BÀI 4
KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Sơ đồ bài toán khảo sát

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2. Xét sự biến thiên của hàm số.

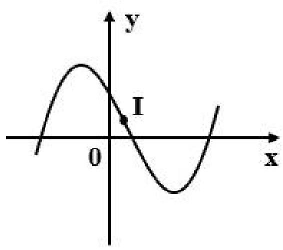
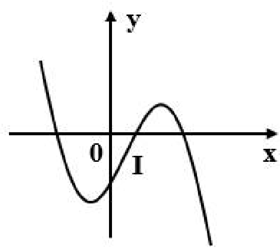
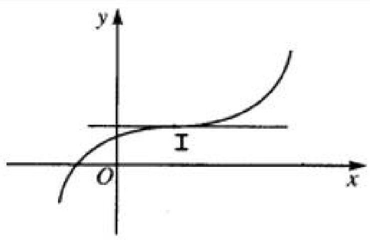
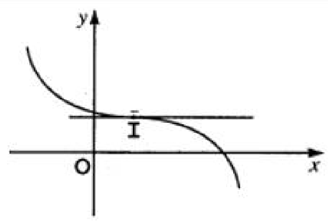
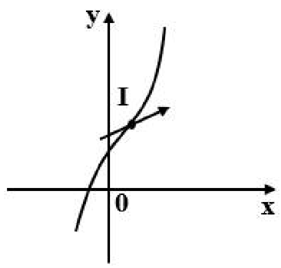
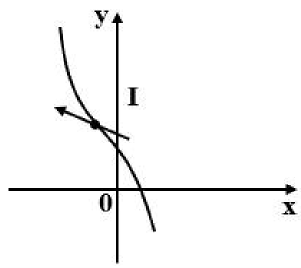
- Tính đạo hàm y', xét dấu y' và xác định khoảng đơn điệu, cực trị (nếu có) của hàm số.
- Tính giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực của hàm số và tìm tiệm cận (nếu có) của hàm số .
- Lập bảng biến thiên của hàm số.

Bước 3. Vẽ đồ thị của hàm số.

- Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
- Xác định các điểm cực trị (nếu có), giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có và dễ tìm).
- Vẽ đồ thị của hàm số.

2. Khảo sát hàm số bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$.

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.
- Đồ thị nhận điểm $I(x_0; y_0)$ làm tâm đối xứng. Với x_0 là nghiệm của $y'' = 0$ và $y_0 = y(x_0)$.
- Các dạng đồ thị:

	$a > 0$	$a < 0$
$y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac > 0$		
$y' = 0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac = 0$		
$y' = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac < 0$		

3. Khảo sát hàm số phân thức: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0,\, ad-bc\neq 0)$.

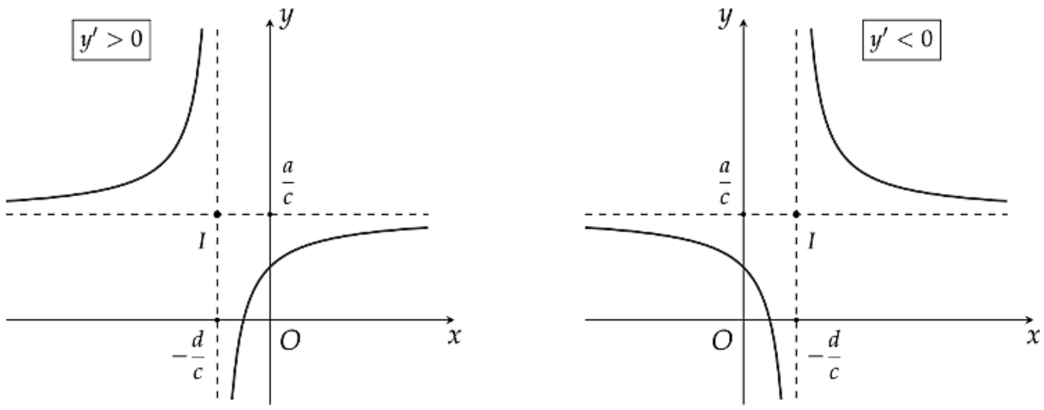
• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

• Đạo hàm: $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

• Phương trình các đường tiệm cận: Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$ và đường tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$.

• Đồ thị có tâm đối xứng: $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$

• Các dạng đồ thị:



4. Khảo sát hàm số phân thức: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0,\, m\neq 0)$.

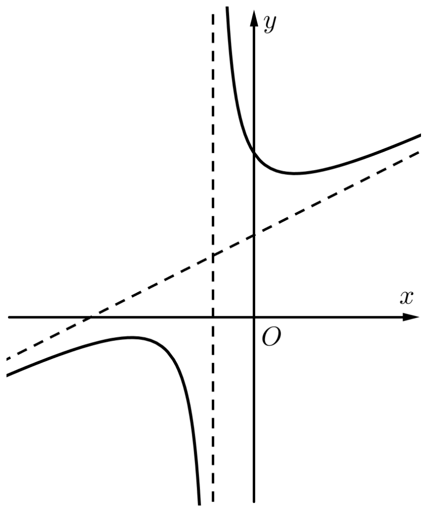
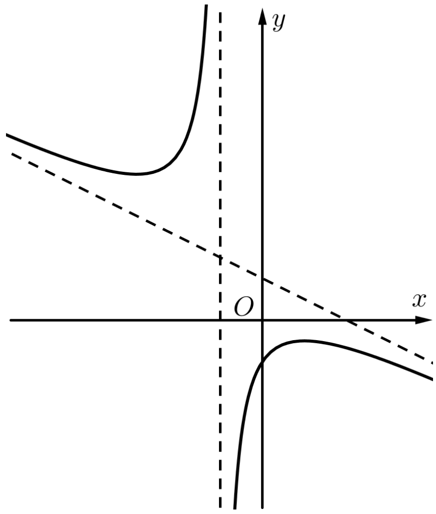
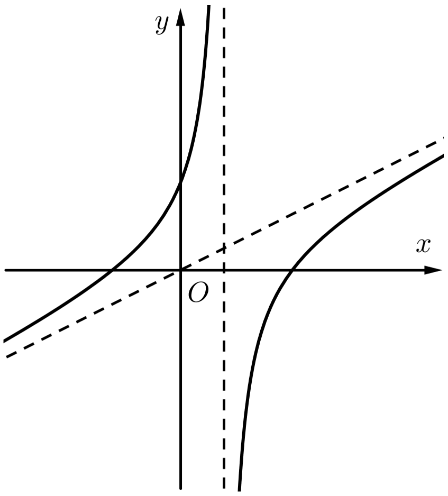
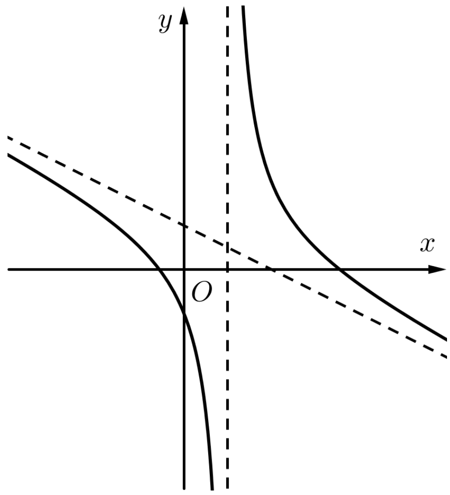
• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{n}{m}\right\}$.

• Đạo hàm: $y'=\dfrac{2amx^2+2anx+bn-cm}{(mx+n)^2}$.

• Phương trình các đường tiệm cận: Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$ và đường tiệm cận xiên $y=\dfrac{a}{m}x+\dfrac{b-am}{m^2}$.

• Đồ thị có tâm đối xứng I là giao điểm hai đường tiệm cận và nhận đường phân giác tạo bởi hai đường tiệm cận làm trục đối xứng.

• Các dạng đồ thị:

	$am > 0$	$am < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm		

CHỦ ĐỀ 1

KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN, VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$

VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$.

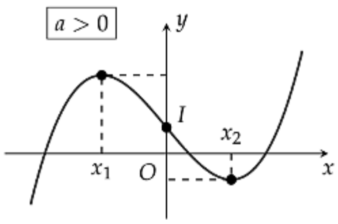
- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.
- Tìm các giới hạn tại vô cực của đồ thị hàm số
- Lập bảng biến thiên, xác định chiều biến thiên và các điểm cực trị của hàm số
- Cho thêm điểm và vẽ đồ thị hàm số dựa vào bảng biến thiên

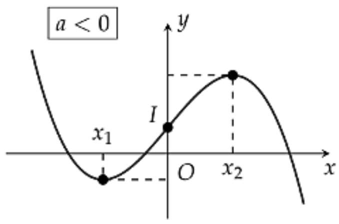
Chú ý: Đồ thị nhận điểm $I(x_0; y_0)$ làm tâm đối xứng. Với x_0 là nghiệm của $y'' = 0$ và $y_0 = y(x_0)$.

Hoặc tọa độ tâm đối xứng $I(x_0; y_0)$ của đồ thị chính là tọa độ trung điểm của đoạn nối hai điểm cực trị.

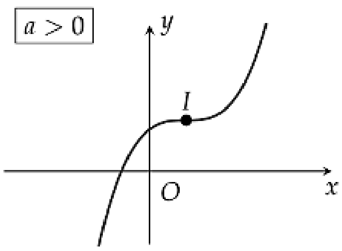
2. Các dạng đồ thị của hàm số bậc ba

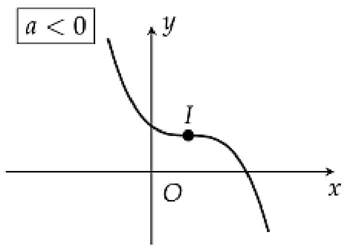
• **Trường hợp 1:** Nếu $y' = 0$ có $\Delta = b^2 - 3ac > 0$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1 và x_2. Khi đó hàm số có hai điểm cực trị là $x = x_1$ và $x = x_2$



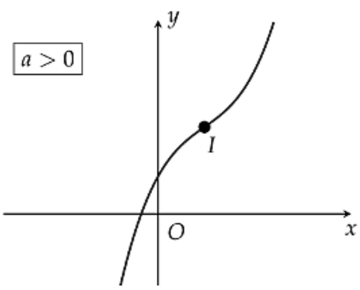


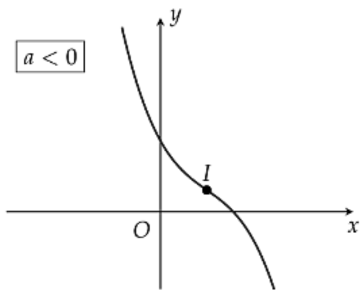
• **Trường hợp 2:** Nếu $y' = 0$ có $\Delta = b^2 - 3ac = 0$ thì $y' = 0$ có nghiệm kép $x = x_0$. Khi đó hàm số không có cực trị





• **Trường hợp 3:** Nếu $y' = 0$ có $\Delta = b^2 - 3ac < 0$ thì $y' = 0$ vô nghiệm. Khi đó hàm số không có cực trị





PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1
KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC 3
$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$$

Bài 1. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y = 2x^3 - 6x$ b) $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ c) $y = -x^3 + 2$ d) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Bài 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 1$ b) $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$ c) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ d) $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y = -x^3 + 3x + 1$ b) $y = x^3 - 6x^2 + 1$ c) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

d) $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 4x$ e) $y = -x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ f) $y = x^3 - 3x^2 + 4x$

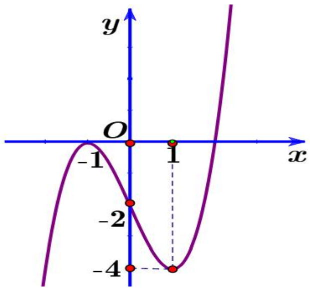
Bài 4. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y = x^3 + x + 1$ b) $y = 4x^3 - 12x^2 + 9x - 1$ c) $y = -x^3 - 3x^2 + 1$

d) $y = -x^3 + 3x - 2$ e) $y = (x-1)^2(4-x)$ f) $y = x(x+3)^2$

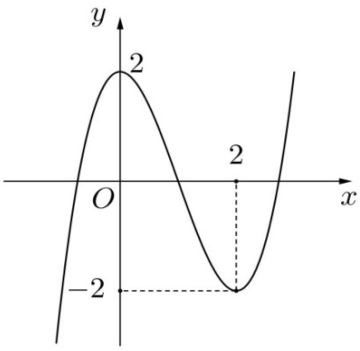
DẠNG 2
XÁC ĐỊNH HỆ SỐ CỦA HÀM SỐ

Bài 1. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình bên.



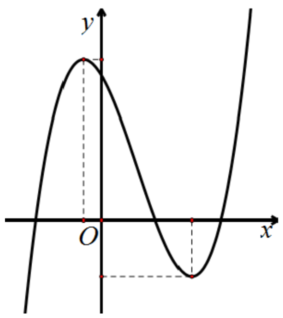
Hãy xác định hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Bài 2. Cho hàm số $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ $(b,c,d \in \mathbb{R})$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình bên.



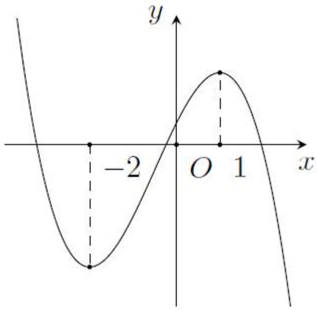
Hãy xác định hàm số $y = x^3 + bx^2 + cx + d$.

Bài 3. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ sau



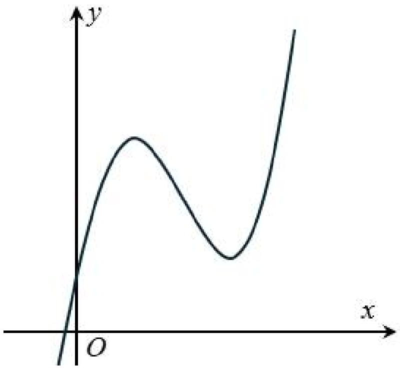
Hãy cho biết các hệ số a, b, c, d âm hay dương?

Bài 4. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



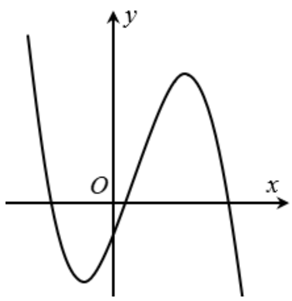
Hãy cho biết các hệ số a, b, c, d âm hay dương?

Bài 5. Cho hàm số $y = f\left(x\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hãy cho biết các hệ số a, b, c, d âm hay dương?

Bài 6. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu số âm trong ba số $b,\ c,\ d$?

DẠNG 3
BÀI TOÁN LIÊN QUAN HÀM SỐ BẬC 3

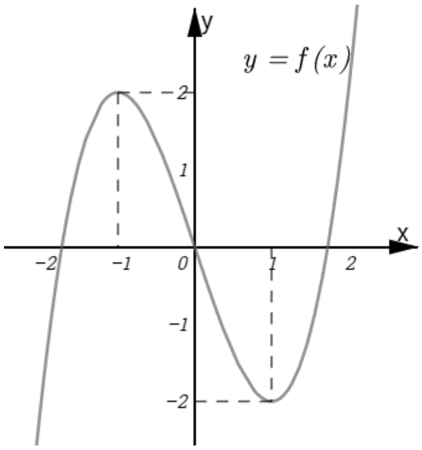
Bài 1. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ và trục hoành là bao nhiêu?

Bài 2. Cho hàm số $y = f\left(x\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$ ↘		-1	↗	3	↘	$-\infty$

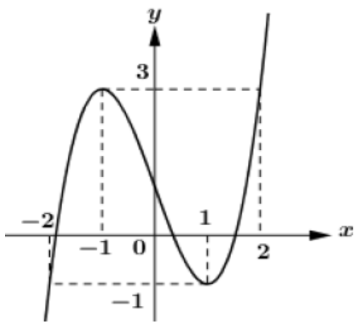
Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với đường thẳng $y = 1$.

