cho biết đường nào là đồ thị của hàm số $y = -3x^2$.



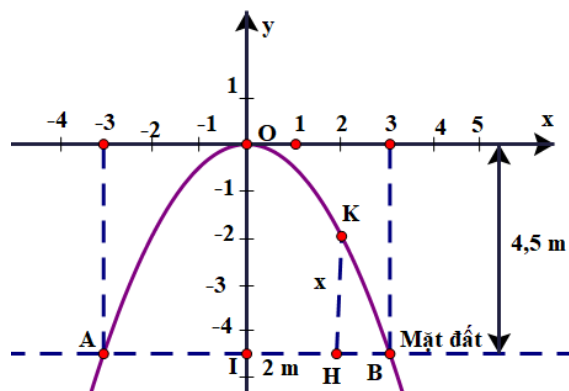
Lời giải

Đồ thị hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ là đường cong parabol nằm phía trên trục hoành nếu $a > 0$ và nằm phía dưới trục hoành nếu $a < 0$.

Quan sát hình, ta thấy đường cong màu tím nằm phía trên trục hoành và đường cong màu cam nằm phía dưới trục hoành.

Mặt khác, hàm số $y = -3x^2$ có hệ số $a = -3 < 0$. Do vậy, đường cong màu cam chính là đồ thị của hàm số $y = -3x^2$.

6.7. Một cổng vòm được thiết kế dạng parabol $y = ax^2$ như hình. Biết chiều rộng của chân cổng là $AB = 6\text{ m}$ và chiều cao của cổng là $OI = 4,5\text{ m}$.



Lời giải

a) - Parabol $y = ax^2$ đi qua hai điểm $B(3; -4,5)$ nên ta có:

$$-4,5 = a \cdot 3^2, \text{ hay } 9a = -4,5. \text{ Suy ra } a = -\frac{1}{2}. \text{ Khi đó, ta có hàm số } y = -\frac{1}{2}x^2.$$

- Vì H cách điểm chính giữa cổng I là 2 m nên $IH = 2(\text{m})$. Do đó tọa độ của điểm H là $H(2; -4,5)$.

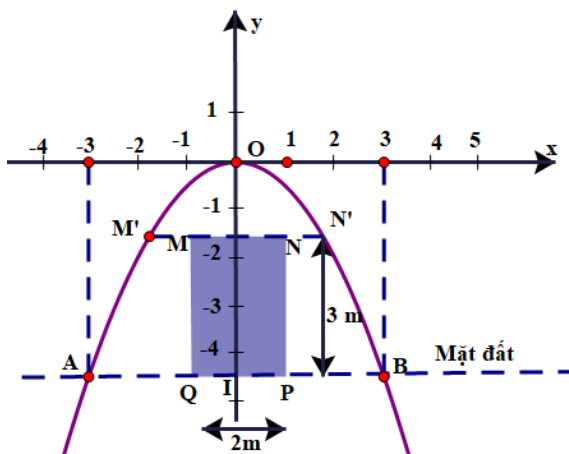
Vì $IH = 2$ nên ta cũng có hoành độ của điểm K là 2.

$$\text{Thay } x = 2 \text{ vào hàm số } y = -\frac{1}{2}x^2. \text{ ta được: } y = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 = -2.$$

Vì vậy, tọa độ của điểm K là $K(2; -2)$. Do đó, $HK = |y_H| - |y_K| = |-4,5| - |-2| = 2,5(\text{m})$.

Vậy độ dài đoạn HK là 2,5 m.

b) Giả sử hình ảnh xe tải đi qua cổng có hình chữ nhật MNPQ có $NP = 3\text{ m}$ và $PQ = 2\text{ m}$ (hình vẽ).



Xe tải có chiều cao $NP = 3\text{ m}$ thì khi đó nó cách đỉnh vòm (gốc tọa độ O) một khoảng là $4,5 - 3 = 1,5(\text{m})$.

Khi $y = -1,5$, thay vào hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$, ta được: $-1,5 = -\frac{1}{2}x^2$, hay $x^2 = 3$. Suy ra $x = \pm\sqrt{3}$.

Khoảng cách giữa 2 điểm M', N' trên parabol lúc này là $2\sqrt{3} \approx 3,46(\text{m}) > 2(\text{m}) = PQ$.

Vậy xe tải có chiều rộng 2 m, chiều cao 3 m có thể đi qua được cổng vòm này.

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Giá trị hàm số $y = f(x) = ax^2 (a \neq 0)$ tại $x = x_0$

1. Phương pháp giải

Để tính $f(x_0)$ ta thay $x = x_0$ vào $f(x)$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x) = 4x^2$. Hãy tính $f(1), f(-1), f(2), f(-2), f(0)$

Lời giải

Ta có: $f(1) = 4.1^2 = 4$.

$$f(-1) = 4.(-1)^2 = 4.$$

$$f(2) = 4.2^2 = 16.$$

$$f(-2) = 4.(-2)^2 = 16.$$

$$f(0) = 4.0^2 = 0.$$

Ví dụ 2. Diện tích S của hình tròn được tính bởi công thức $S = \pi R^2$, trong đó R là bán kính của hình tròn.

a) Dùng máy tính bỏ túi, tính các giá trị của S rồi điền vào các ô trống trong bảng sau ($\pi \approx 3,14$, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

$R \text{ (cm)}$	0,57	1,37	2,15	4,09
$S = \pi R^2 \text{ (cm}^2\text{)}$				

b) Nếu bán kính tăng gấp 3 lần thì diện tích tăng hay giảm bao nhiêu lần?

c) Tính bán kính của hình tròn, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai, nếu biết diện tích của nó bằng $79,5 \text{ cm}^2$.

Lời giải

$R \text{ (cm)}$	0,57	1,37	2,15	4,09
$S = \pi R^2 \text{ (cm}^2\text{)}$	1,02	5,89	14,51	52,53

b) Giả sử $R' = 3R$ thì $S' = \pi R'^2 = \pi (3R)^2 = \pi.9R^2 = 9\pi R^2 = 9S$.

Vậy diện tích tăng 9 lần.

c) $79,5 = S = \pi R^2$. Suy ra $R^2 = \frac{79,5}{\pi}$. Do đó $R = \sqrt{\frac{79,5}{\pi}} \approx 5,03(\text{cm})$

Ví dụ 3. Một vật rơi ở độ cao so với mặt đất là 100 m. Quãng đường chuyển động S (mét) của vật rơi phụ thuộc vào thời gian t (giây) bởi công thức: $S = 4t^2$.

a) Sau 1 giây, vật này cách mặt đất bao nhiêu mét? Tương tự, sau 2 giây?

b) Hỏi sau bao lâu vật này tiếp đất?

Lời giải

a) Sau 1 giây vật rơi được quãng đường $S = 4.1^2 = 4$ m nên vật này cách mặt đất $100 - 4 = 96$ m.

Sau 2 giây vật rơi được quãng đường $S = 4.2^2 = 16$ m nên vật cách mặt đất $100 - 16 = 84$ m.

b) Khi vật này tiếp đất thì nó rơi quãng đường là 100 m nên $S = 4t^2 = 100 \Leftrightarrow t^2 = 25 \Leftrightarrow t = 5$ (do $t > 0$).

Vậy sau 5 giây vật tiếp đất.

Ví dụ 4.

Lực F của gió khi thổi vuông góc vào cánh buồm tỷ lệ thuận với bình phương vận tốc v của gió, tức là $F = av^2$ (a là hằng số). Khi vận tốc gió bằng 2m/s thì lực tác động lên cánh buồm của một con thuyền bằng 120 N (Niu-ton)



a) Tính hằng số a .

b) Hỏi khi $v = 10$ m/s thì lực F bằng bao nhiêu?

Cùng câu hỏi này khi $v = 20$ m/s

c) Biết rằng cánh buồm chỉ có thể chịu được một áp lực tối đa là 12000 N, hỏi con thuyền có thể đi được trong gió bão với vận tốc 90 km/h hay không?

Lời giải

a) $a.2^2 = 120$. Suy ra $a = 120 : 4 = 30$.

b) Vì $F = 30v^2$ nên:

khi vận tốc $v = 10$ m/s thì $F = 30.10^2 = 3000$ N,

khi $v = 20$ m/s thì $F = 30.20^2 = 12000$ N.

c) Gió bão có vận tốc 90 km/h hay $90000 \text{ m} / 3600 \text{ s} = 25$ m/s. Mà theo câu b), cánh buồm chỉ chịu sức gió 20 m/s. Vậy khi có cơn bão vận tốc 90 km/h, thuyền không thể đi được.

Dạng 2. Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^2$ ($a \neq 0$)

1. Phương pháp giải

Lập bảng giá trị tương ứng giữa x và y . Cho x lần lượt bằng: $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3 \dots$ rồi tìm giá trị y tương ứng bằng cách lập bảng.

Điểm $M(x_M; y_M)$ thuộc đồ thị $y = ax^2 \Leftrightarrow y_M = ax_M^2$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hàm số: $y = \frac{3}{2}x^2$, $y = -\frac{3}{2}x^2$. Điền vào những ô trống của các bảng sau rồi vẽ hai đồ thị trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{3}{2}x^2$					

x	-2	-1	0	1	2
$y = -\frac{3}{2}x^2$					

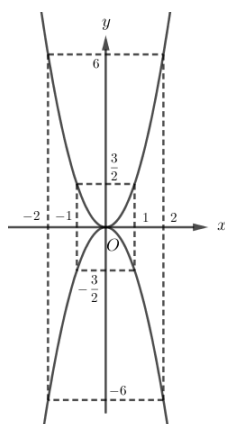
Nhận xét về tính đối xứng của hai đồ thị đối với trục Ox .

Lời giải

Bảng giá trị của các hàm số

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{3}{2}x^2$	6	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	6
$y = -\frac{3}{2}x^2$	-6	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	-6

Hai đồ thị trên đối xứng nhau qua trục Ox .



Ví dụ 2. Cho hàm số: $y = \frac{1}{2}x^2$; $y = x^2$; $y = 2x^2$.

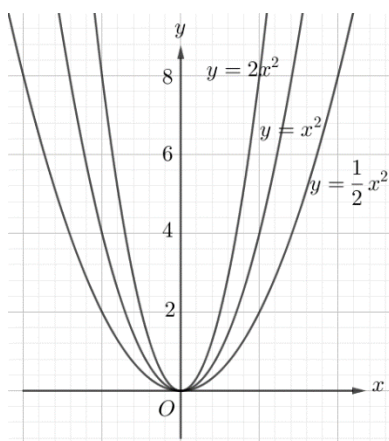
a) Vẽ đồ thị của ba hàm số này trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

- b) Tìm ba điểm A, B, C có cùng hoành độ $x = -1,5$ theo thứ tự nằm trên ba đồ thị. Xác định tung độ tương ứng của chúng.
- c) Tìm ba điểm A', B', C' có cùng hoành độ $x = 1,5$ theo thứ tự nằm trên ba đồ thị. Kiểm tra tính đối xứng của A và A', B và B', C và C' .
- d) Với mỗi hàm số trên, hãy tìm giá trị x để hàm số đó có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a) Bảng giá trị của các hàm số:

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{1}{2}x^2$	2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8



b) Ký hiệu y_A là tung độ của A . Thay $x = -1,5$ vào lần lượt các hàm số ta được:

$$y_A = \frac{1}{2}(-1,5)^2 = 1,125$$

$$y_B = (-1,5)^2 = 2,25$$

$$y_C = 2(-1,5)^2 = 4,5$$

c) Tương tự thay $x = 1,5$ vào lần lượt các hàm số ta được:

$$y_A = \frac{1}{2}(1,5)^2 = 1,125$$

$$y_B = (1,5)^2 = 2,25$$

$$y_C = 2(1,5)^2 = 4,5$$

Vậy A và A' , B và B' , C và C' đối xứng nhau qua Oy .

d) Ta có $y = \frac{1}{2}x^2 \geq 0$; $y = x^2 \geq 0$; $y = 2x^2 \geq 0$ với mọi x nên với $x = 0$ thì các hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x) = x^2$.

a) Vẽ đồ thị hàm số đó.

b) Tính các giá trị $f(-8)$; $f(-1,3)$; $f(-0,75)$; $f(1,5)$.

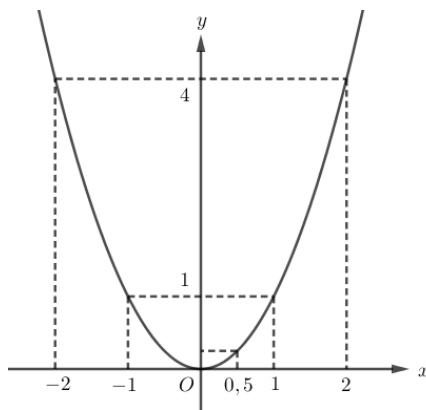
c) Dùng đồ thị để ước lượng các giá trị $(0,5)^2$; $(-1,5)^2$; $(2,5)^2$.

d) Dùng đồ thị để ước lượng vị trí các điểm trên trục hoành biểu diễn các số $\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$.

Lời giải

a) Bảng giá trị hàm số và đồ thị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4



b) Tính các giá trị

x	-8	-1,3	-0,75	1,5
$y = f(x) = x^2$	64	1,69	0,5625	2,25

c) d) học sinh tự làm.

Chẳng hạn để ước lượng giá trị $(0,5)^2$ ta tìm tung độ y_A của điểm A thuộc đồ thị hàm số $y = x^2$ ứng với hoành độ $x_A = 0,5$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = -0,75x^2$. Qua đồ thị hàm số đó, hãy cho biết khi x tăng từ -2 đến 4 thì giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của y là bao nhiêu?

Lời giải

Bảng giá trị:

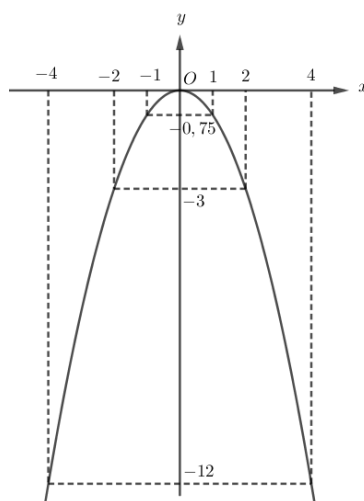
x	-2	-1	0	1	4
$y = -0,75x^2$	-3	$-0,75$	0	$-0,75$	-12

Vì $-2 < 0 < 4$ nên khi $x = 0$ thì $y = 0$ là giá trị lớn nhất của hàm số.

Khi $x = -2$ thì: $y = -0,75(-2)^2 = -3$

Khi $x = 4$ thì: $y = -0,75(4)^2 = -12 < -3$

Vậy khi $-2 \leq x \leq 4$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số là -12 khi $x = 4$.



Dạng 3. Xác định hệ số a của hàm số $y = f(x) = ax^2$ ($a \neq 0$)

1. Phương pháp giải

Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (P) . Điểm $M(x_0; y_0) \in (P) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Xác định hàm số bậc hai $y = ax^2$. Biết đồ thị đi qua điểm $A(10; 30)$.

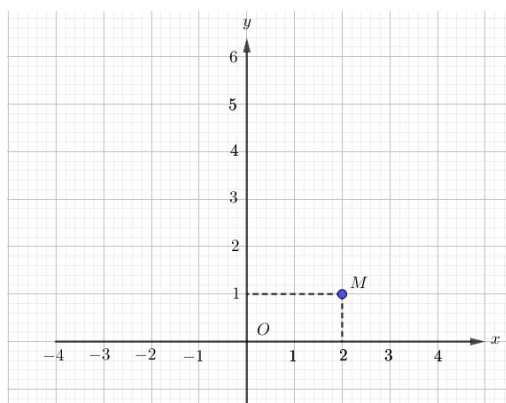
Lời giải

Điểm $A(10; 30)$ thuộc đồ thị hàm số $y = ax^2 \Leftrightarrow 30 = a \cdot 10^2 \Leftrightarrow a = \frac{3}{10}$.

Vậy hàm số cần tìm là $y = \frac{3}{10}x^2$.

Ví dụ 2. Trên mặt phẳng tọa độ có một điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = ax^2$.

- a) Tìm hệ số a .
- b) Điểm $A(4;4)$ có thuộc đồ thị không?
- c) Hãy tìm thêm hai điểm nữa (không kể điểm O) để vẽ đồ thị.



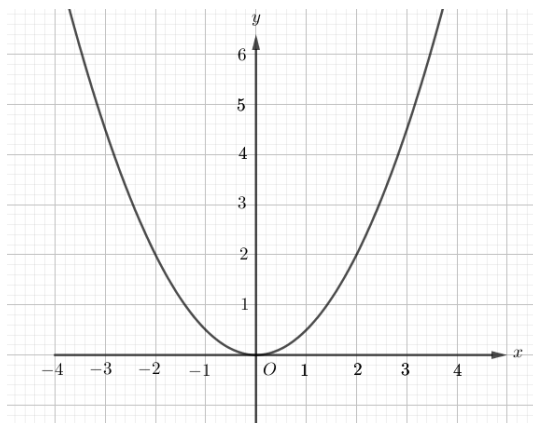
Lời giải

- a) Ta có $M(2;1) \in P \Leftrightarrow 1 - a \cdot 2^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$.
- b) Vì với $x = 4$ thì $y = \frac{1}{4} \cdot 4^2 = 4$ nên $A(4;4)$ thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$.
- c) Nhờ tính đối xứng của đồ thị ta lấy thêm hai điểm nữa là $M'(-2;1)$ và $A'(-4;4)$.

Học sinh tự vẽ đồ thị.

Ví dụ 3. Biết rằng đường cong hình bên là một Parabol $y = ax^2$.

- a) Tìm hệ số a .
- b) Tìm tung độ của điểm thuộc Parabol có hoành độ $x = -3$.
- c) Tìm các điểm thuộc Parabol có tung độ $y = 8$.



Lời giải

- a) Ta thấy điểm $M(2;2)$ thuộc đồ thị hàm số nên:

Thay $x = 2$, $y = 2$ vào hàm số $y = ax^2$ ta được:

$$2 = a.2^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

b) Tung độ của điểm thuộc Parabol có hoành độ $x = -3$ là:

$$y = \frac{1}{2}.(-3)^2 = \frac{9}{2}.$$

c) Hoành độ các điểm thuộc Parabol có tung độ $y = 8$ thỏa phương trình:

$$\frac{1}{2}x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4.$$

Vậy có hai điểm cần tìm là $M(4;8)$ và $M'(-4;8)$.

Dạng 4. Tọa độ giao điểm của parabol và đường thẳng

1. Phương pháp giải

• Để tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) ta viết phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$ax^2 = bx + c \quad (1)$$

- Nếu (1) vô nghiệm thì (d) không cắt (P) .

- Nếu (1) có nghiệm thì (d) cắt (P) .

Gọi x_1 là hoành độ giao điểm thì tung độ giao điểm là $y = ax_1^2$ hoặc $y = bx_1 + c$.

2. Ví dụ

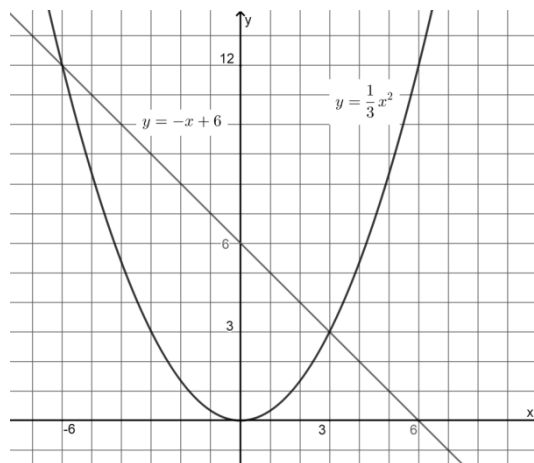
Ví dụ 1. Cho hai hàm số $y = \frac{1}{3}x^2$ và $y = -x + 6$

a) Vẽ đồ thị của các hàm số này trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Tìm tọa độ các giao điểm của hai đồ thị đó.

Lời giải

a) Xem hình vẽ



b) Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình :

$$\frac{1}{3}x^2 - -x + 6 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 9) + (3x - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+3) + 3(x-3) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-6 \end{cases}$$

Với $x=3$ ta có $y = \frac{1}{3} \cdot 3^2 = 3$ ta có giao điểm $(3;3)$

Với $x=-6$ ta có $y = \frac{1}{3} \cdot (-6)^2 = 12$ ta có giao điểm $(-6;12)$

Ví dụ 2. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x + 2$.

1. Tìm tọa độ giao điểm $A, B (x_A > x_B)$ của (d) và (P) .

2. Tính diện tích tam giác OAB .

Lời giải

1. Phương trình hoành độ giao điểm (d) và (P)

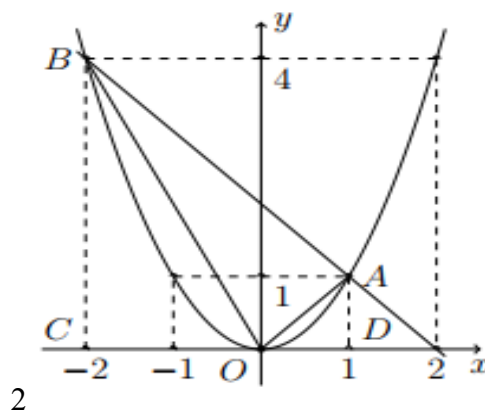
$$x^2 = -x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2. \end{cases}$$

Với $x=1 \Rightarrow y=1$.

Với $x=-2 \Rightarrow y=4$.

Vậy (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có tọa độ $A(1;1)$ và $B(-2;4)$.

2. Tính diện tích tam giác OAB .



Gọi C, D là hình chiếu của B, A xuống Ox . Ta có

$$S_{BCDA} = \frac{(BC + AD)CD}{2} = \frac{(4 + 1) \cdot 3}{2} = \frac{15}{2},$$

$$S_{BCO} = \frac{BC \cdot CO}{2} = 4,$$

$$S_{ADO} = \frac{AD \cdot DO}{2} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra

$$S_{ABO} = S_{BCDA} - S_{BCO} - S_{ADO} = 3.$$

Vậy diện tích tam giác OAB bằng 3 (đvdt).

Dạng 5. Giải bất phương trình bằng đồ thị

1. Phương pháp giải

Cho bất phương trình $f(x) < g(x)$ (1)

- Vẽ đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$ trên cùng hệ trục tọa độ.
- Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị trên bằng cách giải phương trình $f(x) = g(x)$.
- Nghiệm của bất phương trình $f(x) < g(x)$ là tập hợp các giá trị x là hình chiếu của phần đồ thị $y = f(x)$ nằm dưới đồ thị $y = g(x)$ lên trục hoành.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Giải bất phương trình sau bằng đồ thị $x^2 < x + 2$

Lời giải

Vẽ đồ thị parabol (P) $y = x^2$ và đường thẳng (d) $y = x + 2$ trên cùng hệ trục tọa độ. Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là :

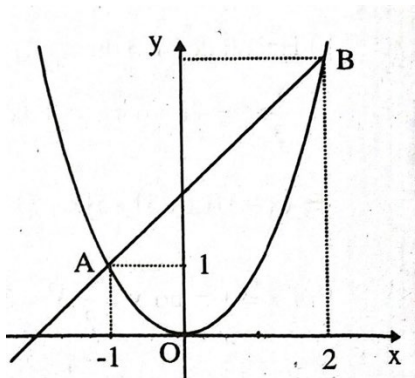
$$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Với $x = -1$ thì $y = 1$

Với $x = 2$ thì $y = 4$

Vậy (P) và (d) cắt nhau tại $A(-1;1)$ và $B(2;4)$. Phần parabol nằm phía dưới (d) là cung AOB của (P)

. Chiếu vuông góc cung này lên Ox ta được tập nghiệm của bất phương trình là $-1 < x < 2$.



Dạng 6. Biện luận số nghiệm của phương trình bằng đồ thị

1. Phương pháp giải

Cho phương trình dạng $f(x) = m$ (m là tham số)

- Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m$ cùng phương với Ox và qua điểm có tọa độ $(0, m)$

.

- Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ với đường thẳng $y = m$.

2. Ví dụ

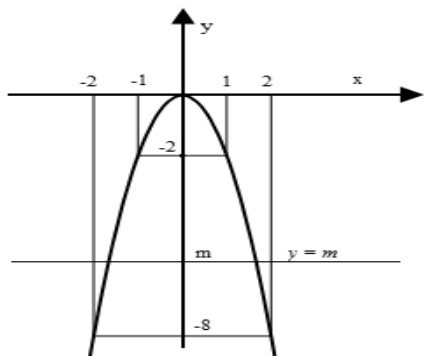
Ví dụ 1. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình :

a) $-2x^2 = m$

b) $x|x| = m$

Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P): $y = -2x^2$ và đường thẳng $y = m$.

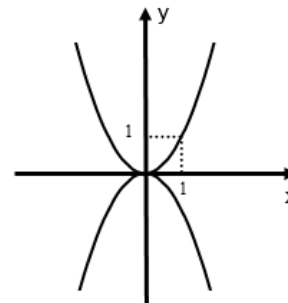


Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = -2x^2$	-8	-2	0	-2	-8

Dựa vào đồ thị ta có kết quả:

- $m > 0$ phương trình vô nghiệm
- $m = 0$ phương trình có 1 nghiệm
- $m < 0$ phương trình có 2 nghiệm



b) Vẽ đồ thị $y = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình luôn có một nghiệm với mọi giá trị của m .

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho hàm số $y = -3x^2$. Lập bảng tính các giá trị của y ứng với giá trị của x lần lượt bằng: -2 ; -1 ; 0 ; $\frac{1}{3}$; 1 ; 2 .

Hướng dẫn giải

x	-2	-1	0	$\frac{1}{3}$	1	2
$y = -3x$	-12	-3	0	$-\frac{1}{3}$	-3	-12

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = x^2$

a) Chứng minh rằng $f(a) - f(-a) = 0$ với mọi a .

b) Tìm $a \in \mathbb{R}$ biết $f(a-1) = 4$.

Hướng dẫn giải

a) $f(-a) = (-a)^2 = a^2 = f(a) \Rightarrow f(a) - f(-a) = 0$

b)

$$f(a-1) = 4 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 4 \Leftrightarrow |a-1| = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-1=2 \\ a-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=-1 \end{cases}$$

Câu 3: Chứng minh rằng hàm số $y = -5x^2$ có các tính chất sau:

a) y không dương với mọi giá trị của x .

b) nếu $|x|$ gấp n lần thì y gấp n^2 lần.

Hướng dẫn giải

a) Vì $-5x^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $y \leq 0$.

b) Để biểu thị $|x|$ gấp n lần cho ta x hai giá trị là K và nK ($K \neq 0$).

Các giá trị tương ứng của y là $-3K^2$ và $-3n^2K^2$.

Câu 4: Cho hàm số $y = (m+2)x^2$ ($m \neq -2$), Tìm các giá trị của m để:

- a) có giá trị $y = 4$ khi $x = -1$.
- b) hàm số có giá trị lớn nhất là 0.
- c) hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0.

Hướng dẫn giải

- a) $m = 2$; b) $m < -2$; c) $m > -2$.

Câu 5: Cho hàm số $y = -x^2$

- a) Vẽ đồ thị của hàm số.
- b) Các điểm sau có thuộc đồ thị hay không?

$$A\left(3; \frac{9}{10}\right); \quad B\left(-5; \frac{5}{2}\right); \quad C(-10; 1)?$$

Hướng dẫn giải

- b) Điểm A; B thuộc đồ thị hàm số.

Câu 6: Xác định hệ số a để đồ thị hàm số $y = ax^2$ đi qua điểm $A(-\sqrt{3}; 9)$. Vẽ đồ thị trong trường hợp này.

Hướng dẫn giải

$$a = 3.$$

Câu 7: Xác định m để đồ thị hàm số $y = (m^2 - 2)x^2$ đi qua điểm $A(1; 2)$. Với m tìm được, đồ thị hàm số có đi qua điểm $B(2; 9)$ không?

Hướng dẫn giải

$$m = \pm 2.$$

Câu 8: Cho parabol $y = \frac{1}{4}x^2$. Xác định m để các điểm sau nằm trên parabol:

$$a) A(\sqrt{2}; m) \quad b) B(-\sqrt{2}; m) \quad c) C\left(m; \frac{3}{4}\right)$$

Hướng dẫn giải

$$a) m = \frac{1}{2} \quad b) m = \frac{1}{2} \quad c) m = \pm\sqrt{3}$$

Câu 9: a) Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc O và điểm $M(2; 4)$.

b) Viết phương trình parabol dạng $y = ax^2$ và đi qua $M(2; 4)$.

c) Vẽ parabol và đường thẳng trên cùng hệ trục tọa độ và tìm tọa độ giao điểm của chúng.

Hướng dẫn giải

a) $y = 2x$ b) $y = x^2$ c) $(0;0)$ và $(2;4)$

Câu 10: Trên cùng một hệ trục tọa độ, vẽ đồ thị các hàm số $y = f(x) = x^2$ và $y = g(x) = \frac{1}{2}x$.

Dựa vào đồ thị hãy giải các bất phương trình:

a) $f(x) < g(x)$ b) $f(x) \geq g(x)$.

Hướng dẫn giải

a) $x = 0; x = \frac{1}{2}$ b) $0 < x < \frac{1}{2}$ c) $x < 0$ hoặc $x > \frac{1}{2}$.

Câu 11: a) Xác định a để đồ thị hàm số đi qua $A(-1;2)$

b) Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm

c) Tìm các điểm trên đồ thị có tung độ bằng 4

d) Tìm tọa độ các điểm trên đồ thị và cách đều hai trục tọa độ.

Hướng dẫn giải

a) $a = 2$ b) $y = 2x^2$.

c) $(-\sqrt{2};4)$ và $(\sqrt{2};4)$;

d) Tập hợp các điểm cách đều hai trục tọa độ là các đường thẳng $y = x$ và $y = -x$. Ta cần tìm giao điểm của đồ thị $y = 2x^2$ với cả đường thẳng $y = x$, $y = -x$ từ đó có ba điểm

$O(0;0)$; $A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$; $B\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. $m < 1$

Câu 12: Dựa vào đồ thị hãy biện luận theo m số nghiệm của phương trình $2x^2 + 1 = m$

Hướng dẫn giải

Vẽ đồ thị $y = 2x^2$ và đường thẳng $y = m - 1$

☐ $m < 1$: Vô nghiệm.

☐ $m = 1$: 1 nghiệm.

☐ $m > 1$: 2 nghiệm.

Câu 13: Cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị hàm số (P) .

1. Xác định a biết (P) đi qua điểm $A(1;-2)$.

2. Vẽ đồ thị (P) .

3. Tìm điểm thuộc (P) có hoành độ bằng 2.

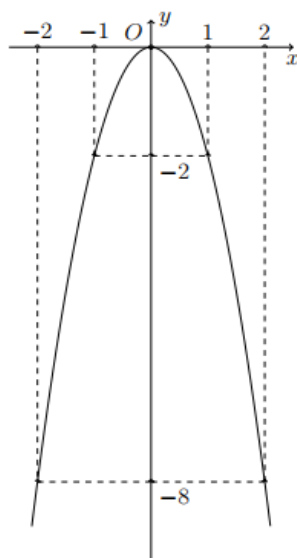
Lời giải

1. (P) đi qua điểm $A(1;-2)$ khi và chỉ khi $-2 = a.1^2 \Leftrightarrow a = -2$.

2. Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = -2x^2$	-8	-2	0	2	-8

Vẽ đồ thị.



Câu 14: Cho parabol $(P): y = \frac{x^2}{2}$ và đường thẳng $(d): y = x + 4$.

- Vẽ (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ.
- Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) .

Lời giải

- Vẽ đường thẳng (d)

Cho $x = -2 \Rightarrow y = 2$.

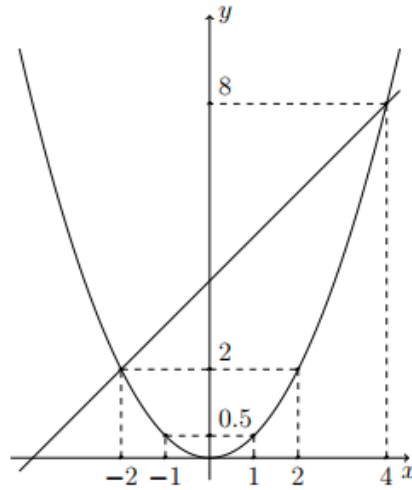
Cho $x = 4 \Rightarrow y = 8$.

Vẽ parabol (P) :

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{x^2}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

Vẽ đồ thị



2. Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x^2}{2} = x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}.$$

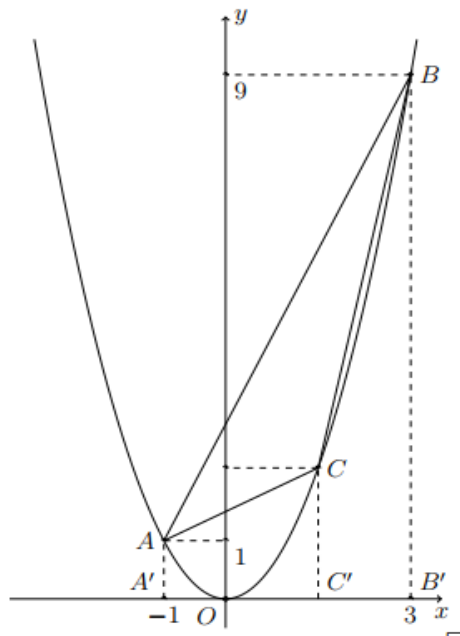
Với $x = -2 \Rightarrow y = 2$.

Với $x = 4 \Rightarrow y = 8$.

Vậy (d) và (P) có hai điểm chung có tọa độ là $(-2; 2)$ và $(4; 8)$.

Câu 15: Trên parabol $(P): y = x^2$, ta lấy hai điểm $A(-1; 1)$ và $B(3; 9)$. Xác định điểm C trên cung nhỏ AB của (P) sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Lời giải



Giả sử $C(c; c^2)$ thuộc (P) với $-1 < c < 3$.

Gọi A', B', C' là hình chiếu của A, B và C xuống trục Ox Ta có:

$$S_{AA'B'B} = \frac{(AA' + BB')A'B'}{2} = \frac{(1+9) \cdot 4}{2} = 20,$$

$$S_{AA'C'C} = \frac{(AA' + CC')A'C'}{2} = \frac{(1+c^2) \cdot (1+c)}{2},$$

$$S_{CC'B'B} = \frac{(CC' + BB')C'B'}{2} = \frac{(9+c^2) \cdot (3-c)}{2}.$$

Suy ra

$$S_{ABC} = S_{AA'B'B} - S_{CC'B'B} - S_{AA'C'C} = 6 - 2c^2 + 4c = 8 - 2(c-1)^2 \leq 8.$$

Vậy tam giác ABC lớn nhất bằng 8 khi và chỉ khi $C(1;1)$

BÀI 19. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐỊNH NGHĨA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Phương trình bậc hai một ẩn (nói gọn là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ trong đó x là ẩn; a, b, c là những số cho trước gọi là hệ số và $a \neq 0$.

Ví dụ 1. Trong các phương trình sau, những phương trình nào là phương trình bậc hai ẩn x ? Chỉ rõ các hệ số a, b, c của mỗi phương trình đó.

a) $2x^2 - 3x + 1 = 0$;

b) $x^2 - 3 = 0$;

c) $\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{x} + 2 = 0$;

d) $-5x^2 = 0$

Lời giải

a) Phương trình $2x^2 - 3x + 1 = 0$ là phương trình bậc hai với $a = 2, b = -3, c = 1$.

b) Phương trình $x^2 - 3 = 0$ là phương trình bậc hai với $a = 1, b = 0, c = -3$.

c) Phương trình $\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{x} + 2 = 0$ không phải là phương trình bậc hai.

d) Phương trình $-5x^2 = 0$ là phương trình bậc hai với $a = -5, b = 0, c = 0$.

2. CÁCH GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN CÓ DẠNG ĐẶC BIỆT

Cách giải phương trình bậc hai một ẩn dạng khuyết

Giải một phương trình bậc hai là tìm tất cả các nghiệm của nó. Dưới đây, thông qua một số ví dụ đơn giản, ta trình bày cách giải một số phương trình bậc hai dạng $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), mà khuyết số hạng bậc nhất (tức là $b = 0$) hoặc khuyết số hạng tự do (tức là $c = 0$), bằng phương pháp đặt nhân tử chung đưa về dạng tích hoặc dùng hằng đẳng thức để đưa về trái về một bình phương.

