

Câu 1. (5.0 điểm)

a) Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt{21+12\sqrt{3}} + \sqrt{28-10\sqrt{3}} - \sqrt{3}$.

b) Cho biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+7}{x-4\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$.

Rút gọn biểu thức B và tìm các giá trị nguyên của x để B nhận giá trị nguyên.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = 5x^2 - 5x + 20$.

Câu 2. (7.0 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 - 7x + 30 = 6\sqrt{x+5}$.

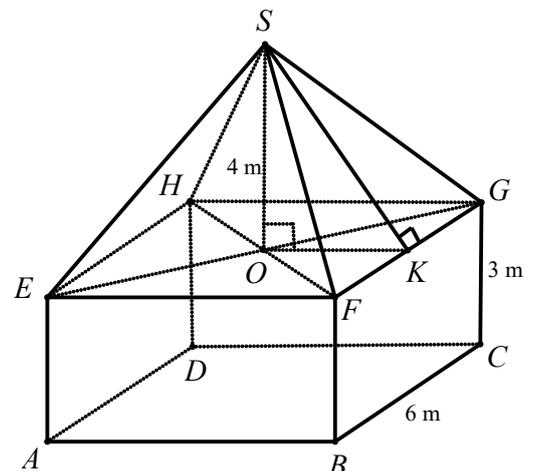
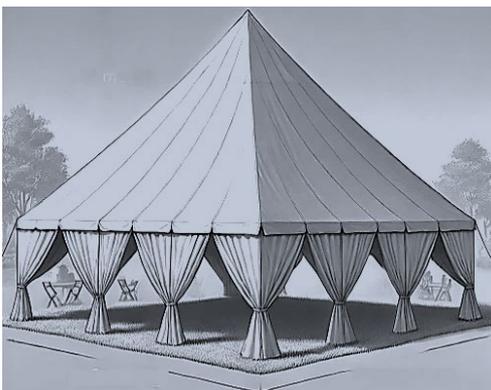
b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2y + 3 = y^2 + 4x \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$.

c) Cho phương trình $x^2 + 2x - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $M = \left(\frac{x_1^3}{x_2^4} + \frac{x_2^3}{x_1^4} \right)^2$.

d) Đến kỷ niệm ngày Quốc tế Phụ nữ 8-3, một cửa hàng hoa ở Vĩnh Long đã nhập 500 giỏ hoa hồng từ Đà Lạt về để bán. Các giỏ hoa hồng được chuyển về đến cửa hàng vào sáng ngày 07/3/2025. Cửa hàng treo giá niêm yết bán một giỏ hoa hồng tăng 25% so với giá lúc nhập về. Đến hết ngày 08/3/2025, cửa hàng bán được 400 giỏ hoa hồng. Đến ngày 09/3/2025, cửa hàng treo bảng giá mới (giảm 50% so với giá lúc nhập về) và đã bán hết số giỏ hoa hồng còn lại. Hỏi giá một giỏ hoa hồng lúc cửa hàng nhập về là bao nhiêu? Biết cửa hàng khi bán hết 500 giỏ hoa hồng thì lãi được 10000000 đồng.

Câu 3. (1.0 điểm)

Một chiếc lều có dạng như hình vẽ bên dưới.



Biết phần thân lều dạng hình hộp chữ nhật ABCD.EFGH, mặt đáy là hình vuông cạnh 6m, chiều cao 3m. Phần nóc lều dạng hình chóp tứ giác đều S.EFGH có chiều cao 4m.

a) Tính thể tích không khí bên trong chiếc lều.

b) Tính chi phí để mua vải bạt phủ nóc lều (không tính các mép dán), biết mỗi mét vuông vải bạt có giá 20000 đồng và $SO \perp OK$.

Câu 4. (4.0 điểm)

Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Lấy điểm E thuộc cung nhỏ CB (E khác C và B). Gọi F là giao điểm của hai đường thẳng AC và BE. Kẻ CH vuông góc với BF ($H \in BF$), BC cắt OH tại I. Chứng minh rằng:

a) Bốn điểm C, H, B, O cùng nằm trên một đường tròn và HO là tia phân giác của \widehat{CHB} .

b) $CI \cdot CH = HF \cdot BI$.

c) Ba điểm F, I, D thẳng hàng.

Câu 5. (3.0 điểm)

a) Chứng minh rằng biểu thức $D = \frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24}$ luôn nhận giá trị nguyên với mọi n là số nguyên chẵn.

b) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{1}{4}(a+b+c).$$

- HẾT -

- Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay và tài liệu.

- Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

(Hướng dẫn chấm có 06 trang)

Câu 1. (5.0 điểm)

a) Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt{21+12\sqrt{3}} + \sqrt{28-10\sqrt{3}} - \sqrt{3}$.

b) Cho biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+7}{x-4\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$.

