PHƯỜNG GIẢNG VÕ
Đề thi gồm 01 trang

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9
NĂM HỌC 2025 - 2026
Môn thi: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút (không kể thời gian giao đề)

1 Đề bài

Bài I.

1) Cho biểu thức:

$$P=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{x-\sqrt{x}-1}{x-3\sqrt{x}}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}-\frac{x-\sqrt{x}-10}{x-2\sqrt{x}-3}\right)$$

với $x>0; x\neq 9$. Chứng minh: $P=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ và tìm x để $\dfrac{3}{P}$ nhận giá trị nguyên

2) Với các số thực a,b,c đôi một khác nhau thỏa mãn $a^2+2b=b^2+2c=c^2+2a$ Tính $Q=(a+b)(b+c)(c+a)$.

Bài II.

1. Gieo một con xúc xắc cân đối đồng chất hai lần liên tiếp. Tính xác suất của biến cố: Tổng số chấm xuất hiện trên 2 mặt con xúc xắc trong hai lần gieo lớn hơn 7.
2. Với a,b,c là các số nguyên thỏa mãn: a^2+bc, b^2+ca, c^2+ab đều chia hết cho 3. Chứng minh: abc chia hết cho 27.

Bài III. Với a,b,c là các số thực không âm sao cho $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a}{3a+3b+c^2}+\frac{b}{3b+3c+a^2}+\frac{c}{3c+3a+b^2}$$

Bài IV. Cho tam giác ABC $(AB<AC)$ có $\widehat{BAC}=45^\circ$ nội tiếp đường tròn (O), các đường cao BE, CF cắt nhau tại H.

1. Chứng minh: $OEHF$ là hình bình hành và $OA=EF$.
2. Gọi M,N là giao điểm của đường thẳng BC với OF, OE. Chứng minh: $\widehat{MAN}=90^\circ$.
3. Đường thẳng OM cắt đường thẳng AN tại P, đường thẳng ON cắt đường thẳng AM tại Q. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng PQ. Chứng minh: OI vuông góc với BC.

Bài V.

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) sao cho $x^4-x^3+x=8y^3-12y^2+6y$.
2. Cho bảng ô vuông 5×6. Ta tiến hành điền vào mỗi ô vuông 1×1 của bảng đúng một số thuộc tập hợp $A=\{1;2;3;\dots;n\}$ sao cho mỗi số được điền ít nhất một lần, đồng thời trong mỗi ô vuông 2×2 của bảng có ít nhất hai số giống nhau được điền.
   a. Chỉ ra một cách điền số thỏa mãn với $n=18$.
   b. Tìm giá trị lớn nhất của n để có một cách điền số thỏa mãn.

———**HẾT**———

Lời giải

Bài I.

1) Cho biểu thức:

$$P=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{x-\sqrt{x}-1}{x-3\sqrt{x}}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}-\frac{x-\sqrt{x}-10}{x-2\sqrt{x}-3}\right)$$

với $x>0; x\neq 9$. Chứng minh: $P=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ và tìm x để $\dfrac{3}{P}$ nhận giá trị nguyên

2) Với các số thực a,b,c đôi một khác nhau thỏa mãn $a^2b+c=b^2c+a=c^2a+b$, tính $Q=(a+b)(b+c)(c+a)$.

1. Rút gọn biểu thức và tìm x nguyên

Cho biểu thức:

$$P=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{x-\sqrt{x}-1}{x-3\sqrt{x}}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}-\frac{x-\sqrt{x}-10}{x-2\sqrt{x}-3}\right)$$

với $x>0; x\neq 9$.

a) Chứng minh: $P=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

Ta rút gọn từng ngoặc:

- Ngoặc thứ nhất (A):

$$A=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{x-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}=\frac{x-(x-\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}$$

- Ngoặc thứ hai (B): Phân tích mẫu: $x-2\sqrt{x}-3=(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)$.

$$B=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}-\frac{x-\sqrt{x}-10}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}=\frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)-(x-\sqrt{x}-10)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$B=\frac{x-9-x+\sqrt{x}+10}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}=\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}=\frac{1}{\sqrt{x}-3}$$

Thực hiện phép chia:

$$P=A:B=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}:\frac{1}{\sqrt{x}-3}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}\cdot(\sqrt{x}-3)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\quad \text{(đpcm)}$$

b) Tìm x để $\dfrac{3}{P}$ nhận giá trị nguyên

Ta có: $\dfrac{3}{P}=3:\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{3(\sqrt{x}+1)-3}{\sqrt{x}+1}=3-\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}$.