Bài 3. Cho hàm số bậc ba $y = f\left(x\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Tìm số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right) = -1$.

Bài 4. Cho hàm số $y = f\left(x\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d\left(a \ne 0\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số nghiệm của phương trình $f\left(x\right) = 2025$

Bài 5. Lập phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C): y = x^3 + 3x^2 - 8x + 1$, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $\Delta: y = x - 2025$?

Bài 6. Cho (C) là đồ thị của hàm số $y=\frac{x^3}{3}-x^2+2x+1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{x}{5}+2$.

Bài 7. Cho hàm số $y=-\frac{x^3}{3}+x^2+3\text{x}-\frac{11}{3}$ có đồ thị (C). Trên đồ thị hàm số (C) lấy 2 điểm $M\left(\frac{\sqrt{a}}{2};\frac{b-\sqrt{c}}{4}\right);N\left(-\frac{\sqrt{d}}{2};\frac{e+\sqrt{f}}{4}\right)$ $(a,b,c,d,e,f\in\mathbb{Z})$ sao cho chúng đối xứng nhau qua đường thẳng $d:2x-y+2=0$. Tính giá trị của biểu thức $T=\frac{a+b+c-(d+e+f)}{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2}$.

Bài 8. Tìm giá trị tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ cắt đường thẳng $y=m$ tại ba điểm phân biệt .

Bài 9. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3-3x^2=2m+1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tính tổng các phần tử của S.

Bài 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^3+(m+2)x^2+(m^2-m-3)x-m^2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt?

Bài 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=-mx$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-m+2$ tại ba điểm phân biệt A,B,C sao cho $AB=BC$.

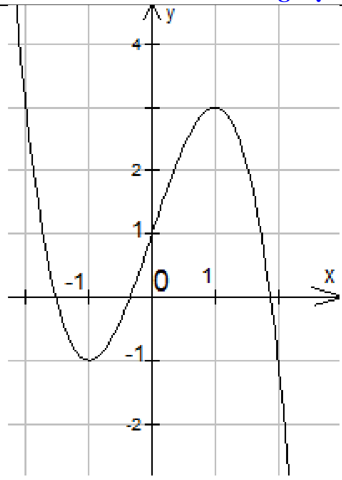
Bài 12. Cho hàm số $y=x^3+3mx^2-m^3$ có đồ thị (C_m) và đường thẳng $d:y=m^2x+2m^3$. Tìm giá trị của m để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $x_1^4+x_2^4+x_3^4=83$.

Bài 13. Tìm m để đồ thị (C) của $y=x^3-3x^2+4$ và đường thẳng $y=mx+m$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt $A(-1;0)$, B, C sao cho ΔOBC có diện tích bằng 64.

Bài 14. Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ (C_m). Tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d):y=x+4$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$ với điểm $K(1;3)$.

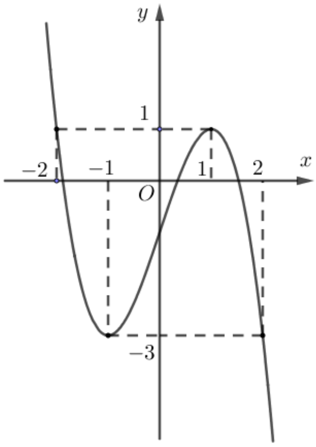
Bài 15. Cho hàm số $y=x^3-2x^2-1$ có đồ thị (C), đường thẳng $(d):y=mx-1$ và điểm $K(4;11)$. Biết rằng (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A,B,C trong đó $A(0;-1)$ còn trọng tâm tam giác KBC nằm trên đường thẳng $y=2x+1$. Tìm các giá trị của tham số m.

Bài 16. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên.



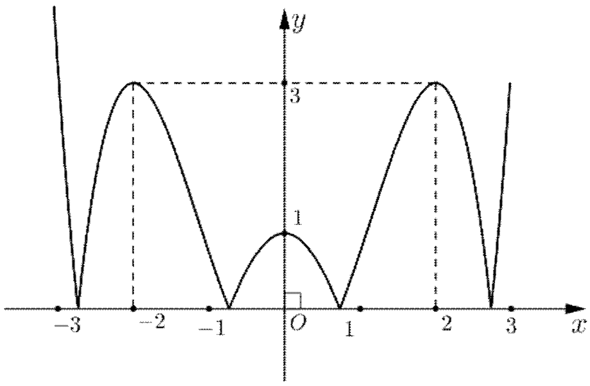
Tìm số nghiệm phân biệt của phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=1$.

Bài 17. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình $f\left(1-f\left(x\right)\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

Bài 18. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm số nghiệm thuộc đoạn $\left[2017\pi;2020\pi\right]$ của phương trình $3f\left(2\cos x\right)=8$.

Bài 19. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $3f\left(\cos x\right)-2=0$ trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$ bằng bao nhiêu?

Bài 20. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f\left(x\right)$	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f\left(2\sin x+1\right)=1$ bằng bao nhiêu?

PHẦN B

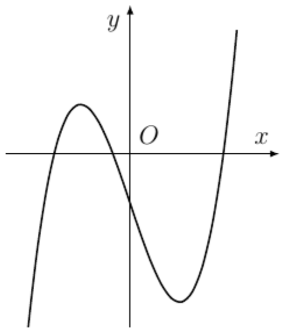
TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN B

TRẮC NGHIỆM GỒM BA PHẦN

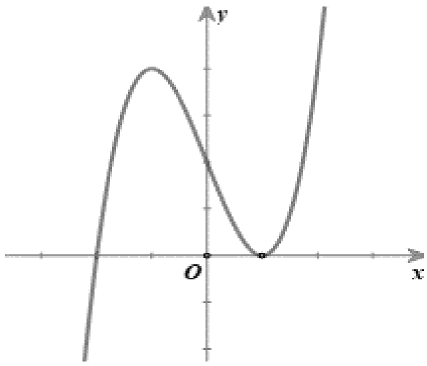
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình bên?



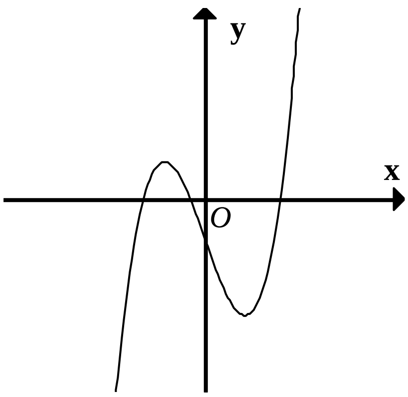
A. $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **C.** $y=x^3-3x-1$. **D.** $y=x^2+x-1$.

Câu 2. Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



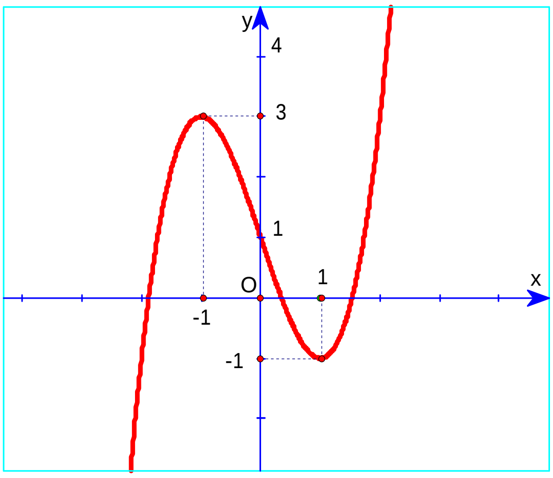
A. $y=-x^3+3x+2$ **B.** $y=x^2+1$ **C.** $y=x^3+x^2+1$ **D.** $y=x^3-3x+2$

Câu 3. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

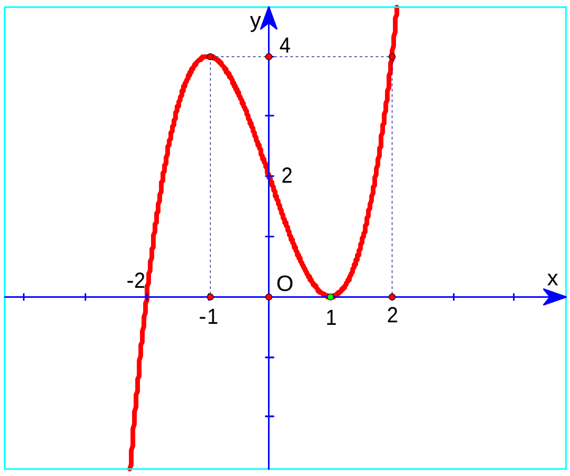


A. $y=x^3-3x-1$ **B.** $y=3x^2-1$ **C.** $y=-x^3-3x-1$ **D.** $y=-x^4+x^3-1$

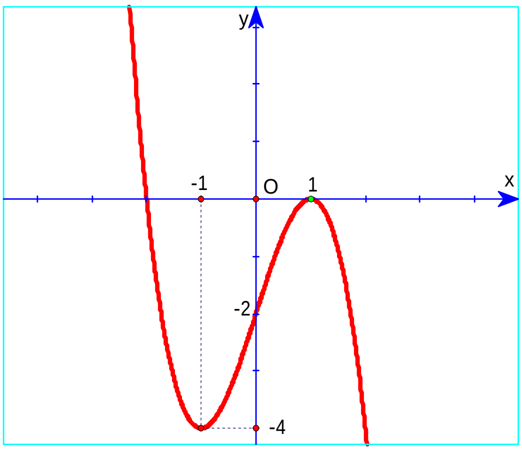
Câu 4. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ là hình nào trong 4 hình dưới đây?



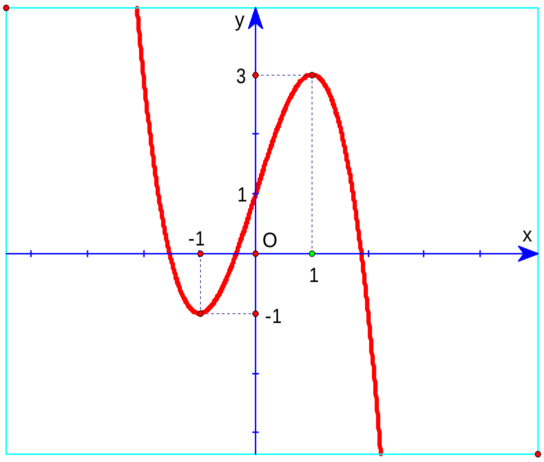
A. Hình 1.



B. Hình 2.

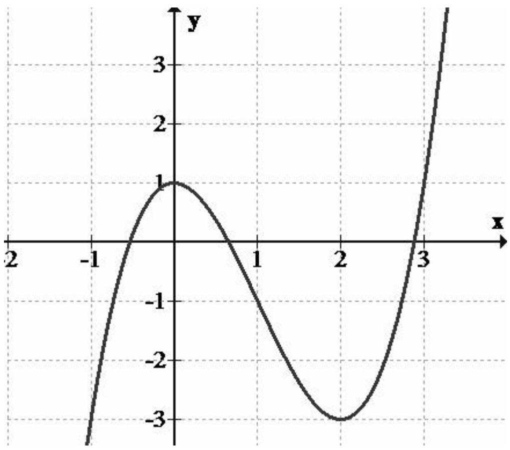


C. Hình 3.



D. Hình 4.

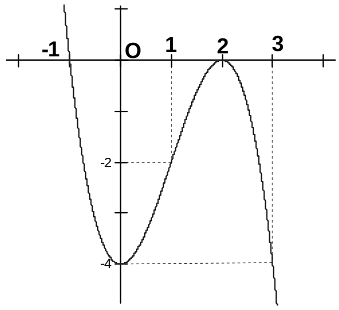
Câu 5. Đồ thị hình bên là của hàm số nào?.



Chọn một khẳng định ĐÚNG.

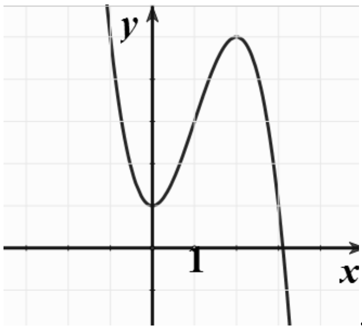
A. $y = -x^3 - 3x^2 + 1$. **B.** $y = -\dfrac{x^3}{3} + x^2 + 1$. **C.** $y = 2x^3 - 6x^2 + 1$. **D.** $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Câu 6. Đồ thị sau đây là của hàm số nào ?



A. $y = x^3 - 3x - 4$. **B.** $y = -x^3 + 3x^2 - 4$. **C.** $y = x^3 - 3x \ -4$. **D.** $y = -x^3 - 3x^2 - 4$.

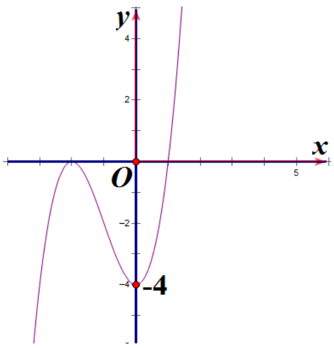
Câu 7. Cho đồ thị sau.

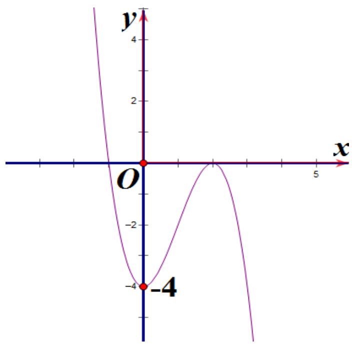


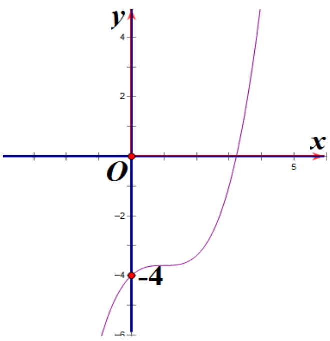
Hỏi hàm số nào sau đây có đồ thị ở hình trên?

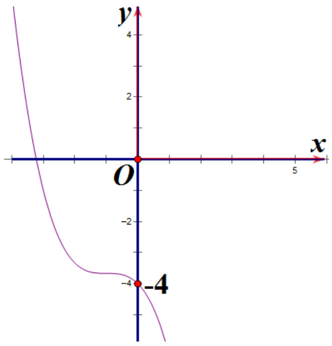
A. $y = x^3 + 3x^2 + 1$. **B.** $y = -x^3 - 3x^2 + 1$. **C.** $y = x^3 - 3x^2 + 1$. **D.** $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

Câu 8. Hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ có đồ thị là hình nào sau đây?

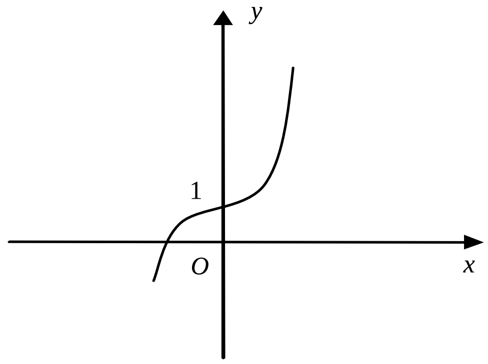
A.


B.


C.


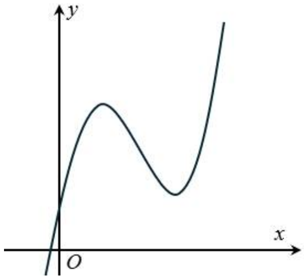
D.


Câu 9. Đồ thị hàm số nào sau đây có hình dạng như hình vẽ bên.