Rút gọn biểu thức B và tìm các giá trị nguyên của x để B nhận giá trị nguyên.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = 5x^2 - 5x + 20$.

Câu	Điểm
1	5.0
a) Ta có $\sqrt{21+12\sqrt{3}} = \sqrt{(2\sqrt{3}+3)^2}$	0.5
$= 2\sqrt{3}+3$	0.25
$\sqrt{28-10\sqrt{3}} = \sqrt{(5-\sqrt{3})^2}$	0.5
$= 5-\sqrt{3}$	0.25
$A = 2\sqrt{3}+3+5-\sqrt{3}-\sqrt{3}$	0.25
$A = 8$	0.25
b) $B = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+7}{x-4\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$	0.5
$= \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) + \sqrt{x}+7}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)} : \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$	
$= \frac{x-9-x+1+\sqrt{x}+7}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)}$	0.25
$= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$	0.25
Ta có $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}$	0.25
Để B nhận giá trị nguyên khi $\sqrt{x}-3 \in U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$	0.25
Khi đó $\sqrt{x}-3=1$ suy ra $x=16$ (nhận) $\sqrt{x}-3=-1$ suy ra $x=4$ (nhận) $\sqrt{x}-3=2$ suy ra $x=25$ (nhận) $\sqrt{x}-3=-2$ suy ra $x=1$ (loại)	0.5

$\sqrt{x} - 3 = 4$ suy ra $x = 49$ (nhận) $\sqrt{x} - 3 = -4$ suy ra $\sqrt{x} = -1$ (loại) Vậy $x \in \{4; 16; 25; 49\}$ thì B nhận giá trị nguyên.	
c) $C = 5x^2 - 5x + 20 = 5(x^2 - x + 4) = 5\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{75}{4} \geq \frac{75}{4}$	0.5
Dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$ Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức C bằng $\frac{75}{4}$ khi $x = \frac{1}{2}$.	0.5

Câu 2. (7.0 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 - 7x + 30 = 6\sqrt{x+5}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2y + 3 = y^2 + 4x \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$.

c) Cho phương trình $x^2 + 2x - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $M = \left(\frac{x_1^3}{x_2^4} + \frac{x_2^3}{x_1^4}\right)^2$.

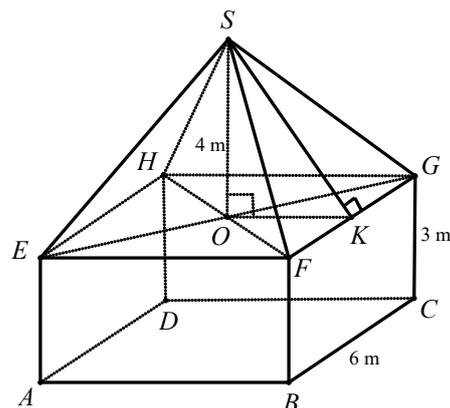
d) Đến kỷ niệm ngày Quốc tế Phụ nữ 8-3, một cửa hàng hoa ở Vĩnh Long đã nhập 500 giỏ hoa hồng từ Đà Lạt về để bán. Các giỏ hoa hồng được chuyển về đến cửa hàng vào sáng ngày 07/3/2025. Cửa hàng treo giá niêm yết bán một giỏ hoa hồng tăng 25% so với giá lúc nhập về. Đến hết ngày 08/3/2025, cửa hàng bán được 400 giỏ hoa hồng. Đến ngày 09/3/2025, cửa hàng treo bảng giá mới (giảm 50% so với giá lúc nhập về) và đã bán hết số giỏ hoa hồng còn lại. Hỏi giá một giỏ hoa hồng lúc cửa hàng nhập về là bao nhiêu? Biết cửa hàng khi bán hết 500 giỏ hoa hồng thì lãi được 10000000 đồng.

2	7.0
a) $x^2 - 7x + 30 = 6\sqrt{x+5}$ Điều kiện $x \geq -5$	0.25
$(\sqrt{x+5} - 3)^2 + (x-4)^2 = 0$	0.5
$\begin{cases} \sqrt{x+5} - 3 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases}$	0.25
$\begin{cases} \sqrt{x+5} = 3 \\ x = 4 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x = 4 \\ x = 4 \end{cases}$ suy ra $x = 4$ (nhận) Vậy $x = 4$ là nghiệm của phương trình.	0.5
b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2y + 3 = y^2 + 4x & (1) \\ x^2 + y^2 = 5 & (2) \end{cases}$	0.5
Từ (1) suy ra $(x-2)^2 - (y-1)^2 = 0$	
$(x-y-1)(x+y-3) = 0$ $x = y+1$ hoặc $x = 3-y$	0.5
Thế $x = y+1$ vào (2) ta được $2y^2 + 2y - 4 = 0$ Suy ra $y = 1$ suy ra $x = 2$	0.5