Để biểu thức nguyên thì $\sqrt{x}+1$ phải là ước của 3. Các ước của 3 là: $\{-3;-1;1;3\}$. Do $x>0\Rightarrow\sqrt{x}>0\Rightarrow\sqrt{x}+1>1$. Vậy chỉ có trường hợp:

$$\sqrt{x}+1=3\Leftrightarrow\sqrt{x}=2\Leftrightarrow x=4$$

Thỏa mãn điều kiện xác định. Vậy $x = 4$.

2. Tính giá trị biểu thức Q

Cho a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn: $a^2 + 2b = b^2 + 2c = c^2 + 2a$. Từ hệ phương trình, ta có các hiệu tương ứng:

$$a^2 - b^2 = 2c - 2b \Rightarrow (a-b)(a+b) = -2(b-c) \quad (1)$$
$$b^2 - c^2 = 2a - 2c \Rightarrow (b-c)(b+c) = -2(c-a) \quad (2)$$
$$c^2 - a^2 = 2b - 2a \Rightarrow (c-a)(c+a) = -2(a-b) \quad (3)$$

Nhân vế theo vế của (1), (2) và (3):

$$(a-b)(b-c)(c-a) \cdot [(a+b)(b+c)(c+a)] = -8 \cdot (b-c)(c-a)(a-b)$$

Do a, b, c đôi một khác nhau nên $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$, ta chia cả hai vế cho lượng này:

$$(a+b)(b+c)(c+a) = -8$$

Vậy $Q = -8$.

Bài II. (2,0 điểm)

1. Gieo một con xúc xắc cân đối đồng chất hai lần liên tiếp. Tính xác suất của biến cố: Tổng số chấm xuất hiện trên 2 mặt con xúc xắc trong hai lần gieo lớn hơn 7.

2. Với a, b, c là các số nguyên thỏa mãn: $a^2 + bc, b^2 + ca, c^2 + ab$ đều chia hết cho 3. Chứng minh: abc chia hết cho 27.

Lời giải

1. Tính xác suất

Gieo xúc xắc 2 lần. Không gian mẫu $|\Omega| = 6 \times 6 = 36$. Biến cố A: "Tổng số chấm lớn hơn 7". Các cặp số (x, y) thỏa mãn $x + y > 7$:

- $x = 2$: (2,6) $\to$ 1 cặp.
- $x = 3$: (3,5), (3,6) $\to$ 2 cặp.
- $x = 4$: (4,4), (4,5), (4,6) $\to$ 3 cặp.
- $x = 5$: (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) $\to$ 4 cặp.
- $x = 6$: (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) $\to$ 5 cặp.

Tổng số kết quả thuận lợi: $|A| = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Xác suất: $P(A) = \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$.

2. Chứng minh số học

Cho $a^2 + bc, b^2 + ca, c^2 + ab$ đều chia hết cho 3. Giả sử tồn tại số không chia hết cho 3, giả sử $a \not\vdots 3 \Rightarrow a^2 \equiv 1 \pmod 3$. Từ $a^2 + bc \vdots 3 \Rightarrow 1 + bc \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow bc \equiv 2 \pmod 3$. Suy ra b, c đều không chia hết cho 3.

Khi đó $b^2 \equiv 1, c^2 \equiv 1 \pmod 3$. Thay vào các giả thiết còn lại:

$$\begin{cases} b^2 + ca \vdots 3 \\ c^2 + ab \vdots 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + ca \equiv 0 \\ 1 + ab \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ca \equiv 2 \\ ab \equiv 2 \end{cases} \pmod 3$$

Nhân lại: $(ca)(ab) \equiv 4 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow a^2(bc) \equiv 1 \pmod 3$. Vì $a^2 \equiv 1$ nên $bc \equiv 1 \pmod 3$. (Mâu thuẫn với $bc \equiv 2 \pmod 3$ ở trên). Vậy điều giả sử sai. Suy ra a, b, c đều chia hết cho 3.

$$\Rightarrow abc \vdots (3 \cdot 3 \cdot 3) \Rightarrow abc \vdots 27$$

Bài III. Với a, b, c là các số thực không âm sao cho $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{3a + 3b + c^2} + \frac{b}{3b + 3c + a^2} + \frac{c}{3c + 3a + b^2}$$