A. $y=x^3+3x+1.$ **B.** $y=x^3-3x+1.$ **C.** $y=-x^3-3x+1.$ **D.** $y=-x^3+3x+1.$

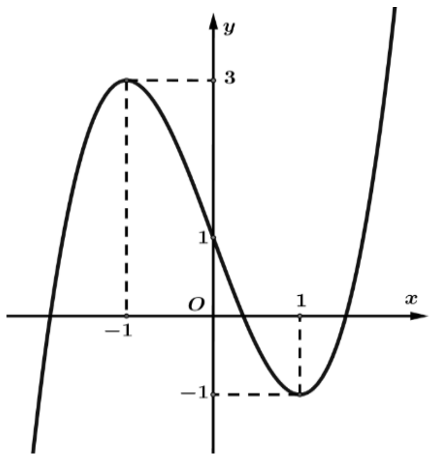
Câu 10. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?



A. $y=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x+1.$ **B.** $y=x^3-3x^2+1.$

C. $y=-\frac{1}{2}x^3+3x^2+\frac{9}{2}x+1.$ **D.** $y=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x+1.$

Câu 11. Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



A. $y=x^3-3x+1.$ **B.** $y=x^3-3x-1.$ **C.** $y=-x^3-3x-1.$ **D.** $y=-x^3+3x+1.$

Câu 12. Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A. $y = x^4 - 2x^2$.   **B.** $y = -x^3 + 3x$.   **C.** $y = \dfrac{x-2}{x+3}$.   **D.** $y = x^3 - 3x$.

Câu 13. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình vẽ?

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

A. $y = x^2 + 2x + 1$.   **B.** $y = \dfrac{x^2+1}{x+2}$.   **C.** $y = x^3 + x^2 + 2x - 5$.   **D.** $y = \dfrac{x+1}{x+2}$.

Câu 14. Bảng biến thiên dưới đây là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D?

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$+$	0	-	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	20	$\searrow$	-7	$\nearrow$	$+\infty$

A. $y = -2x^3 - 3x^2 + 12x$.   **B.** $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.

C. $y = -2x^4 - 3x^2 + 12x$.   **D.** $y = 2x^3 - 3x^2 + 12x$.

Câu 15. Bảng biến thiên sau đây là của một trong 4 hàm số được liệt kê dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

A. $y = -x^3 - 3x^2 + 2$.   **B.** $y = x^3 - 3x^2 + 2$.   **C.** $y = x^3 + 3x^2 - 2$.   **D.** $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.

Câu 16. Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào ?

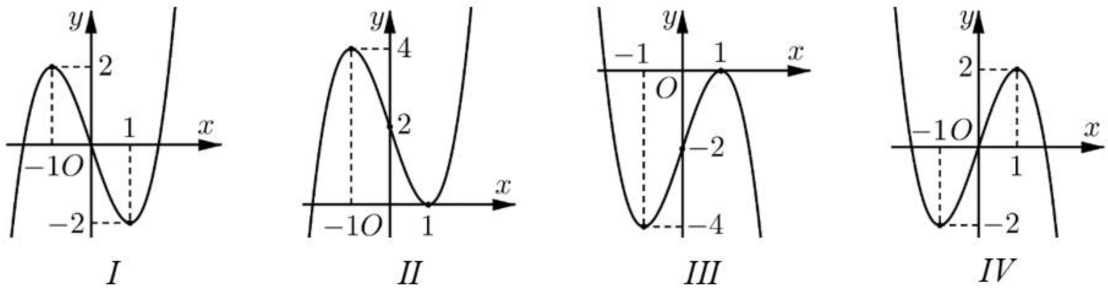
x	-∞		**1**		+∞
y'		+	**0**	+	
y	-∞	$\nearrow$	**1**	$\nearrow$	+∞

A. $y = -3x^2 + 1$ **B.** $y = x^3 - 1$.   **C.** $y = x^4 + 3x^2 - 1$.   **D.** $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + x + \dfrac{2}{3}$

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị nào thể hiện hàm số $y = f(x)$?



A. I. **B.** II. **C.** III. **D.** IV.

Câu 18. Bảng biến thiên ở hình bên là một trong bốn hàm số nào sau đây?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

A. $y = -x^3 - 3x^2$. **B.** $y = x^3 - 3x^2 - 1$. **C.** $y = x^3 + 2x^2 + 1$. **D.** $y = -x^3 + 3x + 1$.

Câu 19. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 7x$ với trục hoành là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 20. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2$ và đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 3x$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 21. Số giao điểm của đường cong $y = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$ và đường thẳng $y = 1 - x$ là

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

Câu 22. Cho hàm số $y = (x-3)(x^2+2)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

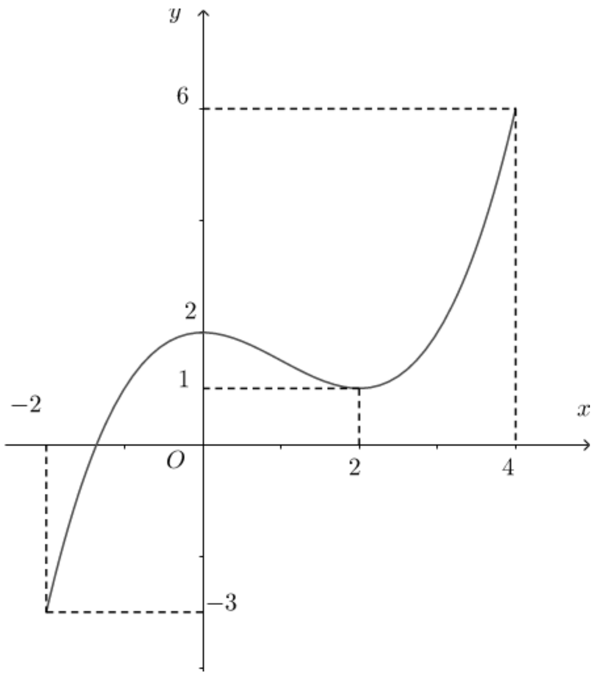
A. (C) cắt trục hoành tại hai điểm.

B. (C) cắt trục hoành tại một điểm.

C. (C) không cắt trục hoành.

D. (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

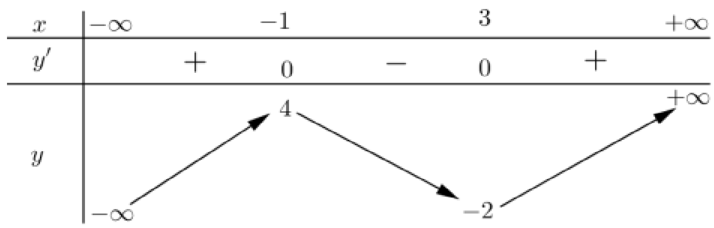
Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)-5=0$ trên đoạn $[-2;4]$ là

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 3

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

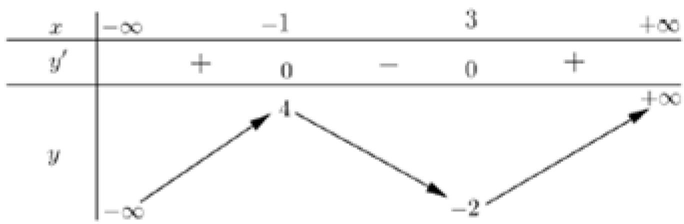


.

Số nghiệm của phương trình $f(x)-2023=0$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

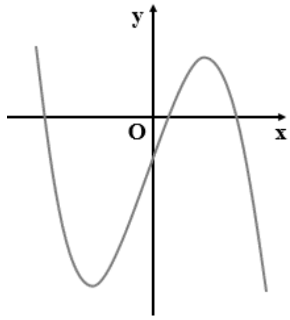
Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-3=0$ là

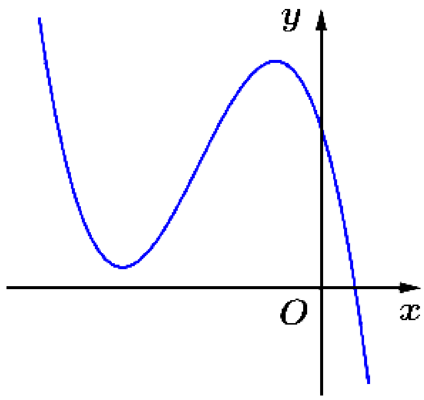
A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 26. Cho hàm số $y = ax^3 + 3x + d \ (a; d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



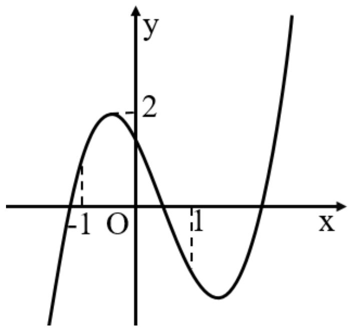
A. $a > 0, d > 0$. **B.** $a < 0, d > 0$. **C.** $a > 0, d < 0$. **D.** $a < 0, d < 0$.

Câu 27. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \left(a, b, c, d \in \mathbb{R}\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?



A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 28. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:

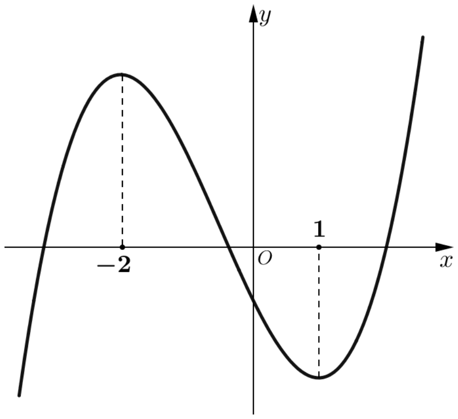


Khẳng định nào là đúng?

A. $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$, $d < 0$. **B.** $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d < 0$.

C. $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$, $d > 0$. **D.** $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$, $d > 0$.

Câu 29. Cho đường cong $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên.

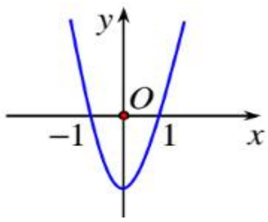


Khẳng định nào sau đây là đúng?

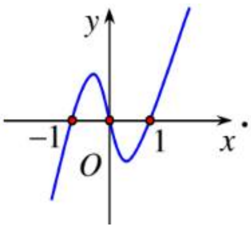
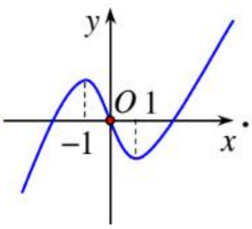
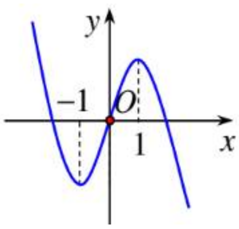
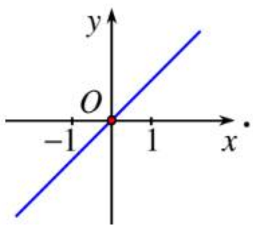
A. $a > 0, b < 0, c < 0, d < 0$. **B.** $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

C. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$. **D.** $a > 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

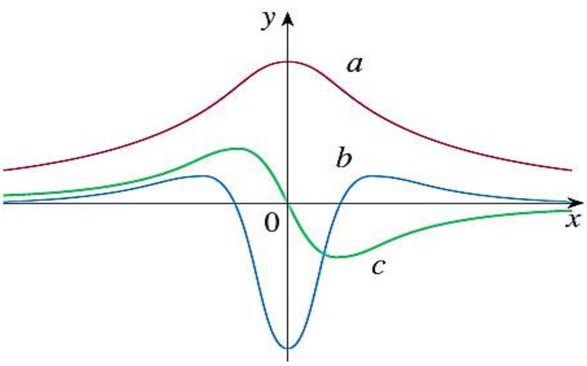
Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, sao cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là parabol có dạng như trong hình bên.



Hỏi đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị nào trong bốn đáp án sau?

A.  . **B.**  . **C.**  . **D.**  .

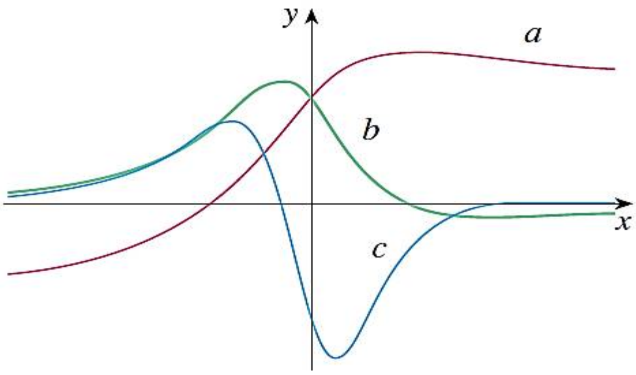
Câu 31. Cho đồ thị của ba hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ và $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. a, b, c. **B.** b, a, c. **C.** a, c, b. **D.** b, c, a.

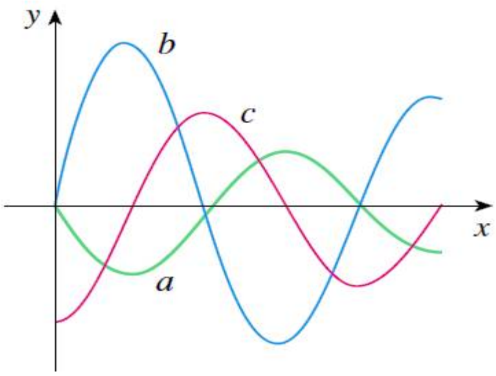
Câu 32. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. a,b,c. **B.** b,a,c. **C.** a,c,b. **D.** b,c,a.

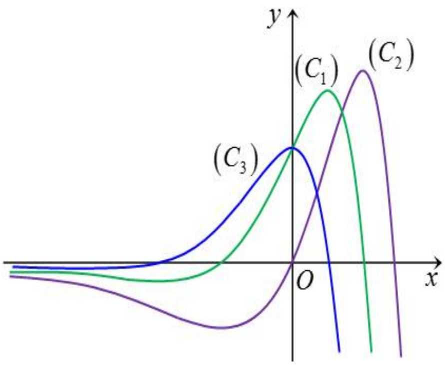
Câu 33. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. a,b,c. **B.** b,a,c. **C.** a,c,b. **D.** b,c,a.

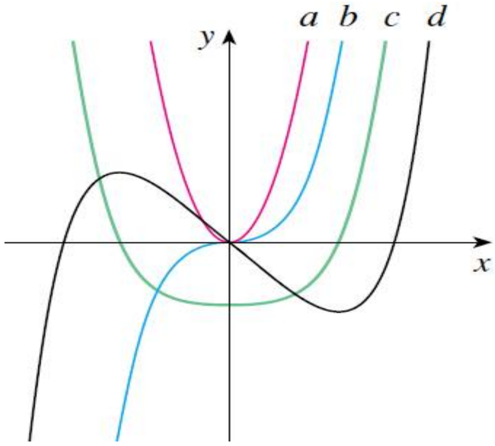
Câu 34. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_3);(C_2);(C_1)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$. **C.** $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_3);(C_2)$.

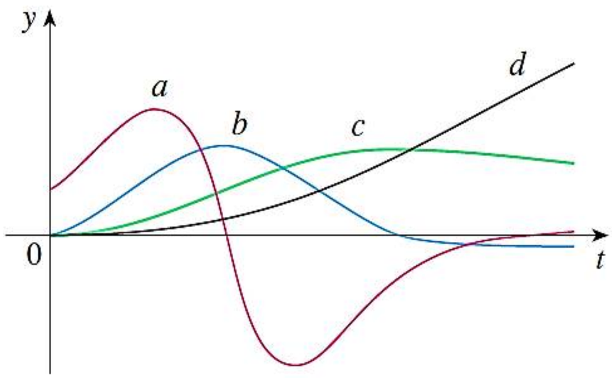
Câu 35. Cho đồ thị của bốn hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$, $y=f'''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ và $y=f'''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. c,d,b,a. **B.** d,c,b,a. **C.** d,c,a,b. **D.** d,b,c,a.