$y = -2$ suy ra $x = -1$	
Thế $x = 3 - y$ vào (2) ta được $2y^2 - 6y + 4 = 0$ Suy ra $y = 1$ suy ra $x = 2$ $y = 2$ suy ra $x = 1$ Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(2; 1), (-1; -2), (1; 2)$.	0.5
c) Ta có $x_1 + x_2 = -2, x_1 \cdot x_2 = -1$	0.25
Ta có $x_1 + x_2 = -2$ suy ra $x_1^2 + x_2^2 = 4 - 2x_1x_2 = 4 - 2(-1) = 6$ $x_1^4 + x_2^4 = 36 - 2(x_1x_2)^2 = 36 - 2(-1)^2 = 34$	0.25
Ta lại có $x_1 + x_2 = -2$ suy ra $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = (-2)^3 - 3(-1)(-2) = -14$	0.25
$(x_1^3 + x_2^3)(x_1^4 + x_2^4) = (-14) \cdot 34$ $x_1^7 + x_1^3x_2^3(x_2 + x_1) + x_2^7 = -476$ $x_1^7 + x_2^7 = -476 - x_1^3x_2^3(x_2 + x_1) = -476 - (-1)^3(-2) = -478$	0.5
Khi đó $M = \left(\frac{x_1^3}{x_2^4} + \frac{x_2^3}{x_1^4}\right)^2 = \left(\frac{x_1^7 + x_2^7}{x_1^4x_2^4}\right)^2 = \left(\frac{-478}{(-1)^4}\right)^2 = (478)^2 = 228484$.	0.25
d) Gọi giá của một giỏ hoa hồng lúc cửa hàng nhập về là x (đồng), $x > 0$. Giá của một giỏ hoa hồng khi tăng 25% so với giá của cửa hàng lúc nhập về là $125\%x$ (đồng) Giá của một giỏ hoa hồng khi giảm 50% so với giá của cửa hàng lúc nhập về là $50\%x$ (đồng)	0.5
Theo đề bài ta có phương trình $125\%x \cdot 400 + 50\%x \cdot 100 - 500x = 10000000$	0.5
$500x + 50x - 500x = 10000000$ $50x = 10000000$ $x = 200000$	0.5
Vậy giá của một giỏ hoa hồng lúc cửa hàng nhập về là 200000 (đồng).	0.5

Câu 3. (1.0 điểm)

Một chiếc lều có dạng như hình vẽ bên dưới.



Biết phần thân lều dạng hình hộp chữ nhật ABCD.EFGH, mặt đáy là hình vuông cạnh 6 m, chiều cao 3 m. Phần nóc lều dạng hình chóp tứ giác đều S.EFGH có chiều cao 4 m.

a) Tính thể tích không khí bên trong chiếc lều.

b) Tính chi phí để mua vải bạt phủ nóc lều (không tính các mép dán), biết mỗi mét vuông vải bạt có giá 20 000 đồng và $SO \perp OK$.

3		1.0
	a) Thể tích không khí bên trong chiếc lều $\frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4 + 6^2 \cdot 3 = 156 \text{ (m}^3\text{)}$	0.5
	Chiều cao mặt bên xuất phát từ đỉnh hình chóp $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m}$	0.25
	Diện tích xung quanh nóc lều $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 60 \text{ (m}^2\text{)}$ Chi phí để mua vải bạt phủ nóc lều $60 \cdot 20000 = 1200000 \text{ (đồng)}$.	0.25

Câu 4. (4.0 điểm)

Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Lấy điểm E thuộc cung nhỏ CB (E khác C và B). Gọi F là giao điểm của hai đường thẳng AC và BE. Kẻ CH vuông góc với BF ($H \in BF$), BC cắt OH tại I. Chứng minh rằng:

- a) Bốn điểm C, H, B, O cùng nằm trên một đường tròn và HO là tia phân giác của \widehat{CHB} .
- b) $CI \cdot CH = HF \cdot BI$.
- c) Ba điểm F, I, D thẳng hàng.

