TRƯỜNG THPT CHUYÊN
HÀ NỘI – AMSTERDAM
**TỔ TOÁN – TIN**

**ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI**
**MÔN: TOÁN 9**
**Năm học: 2025 – 2026**
Thời gian làm bài: 150 *phút*

**Bài I** (*5,0 điểm*)

1) Giải phương trình $3(x-1)(x-7)+4x\sqrt{x+1}=0$.

2) Với các số thực $a,b,c,d,e,f$ khác $-1$, thỏa mãn $be+cf=d$; $cf+ad=e$; $ad+be=f$ và $d+e+f\neq 0$. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}$.

**Bài II** (*4,0 điểm*)

1) Với số nguyên dương $n$ thỏa mãn $5n+6$ và $6n+346$ đều là số chính phương, chứng minh rằng $23n-2025$ chia hết cho $88$.

2) Tìm các số nguyên dương $x,y$ thỏa mãn $(x+y)^7=2025x+162$.

**Bài III** (*3,0 điểm*)

1) Một khu dân cư dự định lắp đặt các trụ sạc cho xe điện để đảm bảo tổng công suất từ $1000$ kW trở lên. Có hai loại trụ sạc: trụ sạc AC có công suất $22$ kW, giá lắp đặt là $65$ triệu đồng mỗi trụ; trụ sạc DC có công suất $30$ kW, giá lắp đặt là $90$ triệu đồng mỗi trụ. Hỏi khu dân cư nên lắp đặt bao nhiêu trụ sạc mỗi loại để tổng chi phí là nhỏ nhất?

2) Với các số thực không âm $a,b,c$ thoả mãn $a+b+c=2$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{c^2+ab}$.

**Bài IV** (*6,0 điểm*)

Cho tam giác $ABC$ nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn $(O)$, các đường cao $AD,CE$ cắt nhau tại $H$. Đường thẳng $BO$ cắt $HC,HD$ tương ứng tại $P,Q$. Gọi $I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $QHP$.

1) Chứng minh $BO$ vuông góc với $DE$.

2) Chứng minh $IQ\cdot BC=HP\cdot OA$.

3) Gọi $M$ là trung điểm $AC$. Chứng minh $B,I,M$ thẳng hàng.

**Bài V** (*2,0 điểm*)

1) Chứng minh rằng tồn tại số nguyên $k$ để có ít nhất $2025$ cặp số nguyên dương $(x,y)$ thỏa mãn $x^2-x=y^2-k$.

2) Một tập hợp $S$ chứa hữu hạn các số nguyên dương được gọi là có ***mức độ*** $n$ nếu với mọi $a,b\in S, a\neq b$, ta luôn có $n|a-b|\geq ab$.

a) Tìm một tập hợp ***mức độ*** $5$ có đúng $4$ phần tử.

b) Tìm số phần tử lớn nhất của một tập hợp ***mức độ*** $25$.

---------------**Hết**---------------

*Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Họ tên thí sinh :………………………………………………………Số báo danh :………………………

Chương 1

# KIỂM TRA ĐỘI TUYỂN AMSTERDAM

**Bài tập 1** **(LIM Olympic - Hà Nội Amsterdam - Bài 1)**

1. Giải phương trình
$$3(x-1)(x-7)+4x\sqrt{x+1}=0.$$

2. Với các số thực $a, b, c, d, e, f$ khác $-1$, thỏa mãn $be+cf=d$, $cf+ad=e$, $ad+be=f$ và $d+e+f\neq 0$. Tính giá trị của biểu thức
$$P=\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}.$$

**Lời giải.**

1. Điều kiện xác định: $x\geq -1$.

Ta có $3x^2-24x+21+4x\sqrt{x+1}=0$

Hay $-x^2+4x\sqrt{x+1}-(x+1)+4x^2-25x+20=0$ hay $(2x-5)^2-(x-2\sqrt{x+1})^2=0$.

Từ đó $(2x-5-x+2\sqrt{x+1})(2x-5+x-2\sqrt{x+1})=0$.

Nếu $2x-5-x+2\sqrt{x+1}=0$ thì $x-5+2\sqrt{x+1}=0$ hay $x=7-2\sqrt{7}$, thỏa mãn.

Nếu $2x-5+x-2\sqrt{x+1}=0$ thì $3x-5-2\sqrt{x+1}=0$ hay $x=3$, thỏa mãn.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=7-2\sqrt{7}$ và $x=3$.

2. Nếu $e=0$ thì $cf=d, cf+ad=0, ad=f$ nên $d+f=0$, ra $d+e+f=0$, vô lý.

Từ đó $e\neq 0$, tương tự $d, e, f\neq 0$.