Chú ý:

- Nếu $A \cdot B = 0$ thì $A = 0$ hoặc $B = 0$.

- Nếu $A^2 = B$ ($B \geq 0$) thì $A = \sqrt{B}$ hoặc $A = -\sqrt{B}$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $2x^2 - 4x = 0$;

b) $3x^2 + 8x = 0$

Lời giải

$$a) 2x^2 - 4x = 0$$

$$b) 3x^2 + 8x = 0$$

$$2x(x - 2) = 0$$

$$x(3x + 8) = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x = 2$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x = -\frac{8}{3}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 0, x_2 = 2$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 0, x_2 = -\frac{8}{3}$

Chú ý. Để giải phương trình bậc hai dạng $x^2 + bx = c$, ta có thể cộng thêm vào hai vế của phương trình với cùng một số thích hợp để vế trái có thể biến đổi thành một bình phương. Từ đó có thể giải phương trình đã cho.

Ví dụ 4. Cho phương trình $x^2 - 4x = 1$.

a) Hãy cộng vào cả hai vế của phương trình với cùng một số thích hợp để được một phương trình mà vế trái có thể biến đổi thành một bình phương.

b) Dựa vào câu a và cách giải Ví dụ 3b, hãy giải phương trình đã cho.

Lời giải

$$a) x^2 - 4x = 1$$

$$x^2 - 4x + 4 = 1 + 4$$

$$(x - 2)^2 = 5$$

b) Từ kết quả câu a, ta có: $x - 2 = \sqrt{5}$ hoặc $x - 2 = -\sqrt{5}$, suy ra là $x = 2 + \sqrt{5}$ hoặc $x = 2 - \sqrt{5}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 2 + \sqrt{5}, x_2 = 2 - \sqrt{5}$.

3. CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Cách giải phương trình bậc hai

Để giải phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ trong trường hợp tổng quát, ta làm như sau:

- Chuyển hạng tử tự do c sang vế phải: $ax^2 + bx = -c$.

- Chia cả hai vế của phương trình cho hệ số a của x^2 : $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$.

- Cộng vào hai vế của phương trình nhận được với $\frac{b^2}{4a^2}$ để vế trái có thể biến đổi thành bình phương

của một biểu thức: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$ hay $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

Kí hiệu $\Delta = b^2 - 4ac$ và gọi là biệt thức của phương trình (Δ đọc là "delta").

Khi đó, ta có thể viết lại phương trình cuối dưới dạng $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$.

Từ đây, ta có kết quả sau:

Xét phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$.

Tính biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 5. Cho phương trình $3x^2 + 7x - 1 = 0$.

a) Xác định các hệ số a, b, c .

b) Tính biệt thức Δ .

c) Áp dụng công thức nghiệm, giải phương trình đã cho.

Lời giải

a) Ta có: $a = 3, b = 7, c = -1$.

b) Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 49 + 12 = 61$.

c) Do $\Delta > 0$, áp dụng công thức nghiệm, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-7 + \sqrt{61}}{6}, x_2 = \frac{-7 - \sqrt{61}}{6}.$$

Ví dụ 6. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$;

b) $2x^2 + 3x + 5 = 0$.

Lời giải

a) Ta có: $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$. Do đó, phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3$

b) Ta có: $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9 - 40 = -31 < 0$. Do đó, phương trình vô nghiệm.

Chú ý. Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, với $b = 2b'$ và $\Delta' = b'^2 - ac$.

- Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$

- Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$.

- Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Các công thức ở trên gọi là công thức nghiệm thu gọn.

Ví dụ 7. Xác định a, b', c rồi dùng công thức nghiệm thu gọn giải các phương trình sau:

a) $2x^2 + 6x + 1 = 0$;

b) $x^2 - 4\sqrt{3}x + 12 = 0$.

Lời giải

a) Ta có: $a = 2, b' = 3, c = 1$ và $\Delta' = 3^2 - 2 \cdot 1 = 7 > 0$.

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{7}}{2}; x_2 = \frac{-3 - \sqrt{7}}{2}$.

b) Ta có: $a = 1, b' = -2\sqrt{3}, c = 12$ và $\Delta' = (-2\sqrt{3})^2 - 1 \cdot 12 = 0$. Do đó, phương trình có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = 2\sqrt{3}$$

4. TÌM NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI BẰNG MÁY TÍNH CẦM TAY

Sử dụng máy tính cầm tay, ta có thể dễ dàng tìm nghiệm của các phương trình bậc hai một ẩn.

Ví dụ 8. Sử dụng máy tính cầm tay, tìm nghiệm của các phương trình sau:

a) $2x^2 - 5x - 4 = 0$;

b) $9x^2 - 12x + 4 = 0$;

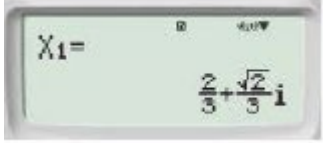
c) $-3x^2 + 4x - 2 = 0$

Lời giải

Với một loại máy tính cầm tay, sau khi mở máy ta bấm phím    để chuyển về chế độ giải phương trình bậc hai.

Tiếp theo, với từng phương trình ta thực hiện như sau:

Tìm nghiệm của phương trình	Bấm phím	Màn hình hiện	Kết luận
$2x^2 - 5x - 4 = 0$		 Bấm tiếp phím  	Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{5 + \sqrt{57}}{4},$ $x_2 = \frac{5 - \sqrt{57}}{4}$
$9x^2 - 12x + 4 = 0$			Phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{2}{3}.$

$-3x^2 + 4x - 2 = 0$		 Bấm tiếp phím  	Phương trình vô nghiệm
----------------------	---	--	------------------------

Chú ý. Để hiển thị kết quả xấp xỉ ở dạng số thập phân sau khi nhận kết quả ta bấm phím 

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

6.8. Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2 + bx + c = 0$ và xác định các hệ số a, b, c của phương trình đó.

a) $3x^2 + 2x - 1 = x^2 - x$

b) $(2x + 1)^2 = x^2 + 1$.

Lời giải

a) $3x^2 + 2x - 1 = x^2 - x$

b) $(2x + 1)^2 = x^2 + 1$

$$3x^2 - x^2 + 2x + x - 1 = 0$$

$$4x^2 + 4x + 1 - x^2 - 1 = 0$$

$$2x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$3x^2 + 4x = 0$$

Phương trình trên có $a = 2, b = 3$ và $c = -1$.

Phương trình trên có $a = 3, b = 4$ và $c = 0$.

6.9. Giải các phương trình sau:

a) $2x^2 + \frac{1}{3}x = 0$;

b) $(3x + 2)^2 = 5$.

Lời giải

a) $2x^2 + \frac{1}{3}x = 0$

b) $(3x + 2)^2 = 5$

$$x\left(2x + \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$3x + 2 = \sqrt{5} \text{ hoặc } 3x + 2 = -\sqrt{5}$$

$$3x = -2 + \sqrt{5} \text{ hoặc } 3x = -2 - \sqrt{5}$$

$$x = 0 \text{ hoặc } 2x + \frac{1}{3} = 0$$

$$x = \frac{-2 + \sqrt{5}}{3} \text{ hoặc } x = \frac{-2 - \sqrt{5}}{3}.$$

$$x = 0 \text{ hoặc } 2x = -\frac{1}{3}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{5}}{3}, x_2 = \frac{-2 - \sqrt{5}}{3}.$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x = -\frac{1}{6}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 = 0, x_2 = -\frac{1}{6}$.

6.10. Không cần giải phương trình, hãy xác định các hệ số a, b, c , tính biệt thức Δ và xác định số nghiệm của mỗi phương trình sau:

a) $11x^2 + 13x - 1 = 0$;

b) $9x^2 + 42x + 49 = 0$;

c) $x^2 - 2x + 3 = 0$.

Lời giải

a) $11x^2 + 13x - 1 = 0$

Ta có $a = 11, b = 13, c = -1$ và $\Delta = 13^2 - 4 \cdot 11 \cdot (-1) = 213 > 0$.

Vậy phương trình trên có hai nghiệm phân biệt.

b) $9x^2 + 42x + 49 = 0$

Ta có $a = 9, b = 42, c = 49$ và $\Delta = 42^2 - 4 \cdot 9 \cdot 49 = 0$.

Vậy phương trình trên có nghiệm kép.

c) $x^2 - 2x + 3 = 0$

Ta có $a = 1, b = -2, c = 3$ và $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8 < 0$.

Vậy phương trình vô nghiệm (không có nghiệm).

6.11. Dùng công thức nghiệm của phương trình bậc hai, giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 2 = 0$;

b) $4x^2 + 28x + 49 = 0$

c) $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1 = 0$.

Lời giải

a) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 2 = 0$

Ta có $\Delta = (-2\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 12 > 0$ và $\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{2\sqrt{5} + 2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{5} + \sqrt{3}, x_2 = \frac{2\sqrt{5} - 2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$.

b) $4x^2 + 28x + 49 = 0$

Ta có $\Delta = 28^2 - 4 \cdot 4 \cdot 49 = 0$.

Do đó phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{28}{2 \cdot 4} = -\frac{7}{2}$ c) $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1 = 0$

Ta có $\Delta = (-3\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 6 > 0$.

Do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{6}, x_2 = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6}$

6.12. Sử dụng máy tính cầm tay, tìm nghiệm của các phương trình sau:

a) $0,1x^2 + 2,5x - 0,2 = 0$;

b) $0,01x^2 - 0,05x + 0,0625 = 0$;

c) $1,2x^2 + 0,75x + 2,5 = 0$

Lời giải

Với mỗi loại máy tính cầm tay, sau khi mở máy ta bấm phím MODE 5 3 để chuyển về chế độ giải phương trình bậc hai.

Tiếp theo, với từng phương trình ta thực hiện các thao tác và sẽ được kết quả:

a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-25 + \sqrt{633}}{2}$; $x_2 = \frac{-25 - \sqrt{633}}{2}$

b) Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{5}{2}$

c) Phương trình vô nghiệm.

6.13. Độ cao h (mét) so với mặt đất của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu $v_0 = 19,6 \text{ m/s}$ cho bởi công thức $h = 19,6t - 4,9t^2$, ở đó t là thời gian kể từ khi phóng (giây) (theo Vật lý/ đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016). Hỏi sau bao lâu kể từ khi phóng, vật sẽ rơi trở lại mặt đất?

Lời giải

Khi vật rơi trở lại mặt đất, độ cao $h = 0$ hay $19,6t - 4,9t^2 = 0$ với $t > 0$.

Giải phương trình:

$$19,6t - 4,9t^2 = 0$$

$$t(19,6 - 4,9t) = 0$$

$$t = 0 \text{ hoặc } 19,6 - 4,9t = 0$$

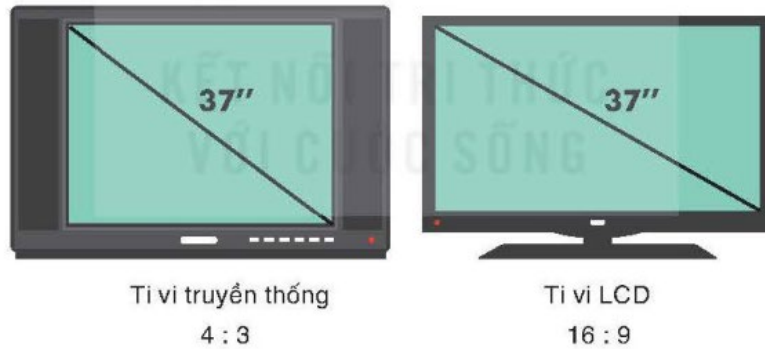
$$t = 0 \text{ hoặc } 4,9t = 19,6$$

$$t = 0 \text{ hoặc } t = 4$$

Ta thấy chỉ có giá trị $t = 4$ thỏa mãn điều kiện $t > 0$.

Vậy kể từ khi phóng sau 4 giây vật sẽ rơi trở lại mặt đất.

6.14. Kích thước màn hình ti vi hình chữ nhật được xác định bằng độ dài đường chéo. Ti vi truyền thống có định dạng 4:3, nghĩa là tỉ lệ giữa chiều dài và chiều rộng của màn hình là 4:3. Hỏi diện tích của màn hình ti vi truyền thống 37 in là bao nhiêu? Diện tích của màn hình ti vi LCD 37 in có định dạng 16:9 là bao nhiêu? Màn hình ti vi nào có diện tích lớn hơn? Ở đây, các diện tích của màn hình được tính bằng inch vuông.



Lời giải

Tỉ lệ giữa chiều dài và chiều rộng là 4 : 3 , gọi chiều dài là $4x$ (in) thì chiều rộng là $3x$ (in) ($x > 0$) .

Theo định lí Pythagore, ta có:

$$(3x)^2 + (4x)^2 = 37^2$$

$$9x^2 + 16x^2 = 1369$$

$$25x^2 = 1369$$

$$x^2 = 54,76$$

$$x = 7,4 \text{ hoặc } x = -7,4.$$

Ta thấy chỉ có $x = 7,4$ thỏa mãn điều kiện $x > 0$.

Diện tích của màn hình ti vi truyền thống 37 in là:

$$4x \cdot 3x = 12x^2 = 12 \cdot 54,76 = 657,12 \text{ (in}^2\text{)}$$

Tương tự, tỉ lệ giữa chiều dài và chiều rộng là 16 : 9 , gọi chiều dài là $16y$ (in) thì chiều rộng là $9y$ (in) ; ($y > 0$) .

Theo định lí Pythagore, ta có:

$$(9y)^2 + (16y)^2 = 37^2$$

$$81y^2 + 256y^2 = 1369$$

$$337y^2 = 1369$$

$$y^2 = \frac{1369}{337}$$

Diện tích của màn hình ti vi LCD 37 in là: $16y \cdot 9y = 144y^2 = 144 \cdot \frac{1369}{337} \approx 585 \text{ (in}^2\text{)}$

Ta thấy $657,12 > 585$.

Do đó, màn hình ti vi truyền thống có diện tích lớn hơn.

6.15. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều rộng ngắn hơn chiều dài 6 m và có diện tích là 140 m^2 .
 Tính các kích thước của mảnh vườn đó.

Lời giải

Gọi chiều rộng mảnh vườn hình chữ nhật là $x(m)(x > 0)$.

Chiều rộng ngắn hơn chiều dài 6 m nên chiều dài mảnh vườn là $x + 6(m)$.

Diện tích mảnh vườn là: $x(x + 6)(m^2)$.

Theo bài, mảnh vườn có diện tích là $280m^2$ nên ta có phương trình:

$$x(x + 6) = 280$$

$$x^2 + 6x - 280 = 0$$

Ta có $\Delta' = 3^2 - 1 \cdot (-280) = 289 > 0$ và $\sqrt{289} = 17$.

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = -3 + 17 = 14, x_2 = -3 - 17 = -20$

Ta thấy chỉ có giá trị $x_1 = 14$ thỏa mãn điều kiện $x > 0$.

Vậy chiều rộng mảnh vườn là 14 m và chiều dài mảnh vườn là $14 + 6 = 20(m)$.

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định các hệ số a, b, c của phương trình bậc hai

1. Phương pháp giải

- Khai triển rồi đưa các số hạng về vế trái, vế phải bằng 0.
- Xác định các hệ số a, b, c của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Đưa các phương, trình sau về dạng $ax^2 + bx + c = 0$ chỉ rõ các hệ số a, b, c

a) $5x^2 + 2x = 4 - x$;

b) $\frac{3}{5}x^2 + 2x - 7 = 3x + \frac{1}{2}$.

c) $2x^2 + x - \sqrt{3} = \sqrt{3}x + 1$

d) $2x^2 - 2(m - 1)x + m^2 = 0$, m là một hằng số

Lời giải

a) $5x^2 + 2x = 4 - x \Leftrightarrow 5x^2 + 3x - 4 = 0$

$a = 5; b = 3; c = -4$

b) $\frac{3}{5}x^2 + 2x - 7 = 3x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{5}x^2 - x - \frac{15}{2} = 0$

$$a = \frac{3}{5}, b = -1, c = -\frac{15}{2}$$

$$\text{c) } 2x^2 + x - \sqrt{3} = \sqrt{3}x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3} - 1 = 0$$

$$a = 2; b = 1 - \sqrt{3}, c = -\sqrt{3} - 1$$

$$\text{d) } 2x^2 - 2(m-1)x + m^2 = 0$$

$$a = 2, b = -2(m-1), c = m^2$$

Dạng 2. Giải phương trình bậc hai dạng đặc biệt

1. Phương pháp giải

- Nếu $A \cdot B = 0$ thì $A = 0$ hoặc $B = 0$.
- Nếu $A^2 = B (B \geq 0)$ thì $A = \sqrt{B}$ hoặc $A = -\sqrt{B}$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x^2 - 8 = 0; & \text{b) } 5x^2 - 20 = 0; & \text{c) } 0,4x^2 + 1 = 0; \\ \text{d) } 2x^2 + \sqrt{2}x = 0 & \text{e) } -0,4x^2 + 1,2x = 0 & \end{array}$$

Lời giải

$$\text{a) } x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

Phương trình có hai nghiệm : $x_1 = -2\sqrt{2} ; x_2 = 2\sqrt{2}$

$$\text{b) } 5x^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Tập nghiệm $S = \{-2; 2\}$

c) Vì $0,4x^2 + 1 > 0$ với mọi x nên phương trình $0,4x^2 + 1 = 0$ vô nghiệm

$$\text{d) } 2x^2 + \sqrt{2}x = 0 \Leftrightarrow x(2x + \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x + \sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Tập nghiệm $S = \left\{0; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

$$\text{e) } -0,4x^2 + 1,2x = 0 \Leftrightarrow x(-0,4x + 1,2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -0,4x + 1,2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm phương trình là : $S = \{0; 3\}$

Ví dụ 2. Cho các phương trình :

$$a) \quad x^2 + 8x = -2 \qquad b) \quad x^2 + 2x = \frac{1}{3}$$

Hãy cộng vào hai vế của mỗi phương trình cùng một số thích hợp để được một phương trình mà vế trái thành một bình phương.

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } 6x^2 + 8x = -2 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 = 14 \Leftrightarrow (x+4)^2 = 14$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4 = \sqrt{14} \\ x+4 = -\sqrt{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 + \sqrt{14} \\ x = -4 - \sqrt{14} \end{cases}$$

$$b) \quad x^2 + 2x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow (x+1)^2 = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ x+1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \\ x = -\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \end{cases}$$

Ví dụ 3. Giải phương trình : $2x^2 + 5x + 2 = 0$

Lời giải

$$2x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x = -2$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}\right) = -2 + \frac{25}{8} \Leftrightarrow 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{8} \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{5}{4} = \frac{3}{4} \\ x + \frac{5}{4} = -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 = -2; x_2 = -\frac{1}{2}$

Dạng 3. Xác định số nghiệm của phương trình bậc hai

1. Phương pháp giải

- Xác định a, b, c của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)
- Tính biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ (hay $\Delta' = b'^2 - ac$)
- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có một nghiệm (nghiệm kép).

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Không giải phương trình, hãy xác định các hệ số a, b, c , tính biệt thức Δ và xác định số nghiệm của mỗi phương trình sau :

a) $7x^2 - 2x + 3 = 0$;

b) $5x^2 + 2\sqrt{10}x + 2 = 0$

c) $\frac{1}{2}x^2 + 7x + \frac{2}{3} = 0$

d) $1,7x^2 - 1,2x - 2,1 = 0$

Lời giải

a) $a = 7, b = -2, c = 3$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 3 = -80$$

Phương trình vô nghiệm.

b) $a = 5, b = 2\sqrt{10}, c = 2$

$$\Delta = (2\sqrt{10})^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 0$$

Phương trình có nghiệm kép.

c) $a = \frac{1}{2}, b = 7, c = \frac{2}{3}$

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 49 - \frac{4}{3} = \frac{143}{3}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt.

d) $a = 1,7, b = -1,2, c = -2,1$

$$\Delta = (-1,2)^2 - 4 \cdot 1,7 \cdot (-2,1) = 15,72$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ 2. Không giải phương trình, hãy cho biết mỗi phương trình sau có bao nhiêu nghiệm:

a) $15x^2 + 4x - 2005 = 0$;

b) $\frac{-19}{5}x^2 - \sqrt{7}x + 1890 = 0$;

Lời giải

a) Vì $ac = 15 \cdot (-2005) < 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Vì $ac = \left(\frac{-19}{5}\right) \cdot 1890 < 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Dạng 4. Giải phương trình bậc hai

1. Phương pháp giải

- Xác định các hệ số a, b, c của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

- Tính Δ (hoặc Δ').

- Áp dụng công thức nghiệm hoặc công thức nghiệm thu gọn của phương trình bậc hai.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Dùng công thức nghiệm của phương trình bậc hai để giải các phương trình sau:

- a) $2x^2 - 7x + 3 = 0$; b) $6x^2 + x + 5 = 0$;
c) $6x^2 + x - 5 = 0$; d) $3x^2 + 5x + 2 = 0$;
e) $y^2 - 8y + 16 = 0$; f) $16z^2 + 24z + 9 = 0$.

Lời giải

a) $a = 2, b = -7, c = 3$

$$\Delta = (-7)^2 - 4.2.3 = 25 \text{ do đó } \sqrt{\Delta} = 5$$

Phương trình có hai nghiệm $x_1 = \frac{-(-7)+5}{2.2} = \frac{12}{4} = 3, x_2 = \frac{-(-7)-5}{2.2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Vậy $S = \left\{ \frac{1}{2}; 3 \right\}$

b) $a = 6, b = 1, c = 5$

$$\Delta = 1^2 - 4.6.5 = -119 < 0. \text{ Phương trình vô nghiệm.}$$

c) $a = 6, b = 1, c = -5$

$$\Delta = 1^2 - 4.6.(-5) = 121 \text{ do đó } \sqrt{\Delta} = 11$$

Phương trình có hai nghiệm $x_1 = \frac{-1+11}{2.6} = \frac{5}{6}, x_2 = \frac{-1-11}{2.6} = -1$.

Vậy $S = \left\{ -1; \frac{5}{6} \right\}$

d) $a = 3, b = 5, c = 2$

$$\Delta = 5^2 - 4.3.2 = 1 \text{ do đó } \sqrt{\Delta} = 1$$

Phương trình có hai nghiệm $x_1 = \frac{-5+1}{2.3} = \frac{-2}{3}; x_2 = \frac{-5-1}{2.3} = -1$

Vậy $S = \left\{ -1; \frac{-2}{3} \right\}$

e) $a = 1, b = -8, c = 16$

$$\Delta = (-8)^2 - 4.1.16 = 0$$

Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{8}{2} = 4$

f) $a = 16, b = 24, c = 9$.

$$\Delta = 24^2 - 4.16.9 = 0$$

Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{24}{2.16} = \frac{-3}{4}$

Ví dụ 2. Xác định a, b, c rồi dùng công thức nghiệm thu gọn giải các phương trình

$$\text{a) } 4x^2 + 4x + 1 = 0; \quad \text{b) } 1385x^2 - 14x + 1 = 0;$$

$$\text{c) } 5x^2 - 6x + 1 = 0; \quad \text{d) } -3x^2 + 4\sqrt{6}x + 4 = 0.$$

Lời giải

$$\text{a) } a = 4, b = 2, c = 1$$

$$\Delta = 2^2 - 4.1 = 0$$

$$\text{Phương trình có nghiệm kép: } x_1 = x_2 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{b) } a = 1385, b' = 7, c = 1.$$

$$\Delta' = (-7)^2 - 1385.1 = 49 - 1385 < 0$$

Phương trình vô nghiệm.

$$\text{c) } a = 5, b' = -3, c = 1$$

$$\Delta' = (-3)^2 - 5.1 = 4 \text{ do đó } \sqrt{\Delta} = 2$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm } x_1 = \frac{3+2}{5} = 1; \quad x_2 = \frac{3-2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ 1; \frac{1}{5} \right\}$$

$$\text{d) } a = -3, b' = 2\sqrt{6}, c = 4$$

$$\Delta' = (2\sqrt{6})^2 - (-3).4 = 36 \text{ do đó } \sqrt{\Delta} = 6$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm } x_1 = \frac{-2\sqrt{6}+6}{-3} = \frac{2\sqrt{6}-6}{3}; \quad x_2 = \frac{-2\sqrt{6}-6}{-3} = \frac{2\sqrt{6}+6}{3}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{2\sqrt{6}-6}{3}; \frac{2\sqrt{6}+6}{3} \right\}$$

Ví dụ 3. Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2 + bx + c = 0$ rồi dùng công thức nghiệm thu gọn

Để tìm giá trị gần đúng (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai) nghiệm của các phương trình:

$$\text{a) } 3x^2 - 2x = x^2 + 3; \quad \text{b) } (2x - \sqrt{2})^2 - 1 = (x+1)(x-1);$$

$$\text{c) } 3x^2 + 3 = 2(x+1); \quad \text{d) } 0,5x(x+1) = (x-1)^2.$$

Lời giải

$$\text{a) } \text{Ta có } 3x^2 - 2x = x^2 + 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$a = 2, b' = -1, c = -3. \Delta' = (-1)^2 - 2(-3) = 7.$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm } x_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2} \approx 1,82; \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2} \approx -0,82$$

$$\text{b) } \text{Ta có } (2x - \sqrt{2})^2 - 1 = (x+1)(x-1) \Leftrightarrow 4x^2 - 4\sqrt{2}x - 1 = x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 4\sqrt{2}x + 2 = 0; \quad a = 3, b' = -2\sqrt{2}, c = 2$$

$$\Delta' = (2\sqrt{2})^2 - 3.2 = 2.$$

Phương trình có hai nghiệm $x_1 = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{2}}{3} = \sqrt{2} \approx 1,41$; $x_2 = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0,47$

c) Ta có $3x^2 + 3 = 2(x+1) \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 1 = 0$; $a = 3, b' = -1, c = 1$

$\Delta' = (-1)^2 - 3.1 = -2 < 0$. Phương trình vô nghiệm.

d) $0,5x(x+1) = (x-1)^2 \Leftrightarrow 0,5x^2 - 2,5x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 2 = 0$; $a = 1, b = -2,5, c = 2$

$\Delta' = (-2,5)^2 - 1.2 = 4,25$.

Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 2,5 + \sqrt{4,25} \approx 4,65$; $x_2 = 2,5 - \sqrt{4,25} \approx 0,44$

Ví dụ 4. Giải các phương trình :

a) $25x^2 - 16 = 0$; b) $2x^2 + 3 = 0$;

c) $4,2x^2 + 5,46x = 0$; d) $4x^2 - 2\sqrt{3}x = 1 - \sqrt{3}$.

Lời giải

a) $25x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{16}{25} \Leftrightarrow x = \pm \frac{4}{5}$.

Tập nghiệm $S = \left\{ -\frac{4}{5}; \frac{4}{5} \right\}$

b) Vì $2x^2 + 3 > 0$ với mọi x nên phương trình đã cho vô nghiệm.

c) $4,2x^2 + 5,46x = 0 \Leftrightarrow x(4,2x + 5,46) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4,2x + 5,46 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{5,46}{4,2} = -1,3 \end{cases}$

Vậy $S = \{0; -1,3\}$

d) $4x^2 - 2\sqrt{3}x = 1 - \sqrt{3} \Leftrightarrow 4x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} - 1 = 0$

$a = 4, b' = -\sqrt{3}, c = \sqrt{3} - 1. \Delta' = (-\sqrt{3})^2 - 4(\sqrt{3} - 1).$

$= 3 - 4\sqrt{3} + 4 = (2 - \sqrt{3})^2$

$\sqrt{\Delta'} = 2 - \sqrt{3}$.

Phương trình có hai nghiệm: $x_1 = \frac{\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

Vậy $S = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right\}$

Ví dụ 5. Giải phương trình

a) $x^2 = 12x + 228$; b) $\frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{12} = 19$.

Lời giải

$$a) \quad x^2 = 12x + 228 \Leftrightarrow x^2 - 12x - 228 = 0$$

$$a = 1, b' = -6, c = -228. \Delta' = (-6)^2 - 1(-228) = 324; \sqrt{\Delta'} = 18;$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm: } x_1 = \frac{6+18}{1} = 24; \quad x_2 = \frac{6-18}{1} = -12$$

$$\text{Vậy } S = \{-12; 24\}$$

$$b) \quad \frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{12}x = 19 \Leftrightarrow x^2 + 7x - 228 = 0$$

$$a = 1, b' = 7, c = -228 \quad \Delta' = 7^2 - 4.1(-228) = 961 = 31^2$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm: } x_1 = \frac{-7+31}{2} = 12; \quad x_2 = \frac{-7-31}{2} = -19$$

$$\text{Vậy } S = \{-19; 12\}$$

Dạng 3: Các bài toán có liên quan đến phương trình bậc hai

Ví dụ 1. Rađa của một máy bay trực thăng theo dõi chuyển động của một ô tô trong 10 phút, phát hiện rằng vận tốc v của ô tô thay đổi phụ thuộc vào thời gian bởi công thức :

$$v = 3t^2 - 30t + 135$$

(t tính bằng phút, v tính bằng km/h).

a) Tính vận tốc của ô tô khi $t = 5$ phút.

b) Tính giá trị của t khi vận tốc ô tô bằng 120 km/h (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

a) Tính vận tốc của ô tô khi $t = 5$ phút.

$$\text{Khi } t = 5 \text{ (phút) thì } v = 3.5^2 - 30.5 + 135 = 60 \text{ (km/h)}$$

b) Khi 120 (km/h) để tìm ra t ta giải phương trình:

$$120 = 3t^2 - 30t + 135 \Leftrightarrow 3t^2 - 30t + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 10t + 5 = 0; \Delta' = 25 - 5 = 20, \sqrt{\Delta'} = 2\sqrt{5}$$

$$t_1 = 5 + 2\sqrt{5} \approx 9,47; \quad t_2 = 5 - 2\sqrt{5} \approx 0,53$$

Vì rađa chỉ theo dõi trong 10 phút nên $0 < t < 10$ do đó cả hai giá trị của t đều thích hợp.

Ví dụ 2. Cho phương trình (ẩn x) $x^2 - 2(m-1)x + m^2 = 0$

a) Tính Δ'

b) Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt? Có nghiệm kép? Vô nghiệm.

Giải

a) Ta có $a = 1, b = -(m-1), c = m^2$

$$\Delta' = (m-1)^2 - m^2 = 1 - 2m$$

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi :

$$\Delta' = 1 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$$

c) Phương trình có nghiệm kép khi $\Delta' = 1 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$

d) Phương trình vô nghiệm khi $\Delta' = 1 - 2m = 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Viết các phương trình sau dưới dạng: $ax^2 + bx + c = 0$ rồi xác định các hệ số a, b, c .

a) $x^2 + 4x^2 = 4 - m^2$

b) $x^2 + p(x - 1) = 1 - p$

c) $x^2\sqrt{2} + x - 2 = -x\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

a) $a = 1, b = 4, c = m^2 - 4;$

b) $a = 1, b = p, c = -1;$

c) $a = \sqrt{2}, b = 1 + \sqrt{2}, c = -2.$

Câu 2: Giải các phương trình:

a) $4x^2 - 9 = 0$

b) $2x^2 + 5 = 0$

c) $3x^2 - 6x = 0$

Hướng dẫn giải

a) $x = \pm \frac{3}{2}$

b) Vô nghiệm

c) $x = 0, x = 2.$

Câu 3: Giải các phương trình sau

a) $4x^2 - 9 = 0.$

b) $-2x^2 + 50 = 0.$

c) $3x^2 + 11 = 0.$

Lời giải

1. $4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{2}.$

Phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}.$

2. $-2x^2 + 50 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 25 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 5.$

Phương trình có tập nghiệm là $S = \{-5; 5\}.$

3. Vì $3x^2 + 11 > 0$ với mọi giá trị của x nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 4: Giải các phương trình sau

a) $x(x - 2) + 4x - 8 = 0.$

b) $x^2 - 4x + 2 = 0.$

c) $2x^2 + 5x = 1.$

Lời giải

a) Ta có:

$$(x-2)+4x-8=0 \Leftrightarrow x^2-2x+4x-8=0 \Leftrightarrow (x^2+2x+1)-9=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2-3^2=0 \Leftrightarrow (x-2).(x+4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-4 \end{cases}.$$

Phương trình có tập nghiệm là $S = \{-4; 2\}$.

b) Ta có: $x^2-4x+2=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4=2 \Leftrightarrow (x-2)^2=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=\sqrt{2} \\ x-2=-\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+\sqrt{2} \\ x=2-\sqrt{2} \end{cases}.$

Phương trình có tập nghiệm là $S = \{2+\sqrt{2}; 2-\sqrt{2}\}$.

c) Ta có:

$$2x^2+5x=1 \Leftrightarrow x^2+\frac{5}{2}x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2+2.x.\frac{5}{4}+\frac{25}{16}=\frac{1}{2}+\frac{25}{16}$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{33}{16} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{5}{4}=\frac{\sqrt{33}}{4} \\ x+\frac{5}{4}=-\frac{\sqrt{33}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\sqrt{33}}{4}-\frac{5}{4} \\ x=-\frac{\sqrt{33}}{4}-\frac{5}{4} \end{cases}$$

Phương trình có tập nghiệm là: $S = \left\{-\frac{5-\sqrt{33}}{4}; -\frac{5+\sqrt{33}}{4}\right\}$

Câu 5: Giải các phương trình sau bằng cách đưa về dạng tích hoặc dạng $a(x+m)^2=n$

a) $x^2-4x-12=0$

b) $4x^2-4x-3=0$

c) $x^2-x-2=0$

d) $x^2-3x-10=0$

Hướng dẫn giải

a) $(x-2)^2=16$

b) $(2x-1)^2=4$

c) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

d) $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{49}{4}.$

Câu 6: Giải các phương trình sau bằng cách áp dụng $a^2=b^2 \Leftrightarrow a=\pm b$

a) $x^2+2x+1-4(x^2-2x+1)=0$

b) $2x^2-3(2x-3)^2=0$

$$c) 9(x-2)^2 - 4(x-1)^2 = 0$$

$$d) x^2 - 6x + 7 = 0$$

Hướng dẫn giải

$$a) x = \frac{1}{3}; x = 3$$

$$b) x = \frac{18 \pm 3\sqrt{6}}{10}$$

$$c) x = \frac{8}{5}; x = 4$$

$$d) x = 3 \pm \sqrt{2}.$$

Câu 7: Giải phương trình sau:

$$a) x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$b) x^2 + 6x - 16 = 0$$

$$c) 2x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$d) x^2 - 6x + 7 = 0$$

Hướng dẫn giải

$$a) (x-1)(x-3) = 0$$

$$b) (x-2)(x+8) = 0$$

$$c) \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}$$

$$d) (x+1)(7x+5) = 0.$$

Câu 8: Xác định hệ số c trong phương trình $x^2 - 6x + c = 0$ để phương trình có một nghiệm là 5. Giải phương trình đó.

Hướng dẫn giải

$$c = 5; x = 1; x = 5.$$

Câu 9: Giải các phương trình sau:

$$b) \frac{1}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 16 = 0 \quad b) 0,4x^2 - 7x + 30 = 0$$

Lời giải

$$a) \text{ Phương trình có dạng: } ax^2 + bx + c = 0 \text{ với } a = \frac{1}{9}; b = -\frac{8}{3} \left(b' = -\frac{4}{3} \right); c = 16.$$

$$\text{Ta có: } \Delta' = (b')^2 - ac = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} \cdot 16 = 0.$$

Nên phương trình có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a} = 12.;$$

$$b) \text{ Phương trình có dạng: } ax^2 + bx + c = 0 \text{ với } a = 0,4; b = -7; c = 30.$$

$$\text{Ta có: } \Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 0,4 \cdot 30 = 1 > 0.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+1}{2 \cdot 0,4} = 10; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-1}{2 \cdot 0,4} = \frac{15}{2}.$$

Câu 10: Giải các phương trình sau:

a) $3x^2 - 5x - 8 = 0$; b) $5x^2 - \frac{10}{7}x + \frac{5}{49} = 0$;
c) $5x^2 - 3x + 15 = 0$; d) $x^2 - 4x + 1 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) $x_1 = \frac{8}{3}; x_2 = -1$ b) $x_1 = x_2 = \frac{1}{7}$
c) Vô nghiệm d) $x = 2 \pm \sqrt{3}$.