Từ giả thiết $a + b + c = 3$, ta biến đổi các mẫu số:

$$3a + 3b + c^2 = 3(3 - c) + c^2 = c^2 - 3c + 9$$

Tương tự cho các mẫu còn lại, ta có:

$$P = \frac{a}{c^2 - 3c + 9} + \frac{b}{a^2 - 3a + 9} + \frac{c}{b^2 - 3b + 9}$$

1. Tìm Giá trị nhỏ nhất (Min)

Vì $0 \le c \le 3$, ta có $c^2 - 3c = c(c - 3) \le 0 \Rightarrow c^2 - 3c + 9 \le 9$. Suy ra:

$$\frac{1}{c^2 - 3c + 9} \ge \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{a}{c^2 - 3c + 9} \ge \frac{a}{9} \quad (\text{do } a \ge 0)$$

Áp dụng tương tự cho các số hạng khác và cộng lại:

$$P \ge \frac{a}{9} + \frac{b}{9} + \frac{c}{9} = \frac{a + b + c}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi (a, b, c) là hoán vị của $(3, 0, 0)$. Vậy $\min P = \frac{1}{3}$.

2. Tìm Giá trị lớn nhất (Max)

Dự đoán dấu "=" xảy ra tại $a = b = c = 1$. Ta chứng minh bất đẳng thức phụ:

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 9} \le \frac{x + 6}{49} \quad \forall x \ge 0$$

Thật vậy, xét hiệu:

$$\frac{x + 6}{49} - \frac{1}{x^2 - 3x + 9} = \frac{(x + 6)(x^2 - 3x + 9) - 49}{49(x^2 - 3x + 9)}$$

$$= \frac{x^3 + 3x^2 - 9x + 5}{49(x^2 - 3x + 9)} = \frac{(x - 1)^2(x + 5)}{49(x^2 - 3x + 9)} \ge 0 \quad (\text{Luôn đúng với } x \ge 0)$$

Áp dụng vào P:

$$\frac{a}{c^2-3c+9} \le \frac{a(c+6)}{49} = \frac{ac+6a}{49}$$

Tương tự và cộng vế theo vế:

$$P \le \frac{(ab+bc+ca)+6(a+b+c)}{49} = \frac{ab+bc+ca+18}{49}$$

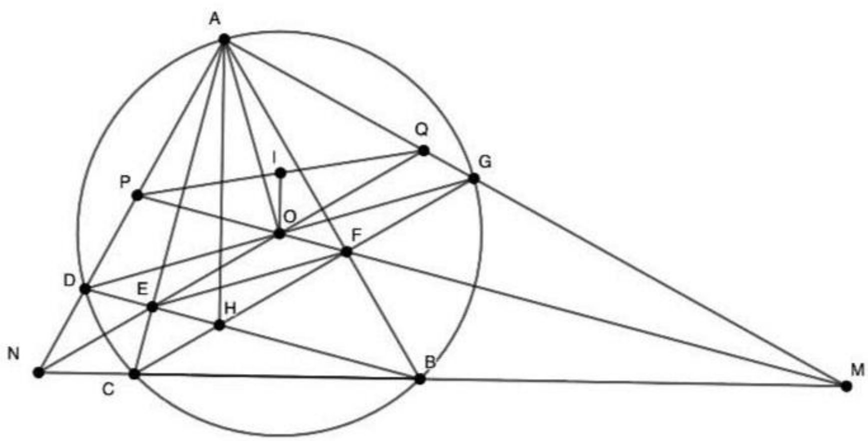
Mặt khác ta luôn có $ab+bc+ca \le \dfrac{(a+b+c)^2}{3} = 3$. Suy ra:

$$P \le \frac{3+18}{49} = \frac{21}{49} = \frac{3}{7}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$. Vậy $\max P = \dfrac{3}{7}$.

Bài IV. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có $\widehat{BAC} = 45^\circ$ nội tiếp đường tròn (O), các đường cao BE, CF cắt nhau tại H.

1. Chứng minh: $OEHF$ là hình bình hành và $OA = EF$.
2. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng BC với OF, OE. Chứng minh: $\widehat{MAN} = 90^\circ$.
3. Đường thẳng OM cắt đường thẳng AN tại P, đường thẳng ON cắt đường thẳng AM tại Q. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng PQ. Chứng minh: OI vuông góc với BC.