Ta có $be=\dfrac{d+f-e}{2}$ nên $b=\dfrac{d+f-e}{2e}$ hay $b+1=\dfrac{d+f+e}{2e}$.

Do đó $\dfrac{b}{b+1}=\dfrac{d+f-e}{d+f+e}$, tương tự có $P=\dfrac{(d+f-e)+(f+e-d)+(e+d-f)}{d+e+f}=1$.

**Bài tập 2** **(LIM Olympic - Hà Nội Amsterdam - Bài 2)**

(1) Với số nguyên dương $n$ thỏa mãn $5n+6$ và $6n+346$ đều là số chính phương, chứng minh rằng $23n-2025$ chia hết cho 88.

(2) Tìm các số nguyên dương $x, y$ thỏa mãn

$$(x+y)^7 = 2025x + 162.$$

**Lời giải.**

(1)
- Để ý số chính phương chia 8 dư $0, 1, 7$.
  Khi đó $5n+6 \equiv 0, 1, 7 \pmod 8$ nên $5n \equiv 2, 3, 1 \pmod 8$ hay $n \equiv 2, 5, 7 \pmod 8$.
  Lại có $6n+346 \equiv 0, 1, 7 \pmod 8$ và đây là số chẵn nên $n \equiv 1 \pmod 4$.
  Từ đó $n \equiv 5 \pmod 8$.
- Để ý số chính phương chia 11 dư $0, 1, 3, 4, 5, 9$.
  Khi đó $5n+6 \equiv 0, 1, 3, 4, 5, 9 \pmod{11}$ nên $n \equiv 1, 10, 6, 4, 2, 5 \pmod{11}$.
  Lại có $6n+346 \equiv 0, 1, 3, 4, 5, 9 \pmod{11}$ nên $n \equiv 1, 3, 7, 9, 0, 8 \pmod{11}$.
  Từ đó $n \equiv 1 \pmod{11}$.

Vì vậy $n \equiv 23 \pmod{88}$ nên $23n - 2025 \equiv 0 \mod 88$ hay $23n-2025$ chia hết cho 88.

(2) Nếu $x \geq 4$ thì $2025x + 162 = (x+y)^7 \geq x^7 = x^6.x \geq 4^6 x = 4096x$ hay $162 \geq 2071x$, vô lý.

Từ đó $x \leq 3$ nên $x \in \{1, 2, 3\}$, thay vào có $x = 1$ và $y = 2$ là nghiệm duy nhất thỏa mãn.

**Bài tập 3** **(LIM Olympic - Hà Nội Amsterdam - Bài 3)**

1. Một khu dân cư dự định lắp đặt các trụ sạc cho xe điện để đảm bảo tổng công suất từ 1000 kW trở lên. Có hai loại trụ sạc:
   - Trụ sạc AC: công suất 22 kW, giá 65 triệu đồng/trụ.
   - Trụ sạc DC: công suất 30 kW, giá 90 triệu đồng/trụ.

   Hỏi khu dân cư nên lắp đặt bao nhiêu trụ sạc mỗi loại để tổng chi phí là nhỏ nhất?
2. Với các số thực không âm $a, b, c$ thỏa mãn $a+b+c=2$, tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức
$$P=\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{c^2+ab}.$$

**Lời giải.**

1. Gọi $x$ là số trụ sạc $AC$ và $y$ là số trụ sạc $DC$, với $x, y$ là các số tự nhiên.

Khi đó $22x+30y \geq 1000$, ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $65x+90y$.

Lúc này ta quy bài toán về thành bài toán mới: Với $x, y$ là các số tự nhiên thỏa mãn $11x+15y \geq 500$, tìm giá trị nhỏ nhất của $P=13x+18y$.

$$P=13x+18y=\frac{13}{11}\left(11x+\frac{198}{13}y\right)=\frac{13}{11}\left(11x+15y+\frac{3}{13}y\right) \geq \frac{13}{11}\left(500+\frac{3}{13}y\right) \geq \frac{13.500}{11}$$

Để ý $P$ là số tự nhiên nên $P \geq 591$.

Nếu $P=591$ thì $13x+18y=591$ hay $x=\dfrac{591-18y}{13}$.

Thay vào $11x+15y \geq 500$ ta có $6501-3y \geq 6500$ hay $3y \leq 1$ hay $y=0$, thay vào ta có $x=\dfrac{591}{13}$ không là số tự nhiên, vô lý.

Từ đó $P \geq 592$, ta sẽ chứng minh đây là giá trị nhỏ nhất của $P$.

Với $P=592$ ta có $13x+18y=592$ nên $x=\dfrac{592-18y}{13}$.

Thay vào $11x+15y \geq 500$, ta có $y \leq 4$.

Lần lượt thay $y \in \{0,1,2,3,4\}$ ta thu được $x=40, y=4$.