Câu 11: Giải các phương trình sau:

a) $3x^2 + 7x + 2 = 0$; b) $\frac{x^2}{3} + \frac{4x}{5} - \frac{1}{12} = 0$;
c) $(5 - \sqrt{2})x^2 - 10x + 5 + \sqrt{2} = 0$; d) $(x - 1)(x + 2) = 70$.

Hướng dẫn giải

a) $x_1 = \frac{-1}{3}; x_2 = -2$ b) $x_1 = \frac{1}{10}; x_2 = -\frac{5}{2}$
c) $x_1 = 1; x_2 = \frac{5 + \sqrt{2}}{5 - \sqrt{2}}$ d) $x_1 = 8; x_2 = 9$.

Câu 12: Giải các phương trình sau:

a) $(2 - \sqrt{5})x^2 - x + (\sqrt{5} - 1) = 0$ b) $0,4x^2 - 7x + 30 = 0$

Lời giải

a) Phương trình có dạng: $ax^2 + bx + c = 0$ với $a = 2 - \sqrt{5}; b = -1; c = \sqrt{5} - 1$.

Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2 - \sqrt{5})(\sqrt{5} - 1) = 29 - 12\sqrt{5} = (2\sqrt{5} - 3)^2 > 0$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 2\sqrt{5} - 3}{2(2 - \sqrt{5})} = -3 - \sqrt{5}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 2\sqrt{5} + 3}{2(2 - \sqrt{5})} = 1.$$

b) Phương trình có dạng: $ax^2 + bx + c = 0$ với $a = \sqrt{2}; b = 4\sqrt{3} (b' = 2\sqrt{3}); c = -2\sqrt{2}$.

Ta có: $\Delta' = (b')^2 - ac = (2\sqrt{3})^2 - \sqrt{2}(-2\sqrt{2}) = 16 > 0$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-2\sqrt{3} + 4}{\sqrt{2}} = -\sqrt{6} + 2\sqrt{2}; \quad x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-2\sqrt{3} - 4}{\sqrt{2}} = -\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$$

Câu 13: Với giá trị nào của m thì phương trình sau có nghiệm:

$$9x^2 - 6mx + m(m - 2) = 0.$$

Hướng dẫn giải

$$m \geq 0$$

Câu 14: Tìm m để phương trình sau có nghiệm kép. Tính nghiệm kép đó:

a) $2x^2 - 10x + m - 1 = 0$ b) $5x^2 - 12x + m - 3 = 0$

Hướng dẫn giải

a) $m = \frac{27}{2}$ b) $m = \frac{51}{5}$

Câu 15: Xác định m để phương trình sau vô nghiệm

a) $3x^2 - 4x + 2m = 0$ b) $m^2x^2 + mx + 5 = 0$

Hướng dẫn giải

a) $m > \frac{2}{3}$ b) Với mọi m.

Câu 16: Cho phương trình $mx^2 - (2m+1)x + (m+1) = 0$ (m là tham số) (1)

1. Giải phương trình (1) với $m = -\frac{3}{5}$.

2. Chứng minh rằng phương trình (1) luôn luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

3. Tìm giá trị của m để phương trình (1) có một nghiệm lớn hơn 2.

Lời giải

1. Với $m = -\frac{3}{5}$, thì phương trình (1) trở thành :

$$-\frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - x - 2 = 0.$$

Ta có : $\Delta = 1 - 4.3.(-2) = 25 > 0$.

Phương trình có hai nghiệm : $x_1 = \frac{1-5}{6} = -\frac{2}{3}; x_2 = \frac{1+5}{6} = 1$.

2. Ta có :

☒ Nếu $m = 0$ thì phương trình (1) trở thành $-x + 1 = 0$.

Phương trình này có nghiệm duy nhất $x = 1$.

☒ Nếu $m \neq 0$ thì phương trình (1) là phương trình bậc hai có :

$$\Delta = [-(2m+1)]^2 - 4.m.(m+1) = 1 > 0.$$

Do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Tóm lại, với mọi giá trị của m thì phương trình (1) luôn có nghiệm.

3. Nếu $m \neq 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là :

$$x_1 = \frac{(2m+1)-1}{2m} = 1; x_2 = \frac{(2m+1)+1}{2m} = \frac{m+1}{m}.$$

Vì nghiệm $x_1 = 1 < 2$ nên ta phải xét nghiệm $x_2 > 2$.

$$\frac{m+1}{m} > 2 \Leftrightarrow \frac{m+1}{m} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-m}{m} > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Vậy khi $0 < m < 1$ thì phương trình (1) có một nghiệm lớn hơn 2.

Câu 17: Chứng minh rằng phương trình $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ luôn có nghiệm với mọi a, b, c

Hướng dẫn giải

$$3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ca = 0$$

$$\Delta' = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

$$\Delta' = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$$

Câu 18: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác, chứng minh phương trình sau vô nghiệm:

$$b^2x^2 - (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0.$$

Hướng dẫn giải

$$\Delta' = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2$$

$$= (b+c+a)(b+c-a)(b+a-c) < 0.$$

LUYỆN TẬP CHUNG

A. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hai hàm số: $y = \frac{3}{2}x^2$ và $y = -x^2$.

a) Vẽ đồ thị của hai hàm số này trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Tìm điểm A thuộc đồ thị $y = \frac{3}{2}x^2$, điểm B thuộc đồ thị $y = -x^2$, biết rằng A và B đều có hoành độ $x = -\frac{3}{2}$.

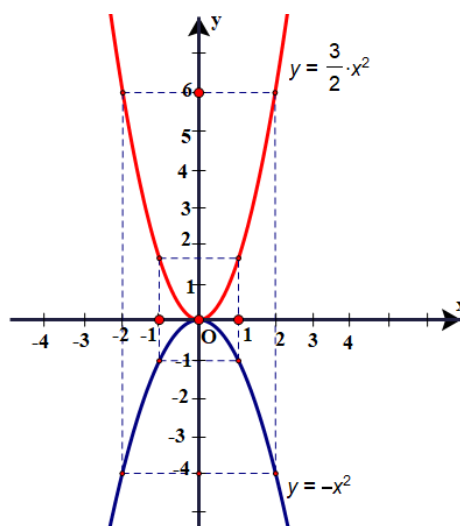
Lời giải

a) Lập bảng một số giá trị tương ứng giữa x và y của hai hàm số đã cho:

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{3}{2}x^2$	6	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	6

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4

Từ đó vẽ được đồ thị của hai hàm số này như hình dưới.



b) - Với $x = -\frac{3}{2}$, thay vào công thức $y = \frac{3}{2}x^2$ ta có: $y = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{8}$.

Vậy $A\left(-\frac{3}{2}; \frac{27}{8}\right)$.

- Với $x = -\frac{3}{2}$, thay vào công thức $y = -x^2$ ta có: $y = -\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{9}{4}$.

Vậy $B\left(-\frac{3}{2}; -\frac{9}{4}\right)$.

Ví dụ 2. Giả sử số lượng cá trong một hồ nào đó tăng, giảm theo công thức:

$$P = 50(100 + 15t - t^2), 0 \leq t \leq 15.$$

Ở đây P là số lượng cá trong hồ sau t năm tính từ ngày 01 tháng 01 năm 2020, khi lần đầu tiên số lượng cá trong hồ được ước tính. Hỏi theo mô hình này, thì:

- Vào thời điểm nào, số lượng cá trong hồ sẽ là 7500 con?
- Vào thời điểm nào, số lượng cá trong hồ sẽ trở lại như tại thời điểm ban đầu vào ngày 01 tháng 01 năm 2020?

Lời giải

a) Ta cần tìm t sao cho: $P = 7500$, tức là $50(100 + 15t - t^2) = 7500$, hay $t^2 - 15t + 50 = 0$.

Giải phương trình bậc hai này ta được hai nghiệm là $t = 5$ hoặc $t = 10$. Cả hai nghiệm này đều thích hợp.

Giá trị $t = 5$ ứng với thời điểm vào ngày 01-01-2025.

Giá trị $t = 10$ ứng với thời điểm vào ngày 01-01-2030.

Vậy theo mô hình đã cho, có hai thời điểm mà số cá trong hồ là 7500 con, đó là vào ngày 01-01-2025 hoặc vào ngày 01-01-2030.

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

6.16. Biết rằng parabol $y = ax^2$ ($a \neq 0$) đi qua điểm $A(2; 4\sqrt{3})$.

- Tìm hệ số a và vẽ đồ thị của hàm số $y = ax^2$ với a vừa tìm được.
- Tìm tung độ của điểm thuộc parabol có hoành độ $x = -1$.
- Tìm các điểm thuộc parabol có tung độ $y = 5\sqrt{3}$.

Lời giải

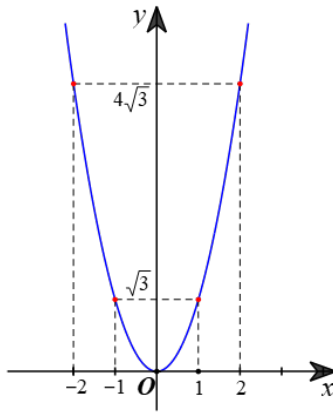
a) - Do parabol $y = ax^2$ ($a \neq 0$) đi qua điểm $A(2; 4\sqrt{3})$ nên ta thay $x = 2$ và $y = 4\sqrt{3}$ vào $y = ax^2$, ta được: $4\sqrt{3} = a \cdot 2^2$, hay $4a = 4\sqrt{3}$ nên suy ra $a = \sqrt{3}$ (thỏa mãn $a \neq 0$). Khi đó, ta có parabol $y = \sqrt{3}x^2$.

- Vẽ parabol $y = \sqrt{3}x^2$.

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
y	$4\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}$

Biểu diễn các điểm $(-2; 4\sqrt{3}), (-1; \sqrt{3}), (0; 0), (1; \sqrt{3}), (2; 4\sqrt{3})$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy và nối chúng lại ta được parabol $y = \sqrt{3}x^2$ như hình dưới đây:



b) Thay $x = -1$ vào $y = \sqrt{3}x^2$, ta được $y = \sqrt{3} \cdot (-1)^2 = \sqrt{3}$.

Vậy tung độ của điểm thuộc parabol có hoành độ $x = -1$ là $y = \sqrt{3}$

c) Thay $y = 5\sqrt{3}$ vào $y = \sqrt{3}x^2$, ta được: $\sqrt{3}x^2 = 5\sqrt{3}$ hay $x^2 = 5$, suy ra $x = \sqrt{5}$ hoặc $x = -\sqrt{5}$

Vậy có hai điểm cần tìm là $(\sqrt{5}; 5\sqrt{3})$ và $(-\sqrt{5}; 5\sqrt{3})$.

6.17. Công thức $E = \frac{1}{2}mv^2$ (J) được dùng để tính động năng của một vật có khối lượng m (kg) khi chuyển động với vận tốc v (m/s) (theo Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).

a) Giả sử một quả bóng có khối lượng 2 kg đang bay với vận tốc 6 m/s. Tính động năng của quả bóng đó.

b) Giả sử động năng của quả bóng đang bay có khối lượng 1,5 kg là 48 J, hãy tính vận tốc bay của quả bóng đó.

Lời giải

a) Vì quả bóng có khối lượng 2 kg đang bay với vận tốc 6 m/s nên $m = 2$ (kg) và $v = 6$ (m/s).

Thay $m = 2, v = 6$ vào $E = \frac{1}{2}mv^2$, ta được: $E = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6^2 = 36(J)$

Vậy động năng của quả bóng đó là 36 (J).

b) Vì động năng của quả bóng đang bay có khối lượng 1,5 kg là 48 J nên $m = 1,5$ (kg), $E = 48(J)$.

Thay $m = 1,5$ và $E = 48$ vào $E = \frac{1}{2}mv^2$, ta được: $48 = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot v^2$ hay $v^2 = 64$. Suy ra $v = 8$ (m/s) do $v > 0$.

Vậy vận tốc bay của quả bóng là 8 m/s.

6.18. Chiều dài l (mét) của một con lắc đơn tỉ lệ thuận với bình phương chu kì T (giây) của nó (chu kì là thời gian để thực hiện một dao động). Con lắc đơn có chiều dài 223,4cm thì có chu kì 3 giây.

a) Tìm công thức liên hệ giữa l và T .

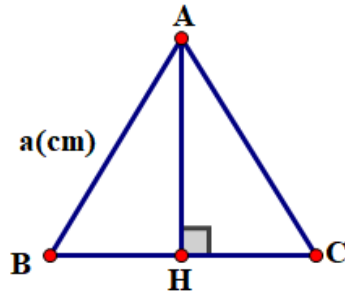
b) Tìm chiều dài của con lắc có chu kì 5 giây.

c) Chu kì của con lắc có chiều dài 0,98m là bao nhiêu?

(Trong tất cả các câu trên, kết quả được tính chính xác đến hàng phần mười).

Lời giải

a) Xét $\triangle ABC$ đều cạnh a , kẻ $AH \perp BC$.



Do $\triangle ABC$ đều nên đường cao AH đồng thời là đường trung tuyến của tam giác, nên H là trung điểm của BC . Suy ra $BH = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$ (cm).

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , theo định lý Pythagore, ta có:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \text{ Suy ra } AH^2 = AB^2 - BH^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}.$$

$$\text{Do đó } AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ (cm)}.$$

$$\text{Khi đó, diện tích của tam giác } ABC \text{ là: } S = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Vậy diện tích đáy của hình chóp tam giác đều cạnh } a \text{ là } S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$\text{b) Thể tích của hình chóp là: } V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 10 = \frac{5a^2\sqrt{3}}{6} \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$\text{Khi } a = 4, \text{ thay vào } V = \frac{5a^2\sqrt{3}}{6}, \text{ ta được: } V = \frac{5 \cdot 4^2 \cdot \sqrt{3}}{6} = \frac{40\sqrt{3}}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$

c) Nếu độ dài cạnh đáy giảm đi 2 lần thì độ dài cạnh đáy của hình chóp lúc này là $\frac{a}{2}$ (cm).

$$\text{Diện tích đáy của hình chóp là: } S' = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$\text{Thể tích của hình chóp lúc này là: } V' = \frac{1}{3}S'h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{16} \cdot 10 = \frac{5a^2\sqrt{3}}{24} = \frac{V}{4} \text{ (cm}^3\text{)}$$

Vậy độ dài cạnh đáy giảm đi hai lần thì thể tích hình chóp giảm đi 4 lần.

6.19. Sử dụng công thức nghiệm hoặc công thức nghiệm thu gọn, giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0$ b) $3x^2 - 9x + 3 = 0$;
 c) $11x^2 - 13x + 5 = 0$; d) $2x^2 + 2\sqrt{6}x + 3 = 0$.

Lời giải

a) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0$

Ta có $a = 1, b' = -\sqrt{5}, c = 1$ và $\Delta' = (-\sqrt{5})^2 - 1 \cdot 1 = 4 > 0, \sqrt{\Delta'} = \sqrt{4} = 2$.

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-(-\sqrt{5}) + 2}{1} = \sqrt{5} + 2; x_2 = \frac{-(-\sqrt{5}) - 2}{1} = \sqrt{5} - 2$.

b) $3x^2 - 9x + 3 = 0$

Ta có $a = 3, b = -9, c = 3$ và $\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 45 > 0, \sqrt{\Delta} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-(-9) + \sqrt{45}}{2 \cdot 3} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{-(-9) - \sqrt{45}}{2 \cdot 3} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

c) $11x^2 - 13x + 5 = 0$

Ta có $a = 11, b = -13, c = 5$ và $\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 11 \cdot 5 = -51 < 0$.

Do đó, phương trình vô nghiệm.

d) $2x^2 + 2\sqrt{6}x + 3 = 0$.

Ta có $a = 2, b' = \sqrt{6}, c = 3$ và $\Delta' = (\sqrt{6})^2 - 2 \cdot 3 = 0$.

Do đó, phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2}$.

6.20. Sử dụng máy tính cầm tay, tìm nghiệm gần đúng của các phương trình sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai):

a) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$;

b) $x^2 - (\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{7} = 0$.

Lời giải

Với mỗi loại máy tính cầm tay, sau khi mở máy ta bấm phím MODE 5 3 để chuyển về chế độ giải phương trình bậc hai.

Tiếp theo, với từng phương trình ta thực hiện các bước và kết quả là:

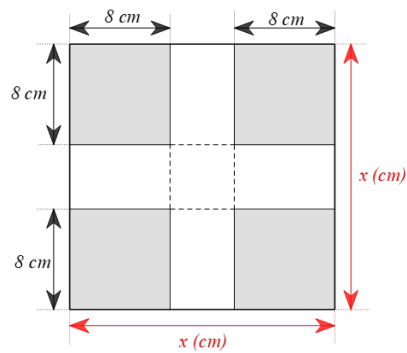
a) Phương trình vô nghiệm.

b) Phương trình vô nghiệm.

6.21. Từ một tấm tôn hình vuông, người ta cắt bỏ bốn hình vuông có độ dài cạnh 8 cm ở bốn góc, sau đó gấp thành một chiếc thùng có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp và có thể tích là 200 cm^3 . Tính độ dài cạnh của tấm tôn hình vuông ban đầu.

Lời giải

Gọi độ dài cạnh của tấm tôn ban đầu là $x(\text{cm})$ ($x > 16$).



Sau khi người ta cắt bỏ bốn hình vuông có độ dài cạnh 8 cm ở bốn góc, sau đó gập thành một chiếc thùng có dạng hình hộp chữ nhật thì:

- cạnh đáy (đáy hình vuông) là: $x - 8 \cdot 2 = x - 16$ (cm);

- chiều cao là: 8(cm).

Thể tích hình hộp chữ nhật: $8(x-16)^2 (\text{cm}^3)$.

Theo đề bài ta có phương trình: $8(x-16)^2 = 200$.

Giải phương trình:

$$8(x-16)^2 = 200$$

$$(x-16)^2 = 25$$

$$x-16 = 5 \text{ hoặc } x-16 = -5$$

$$x = 21 \text{ hoặc } x = 11$$

Ta thấy chỉ có giá trị $x = 21$ thỏa mãn điều kiện $x > 16$.

Vậy độ dài cạnh của tấm tôn ban đầu là 21 cm.

6.22. Giả sử doanh thu (nghìn đồng) của một cửa hàng bán phở trong một ngày có thể mô hình hoá bằng công thức $R(x) = x(220 - 4x)$ với $30 \leq x \leq 50$, trong đó x (nghìn đồng) là giá tiền của một bát phở. Nếu muốn doanh thu của cửa hàng đạt 3 triệu đồng thì giá bán của mỗi bát phở phải là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có 3 triệu đồng = 3000 nghìn đồng.

Vì doanh thu của cửa hàng đạt 3 triệu đồng nên $R(x) = 3000$.

Thay $R(x) = 3000$ vào $R(x) = x(220 - 4x)$, ta được:

$$3000 = x(220 - 4x)$$

$$3000 = 220x - 4x^2$$

$$4x^2 - 220x + 3000 = 0$$

$$x^2 - 55x + 750 = 0$$

Ta có $\Delta = (-55)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 750 = 25 > 0$ và $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$.

Phương trình trên có hai nghiệm phân biệt là: $x_1 = \frac{55+5}{2 \cdot 1} = 30, x_2 = \frac{55-5}{2 \cdot 1} = 25$.

Vì $30 \leq x \leq 50$ nên ta chọn $x = 30$ (nghìn đồng).

Vậy nếu muốn doanh thu của cửa hàng đạt 3 triệu đồng thì giá bán của mỗi bát phở là 30 nghìn đồng.

C. BÀI TẬP THÊM

Câu 1: Lực $F(N)$ của gió khi thổi vuông góc vào cánh buồm tỉ lệ thuận với bình phương tốc độ $v(m/s)$ của gió theo công thức: $F = av^2$, ở đó a là một hằng số. Biết rằng, khi tốc độ gió là $2m/s$ thì lực tác động lên cánh buồm của con thuyền bằng $120N$.

a) Tính hằng số a .

b) Khi tốc độ của gió là $v = 10m/s$ thì lực F của gió tác động lên cánh buồm là bao nhiêu?

c) Cánh buồm của thuyền chỉ chịu được lực tác động tối đa là $12000N$. Hỏi con thuyền có thể ra khơi khi tốc độ của gió là $90km/h$ hay không? Vì sao?

Lời giải

a) Thay $v = 2, F = 120$ vào công thức $F = av^2$, ta được: $120 = a \cdot 2^2$ hay $4a = 120 \Rightarrow a = 30$.

b) Vì $a = 30$ nên $F = 30v^2$. Với $v = 10$, ta có: $F = 30 \cdot 10^2 = 3000(N)$ c) $90km/h = 25m/s$.

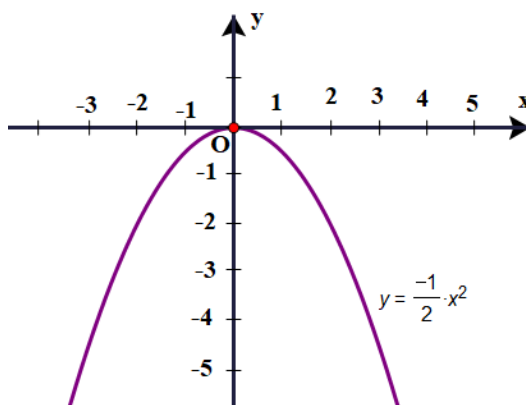
Với $v = 25$, ta có: $F = 30 \cdot 25^2 = 18750(N)$

Ta thấy $18750 > 12000$ nên con thuyền có thể ra khơi khi tốc độ gió là $90km/h$.

Câu 2: Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ có đồ thị là parabol như hình vẽ bên.

a) Các điểm $M(-2;-2); N(2;-2)$ có thuộc parabol đó hay không?

b) Nêu nhận xét về vị trí cặp điểm M và N đối với trục Oy .



Lời giải

a) Do $-2 = -\frac{1}{2} \cdot (-2)^2$ và $-2 = -\frac{1}{2} \cdot 2^2$ nên các điểm $M(-2;-2); N(2;-2)$ thuộc parabol đó.

b) Ta thấy điểm M và N đối xứng nhau qua trục Oy .

Câu 3: Cho hai hàm số $y = \frac{3}{2}x^2$ và $y = -x^2$.

a) Vẽ đồ thị của hai hàm số này cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Tìm điểm A thuộc đồ thị $y = \frac{3}{2}x^2$, điểm B thuộc đồ thị $y = -x^2$, biết rằng A và B đều có hoành độ $x = -\frac{3}{2}$.

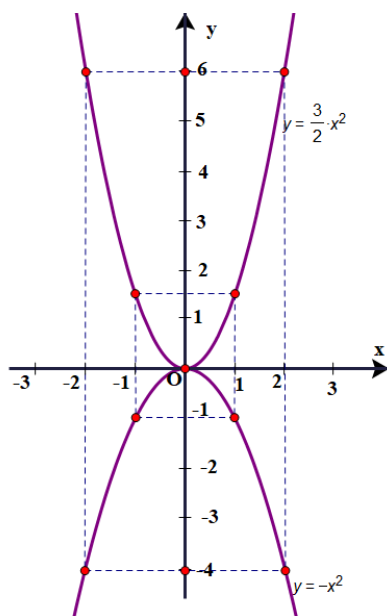
Lời giải

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{3}{2}x^2$	6	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	6

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4

Đồ thị của hai hàm số như hình vẽ.



b) Với $x = -\frac{3}{2}$, thay vào công thức $y = \frac{3}{2}x^2$, ta có: $y = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{8}$.

Vậy $A\left(-\frac{3}{2}; \frac{27}{8}\right)$.

Với $x = -\frac{3}{2}$, thay vào công thức $y = -x^2$, ta có: $y = -\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{9}{4}$.

Vậy $B\left(-\frac{3}{2}; -\frac{9}{4}\right)$.

Câu 4: Một cổng chào được thiết kế theo hình parabol là một phần của đồ thị hàm số $y = -\frac{x^2}{2}$. Khoảng cách giữa hai chân cổng là $AB = 8\text{ m}$.

a) Tính hoành độ của hai điểm A, B.

b) Tính chiều cao của cổng.

Lời giải

a) Ta có $\frac{AB}{2} = 4$. Vậy hoành độ của A và B thứ tự là -4 và 4 .

b) Thay $x = 4$ vào công thức $y = -\frac{x^2}{2}$, ta có: $y = -\frac{4^2}{2} \Rightarrow y = -8$.

Vậy chiều cao của cổng là $|-8| = 8(\text{m})$

Câu 5:

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2x$ trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy .

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Hướng dẫn: a) Vẽ parabol $y = x^2$ bằng các lập bảng giá trị (ta phải tìm ít nhất 5 giá trị).

b) Lập phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d).

Lời giải

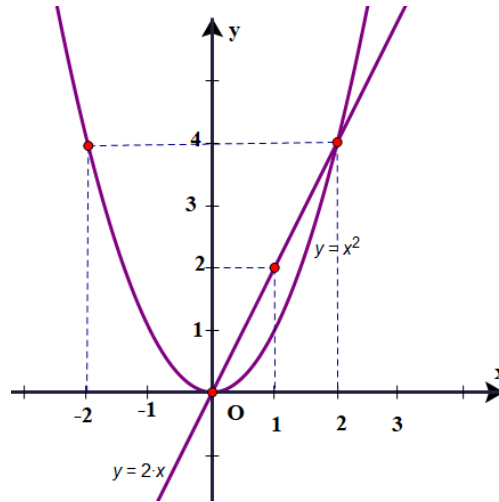
a) Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
y=x ²	4	1	0	1	4

Đồ thị (P) của hàm số $y = x^2$ là một parabol có đỉnh O và nhận trục tung làm trục đối xứng.

x	0	1
y=2x	0	2

Đồ thị (d) của hàm số $y = 2x$ là một đường thẳng qua hai điểm $(0;0)$; $(1;2)$ (xem hình vẽ).



b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d), ta có:

$$x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 2$$

+ Với $x = 0 \Rightarrow y = 0$. Vậy O là một giao điểm của (P) và (d).

+ Với $x = 2 \Rightarrow y = 4$. Vậy $A(2;4)$ là giao điểm thứ hai của (P) và (d).

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng (d) $y = \frac{1}{2}x + 2$

a) Vẽ (P) và (d) trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

c) Tìm phương trình đường thẳng (d') song song với (d) và cắt (P) tại điểm A có hoành độ bằng 2.

Hướng dẫn:

a) Lập bảng giá trị.

b) Lập phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d).

c) (d') // (d) nên phương trình (d') có dạng: $y = \frac{1}{2}x + b$ ($b \neq 2$).

Lời giải

a) Bảng giá trị:

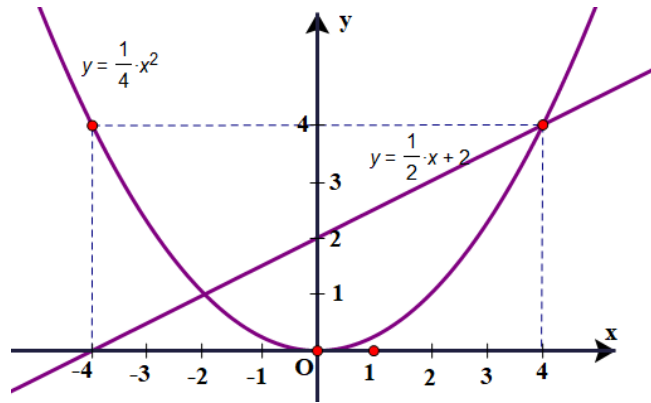
x	-4	-2	0	2	4
$y = \frac{1}{4}x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị (P) là một parabol qua O và nhận trục tung làm trục đối xứng.

Bảng giá trị:

x	0	2
$y = \frac{1}{2}x + 2$	2	3

Đường thẳng (d) qua hai điểm (0;2) và (2;3) (xem hình vẽ).



b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d), ta có:

$$\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow x^2 = 2x + 8 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{9} \Leftrightarrow |x-1| = 3$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 3 \text{ hoặc } x-1 = -3$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ hoặc } x = -2$$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d): M(4;4) và N(-2;1).

c) Đường thẳng (d') song song với đường thẳng (d) nên có phương trình $y = \frac{1}{2}x + b (b \neq 2)$

Điểm $A(2; y_0) \in (P) \Rightarrow y_0 = \frac{1}{4} \cdot (2)^2 \Rightarrow y_0 = 1$. Vậy $A(2;1); A \in (d') \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \cdot 2 + b \Rightarrow b = 0$.

Phương trình (d'): $y = \frac{1}{2}x$.

Câu 7: Giải các phương trình:

a) $5x^2 - 7x - 6 = 0$

b) $x^2 + 2x - 1 = 0$

c) $2x^2 + 5x + 1 = 0$

d) $2x^2 - (2\sqrt{6} + 3)x + 3\sqrt{6} = 0$.

Lời giải

a) Ta có: $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-6) = 169 = 13^2 > 0$.

Do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{7+13}{2 \cdot 5} = 2; x_2 = \frac{7-13}{2 \cdot 5} = -\frac{3}{5}$.

Vậy phương trình có tập nghiệm: $S = \left\{ 2; -\frac{3}{5} \right\}$

b) Ta có: $\Delta' = 1 + 1 = 2 > 0$

Nên phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = -1 + \sqrt{2}; x_2 = -1 - \sqrt{2}$.

Vậy phương trình có tập nghiệm: $S = \left\{ -1 + \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2} \right\}$

c) Ta có : $\Delta = 5^2 - 4.2.1 = 17 > 0$.

Nên phương trình có hai nghiệm phân biệt :

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{17}}{2.2} = \frac{-5 + \sqrt{17}}{4}; x_2 = \frac{-5 - \sqrt{17}}{2.2} = \frac{-5 - \sqrt{17}}{4}.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm : $S = \left\{ \frac{-5 + \sqrt{17}}{4}; \frac{-5 - \sqrt{17}}{4} \right\}$

d) Ta có : $\Delta = \left[-(2\sqrt{6} + 3) \right]^2 - 4.2.3\sqrt{6} = 33 - 12\sqrt{6} = (2\sqrt{6} - 3)^2 > 0$.

Nên phương trình có hai nghiệm phân biệt :

$$x_1 = \frac{(2\sqrt{6} + 3) + (2\sqrt{6} - 3)}{2.2} = \sqrt{6}; x_2 = \frac{(2\sqrt{6} + 3) - (2\sqrt{6} - 3)}{2.2} = \frac{3}{2}.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm : $S = \left\{ \sqrt{6}; \frac{3}{2} \right\}$.

Câu 8: Giải và biện luận phương trình (x là ẩn, m là tham số) sau:

$$x^2 - 2(m+3)x + (m^2 - 5) = 0 \quad (1)$$

1. Giải phương trình với $m = 2$.
2. Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm, nghiệm kép, vô nghiệm?
3. Tính hiệu của nghiệm lớn và nghiệm nhỏ trong trường hợp phương trình có hai nghiệm.

Lời giải

1. Với $m = 2$ ta có phương trình: $x^2 - 10x - 1 = 0$

Ta có : $\Delta' = 25 + 1 = 26 > 0$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt : $x_1 = 5 + \sqrt{26}$ và $x_2 = 5 - \sqrt{26}$

2. Phương trình (1) có :

$$\Delta' = (m+3)^2 - (m^2 - 5) = 6m + 14.$$

☒ Phương trình (1) có hai nghiệm $\Leftrightarrow 6m + 14 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{7}{3}$.

☒ Phương trình (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow 6m + 14 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{7}{3}$.

☒ Phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow 6m + 14 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{7}{3}$.

3. Khi $m > -\frac{7}{3}$, phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt :

$$x_1 = (m+3) + \sqrt{6m+14}; x_2 = (m+3) - \sqrt{6m+14}$$

Rõ ràng $x_1 > x_2$. Khi ấy $x_1 - x_2 = 2\sqrt{6m+14}$.

Câu 9. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt: $x^2 + 2x + m - 2 = 0$

Hướng dẫn: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $a = 1; b = 2; c = m - 2$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m - 2) > 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow 4 - 4m + 8 > 0 \Leftrightarrow 12 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < 3$$

Chú ý Hệ số $c = m - 2$, chứ không phải $c = -2$.

Câu 10. Tìm m để phương trình $x^2 + (2m + 1)x + m^2 = 0$ có nghiệm kép và tính nghiệm kép với m vừa tìm được.

Hướng dẫn: Xem bài toán 17.

Lời giải

- Ta có $a = 1; b = 2m + 1; c = m^2$.

Phương trình đã cho có nghiệm kép khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ (2m + 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}$$

- Với $m = -\frac{1}{4}$, phương trình đã cho có dạng:

$$x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$$

Câu 11. Chứng minh rằng phương trình $2x^2 + (2m - 1)x + m - 1 = 0$ luôn luôn có nghiệm với mọi m .

Hướng dẫn: Chứng tỏ $\Delta \geq 0, \forall m$.

Lời giải

Ta có: $a = 2; b = 2m - 1; c = m - 1$

$$\Rightarrow \Delta = (2m - 1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m - 1) = 4m^2 - 12m + 9 = (2m - 3)^2 \geq 0, \forall m.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm, với mọi m .

BÀI 20. ĐỊNH LÝ VI-ET VÀ ỨNG DỤNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. ĐỊNH LÝ VIÈTE

Ta có định lý Viète như sau:

Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ thì
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Ví dụ 1. Không giải phương trình, hãy tính biệt thức Δ (hoặc Δ') để kiểm tra điều kiện có nghiệm, rồi tính tổng và tích các nghiệm của các phương trình bậc hai sau:

a) $2x^2 + 11x + 7 = 0$;

b) $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

Lời giải

a) Ta có: $\Delta = 11^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 65 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Theo định lý Viète, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{11}{2}$; $x_1 x_2 = \frac{7}{2}$

b) Ta có: $\Delta' = 6^2 - 4 \cdot 9 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm trùng nhau x_1, x_2 .

Theo định lý Viète, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{-12}{4} = 3$; $x_1 x_2 = \frac{9}{4}$.

2. ÁP DỤNG ĐỊNH LÝ VIÈTE ĐỂ TÍNH NHẨM NGHIỆM

Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$.

- Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

- Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Ví dụ 2. Bằng cách nhẩm nghiệm, hãy giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$;

b) $5x^2 + 14x + 9 = 0$.

Lời giải

a) Ta có: $a + b + c = 1 + (-6) + 5 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 1, x_2 = 5$.

b) Ta có: $a - b + c = 5 - 14 + 9 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm: $x_1 = -1, x_2 = -\frac{9}{5}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $x^2 - 7x + 12 = 0$, biết phương trình có một nghiệm là $x_1 = 3$.

Lời giải

Gọi x_2 là nghiệm còn lại của phương trình. Theo định lý Viète, ta có: $x_1 x_2 = 12$.

Do đó, $x_2 = \frac{12}{x_1} = \frac{12}{3} = 4$.

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 3, x_2 = 4$.

3. TÌM HAI SỐ KHI BIẾT TỔNG VÀ TÍCH CỦA CHÚNG

Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình bậc hai:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$.

Ví dụ 4: Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 9, tích của chúng bằng 20.

Lời giải

Hai số cần tìm là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 9x + 20 = 0$.

Ta có: $\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 1; \sqrt{\Delta} = 1$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm: $x_1 = \frac{9-1}{2} = 4; x_2 = \frac{9+1}{2} = 5$.

Vậy hai số cần tìm là 4 và 5.

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

6.23. Không giải phương trình, hãy tính tổng và tích các nghiệm (nếu có) của các phương trình sau:

a) $x^2 - 12x + 8 = 0$;

b) $2x^2 + 11x - 5 = 0$;

c) $3x^2 - 10 = 0$;

d) $x^2 - x + 3 = 0$.

Lời giải

a) $x^2 - 12x + 8 = 0$.

Ta có: $\Delta' = (-6)^2 - 1 \cdot 8 = 28 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Theo định lí Viète, ta có: $x_1 + x_2 = 12; x_1 x_2 = 8$

b) $2x^2 + 11x - 5 = 0$.

Ta có: $\Delta = 11^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 161 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Theo định lí Viète, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{11}{2}; x_1 x_2 = -\frac{5}{2}$

c) $3x^2 - 10 = 0$.

Ta có: $\Delta' = 0^2 - 3 \cdot (-10) = 30 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Theo định lí Viète, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{0}{3} = 0; x_1 x_2 = \frac{-10}{3}$

d) $x^2 - x + 3 = 0$.