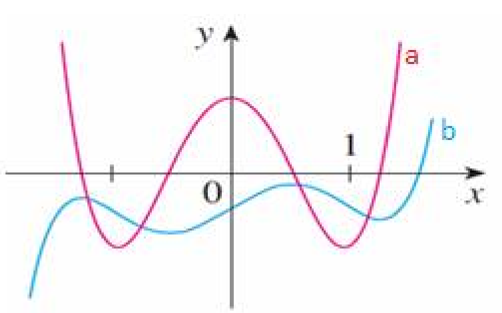
Câu 36. Cho đồ thị của bốn hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$, $y=f'''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$, $y=f'''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. c,d,b,a. **B.** d,c,a,b. **C.** d,c,b,a. **D.** d,b,c,a.

Câu 37. Cho đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ như hình bên dưới.

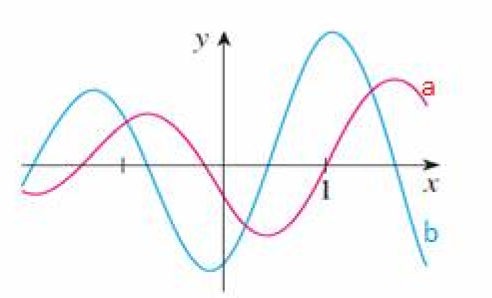


Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $f'(1)<f''(1)$ **B.** $f'(-1)>f''(-1)$

C. $f'(-1)=f''(1)$. **D.** $f''(0)\neq f''(1)$.

Câu 38. Cho đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ như hình bên dưới.



Khẳng định nào sau đây **đúng**?

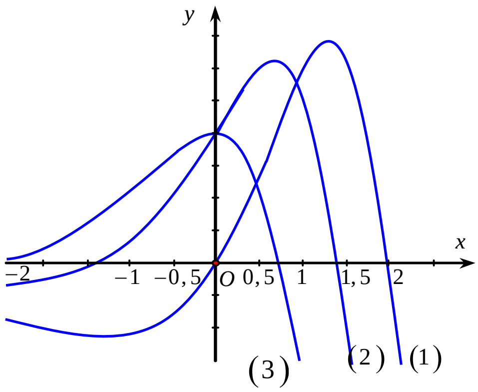
A. $f'(-1)<f''(1)$.

B. $f'(-1)>f''(1)$.

C. $f'(-1)=f''(1)$.

D. $f'(-1)=2f''(1)$.

Câu 39. Cho 3 hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)=f'(x)$, $y=h(x)=g'(x)$ có đồ thị là 3 đường cong trong hình vẽ bên.



Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

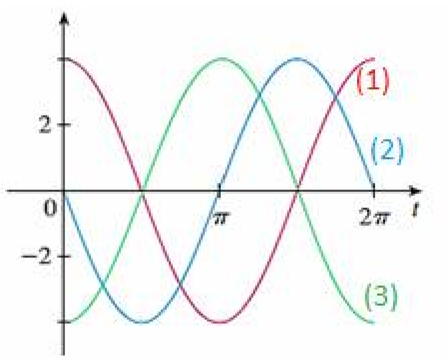
A. $g(-1)>h(-1)>f(-1)$.

B. $h(-1)>g(-1)>f(-1)$.

C. $h(-1)>f(-1)>g(-1)$.

D. $f(-1)>g(-1)>h(-1)$.

Câu 40. Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường $s(t)$, hàm vật tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$ theo thời gian t được mô tả ở hình dưới đây.

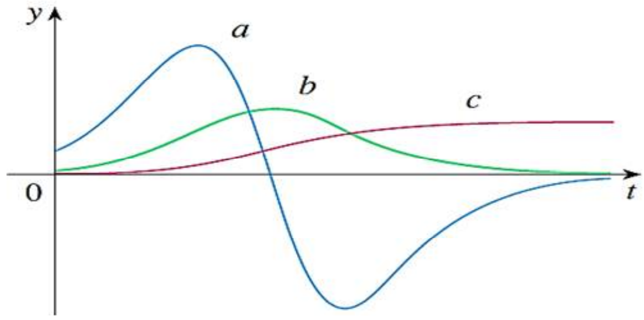


Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $s(\pi) < v(\pi) < a(\pi)$. **B.** $a(\pi) < v(\pi) < s(\pi)$.

C. $s(\pi) < a(\pi) < v(\pi)$. **D.** $v(\pi) < a(\pi) < s(\pi)$.

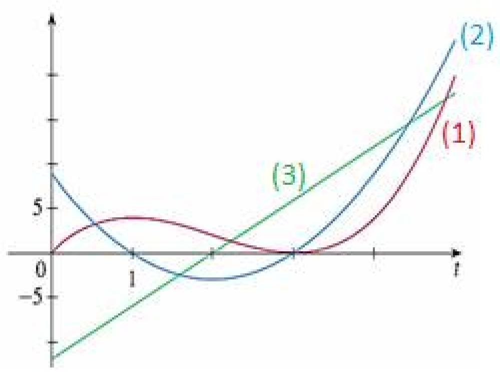
Câu 41. Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường $s(t)$, hàm vật tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$ theo thời gian t được mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số trên theo thứ tự là các đường cong nào?

A. b,c,a. **B.** c,a,b. **C.** a,c,b. **D.** c,b,a.

Câu 42. Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường $s(t)$, hàm vật tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$ theo thời gian t được mô tả ở hình dưới đây.

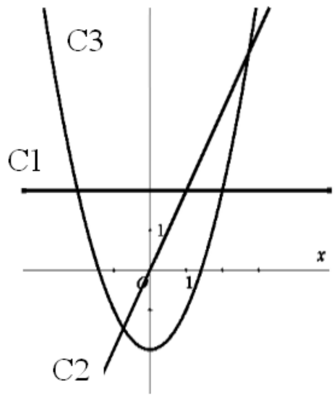


Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $s(4) < v(4) < a(4)$. **B.** $a(4) < v(4) < s(4)$.

C. $s(4) < a(4) < v(4)$. **D.** $v(4) < a(4) < s(4)$.

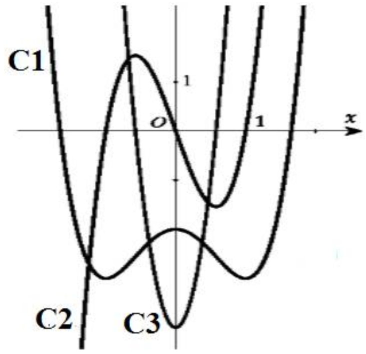
Câu 43. Cho đồ thị của ba hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ và $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_3);(C_2);(C_1)$.
B. $(C_2);(C_1);(C_3)$.
C. $(C_2);(C_3);(C_1)$.
D. $(C_1);(C_3);(C_2)$.

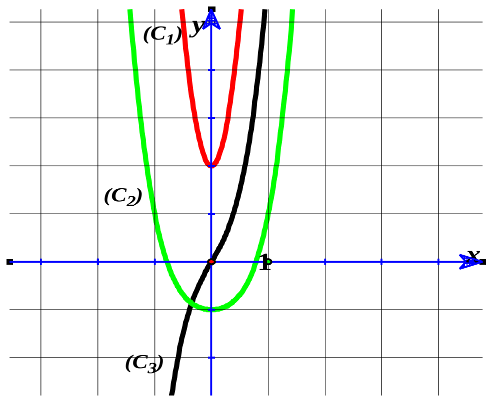
Câu 44. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_3);(C_2);(C_1)$.
B. $(C_2);(C_1);(C_3)$.
C. $(C_2);(C_3);(C_1)$.
D. $(C_1);(C_2);(C_3)$.

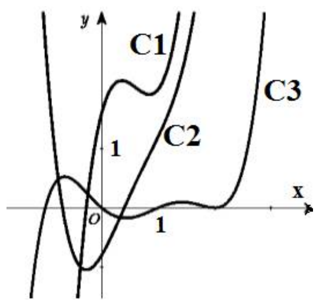
Câu 45. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_3);(C_2);(C_1)$. B. $(C_2);(C_1);(C_3)$. C. $(C_2);(C_3);(C_1)$. D. $(C_1);(C_2);(C_3)$.

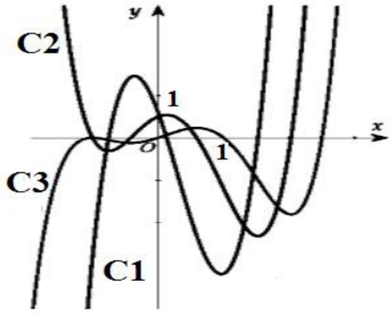
Câu 46. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_1);(C_2);(C_3)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$. **C.** $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_3);(C_2)$.

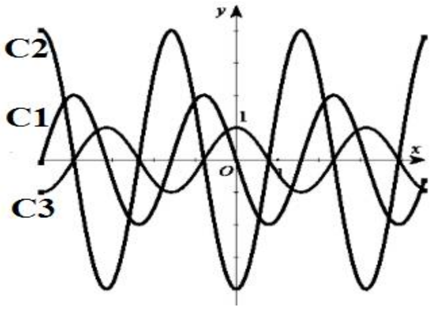
Câu 47. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_2);(C_1);(C_3)$. **B.** $(C_3);(C_2);(C_1)$. **C.** $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_2);(C_3)$.

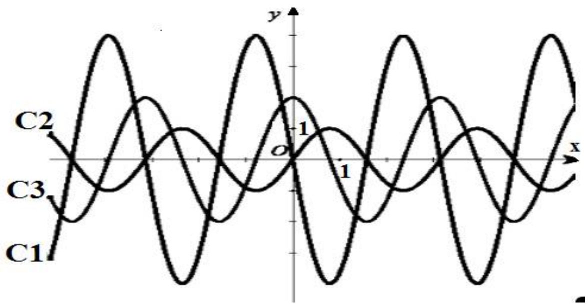
Câu 48. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_1);(C_2);(C_3)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$. **C.** $(C_3);(C_2);(C_1)$. **D.** $(C_3);(C_1);(C_2)$.

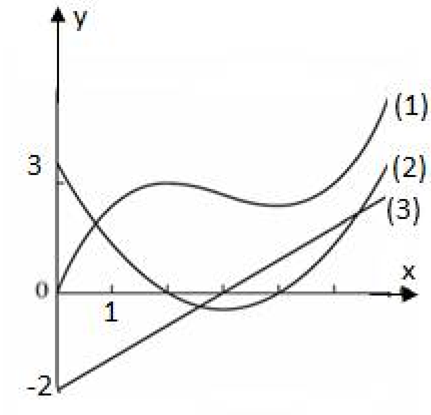
Câu 49. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_1);(C_2);(C_3)$. **B.** $(C_1);(C_3);(C_2)$. **C.** $(C_3);(C_2);(C_1)$. **D.** $(C_2);(C_3);(C_1)$.

Câu 50. Cho 3 hàm số $y=f\left(x\right)$, $y=g\left(x\right)=f'\left(x\right)$, $y=h\left(x\right)=g'\left(x\right)$ có đồ thị là 3 đường cong trong hình vẽ bên.



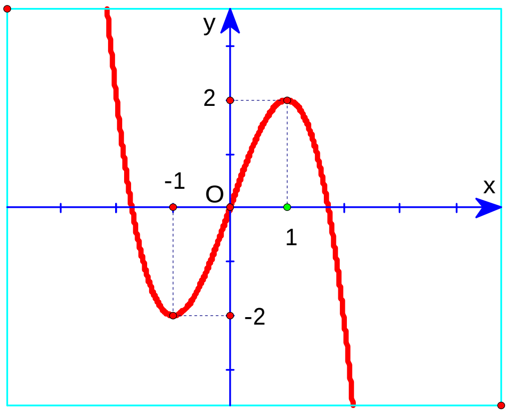
Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $g\left(1\right)>h\left(1\right)>f\left(1\right)$. **B.** $h\left(1\right)>g\left(1\right)>f\left(1\right)$.

C. $h\left(1\right)>f\left(1\right)>g\left(1\right)$. **D.** $f\left(1\right)>g\left(1\right)>h\left(1\right)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 51. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



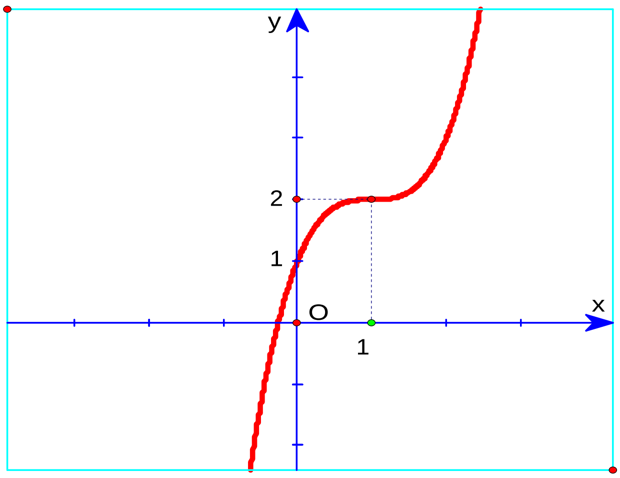
a) Đồ thị hàm số đã cho có điểm hai cực trị.

b) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

c) Điểm $O(0;0)$ là tâm đối xứng đồ thị hàm số $y = f(x)$

d) Đồ thị hàm số đã cho là hàm số $y = -x^3 + 3x$.

Câu 52. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



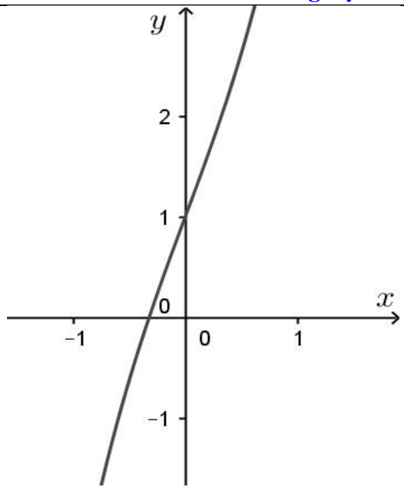
a) Đồ thị hàm số đã cho có một cực trị.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

c) Đồ thị hàm số đã cho không có đường tiệm cận.

d) Đồ thị hàm số đã cho là hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

Câu 53. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



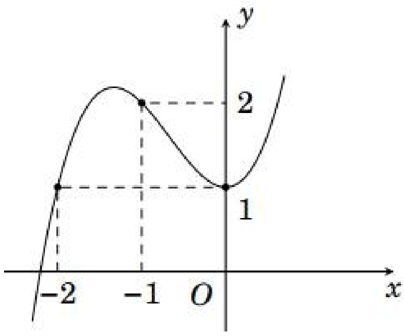
a) Đồ thị hàm số đã cho không có cực trị.

b) Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

c) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm $(0;1)$.

d) Đồ thị hàm số đã cho là hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$.

Câu 54. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



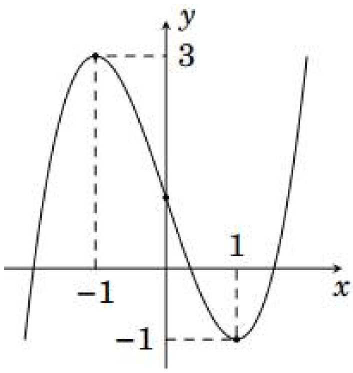
a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$

b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có toạ độ $(0;1)$

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

d) $2a + 3b + c = 9$

Câu 55. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



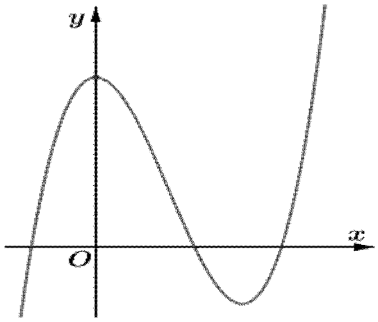
a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có toạ độ $(1;0)$

b) Đường thẳng đi qua điểm $(0;1)$ luôn cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng

c) $a-b+c+d=-1$

d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(3;18)$

Câu 56. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hình vẽ dưới đây và có tập xác định trên $\mathbb{R}$.



a) Đồ thị hàm số đã cho có hai cực trị.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

c) Hàm số đã cho không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

d) Đồ thị hàm số đã cho là hàm số $y=\dfrac{2x^2-1}{x+1}$.