4		4.0
	a) Ta có $\triangle CHB$ vuông tại H nên nội tiếp đường tròn đường kính CB $\triangle COB$ vuông tại O nên nội tiếp đường tròn đường kính CB Suy ra bốn điểm C, H, B, O cùng nằm trên một đường tròn đường kính CB.	0.5
	Suy ra $\widehat{OHB} = \widehat{OCB} = 45^\circ$ (cùng chắn cung OB)	0.5

	$\widehat{OHC} = \widehat{OBC} = 45^\circ$ (cùng chắn cung OC)	
	Suy ra $\widehat{OHC} = \widehat{OHB}$ Vậy HO là tia phân giác của \widehat{CHB} .	0.5
	b) Xét $\triangle CHB$ có HI là đường phân giác nên $\frac{CI}{BI} = \frac{HC}{HB}$ (1)	0.5
	Xét $\triangle HCF$ vuông tại H và $\triangle HBC$ vuông tại H có $\widehat{HCF} = \widehat{HBC}$ (cùng phụ \widehat{CFH}) Suy ra $\triangle HCF$ đồng dạng $\triangle HBC$	0.5
	suy ra $\frac{HC}{HB} = \frac{HF}{HC}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $\frac{CI}{BI} = \frac{HF}{HC}$ suy ra $CI \cdot CH = HF \cdot BI$ (đpcm).	0.5
	c) Ta có $\triangle HCF$ đồng dạng $\triangle HBC$ suy ra $\frac{HF}{HC} = \frac{CF}{BC}$ mà $\frac{CI}{BI} = \frac{HF}{HC}$ nên $\frac{CF}{BC} = \frac{CI}{BI}$ Mà $BC = BD$ nên $\frac{CF}{BD} = \frac{CI}{BI}$	0.5
	Xét $\triangle CFI$ vuông tại C và $\triangle BDI$ vuông tại B có $\frac{CF}{BD} = \frac{CI}{BI}$ Suy ra $\triangle CFI$ đồng dạng $\triangle BDI$ suy ra $\widehat{CIF} = \widehat{BID}$ Mà $\widehat{CID} + \widehat{BID} = 180^\circ$ nên $\widehat{CID} + \widehat{CIF} = 180^\circ$ Suy ra ba điểm F, I, D thẳng hàng.	0.5

Câu 5. (3.0 điểm)

a) Chứng minh rằng biểu thức $D = \frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24}$ luôn nhận giá trị nguyên với mọi n là số nguyên chẵn.

b) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{1}{4}(a+b+c).$$

5		3.0
	a) Ta có $D = \frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24} = \frac{2n + 3n^2 + n^3}{24}$	0.25
	Để biểu thức D là số nguyên khi $(n^3 + 3n^2 + 2n) : 24$	0.25
	Ta có $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n^2 + 3n + 2) = n(n+1)(n+2)$	0.25
	suy ra $n(n+1)(n+2) : 3$	0.25
	Vì n là số nguyên chẵn nên $n = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$) Khi đó $n(n+1)(n+2) = 2k(2k+1)(2k+2) = 4k(k+1)(2k+1)$ Vì $k(k+1) : 2$ nên $4k(k+1) : 8$ suy ra $n(n+1)(n+2) : 8$	0.25
	Mà $(3, 8) = 1$ nên $n(n+1)(n+2) : 24$	

<p>Vậy biểu thức $D = \frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24}$ luôn nhận giá trị nguyên với mọi n là số nguyên chẵn.</p>	0.25
<p>b) Với x, y dương, ta cần chứng minh $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$</p> <p>Ta có $(x-y)^2 \geq 0$ $(x+y)^2 \geq 4xy$ $\frac{x+y}{xy} \geq \frac{4}{x+y}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$</p> <p>Vậy với x, y dương, ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, dấu bằng xảy ra khi $x = y$.</p>	0.5
<p>Áp dụng bất đẳng thức trên ta được</p> $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \geq \frac{4}{a+b+2c} \text{ suy ra } \frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} \geq \frac{4ab}{a+b+2c}$ <p>hay $\frac{ab}{a+b+2c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} \right)$</p>	0.25
<p>Lập luận tương tự ta có</p> $\frac{bc}{b+c+2a} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{bc}{b+a} + \frac{bc}{a+c} \right); \quad \frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{ca}{c+b} + \frac{ca}{b+a} \right)$	0.25
<p>Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế ta được</p> $\frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b}$ $\leq \frac{1}{4} \left(\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{bc}{b+a} + \frac{bc}{a+c} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{ca}{c+b} + \frac{ca}{b+a} \right)$ $= \frac{1}{4} \left(\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} + \frac{bc}{b+a} + \frac{bc}{a+c} + \frac{ca}{c+b} + \frac{ca}{b+a} \right)$ $= \frac{1}{4} \left(\frac{b(a+c)}{a+c} + \frac{a(b+c)}{b+c} + \frac{c(b+a)}{b+a} \right)$ $= \frac{1}{4} (a+b+c) \text{ (đpcm).}$	0.5

- HẾT -

Xem thêm: ĐỀ THI HSG TOÁN 9
<https://thcs.toanmath.com/de-thi-hsg-toan-9>