Ta có: $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -11 < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

6.24. Tính nhẩm nghiệm của các phương trình sau:

a) $2x^2 - 9x + 7 = 0$;

b) $3x^2 + 11x + 8 = 0$;

c) $7x^2 - 15x + 2 = 0$, biết phương trình có một nghiệm $x_1 = 2$.

Lời giải

a) Ta có: $a + b + c = 2 + (-9) + 7 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 1; x_2 = \frac{7}{2}$.

b) Ta có: $a - b + c = 3 - 11 + 8 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm: $x_1 = -1; x_2 = \frac{-8}{3}$.

c) Gọi x_2 là nghiệm còn lại của phương trình.

Theo định lí Viète, ta có: $x_1 x_2 = \frac{2}{7}$.

Do đó $x_2 = \frac{2}{7} : x_1 = \frac{2}{7} : 2 = \frac{1}{7}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x_1 = 2$ và $x_2 = \frac{1}{7}$.

6.25. Tìm hai số u và v , biết:

a) $u + v = 20, uv = 99$;

b) $u + v = 2, uv = 15$.

Lời giải

a) Vì $u + v = 20, uv = 99$ nên u và v là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 20x + 99 = 0$.

Ta có $\Delta' = (-10)^2 - 1 \cdot 99 = 1 > 0$ và $\sqrt{\Delta'} = 1$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm $x_1 = \frac{10+1}{1} = 11; x_2 = \frac{10-1}{1} = 9$.

Vậy $u = 11; v = 9$ hoặc $u = 9; v = 11$.

b) Vì $u + v = 2, uv = 15$ nên u và v là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x + 15 = 0$.

Ta có $\Delta' = (-1)^2 - 1 \cdot 15 = -14 < 0$ nên phương trình trên vô nghiệm.

Vậy không có số u và v nào thỏa mãn yêu cầu đề bài.

6.26. Chứng tỏ rằng nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm là x_1 và x_2 thì đa thức $ax^2 + bx + c$ phân tích được thành nhân tử như sau: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Áp dụng: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 + 11x + 18$

b) $3x^2 + 5x - 2$.

Lời giải

- Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm là x_1 và x_2 nên theo định lý Viète, ta có:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ và } x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Suy ra $b = -a(x_1 + x_2)$ và $c = ax_1 x_2$.

$$\text{Do đó: } ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1 x_2 = ax^2 - ax_1 x - ax_2 x + ax_1 x_2$$

$$= ax(x - x_1) - ax_2(x - x_1) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Vậy nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm là x_1 và x_2 thì đa thức $ax^2 + bx + c$ phân tích được thành nhân tử là: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

- **Áp dụng:** Phân tích các đa thức thành nhân tử:

a) $x^2 + 11x + 18$

$$\text{Phương trình } x^2 + 11x + 18 = 0 \text{ có } \Delta = 11^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 49 > 0 \text{ và } \sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7.$$

$$\text{Do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt là: } x_1 = \frac{-11+7}{2 \cdot 1} = -2; x_2 = \frac{-11-7}{2 \cdot 1} = -9$$

Vậy đa thức $x^2 + 11x + 18$ phân tích được thành nhân tử như sau: $x^2 + 11x + 18 = (x + 2)(x + 9)$

b) $3x^2 + 5x - 2$

$$\text{Phương trình } 3x^2 + 5x - 2 = 0 \text{ có } \Delta = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 49 > 0 \text{ và } \sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7.$$

$$\text{Do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt là: } x_1 = \frac{-5+7}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}; x_2 = \frac{-5-7}{2 \cdot 3} = -2$$

Vậy đa thức $3x^2 + 5x - 2$ phân tích được thành nhân tử như sau: $3x^2 + 5x - 2 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2)$

6.27. Một bể bơi hình chữ nhật có diện tích 500m^2 và chu vi là 150 m . Tính các kích thước của bể bơi này.

Lời giải

Gọi hai kích thước của bể bơi hình chữ nhật là $x_1; x_2(\text{m})$.

Ta có nửa chu vi và diện tích bể bơi hình chữ nhật lần lượt là $x_1 + x_2(\text{m})$ và $x_1 x_2(\text{m}^2)$.

Theo bài, bể bơi hình chữ nhật có chu vi 74 m nên nửa chu vi bể bơi hình chữ nhật là $74 : 2 = 37(\text{m})$, do đó $x_1 + x_2 = 37$.

Diện tích bề bơi hình chữ nhật là 300m^2 , do đó $x_1x_2 = 300$.

Khi đó, x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 37x + 300 = 0$.

Ta có $\Delta = (-37)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 300 = 169 > 0$ và $\sqrt{\Delta} = \sqrt{169} = 13$.

Suy ra phương trình trên có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{37+13}{2 \cdot 1} = 25; x_2 = \frac{37-13}{2 \cdot 1} = 12$

Vậy chiều dài và chiều rộng của bể bơi lần lượt là 25 m và 12 m (do chiều dài luôn lớn hơn chiều rộng).

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Không giải phương trình, tính tổng và tích các nghiệm số

1. Phương pháp giải

□ Tính Δ và chứng tỏ $\Delta \geq 0$ để phương trình có nghiệm.

□ Áp dụng định lý Vi-ét:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Đối với mỗi phương trình sau, kí hiệu x_1 và x_2 là hai nghiệm (nếu có).

Không giải phương trình, hãy điền vào những chỗ trống (...):

a) $2x^2 - 17x + 1 = 0$; $\Delta = \dots$; $x_1 + x_2 = \dots$; $x_1 \cdot x_2 = \dots$;

b) $5x^2 - x - 35 = 0$; $\Delta = \dots$; $x_1 + x_2 = \dots$; $x_1 \cdot x_2 = \dots$;

c) $8x^2 - x + 1 = 0$; $\Delta = \dots$; $x_1 + x_2 = \dots$; $x_1 \cdot x_2 = \dots$;

d) $25x^2 + 10x + 1 = 0$; $\Delta = \dots$; $x_1 + x_2 = \dots$; $x_1 \cdot x_2 = \dots$.

Lời giải

a) $\Delta = (-17)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 281$; $x_1 + x_2 = \frac{17}{2}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}$.

b) $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-35) = 701$; $x_1 + x_2 = \frac{1}{5}$; $x_1 \cdot x_2 = -7$.

c) $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 8 = -31 < 0$ phương trình vô nghiệm

d) $\Delta = 5^2 - 25 \cdot 1 = 0$; $x_1 + x_2 = -\frac{2}{5}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{25}$.

Ví dụ 2. Không giải phương trình, hãy tính tổng và tích các nghiệm (nếu có) của mỗi phương trình sau:

a) $4x^2 + 2x - 5 = 0$;

b) $9x^2 - 12x + 4 = 0$;

c) $5x^2 + x + 2 = 0$;

d) $159x^2 - 2x - 1 = 0$.

Lời giải

a) Phương trình $4x^2 + 2x - 5 = 0$ có nghiệm vì a, c trái dấu.

- b) $\Delta' = 6^2 - 9 \cdot 4 = 0; x_1 + x_2 = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}; x_1 \cdot x_2 = \frac{4}{9}.$
- c) $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 1 - 40 = -39 < 0$: phương trình vô nghiệm.
- d) Phương trình có hai nghiệm phân biệt vì $ac < 0$

$$x_1 + x_2 = \frac{2}{159}; x_1 \cdot x_2 = \frac{-1}{159}.$$

Ví dụ 3. Tìm giá trị của m để phương trình có nghiệm, rồi tính tổng và tích các nghiệm theo m .

a) $x^2 - 2x + m = 0;$ b) $x^2 + 2(m - 1)x + m^2 = 0.$

Lời giải

- a) Phương trình $x^2 - 2x + m = 0$ có nghiệm khi $\Delta' = 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1.$

Khi đó, $x_1 + x_2 = 2; x_1 \cdot x_2 = m.$

- b) Phương trình $x^2 + 2(m - 1)x + m^2 = 0$ có nghiệm khi

$$\Delta' = (m - 1)^2 - m^2 = 1 - 2m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}.$$

Khi đó $x_1 + x_2 = -2(m - 1); x_1 \cdot x_2 = m^2.$

Dạng 2. Giải phương trình bằng cách nhẩm nghiệm

1. Phương pháp giải

- Áp dụng định lý Vi-ét:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

- Nhẩm: $S = x_1 + x_2 = m + n; P = x_1 \cdot x_2 = m \cdot n.$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = m; x_2 = n.$

- Nếu $a + b + c = 0$ thì $x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a}.$

- Nếu $a - b + c = 0$ thì $x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a}.$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Dùng điều kiện $a + b + c = 0$ hoặc $a - b + c = 0$ để tính nhẩm nghiệm của mỗi phương trình sau:

- a) $35x^2 - 37x + 2 = 0;$ b) $7x^2 + 500x - 507 = 0;$
- c) $x^2 - 49x - 50 = 0;$ d) $4321x^2 + 21x - 4300 = 0$

Lời giải

- a) Ta có: $a + b + c = 35 - 37 + 2 = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = 1; x_2 = \frac{2}{35}.$

- b) Ta có: $a + b + c = 7 + 500 - 507 = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = 1; x_2 = -\frac{507}{7}.$

c) Ta có: $a - b + c = 1 + 49 - 50 = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = -1; x_2 = 50$.

d) Ta có: $a - b + c = 4321 - 21 - 4300 = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = -1; x_2 = \frac{4300}{4321}$.

Ví dụ 2. Dùng hệ thức Vi-ét để tính nhẩm các nghiệm của phương trình.

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$

b) $x^2 + 7x + 12 = 0$.

Lời giải

a) Ta có: $3 + 4 = 7$ và $3 \cdot 4 = 12$ nên phương trình đã cho có nghiệm $x_1 = 3; x_2 = 4$.

b) Ta có: $(-3) + (-4) = -7$ và $(-3) \cdot (-4) = 12$ nên phương trình đã cho có nghiệm $x_1 = -3; x_2 = -4$.

Ví dụ 3. Tính nhẩm nghiệm của các phương trình:

a) $1,5x^2 - 1,6x + 0,1 = 0$

b) $\sqrt{3}x^2 - (1 - \sqrt{3})x - 1 = 0$

c) $(2 - \sqrt{3})x^2 + 2\sqrt{3}x - (2 + \sqrt{3}) = 0;$

d) $(m - 1)x^2 - (2m + 3)x + m + 4 = 0$ với $m \neq 1$.

Lời giải

a) Ta có: $a + b + c = 1,5 - 1,6 + 0,1 = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm $x_1 = 1; x_2 = \frac{0,1}{1,5} = \frac{1}{15}$.

b) Ta có: $a - b + c = \sqrt{3} - (1 - \sqrt{3}) + 1 = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm $x_1 = -1; x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

c) Ta có: $a + b + c = 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm

$$x_1 = 1; x_2 = -\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = -(2 + \sqrt{3})^2$$

d) Ta có: $a + b + c = m - 1 - (2m + 3) + m + 4 = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm

$$x_1 = 1; x_2 = \frac{m + 4}{m - 1}.$$

Dạng 3. Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng.

1. Phương pháp giải

☐ Từ hệ thức cho trước của x, y tìm tổng $S = x + y$, tích $P = x \cdot y$.

☐ x, y là hai nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau:

a) $u + v = 32; u \cdot v = 231;$

b) $u + v = -8; u \cdot v = -105;$

c) $u + v = 2; u \cdot v = 9.$

Lời giải

a) u, v là nghiệm của phương trình $X^2 - 32X + 231 = 0$.

$$\Delta' = 16^2 - 231 = 25; \sqrt{\Delta'} = 5.$$

$$X_1 = 16 + 5 = 21; X_2 = 16 - 5 = 11.$$

Vậy $u=21$; $v=11$ hoặc $u=11$; $v=21$.

b) u, v là nghiệm của phương trình $X^2 + 8X - 105 = 0$

$$\Delta' = 16 + 105 = 121; \sqrt{\Delta'} = 11$$

$$X_1 = -4 + 11 = 7; X_2 = -4 - 11 = -15.$$

Vậy $u=7$; $v=-15$ hoặc $u=-15$; $v=7$.

c) Ta có: $S^2 - 4P = 2^2 - 4.9 = -9 < 0$ nên không có giá trị nào của u và v thỏa mãn điều kiện đã cho.

Ví dụ 2. Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau:

a) $u + v = 42, \quad u.v = 441$

b) $u + v = -42; \quad u.v = -400$

c) $u - v = 5; \quad u.v = 24$

Lời giải

a) u, v là nghiệm của phương trình $X^2 - 42X + 441 = 0$.

$$\Leftrightarrow X_1 = X_2 = 21.$$

Vậy $u = v = 21$ u, v là nghiệm của phương trình $X^2 + 42X - 400 = 0$

$$\Delta' = 441 + 400 = 841; \sqrt{\Delta'} = 29; X_1 = 8; X_2 = -50.$$

Vậy $u = 8$; $v = -50$ hoặc $u = -50$; $v = 8$. Đặt $t = -v$ Ta có: $u - v = 5; \quad u.v = 24$.

u, t là nghiệm phương trình $X^2 - 5X - 24 = 0$.

Giải ra ta được hai nghiệm $X_1 = 8, X_2 = -3$.

Vậy $u = 8, t = -3$ hoặc $u = -3, t = 8$.

Do đó $u = 8, v = 3$ hoặc $u = -3, v = -8$.

Dạng 4. Phân tích $ax^2 + bx + c$ thành nhân tử

1. Phương pháp giải

Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thì $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử.

a) $2x^2 - 5x + 3$;

b) $3x^2 + 8x + 2$.

Lời giải

a) $2x^2 - 5x + 3 = 2(x - 1)\left(x - \frac{3}{2}\right) = (x - 1)(2x - 3);$

b) $3x^2 + 8x + 2 = 3\left(x - \frac{-4 - \sqrt{10}}{3}\right)\left(x - \frac{-4 + \sqrt{10}}{3}\right) = 3\left(x + \frac{4 + \sqrt{10}}{3}\right)\left(x + \frac{4 - \sqrt{10}}{3}\right).$

Ví dụ 2. Rút gọn phân thức: $P = \frac{x^2 - 9x + 8}{2x^2 - 3x + 1}$

Hướng dẫn: Phân tích các tam thức ở tử số và mẫu số thành nhân tử.

Lời giải

Xét phương trình $x^2 - 9x + 8 = 0$, ta có: $a = 1; b = -9; c = 8 \Rightarrow a + b + c = 1 - 9 + 8 = 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 1; x_2 = 8$. Vậy $x^2 - 9x + 8 = 1 \cdot (x - 1)(x - 8)$.

Tương tự: $2x^2 - 3x + 1 = 2 \cdot (x - 1) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = (x - 1)(2x - 1)$. Điều kiện: $x \neq 1$ và $x \neq \frac{1}{2}$.

Vậy $\frac{x^2 - 9x + 8}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{(x - 1)(x - 8)}{(x - 1)(2x - 1)} = \frac{x - 8}{2x - 1}$.

Ví dụ 3. Rút gọn phân thức: $P = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 5\sqrt{x} + 6}$

Hướng dẫn: Đặt $a = \sqrt{x}; a \geq 0 \Rightarrow x = a^2$. Rút gọn phân thức theo a .

Lời giải

Đặt $a = \sqrt{x}, a \geq 0 \Rightarrow x = a^2$. Ta có: $P = \frac{a - 1}{a^2 - 5a + 6}$

Xét phương trình $a^2 - 5a + 6 = 0$; phương trình hai nghiệm: $a_1 = 1$ và $a_2 = 6$.

$\Rightarrow a^2 - 5a + 6 = 1 \cdot (a - 1)(a - 6) = (a - 1)(a - 6)$. Vậy $P = \frac{a - 1}{(a - 1)(a - 6)} = \frac{1}{a - 6} (a \neq 1; a \neq 6)$

Thay $a = \sqrt{x} \Rightarrow P = \frac{1}{\sqrt{x} - 6}$.

Dạng 5. Lập phương trình bậc hai khi biết hai nghiệm của nó

1. Phương pháp giải

- ☐ Tính tổng hai nghiệm $S = x_1 + x_2$ và tích hai nghiệm $P = x_1 x_2$.
- ☐ Phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ là $X^2 - SX + P = 0$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Lập phương trình bậc hai có các nghiệm là cặp số sau:

a) 7 và 3 ;

b) $1 + \sqrt{2}$ và $1 - \sqrt{2}$.

Lời giải

a) Ta có tổng $S = 7 + 3 = 10$; tích $P = 7 \cdot 3 = 21$.

Vậy 7 và 3 là nghiệm của phương trình $X^2 - 10X + 21 = 0$.

b) Ta có $S = (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2$ và $P = (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1$.

Vậy $1 + \sqrt{2}$ và $1 - \sqrt{2}$ là hai nghiệm của phương trình $X^2 - 2X - 1 = 0$.

Ví dụ 2.

a) Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{1}{10-\sqrt{72}}$ và $\frac{1}{10+6\sqrt{2}}$.

b) Lập phương trình bậc hai có hệ số nguyên và có một nghiệm là $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

Lời giải

a) Ta có $S = x_1 + x_2 = \frac{1}{10-\sqrt{72}} + \frac{1}{10+6\sqrt{2}} = \frac{20}{28}$ và $P = x_1 x_2 = \frac{1}{10-\sqrt{72}} \cdot \frac{1}{10+6\sqrt{2}} = \frac{1}{28}$.

Vậy $x_1; x_2$ là nghiệm phương trình $x^2 - \frac{20}{28}x + \frac{1}{28} = 0$.

Hay $28x^2 - 20x + 1 = 0$

b) Ta có: $x_1 = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}{-2} = \frac{8-2\sqrt{15}}{-2} = \sqrt{15} - 4$

Ta chọn nghiệm thứ hai x_2 sao cho $x_1 + x_2$ và $x_1 x_2$ đều là các số nguyên.

Chọn $x_2 = -\sqrt{15} - 4$

Khi đó: $S = x_1 + x_2 = -8$; $P = x_1 x_2 = -(\sqrt{15} + 4)(\sqrt{15} - 4) = 1$.

Vậy $x_1 x_2$ là nghiệm của phương trình: $x^2 + 8x + 1 = 0$.

Dạng 6. Dấu nghiệm của phương trình bậc hai

1. Phương pháp giải

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$

* Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0$.

* Phương trình có hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$

* Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

* Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m + 1 = 0$ (1)

Định m để phương trình:

- a) Có hai nghiệm trái dấu;
- b) Có hai nghiệm dương phân biệt
- c) Có đúng một nghiệm dương.

Lời giải

$$\Delta' = (m-1)^2 - (m+1) = m^2 - 3m = m(m-3)$$

$$s = 2(m-1); P = m+1$$

a) (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow m < -1$

b) (1) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m(m-3) > 0 \\ 2(m-1) > 0 \\ m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

c) Có các trường hợp xảy ra:

i) (1) Có nghiệm kép dương: $\begin{cases} \Delta' = 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m-3) = 0 \\ m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$

ii) (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow m < -1$

iii) (1) có một nghiệm bằng 0 và nghiệm còn lại dương

(1) có 1 nghiệm $x_1 = 0 \Leftrightarrow m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 < 0 \end{cases}$

Vậy $m = 3$ hoặc $m = -1$ thì phương trình có đúng 1 nghiệm dương.

Ví dụ 2. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm trái dấu: $x^2 + 4x + m = 0$

Hướng dẫn: Xét $ac < 0 \Leftrightarrow -4ac > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > b^2 \geq 0$. Vậy $\Delta > 0$. Lại có $ac < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow x_1 x_2 < 0$.

Vậy hai nghiệm trái dấu.

Lời giải

Ta có: $a = 1; b = 4; c = m$. Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Nhận xét: Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt âm:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ m > 0 \\ -4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4$$

Ví dụ 3. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt dương: $x^2 - 2x + m = 0$

Lời giải

Ta có: $a = 1; b = -2 \Rightarrow b' = -1; c = m$. Vậy $\Delta' = 1 - m$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt dương khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ m > 0 \\ 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1$$

Ví dụ 4. Tìm m để phương trình $x^2 - 3x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ và thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2$.

Hướng dẫn: $x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < 1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow x_1 - 1 < 0 < x_2 - 1$. Vậy $x_1 - 1$ và $x_2 - 1$ trái dấu.

Lời giải

Ta có: $a = 1; b = -3; c = m - 1$.

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 - 1$ và $x_2 - 1$ trái dấu khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 4(m - 1) > 0 \quad (1) \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0 \quad (2) \end{cases}$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow m < \frac{13}{4}$.

Với điều kiện $m < \frac{13}{4}$, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 3; x_1 x_2 = m - 1$.

Ta có: (2) $\Leftrightarrow (m - 1) - 3 + 1 < 0 \Leftrightarrow m < 3$. Kết hợp $m < 3$ và $m < \frac{13}{4} \Rightarrow m < 3$.

Cách khác: Đặt $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$, thế t vào phương trình đã cho, ta có:

$$(t + 1)^2 - 3(t + 1) + m - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t + m - 3 = 0 \quad (*)$$

Điều kiện $x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < 0 < x_2 - 1$. Khi đó, gọi $t_1 = x_1 - 1; t_2 = x_2 - 1$ là hai nghiệm phương trình (*).

Vậy $t_1 < 0 < t_2 \Leftrightarrow m - 3 < 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Nhận xét: Cách thứ hai, gọi là đặt ẩn phụ; ta không phải tìm điều kiện: $\Delta > 0$.

Dạng 7. Biểu thức đối xứng giữa các nghiệm x_1, x_2 của phương trình bậc hai

1. Phương pháp giải

* Biểu thức x_1, x_2 gọi là đối xứng nếu ta thay x_1 bởi x_2 và x_2 bởi x_1 thì biểu thức không đổi.

* Biểu diễn biểu thức đối xứng qua S và P (tổng và tích các nghiệm số)

Chẳng hạn

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3PS$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{S}{P}; \quad \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{S^2 - 2P}{P}$$

* Từ hệ thức Vi-ét tính S và P rồi thay vào biểu thức đối xứng.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của phương trình : $x^2 + mx + 1 = 0$. Tính giá trị các biểu thức sau :

a) $x_1^3 + x_2^3$;

b) $\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2}$.

Lời giải

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |m| \geq 2$

Theo hệ thức Vi-ét : $S = x_1 + x_2 = -m$; $P = x_1x_2 = 1$.

a) Ta có $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3PS = -m^3 + 3m$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} &= \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \right)^2 - 2 \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_1} = \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} \right) - 2. \\ &= \left(\frac{S^2 - 2P}{P} \right) - 2 = (m^2 - 2) - 2 = m^2 - 4. \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Giải phương trình $x^2 - 2(m-1)x - m - 3 = 0$ (1) (với m là tham số).

1. Giải phương trình với $m = -3$.

2. Với giá trị nào của m thì phương trình (1) có các nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$

Lời giải

1. Với $m = -3$ ta có phương trình $x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(x+8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -8 \end{cases}$.

2. Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khi

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 + (m+3) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 + m + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0 \text{ đúng với mọi } m$$

Vậy chứng tỏ phương trình có 2 nghiệm phân biệt với mọi m .

Theo hệ thức Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = -m-3 \end{cases}$$

Ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 10$$

$$\Leftrightarrow 4(m-1)^2 + 2(m+3) = 10$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 6m + 10 = 10$$

$$\Leftrightarrow 2m(2m-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy với $m = 0$ hoặc $m = \frac{3}{2}$ thỏa yêu cầu bài toán

Ví dụ 3. Tìm m để phương trình $x^2 + 5x + 3m - 1 = 0$ (x là ẩn số, m là tham số) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 - x_2^3 + 3x_1 x_2 = 75$

Lời giải

$$\Delta = 5^2 - 4.1.(3m-1) = 29 - 12m$$

$$\text{Để phương trình có hai nghiệm phân biệt} \Rightarrow \Delta \geq 0 \Rightarrow m \leq \frac{29}{12}$$

$$\text{Áp dụng hệ thức Vi-ét} \begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1 x_2 = 3m - 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } x_1^3 - x_2^3 + 3x_1 x_2 = 75$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)((x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2) + 3x_1 x_2 = 75$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)(25 - x_1 x_2) + 3x_1 x_2 = 75$$

$$\Leftrightarrow 25(x_1 - x_2) - (x_1 - x_2)x_1 x_2 + 3x_1 x_2 = 75$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = 3$$

$$\text{Kết hợp } x_1 + x_2 = -5 \text{ suy ra } x_1 = -1; x_2 = -4 \text{ Thay vào } x_1 x_2 = 3m - 1 \text{ suy ra } m = \frac{5}{3}$$

Vậy $m = \frac{5}{3}$ là giá trị cần tìm

Ví dụ 4. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + m - 1 = 0$ (m là tham số)

a) Giải phương trình đã cho với $m = 0$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 4$

Lời giải

a) Với $m = 0$, phương trình đã cho trở thành: $x^2 - 2x - 1 = 0$

$$\Delta' = 2; x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Vậy với $m = 0$ thì nghiệm của phương trình đã cho là $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

b) $\Delta' = m + 2$ Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -2$

Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = m^2 + m - 1 \end{cases}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 4 &\Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 4 \Leftrightarrow \frac{2(m+1)}{m^2 + m - 1} = 4 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 1 \neq 0 \\ m + 1 = 2(m^2 + m - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 1 \neq 0 \\ 2m^2 + m - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện $\Rightarrow m \in \left\{1; -\frac{3}{2}\right\}$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 5. Cho phương trình $\frac{1}{2}x^2 - mx + \frac{1}{2}m^2 + 4m - 1 = 0$ (m là tham số).

a) Giải phương trình đã cho với $m = -1$.

b) Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = x_1 + x_2$

Lời giải

a) Với $m = -1$ phương trình trở thành $\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 9 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 - \sqrt{10} \\ x_2 = -1 + \sqrt{10} \end{cases}$$

b) Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta > 0$

$$\Leftrightarrow (-m)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}m^2 + 4m - 1\right) > 0 \Leftrightarrow -8m + 2 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$$

Để phương trình có nghiệm khác 0 $\Leftrightarrow \frac{1}{2}m^2 + 4m - 1 \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 \neq -4 - 3\sqrt{2} \\ m_2 \neq -4 + 3\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = x_1 + x_2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1 x_2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = 0 \\ m^2 + 8m - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -4 - \sqrt{19} \\ m = -4 + \sqrt{19} \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện ta được } \begin{cases} m = 0 \\ m = -4 - \sqrt{19} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} m = 0 \\ m = -4 - \sqrt{19} \end{cases} \text{ là các giá trị cần tìm.}$$

Ví dụ 6. Cho phương trình $x^2 - 2x + m + 3 = 0$ (m là tham số).

a) Tìm m để phương trình có nghiệm $x = -1$. Tính nghiệm còn lại.

b) Tìm m để hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $x_1^3 + x_2^3 = 8$

Lời giải

a) Vì phương trình $x^2 - 2x + m + 3 = 0$ có nghiệm $x = -1$ nên ta có:

$$(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + m + 3 = 0 \Leftrightarrow m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = -6$$

Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có:

$$x_1 + x_2 = 2 \Leftrightarrow -1 + x_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = 3$$

Vậy $m = 6$ và nghiệm còn lại là $x = 3$.

$$\text{b) } \Delta' = 1^2 - 1 \cdot (m + 3) = -m - 2$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < -2$

$$\text{Theo hệ thức Vi-ét, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = m + 3 \end{cases}$$

Ta có

$$x_1^3 + x_2^3 = 8$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 8$$

$$\Leftrightarrow 2^3 - 3 \cdot (m + 3) \cdot 2 = 8$$

$$\Leftrightarrow 6(m + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow m + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -3 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $m = -3$ là giá trị cần tìm.

Dạng 8. Xác định tham số để phương trình bậc hai có nghiệm thỏa điều kiện cho trước (biểu thức không đối xứng)

1. Phương pháp giải

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$)

* Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0$.

* Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm $\Delta \geq 0$.

* Từ hệ thức đã cho và hệ thức Vi-ét giải hệ đối với nghiệm x_1, x_2 rồi thay vào phương trình thứ ba của hệ để tìm tham số m ;

* Kiểm tra lại m có thỏa điều kiện có nghiệm không rồi kết luận.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Xác định m để phương trình $x^2 + 2x + m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa: $3x_1 + 2x_2 = 1$.

Lời giải

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$ (*)

Theo hệ thức Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 x_2 = m \end{cases}$$

Kết hợp với giả thiết $3x_1 + 2x_2 = 1$ ta có hệ:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 & (1) \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 & (2) \\ x_1 x_2 = m & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) giải ra ta được: $x_1 = 5; x_2 = -7$.

Thay vào (3) ta được: $m = -35$ (thỏa (*)). Vậy $m = -35$.

Ví dụ 2. Cho phương trình $x^2 - 4x - m^2 - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $x_2 = -5x_1$.

Lời giải

Có $\Delta' = (-2)^2 - 1 \cdot (-m^2 - 1) = m^2 + 5 > 0 \forall m$.

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo định lý Viét, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 4$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -m^2 - 1$

Giải hệ
$$\begin{cases} x_2 = -5x_1 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow -5x_1 + x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = -1 \Rightarrow x_2 = 5.$$

Ví dụ 3. Cho phương trình $x^2 - 2(k-1)x - 4k = 0$. Tìm k để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $3x_1 - x_2 = 2$.

Lời giải

Có $\Delta' = [-(k-1)]^2 - 1 \cdot (-4k) = (k-1)^2 + 4k = (k+1)^2$

Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $k \neq -1$

Theo định lý Viét, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2k - 2$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -4k$

Giải hệ
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 2k - 2 \end{cases} \Rightarrow 4x_1 = 2k \Rightarrow x_1 = \frac{k}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{3k-4}{2}.$$

Thay $x_1 = \frac{k}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{3k-4}{2}$ vào $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -4k$, ta được

$$\frac{k}{2} \cdot \frac{3k-4}{2} = -4k \Leftrightarrow 3k^2 + 12k = 0 \Leftrightarrow k = 0, k = -4 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $k = 0, k = -4$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4. Cho phương trình $x^2 - 6x + m + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $x_2 = x_1^2$.

Lời giải

$$\text{Có } \Delta' = (-3)^2 - 1 \cdot (m+3) = 6 - m.$$

Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 6 - m > 0 \Leftrightarrow m < 6$

$$\text{Theo định lý Viét, ta có } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 6, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m + 3$$

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} x_2 = x_1^2 \\ x_1 + x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_1 - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -3 \Rightarrow x_1 = 2.$$

$$\square \text{ Với } x_1 = -3 \Rightarrow x_2 = 9 \text{ thay vào } x_1 x_2 = m + 3 \Rightarrow m = -30 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\square \text{ Với } x_1 = 2 \Rightarrow x_2 = 4 \text{ thay vào } x_1 x_2 = m + 3 \Rightarrow m = 5 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = -30; m = 5$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 5. Tìm tham số m để phương trình $x^2 - 5x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 - 2x_1 x_2 + 3x_2 = 1$.

Lời giải

Xét phương trình: $x^2 - 5x + m - 3 = 0$. Ta có:

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m - 3) = 37 - 4m$$

Để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thì

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \text{ (luôn đúng)} \\ 37 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{37}{4}.$$

Áp dụng hệ thức Viét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 x_2 = m - 3 \end{cases}$$

$$\text{Vì } x_1 + x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = 5 - x_1$$

$$\text{Ta có: } x^2 - 5x + m - 3 = 0 \Leftrightarrow m - 3 = 5x - x^2$$

Mà x_1 là nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + m - 3 = 0$ nên $m - 3 = 5x_1 - x_1^2$. Ta có:

$$x_1^2 - 2x_1 x_2 + 3x_2 = 1 \Leftrightarrow x_1^2 - 2(m - 3) + 3(5 - x_1) = 1$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 2(5x_1 - x_1^2) + 3(5 - x_1) = 1 \Leftrightarrow x_1^2 - 10x_1 + 2x_1^2 + 15 - 3x_1 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x_1^2 - 13x_1 + 14 = 0 \Leftrightarrow (x_1 - 2)(3x_1 - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \Rightarrow m - 3 = 5 \cdot 2 - 2^2 \Leftrightarrow m = 9 \text{ (tm)} \\ x_1 = \frac{7}{3} \Rightarrow m - 1 = 5 \cdot \frac{7}{3} - \left(\frac{7}{3}\right)^2 \Leftrightarrow m = \frac{83}{9} \text{ (tm)} \end{cases}$$

Vậy $m = 9, m = \frac{83}{9}$ là các giá trị cần tìm.

Dạng 9. Tìm hệ thức giữa các nghiệm x_1, x_2 của phương trình bậc hai không phụ thuộc tham số

1. Phương pháp giải

- Điều kiện để phương trình bậc hai có nghiệm : $\Delta \geq 0$;
- Từ hệ thức Vi-ét tìm S, P theo tham số m ;
- Khử tham số m từ S, P để có hệ thức giữa S, P (tức là hệ thức giữa x_1, x_2) Không phụ thuộc tham số m .

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x - m - 3 = 0$ (1)

1. Giải phương trình với $m = -3$.
2. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào giá trị của m .

Lời giải

1. Với $m = -3$ ta có phương trình $x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(x+8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -8. \end{cases}$

2. Phương trình (1) có 2 nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 + (m+3) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 + m + 3 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \geq 0 \text{ đúng}$$

với mọi m .

Chứng tỏ phương trình có 2 nghiệm phân biệt với mọi m .

Theo hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) & (1) \\ x_1 x_2 = -m-3. & (2) \end{cases}$

Từ (2) ta có $m = -x_1 x_2 - 3$ thế vào (1) ta có

$$x_1 + x_2 = 2(-x_1 x_2 - 3 - 1) = -2x_1 x_2 - 8 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2x_1 x_2 + 8 = 0. \text{ Đây là hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc } m .$$

Ví dụ 2. Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của phương trình : $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 1 = 0$

Tìm hệ thức giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m .

Lời giải

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = (m-1)^2 - (m^2 - 1) = -2m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$.

Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có : $\begin{cases} S = 2(m-1) & (1) \\ P = m^2 - 1 & (2) \end{cases}$

Từ (1) suy ra $m = \frac{S+2}{2}$ thay vào (2) thì được : $P = \left(\frac{S+2}{2}\right)^2 - 1 \Leftrightarrow 4P = S^2 + 4S$.

Vậy hệ thức cần tìm là : $(x_1 + x_2)^2 + 4(x_1 + x_2) = 4x_1 x_2$.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Dùng định lí Vi-ét để nhẩm nghiệm các phương trình sau:

a) $x^2 - 10x + 16 = 0$; d) $x^2 - 7x + 10 = 0$;

b) $x^2 - 15x + 50 = 0$; e) $x^2 - 3x - 4 = 0$;

c) $x^2 - 6x + 5 = 0$; g) $x^2 - x - 20 = 0$;

Hướng dẫn giải

a) $x_1 = 2$; $x_2 = 8$ b) $x_1 = 5$; $x_2 = 10$

c) $x_1 = 1$; $x_2 = 5$ d) $x_1 = 2$; $x_2 = 5$

e) $x_1 = -1$; $x_2 = 4$ g) $x_1 = -4$; $x_2 = 5$

Câu 2: Dùng điều kiện $a + b + c = 0$ hoặc $a - b + c = 0$ để tính nhẩm nghiệm của mỗi phương trình sau:

a) $(m+1)x^2 + 3mx + 2m - 1 = 0$ ($m \neq -1$).

b) $(2m-1)x^2 - mx - m - 1 = 0$ ($m \neq \frac{1}{2}$).

Hướng dẫn giải

a) $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{1-2m}{m+1}$

b) $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{1-m}{2m-1}$.

Câu 3: Lập các phương trình bậc hai có nghiệm là các cặp số sau:

a) 10 và 8; b) 10 và -8; c) 3 và $\frac{1}{4}$;

d) $-\frac{3}{4}$ và $-\frac{2}{3}$; e) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ và $\sqrt{2} - \sqrt{3}$;

Hướng dẫn giải

a) $x^2 - 18x + 80 = 0$ b) $x^2 - 2x - 80 = 0$

c) $4x^2 - 13x + 3 = 0$ d) $12x^2 + 17x + 6 = 0$

e) $x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 = 0$.

Câu 4: Tìm hai số a, b biết tổng $S = a + b = -3$ và tích $P = ab = -4$.

Lời giải

Vì $a + b = -3$ và $ab = -4$ nên a, b là nghiệm của phương trình $x^2 + 3x - 4 = 0$. Giải phương trình trên ta được $x_1 = 1$ và $x_2 = -4$. Vậy nếu $a = 1$ thì $b = -4$, nếu $a = -4$ thì $b = 1$.