Câu 57. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

a) Đồ thị hàm số đã cho có điểm cực đại là $(0;-1)$.

b) Đồ thị hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng -5

d) Hàm số đã cho là $8a+4b+2c+d=-4$

Câu 58. Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2		$\nearrow$		2	$\searrow$	$-\infty$

a) Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị.

b) Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$.

d) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 59. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

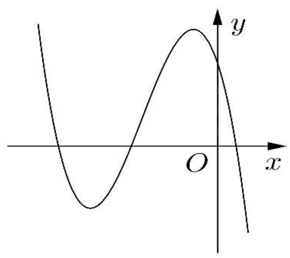
a) Hàm số đạt giá trị lớn nhất là 4

b) Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt

c) Trong bốn hệ số a,b,c,d có đúng hai số âm

d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-4;20)$

Câu 60. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình bên.



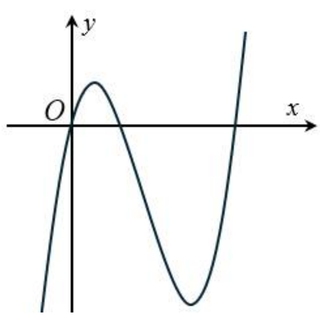
a) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm có tung độ âm.

b) Đồ thị hàm số đã cho có hai cực trị.

c) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm, trong đó có hai điểm có hoành độ âm và một điểm có hoành độ dương

d) $a < 0,\ b < 0,\ c > 0,\ d > 0$

Câu 61. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên.



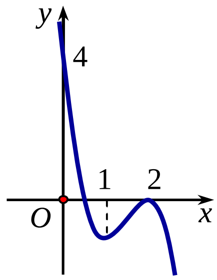
a) Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu.

b) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu là số dương.

c) Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

d) Trong các hệ số a,b,c,d có 2 hệ số dương.

Câu 62. Cho hàm số $y=-2x^3+bx^2+cx+d\ (b,c,d\in\mathbb{R})$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình bên.



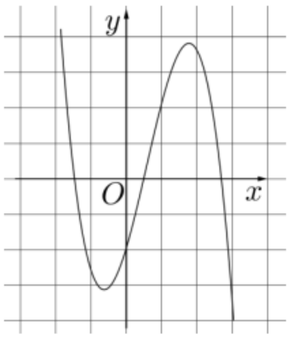
a) $y'=-6x^2+2bx+c$

b) $d=4$

c) $b=4$

d) $c>0$

Câu 63. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình bên.



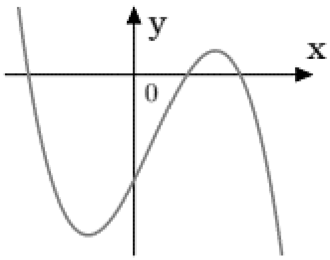
a) $y'=3ax^2+2bx+c=0$

b) $a>0$

c) $d<0$

d) $c>0$

Câu 64. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình bên.



a) $a<0$

b) $d<0$

c) $c>0$

d) $b>0$

Câu 65. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^3-3m^2x+2025$ có đồ thị $\left(C\right)$.

a) Đồ thị hàm số $\left(C\right)$ luôn có hai điểm cực trị.

b) Khi m thay đổi thì đồ thị $\left(C\right)$ luôn có tâm đối xứng cố định.

c) Khi m thay đổ thì đồ thị $\left(C\right)$ luôn cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm.

d) Khi $\left(C\right)$ có 2 cực trị thì đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của $\left(C\right)$ có dạng $y=ax+b$. Đặt $S=a+b$ thì $S\le 2025$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 66. Gọi $I\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số $y=-x^3+x^2-x$. Tính giá trị $T=27x_0+27y_0$.

Trả lời: ………………..

Câu 67. Cho hàm số $y=-x^3+3x+2$ có đồ thị (C). Trên đồ thị hàm số (C) lấy 2 điểm $P(a;b);Q(c;d)$ $(a,b,c,d\in\mathbb{Z})$ sao cho chúng đối xứng nhau qua điểm $M(-1;3)$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c+d$.

Trả lời: ………………..

Câu 68. Cho hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}+x^2+3x-\dfrac{11}{3}$ có đồ thị (C). Trên đồ thị hàm số (C) lấy 2 điểm $M\left(a;\dfrac{b}{c}\right);N\left(d;\dfrac{e}{f}\right)$ ($\dfrac{b}{c},\dfrac{e}{f}$ là các phân số tối giản, $a,d\in\mathbb{Z}$ và $a>d$) sao cho chúng đối xứng nhau qua trục tung Oy. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c+d+e+f$.

Trả lời: ………………..

Câu 69. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $f(x)=-x^3+x+2$ tại điểm $M(-2;8)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 70. Cho hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3-2x^2-3x+1$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến với (C), tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 71. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị (C). Biết tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất là đường thẳng có dạng $y=ax+b$. Tính giá trị $a+b$.

Trả lời: ………………..

Câu 72. Cho hàm số $y=x^3-3x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) song song đường thẳng $y=9x+10$?

Trả lời: ………………..

Câu 73. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-6x+1$ (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y=-\dfrac{1}{18}x+1$?

Trả lời: ………………..

Câu 74. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-3$ có đồ thị (C). Số tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y=\dfrac{1}{9}x+2025$ là bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 75. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2x$ có đồ thị (C). Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm M, N trên (C), mà tại đó tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = -x + 2017$. Khi đó $x_1.x_2$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

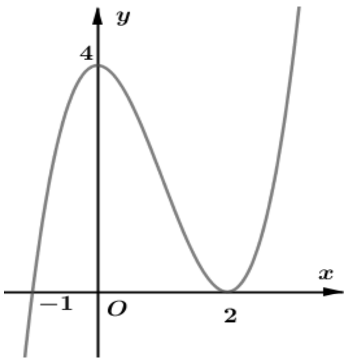
Câu 76. Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0

Trả lời: ………………..

Câu 77. Biết rằng đường thẳng $y = x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + x + 4$ tại điểm duy nhất, kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0.

Trả lời: ………………..

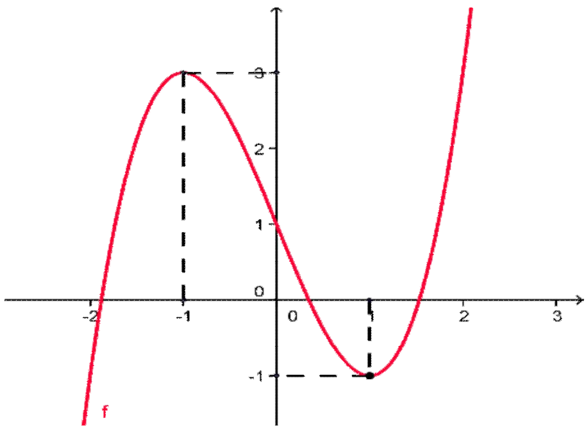
Câu 78. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực của phương trình $4f(x) - 7 = 0$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 79. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục tung tại tung độ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 80. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)+3=0$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 81. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $(a,b,c,d\in\mathbb{R},\ a\neq 0)$, có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=4$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

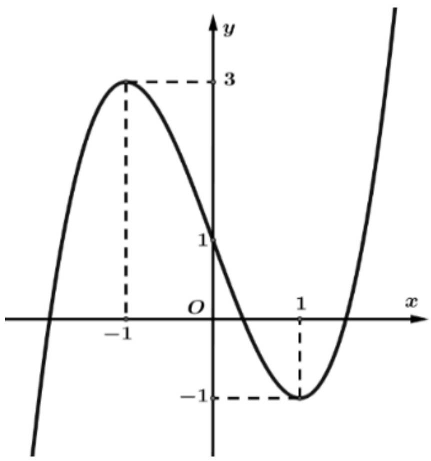
Câu 82. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số $a,\ b,\ c,\ d$ **?**

Trả lời: ………………..

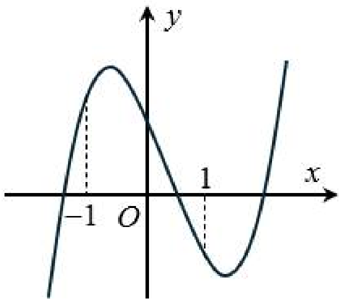
Câu 83. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên.



Có bao nhiêu số âm trong các số $a,\ b,\ c,\ d$?

Trả lời: ………………..

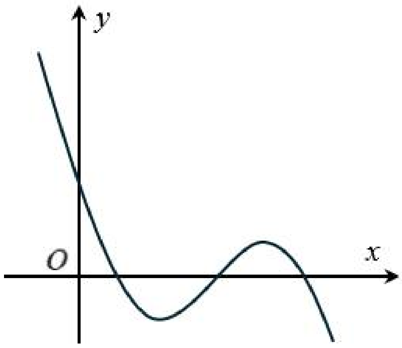
Câu 84. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu số âm trong các số $a,\ b,\ c,\ d$?

Trả lời: ………………..

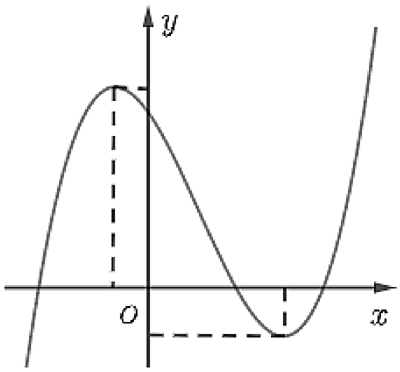
Câu 85. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên.



Có bao nhiêu số dương trong các số $a,\ b,\ c,\ d$?

Trả lời: ………………..

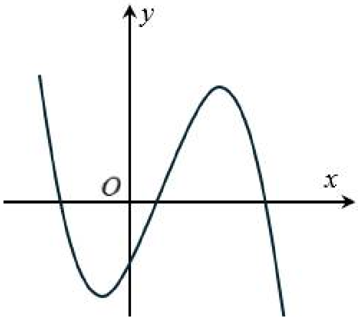
Câu 86. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu số dương trong ba số $b,\ c,\ d$?

Trả lời: ………………..

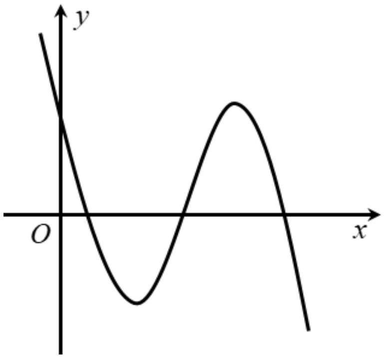
Câu 87. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu số dương trong ba số $b,\ c,\ d$?

Trả lời: ………………..

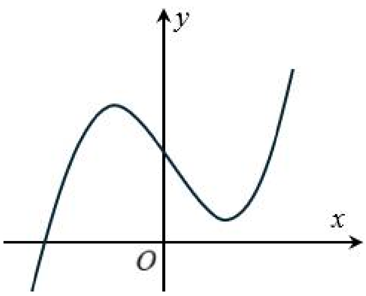
Câu 88. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu số dương trong ba số $b,\ c,\ d$?

Trả lời: ………………..

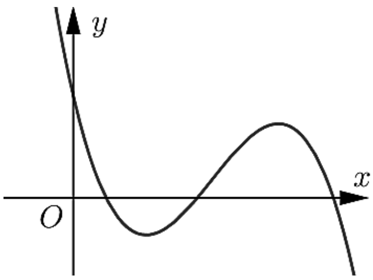
Câu 89. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số âm trong ba số $b,\ c,\ d$?

Trả lời: ………………..

Câu 90. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.

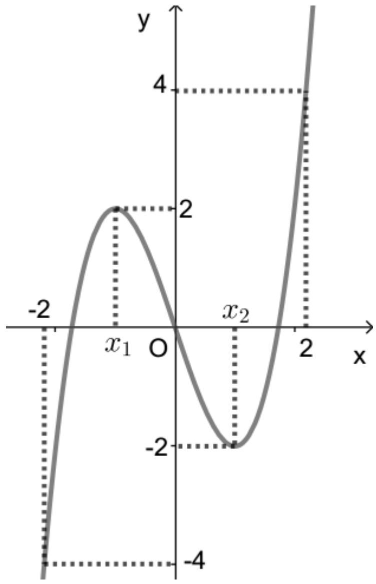


Có bao nhiêu số âm trong ba số $b,\ c,\ d$?

Trả lời: ………………..

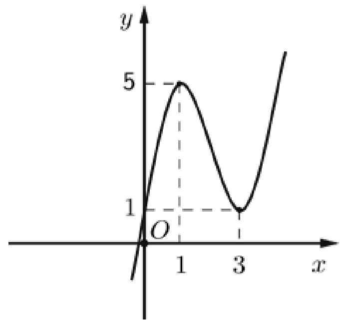
PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 91. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên.



Số nghiệm của phương trình $|f(x)| - 1 = 0$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng bao nhiêu?

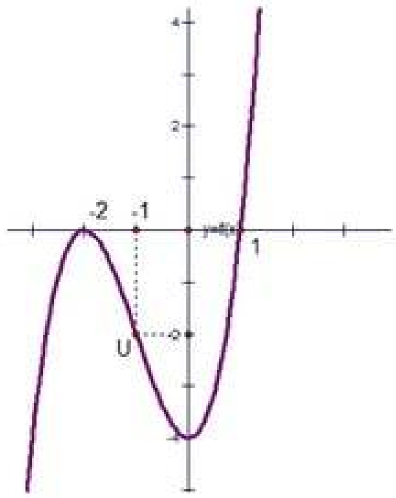
Câu 92. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị (C) như hình vẽ ở bên dưới.



a) Tìm tâm đối xứng của đồ thị (C).

b) Tính $T = a + b + c + d$.

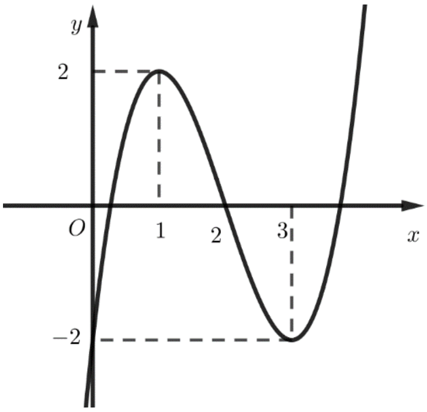
Câu 93. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a,b,c,d \in R)$ có đồ thị (C) trong hình dưới đây.



a) Tìm tâm đối xứng của đồ thị (C).

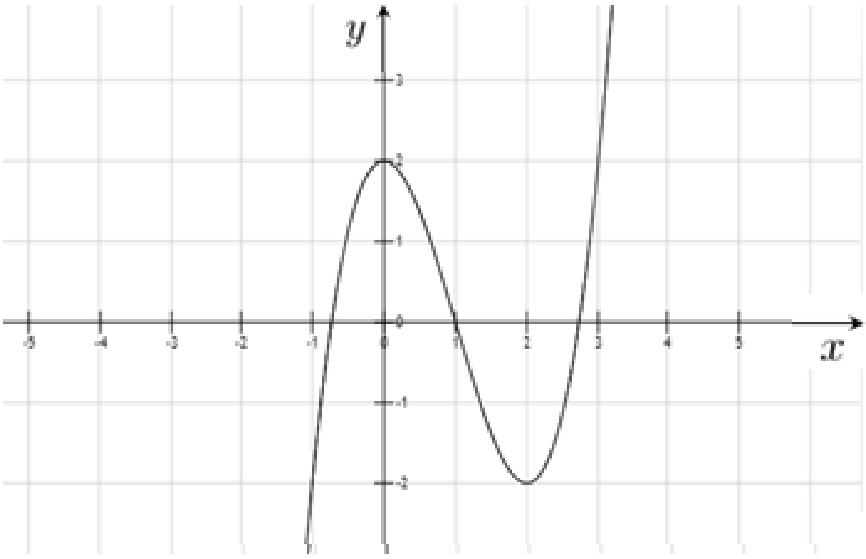
b) Tính tổng $S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

Câu 94. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a,b,c,d \in R)$ có đồ thị (C) như hình vẽ.