Do đó khu dân cư nên lắp 40 trụ sạc AC và 4 trụ sạc DC.

2. Ta có $P \geq \sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}+\sqrt{c^2}=a+b+c=2$, dấu bằng chẳng hạn khi $a=b=1, c=0$.

Còn về giá trị lớn nhất, không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$.

Khi đó $P \leq \sqrt{a^2+ac}+\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{bc+ab}$.

Có $\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{bc+ab} \leq \sqrt{2(b^2+ca+bc+ab)}=\sqrt{(2b+2c)(a+b)} \leq \dfrac{(2b+2c)+(a+b)}{2}$.

Còn $\sqrt{a^2+ac}=\sqrt{a(a+c)} \leq \dfrac{a+(a+c)}{2}$.

Do đó $P \leq \dfrac{3}{2}(a+b+c)=3$, dấu bằng chẳng hạn khi $a=2, b=c=0$.

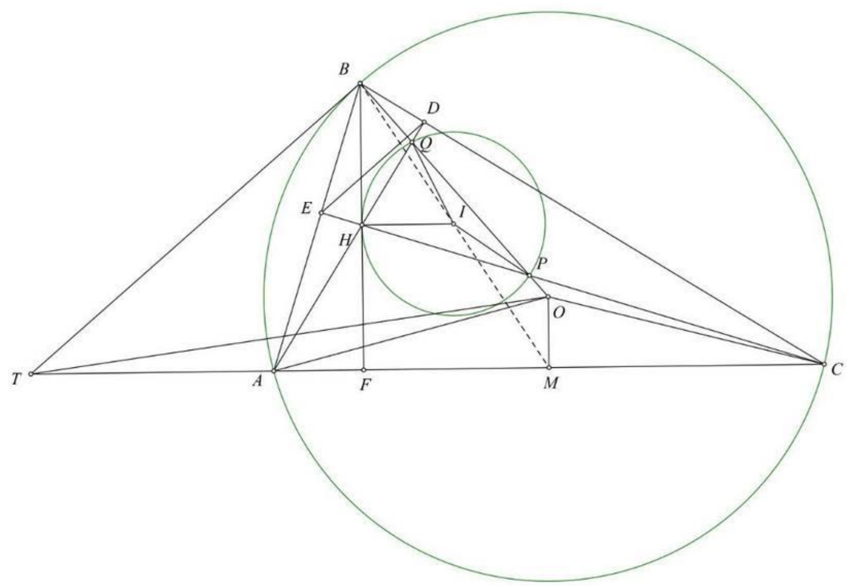
Từ đó $P$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 và đạt giá trị lớn nhất bằng 3.

**Bài tập 4** **(LIM Olympic - Hà Nội Amsterdam - Bài 4)**

Cho tam giác $ABC$ nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn $(O)$, các đường cao $AD, CE$ cắt nhau tại $H$. Đường thẳng $BO$ cắt $HC, HD$ tương ứng tại $P, Q$. Gọi $I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $QHP$.

1. Chứng minh $BO$ vuông góc với $DE$.
2. Chứng minh $IQ.BC = HP.OA$.
3. Gọi $M$ là trung điểm $AC$. Chứng minh $B, I, M$ thẳng hàng.

**Lời giải.**




1. Kẻ đường cao $BF$ của tam giác $ABC$. Do tứ giác $AEDC$ nội tiếp đường tròn đường kính $AC$ nên $\widehat{BDE} = \widehat{BAC} = \dfrac{\widehat{BOC}}{2} = 90^\circ - \widehat{OBC}$ (do tam giác $BOC$ cân tại $O$).

   Nên $\widehat{DBO} + \widehat{BDE} = 90^\circ$ hay $BO \perp DE$.

2. Ta có $\widehat{HQP} = \widehat{HBO} + \widehat{BHD} = \widehat{FBC} - \widehat{OBC} + \widehat{BHD} = 90^\circ - \widehat{ACB} - (90^\circ - \widehat{BAC}) + \widehat{ACB}$ $= \widehat{BAC} - \widehat{ACB} + \widehat{ACB} = \widehat{BAC}$.

   Từ đó ta có $\widehat{HIP} = 2\widehat{HQP} = 2\widehat{BAC} = \widehat{BOC} \Rightarrow \triangle HIP \backsim \triangle BOC \Rightarrow \dfrac{HI}{HP} = \dfrac{BO}{BC} \Rightarrow$ $HI.BC = OB.HP \Rightarrow IQ.BC = OA.HP$.

3. Kẻ tiếp tuyến tại $B$ của $(O)$ cắt $AC$ tại $T$. Do tứ giác $BTMO$ nội tiếp đường tròn đường kính $TO$ nên $\widehat{OBM} = \widehat{OTM}$.