Câu 5: Cho phương trình $x^2 - 5x + 2 = 0$. Không giải phương trình, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Hãy tính giá trị của biểu thức

$$\text{a) } A = x_1^2 + x_2^2.$$

$$\text{b) } B = |x_1 - x_2|.$$

$$\text{c) } C = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}.$$

$$\text{d) } D = \frac{x_1}{\sqrt{x_2}} + \frac{x_2}{\sqrt{x_1}}.$$

Lời giải

Vì $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 17 > 0$ nên phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Theo hệ thức Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = 5, x_1 x_2 = 2$

a) Ta có:

$$A = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 5^2 - 2 \cdot 2 = 21$$

b) Ta có:

$$B = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2} = \sqrt{17}$$

c) Vì $x_1 + x_2 > 0$ và $x_1 x_2 > 0$ nên $x_1 > 0, x_2 > 0$. Ta có

$$C = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3 \cdot x_2^3} = \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)}{(x_1 x_2)^3} = \frac{5^3 - 3 \cdot 2 \cdot 5}{2^3} = \frac{95}{8}$$

d) Ta có:

$$1. \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2} = \sqrt{x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2}} = \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}.$$

$$\text{Suy ra } D = \frac{x_1 \sqrt{x_1} + x_2 \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2}} = \frac{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1 x_2})}{\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{(5 + \sqrt{2})\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$

Câu 6: Tìm hai số x và y biết

$$\text{a) } x + y = 18 \text{ và } xy = 77.$$

$$\text{b) } x + y = -3 \text{ và } xy = 5.$$

$$\text{c) } x - y = 2\sqrt{3} \text{ và } xy = 1.$$

$$\text{d) } x^2 + y^2 = 34 \text{ và } xy = -15.$$

Lời giải

a) Vì $x + y = 18$ và $xy = 77$ nên x, y là hai nghiệm của phương trình $t^2 - 18t + 77 = 0$.

Giải phương trình trên ta được $t = 7, t = 11$.

Vậy hai số x, y cần tìm là $(x; y) = (7; 11), (x; y) = (11; 7)$.

b) Vì $x + y = -3$ và $xy = 5$ nên x, y là hai nghiệm của phương trình $t^2 + 3t + 5 = 0$

Phương trình trên có $\Delta = -11 < 0$ nên vô nghiệm.

Vậy không tồn tại hai số x, y thỏa đề bài.

c) Vì $x + (-y) = 2\sqrt{3}$ và $x \cdot (-y) = -1$ nên $x, -y$ là hai nghiệm của phương trình $t^2 - 2\sqrt{3}t - 1 = 0$

Giải phương trình trên ta được các nghiệm $t = 2 - \sqrt{3}, t = 2 + \sqrt{3}$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ -y = -2 + \sqrt{3} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -2 + \sqrt{3} \\ -y = 2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy hai số x, y cần tìm là $(x; y) = (2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}), (x; y) = (-2 + \sqrt{3}; -2 - \sqrt{3})$.

d) Ta có:

$$x^2 + y^2 = 34 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 2xy = 34 \Leftrightarrow (x + y)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = -2. \end{cases}$$

$$\square \text{ Với } x + y = 2, \text{ ta được hệ } \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -15 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra, } x, y \text{ là hai nghiệm của phương trình } t^2 - 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 5. \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\square \text{ Với } x + y = -2, \text{ ta được hệ } \begin{cases} x + y = -2 \\ xy = -15 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra, } x, y \text{ là hai nghiệm của phương trình } t^2 + 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -5 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -5 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy hai số x, y cần tìm là $(x; y) = \{(-3; 5), (5; -3), (3; -5), (-5; 3)\}$.

Câu 7: Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 4m - 1 = 0$ (1), với m là tham số.

1. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$.
2. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc vào tham số m .

Lời giải

$$1. \text{ Vì } \Delta' = (m+1)^2 - (4m-1) = m^2 - 2m + 2 = (m-1)^2 + 1 \geq 1, \forall m \in \mathbb{R}$$

nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Hệ thức Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1 x_2 = 4m - 1 \end{cases}$

Theo đề: $x_1^2 + x_2^2 = 10$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 10$$

$$\Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 2(4m-1) = 10$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Vậy $m = -1, m = 1$ là giá trị cần tìm.

2. Hệ thức Vi - ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 & (1) \\ x_1 x_2 = 4m - 1 & (2) \end{cases}$

Từ (1) ta được: $2m = x_1 + x_2 - 2$

Thay vào (2) ta được: $x_1 \cdot x_2 = 2(x_1 + x_2 - 2) - 1 \Leftrightarrow 2x_1 + 2x_2 - x_1 x_2 = 5$.

Biểu thức: $2x_1 + 2x_2 - x_1 x_2 = 5$ luôn đúng với mọi m .

Vậy đây là biểu thức cần tìm.

Câu 8: Phương trình $3x^2 + 7x + m = 0$ có một trong các nghiệm bằng 1. Xác định số m và tìm nghiệm còn lại.

Hướng dẫn giải

$$m = -10; x_2 = -\frac{10}{3}.$$

Câu 9: a) Phương trình $0,1x^2 - x + k = 0$ có một trong các nghiệm bằng -1 . Xác định số k và tìm nghiệm còn lại.

b) Phương trình $15x^2 + bx - 1 = 0$ có một trong các nghiệm bằng $\frac{1}{3}$. Xác định số b và tìm nghiệm còn lại.

Hướng dẫn giải

$$K = -1, 1; x_2 = 11.$$

Câu 10: Cho phương trình: $x^2 + (m+1)x + m = 0$ (1)

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có nghiệm. Tìm nghiệm của (1);

b) Tìm m để $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất nếu x_1, x_2 là các nghiệm của (1).

Hướng dẫn giải

$$x_1 = -1; x_2 = -m; x_1^2 + x_2^2 = m^2 + 1 \geq 1.$$

Câu 11: Cho phương trình $2x^2 + (2m-1)x + m-1 = 0$.

- a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa điều kiện $3x_1 - 4x_2 = 11$;
- b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm đều âm;
- c) Tìm một hệ thức giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m .

Hướng dẫn giải

$$a) \Delta = (2m-3)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{3}{2}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{1-2m}{2} & (1) \\ 3x_1 - 4x_2 = 11 & (2) \\ x_1 x_2 = \frac{m-1}{2} & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) tìm x_1, x_2 rồi thay vào (3).

Chú ý: Có thể tìm x_1, x_2 từ phương trình đã cho rồi thay vào (2).

b) Phương trình có hai nghiệm đều âm khi

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P < 0 \end{cases} \text{ giải ra được } m > 1.$$

c) Khử m từ (1) và (3).

Câu 12: Xác định K để phương trình sau có nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 = 2x_2$.

$$a) x^2 + 6x + K = 0 ; b) x^2 + Kx + 8 = 0 .$$

Hướng dẫn giải

$$a) K = 8 \quad b) K = \pm 6 .$$

Câu 13: Xác định K để phương trình $x^2 + 2x + K = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa một trong các điều kiện sau:

$$a) x_1^2 - x_2^2 = 12 ; b) x_1^2 + x_2^2 = 1 .$$

Hướng dẫn giải

$$a) K = -8 \quad b) \text{ Không tồn tại } K .$$

Câu 14: Giả sử x_1, x_2 là nghiệm phương trình: $x^2 - (m-3)x + 2m+1 = 0$. Tìm hệ thức giữa x_1, x_2 không phụ thuộc m .

Hướng dẫn giải

$$x_1 x_2 = 2(x_1 + x_2) + 7$$

Câu 15: Cho phương trình : $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0$.

- a) Định m để phương trình có hai nghiệm trái dấu;
- b) Định m để phương trình có đúng một nghiệm âm;
- c) Định m để phương trình có một nghiệm bằng 0. Tìm nghiệm còn lại;
- d) Tìm hệ thức giữa các nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc m ;
- e) Định m để phương trình có hai nghiệm thỏa: $x_1^2 + x_2^2 = 8$.

Hướng dẫn giải

- a) $0 < m < 3$
- c) $m = 0, m = 3$
- d) $P = \left(\frac{S}{2} + 1\right)\left(\frac{S}{2} - 2\right)$
- e) $m = -1, m = 2$

Câu 16: Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ (m là tham số).

- a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.
- b) Tìm một hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình đã cho mà không phụ thuộc vào m .
- c) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x_1^2 + x_2^2$ (với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình đã cho)

Lời giải

$$\Delta' = [-(m-1)]^2 - 1 \cdot (m-3) = m^2 - 3m + 4 = \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0, \forall m$$

Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt.

$$\text{b) Theo hệ thức Vi-ét, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = m-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-2 \\ 2x_1 x_2 = 2m-6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2x_1 x_2 - 4 = 0 \text{ không phụ thuộc vào } m.$$

$$\text{c) } P = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4(m-1)^2 - 2(m-3)$$

$$= \left(2m - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \geq \frac{15}{4}, \forall m$$

$$\text{Do đó } P_{\min} = \frac{15}{4} \text{ và dấu " = " xảy ra khi } 2m - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{4}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \frac{15}{4} \text{ với } m = \frac{5}{4}.$$

Câu 17: Cho phương trình $x^2 - (2m-1)x + m^2 - 1 = 0$ (x là ẩn số)

- a) Tìm điều kiện của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.
- b) Định m để hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình đã cho thỏa mãn: $(x_1 - x_2)^2 = x_1 - 3x_2$.

Lời giải

$$a) \quad \Delta = (2m-1)^2 - 4(m^2-1) = 5-4m$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < \frac{5}{4}$

$$b) \quad \text{Phương trình hai nghiệm} \Leftrightarrow m < \frac{5}{4}$$

$$\text{Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-1 \\ x_1 x_2 = m^2-1 \end{cases}$$

Theo đề bài:

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1 - 3x_2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = x_1 - 3x_2$$

$$\Leftrightarrow (2m-1)^2 - 4(m^2-1) = x_1 - 3x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 - 3x_2 = 5-4m$$

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-1 \\ x_1 - 3x_2 = 5-4m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{m+1}{2} \\ x_2 = \frac{3(m-1)}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{m+1}{2} \cdot \frac{3(m-1)}{2} = m^2-1$$

$$\Leftrightarrow 3(m^2-1) = 4(m^2-1)$$

$$\Leftrightarrow m^2-1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \pm 1$$

Kết hợp với điều kiện $\Rightarrow m = \pm 1$ là các giá trị cần tìm

Câu 18: Cho phương trình $x^2 - 10mx + 9m = 0$ (m là tham số)

a) Giải phương trình đã cho với $m = 1$.

b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa điều kiện $x_1 - 9x_2 = 0$

Lời giải

a) Với $m = 1$ phương trình đã cho trở thành $x^2 - 10x + 9 = 0$

Ta có $a+b+c=0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt là $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 9 \end{cases}$

$$b) \quad \Delta' = (-5m)^2 - 1.9m = 25m^2 - 9m$$

Điều kiện phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 25m^2 - 9m > 0$ (*)

Theo hệ thức Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10m \\ x_1 - 9x_2 = 0 \\ x_1 x_2 = 9m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x_2 = 10m \\ x_1 = 9x_2 \\ x_1 x_2 = 9m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = m \\ x_1 = 9m \\ 9m^2 - 9m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = m \\ x_1 = 9m, (*) \Rightarrow m = 1 \\ \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Câu 19: Cho phương trình $2x^2 + (2m-1)x + m-1 = 0$ (m là tham số). Không giải phương trình, tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $3x_1 - 4x_2 = 11$

Lời giải

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $\Delta > 0$

$$\Leftrightarrow (2m-1)^2 - 4.2.(m-1) > 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 12m + 9 > 0$$

$$\Leftrightarrow (2m-3)^2 > 0$$

$$\Rightarrow m \neq \frac{3}{2}$$

Mặt khác, theo hệ thức Vi-ét và giả thiết ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2m-1}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m-1}{2} \\ 3x_1 - 4x_2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{13-4m}{7} \\ x_2 = \frac{7m-7}{26-8m} \\ 3\frac{13-4m}{7} - 4\frac{7m-7}{26-8m} = 11 \end{cases}$$

$$\text{Giải phương trình } 3\frac{13-4m}{7} - 4\frac{7m-7}{26-8m} = 11$$

$$\text{Ta được } \begin{cases} m = -2 \\ m = 4,125 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} m = -2 \\ m = 4,125 \end{cases} \text{ là các giá trị cần tìm}$$

Câu 20: Cho phương trình $x^2 - (2m+2)x + 2m = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \leq \sqrt{2}$

Lời giải

Điều kiện PT có 2 nghiệm không âm x_1, x_2 là

$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 1 \geq 0 \\ 2(m+1) \geq 0 \\ 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 0$$

Theo hệ thức Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = 2m \end{cases}$

Ta có $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} \leq 2$

$$\Leftrightarrow 2m + 2 + 2\sqrt{2m} \leq 2 \Leftrightarrow m = 0 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Câu 21: Cho phương trình $x^2 + 2mx + 2m - 1 = 0$ (m là tham số). Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho. Tìm giá trị của m để $A = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Ta có $\Delta = (2m)^2 - 4.1.(2m-1) = 4m^2 - 8m + 4 = 4(m-1)^2$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Delta > 0 \Rightarrow (m-1)^2 > 0 \Rightarrow m \neq 1$

Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 x_2 = 2m - 1 \end{cases}$

Ta có $A = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2)$

$$= m(m+1) + 2007 = (2m-1)(-2m) = -4m^2 + 2m = -4\left(m^2 - \frac{1}{2}m\right)$$

$$= -4\left(m^2 - 2m \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right) = -4\left(m - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}, \forall m$$

Dấu "=" xảy ra $m - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$

Vậy $A_{\max} = \frac{1}{4}$ với $m = \frac{1}{4}$.

Câu 22: Cho phương trình $x^2 + 4x + m + 3 = 0$ (x là ẩn)

a) Tìm m để phương trình có nghiệm x_1, x_2

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 x_2^2 = 51$

Lời giải

a) Ta có $\Delta' = 2^2 - 1.(m+3) = 4 - m - 3 = 1 - m$

Để phương trình có nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$

b) Theo câu a, ta có $m \leq 1$ thì phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{1} = -4 \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m+3}{1} = m+3 \end{cases}$$

Ta có $x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 x_2^2 = 51 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + (x_1 x_2)^2 - 51 = 0$

$$\Leftrightarrow (-4)^2 - 2.(m+3) + (m+3)^2 - 51 = 0 \Leftrightarrow 16 - 2m - 6 + m^2 + 6m + 9 - 51 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m - 32 = 0 \quad (*)$$

$$\Delta' = 2^2 - 1.(-32) = 4 + 32 = 36 > 0; \sqrt{\Delta'} = \sqrt{36} = 6$$

Do $\Delta' > 0$ nên phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt:

$$m_1 = \frac{-2+6}{1} = 4 \text{ (loại)}; \quad m_2 = \frac{-2-6}{1} = -8 \text{ (nhận)}$$

Vậy $m = -8$ là giá trị cần tìm .

BÀI 21. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Nhận xét. Các bước giải một bài toán bằng cách lập phương trình:

Bước 1. Lập phương trình:

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải phương trình.

Bước 3. Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

Ví dụ 1: Một sân bóng đá 7 người có chiều rộng nhỏ hơn chiều dài 30 m và có diện tích bằng 1800 m^2 . Tính chiều dài và chiều rộng của sân bóng đó.

Lời giải

Gọi $x(\text{m})$ là chiều rộng của sân bóng. Điều kiện: $x > 0$.

Khi đó, chiều dài của sân bóng là $x + 30(\text{m})$.

Theo đề bài, ta có phương trình: $x(x + 30) = 1800$ hay $x^2 + 30x - 1800 = 0$.

Ta có: $\Delta' = 15^2 + 1800 = 2025, \sqrt{\Delta'} = 45$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-15 - 45}{1} = -60 \text{ (loại); } x_2 = \frac{-15 + 45}{1} = 30 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy sân bóng có chiều dài 60 m và chiều rộng 30 m.

Ví dụ 2: Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 36 km. Một tàu du lịch đi từ bến A đến bến B, nghỉ 30 phút ở bến B rồi quay lại bến A. Thời gian kể từ lúc khởi hành đến khi về đến bến A là 5,5 giờ. Hãy tìm vận tốc thực của tàu du lịch (tức là vận tốc của tàu khi nước yên lặng), biết rằng vận tốc của dòng nước là 3 km/h .

Lời giải

Gọi $x(\text{km/h})$ là vận tốc thực của tàu du lịch. Vì vận tốc của dòng nước là 3 km/h nên phải có điều kiện $x > 3$ để tàu có thể chạy ngược dòng.

Vận tốc của tàu khi xuôi dòng là $x + 3(\text{km/h})$, thời gian để tàu đi xuôi dòng là $\frac{36}{x + 3}$ (giờ).

Vận tốc của tàu khi ngược dòng là $x - 3(\text{km/h})$, thời gian để tàu đi ngược dòng là $\frac{36}{x - 3}$ (giờ).

Thời gian tàu nghỉ tại bến B là 30 phút $= 0,5$ giờ.

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{36}{x+3} + 0,5 + \frac{36}{x-3} = 5,5$ hay $\frac{36}{x+3} + \frac{36}{x-3} = 5$

Để giải phương trình này, ta quy đồng mẫu về trái của phương trình: $\frac{36(x-3) + 36(x+3)}{(x+3)(x-3)} = 5$

Nhân cả hai vế của phương trình với $(x+3)(x-3)$ để khử mẫu, ta được phương trình bậc hai

$$36(x-3) + 36(x+3) = 5(x+3)(x-3), \text{ hay } 5x^2 - 72x - 45 = 0$$

Ta có: $\Delta' = 36^2 - 5 \cdot (-45) = 1521$; $\sqrt{\Delta'} = \sqrt{1521} = 39$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{36-39}{5} = \frac{-3}{5} \text{ (loại); } x_2 = \frac{36+39}{5} = 15 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy vận tốc thực của tàu du lịch là 15 km / h .

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

6.28. Một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích 360m^2 . Nếu tăng chiều rộng 3 m và giảm chiều dài 4 m thì diện tích mảnh đất không đổi. Tìm các kích thước của mảnh đất đó.

Lời giải

Gọi $x(m)$ là chiều rộng của hình chữ nhật ($x > 0$).

Chiều dài của hình chữ nhật là $\frac{360}{x}(m)$.

Chiều rộng tăng 3 m nên chiều rộng sau tăng là: $x+3(m)$.

Chiều dài giảm 4 m nên chiều dài sau giảm là: $\frac{360}{x}-4(m)$.

Theo bài, sau khi thay đổi kích thước thì diện tích mảnh đất không đổi, nên ta phương trình:

$$(x+3)\left(\frac{360}{x}-4\right)=360$$

$$360-4x+\frac{1080}{x}-12-360=0$$

$$-4x+\frac{1080}{x}-12=0$$

Quy đồng mẫu về trái của phương trình, ta được: $\frac{-4x^2}{x} + \frac{1080}{x} - \frac{12x}{x} = 0$.

Nhân cả hai vế của phương trình với x để khử mẫu, ta được phương trình bậc hai: $-4x^2 + 1080 - 12x = 0$

$$x^2 + 3x - 270 = 0 \text{ Ta có } \Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-270) = 1089 \text{ và } \sqrt{\Delta} = \sqrt{1089} = 33.$$

Suy ra phương trình trên có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-3-33}{2 \cdot 1} = -18 \text{ (loại)}; x_2 = \frac{-3+33}{2 \cdot 1} = 15 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}.$$

Vậy chiều rộng của mảnh đất là 15(m) và chiều dài của mảnh đất là: $\frac{360}{15} = 24(\text{m})$.

6.29. Sau hai năm, số dân của một thành phố tăng từ 1200000 người lên 1452000 người. Hỏi trung bình mỗi năm dân số của thành phố đó tăng bao nhiêu phần trăm?

Lời giải

Gọi x là tốc độ trung bình tăng dân số của thành phố (x được cho dưới dạng số thập phân, $x > 0$).

Số dân của thành phố sau năm thứ nhất là: $1200000 \cdot (1+x)$ (người).

Số dân của thành phố sau năm thứ hai là: $1200000 \cdot (1+x) \cdot (1+x) = 1200000 \cdot (1+x)^2$ (người).

Theo bài, ta có phương trình:

$$1200000 \cdot (1+x)^2 = 1452000$$

$$(1+x)^2 = 1,21$$

$$1+x = 1,1 \text{ (do } x > 0 \text{)}$$

$$x = 0,1 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy tốc độ gia tăng dân số của thành phố đó là $0,1 = 10\%$.

6.30. Một thanh sô cô la có dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài 12 cm, chiều rộng 7 cm và độ dày 3 cm. Do giá nguyên liệu cao tăng nhưng vẫn muốn giữ nguyên giá bán nên nhà sản xuất quyết định giảm 10% thể tích của mỗi thanh sô cô la. Để thực hiện việc này, nhà sản xuất dự định làm thanh sô cô la mới có cùng độ dày 3 cm như thanh cũ, nhưng chiều dài và chiều rộng sẽ giảm đi cùng một số centimét. Hỏi kích thước của thanh sô cô la mới là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi $x(\text{cm})$ là số centimét mà chiều dài và chiều rộng bị giảm ($0 < x < 7$).

Chiều dài và chiều rộng thanh sô cô la sau giảm lần lượt là: $12-x(\text{cm})$ và $7-x(\text{cm})$.

Thể tích của thanh sô cô la mới là: $(12-x)(7-x) \cdot 3 (\text{cm}^3)$.

Theo bài, thể tích thanh sô cô la giảm 10% so với ban đầu nên thể tích của thanh sô cô la mới là:

$$(12 \cdot 7 \cdot 3) \cdot (100\% - 10\%) = 252 \cdot 90\% = 226,8 (\text{cm}^3). \text{ Khi đó, ta có phương trình:}$$

$$(12-x)(7-x) \cdot 3 = 226,8$$

$$(12-x)(21-3x) = 226,8$$

$$252 - 36x - 21x + 3x^2 - 226,8 = 0$$

$$3x^2 - 57x + 25,2 = 0$$

$$15x^2 - 285x + 126 = 0$$

$$5x^2 - 95x + 42 = 0$$

$$\text{Ta có } \Delta = (-95)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 42 = 8185 > 0.$$

Suy ra phương trình trên có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{95 + \sqrt{8185}}{2 \cdot 5} \approx 18,55 \text{ (loại); } x_2 = \frac{95 - \sqrt{8185}}{2 \cdot 5} \approx 0,45 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy chiều dài và chiều rộng thanh sô cô la mới lần lượt là: $12 - 0,45 = 11,55(\text{cm})$ và $7 - 0,45 = 6,55(\text{cm})$.

6.31. Một máy bay khởi hành từ Hà Nội vào Thành phố Hồ Chí Minh, sau đó nghỉ 96 phút và tiếp tục bay về Hà Nội với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 100 km/h . Tổng thời gian của cả hành trình, kể từ khi xuất phát từ Hà Nội đến khi quay về Hà Nội là 6 giờ. Tính vận tốc của máy bay lúc đi, biết quãng đường bay Hà Nội - Thành phố Hồ Chí Minh dài khoảng 1200 km .

Lời giải

Gọi $x(\text{km/h})$ là vận tốc máy bay khi bay từ Hà Nội vào Thành phố Hồ Chí Minh ($x > 0$).

Vận tốc của máy bay khi bay từ Thành phố Hồ Chí Minh về Hà Nội là $x + 100(\text{km/h})$.

Thời gian bay từ Hà Nội vào Thành phố Hồ Chí Minh là: $\frac{1200}{x}$ (giờ).

Thời gian bay từ Thành phố Hồ Chí Minh về Hà Nội là: $\frac{1200}{x+100}$ (giờ).

Đổi $96\text{ phút} = 1\text{ giờ } 36\text{ phút} = 1,6$ (giờ).

Theo bài, tổng thời gian của cả hành trình, kể từ khi xuất phát từ Hà Nội đến khi quay về Hà Nội là 6 giờ và

máy bay có nghỉ tại Thành phố Hồ Chí Minh 96 phút nên thời gian máy bay bay cả đi và về là: $6 - 1,6 = 4,4$ (giờ).

Khi đó, ta có phương trình: $\frac{1200}{x} + \frac{1200}{x+100} = 4,4$.

Quy đồng mẫu về trái của phương trình, ta được: $\frac{1200(x+100)}{x(x+100)} + \frac{1200x}{x(x+100)} = 4,4$

Nhân cả hai vế của phương trình với $x(x+100)$ để khử mẫu, ta được phương trình:

$$1200(x+100) + 1200x = 4,4x(x+100)$$

$$1200x + 120000 + 1200x = 4,4x^2 + 440x$$

$$4,4x^2 - 1960x - 120000 = 0$$

$$11x - 4900x - 300000 = 0$$

Ta có $\Delta' = (-2450)^2 - 11 \cdot (-300000) = 9302500 > 0$; $\sqrt{\Delta'} = \sqrt{9302500} = 3050$

Suy ra phương trình trên có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{2450 + 3050}{11} = 500 \text{ (thỏa mãn điều kiện); } x_2 = \frac{2450 - 3050}{11} = -\frac{600}{11} \text{ (loại).}$$

Vậy vận tốc máy bay khi bay từ Hà Nội vào Thành phố Hồ Chí Minh là 500 km/h.

6.32. Một ô tô khách khởi hành từ Hà Nội đi Hải Phòng. Sau đó 30 phút, một ô tô con xuất phát từ cùng địa điểm ở Hà Nội và cũng đi về Hải Phòng trên cùng tuyến đường, với vận tốc lớn hơn vận tốc của ô tô khách là 20 km/h. Hai xe đến cùng một địa điểm ở Hải Phòng tại cùng một thời điểm. Hãy tính vận tốc của mỗi ô tô, biết rằng quãng đường Hà Nội - Hải Phòng dài khoảng 120 km.

Lời giải

Gọi x (km/h) là vận tốc của ô tô khách ($x > 0$).

Vận tốc của ô tô con là $x + 20$ (km/h).

Thời gian ô tô khách đi là: $\frac{120}{x}$ (giờ).

Thời gian ô tô con đi là: $\frac{120}{x + 20}$ (giờ).

Đổi 30 phút = 0,5 giờ.

Theo bài, xe ô tô con xuất phát sau xe ô tô khách 30 phút nên ta có phương trình: $\frac{120}{x} - \frac{120}{x + 20} = 0,5$.

Quy đồng mẫu về trái của phương trình, ta được:

$$\frac{120(x + 20)}{x(x + 20)} - \frac{120x}{x(x + 20)} = 0,5$$

Nhân hai vế của phương trình với $x(x + 20)$ để khử mẫu, ta được phương trình:

$$120(x + 20) - 120x = 0,5x(x + 20)$$

$$120x + 2400 - 120x = 0,5x^2 + 10x$$

$$0,5x^2 + 10x - 2400 = 0 \quad x^2 + 20x - 4800 = 0$$

Ta có $\Delta' = 10^2 - 1 \cdot (-4800) = 4900 > 0$ và $\sqrt{\Delta'} = \sqrt{4900} = 70$.

Suy ra phương trình trên có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-10 + 70}{1} = 60 \text{ (thỏa mãn điều kiện); } x_2 = \frac{-10 - 70}{1} = -80 \text{ (loại).}$$

Vậy vận tốc ô tô khách là 60(km/h) và vận tốc của ô tô con là: $60 + 20 = 80$ (km/h).

6.33. Một xưởng may phải may 1500 chiếc áo trong thời gian quy định. Để hoàn thành sớm kế hoạch, mỗi ngày xưởng đã may được nhiều hơn 10 chiếc áo so với số áo phải may trong một ngày theo kế

hoạch. Do đó, ba ngày trước khi hết thời hạn, xưởng đã may được 1320 áo. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày xưởng đó phải may xong bao nhiêu chiếc áo?

Lời giải

Gọi x (chiếc) là số áo phải may trong 1 ngày theo kế hoạch ($x \in \mathbb{N}, x > 0$).

Số áo thực tế xưởng đã may trong 1 ngày là $x+10$ (chiếc).

Thời gian may 1500 chiếc áo là: $\frac{1500}{x}$ (ngày).

Thời gian may 1320 chiếc áo là: $\frac{1320}{x+10}$ (ngày).

Theo bài, xưởng hoàn thành sớm 3 ngày so với kế hoạch nên ta có phương trình: $\frac{1500}{x} - \frac{1320}{x+10} = 3$.

Quy đồng mẫu về trái của phương trình, ta được: $\frac{1500(x+10)}{x(x+10)} - \frac{1320x}{x(x+10)} = 3$

Nhân hai vế của phương trình với $x(x+10)$ để khử mẫu, ta được phương trình:

$$1500(x+10) - 1320x = 3x(x+10)$$

$$1500x + 15000 - 1320x = 3x^2 + 30x$$

$$3x^2 - 150x - 15000 = 0$$

$$x^2 - 50x - 5000 = 0$$

Ta có $\Delta' = (-25)^2 - 1 \cdot (-5000) = 5625$ và $\sqrt{\Delta'} = \sqrt{5625} = 75$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{25+75}{1} = 100 \text{ (thỏa mãn điều kiện); } x_2 = \frac{25-75}{1} = -50 \text{ (loại).}$$

Vậy theo kế hoạch mỗi ngày xưởng may 100 chiếc áo.

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Toán Về Quan Hệ Giữa Các Số

1. Phương pháp giải

- Tổng hai số x, y là $x + y$
- Tổng bình phương hai số x, y là $x^2 + y^2$
- Tổng nghịch đảo của hai số x, y là $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Trong lúc học nhóm, bạn Hùng yêu cầu bạn Minh và bạn Lan mỗi người chọn một số sao cho hai số này hơn kém nhau 5 đơn vị và tích của chúng phải bằng 150. Vậy hai bạn Minh và Lan phải chọn những số nào?

Lời giải

Gọi số mà một bạn đã chọn là x và số mà bạn kia chọn là $x + 5$

Tích của hai số là $x(x + 5)$

Theo đầu bài ta có phương trình $x(x + 5) = 150 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 150 = 0$

Giải phương trình: $\Delta = 25 - 4 \cdot (-150) = 625 = 25^2 \Rightarrow x_1 = 10, x_2 = -15$

Trả lời :

- Nếu bạn Minh chọn số 10 thì bạn Lan chọn số 15 hoặc ngược lại
- Nếu bạn Minh chọn số -15 thì bạn Lan chọn số -10 hoặc ngược lại.

Ví dụ 2. Đồ em tìm được một số mà một nửa của nó trừ đi một nửa đơn vị rồi nhân với một nửa của nó bằng một nửa đơn vị.

Lời giải

Gọi số phải tìm là x .

Một nửa của nó trừ đi một nửa đơn vị là $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

Theo đầu bài ta có phương trình $(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}) \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

Phương trình có nghiệm $x_1 = -1, x_2 = 2$

Trả lời: Số phải tìm bằng -1 hoặc 2

Ví dụ 3. Tích của hai số tự nhiên liên tiếp lớn hơn tổng của chúng là 109. Tìm hai số đó.

Lời giải

Gọi số bé là x , $x \in \mathbb{N}, x > 0$

Số tự nhiên kế sau là $x + 1$

Tích của hai số này là $x(x + 1)$ hay $x^2 + x$

Tổng của chúng là $x + x + 1$ hay $2x + 1$

Theo đầu bài ta có phương trình $x^2 + x - 2x - 1 = 109 \Leftrightarrow x^2 - x - 110 = 0$

Giải phương trình: $\Delta = 1 + 440 = 441, \sqrt{\Delta} = 21$

Phương trình có nghiệm $x_1 = 11, x_2 = -10$ (loại)

Trả lời : Hai số phải tìm là 11 và 12

Dạng 2: Toán Chuyển Động

1. Phương pháp giải:

☒ Sử dụng công thức $S = V.t$; trong đó S là quãng đường, V là vận tốc, t là thời gian.

$$\text{Suy ra } V = \frac{S}{t}; t = \frac{S}{V}.$$

☒ Nếu chuyển động dòng chảy thì

$$V_{\text{xuôi dòng}} = V_{\text{riêng}} + V_{\text{dòng nước}}$$

$$V_{\text{ngược dòng}} = V_{\text{riêng}} - V_{\text{dòng nước}}$$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Một xuồng du lịch đi từ thành phố Cà Mau đến Đất Mũi theo một đường sông dài 120 km. Trên đường đi, xuồng có nghỉ lại 1 giờ ở thị trấn Năm Căn. Khi về, xuồng đi theo đường khác dài hơn đường lúc đi 5 km với vận tốc nhỏ hơn vận tốc lúc đi là 5 km/h. Tính vận tốc của xuồng lúc đi, biết rằng thời gian về bằng thời gian đi.

Lời giải

Gọi vận tốc của xuồng lúc đi là x (km/h), $x > 0$ thì vận tốc lúc về là $x - 5$ (km/h)

Thời gian đi 120km là $\frac{120}{x}$ (giờ)

Vì khi đi có nghỉ 1 giờ nên thời gian đi hết tất cả là $\frac{120}{x} + 1$ (giờ)

Đường về dài $120 + 5 = 125$ (km)

Thời gian về là $\frac{125}{x-5}$ (giờ)

Theo đầu bài ta có phương trình $\frac{120}{x} + 1 = \frac{125}{x-5}$

Giải phương trình: $x^2 - 5x + 120x - 600 = 125x \Leftrightarrow x^2 - 10x - 600 = 0$

Phương trình có nghiệm $x_1 = 30, x_2 = -20$ (loại)

Trả lời : vận tốc của xuồng khi đi là 30 km/h.

Ví dụ 2: Bác Hiệp và cô Liên đi xe đạp từ làng lên tỉnh trên quãng đường dài 30km, khởi hành cùng một lúc. Vận tốc xe của bác Hiệp lớn hơn vận tốc xe của cô Liên là 3 km/h nên bác Hiệp đã đến tỉnh trước cô Liên nửa giờ. Tính vận tốc xe của mỗi người.

Lời giải

Gọi vận tốc của bác Hiệp là $x(\text{km/h})$, khi đó vận tốc của cô Liên là $x-3(\text{km/h}), x > 3$.

Thời gian bác Hiệp đi từ làng lên tỉnh là $\frac{30}{x}$ (giờ).

Thời gian cô Liên đi từ làng lên tỉnh là: $\frac{30}{x-3}$ (giờ)

Vì bác Hiệp đến trước cô Liên nửa giờ, tức là thời gian đi của bác Hiệp ít hơn thời gian cô Liên nửa giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{30}{x-3} - \frac{30}{x} = \frac{1}{2}$$

Giải phương trình:

$$30.2x - 30.2(x-3) = x(x-3) \Leftrightarrow 60x - 60x + 180 = x^2 - 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x - 180 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4.1.(-180) = 729 > 0, \sqrt{\Delta} = 27$$

$$x_1 = \frac{3+27}{2} = 15, x_2 = \frac{3-27}{2} = -12$$

Vì $x > 3$ nên $x_2 = -12$ không thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Vậy vận tốc của bác Hiệp là 15km/h

Vận tốc của cô Liên là 12km/h

Ví dụ 3: Khoảng cách giữa hai bên sông A và B là 30km . Một canô đi từ bến A đến bến B , nghỉ 40 phút ở bến B rồi quay lại bến A . Kể từ lúc khởi hành đến khi về tới bến A hết tất cả 6 giờ. Hãy tìm vận tốc của canô trong nước yên lặng, biết rằng vận tốc của nước chảy là 3km/h .

Lời giải

Gọi vận tốc thực của canô (khi nước yên lặng) là $x(\text{km/h})$, nên vận tốc khi đi xuôi dòng là: $x+3(\text{km/h})$ và vận tốc khi ngược dòng là: $x-3(\text{km/h}), x > 3$.

Thời gian xuôi dòng là: $\frac{30}{x+3}$ (giờ)

Thời gian ngược dòng là: $\frac{30}{x-3}$ (giờ)

Nghỉ lại 40 phút hay $\frac{2}{3}$ giờ ở B .

Theo đầu bài kể từ khi khởi hành đến khi về tới bến A hết tất cả 6 giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{30}{x+3} + \frac{30}{x-3} + \frac{2}{3} = 6$$

$$\Rightarrow 30.3(x-3) + 30.3 \cdot (x+3) = 16 \cdot (x-3)(x+3)$$

$$\Leftrightarrow 90x - 270 + 90x + 270 = 16(x^2 - 9) \Leftrightarrow 16x^2 - 180x - 144 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 45x - 36 = 0$$

$$\Delta = 2025 + 576 = 2601 > 0, \sqrt{\Delta} = 51$$

$$\text{Suy ra } x_1 = 12, x_2 = -\frac{3}{4} \text{ (loại)}$$

Vậy vận tốc của canô trong nước yên lặng là 12 km / h .