Số lớn nhất trong các số a, b, c, d bằng bao nhiêu?

Câu 95. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



Tính $S = a + b$.

Câu 96. Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C).

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C).

b) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $-x^3 - 3x^2 + 1 - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt?

Câu 97. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt?

Câu 98. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2m + 1$ và trục Ox có đúng hai điểm chung phân biệt. Tính tổng T của các phần tử thuộc tập S

Câu 99. Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt. Tổng tất cả các phần tử của T bằng bao nhiêu?

Câu 100. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để đường thẳng $y = 3x + m - 2$ cắt đồ thị $y = (x-1)^3$ tại ba điểm phân biệt ?

Câu 101. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = 2x + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt?

Câu 102. Với m là một tham số thực thì đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ và đường thẳng $y = m$ có nhiều nhất bao nhiêu giao điểm?

Câu 103. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m^2 + 5m = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt?

Câu 104. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $y = (x-2)(x^2 + mx + m^2 - 3)$ có ba nghiệm thực phân biệt?

Câu 105. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị (C). Gọi d là đường thẳng qua $I(1;2)$ với hệ số góc k. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của k để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt I, A, B sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB ?

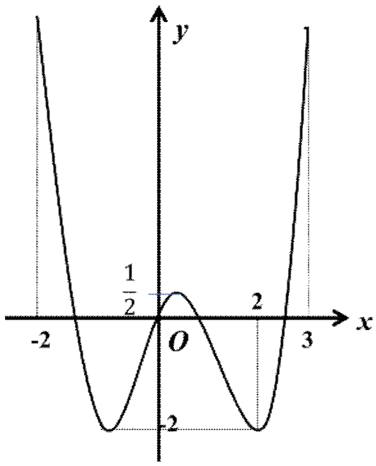
Câu 106. Cho đồ thị $(C_m): y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$. Tổng các giá trị của tham số m để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$ bằng bao nhiêu?

Câu 107. Cho hàm số $y = x^3 - (m+2)x^2 - (2m+13)x - m - 2$ có đồ thị (C_m); đường thẳng $d: y = mx + m + 8$ và điểm $I(1;4)$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m biết rằng đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A, B, C với A có hoành độ bằng -2 và tam giác IBC cân tại I.

Câu 108. Gọi đường thẳng d là đường thẳng đi qua $A(2;0)$ có hệ số góc $m(m>0)$ cắt đồ thị $(C): y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C. Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C lên trục tung. Biết rằng hình thang $BB'C'C$ có diện tích bằng 8. Hãy tìm tổng các giá trị của tham số m.

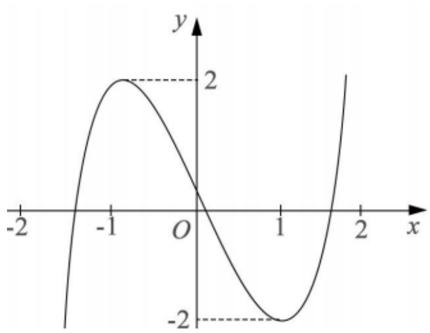
Câu 109. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 6(m+1)x^2 + 3(2m+1)x + 2$. Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn -1. Biết rằng $S = \left(-\frac{a}{b}; +\infty\right)$; trong đó a, b là các số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ là tối giản. Giá trị biểu thức $T = a + b$ bằng bao nhiêu?

Câu 110. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



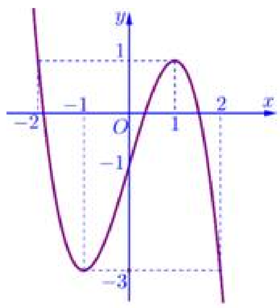
Số nghiệm của phương trình $f\left(x^3-3x\right)=-1$ thuộc đoạn $\left[-1;2\right]$ bằng bao nhiêu?

Câu 111. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm.

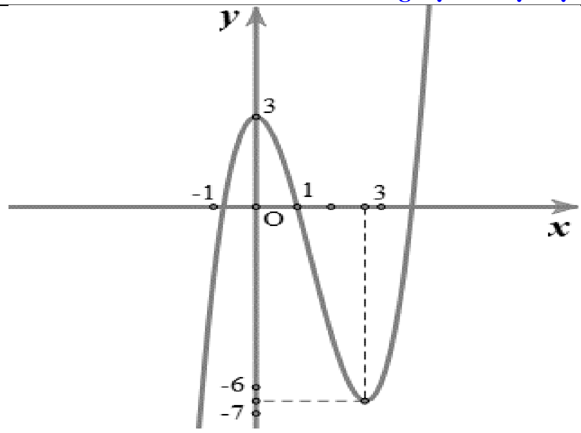
Câu 112. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ bên.



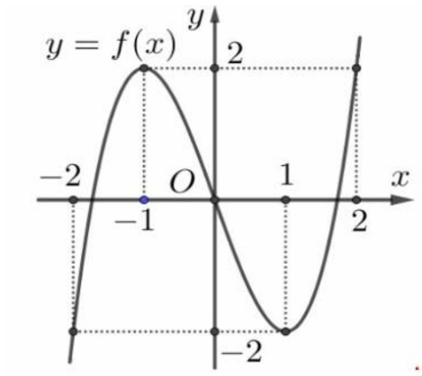
Phương trình $f\left(2-f\left(x\right)\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm phân biệt.

Câu 113. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới.

Đặt $g\left(x\right)=f\left[f\left(x\right)\right]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'\left(x\right)=0$.

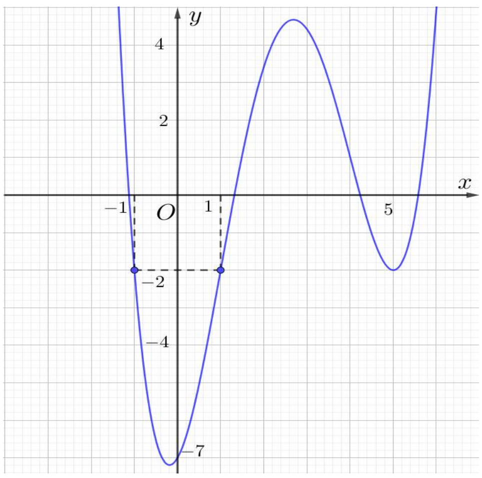


Câu 114. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f(x)\right) = f(x)$.

Câu 115. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$ của phương trình $f\left(\sin x\right) = -4$.

Câu 116. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $f\left(1-3x\right) = 6$ có bao nhiêu nghiệm âm?

Câu 117. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$			0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	5	$\nearrow$	13	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình $f(\cos x) = \dfrac{13}{3}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$?

Câu 118. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[-2\pi;2\pi]$ của phương trình $f(\sin x) - 1 = 0$.

Câu 119. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$ của phương trình $3f(2\sin x) + 1 = 0$.

Câu 120. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$ của phương trình $3f(\sin 2x) - 5 = 0$.

BÀI 4
KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Sơ đồ bài toán khảo sát

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2. Xét sự biến thiên của hàm số.

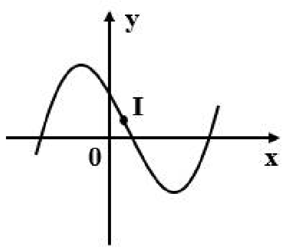
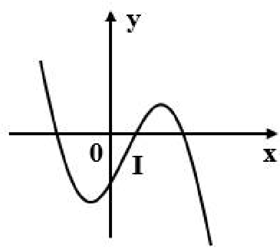
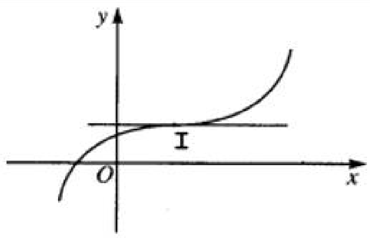
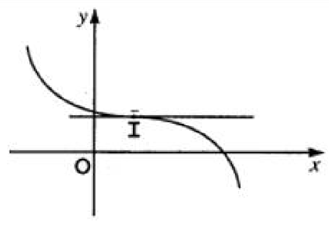
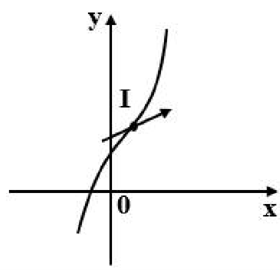
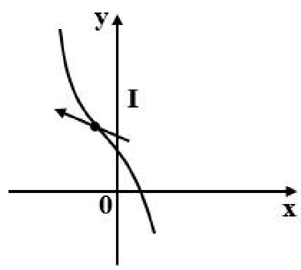
- Tính đạo hàm y', xét dấu y' và xác định khoảng đơn điệu, cực trị (nếu có) của hàm số.
- Tính giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực của hàm số và tìm tiệm cận (nếu có) của hàm số .
- Lập bảng biến thiên của hàm số.

Bước 3. Vẽ đồ thị của hàm số.

- Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
- Xác định các điểm cực trị (nếu có), giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có và dễ tìm).
- Vẽ đồ thị của hàm số.

2. Khảo sát hàm số bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$.

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.
- Đồ thị nhận điểm $I(x_0; y_0)$ làm tâm đối xứng. Với x_0 là nghiệm của $y'' = 0$ và $y_0 = y(x_0)$.
- Các dạng đồ thị:

	$a > 0$	$a < 0$
$y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac > 0$		
$y' = 0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac = 0$		
$y' = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac < 0$		

3. Khảo sát hàm số phân thức: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$.

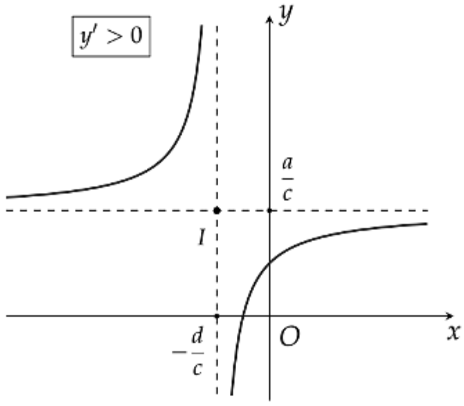
• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

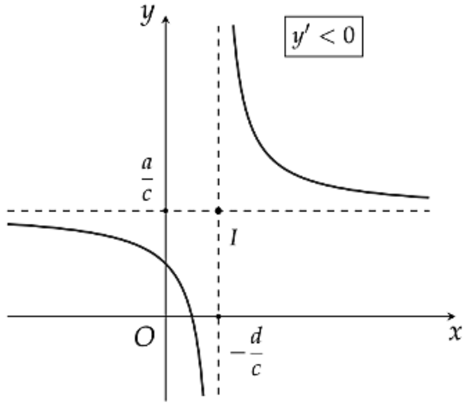
• Đạo hàm: $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

• Phương trình các đường tiệm cận: Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$ và đường tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$.

• Đồ thị có tâm đối xứng: $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$

• Các dạng đồ thị:





4. Khảo sát hàm số phân thức: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0,\ m\neq 0)$.

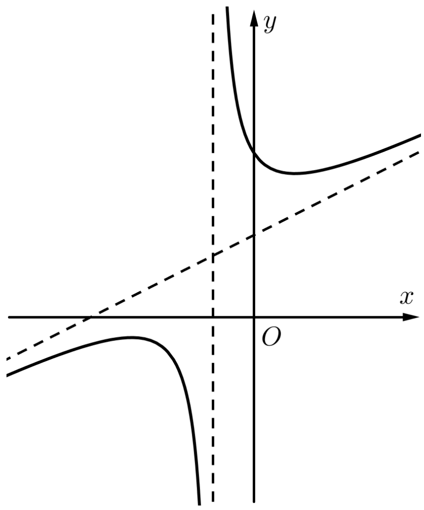
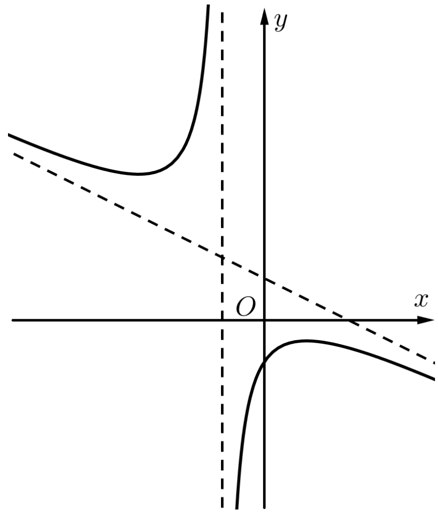
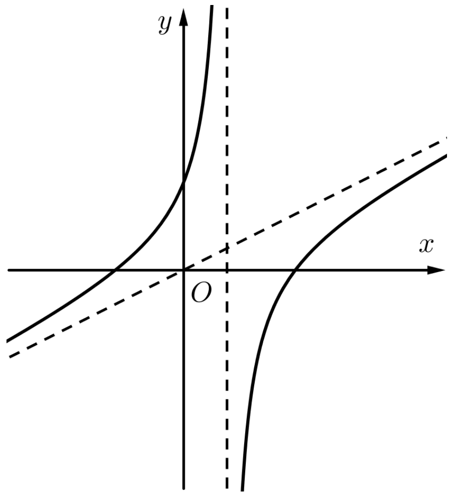
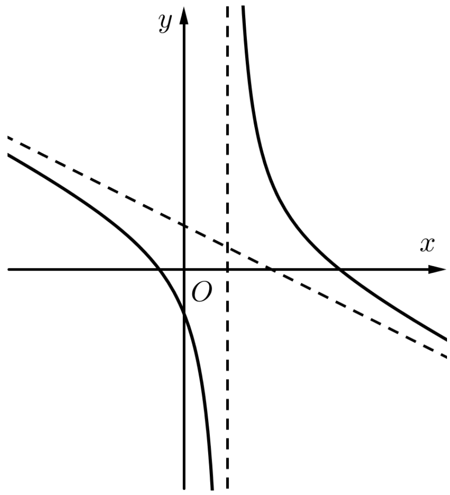
• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{n}{m}\right\}$.

• Đạo hàm: $y'=\dfrac{2amx^2+2anx+bn-cm}{(mx+n)^2}$.

• Phương trình các đường tiệm cận: Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$ và đường tiệm cận xiên $y=\dfrac{a}{m}x+\dfrac{b-am}{m^2}$.

• Đồ thị có tâm đối xứng I là giao điểm hai đường tiệm cận và nhận đường phân giác tạo bởi hai đường tiệm cận làm trục đối xứng.

• Các dạng đồ thị:

	$am > 0$	$am < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm		

CHỦ ĐỀ 1
KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN, VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$
VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$.

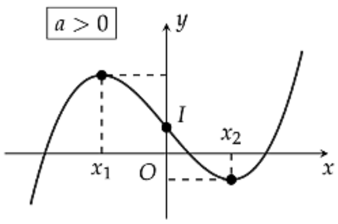
- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.
- Tìm các giới hạn tại vô cực của đồ thị hàm số
- Lập bảng biến thiên, xác định chiều biến thiên và các điểm cực trị của hàm số
- Cho thêm điểm và vẽ đồ thị hàm số dựa vào bảng biến thiên

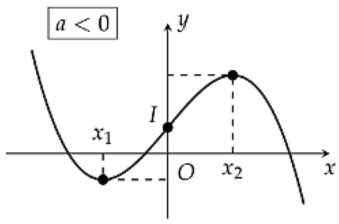
Chú ý: Đồ thị nhận điểm $I(x_0; y_0)$ làm tâm đối xứng. Với x_0 là nghiệm của $y'' = 0$ và $y_0 = y(x_0)$.