Hình 1: Hình

Lời giải

a) Xét đường tròn ngoại tiếp (O) bán kính R, ta hiển nhiên có $OA = R$.

Áp dụng định lý sin cho $\triangle ABC$, ta tính được cạnh BC:

$$BC = 2R\sin\widehat{BAC} = 2R\sin 45^\circ = 2R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}$$

Xét $\triangle AEF$ và $\triangle ABC$. Do BE, CF là đường cao nên tứ giác $BFEC$ nội tiếp, suy ra $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (c.g.c). Tỉ số đồng dạng là:

$$k = \cos\widehat{BAC} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Từ đó suy ra độ dài EF:

$$EF = BC \cdot k = (R\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = R$$

Vậy $OA = EF$ (vì cùng bằng R).

Ta có $FA = FC$ do ΔFAC vuông cân, nên $OF \perp AC$. Dẫn đến $OF // HE$.

Tương tự cho $OE // HF$ và ta có hình bình hành $OEHF$.

b) Tam giác MAC và NAB cân do OE, OF là trung trực AB, AC.

Do đó $\angle NAE = \angle NBE = \angle HAE \Longrightarrow AC$ là phân giác HAN, tương tự thì AB là phân giác MAC nên $\angle MAN = 2\angle BAC = 90^o$.

c) P nằm trên trung trực AC nên $PA = PC \Longrightarrow \angle PAC = PCA = HAC \Longrightarrow PC//AH$.

Tương tự $QB//AH$.

Hình thang vuông $PQBC$ có I là trung điểm $PQ \Longrightarrow IB = IC$. mà $OB = OC$ nên $IO \perp BC$.

Bài V.

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) sao cho $x^4 - x^3 + x = 8y^3 - 12y^2 + 6y$.
2. Cho bảng ô vuông 5×6. Ta tiến hành điền vào mỗi ô vuông 1×1 của bảng đúng một số thuộc tập hợp $A = \{1; 2; 3; \ldots; n\}$ sao cho mỗi số được điền ít nhất một lần, đồng thời trong mỗi ô vuông 2×2 của bảng có ít nhất hai số giống nhau được điền.
   a. Chỉ ra một cách điền số thỏa mãn với $n = 18$.
   b. Tìm giá trị lớn nhất của n để có một cách điền số thỏa mãn.

Lời giải

1. **Chỉ ra một cách điền số thỏa mãn với $n = 18$:**

   Ta sử dụng chiến thuật xen kẽ các cặp số nằm ngang. Dưới đây là một cách điền thỏa mãn:

4	1	9	2	14	3
5	1	10	2	15	3
6	1	11	2	16	3
7	1	12	2	17	3
8	1	13	2	18	3

2. **Tìm giá trị lớn nhất của n:**

   1. Đánh giá chặn trên của n:

   - Bảng ô vuông kích thước 5×6 có tổng cộng $5 \times 6 = 30$ ô.
   - Số lượng hình vuông con 2×2 trong bảng là: $(5 - 1) \times (6 - 1) = 4 \times 5 = 20$ hình vuông.
   - Để số lượng các số khác nhau n là lớn nhất, ta cần hạn chế số lần lặp lại của các số. Gọi k là số lượng các số "dư ra" (số lần lặp lại) so với việc điền 30 số khác nhau. Khi đó: $n = 30 - k$.
   - Xét điều kiện bài toán: "Mỗi ô vuông 2×2 có ít nhất hai số giống nhau". Điều này nghĩa là trong mỗi hình vuông 2×2 phải chứa ít nhất một cặp ô có giá trị bằng nhau.
   - Ta nhận thấy: Một cặp ô có giá trị bằng nhau nằm kề nhau (chung cạnh) có thể thuộc về tối đa 2 hình vuông 2×2 (hình vuông bên trái/phải hoặc trên/dưới nó). Nếu cặp ô không kề nhau, khả năng "phủ" hình vuông 2×2 còn ít hơn (chỉ 1 hoặc 0).
   - Để thỏa mãn 20 hình vuông 2×2, số lượng cặp số lặp lại tối thiểu cần thiết là:

   $$2k \geq 20 \Rightarrow k \geq 10$$

   - Suy ra giá trị lớn nhất của n là:

   $$n_{\max} = 30 - 10 = 20$$

3	4	5	6	7	8
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
9	10	11	12	13	14
2	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
15	16	17	18	19	20

Kết luận: Giá trị lớn nhất của n là **20**.