Dạng 3: Toán Làm Chung Công Việc

1. Phương pháp giải

Đưa về năng suất làm việc:

Nếu đội nào đó làm xong toàn bộ công việc trong x ngày thì trong 1 ngày đội đó làm được $\frac{1}{x}$ công việc

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Hai đội thợ quét sơn một ngôi nhà. Nếu họ cùng làm thì trong 4 ngày xong việc. Nếu họ làm riêng thì đội I hoàn thành công việc nhanh hơn đội II là 6 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội phải làm trong bao nhiêu ngày để xong việc?

Lời giải

Gọi thời gian đội I làm một mình xong việc là x (ngày), $x > 0$

Vì đội II hoàn thành công việc lâu hơn đội I là 6 ngày nên thời gian một mình đội II làm xong việc là $x + 6$ (ngày)

Mỗi ngày đội I làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

Mỗi ngày đội II làm được $\frac{1}{x+6}$ (công việc)

Mỗi ngày cả 2 đội làm được $\frac{1}{4}$ công việc

Ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4}$

Giải phương trình:

$$x(x+6) = 4x + 4x + 24 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$\Delta' = 1 + 24 = 25$$

Phương trình có nghiệm $x_1 = 6, x_2 = -4$ (loại)

Trả lời: Một mình đội I làm trong 6 ngày thì xong việc, một mình đội II làm trong 12 ngày thì xong việc.

Ví dụ 2. Hai vòi cùng chảy vào một bể thì đầy sau 7 giờ 12 phút. Nếu mỗi vòi chảy riêng mà đầy bể thì tổng thời gian là 30 giờ. Mỗi vòi chảy riêng thì đầy bể trong thời gian là bao lâu?

Lời giải

Đổi 7 giờ 12 phút $= 7\frac{1}{5}$ giờ.

Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể là x giờ ($0 < x < 30$).

Thời gian vòi thứ hai chảy riêng đầy bể là $30 - x$ (giờ).

Theo đề bài, hai vòi cùng chảy mà đầy bể sau $7\frac{1}{5}$ (giờ) nên ta có phương trình

$$7\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{30-x}\right) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 30x + 216 = 0.$$

Ta có $\Delta = 30^2 - 4 \cdot (216) = 36 > 0$ nên phương trình có nghiệm là $x_1 = 18$ (nhận); $x_2 = 12$ (nhận).

Vậy vòi thứ nhất chảy riêng sẽ đầy bể sau 12 giờ, vòi thứ hai đầy bể sau 18 giờ. Hoặc ngược lại.

Ví dụ 3. Hai đội xây dựng cùng làm chung một việc và dự định hoàn thành trong 12 ngày. Họ cùng làm chung với nhau được 8 ngày thì đội 1 được điều đi làm việc khác, đội 2 tiếp tục làm. Do cải tiến kỹ thuật, năng suất tăng gấp đôi nên đội 2 làm xong phần việc còn lại trong 3,5 ngày. Hỏi nếu mỗi đội làm một mình thì bao nhiêu ngày sẽ làm xong công việc nói trên (với năng suất bình thường)?

Lời giải

Gọi thời gian đội thứ nhất làm một mình xong công việc là x (ngày, $x > 0$).

Mỗi ngày đội thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc), cả hai người làm được $\frac{1}{12}$ (công việc), người thứ hai làm được $\frac{1}{12} - \frac{1}{x}$ (công việc).

Trong 8 ngày cả hai đội làm được $\frac{2}{3}$ (công việc).

Số phần việc còn lại mà đội hai phải làm là $\frac{1}{3}$ (công việc).

Năng suất của đội hai sau khi cải tiến kỹ thuật $\frac{1}{6} - \frac{2}{x}$ (công việc).

Theo đầu bài, đội 2 đã làm xong phần việc còn lại trong 3,5 ngày nên ta có phương trình

$$3,5\left(\frac{1}{6} - \frac{2}{x}\right) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{x} = \frac{1}{14} \Leftrightarrow x = 28$$

Vậy thời gian công nhân thứ nhất làm xong công việc là 28 ngày. Thời gian công nhân thứ hai làm một mình xong công việc là 21 ngày.

Dạng 4: Toán Có Nội Dung Hình Học

1. Phương pháp

Áp dụng các công thức sau:

☒ Định lý Pi-ta-go: $\triangle ABC$ vuông tại $A \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$.

☒ Diện tích hình chữ nhật: $S = a.b$; với a là chiều dài, b là chiều rộng.

☒ Diện tích hình thang: $S = \frac{(a+b)}{2}.h$ hoặc $S = m.h$. Trong đó a, b là độ dài hai đáy; h là chiều cao; m là độ dài đường trung bình.

2. Ví dụ:

Ví dụ 1. Một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích $240 m^2$. Nếu tăng chiều rộng lên 3m và giảm chiều dài 4m thì diện tích mảnh đất không đổi. Tính kích thước của mảnh đất?

Lời giải

Gọi chiều rộng của mảnh đất là x (m), $x > 0$

Vì diện tích của mảnh đất bằng $240 m^2$ nên chiều dài là $\frac{240}{x}$ (m)

Nếu tăng chiều rộng 3m và giảm chiều dài 4m thì mảnh đất mới có chiều rộng là $x + 3$ (m), chiều dài là

$\left(\frac{240}{x} - 4\right)$ (m) và diện tích là $(x + 3)\left(\frac{240}{x} - 4\right) (m^2)$

Theo đầu bài ta có phương trình $(x + 3)\left(\frac{240}{x} - 4\right) = 240$

Vì $x > 0$ nên từ phương trình này suy ra

$$-4x^2 - 12x + 240x + 720 = 240x \Leftrightarrow x^2 + 3x - 180 = 0$$

Giải phương trình $\Delta = 3^2 + 720 = 729, \sqrt{\Delta} = 27$

Phương trình có nghiệm $x_1 = 12, x_2 = -15$ (loại)

Do đó, chiều rộng là 12m, chiều dài là $240 : 12 = 20$ (m)

Trả lời: Mảnh đất có chiều rộng là 12m, chiều dài là 20m.

Ví dụ 1. Một hình chữ nhật có chiều rộng bằng $\frac{2}{3}$ chiều dài, diện tích hình chữ nhật là $5400 cm^2$. Tính chu vi hình chữ nhật.

Lời giải

Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (cm, $x > 0$).

Chiều rộng hình chữ nhật là $\frac{2}{3}x$ (cm).

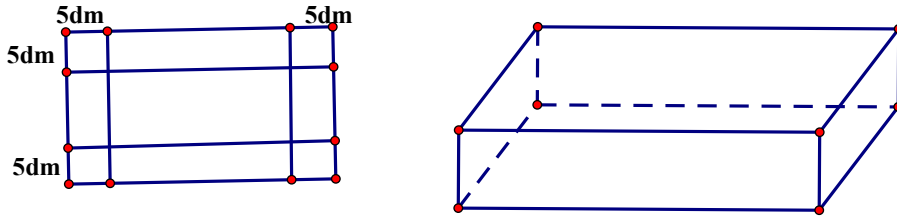
Theo đầu bài, ta có phương trình:

$$x \cdot \frac{2}{3}x = 5400 \Leftrightarrow x^2 = 8100 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 90 \\ x = -90 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy chiều dài hình chữ nhật là 90cm, chiều rộng hình chữ nhật là 60cm.

Do đó, chu vi hình chữ nhật là $(90 + 60) \cdot 2 = 300\text{cm}$.

Ví dụ 3: Từ một miếng tôn hình chữ nhật người ta cắt ở 4 góc bốn hình vuông có cạnh bằng 5dm để làm thành một cái thùng không nắp có dung tích 1500dm^3 (H.15). Hãy tính kích thước của miếng tôn lúc đầu, biết rằng chiều dài của nó gấp đôi chiều rộng.



Lời giải

Gọi chiều rộng của miếng tôn lúc đầu là x (dm), $x > 0$

Chiều dài của nó là $2x$ (dm)

Khi làm thành một cái thùng không nắp thì chiều dài của thùng là $2x - 10$ (dm), chiều rộng là $x - 10$ (dm), chiều cao là 5dm.

Dung tích của thùng là $5(2x - 10)(x - 10)(\text{dm}^3)$

Theo đầu bài ta có phương trình $5(2x - 10)(x - 10) = 1500 \Leftrightarrow x^2 - 15x - 100 = 0$

Giải phương trình $\Delta = 225 + 400 = 625, \sqrt{\Delta} = 25$

Phương trình có nghiệm $x_1 = 20, x_2 = -5$ (loại)

Trả lời: Miếng tôn có chiều rộng bằng 20dm, chiều dài bằng 40dm.

Dạng 5: Năng suất

1. Phương pháp

☒ Khối lượng công việc = Năng suất $\times$ Thời gian.

☒ Năng suất = Khối lượng công việc $\div$ Thời gian

☒ Thời gian = Khối lượng công việc $\div$ Năng suất

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Một công nhân dự định làm 70 sản phẩm trong thời gian quy định. Nhưng do áp dụng kỹ thuật nên đã tăng năng suất thêm 5 sản phẩm mỗi giờ. Do đó, không những hoàn thành kế hoạch trước thời hạn 40 phút mà còn làm thêm được 10 sản phẩm so với dự định. Tính năng suất dự định.

Lời giải

Gọi năng suất dự định là x (sản phẩm/giờ, $x \in \mathbb{N}^*$);

Thời gian dự định làm 70 sản phẩm là $\frac{70}{x}$ giờ.

Thời gian thực tế làm 80 sản phẩm với năng suất $x+5$ (sản phẩm/giờ) là $\frac{80}{x+5}$ giờ.

Theo đề bài, công nhân hoàn thành trước kế hoạch 40 phút ($=\frac{2}{3}$ giờ).

Ta có phương trình:

$$\frac{70}{x} - \frac{80}{x+5} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2 + 20x - 525 = 0.$$

$\Delta = 20^2 - 4 \cdot (-525) = 2500 > 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = 15$ (nhận); $x_2 = -35$ (loại).

Vậy năng suất dự định là 15 sản phẩm/giờ.

Ví dụ 2. Một công nhân dự định làm 72 sản phẩm trong thời gian quy định. Nhưng thực tế xí nghiệp lại giao 80 sản phẩm. Vì vậy mặc dù người đó đã làm mỗi giờ thêm 1 sản phẩm, song thời gian hoàn thành công việc vẫn chậm hơn so với dự định 12 phút. Tính năng suất dự kiến, biết rằng mỗi giờ người đó làm không quá 20 sản phẩm.

Lời giải

Gọi năng suất dự định là x (sản phẩm/giờ, $x \in \mathbb{N}, 0 < x < 20$);

Năng suất thực tế là $x+1$ (sản phẩm/giờ)

Thời gian dự định làm 72 sản phẩm là $\frac{72}{x}$ giờ;

Thời gian thực tế làm 80 sản phẩm với năng suất $x+1$ (sản phẩm/giờ) là $\frac{80}{x+1}$ giờ.

Theo đề bài, thời gian hoàn thành vẫn chậm hơn so với dự định là 12 phút ($=\frac{1}{5}$ giờ).

Ta có phương trình:

$$\frac{80}{x+1} - \frac{72}{x} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 80.5.x - 72.5.(x+1) = x(x+1) \Leftrightarrow x^2 - 39x + 360 = 0.$$

$\Delta = 39^2 - 4 \cdot (360) = 81 > 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = 15$ (nhận); $x_2 = 24$ (loại).

Vậy năng suất dự định là 15 sản phẩm/giờ.

Dạng 6: Các Dạng Khác

Ví dụ 1: Bác Thờ vay 2 000 000 đồng của ngân hàng để làm kinh tế gia đình trong thời hạn 1 năm. Lẽ ra cuối năm bác phải trả cả vốn lẫn lãi. Song bác đã được ngân hàng cho kéo dài thời hạn thêm một năm nữa, số lãi của năm đầu được gộp với vốn để tính lãi năm sau và lãi suất vẫn như cũ. Hết hai năm bác phải trả tất cả là 2 420 000 đồng. Hỏi lãi suất cho vay là bao nhiêu phần trăm trong một năm?

Lời giải

Gọi lãi suất cho vay là x (% , $x > 0$)

Tiền lãi sau 1 năm là $2000000 \cdot \frac{x}{100}$ hay $20000x$ (đồng)

Sau 1 năm cả vốn lẫn lãi sẽ là $2000000 + 20000x$ (đồng)

Tiền lãi riêng năm thứ hai phải chịu là $(2000000 + 20000x) \cdot \frac{x}{100} = 20000x + 200x^2$

Theo đầu bài ta có phương trình:

$$2000000 + 40000x + 200x^2 = 2420000 \Leftrightarrow x^2 + 200x - 2100 = 0$$

Giải phương trình ta được $x_1 = 10, x_2 = -210$ (loại)

Vậy lãi suất là 10%

Ví dụ 2: Miếng kim loại thứ nhất nặng 880g, miếng kim loại thứ 2 nặng 858g. Thể tích của miếng thứ nhất nhỏ hơn thể tích của miếng thứ hai là 10 cm^3 , nhưng khối lượng riêng của miếng thứ nhất lớn hơn khối lượng riêng của miếng thứ hai là 1 g/cm^3 . Tìm khối lượng riêng của mỗi miếng kim loại?

Lời giải

Gọi khối lượng riêng của miếng kim loại thứ nhất là $x \text{ (g/cm}^3\text{)}$, $x > 0$

Khối lượng riêng của miếng kim loại thứ hai là $x - 1 \text{ (g/cm}^3\text{)}$

Thể tích của miếng kim loại thứ nhất là $\frac{880}{x} \text{ (cm}^3\text{)}$

Thể tích của miếng kim loại thứ hai là $\frac{880}{x-1} \text{ (cm}^3\text{)}$

Theo đầu bài ta có phương trình $\frac{858}{x-1} - \frac{880}{x} = 10$

Giải phương trình $10x(x-1) = 858x - 880x + 880 \Leftrightarrow 5x^2 + 6x - 440 = 0$

$$\Delta' = 9 + 2200, \sqrt{\Delta'} = 47$$

Phương trình có nghiệm $x_1 = 8,8; x_2 = -10$ (loại)

Vậy khối lượng riêng của miếng kim loại thứ nhất là $8,8 \text{ g/cm}^3$

khối lượng riêng của miếng kim loại thứ nhất là $7,8 \text{ g/cm}^3$

Ví dụ 3. Người ta đổ thêm 200g nước vào một dung dịch chứa 40g muối thì nồng độ của dung dịch giảm đi 10%. Hỏi trước khi đó đổ thêm nước thì dung dịch chứa bao nhiêu nước?

Lời giải

Gọi trọng lượng nước trong dung dịch trước khi đổ thêm nước là $x \text{ (g)}$, $x > 0$

Nồng độ muối của dung dịch khi đó là $\frac{40}{x+40}$

Nếu đổ thêm 200g nước vào dung dịch thì trọng lượng của dung dịch là $x + 40 + 200(g)$

Nồng độ dung dịch bây giờ là $\frac{40}{x + 240}$

Vì nồng độ muối giảm 10% nên ta có phương trình

$$\frac{40}{x + 40} - \frac{40}{x + 240} = \frac{10}{100}$$

Giải phương trình $(x + 40)(x + 240) = 400(x + 240 - x - 40) \Leftrightarrow x^2 + 280x - 70400 = 0$

$$\Delta' = 19600 + 70400 = 90000, \sqrt{\Delta'} = 300$$

Phương trình có nghiệm $x_1 = 160, x_2 = -440$ (loại)

Vậy trước khi đổ thêm nước, trong dung dịch có 160g nước.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Tìm hai số biết rằng tổng của chúng bằng 17 đơn vị. Nếu số thứ nhất tăng thêm 3 đơn vị, số thứ 2 tăng thêm 2 đơn vị thì tích của chúng bằng 105 đơn vị.

Lời giải

Gọi số thứ nhất là x , số thứ hai là y .

Theo đề bài tổng của hai số đó bằng 17 đơn vị nên ta có phương trình $x + y = 17$. (1)

Số thứ nhất tăng thêm 3 đơn vị, số thứ hai tăng thêm 2 đơn vị thì tích của chúng bằng 105 đơn vị nên ta có phương trình $(x + 3)(y + 2) = 105$. (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ (x + 3)(y + 2) = 105 \end{cases}$$

Rút y từ (1) thế vào (2) và thu gọn, ta được

$$x^2 - 16x + 48 = 0.$$

Giải phương trình ta được $x_1 = 12$ (thỏa mãn) và $x_2 = 4$ (thỏa mãn).

Vậy nếu số thứ nhất là 12 thì số thứ hai là 5; nếu số thứ nhất là 4 thì số thứ hai là 12.

Câu 2: Tìm hai số biết rằng hai lần số thứ nhất hơn ba lần số thứ hai là 9 và hiệu bình phương của chúng bằng 119.

Hướng dẫn giải

Gọi hai số cần tìm là x và y . Ta có hệ

$$\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ x^2 - y^2 = 119 \end{cases} \text{ . Giải ra được } (12; 5) \text{ và } (-19, 2; -15, 8).$$

Câu 3: Một ca nô đi xuôi dòng 45km rồi ngược dòng 18km. Biết rằng thời gian đi xuôi dòng lâu hơn thời gian đi ngược dòng là 1 giờ và vận tốc đi xuôi lớn hơn vận tốc đi ngược là 6km/h. Tính vận tốc ca nô lúc ngược dòng.

Hướng dẫn giải

. Gọi $x(km/h)$ là vận tốc ca nô lúc ngược dòng.

Ta có phương trình: $\frac{45}{x+6} - \frac{18}{x} = 1$. Suy ra $x = 12$; $x = 9$.

Câu 4: Hai đội cùng đào một con mương. Nếu mỗi đội làm một mình cả con mương thì thời gian tổng cộng hai đội phải làm là 25 giờ. Nếu hai đội cùng làm chung thì công việc hoàn thành trong 6 giờ. Tính xem mỗi đội làm một mình xong cả con mương trong bao lâu?

Hướng dẫn giải

Gọi x (giờ) là thời gian đội thứ nhất đào một mình xong con mương thì $25 - x$ (giờ) là thời gian đội thứ hai đào một mình xong con mương.

Điều kiện $0 < x < 25$.

Trong 1 giờ đội thứ nhất đào được $\frac{1}{x}$ con mương, đội thứ hai đào được $\frac{1}{25-x}$ con mương và cả hai đội đào chung được $\frac{1}{6}$ con mương. Ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{25-x} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6(25-x) + 6x = x(25-x) \Leftrightarrow x^2 - 25x + 150 = 0.$$

Câu 5: Hai công nhân cùng làm một công việc thì hoàn thành công việc đó trong 6 giờ 40 phút. Nếu họ làm riêng thì công nhân thứ nhất hoàn thành công việc đó ít hơn công nhân thứ hai là 3 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi công nhân phải làm trong bao lâu thì xong việc?

Lời giải

Ta có 6 giờ 40 phút $= 6\frac{2}{3}$ giờ.

Gọi thời gian công nhân thứ nhất làm một mình xong công việc là x (giờ, $x > 6\frac{2}{3}$).

Thời gian công nhân thứ hai làm một mình xong việc là $x + 3$ (giờ).

Mỗi giờ công nhân thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc).

Mỗi giờ công nhân thứ hai làm được $\frac{1}{x+3}$ (công việc).

Theo đầu bài, hai công nhân cùng làm thì hoàn thành công việc trong $6\frac{2}{3}$ giờ. Nên mỗi giờ họ

cùng làm được $1 : 6\frac{2}{3} = \frac{3}{20}$ (công việc). Ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{20} \Leftrightarrow 3x^2 - 31x - 60 = 0.$$

Ta có $\Delta = 31^2 - 4.3.(-60) = 1681 > 0$ nên phương trình có nghiệm là $x_1 = -\frac{5}{3}$ (loại); $x_2 = 12$ (nhận).

Vậy thời gian công nhân thứ nhất làm xong công việc là 12 giờ. Thời gian công nhân thứ hai làm một mình xong công việc là 15 giờ.

Câu 6: Một đa giác lồi tất cả 170 đường chéo. Hỏi đa giác đó có bao nhiêu cạnh?

Hướng dẫn giải

Gọi số cạnh của đa giác là n (n nguyên dương)

Số đường chéo của đa giác n cạnh là $\frac{n(n-3)}{2}$

Ta có phương trình: $\frac{n(n-3)}{2} = 170$ hay $n^2 - 3n - 340 = 0$.

Câu 7: Một thửa ruộng hình chữ nhật có diện tích là 100m^2 . Tính độ dài các cạnh của thửa ruộng. Biết rằng nếu tăng chiều rộng của thửa ruộng lên 2m và giảm chiều dài thửa ruộng đi 5m thì diện tích thửa ruộng tăng thêm 5m^2 .

Lời giải

Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (m, $x > 0$), thì chiều rộng hình chữ nhật là $\frac{100}{x}$ (m).

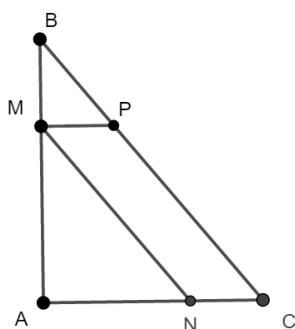
Theo đầu bài, nếu tăng chiều rộng thửa ruộng lên 2m và giảm chiều dài thửa ruộng đi 5m thì diện tích thửa ruộng tăng thêm 5m^2 , ta có phương trình:

$$(x-5) \cdot \left(\frac{100}{x} + 2 \right) = 100 + 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 15x - 500 = 0$$

Ta có $\Delta = 15^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-500) = 4225 > 0$, nên phương trình có nghiệm $x_1 = -\frac{25}{2}$ (loại); $x_2 = 20$ (nhận).

Vậy chiều dài mảnh đất hình chữ nhật là 20m, chiều rộng là 5m.

Câu 8: Cho tam giác ABC vuông cân có $AB = AC = 12\text{cm}$. Điểm M chạy trên AB . Tứ giác $MNCP$ là hình bình hành có đỉnh N thuộc cạnh AC (như hình bên dưới). Hỏi khi M cách A bao nhiêu thì diện tích của hình bình hành bằng 32cm^2 .



Lời giải

Đặt $MA = x$, ta có $MB = NC = 12 - x$ (cm).

$$S_{MPCN} = S_{ABC} - S_{BMP} - S_{AMN} = 72 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}(12 - x)^2 = -x^2 + 12x$$

Ta có phương trình $-x^2 + 12x = 32 \Leftrightarrow x^2 - 12x - 32 = 0$.

Ta có $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 2 \cdot (32) = 16 > 0$, nên phương trình có nghiệm $x_1 = 8$ (nhận); $x_2 = 4$ (nhận).

Kết luận khi M cách A một khoảng bằng 8cm hoặc 4cm thì diện tích hình bình hành bằng 32cm^2 .

Câu 9: Trong một phòng có 80 người họp, được sắp xếp ngồi đều trên các dãy ghế. Nếu ta bớt đi hai dãy ghế thì mỗi dãy ghế còn lại phải xếp thêm hai người mới đủ chỗ. Hỏi lúc đầu có mấy dãy ghế và mỗi dãy ghế được xếp bao nhiêu người ngồi?

Hướng dẫn giải

Gọi x là số dãy ghế lúc đầu ($x > 2; x \in \mathbb{N}$)

Lúc đầu, số người ngồi trên một dãy ghế là $\frac{80}{x}$, lúc sau là $\frac{80}{x-2}$

Ta có phương trình: $\frac{80}{x-2} - \frac{80}{x} = 2$. Giải ra ta được: $x = 10$.

Câu 10: Một phòng học có một số dãy ghế tổng cộng 40 chỗ ngồi. Do phải xếp 55 chỗ nên người ta kê thêm 1 dãy ghế và mỗi dãy ghế thêm 1 chỗ. Hỏi lúc đầu có mấy dãy ghế trong phòng?

Hướng dẫn giải

Gọi x là số dãy ghế trong phòng ($x \in \mathbb{Z}^+$)

Ta có phương trình: $\frac{55}{x+1} - \frac{40}{x} = 1$. Suy ra $x = 4$; $x = 10$.

Câu 11: Nếu mở cả hai vòi chảy vào một bể cạn thì sau 2 giờ 55 phút bể đầy nước. Nếu mở riêng từng vòi thì vòi thứ nhất làm đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì mỗi vòi chảy bao lâu đầy bể?

Hướng dẫn giải

$$2g55ph = \frac{35}{12} \text{ giờ}$$

Gọi $x(g)$ là thời gian vòi I chảy một mình đầy bể thì $x+2$ (giờ) là thời gian vòi II chảy một mình đầy bể. Ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{12}{35} \Leftrightarrow 6x^2 - 23x - 35 = 0$$

Câu 12: Một ca nô xuôi dòng từ bến sông A đến bến sông B cách nhau 24km ; cũng từ A về B một chiếc bè trôi với vận tốc dòng nước là 4km/h . Khi đến B ca nô quay lại ngay và gặp bè tại điểm C cách A là 8km . Tính vận tốc thực của ca nô.

Lời giải

Gọi vận tốc thực của ca nô là x (km/h , $x > 4$).

Suy ra vận tốc của ca nô khi xuôi dòng là $x+4$ (km/h).

Vận tốc của ca nô khi ngược dòng là $x-4$ (km/h).

Thời gian ca nô đi xuôi dòng 24km là $\frac{24}{x+4}$ (giờ).

Thời gian ca nô đi ngược dòng 16km là $\frac{16}{x-4}$ (giờ).

Theo đề bài, thời gian ca nô đi bằng thời gian bè trôi đến chỗ gặp nhau, nên ta có phương trình

$$\frac{24}{x+4} + \frac{16}{x-4} = \frac{8}{4} \Leftrightarrow x^2 - 20x = 0.$$

Ta có $\Delta = 20^2 = 400 > 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = 0$ (loại); $x_2 = 20$ (nhận).

Vậy vận tốc thực của ca nô là 20km/h .

Câu 13: Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13m và chiều dài lớn hơn chiều rộng 7m . Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.

Lời giải

Gọi chiều rộng mảnh đất là x (m , $0 < x < 13$), thì chiều dài mảnh đất là $x+7$ (m).

Theo đầu bài, hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13m , áp dụng định lý Pi-ta-go ta có phương trình

$$x^2 + (x+7)^2 = 13^2 \Leftrightarrow x^2 + 7x - 60 = 0.$$

$\Delta = 7^2 - 4 \cdot (-60) = 289 > 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = -12$ (loại); $x_2 = 5$ (nhận).

Vậy chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật là 5m và chiều dài của mảnh đất là 12m .

Câu 14: Hướng ứng chiến dịch mùa hè xanh tình nguyện năm 2013, lớp 9A của trường THCS Nguyễn Văn Trỗi được giao trồng 480 cây xanh, lớp dự định chia đều số cây phải trồng cho mỗi bạn trong lớp. Đến buổi lao động có 8 bạn phải đi làm việc khác nên mỗi bạn có mặt phải trồng thêm 3 cây nữa mới xong. Tính số học sinh của lớp 9A.

Lời giải

Gọi x (học sinh) là số học sinh của lớp 9A ($x \in \mathbb{N}^*$). Số cây xanh mỗi học sinh cần phải trồng lúc đầu là $\frac{480}{x}$ (cây). Số cây xanh mỗi học sinh phải trồng trong buổi lao động $\frac{480}{x} + 3 = \frac{480 + 3x}{x}$ (cây). Số học sinh đi trồng cây $x - 8$ (học sinh). Theo đề bài, ta có phương trình

$$(x - 8) \left(\frac{480 + 3x}{x} \right) = 480 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 1280 = 0$$

$\Delta = 8^2 - 4 \cdot (-1280) = 5184 > 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = -32$ (loại); $x_2 = 40$ (nhận).

Vậy số học sinh của lớp 9A là 40 học sinh.

Câu 15: Người ta hòa tan 8 gam chất lỏng này với 6 gam chất lỏng khác có khối lượng riêng nhỏ hơn 200 kg/m^3 để được một hỗn hợp có khối lượng riêng là 700 kg/m^3 . Tìm khối lượng riêng của mỗi chất lỏng (giả sử 2 chất lỏng không có xảy ra phản ứng hóa học).

Lời giải

Gọi khối lượng riêng của chất thứ nhất là $x \text{ kg/m}^3$, ($x > 200$); khi đó, khối lượng riêng của chất thứ hai là $x - 200 \text{ kg/m}^3$.

Thể tích của chất thứ nhất là $\frac{0,008}{x} \text{ m}^3$. Thể tích của chất thứ hai là $\frac{0,006}{x - 200} \text{ m}^3$. Thể tích của hỗn hợp chất lỏng là $\frac{0,008 + 0,006}{700} \text{ m}^3$. Vì trước và sau khi trộn, tổng thể tích của hai chất lỏng đều không đổi nên ta có phương trình

$$\frac{0,008}{x} + \frac{0,006}{x - 200} = \frac{0,008 + 0,006}{700} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 800 \\ x_2 = 100 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Câu 16: Hai đội công nhân A và B dự định cùng làm một công việc trong 4 giờ 48 phút thì hoàn thành. Sau khi hai đội làm chung với nhau trong 2 giờ, thì số lượng công nhân ở đội A và đội B thay đổi nên năng suất của đội A bằng $\frac{1}{2}$ năng suất ban đầu của đội A và năng suất làm việc của đội B bằng $\frac{11}{4}$ năng suất làm việc ban đầu của đội B; vì vậy hai đội đã hoàn thành công việc trước 48 phút so với dự định. Hỏi nếu số lượng công nhân ở đội A không bị thay đổi thì một mình đội A hoàn thành công việc trên trong mấy giờ?

Lời giải

4 giờ 48 phút $= \frac{24}{5}$ giờ; 48 phút $= \frac{4}{5}$ giờ.

Gọi x (giờ) là thời gian một mình đội A hoàn thành công việc $\left(x > \frac{24}{5} \right)$.

Gọi y (giờ) là thời gian một mình đội B hoàn thành công việc $\left(y > \frac{24}{5} \right)$.

Trong $\frac{24}{5}$ giờ, đội A làm được $\frac{24}{5x}$ (công việc), đội B làm được $\frac{24}{5y}$ (công việc). Theo đề ta có phương trình $\frac{24}{5x} + \frac{24}{5y} = 1$ Vì hai đội đã hoàn thành công việc trước 48 phút so với dự định nên thực tế hai đội làm trong 4 giờ. Trong 2 giờ đầu, đội A làm được $\frac{2}{x}$ (công việc), đội B làm được $\frac{2}{y}$ (công việc). Trong 2 giờ sau, đội A làm được $\frac{2}{x} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{x}$ (công việc), đội B làm được $\frac{2}{x} \cdot \frac{11}{4} = \frac{11}{2y}$ (công việc). Theo đề ta có phương trình $\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{x} + \frac{11}{2y} = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{x} + \frac{15}{2y} = 1$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{24}{5x} + \frac{24}{5y} = 1 \\ \frac{3}{x} + \frac{15}{2y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 12 \end{cases}$$

Vậy nếu số lượng công nhân ở đội A không thay đổi thì một mình đội A hoàn thành công việc trong 8 giờ.

LUYỆN TẬP CHUNG

A. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Cho phương trình bậc hai: $x^2 - 7x + 5 = 0$.

a) Chứng minh phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

b) Tính $A = x_1^2 - x_2^2$.

Lời giải

a) Ta có: $\Delta = 7^2 - 4 \cdot 5 = 29 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

b) Theo định lí Viète, ta có: $x_1 + x_2 = 7, x_1 x_2 = 5$.

Do đó $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 7^2 - 2 \cdot 5 = 39$.

Ví dụ 2: Có hai miếng kim loại: miếng thứ nhất nặng 600 g; miếng thứ hai nặng 640 g. Thể tích của miếng thứ nhất lớn hơn thể tích của miếng thứ hai là 120 cm^3 , nhưng khối lượng riêng của miếng thứ nhất nhỏ hơn khối lượng riêng của miếng thứ hai là 5 g/cm^3 . Tìm khối lượng riêng của mỗi miếng kim loại.

Lời giải

Gọi $x (\text{g/cm}^3)$ là khối lượng riêng của miếng kim loại thứ nhất. Điều kiện: $x > 0$.

Khối lượng riêng của miếng kim loại thứ hai là $x + 5 (\text{g/cm}^3)$.

Thể tích của miếng kim loại thứ nhất là $\frac{600}{x} (\text{cm}^3)$.

Thể tích của miếng kim loại thứ hai là $\frac{640}{x+5} (\text{cm}^3)$.

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{600}{x} - \frac{640}{x+5} = 120$.

Nhân cả hai vế của phương trình với $x(x+5)$ để khử mẫu, ta được:

$$600(x+5) - 640x = 120x(x+5), \text{ hay } 3x^2 + 16x - 75 = 0$$

Ta có: $\Delta' = 8^2 - 3 \cdot (-75) = 289; \sqrt{\Delta'} = 17$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-8-17}{3} = \frac{-25}{3} \text{ (loại); } x_2 = \frac{-8+17}{3} = 3 \text{ (thoả mãn điều kiện).}$$

Vậy khối lượng riêng của miếng kim loại thứ nhất là 3 g/cm^3 và khối lượng riêng của miếng kim loại thứ hai là 8 g/cm^3 .

B. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

6.34. Tính nhẩm nghiệm của các phương trình sau:

a) $\sqrt{2}x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + 1 = 0$ b) $2x^2 + (\sqrt{3} - 1)x - 3 + \sqrt{3} = 0$

Lời giải

a) Ta có $a + b + c = \sqrt{2} + [-(\sqrt{2} + 1)] + 1 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 1; x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) Ta có $a + b + c = 2 - (\sqrt{3} - 1) - 3 + \sqrt{3} = 0$ nên phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = -1; x_2 = -\frac{-3 + \sqrt{3}}{2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}.$$

6.35. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - 5x + 3 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính:

a) $x_1^2 + x_2^2$ b) $(x_1 - x_2)^2$.

Lời giải

Xét phương trình bậc hai $x^2 - 5x + 3 = 0$ có $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 13 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Theo định lí Viète ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{-5}{1} = 5; x_1 x_2 = \frac{3}{1} = 3$

a) Ta có: $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2$

Suy ra $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 5^2 - 2 \cdot 3 = 19$.

b) Ta có: $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2) - 2x_1 x_2 = 19 - 2 \cdot 3 = 13$

Chú ý. Ta cũng có thể tính giá trị của $(x_1 - x_2)^2$ như sau:

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2) - 4x_1 x_2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 5^2 - 4 \cdot 3 = 13$$

6.36. Tìm hai số u và v , biết:

a) $u + v = 15, uv = 56$; b) $u^2 + v^2 = 125, uv = 22$.

Lời giải

a) $u + v = 15, uv = 56$.

Hai số u và v cần tìm là nghiệm của phương trình: $x^2 - 15x + 56 = 0$.

Ta có: $\Delta = (-15)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 56 = 1 > 0$ và $\sqrt{\Delta} = 1$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm: $x_1 = \frac{15 - 1}{2 \cdot 1} = 7; x_2 = \frac{15 + 1}{2 \cdot 1} = 8$.

Vậy hai số cần tìm là $u = 7; v = 8$ hoặc $u = 8; v = 7$.

b) $u^2 + v^2 = 125, uv = 22$.

Ta có $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2 = (u^2 + v^2) + 2uv = 125 + 2 \cdot 22 = 169$.

Suy ra $u + v = 13$ hoặc $u + v = -13$.

Trường hợp 1 $u + v = 13$ và $uv = 22$.

Hai số u và v cần tìm là nghiệm của phương trình: $x^2 - 13x + 22 = 0$.

Ta có: $\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 22 = 81 > 0$ và $\sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm: $x_1 = \frac{13+9}{2 \cdot 1} = 11; x_2 = \frac{13-9}{2 \cdot 1} = 2$.

Khi đó, hai số cần tìm là $u = 11; v = 2$ hoặc $u = 2; v = 11$.

Trường hợp 2 $u + v = -13$ và $uv = 22$.

Hai số u và v cần tìm là nghiệm của phương trình: $x^2 + 13x + 22 = 0$.