Hoặc tọa độ tâm đối xứng $I(x_0; y_0)$ của đồ thị chính là tọa độ trung điểm của đoạn nối hai điểm cực trị.

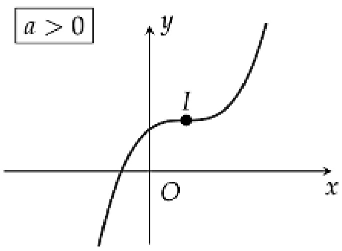
2. Các dạng đồ thị của hàm số bậc ba

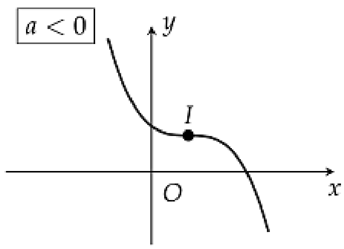
• **Trường hợp 1:** Nếu $y' = 0$ có $\Delta = b^2 - 3ac > 0$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1 và x_2. Khi đó hàm số có hai điểm cực trị là $x = x_1$ và $x = x_2$



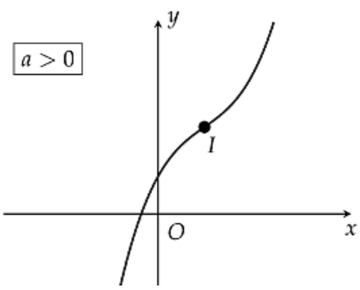


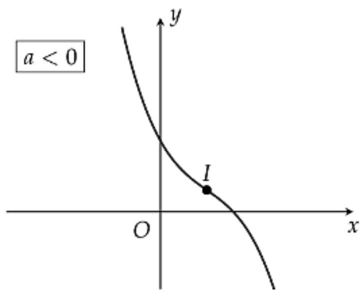
• **Trường hợp 2:** Nếu $y' = 0$ có $\Delta = b^2 - 3ac = 0$ thì $y' = 0$ có nghiệm kép $x = x_0$. Khi đó hàm số không có cực trị





• **Trường hợp 3:** Nếu $y' = 0$ có $\Delta = b^2 - 3ac < 0$ thì $y' = 0$ vô nghiệm. Khi đó hàm số không có cực trị





PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1
KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC 3
$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$

Bài 1. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y = 2x^3 - 6x$ b) $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ c) $y = -x^3 + 2$ d) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Lời giải

a) $y = 2x^3 - 6x$.

• Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

• Sự biến thiên

+ Chiều biến thiên

Ta có: $y' = 6x^2 - 6 = 6\left(x^2 - 1\right)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 6\left(x^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1$.

Trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$ ta có $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên các khoảng đó.

Trên khoảng $(-1; 1)$ ta có $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng đó.

+ Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và $y_{CĐ} = f(-1) = 4$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{CT} = f(1) = -4$

+ Các giới hạn:

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \left(2x^3 - 6x\right) = \lim_{x \to -\infty} x^3 \left(2 - \frac{6}{x^2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \left(2x^3 - 6x\right) = \lim_{x \to +\infty} x^3 \left(2 - \frac{6}{x^2}\right) = +\infty$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

• Đồ thị:

+ Giao điểm của đồ thị với trục tung tại điểm $(0;0)$.

+ Giao điểm của đồ thị với trục hoành:

$2x^3-6x=0$

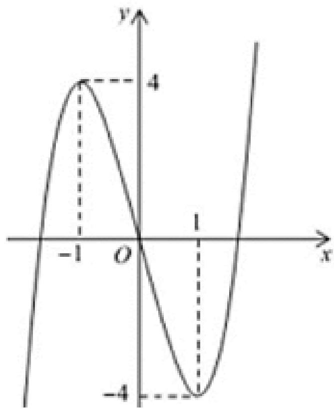
$\Leftrightarrow 2x\left(x^2-3\right)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=-\sqrt{3}$ hoặc $x=\sqrt{3}$.

Vậy đồ thị hàm số giao với trục hoành tại ba điểm $(0;0),\left(-\sqrt{3};0\right),\left(\sqrt{3};0\right)$.

+ Đồ thị hàm số có điểm cực đại $(-1;4)$ và điểm cực tiểu $(1;-4)$.

+ Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $O(0;0)$.



b) $y=-x^3+3x^2-1$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• Sự biến thiên

+ Chiều biến thiên

Ta có: $y'=-3x^2+6x=-3x(x-2)$.

$y'=0 \Leftrightarrow -3x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2$.

Trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$ ta có $y'<0$ nên hàm số nghịch biến trên các khoảng đó.

Trên khoảng $(0;2)$ ta có $y'>0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng đó.

+ Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x=2$ và $y_{CĐ}=f(2)=3$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ và $y_{CT}=f(0)=-1$

+ Các giới hạn:

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\left(-x^3+3x^2-1\right)=\lim_{x\to-\infty} x^3\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\left(-x^3+3x^2-1\right)=\lim_{x\to+\infty} x^3\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$$

+ Bảng biến thiên:

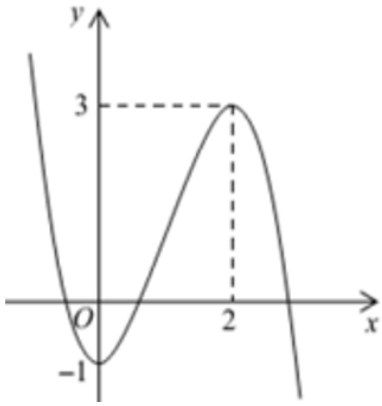
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

• Đồ thị:

+ Giao điểm của đồ thị với trục tung tại điểm $(-1;0)$.

+ Đồ thị hàm số có điểm cực đại $(2;3)$ và điểm cực tiểu $(0;-1)$.

+ Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $I(1;1)$.



c) $y=-x^3+2$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• Sự biến thiên

+ Chiều biến thiên

Ta có: $y'=-3x^2\le 0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$ ta có $y'<0$ nên hàm số nghịch biến trên các khoảng đó.

+ Cực trị: Hàm số không có cực trị.

+ Các giới hạn:

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\left(-x^3+2\right)=\lim_{x\to-\infty} x^3\left(-1+\frac{2}{x^2}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\left(-x^3+2\right)=\lim_{x\to+\infty} x^3\left(-1+\frac{2}{x^2}\right)=-\infty$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

• Đồ thị:

+ Giao điểm của đồ thị với trục tung tại điểm $(0;2)$.

+ Giao điểm của đồ thị với trục hoành:

$-x^3+2=0$

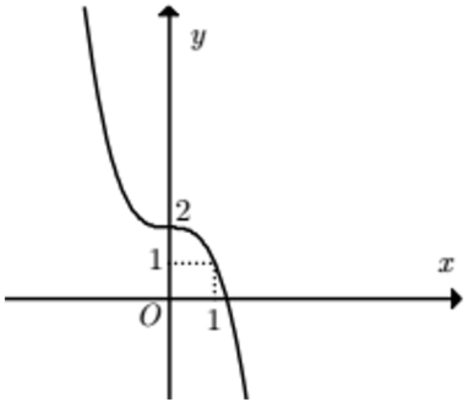
$\Leftrightarrow x^3=2$

$\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2}$

Vậy đồ thị hàm số giao với trục hoành tại điểm $\left(\sqrt[3]{2};0\right)$.

+ Chọn $x=1 \Rightarrow y=1$ ta được điểm $(1;1)$

+ Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $I(0;2)$.



d) $y=x^3-2x^2+2x-1$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• Sự biến thiên

+ Chiều biến thiên

Ta có: $y'=3x^2-4x+2>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

Do $y'>0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

+ Cực trị: Hàm số không có cực trị.

+ Các giới hạn:

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-2x^2+2x-1\right)=\lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-2x^2+2x-1\right)=\lim_{x\to+\infty} x^3\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

• Đồ thị:

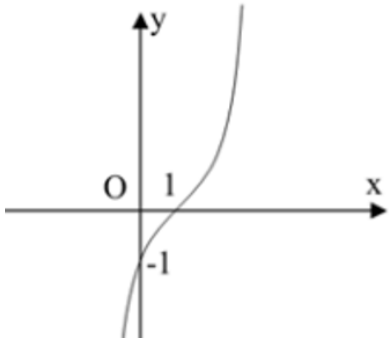
+ Giao điểm của đồ thị với trục tung tại điểm $(0;-1)$.

+ Giao điểm của đồ thị với trục hoành:

$x^3-2x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Vậy đồ thị hàm số giao với trục hoành tại điểm $(1;0)$.

+ Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $I\left(\frac{2}{3};-\frac{7}{27}\right)$.



Bài 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y=x^3-3x^2+1$ b) $y=-2x^3-3x^2+1$ c) $y=x^3+3x^2+3x+2$ d) $y=x^3-3x^2+4x-2$

Lời giải

a) $y=x^3-3x^2+1$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Sự biến thiên: $y'=3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

$\lim\limits_{x\to-\infty}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}=+\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

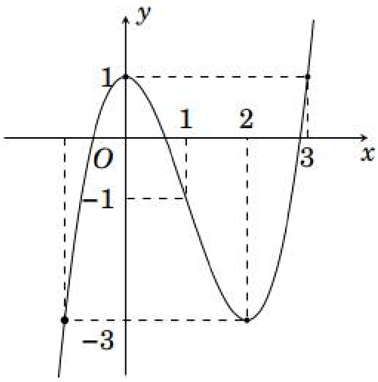
Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ và đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$

và $(2;+\infty)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=0; y_{CD}=1$ và đạt cực tiểu tại $x=2; y_{CT}=-3$.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(2;-3);(-1;-3);(3;1)$

Đồ thị nhận điểm $I(1;-1)$ làm tâm đối xứng



b) $y=-2x^3-3x^2+1$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Sự biến thiên: $y'=-6x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}=-\infty; \lim\limits_{x\to+\infty}=+\infty$

Bảng biến thiên:

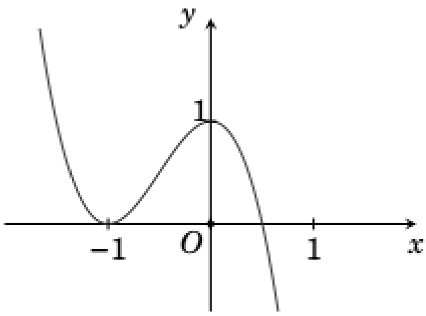
x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;+\infty)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=0; y_{CD}=1$ và đạt cực tiểu tại $x=-1; y_{CT}=0$.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(1;-4);(-2;5)$

Đồ thị nhận điểm $I\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ làm tâm đối xứng



c) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

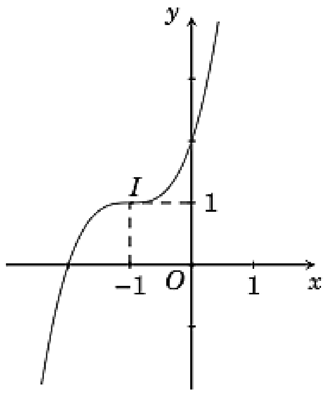
Sự biến thiên: $y' = 3x^2 + 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty; \lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và hàm số không có cực trị

Đồ thị nhận điểm $I(-1;1)$ làm tâm đối xứng



d) $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Sự biến thiên: $y' = 3x^2 - 6x + 4 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty; \lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$

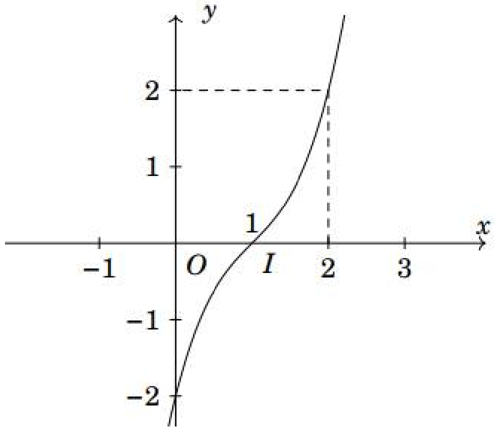
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và hàm số không có cực trị

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(2;2);(0;-2);(1;0)$

Đồ thị nhận điểm $I(1;0)$ làm tâm đối xứng



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y=-x^3+3x+1$

b) $y=x^3-6x^2+1$

c) $y=x^3-3x^2+3x-1$

d) $y=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-4x$

e) $y=-x^3+2x^2-2x+1$

f) $y=x^3-3x^2+4x$

Bài 4. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y=x^3+x+1$

b) $y=4x^3-12x^2+9x-1$

c) $y=-x^3-3x^2+1$

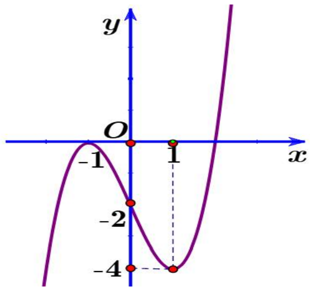
d) $y=-x^3+3x-2$

e) $y=(x-1)^2(4-x)$

f) $y=x(x+3)^2$

DẠNG 2
XÁC ĐỊNH HỆ SỐ CỦA HÀM SỐ

Bài 1. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hãy xác định hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số, ta thấy đây là đồ thị hàm số đa thức bậc 3 : $y=ax^3+bx^2+cx+d$

+ Trên $(1;+\infty)$, đồ thị có hướng đi lên từ trái sáng phải , do đó $a>0$

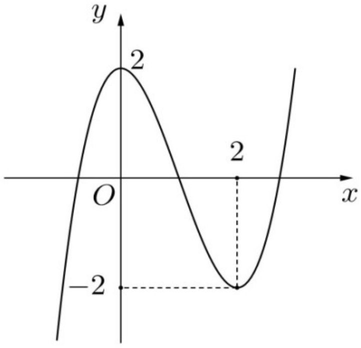
+ Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0;-2)$, do đó $d=-2$

+ Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(-1;0)$; $(1;4)$, do đó phương trình $y'=0\Leftrightarrow 3ax^2+2bx+c=0$ phải có hai nghiệm là $x=1; x=-1$ và $y(1)=-4; y(-1)=0$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}3a+2b+c=0\\3a-2b+c=0\\a+b+c+d=-4\\-a+b-c+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\3a+c=0\\d=-2\\a+c=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\\c=-3\\d=-2\end{cases}$

Vậy hàm số cần tìm là : $y=x^3-3x-2$

Bài 2. Cho hàm số $y=x^3+bx^2+cx+d\ (b,c,d\in\mathbb{R})$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hãy xác định hàm số $y=x^3+bx^2+cx+d$.

Lời giải

Ta có $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$.

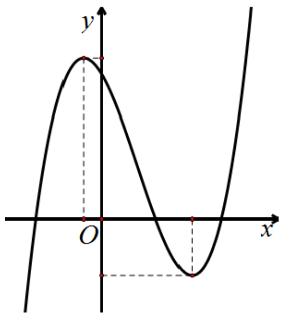
$f'(x)=3x^2+2bx+c$.

Do đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $M(0;2),N(2;-2)$ nên ta có hệ sau

$$\begin{cases} f'(0)=0 \\ f(0)=2 \\ f'(2)=0 \\ f(2)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ d=2 \\ 12+4b+c=0 \\ 8+4b+2c+d=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ d=2 \\ b=-3 \end{cases}.$$

Suy ra $y=x^3-3x^2+2$.

Bài 3. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ sau



Hãy cho biết các hệ số a,b,c,d âm hay dương?

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty \Rightarrow a>0$.

Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm có tọa độ $(0;d)$ suy ra $d>0$.