   Chứng minh tương tự câu b ta có $\widehat{HPQ} = \widehat{ACB}$, nên $\widehat{HPQ} = \widehat{BHQ} \Rightarrow \widehat{IHQ} + \widehat{BHQ} =$ $90^\circ - \dfrac{\widehat{QIH}}{2} + \widehat{HPQ} = 90^\circ \Rightarrow BH$ là tiếp tuyến của $(I)$.

   Từ đó ta có $\triangle HPQ \backsim \triangle BCA$ và có các điểm $B, I$ và $T, O$ ở hai vị trí tương ứng nhau nên ta dễ có $\triangle IBP \backsim \triangle OTC \Rightarrow \widehat{IBP} = \widehat{OTM} = \widehat{OBM}$.

Từ đó ta có $\widehat{PBI} = \widehat{PBM}$ mà $BI, BM$ cùng nằm trong $\widehat{OBA}$ nên $B, I, M$ thẳng hàng.

**Bài tập 5** **(LIM Olympic - Hà Nội Amsterdam - Bài 5)**

1. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên $k$ để có ít nhất 2025 cặp số nguyên dương $(x, y)$ thỏa mãn

$$x^2 - x = y^2 - k.$$

2. Một tập hợp $S$ chứa hữu hạn số nguyên dương được gọi là có **mức độ** $n$ nếu với mọi $a, b \in S$ $(a \neq b)$, ta luôn có

$$n|a - b| \geq ab.$$

   **a)** Tìm một tập hợp **mức độ** 5 có đúng 4 phần tử.

   **b)** Tìm số phần tử lớn nhất của một tập hợp **mức độ** 25.

**Lời giải.**

1. Ta có $4x^2 - 4x + 1 = 4y^2 - 4k + 1$ nên $(2y)^2 - (2x - 1)^2 = 4k - 1$.

Từ đó $(2y - 2x + 1)(2y + 2x - 1) = 4k - 1$.

Ta thấy nếu $4k - 1 = a.b$ với $a, b$ là số nguyên dương nào đó và $a < b$.

Khi đó $2y - 2x + 1 = a$ và $2y + 2x - 1 = b$ suy ra $y = \dfrac{a + b}{4}$ và $x = \dfrac{b - a - 2}{4}$.

Khi đó nếu trong hai số $a, b$ có một số chia 4 dư 1, một số chia 4 dư 3 thì $x, y$ nguyên dương.

Lúc này ta có thể nghĩ tới việc chọn $4k - 1 = 3^{4049}$ hay $k = \dfrac{3^{4049} + 1}{4}$.

Ta có được $(2y - 2x + 1)(2y + 2x - 1) = 3^{4049}$ khi đó $2y - 2x + 1 = 3^u$ và $2y + 2x - 1 = 3^v$ với $u < v$ là các số tự nhiên và $u + v = 4049$.

Suy ra $x = \dfrac{3^v - 3^u - 2}{4}$ và $y = \dfrac{3^u + 3^v}{4}$ với mọi $u \in \{0, 1, ..., 2024\}$ và $v = 4049 - u$.

Dễ thấy $u, v$ khác tính chẵn lẻ và $v > u$ nên các nghiệm $(x, y)$ trên là nguyên dương.

Từ đó với $k = \dfrac{3^{4049} + 1}{4}$ thì phương trình có đúng 2025 nghiệm nguyên dương.

2. **a)** Dễ thấy $S = \{1, 2, 4, 20\}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

   **b)** Giả sử tồn tại $x, y \in S$ mà $x > y \geq 25$. Khi đó $x - y = |x - y| \geq \dfrac{xy}{25} \geq x$, vô lý.

   Từ đó $S$ chứa nhiều nhất một phần tử lớn hơn bằng 25.

   Giả sử $S$ có $n$ phần tử $x_1 < ... < x_n$.

   Khi đó với mọi $i > j$ ta có $x_i - x_j \geq \dfrac{x_i x_j}{25}$ hay $x_i \geq \dfrac{25x_j}{25 - x_j} = -25 + \dfrac{625}{25 - x_j}$.

   Ta có $x_2 \geq -25 + \dfrac{625}{25 - x_1} \geq -25 + \dfrac{625}{25 - 1} > 1$, do đó $x_2 \geq 2$.

   Lại có $x_3 \geq -25 + \dfrac{625}{25 - x_2} > 2$ nên $x_3 \geq 3$.

   Tương tự $x_4 \geq 4, x_5 \geq 5, x_6 \geq 7, x_7 \geq 10, x_8 \geq 17, x_9 \geq 54$.

   Từ đây suy ra $S$ có nhiều nhất 9 phần tử, chẳng hạn $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 17, 54\}$.