Ta có: $\Delta = 13^2 - 4 \cdot 1 \cdot 22 = 81 > 0$ và $\sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm: $x_1 = \frac{-13+9}{2 \cdot 1} = -2; x_2 = \frac{-13-9}{2 \cdot 1} = -11$.

Khi đó, hai số cần tìm là $u = -11; v = -2$ hoặc $u = -2; v = -11$.

Vậy các cặp số $(u; v)$ cần tìm là: $(11; 2); (2; 11); (-11; -2); (-2; -11)$.

6.37. Một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật, không có nắp, có đáy là hình vuông, tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy là 800cm^2 . Chiều cao của hộp là 10 cm. Tính độ dài cạnh đáy của chiếc hộp (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của cm).

Lời giải

Gọi x (cm) là độ dài cạnh đáy ($x > 0$).

Diện tích mặt đáy hình vuông là: $x^2 (\text{cm}^2)$.

Diện tích xung quanh là: $4x \cdot 10 = 40x (\text{cm}^2)$.

Tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy là: $x^2 + 40x (\text{cm}^2)$.

Theo bài, tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy là 800cm^2 nên ta có phương trình:

$$x^2 + 40x = 800$$

$$x^2 + 40x - 800 = 0$$

Ta có: $\Delta' = 20^2 - 1 \cdot (-800) = 1200 > 0$ và $\sqrt{\Delta'} = \sqrt{1200} = 20\sqrt{3}$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = -20 + 20\sqrt{3} \approx 14,64 \text{ (thỏa mãn điều kiện); } x_2 = -20 - 20\sqrt{3} \approx 54,64 \text{ (loại).}$$

Vậy độ dài cạnh đáy của chiếc hộp khoảng 14,64 cm.

6.38. Nhu cầu của khách hàng đối với một loại áo phông tại một cửa hàng được cho bởi phương trình $p = 100 - 0,02x$, trong đó p là giá tiền của mỗi chiếc áo (nghìn đồng) và x là số lượng áo phông bán được. Doanh thu R (nghìn đồng) khi bán được x chiếc áo phông là: $R = xp = x(100 - 0,02x)$. Hỏi cần phải bán được

bao nhiêu chiếc áo phông để doanh thu đạt 120 triệu đồng?

Lời giải

Đổi 120 triệu đồng = 120000 nghìn đồng.

Vì doanh thu đạt 120 triệu đồng nên $R = 120000$ (nghìn đồng).

Thay $R = 120000$ vào $R = xp = x(100 - 0,02x)$, ta được:

$$x(100 - 0,02x) = 120000$$

$$100x - 0,02x^2 = 120000$$

$$0,02x^2 - 100x + 120000 = 0$$

Ta có $\Delta' = (-50)^2 - 0,02 \cdot 120000 = 100 > 0$ và $\sqrt{\Delta'} = \sqrt{100} = 10$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{50+10}{0,02} = 3000$; $x_2 = \frac{50-10}{0,02} = 2000$

Vậy phải bán 3000 chiếc áo với giá $100 - 0,02 \cdot 3000 = 40$ nghìn đồng hoặc bán 2000 chiếc áo với giá $100 - 0,02 \cdot 2000 = 60$ nghìn đồng.

C. BÀI TẬP THÊM

Câu 1: Giải phương trình:

a) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

b) $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$

c) $2x^2 - 7x + 2 = 0$

Hướng dẫn: Xác định các hệ số a, b, c ; sau đó tính Δ . ($\Delta = b^2 - 4ac$).

Lời giải

a) Ta có $a = 2$; $b = -5$; $c = 2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

Phương trình có hai nghiệm: $x_1 = \frac{-(-5)+3}{2 \cdot 2} = 2$; $x_2 = \frac{-(-5)-3}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$

b) Ta có: $a = 1$; $b = -(1 + \sqrt{2})$; $c = \sqrt{2}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left[-\left(1 + \sqrt{2}\right) \right]^2 - 4 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 4\sqrt{2} = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = \left(1 - \sqrt{2}\right)^2 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(1 - \sqrt{2}\right)^2} = \left|1 - \sqrt{2}\right| = \sqrt{2} - 1$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm: } x_1 = \frac{(1 + \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - 1)}{2 \cdot 1} = \sqrt{2}; x_2 = \frac{(1 + \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - 1)}{2 \cdot 1} = 1$$

$$\text{Cách khác: } x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - \sqrt{2}x + \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 1) - \sqrt{2}(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x - \sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{c) Ta có: } a = 2; b = -7; c = 2$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 49 - 16 = 33 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{33}$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm: } x_1 = \frac{7 + \sqrt{33}}{4}; x_2 = \frac{7 - \sqrt{33}}{4}$$

Câu 2: Giải phương trình:

$$\text{a) } (2x + 1)^2 = 8x \quad (1)$$

$$\text{b) } (3x - 1)(x + 1) = 15 \quad (2)$$

$$\text{c) } 2x^2 + 3x - (x - 1)(x - 2) = 0 \quad (3)$$

Hướng dẫn: Rút gọn và đưa về dạng $ax^2 + bx + c = 0$.

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } (1) \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 - 8x = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

(Ta có thể tính Δ và có $\Delta = 0$ nên phương trình có nghiệm kép).

$$\text{b) Ta có: } (2) \Leftrightarrow 3x^2 + 3x - x - 1 - 15 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 16 = 0$$

$$\text{Trong đó: } a = 3; b = 2; c = -16$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 3 \cdot (-16) = 196 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{196} = 14$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm: } x_1 = \frac{-2 + 14}{6} = 2; x_2 = \frac{-2 - 14}{6} = -\frac{8}{3}$$

$$\text{c) Ta có: } (3) \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - (x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 2 = 0$$

$$\text{Trong đó: } a = 1; b = 6; c = -2$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 44 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

Phương trình có hai nghiệm: $x_1 = \frac{-6+2\sqrt{11}}{2} = -3+\sqrt{11}; x_2 = \frac{-6-2\sqrt{11}}{2} = -3-\sqrt{11}$

Câu 3: Chứng tỏ phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có các hệ số a và c trái dấu thì luôn có nghiệm.

Hướng dẫn: Xét biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$

Lời giải

Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Theo giả thiết: a và c trái dấu $\Rightarrow ac < 0 \Rightarrow -ac > 0 \Rightarrow -4ac > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > b^2 \geq 0 \Rightarrow \Delta > 0$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Áp dụng: Không tính Δ , hãy giải thích vì sao mỗi phương trình sau có hai nghiệm phân biệt.

1) $x^2 - (2m+1)x - 1 = 0$ 2) $x^2 - mx - m^2 - 1 = 0$

Hướng dẫn: 1) Ta có: $a = 1; c = -1 \Rightarrow ac = -1 < 0$.

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

2) Ta có $a = 1; c = -m^2 - 1$, vì $m^2 \geq 0 \Rightarrow -m^2 \leq 0 \Rightarrow -1 - m^2 \leq -1 < 0$

Vậy a và c trái dấu $\Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

(Bài toán tương tự đối với phương trình: $x^2 - mx - 1 = 0; x^2 - (2m-1)x - m^2 - 2m - 3 = 0$)

Câu 4: Cho phương trình $2x^2 - 3x - 6 = 0$. Chứng tỏ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Tính $x_1^2 + x_2^2$ và $x_1^3 + x_2^3$.

Hướng dẫn: Xem nhận xét ở bài toán 1.

Lời giải

Ta có: $a = 2; c = -6 \Rightarrow ac = -12 < 0$. Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt (trái dấu) $x_1; x_2$.

Theo định lí Viète, ta có: $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}; x_1 x_2 = \frac{-6}{2} = -3$. Vậy

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2(-3) = \frac{33}{4}.$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = \frac{3}{2} \left[\frac{33}{4} - (-3) \right] = \frac{135}{8}$$

Cách khác: Ta cũng có: $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3(-3) \cdot \frac{3}{2} = \frac{135}{8}$

Câu 5: Cho phương trình $x^2 - 6x + 8 = 0$. Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức $M = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 x_2$, ở đó $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình.

Hướng dẫn: Chứng minh phương trình có nghiệm. Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$

Lời giải

Ta có $a = 1; b = -6 \Rightarrow b' = -3$. $\Delta' = 9 - 8 = 1 > 0$. Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Theo định lí Viète, ta có: $x_1 + x_2 = 6(1); x_1 \cdot x_2 = 8(2)$. Vậy

$$M = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 \Leftrightarrow M = (x_1 + x_2)^2 - 5x_1x_2 \quad (3)$$

Từ (1); (2) và (3), ta có: $M = 6^2 - 5 \cdot 8 = 36 - 40 = -4$.

Chú ý: Ta cần chứng tỏ phương trình có nghiệm $x_1; x_2$; sau đó mới áp dụng định lí Viète.

Câu 6: Cho phương trình $x^2 - x + m - 1 = 0$ (*).

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$.

b) Hãy tính $x_1^2 + x_2^2$ theo m .

Hướng dẫn:

- Phương trình đã cho có hai nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$ (không cần hai nghiệm phân biệt).

$$- x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

Lời giải

a) Phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 1 - 4 \cdot 1 \cdot (m - 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 5 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{4}$$

b) Theo định lí Viète, ta có: $x_1 + x_2 = 1; x_1 \cdot x_2 = m - 1$. Vậy

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1 - 2(m - 1) = 3 - 2m$$

Câu 7: Quãng đường AB dài 90 km, có hai ô tô khởi hành cùng một lúc. Ô tô thứ nhất đi từ A đến B, ô tô thứ hai đi từ B đến A. Sau 1 giờ hai xe gặp nhau và tiếp tục đi. Xe ô tô thứ hai tới A trước xe thứ nhất tới B là 27 phút. Tính vận tốc mỗi xe.

Hướng dẫn: Áp dụng công thức $S = v \cdot t$ (S là quãng đường, v là vận tốc, t là thời gian,

$$S : (km); v (km/h); \quad 3. (-3)^2 + 2 \cdot (-3 - 21 = 0 \Leftrightarrow 27 - 6 - 21 = 0)$$

Lời giải

Ta có: 27 phút = $\frac{9}{20}$ (giờ).

Sau 1 giờ hai xe gặp nhau nên tổng vận tốc của hai xe bằng 90(km/h).

Gọi x là vận tốc của xe thứ nhất ($x > 0; x$ tính bằng km/h)

thì vận tốc của xe thứ hai là $90 - x(km/h)$ ($x < 90$)

Thời gian của xe thứ nhất đi từ A đến B là $\frac{90}{x}$ (giờ).

Thời gian của xe thứ hai là $\frac{90}{90-x}$ (giờ).

Ta có phương trình: $\frac{90}{x} - \frac{9}{90-x} = \frac{9}{20}$.

$$\Leftrightarrow x^2 - 490x + 18000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \text{ (nhân)} \\ x = 450 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Trả lời: Vận tốc của xe thứ nhất là 40(km/h); vận tốc của xe thứ hai là 50(km/h).

Câu 8: Một ô tô dự định đi từ A đến B cách nhau 120 km trong một thời gian đã định. Sau khi đi 1 giờ, ô tô dừng lại 10 phút. Do đó để đến B đúng như dự kiến, ô tô phải tăng vận tốc thêm 6 km/h. Tính vận tốc ban đầu của ô tô.

Lời giải

Gọi x (km/h; $x > 0$) là vận tốc ban đầu của ô tô.

Như vậy thời gian dự định để đi từ A đến B là $\frac{120}{x}$ (h).

Ta có 10 phút = $\frac{1}{6}$ (giờ).

Sau khi đi 1 giờ, ô tô đi được một đoạn đường là x (km) (như vận tốc của ô tô đã dự định đi 1 giờ được x (km)).

Vậy quãng đường còn lại là $120 - x$ (km).

Ta có phương trình $\frac{120-x}{x+6} + 1 + \frac{1}{6} = \frac{120}{x} \Leftrightarrow 6x(120-x) + 7x(x+6) = 720(x+6)$

$$\Leftrightarrow x^2 + 42x - 4320 = 0(*)$$

$$\Delta = 1; b = 42 \Rightarrow b' = 21; c = -4320$$

$$\Delta' = 21^2 + 4320 = 4341 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 69$$

$$\text{Ta có: } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -21 - 69 \\ x = -21 + 69 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -90 \text{ (loại)} \\ x = 48 \text{ (nhân)} \end{cases}$$

Trả lời: Vận tốc dự định của ô tô là 48(km/h).

Câu 9: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì 6 giờ đầy bể. Nếu mỗi vòi chảy một mình cho đầy bể thì vòi thứ hai cần nhiều hơn vòi thứ nhất 5 giờ. Tính thời gian để mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Hướng dẫn: Bài toán quy về đơn vị (bạn xem chương II. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn).

Lời giải

Gọi thời gian để vòi thứ nhất chảy đầy bể là x (giờ) ($x > 0$) thì thời gian để vòi thứ hai chảy đầy bể $x+5$ (giờ).

Khi đó, mỗi giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ bể; vòi thứ hai chảy được: $\frac{1}{x+5}$ bể và cả hai vòi chảy được $\frac{1}{6}$ bể.

Vậy, ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6(x+5) + 6x = x(x+5) \Leftrightarrow x^2 - 7x - 30 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ (nhân)} \\ x = -3 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Trả lời: Vòi thứ nhất chảy đầy bể trong 10 giờ; Vòi thứ hai chảy đầy bể trong 15 giờ.

Câu 10: Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13 m, chiều dài hơn chiều rộng là 7 m. Tính diện tích của mảnh đất.

Hướng dẫn: Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác vuông có cạnh huyền là đường chéo hình chữ nhật, hai cạnh góc vuông là hai cạnh hình chữ nhật.

Lời giải

Gọi $x (x > 0)$ là chiều rộng của hình chữ nhật, thì chiều dài của nó là $x + 7$.

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác vuông ABD, ta có: $BD^2 = AD^2 + AB^2$

Vậy ta có phương trình: $x^2 + (x + 7)^2 = 13^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 14x - 120 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 7x - 60 = 0(*)$

$$(a = 1; b = 7; c = -60)$$

$$\Delta = 289 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 17. \text{ Vậy } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-7-17}{2} \\ x = \frac{-7+17}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -12 \text{ (loại)} \\ x = 5 \end{cases}$$

Chiều rộng, chiều dài hình chữ nhật lần lượt là 5(m) và 12(m).

Vậy diện tích hình chữ nhật là: $60 \text{ (m}^2\text{)}.$

Câu 11: Tích của hai số tự nhiên liên tiếp lớn hơn tổng của chúng là 109. Tìm hai số đó.

Hướng dẫn: Hai số tự nhiên liên tiếp là n và $n+1$ (chẵn hạn: 5 và 6).

Lời giải

Gọi số tự nhiên là $x (x \in \mathbb{N}^*)$ thì số kế sau nó là $x+1$. Theo bài ra, ta có phương trình:

$$x(x+1) - (x + x+1) = 109 \Leftrightarrow x^2 + x - x - x - 1 - 109 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 110 = 0(*)$$

$$(a = 1; b = -1; c = -110)$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-110) = 441 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 21.$$

$$\text{Vậy } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+21}{2} \\ x = \frac{1-21}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \text{ (nhân)} \\ x = -10 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Trả lời: Hai số cần tìm là 11 và 12.

Câu 12: Dân số của một tỉnh sau hai năm tăng từ 2000000 người lên 2048288 người. Tính xem hàng năm trung bình dân số tăng bao nhiêu phần trăm?

Hướng dẫn: Tìm số dân tăng từng năm: Sau năm thứ nhất khác với sau năm thứ hai. Ta không thể lấy 2048288 trừ đi 2.000.000 và chia trung bình (chia cho 2).

Lời giải

Gọi phần trăm tăng mỗi năm là $x(\%)$; $x > 0$.

Sau năm thứ nhất số dân của tỉnh là: $2.000.000 + 2.000.000 \cdot \frac{x}{100} = 2.000.000 + 20.000 \cdot x$

Số dân sau năm thứ hai là: $(2.000.000 + 20.000x) \cdot \frac{x}{100} = 200x(x + 100)$

Theo bài ra, ta có phương trình: $2000.000 + 20.000x + 200x(x + 100) = 2.048.288$

$$\Leftrightarrow x^2 + 200x - 241,44 = 0(*)$$

$$(a = 1; b = 200 \Rightarrow b' = 100; c = -241,44)$$

$$\Delta' = 10000 + 241,44 = 10241,44 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 101,2.$$

$$\text{Vậy } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -100 - 101,2 \\ x = -100 + 101,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -201,2 \text{ (loại)} \\ x = 1,2 \end{cases}$$

Trả lời: Hàng năm dân số tỉnh A tăng 1,2(%) .

Câu 13: Chu vi bánh sau của một máy cày lớn hơn chu vi bánh trước là 1,5 m . Khi đi trên đoạn đường dài 100 m thì bánh trước quay nhiều hơn bánh sau 15 vòng. Tính chu vi của mỗi bánh xe.

Lời giải

Gọi $x(m)$ là chu vi bánh trước ($x > 0$) .

Chu vi của bánh sau $x + 1,5(m)$.

Vì hai bánh này cùng lăn trên quãng đường 100(m) .

Số vòng quay được của bánh trước $\frac{100}{x}$.

Số vòng quay được của bánh sau $\frac{100}{x + 1,5}$.

Ta có phương trình

$$\frac{100}{x} - \frac{100}{x+15} = 15 \Leftrightarrow x^2 + 15x - 100 = 0.$$

Ta có $\Delta = 15^2 - 4 \cdot (-100) = 625 > 0$ nên phương trình có nghiệm là $x_1 = -20$ (loại); $x_2 = 5$ (nhận).

Kết luận: Chu vi bánh trước là 5(m), chu vi bánh sau là 6,5(m).

Câu 14: Người ta trộn 8 gam chất lỏng này với 6 gam chất lỏng khác có khối lượng riêng nhỏ hơn $0,2 \text{ g/cm}^3$ để được hỗn hợp có khối lượng riêng là $0,7 \text{ g/cm}^3$. Tìm khối lượng riêng của chất lỏng.

Lời giải

Gọi $x (\text{g/cm}^3)$ là khối lượng riêng của chất lỏng thứ nhất ($x > 0,2$).

Khối lượng riêng của chất lỏng thứ hai là $x - 0,2 (\text{g/cm}^3)$.

Thể tích của chất lỏng thứ nhất là $\frac{8}{x} (\text{cm}^3)$.

Thể tích của chất lỏng thứ hai là $\frac{x}{x-0,2} (\text{cm}^3)$. Thể tích của hỗn hợp là $\frac{14}{0,7} (\text{cm}^3)$.

Ta có phương trình

$$\frac{8}{x} + \frac{6}{x-0,2} = \frac{14}{0,7} \Leftrightarrow 20x^2 - 18x + 1,6 = 0.$$

Ta có $\Delta = 18^2 - 4 \cdot 20 \cdot 1,6 = 196 > 0$ nên phương trình có nghiệm là $x_1 = 0,1$ (loại); $x_2 = 0,8$ (nhận).

Kết luận: khối lượng riêng của chất lỏng thứ nhất là $0,8 \text{ g/cm}^3$ khối lượng riêng của chất lỏng thứ hai là $0,6 \text{ g/cm}^3$.

Câu 15: Miếng kim loại thứ nhất nặng 880 g, miếng kim loại thứ hai nặng 858 g. Thể tích của miếng kim loại thứ nhất nhỏ hơn thể tích của miếng kim loại thứ hai là 10 cm^3 , nhưng khối lượng riêng của miếng kim loại thứ nhất lớn hơn miếng kim loại thứ hai là 1 g/cm^3 . Tính khối lượng riêng của mỗi miếng kim loại. (Biết rằng khối lượng riêng của một vật được xác định bởi công thức $D = \frac{M}{V}$ trong đó D là khối lượng riêng tính bằng đơn vị g/cm^3 , M là khối lượng tính bằng đơn vị g, V là thể tích tính bằng đơn vị cm^3 .)

Lời giải

Gọi $x (\text{g/cm}^3)$ là khối lượng riêng của miếng kim loại thứ nhất ($x > 1$).

Khối lượng riêng của miếng kim loại thứ hai là $x - 1 (\text{g/cm}^3)$.

Thể tích của miếng kim loại thứ nhất $\frac{880}{x}(\text{g} / \text{cm}^3)$.

Thể tích của miếng kim loại thứ hai $\frac{858}{x-1}(\text{g} / \text{cm}^3)$.

Ta có phương trình

$$\frac{858}{x-1} - \frac{880}{x} = 10 \Leftrightarrow 5x^2 + 6x - 440 = 0.$$

Ta có $\Delta = 6^2 + 4 \cdot 5 \cdot 440 = 8836 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = -10$ (loại); $x_2 = 8,8$ (nhận). Vậy khối lượng riêng của miếng kim loại thứ nhất là $8,8(\text{g} / \text{cm}^3)$.

Khối lượng riêng của miếng kim loại thứ hai là $7,8(\text{g} / \text{cm}^3)$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

A. TRẮC NGHIỆM

6.39. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$?

- A. $(1;2)$. B. $(2;1)$. C. $(-1;2)$. D. $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

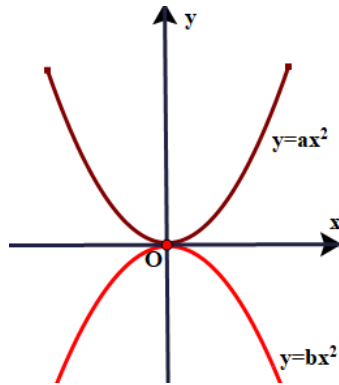
Lời giải

Chọn D

Thay $x = 1$ vào hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$, ta được: $y = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}$.

Do đó điểm $\left(1; \frac{1}{2}\right)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$.

6.40. Hình dưới là hai đường parabol trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Khẳng định nào sau đây là đúng?



- A. $a < 0 < b$. B. $a < b < 0$. C. $a > b > 0$. D. $a > 0 > b$.

Lời giải

Chọn D

Quan sát hình, ta thấy:

- Đồ thị hàm số $y = ax^2$ nằm phía trên trục hoành nên $a > 0$.
- Đồ thị hàm số $y = bx^2$ nằm phía dưới trục hoành nên $b < 0$.

Do đó $a > 0 > b$.

6.41. Các nghiệm của phương trình $x^2 + 7x + 12 = 0$ là

- A. $x_1 = 3; x_2 = 4$. B. $x_1 = -3; x_2 = -4$.
C. $x_1 = 3; x_2 = -4$. D. $x_1 = -3; x_2 = 4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Delta = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 1 > 0$ và $\sqrt{\Delta} = 1$.

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-7+1}{2 \cdot 1} = -3; x_2 = \frac{-7-1}{2 \cdot 1} = -4$.

6.42. Phương trình bậc hai có hai nghiệm $x_1 = 13$ và $x_2 = 25$ là

A. $x^2 - 13x + 25 = 0$.

B. $x^2 - 25x + 13 = 0$.

C. $x^2 - 38x + 325 = 0$.

D. $x^2 + 38x + 325 = 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $x_1 + x_2 = 13 + 25 = 38; x_1 x_2 = 13 \cdot 25 = 325$.

Vậy x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 38x + 325 = 0$.

6.43. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$ là

A. 13.

B. 19.

C. 25.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Do x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$ nên theo định lý Viète, ta có: $x_1 + x_2 = 5$ và $x_1 x_2 = 6$.

Ta có $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2$

Suy ra $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 5^2 - 2 \cdot 6 = 13$.

6.44. Chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật có chu vi 20 cm và diện tích 24 cm^2 là

A. 5 cm và 4 cm.

B. 6 cm và 4 cm.

C. 8 cm và 3 cm.

D. 10 cm và 2 cm.

Lời giải

Chọn B

Gọi hai kích thước của hình chữ nhật là $x_1; x_2$ (cm).

Ta có nửa chu vi và diện tích hình chữ nhật lần lượt là $x_1 + x_2$ (cm) và $x_1 x_2$ (cm^2).

Theo bài, hình chữ nhật có chu vi 20 cm nên nửa chu vi hình chữ nhật là $20 : 2 = 10$ (cm), do đó $x_1 + x_2 = 10$.

Diện tích hình chữ nhật là 24 cm^2 , do đó $x_1 x_2 = 24$.

Khi đó, x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 10x + 24 = 0$.

Ta có $\Delta' = (-5)^2 - 1.24 = 1 > 0$ và $\sqrt{\Delta'} = \sqrt{1} = 1$.

Suy ra, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{5+1}{1} = 6; x_2 = \frac{5-1}{1} = 4$

Vậy chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là 6 cm và 4 cm (do chiều dài luôn lớn hơn chiều rộng).

B. TỰ LUẬN

6.45. Vẽ đồ thị của các hàm số $y = \frac{5}{2}x^2$ và $y = -\frac{5}{2}x^2$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

Lời giải

Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{5}{2}x^2$:

Lập bảng một số cặp giá trị tương ứng của x và y :

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	1	$\frac{3}{2}$	2
y	10	$\frac{45}{8}$	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{45}{8}$	10

Biểu diễn các điểm $(-2;10); (\frac{-3}{2}; \frac{45}{8}); (-1; \frac{5}{2}); (0;0); (1; \frac{5}{2}); (\frac{3}{2}; \frac{45}{8}); (2;10)$ trên mặt phẳng tọa độ

Oxy và nối chúng lại ta được đồ thị hàm số $y = \frac{5}{2}x^2$ như hình vẽ (đường màu xanh).

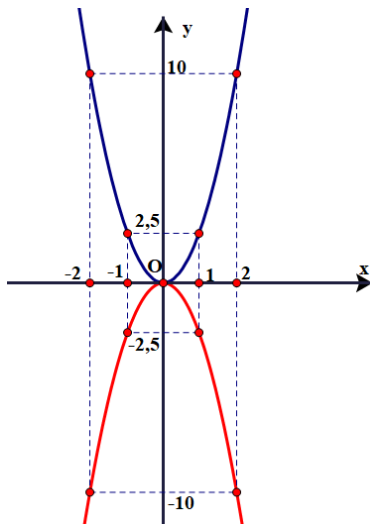
Vẽ đồ thị hàm số $y = -\frac{5}{2}x^2$:

Lập bảng một số cặp giá trị tương ứng của x và y :

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	1	$\frac{3}{2}$	2
y	-10	$-\frac{45}{8}$	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{45}{8}$	-10

Biểu diễn các điểm $(-2;-10); (\frac{-3}{2}; -\frac{45}{8}); (-1; -\frac{5}{2}); (0;0); (1; -\frac{5}{2}); (\frac{3}{2}; -\frac{45}{8}); (2;-10)$ trên mặt phẳng

tọa độ Oxy và nối chúng lại ta được đồ thị hàm số $y = -\frac{5}{2}x^2$ như hình vẽ (đường màu đỏ).



6.46. Cho hàm số $y = ax^2$. Xác định hệ số a , biết đồ thị hàm số đi qua điểm $A(3;3)$. Vẽ đồ thị của hàm số trong trường hợp đó.

Lời giải

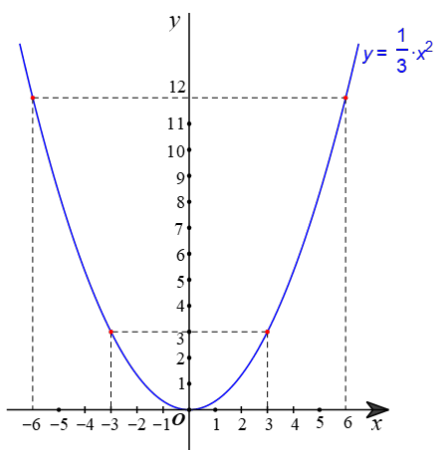
Vì đồ thị hàm số đi qua điểm $A(3;3)$ nên thay $x = 3, y = 3$ vào hàm số ta được: $3 = a \cdot 3^2$, hay $9a = 3$, suy ra $a = \frac{1}{3}$.

Vậy $a = \frac{1}{3}$. Khi đó ta có hàm số $y = \frac{1}{3}x^2$.

Lập bảng một số giá trị tương ứng giữa x và y của hàm số $y = \frac{1}{3}x^2$:

x	-6	-3	0	3	6
$y = \frac{1}{3}x^2$	12	3	0	3	12

Từ đó vẽ được đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^2$ như sau:



6.47. Giải các phương trình sau:

$$a) 5x^2 - 6\sqrt{5}x + 2 = 0$$

$$b) 2x^2 + 2\sqrt{6}x + 3 = 0.$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } \Delta' = (-3\sqrt{5})^2 - 5 \cdot 2 = 35 > 0.$$

$$\text{Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là: } x_1 = \frac{3\sqrt{5} + \sqrt{35}}{5}; x_2 = \frac{3\sqrt{5} - \sqrt{35}}{5}.$$

$$b) \text{ Ta có } \Delta' = (\sqrt{6})^2 - 2 \cdot 3 = 0.$$

$$\text{Do đó phương trình đã cho có nghiệm kép là: } x_1 = x_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

6.48. Cho phương trình $x^2 - 11x + 30 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Không giải phương trình, hãy tính:

$$a) x_1^2 + x_2^2;$$

$$b) x_1^3 + x_2^3.$$

Lời giải

Xét phương trình $x^2 - 11x + 30 = 0$ có $\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 30 = 1 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Theo định lý Viète, ta có: $x_1 + x_2 = 11$ và $x_1 x_2 = 30$. Khi đó, ta có:

$$a) x_1^2 + x_2^2 = (x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2) - 2x_1 x_2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 11^2 - 2 \cdot 30 = 61$$

$$b) x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2)$$

$$= (x_1 + x_2)[(x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2) - 3x_1 x_2]$$

$$= (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2] = 11 \cdot [11^2 - 3 \cdot 30] = 341$$

6.49. Tìm hai số u và v , biết:

$$a) u + v = 13 \text{ và } uv = 40;$$

$$b) u - v = 4 \text{ và } uv = 77.$$

Lời giải

a) Hai số u và v có tổng bằng 12 và tích bằng 40 nên là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 13x + 40 = 0$

$$\text{Ta có } \Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 40 = 9 > 0 \text{ và } \sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3.$$

$$\text{Do đó, phương trình có hai nghiệm } x_1 = \frac{13+3}{2 \cdot 1} = 8; x_2 = \frac{13-3}{2 \cdot 1} = 5.$$

Vậy $u = 8; v = 5$ hoặc $u = 5; v = 8$.

b) Đặt $t = -v$, khi đó ta có $u + t = 4$ và $ut = -77$.

Hai số u và t có tổng bằng 4 và tích bằng -77 nên là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 4x - 77 = 0$.

Ta có $\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-77) = 324 > 0$ và $\sqrt{\Delta} = \sqrt{324} = 18$.

Do đó, phương trình có hai nghiệm $x_1 = \frac{-4+18}{2 \cdot 1} = 7; x_2 = \frac{-4-18}{2 \cdot 1} = -11$.

Suy ra $u = 7; t = -11$ hoặc $u = -11; t = 7$.

Vậy $u = 7; v = 11$ hoặc $u = -11; v = -7$.

6.50. Các kỹ sư đảm bảo an toàn của đường cao tốc thường sử dụng công thức $d = 0,05v^2 + 1,1v$, để ước tính khoảng cách an toàn tối thiểu d (feet) (tức là độ dài quãng đường mà xe đi được kể từ khi đạp phanh đến khi xe dừng lại) đối với một phương tiện di chuyển với tốc độ v (dặm/giờ) (theo Algebra 2, NXB MacGraw-Hill, 2008). Giả sử giới hạn tốc độ trên một đường cao tốc nào đó là 70 dặm/giờ. Nếu một ô tô có thể dừng lại sau 300 feet kể từ khi đạp phanh thì ô tô đó có chạy nhanh hơn giới hạn tốc độ của đường cao tốc này không?

Lời giải

Ô tô có thể dừng lại sau 300 feet kể từ khi đạp phanh nên $d = 300$ (feet).

Thay $d = 300$ vào công thức $d = 0,05v^2 + 1,1v$, ta được:

$$300 = 0,05v^2 + 1,1v$$

$$0,05v^2 + 1,1v - 300 = 0$$

Ta có $\Delta = 1,1^2 - 4 \cdot 0,05 \cdot (-300) = 61,21 > 0$.

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$v_1 = \frac{-1,1 + \sqrt{61,21}}{2 \cdot 0,05} \approx 67,24 \text{ (dặm/giờ)} \} < 70 \text{ (dặm/giờ) (thỏa mãn);}$$

$$v_2 = \frac{-1,1 - \sqrt{61,21}}{2 \cdot 0,05} \approx -89,24 \text{ (không thỏa mãn).}$$

Vậy nếu ô tô có thể dừng lại sau 300 feet kể từ khi đạp phanh thì ô tô đó không chạy nhanh hơn giới hạn tốc độ của đường cao tốc này.

6.51. Bác Hương gửi tiết kiệm ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 12 tháng. Sau một năm, do chưa có nhu cầu sử dụng nên bác chưa rút sổ tiết kiệm này ra mà gửi tiếp và gửi thêm một sổ tiết kiệm mới với số tiền 50 triệu đồng, cũng với kì hạn 12 tháng. Sau hai năm (kể từ khi gửi lần đầu), bác Hương nhận được số tiền cả vốn lẫn lãi là 176 triệu đồng. Tính lãi suất năm của hình thức gửi tiết kiệm này (giả sử lãi suất không đổi trong suốt quá trình gửi).

Lời giải

Gọi x là lãi suất năm của hình thức gửi tiết kiệm này (x viết dưới dạng số thập phân, $x > 0$).

Sau một năm, bác Hương nhận được số tiền cả vốn lẫn lãi là:

$$100 + 100x \text{ (triệu đồng)}.$$

Bác Hương gửi thêm 50 triệu đồng nên năm thứ hai bác gửi số tiền là:

$$100 + 100x + 50 = 150 + 100x \text{ (triệu đồng)}.$$

Đến cuối năm thứ hai bác Hương nhận được số tiền lãi là:

$$(150 + 100x) \cdot x \text{ (triệu đồng)}.$$

Sau hai năm (kể từ khi gửi lần đầu), số tiền bác Hương nhận được cả vốn lẫn lãi là:

$$150 + 100x + (150 + 100x) \cdot x = 150 + 250x + 100x^2 \text{ (triệu đồng)}.$$

Theo bài, sau hai năm bác Hương nhận được số tiền cả vốn lẫn lãi là 176 triệu đồng nên ta có phương trình:

$$150 + 250x + 100x^2 = 176$$

$$100x^2 + 250x - 26 = 0$$

$$50x^2 + 125x - 13 = 0$$

Ta có $\Delta = 125^2 - 4 \cdot 50 \cdot (-13) = 18225 > 0$ và $\sqrt{\Delta} = \sqrt{18225} = 135$.

Suy ra, phương trình trên có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-125 + 135}{2 \cdot 50} = 0,1 \text{ (thỏa mãn); } x_2 = \frac{-125 - 135}{2 \cdot 50} = -2,6\% \text{ (loại)}.$$

Vậy lãi suất năm của hình thức gửi tiết kiệm này là $0,1 = 10\%$.

6.52. Hai khối học sinh lớp 8 và lớp 9 của một trường trung học cơ sở tham gia lao động. Nếu làm chung thì sẽ hoàn thành công việc sau 1 giờ 12 phút. Nếu mỗi khối lớp làm riêng thì khối lớp 9 làm xong nhanh hơn khối lớp 8 là 1 giờ. Hỏi nếu mỗi khối lớp làm riêng thì sau bao lâu sẽ hoàn thành công việc?

Lời giải

Đổi 1 giờ 12 phút = 1,2 giờ.

Gọi thời gian học sinh khối lớp 9 làm riêng xong công việc là x (giờ) ($x > 0$).

Thời gian học sinh khối lớp 8 làm riêng xong công việc là $x + 1$ (giờ).

Một giờ khối lớp 9 làm được $\frac{1}{x}$ (công việc).

Một giờ khối lớp 8 làm được $\frac{1}{x+1}$ (công việc).

Một giờ cả hai khối làm được $\frac{1}{1,2} = \frac{5}{6}$ (công việc).

Khi đó, ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{5}{6}$

Quy đồng mẫu hai vế của phương trình, ta được: $\frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{x}{x(x+1)} = \frac{5x(x+1)}{6x(x+1)}$

Nhân cả hai vế của phương trình với $6x(x+1)$ để khử mẫu, ta được phương trình:

$$6(x+1) + 6x = 5x(x+1)$$

$$6x + 6 + 6x = 5x^2 + 5x$$

$$5x^2 - 7x - 6 = 0$$

Ta có $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-6) = 169$ và $\sqrt{\Delta} = \sqrt{169} = 13$.

Suy ra, phương trình trên có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{7+13}{2 \cdot 5} = 2$ (thỏa mãn); $x_2 = \frac{7-13}{2 \cdot 5} = -\frac{3}{5}$ (loại).

Vậy thời gian học sinh khối lớp 9 làm riêng xong công việc là 2 giờ, thời gian học sinh khối lớp 8 làm riêng xong công việc là $2+1=3$ giờ.

C. BÀI TẬP THÊM

TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-7)x - m$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số của m để (P) và (d) có hai điểm chung phân biệt.

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2(m-7)x + m = 0$. Ta có

$$\Delta' = -14m + 49 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{7}{2}.$$

Vậy có 3 số nguyên dương thỏa mãn.

Câu 2: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-6)x + m$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số của m nhỏ hơn 10 để (P) và (d) không có điểm chung phân biệt.

A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2(m-6)x + m = 0$. Ta có

$$\Delta' = -12m + 36 < 0 \Leftrightarrow m > 3.$$

Mà $m < 10$. Vậy có 6 số nguyên dương thỏa mãn.

Câu 3: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-9)x + m$ với m là tham số. Biết rằng (P) và (d) có đúng một điểm chung. Hỏi m có tính chất nào sau đây?

A. $4 < m < 5$.

B. $m > 5$.

C. $3 < m < 4$.

D. $m < 3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2(m-9)x + m = 0$. Ta có

$$\Delta' = -18m + 81 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{9}{2}.$$

Vậy $4 < m < 5$

Câu 4: Cho parabol $(P): y = (m^2 + 1)x^2$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị của m để (P) đi qua điểm $A(2;8)$?

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Vì (P) đi qua A nên $8 = 4(m^2 + 1) \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Câu 5: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m^2 - 4)x - m^2$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để (P) và (d) có một điểm chung.

- A.** 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1

Lời giải

Chọn C

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2(m^2 - 4)x + m^2 = 0$. Ta có

$$\Delta' = -8m^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}. \text{ Vậy có 2 số nguyên dương thỏa mãn.}$$

Câu 6: Cho parabol $(P): y = x^2$ và một số dương a cố định, có bao nhiêu điểm trên (P) có tung độ bằng a ?

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$.

Câu 7: Cho parabol $(P): y = x^2$, biết rằng không có điểm trên (P) có tung độ bằng a . Hỏi a có tính chất nào sau đây

- A.** $\sqrt{a^2} = a$. **B.** $\sqrt{a^2} = -a$. **C.** $|a| = a$. **D.** $a = 0$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $x^2 = a$ vô nghiệm nên $a < 0$.

Câu 8: Cho parabol $(P): y = x^2$ và số a có tính chất trên (P) đúng 1 điểm có tung độ bằng a . Có bao nhiêu số a như vậy?

- A.** 0. **B.** 1 **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $x^2 = a$ có nghiệm duy nhất nên $a=0$.

Câu 9: Tập nghiệm của phương trình $x^2 + x - 2 = 0$ là

- A.** $S = \{1; 2\}$. **B.** $S = \{-2; 1\}$. **C.** $S = \{-2; -1\}$. **D.** $S = \{-1; 2\}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Delta = 9 > 0$. Do đó phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1, x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-2; 1\}$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$ vô nghiệm.

- A.** $m < -2$. **B.** $m \geq -2$. **C.** $m > -2$. **D.** $m \leq -2$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - (m^2 - 3) < 0 \Leftrightarrow 2m + 4 < 0 \Leftrightarrow m < -2$$

Câu 11: Biết phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có một nghiệm $x = 2$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.** $a + b + c = 0$. **B.** $a + b + c = 2$.
C. $4a + 2b + c = 0$. **D.** $c = 2$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình có một nghiệm $x = 2$ nên $a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 0$ hay $4a + 2b + c = 0$.

Câu 12: Cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị là parabol (P) và hàm số $y = -bx + c$ có đồ thị là đường thẳng d , với a, b là các số thực khác 0. Giả sử đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt. Chọn khẳng định đúng.

- A.** $b^2 - 4ac < 0$. **B.** $b^2 - 4ac > 0$
C. $b^2 + 4ac < 0$. **D.** $b^2 + 4ac > 0$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $ax^2 + bx - c = 0$ có hai nghiệm phân biệt, hay $\Delta = b^2 + 4ac > 0$.

Câu 13: Biết phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có hai nghiệm phân biệt. Kết luận nào sau đây là đúng?

- A.** Phương trình $ax^2 - 2bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt.
B. Phương trình $ax^2 - 2bx + c = 0$ có nghiệm kép.
C. Phương trình $ax^2 - 2bx + c = 0$ vô nghiệm.
D. Phương trình $ax^2 - 2bx + c = 0$ có nhiều nhất một nghiệm.

Lời giải

Chọn A

Vì phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có hai nghiệm phân biệt nên $\Delta_1 = b^2 - 4ac > 0$. Khi đó $\Delta_2 = 4b^2 - 4ac = 3b^2 + \Delta_1 > 0$ nên phương trình $ax^2 - 2bx + c = 0$ cũng có hai nghiệm phân biệt.

Câu 14: Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $x^2 - 2\sqrt{3}x + m - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

- A.** Vô số. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 3 - (m - 4) > 0 \Leftrightarrow m < 7$$

Mà $m \in \mathbb{Z}^+$ suy ra $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Câu 15: Biết phương trình $3x^2 - 4x - 15 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$. Giả sử $x_1 > x_2$ khi đó biểu thức $\frac{x_1}{x_2}$ có giá trị.

- A.** $\frac{5}{9}$ **B.** $-\frac{5}{9}$ **C.** -5 **D.** 5 .

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Delta' = (-2)^2 - 3 \cdot (-15) = 49 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 7$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} x_1 = \frac{2+7}{3} = 3 \\ x_2 = \frac{2-7}{3} = -\frac{5}{3} \end{cases}$. Khi đó $\frac{x_2}{x_1} = -\frac{5}{9}$.

Câu 16: Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2x^2 + 3x - 10 = 0$. Khi đó tích $x_1 x_2$ bằng

- A.** $\frac{3}{2}$ **B.** $-\frac{3}{2}$ **C.** -5 **D.** 5 .

Lời giải

Chọn C

Theo định lý Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{10}{2} = -5. \end{cases}$$

Vậy $x_1 x_2 = -5$.

Câu 17: Phương trình nào sau đây có nghiệm là $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ và $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

- A.** $x^2 + 2\sqrt{3}x + 1 = 0$. **B.** $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$.
C. $x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0$. **D.** $x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0$.

Lời giải

Chọn B

Tổng hai số $S = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$ và tích hai số $P = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 1$.

Theo định lý đảo của định lý Vi-ét, hai số đã cho là nghiệm của phương trình

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$$

Câu 18: Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2x^2 + 3x - 5 = 0$. Biểu thức $x_1^2 + x_2^2$ có giá trị là

- A.** $\frac{29}{2}$. **B.** 29. **C.** $\frac{29}{4}$. **D.** $\frac{25}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Theo định lý Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Suy ra

$$x_1^2 + x_2^2 - S^2 - 2P - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) - \frac{29}{4}.$$

Câu 19: Cho phương trình $x^2 - 4x + 1 - m = 0$, với giá trị nào của m thì phương trình có 2 nghiệm thỏa mãn $5(x_1 + x_2) - 4x_1 x_2 = 0$.

- A.** $m = 4$. **B.** $m = -5$.
C. $m = -4$. **D.** Không có giá trị nào.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m + 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -3$. Theo định lý Vi-ét

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 4 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 1 - m \end{cases}. \text{ Từ đó ta có}$$

$$5(x_1 + x_2) - 4x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow 5 \cdot 4 - 4(1 - m) = 0 \Leftrightarrow m = -4$$

Câu 20: Năm nay tuổi mẹ gấp 3 lần tuổi Phương. Phương tính rằng 13 năm nữa thì tuổi mẹ gấp 2 lần tuổi Phương. Hỏi năm nay Phương bao nhiêu tuổi?

- A.** 13 tuổi. **B.** 14 tuổi. **C.** 15 tuổi. **D.** 16 tuổi.

Lời giải

Chọn A

Giả sử năm nay Phương x tuổi ($x > 0$), mẹ Phương $3x$ tuổi. Theo Câu 13 năm nữa tuổi mẹ Phương gấp 2 lần tuổi Phương nên ta có phương trình

$$3x + 13 = (x + 13) \cdot 2 \Leftrightarrow x = 13.$$

Vậy năm nay Phương 13 tuổi.

Câu 21: Chu vi một mảnh vườn hình chữ nhật là 30m. Biết chiều dài hơn chiều rộng 5 m. Tính diện tích hình chữ nhật.

- A.** 100 m². **B.** 70 m². **C.** 50 m². **D.** 55 m².

Lời giải

Chọn B

Gọi chiều rộng của mảnh vườn là x (m, $x > 0$), chiều dài của mảnh vườn là $x + 5$ (m). Theo Câu chu vi mảnh vườn là 30 m nên

$$[x + (x + 5)] \cdot 2 = 30 \Leftrightarrow x = 5.$$

Vậy chiều rộng của mảnh vườn là 5 m, chiều dài mảnh vườn là 10 m. Do đó diện tích mảnh vườn là 50 m².

Câu 22: Một người đi xe máy từ A đến B với vận tốc 25 km/h. Lúc về, người đó đi với vận tốc 30 km/h nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 20 phút. Tính quãng đường AB .

- A.** 40 km. **B.** 70 km. **C.** 50 km. **D.** 60 km.

Lời giải

Chọn B

Gọi thời gian đi từ A đến B là x (giờ, $x > 0$), thời gian về là $x - \frac{1}{3}$. Theo Câu ta có phương

$$\text{trình: } 25x = 30\left(x - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy thời gian đi từ A đến B là 2 giờ. Khi đó quãng đường AB dài $25 \cdot 2 = 50$ km.

Câu 23: Một ca nô xuôi dòng từ A đến B hết 80 phút và ngược dòng hết 2 giờ. Biết vận tốc dòng nước là 3 km/h. Tính vận tốc riêng của ca nô.

- A. 16 km/h. B. 18 km/h. C. 20 km/h. D. 15 km/h.

Lời giải

Chọn D

Đổi 80 phút $= \frac{4}{3}$ giờ. Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h, $x > 0$). Vận tốc ca nô xuôi dòng là $x + 3$ (km/h).

Vận tốc ca nô ngược dòng là $x - 3$ (km/h). Theo Câu ta có phương trình

$$\frac{4}{3}(x+3) = 2(x-3) \Leftrightarrow x = 15$$

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 15 km/h.

Câu 24: Một hình chữ nhật có chu vi 278 m, nếu giảm chiều dài 21 m và tăng chiều rộng 10 m thì diện tích tăng 715 m^2 . Chiều dài hình chữ nhật là

- A. 132 m. B. 124 m. C. 228 m. D. 114 m.

Lời giải

Chọn B

Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (m, $x > 0$), chiều rộng hình chữ nhật là $139 - x$ (m). Theo Câu ta có phương trình

$$(x-21)(139-x+10) = x(139-x) + 715 \\ \Leftrightarrow x = 124.$$

Vậy chiều dài hình chữ nhật là 124 m.

Câu 25: Một hình chữ nhật có chiều rộng bằng $\frac{2}{3}$ chiều dài, diện tích hình chữ nhật đó là 5400 cm^2 , diện tích hình chữ nhật là 5400 cm^2 . Chu vi hình chữ nhật là

- A. 300 cm. B. 250 cm. C. 350 cm. D. 400 cm.

Lời giải

Chọn A

Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (cm, $x > 0$). Khi đó, chiều rộng hình chữ nhật là $\frac{2}{3}x$ (cm).

Theo đầu Câu ta có phương trình

$$x \cdot \frac{2}{3}x = 5400 \Leftrightarrow x^2 = 8100$$

Giải ra ta được $x = 90$ (vì $x > 0$). Vậy chiều dài hình chữ nhật là 90 cm , chiều rộng hình chữ nhật là 60 cm . Do đó chu vi hình chữ nhật là 300 cm .

Câu 26: Một thửa ruộng hình chữ nhật có diện tích là 100 m^2 . Tính độ dài chiều dài của thửa ruộng. Biết rằng nếu tăng chiều rộng của thửa ruộng lên 2 m và giảm chiều dài 5 m thì diện tích của thửa ruộng tăng thêm 5 m^2 .

- A. 25 m. B. 15 m. C. 5 m. D. 20 m.

Lời giải

Chọn D

Gọi chiều dài là x (m, $x > 0$), chiều rộng là $\frac{100}{x}$ (m). Theo Câu ta có phương trình

$$(x-5)\left(\frac{100}{x}+2\right)=100+5 \Leftrightarrow 2x^2-15x-500=0$$

Giải phương trình ta được $x = 20$ (thỏa mãn) hoặc $x = -12,5$ (loại). Vậy chiều dài của mảnh đất hình chữ nhật là 20 m .

Câu 27: Một công nhân dự định làm 36 sản phẩm trong thời gian đã định. Sau khi làm được nửa số lượng được giao, người đó dừng lại nghỉ 30 phút. Vì vậy, mặc dù làm thêm 2 sản phẩm mỗi giờ với nửa số sản phẩm còn lại nhưng vẫn hoàn thành công việc chậm hơn dự kiến 12 phút. Tính năng suất dự kiến.

- A. 13 sản phẩm/giờ. B. 12 sản phẩm/giờ. C. 10 sản phẩm/giờ. D. 11 sản phẩm/giờ

Lời giải

Chọn C

Gọi năng suất dự kiến là x (sản phẩm/giờ, $x \in \mathbb{N}$). Theo Câu ta có phương trình

$$\frac{18}{x} + \frac{1}{2} + \frac{18}{x+2} = \frac{36}{x} + \frac{1}{5}$$

Giải phương trình ta được $x_1 = -12$ (loại); $x_2 = 10$ (thỏa mãn). Vậy năng suất dự kiến là 10 sản phẩm/giờ.

TỰ LUẬN

Câu 1: Hàm số nào sau đây có dạng ax^2 ($a \neq 0$) ? Đối với những hàm số đó, xác định hệ số a của ax^2 .

a) $y = x^2$. b) $y = -3x^2$. c) $y = \frac{4x^2}{9}$. d) $y = \frac{2}{x^2}$.

Lời giải

Các hàm số có dạng ax^2 ($a \neq 0$) là:

a) $y = x^2$, có $a = 1$; b) $y = -3x^2$, có $a = -3$ c) $y = \frac{4x^2}{9}$, có $a = \frac{4}{9}$.

Câu 2: Cho hàm số $y = 4x^2$ ($a \neq 0$). Tính giá trị của y khi:

a) $x = 0$; b) $x = 2$; c) $x = -2$.

Lời giải

a) Với $x = 0$ thì $y = 4 \cdot 0^2 = 0$.

b) Với $x = 2$ thì $y = 4 \cdot 2^2 = 16$.

c) Với $x = -2$ thì $y = 4 \cdot (-2)^2 = 16$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = ax^2$ ($a \neq 0$). Xác định a biết rằng $f(-2) = 4$.

Lời giải

Thay $x = -2$ và $y = 4$ vào phương trình $y = ax^2$, ta được: $4 = a \cdot (-2)^2 \Leftrightarrow 4a = 4 \Leftrightarrow a = 1$.

Hàm số có dạng $y = x^2$.

Câu 4: Lập bảng giá trị của hàm số $y = x^2$ và $y = -x^2$ với các giá trị x lần lượt bằng: $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$.

Lời giải

Bảng giá trị của hàm số $y = x^2$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

Bảng giá trị của hàm số $y = -x^2$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = -x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

Câu 5: Vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$.

Lời giải

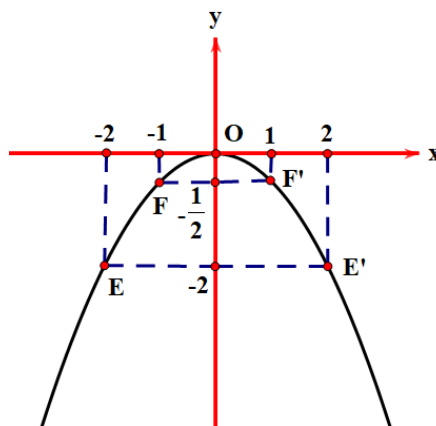
Bảng giá trị của hàm số:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -\frac{1}{2}x^2$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , lấy các điểm

$$E(-2;-2); F\left(-1;-\frac{1}{2}\right); O(0;0); F'\left(1;-\frac{1}{2}\right); E'(2;-2).$$

Đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ là một đường parabol đỉnh O , đi qua các điểm trên và có dạng như hình dưới đây.



Câu 6: Cho hàm số $y = (m+1)x^2$ và $y = 2x - 1$.

a) Tìm m để đồ thị hai hàm số cắt nhau tại điểm A có hoành độ bằng 2.

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = (m+1)x^2$ với m vừa tìm được ở câu a).

Hướng dẫn:

a) Thế $x = 2$ (hoành độ của điểm A) vào phương trình $y = 2x - 1$. Từ đó tìm được m nhờ phương trình $y = (m+1)x^2$.

b) Lập bảng giá trị.

Lời giải

a) A thuộc đường thẳng $y = 2x - 1$ và hoành độ bằng 2 nên tung độ của A : $y = 2 \cdot 2 - 1 \Rightarrow y = 3$.
Vậy $A(2;3)$.

Lại có A là giao điểm của parabol $y = (m+1)x^2$ và $y = 2x - 1$ nên ta có $3 = (m+1) \cdot (2)^2$

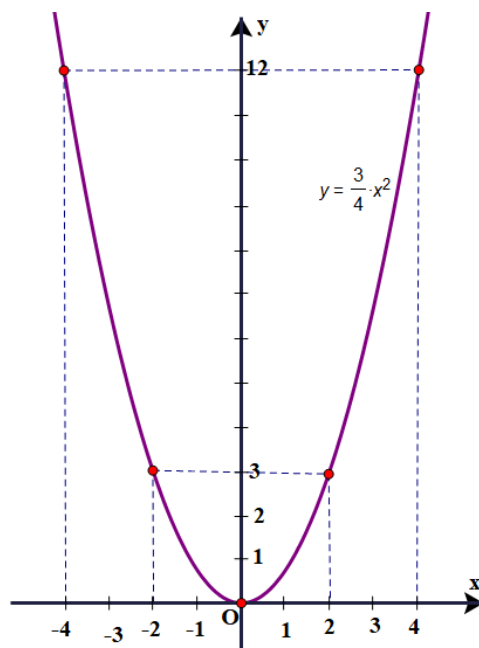
$$\Rightarrow 4m + 4 = 3 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}. \text{ Vậy } y = \frac{3}{4}x^2.$$

b) Vẽ parabol (P): $y = \frac{3}{4}x^2$.

Bảng giá trị:

x	-4	-2	0	2	4
$y = \frac{3}{4}x^2$	12	3	0	3	12

Parabol (P) có đỉnh O và nhận trục tung làm trục đối xứng.



Câu 7: Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$.

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số đã cho.

b) Trên (P) lấy hai điểm A, B có hoành độ lần lượt -2 và 1. Viết phương trình đường thẳng AB.

Hướng dẫn: b) $A(-2; y_0); A \in (P) \Rightarrow y_0 = -\frac{1}{2}(-2)^2 \Rightarrow y_0 = -2$.

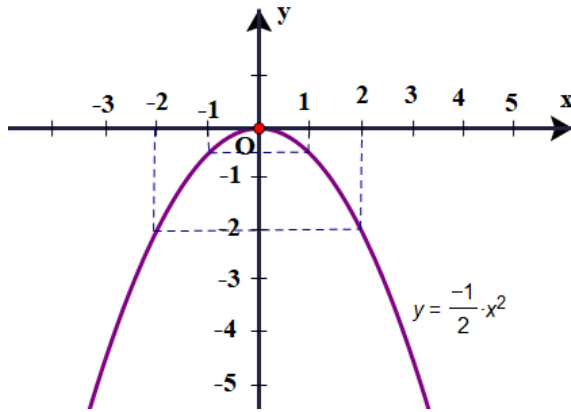
Tương tự tính B. Từ đó viết phương trình đường thẳng AB (có dạng: $y = ax + b$).

Lời giải

a) Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -\frac{1}{2}x^2$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2

Đồ thị (P) là một parabol có đỉnh O và nhận trục tung làm trục đối xứng.



b) Đặt $A(-2; y_0) \in (P) \Rightarrow y_0 = \left(-\frac{1}{2}\right)(-2)^2 \Rightarrow y_0 = -2$

Vậy $A(-2; -2)$.

Đặt $B(1; y_1) \in (P) \Rightarrow y_1 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1)^2 \Rightarrow y_1 = -\frac{1}{2}$. Vậy $B\left(1; -\frac{1}{2}\right)$

Đường thẳng AB có phương trình $y = ax + b$ (d).

$$A \in (d) \Rightarrow -2 = -2a + b; B \in (d) \Rightarrow -\frac{1}{2} = a + b$$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -2a + b = -2 \\ a + b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = 2 \\ a + b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ a + b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng AB có dạng: $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Câu 8: Cho phương trình $x^2 - x - 10 = 0$. Chứng tỏ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ và tính $x_1^2 + x_2^2$.

Hướng dẫn: $a = 1; c = -10 \Rightarrow ac < 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

Lời giải

Ta có: $a = 1; c = -10 \Rightarrow ac < 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Theo định lí

Viète, ta có: $x_1 + x_2 = 1; x_1x_2 = -10$. Vậy $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1 - 2 \cdot (-10) = 21$.

Nhận xét: - Ta có $ac < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0$ mà $x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_1 x_2 < 0$. Vậy khi a và c trái dấu thì phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt và trái dấu (chẳng hạn: $x_1 < 0 < x_2$).

- Biểu thức $x_1^2 + x_2^2$ không thay đổi khi ta thay x_1 bởi x_2 và ngược lại, gọi là biểu thức đối xứng của x_1 và x_2 . Bạn cần nhớ một vài công thức sau: $S = x_1 + x_2$, ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = S^2 - 2P \text{ (biểu thị qua tổng và tích các nghiệm)}$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2) \left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 \right] = S(S^2 - 3P) = S^3 - 3SP$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = \left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 \right]^2 - 2x_1^2 x_2^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$$

$$|x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = S^2 - 4P$$

Câu 9: Theo phương trình $3x^2 + 2x - 6 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = (x_1 - x_2)^2$; trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình.

Hướng dẫn: $A = x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$

Lời giải

Ta có $a = 3; b = 2; c = -6 \Rightarrow a.c = -18 < 0 \Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt (khác dấu) x_1, x_2 .

Theo định lý Viète, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{2}{3}; x_1 x_2 = -2$.

Vậy $A = x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot (-2) = \frac{76}{9}$

Nhận xét: Từ kết quả trên, ta có thể tìm được: $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{76}}{3} = \frac{2\sqrt{19}}{3} \Rightarrow x_1 - x_2 = \pm \frac{2\sqrt{19}}{3}$

Câu 10: Cho phương trình $3x^2 - 7x - 4 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình, hãy tính.

a) $A = |x_1 - x_2|$; b) $B = \frac{x_1^1}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$

Hướng dẫn: 1. Chứng tỏ phương trình có nghiệm.

2. Áp dụng định lý Viète, tính: $A^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$, từ đó tính **A**.

Lời giải

Ta có: $a = 3; b = -7; c = -4 \Rightarrow a.c = -12 < 0$. Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$.

Theo định lí Viète, ta có: $x_1 + x_2 = \frac{7}{3}; x_1 x_2 = \frac{-4}{3}$.

a) Ta có:

$$A^2 = |x_1 - x_2|^2 = x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{97}{9} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{97}}{3}$$

$$\text{b) Ta có } B = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = \frac{\left(\frac{7}{3}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{-4}{3}\right) \cdot \frac{7}{3}}{\frac{-4}{3}} = -\frac{595}{36}$$

Câu 11: Cho phương trình $x^2 - 2x + m + 2 = 0$. Tìm m để phương trình có nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

Hướng dẫn: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm, áp dụng hệ thức Viète tính $x_1^2 + x_2^2$ qua $x_1 + x_2$ và $x_1 x_2$

Lời giải

Ta có: $a = 1; b = -2 \Rightarrow b' = -1; c = m + 2$. Phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1; x_2$ khi và chỉ khi

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - (m + 2) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -1$$

Theo hệ thức Viète, ta có: $x_1 + x_2 = 2; x_1 x_2 = m + 2$. Vậy $x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 10$

$$\Leftrightarrow 4 - 2(m + 2) = 10 \Leftrightarrow -2m = 10 \Leftrightarrow m = -5 \text{ (thỏa mãn điều kiện } m \geq -1)$$

Đáp số: $m = -5$.

Cách khác: Giả sử phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1; x_2$. Theo hệ thức Viète, ta có:

$$x_1 + x_2 = 2; x_1 x_2 = m + 2 \text{ (Tương tự cách giải trên):}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow 4 - 2(m + 2) = 10 \Leftrightarrow m = -5$$

Thử lại: Với $m = -5$, ta có phương trình $x^2 - 2x - 3 = 0$. Ta có $a = 1; b = -2; c = -3 \Rightarrow ac = -2 < 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm.

Chú ý: Vì ta giả sử có nghiệm, để tìm được m , sau đó ta phải thử lại. Nếu làm như cách thứ nhất, ta tìm điều kiện cho phương trình có nghiệm thì không cần thử lại.

Câu 12: Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$, trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình.

Hướng dẫn: Trước hết phải tìm điều kiện để phương trình có nghiệm; sau đó áp dụng hệ thức Viète để tính $x_1^2 + x_2^2$ qua các hệ số.

Lời giải

Ta có $a = 1; b = -2m \Rightarrow b' = -m; c = 2m - 3$. Phương trình đã cho có nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ (-m)^2 - (2m - 3) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 3 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 + 2 \geq 0 \text{ (luôn đúng với mọi } m \text{ vì } (m - 1)^2 \geq 0, \forall m) \text{ Vậy}$$

$$\begin{aligned} A &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4m^2 - 2(2m - 3) = 4m^2 - 4m + 6 = (4m^2 - 4m + 1) + 5 \\ &= (2m - 1)^2 + 5 \geq 5; \forall m \left((2m - 1)^2 \geq 0, \forall m \right) \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$

Chú ý: Nếu ta không đặt điều kiện phương trình có nghiệm thì vẫn đúng đáp số, nhưng lời giải như vậy chưa chính xác.

Câu 13: Tìm m để phương trình $x^2 + 2x + m = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $3x_1 + 2x_2 = 1$.

Hướng dẫn: Biểu thức $3x_1 + 2x_2$ gọi là không đối xứng. Áp dụng hệ thức Viète, tính

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ và } x_1x_2 = \frac{c}{a}. \text{ Ta có hệ phương trình, từ đó tìm được } m.$$

Lời giải

Ta có: $a = 1; b = 2 \Rightarrow b' = 1; c = m$. Phương trình có nghiệm $x_1; x_2$ khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$

Theo hệ thức Viète, ta có: $x_1 + x_2 = -2$ và $x_1x_2 = m$. Xét hệ: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -7 \end{cases}$ (hệ hai ẩn bậc nhất đối

với x_1 và x_2). Thế $x_1 = 5$ và $x_2 = -7$ vào phương trình $x_1x_2 = m$, ta có: $m = 5 \cdot (-7) \Leftrightarrow m = -35$ (thỏa mãn điều kiện $m \leq 1$).

Đáp số: $m = -35$.

Câu 14: Tìm m để phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1 - x_2 = 4$.

Lời giải

Ta có: $a = 1; b = -4 \Rightarrow b' = -2; c = m$. Phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 4 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 4$$

Theo hệ thức Viète, ta có: $x_1 + x_2 = 4; x_1 x_2 = m$. Xét hệ: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

Vậy $m = 0$ (thỏa điều kiện $m \leq 4$).

Câu 15: Tìm hai số biết rằng hai lần số thứ nhất hơn ba lần số thứ hai là 9 và hiệu các bình phương của chúng là 119.

Lời giải

Gọi x và y là hai số cần tìm. Theo đề Câu, ta có hệ

$$\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ x^2 - y^2 = 119 \end{cases}$$

Giải ra hai số cần tìm là $(12; 5)$ hoặc $(-19, 2; -15, 8)$.

Câu 16: Một tổ có kế hoạch sản xuất 350 sản phẩm theo năng suất dự định. Nếu năng suất tăng lên 10 sản phẩm thì tổ đó hoàn thành sớm 2 ngày so với giảm năng suất 10 sản phẩm mỗi ngày. Tính năng suất dự kiến.

Lời giải

Gọi năng suất dự kiến là x (sản phẩm/ngày; $x \in \mathbb{N}$).

Nếu tăng năng suất lên 10 sản phẩm thì số ngày hoàn thành 350 sản phẩm là $\frac{350}{x+10}$ (ngày).

Nếu giảm năng suất 10 sản phẩm thì số ngày hoàn thành 350 sản phẩm là $\frac{350}{x-10}$ (ngày).

Theo đề Câu, ta có phương trình

$$\frac{350}{x-10} - \frac{350}{x+10} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 3600 \Leftrightarrow x = \pm 60$$

So với điều kiện, vậy năng suất dự kiến là 60 (sản phẩm/ngày)

Câu 17: Một nhóm thợ phải thực hiện kế hoạch sản xuất 3000 sản phẩm. Trong 8 ngày đầu, họ thực hiện đúng mức đề ra, những ngày còn lại họ đã vượt mức mỗi ngày 10 sản phẩm, nên đã hoàn thành sớm hơn dự định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày cần phải sản xuất bao nhiêu

sản phẩm?

Lời giải

Gọi số sản phẩm theo kế hoạch mỗi ngày cần sản xuất là x (sản phẩm/ngày, $x \in \mathbb{Z}^*$).

Suy ra số sản phẩm làm trong 8 ngày đầu là $8x$ (sản phẩm).

Thời gian làm số sản phẩm còn lại là: $\frac{3000-8x}{x+10}$ (ngày).

Thời gian theo kế hoạch là $\frac{3000}{x}$ (ngày).

Theo đề Câu nhóm thợ đã hoàn thành sớm hơn 2 ngày so với dự định, ta có phương trình:

$$8 + \frac{3000-8x}{x+10} + 2 = \frac{3000}{x} \Leftrightarrow x^2 + 50x - 15000 = 0.$$

Ta có $\Delta = 21^2 - 4 \cdot (-270) = 1521 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = -30$ (loại); $x_2 = 9$ (nhận).

Vậy mỗi ngày nhó thợ cần sản xuất 9 sản phẩm.

Câu 18: Một người đi xe đạp quãng đường từ A đến B dài 30km. Khi từ B về A , người đó chọn con đường khác dài hơn 6km và đi với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 3km/h, nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 20 phút. Tính vận tốc lúc đi.

Lời giải

Ta có 20 phút $= \frac{1}{3}$ giờ. Gọi vận tốc lúc đi là x (km/h, $x > 0$).

Suy ra thời gian đi quãng đường từ A đến B dài 30km hết $\frac{30}{x}$ (h).

Khi về, người đó đi quãng đường dài hơn quãng đường lúc đi 6km và đi với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 3km/h nên thời gian hết là $\frac{36}{x+3}$ (h).

Theo đầu Câu, vì thời gian về ít hơn thời gian đi là $\frac{1}{3}$ giờ nên có phương trình

$$\frac{30}{x} - \frac{36}{x+3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 + 21x - 270 = 0..$$

Ta có $\Delta = 21^2 - 4 \cdot (-270) = 1521 > 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = -30$ (loại); $x_2 = 9$ (nhận).

Vậy vận tốc lúc đi là 9km/h.

Câu 19: Một tàu thủy chạy trên khúc sông dài 120km . Cả đi lẫn về mất 6 giờ 45 phút. Tính vận tốc tàu thủy khi nước yên lặng, biết vận tốc của dòng nước là 4km / h .

Lời giải

Ta có 6 giờ 45 phút = $\frac{27}{4}$ giờ.

Gọi vận tốc của tàu thủy khi nước yên lặng là x (km / h, $x > 4$)

Suy ra vận tốc của tàu thủy khi xuôi dòng là $x + 4$ (km / h) .

Vận tốc của tàu thủy khi ngược dòng là $x - 4$ (km / h) .

Thời gian tàu thủy đi xuôi dòng 120km là $\frac{120}{x+4}$ (giờ).

Thời gian tàu thủy đi ngược dòng 120km là $\frac{120}{x-4}$ (giờ).

Theo đề Câu, thời gian cả đi lẫn về mất $\frac{27}{4}$ giờ. Ta có phương trình

$$\frac{120}{x+4} + \frac{120}{x-4} = \frac{27}{4} \Leftrightarrow 9x^2 - 320x - 144 = 0.$$

Ta có $\Delta = 320^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-144) = 107584 > 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = -\frac{4}{9}$ (loại);

$x_2 = 36$ (nhận).

Vậy vận tốc tàu thủy khi nước yên lặng là 36km / h .

Câu 20: Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi 280m . Người ta làm một lối đi xung quanh vườn thuộc đất của vườn rộng 2m , diện tích đất còn lại để trồng trọt là 4256m² . Tính các kích thước của vườn.

Lời giải

Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (m, $x > 70$), khi đó, chiều rộng của khi vườn hình chữ nhật $280 \div 2 - x = 140 - x$ (m).

Người ta làm một lối đi xung quanh vườn thuộc đất của vườn rộng 2m , thì chiều dài phần đất còn lại để trồng trọt là $x - 4$ (m) , chiều rộng phần đất còn lại để trồng trọt là $140 - x - 4 = 136 - x$ (m).

Theo đầu Câu, diện tích đất trồng còn lại là 4256m² , ta có phương trình

$$(x-4) \cdot (136-x) = 4256 \Leftrightarrow x^2 - 140x + 4800 = 0.$$

Ta có $\Delta = 140^2 - 4 \cdot (4800) = 400 > 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = 60$ (loại); $x_2 = 80$ (nhận).

Vậy chiều dài mảnh đất hình chữ nhật là 80 m, chiều rộng là 60 m.

Câu 21: Cho một số có hai chữ số. Tìm số đó, biết rằng tổng hai chữ số của nó nhỏ hơn số đó 6 lần. Nếu thêm 25 vào tích của hai chữ số đó sẽ được số viết theo thứ tự ngược lại với số đã cho.

Lời giải

Gọi chữ số hàng chục là x , chữ số hàng đơn vị là y ($x, y \in \mathbb{N}, 0 < x \leq 9, 0 \leq y \leq 9$).

Theo đề Câu, tổng hai chữ số của nó nhỏ hơn số đó 6 lần, ta có phương trình

$$6(x + y) = 10x + y. \quad (1)$$

Nếu thêm 25 vào tích của hai chữ số đó sẽ được số viết theo thứ tự ngược lại với số đã cho, ta có phương trình

$$xy + 25 = 10y + x. \quad (2)$$

Từ (1) suy ra $x = \frac{5y}{4}$ thay vào (2) ta có $y^2 - 9y + 20 = 0$.

Giải phương trình này, ta được $y_1 = 5, y_2 = 4$.

Với $y_1 = 5$ thì $x_1 = 6, 25$ (không thỏa mãn).

Với $y_2 = 4$ thì $x_2 = 5$ (thỏa mãn).

Vậy số phải tìm là 54.

Câu 22: Một lâm trường dự định làm 75 ha rừng trong một tuần lễ. Do trồng mỗi tuần vượt mức 5 ha so với kế hoạch nên đã trồng được 80 ha và hoàn thành sớm 1 tuần. Hỏi mỗi tuần dự định trồng bao nhiêu ha rừng?

Lời giải

Gọi số ha dự định trồng mỗi tuần là x (ha, $x > 0$).

Suy ra thực tế mỗi tuần trồng được $x + 5$ (ha).

Thời gian dự định trồng 75 ha rừng là $\frac{75}{x}$ (tuần).

Thời gian thực tế trồng 80 ha rừng là $\frac{80}{x+5}$ (tuần).

Theo đề bài, thực tế hoàn thành sớm 1 tuần ta có phương trình

$$\frac{75}{x} - \frac{80}{x+5} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 10x - 375 = 0.$$

$\Delta = 10^2 - 4 \cdot (-375) = 1600 > 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = -25$ (loại); $x_2 = 15$ (nhận).

Vậy mỗi tuần lâm trường dự định trồng 15 ha.