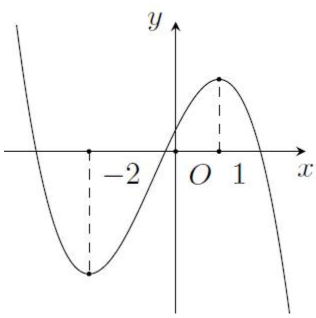
Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$.

Gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số.

Dựa vào đồ thị ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}>0 \\ x_1x_2=\dfrac{c}{3a}<0 \end{cases}$, mà $a>0$, suy ra $b<0$, $c<0$.

Vậy $a>0$, $b<0$, $c<0$, $d>0$.

Bài 4. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



Hãy cho biết các hệ số a,b,c,d âm hay dương?

Lời giải

Dựa vào đồ thị, ta có các nhận xét.

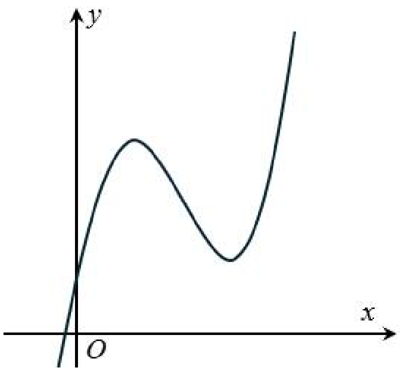
Dựa vào dáng điệu đồ thị, ta suy ra $a<0$.

Đồ thị cắt trục tung lại điểm có tung độ dương suy ra $d>0$.

Hàm số có các điểm cực trị $x=1$ và $x=-2$ nên phương trình $y'=3ax^2+2bx+c=0$ có hai nghiệm là $x=1$ và $x=-2$. Ta có $\frac{-2b}{3a}=-1$ và $\frac{c}{3a}=-2$. Do đó $b<0$ và $c>0$.

Như vậy $a<0$, $b<0$, $c>0$ và $d>0$.

Bài 5. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hãy cho biết các hệ số a,b,c,d âm hay dương?

Lời giải

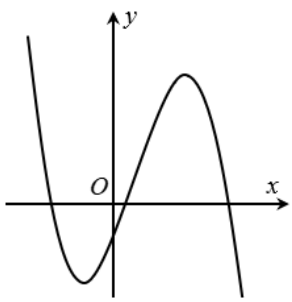
Dựa vào dạng đồ thị hàm bậc ba ta có $a>0$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $M\left(0;1\right)$ suy ra $d=1>0$.

Hàm số có hai điểm cực trị dương suy ra $\begin{cases}-\frac{b}{a}>0\\ \frac{c}{a}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b<0\\ c>0.\end{cases}$.

Vậy $a>0,b<0,c>0,d>0$.

Bài 6. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu số âm trong ba số $b,\ c,\ d$?

Lời giải

Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$.

Nhìn vào đồ thị ta có: Phần bên phải của đồ thị đi xuống nên $a<0$.

Giao điểm với trục tung nằm phía dưới điểm O nên $d < 0$.

Hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục tung nên suy ra phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow c > 0$. Điểm uốn lệch phải so với trục tung nên $-\dfrac{b}{3a} > 0 \Leftrightarrow b > 0$.

Vậy suy ra $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d < 0$.

DẠNG 3
BÀI TOÁN LIÊN QUAN HÀM SỐ BẬC 3

Bài 1. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ và trục hoành là bao nhiêu?

Lời giải

Tập xác định: $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$y'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$y(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Bài 2. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

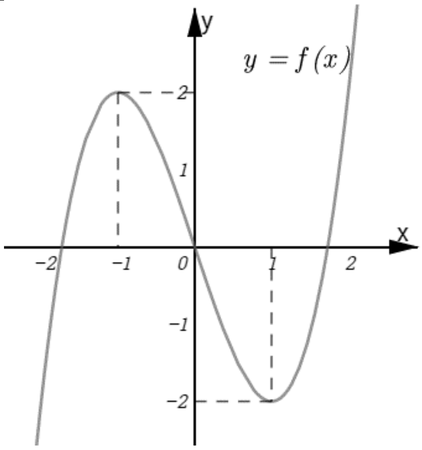
Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với đường thẳng $y = 1$.

Lời giải

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$y=1$ $-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm.

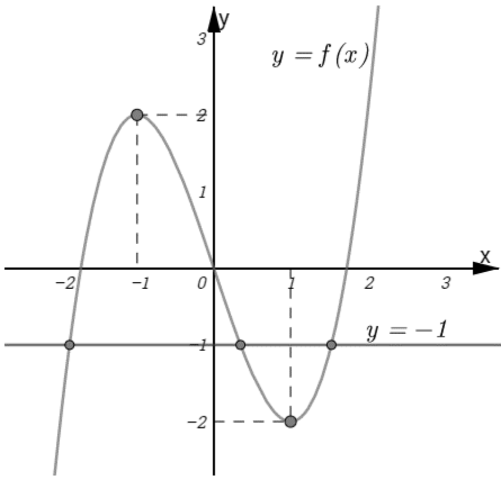
Bài 3. Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Tìm số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right)=-1$.

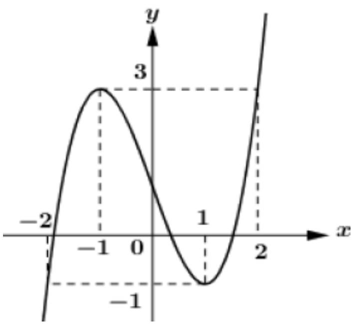
Lời giải

Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right)=-1$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $y=-1$.



Từ hình vẽ suy ra 3 nghiệm.

Bài 4. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\left(a\neq 0\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=2025$

Lời giải

Dựa vào đồ thị, ta thấy đường thẳng $y=2025$ cắt $y=f\left(x\right)$ tại 1 điểm phân biệt nên phương trình $f\left(x\right)=2025$ có 1 nghiệm phân biệt.

Bài 5. Lập phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C): y=x^3+3x^2-8x+1$, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $\Delta: y=x-2025$?

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=3x^2+6x-8$.

Tiếp tuyến cần tìm song song với đường thẳng $y=x-2025$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là 1.

Ta có phương trình $1=3x^2+6x-8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Tại $M(1;-3)$. Phương trình tiếp tuyến là $y=x-4$.

Tại $N(-3;25)$. Phương trình tiếp tuyến là $y=x+28$.

Bài 6. Cho (C) là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2+2x+1$.Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y=-\dfrac{x}{5}+2$.

Lời giải

Cách 1. Tiếp tuyến (d) của (C) vuông góc với đường thẳng $y=-\dfrac{x}{5}+2$,suy ra phương trình (d) có dạng $y=5x+m$

(d) tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^3}{3}-x^2+2x+1=5x+m \ \ (1) \\ x^2-2x+2=5 \ \ (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Giải hệ trên, (2) $\Leftrightarrow$ $x=-1$; $x=3$.

Thay $x=-1$ vào (1) ta được $m=\dfrac{8}{3}$

Thay $x=3$ vào (1) ta được $m=-8$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=5x+\dfrac{8}{3}$ hoặc $y=5x-8$

Cách 2. Tiếp tuyến (d) vuông góc với đường thẳng $y=-\dfrac{x}{5}+2$ suy ra hệ số góc của (d) : $k=5$

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của (d) với (C),ta có : $k=f'(x_0) \Leftrightarrow 5=x_0^2-2x_0+2 \Leftrightarrow x_0=-1, x_0=3$.

Suy ra phương trình (d): $\left[\begin{array}{l} y=5(x+1)+f(1)=5x+\dfrac{8}{3} \\ y=5(x+3)+f(3)=5x-8 \end{array}\right.$.

Bài 7. Cho hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}+x^2+3x-\dfrac{11}{3}$ có đồ thị (C). Trên đồ thị hàm số (C) lấy 2 điểm $M\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2};\dfrac{b-\sqrt{c}}{4}\right);N\left(-\dfrac{\sqrt{d}}{2};\dfrac{e+\sqrt{f}}{4}\right)$ $(a,b,c,d,e,f\in\mathbb{Z})$ sao cho chúng đối xứng nhau qua đường thẳng $d:2x-y+2=0$. Tính giá trị của biểu thức $T=\dfrac{a+b+c-(d+e+f)}{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2}$.

Lời giải

Gọi $M(x_1;y_1);N(x_2;y_2)$ thuộc (C) là hai điểm đối xứng qua đường thẳng d

I là trung điểm của AB nên $I\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$, ta có $I\in d$

Có: $\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{\left(-x_1^3+3x_1+2\right)+\left(-x_2^3+3x_2+2\right)}{2}=2.\dfrac{x_1+x_2}{2}+2$

$\Rightarrow -\left(x_1+x_2\right)^3+3x_1x_2\left(x_1+x_2\right)+3\left(x_1+x_2\right)=2\left(x_1+x_2\right)\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x_1+x_2=0\\ x_1^2-x_1x_2+x_2^2=1\end{array}\right.$

Mặt khác: $MN\perp d\Rightarrow \left(x_2-x_1\right).1+\left(y_2-y_1\right).2=0$

$\Rightarrow 7\left(x_2-x_1\right)-2\left(x_2-x_1\right)\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2\right)=0\Rightarrow x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\dfrac{7}{2}$

- Xét $x_1+x_2=0\Rightarrow x_1=\pm\sqrt{\dfrac{7}{2}};x_2=\mp\sqrt{\dfrac{7}{2}}\Rightarrow M\left(\dfrac{\sqrt{14}}{2};\dfrac{8-\sqrt{14}}{4}\right);N\left(-\dfrac{\sqrt{14}}{2};\dfrac{8+\sqrt{14}}{4}\right)$

- Xét $\begin{cases}x_1^2-x_1x_2+x_2^2=1\\ x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\dfrac{7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1^2+x_2^2=\dfrac{9}{4}\\ x_1x_2=\dfrac{5}{4}\end{cases}\Rightarrow$ vô nghiệm

Vậy 2 điểm cần tìm là: $M\left(\dfrac{\sqrt{14}}{2};\dfrac{8-\sqrt{14}}{4}\right);N\left(-\dfrac{\sqrt{14}}{2};\dfrac{8+\sqrt{14}}{4}\right)$

Bài 8. Tìm giá trị tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ cắt đường thẳng $y=m$ tại ba điểm phân biệt .

Lời giải

Lập phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3x^2+1=m$

Ta có: $y'=3x^2-6x$; $y'=0\Leftrightarrow x=0\vee x=2.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Do đó, đồ thị cắt đường thẳng $y=m$ tại ba điểm phân biệt khi $-3<m<1$.

Vậy chọn $-3<m<1$.

Bài 9. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3-3x^2=2m+1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tính tổng các phần tử của S .

Lời giải

Xét hàm số: $y=2x^3-3x^2 \Rightarrow y'=6x^2-6x \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của hai đồ thị: $\begin{cases}(C): y=2x^3-3x^2\\ d: y=2m+1\end{cases}$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy: Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2m+1=-1\\ 2m+1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow S=\left\{-1;-\dfrac{1}{2}\right\}$.

Vậy tổng các phần tử của S bằng $-1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{-3}{2}$.

Bài 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^3+(m+2)x^2+(m^2-m-3)x-m^2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt?

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3+(m+2)x^2+(m^2-m-3)x-m^2=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+(m+3)x+m^2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-1=0\\ x^2+(m+3)x+m^2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2+(m+3)x+m^2=0\end{array}\right.$

Để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt thì phương trình $x^2+(m+3)x+m^2=0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=(m+3)^2-4m^2>0\\ 1^2+(m+3).1+m^2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3m^2+6m+9>0\\ m^2+m+4\neq 0\ (luon\ dung)\end{cases} \Leftrightarrow -1<m<3$

Do đó với $-1<m<3$ thì đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0;1;2\}$.

Bài 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=-mx$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-m+2$ tại ba điểm phân biệt A,B,C sao cho $AB=BC$.

Lời giải

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình

$x^3-3x^2-m+2=-mx \Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x+m-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x+m-2=0 \end{array}\right.$

Đặt nghiệm $x_2=1$. Từ giải thiết bài toán trở thành tìm m để phương trình có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng.

Khi đó phương trình $x^2-2x+m-2=0$ phải có 2 nghiệm phân biệt (vì theo Viet rõ ràng $x_1+x_3=2=2x_2$)

Vậy ta chỉ cần $\Delta'=1-(m-2)>0 \Leftrightarrow m<3$

Bài 12. Cho hàm số $y=x^3+3mx^2-m^3$ có đồ thị (C_m) và đường thẳng $d: y=m^2x+2m^3$. Tìm giá trị của m để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^4+x_2^4+x_3^4=83$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (C_m)

$x^3+3mx^2-m^3=m^2x+2m^3$

$\Leftrightarrow x^3+3mx^2-m^2x-3m^3=0$

$\Leftrightarrow (x^3-m^2x)+(3mx^2-3m^3)=0$

$\Leftrightarrow x(x^2-m^2)+3m(x^2-m^2)=0$

$\Leftrightarrow (x+3m)(x^2-m^2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3m \\ x=m \\ x=-m \end{array}\right.$

Để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 $\Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó, $x_1^4+x_2^4+x_3^4=83 \Leftrightarrow m^4+(-m)^4+(-3m)^4=83$

$\Leftrightarrow 83m^4=83 \Leftrightarrow m=\pm 1$

Bài 13. Tìm m để đồ thị (C)của $y=x^3-3x^2+4$ và đường thẳng $y=mx+m$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt $A(-1;0)$, B, C sao cho ΔOBC có diện tích bằng 64.

Lời giải

$d(O,BC)=\dfrac{m}{\sqrt{m^2+1}}$

$BC=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_b-y_c)^2}=\sqrt{(m^2+1)(x_B-x_C)^2}$

$=\sqrt{(m^2+1)\left[(x_B+x_C)^2-4x_Bx_C\right]}=\sqrt{(m^2+1)4m}$

$\Rightarrow S_{\Delta OBC}=\dfrac{1}{2}d(O,BC).BC=m\sqrt{m}=64 \Leftrightarrow m=16.$

Cách 2:

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3-3x^2+4=mx+m \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-4x+4-m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ (x-2)^2=m(*) \end{array}\right.$$

Để d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m\neq 9 \end{cases}$

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2-\sqrt{m} \Rightarrow B\left(2-\sqrt{m};3m-m\sqrt{m}\right) \\ x=2+\sqrt{m} \Rightarrow C\left(2+\sqrt{m};3m+m\sqrt{m}\right) \end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{OB}=\left(2-\sqrt{m};3m-m\sqrt{m}\right), \overrightarrow{OC}=\left(2+\sqrt{m};3m+m\sqrt{m}\right)$$

$$\Rightarrow S_{\Delta OBC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]\right|=m\sqrt{m}=64 \Rightarrow m=16.$$

Bài 14. Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4 \ (C_m)$. Tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y=x+4$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$ với điểm $K(1;3)$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và (d) là:

$$x^3+2mx^2+(m+3)x+4=x+4 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+(m+2)x=0$$

$$\Leftrightarrow x.\left[x^2+2mx+(m+2)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=4 \\ x^2+2mx+m+2=0 \quad (2) \end{array}\right..$$

(d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow (1)$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ 0^2+2m.0+m+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m-2>0 \\ m+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-1 \end{array}\right. \\ m\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ \begin{cases} m<-1 \\ m\neq -2 \end{cases} \end{array}\right..$$

Khi đó, (2) có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 tương ứng cũng là hoành độ của B và C.

$\Rightarrow B\left(x_1;x_1+4\right)$ và $C\left(x_2;x_2+4\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{KB}=\left(x_1-1;x_2+1\right)$ và $\overrightarrow{KC}=\left(x_2-1;x_2+1\right)$.

$\Rightarrow S_{\Delta KBC} = \dfrac{\left|(x_1-1)(x_2+1)-(x_2-1)(x_1+1)\right|}{2} = |x_1 - x_2|$.

Theo đề bài: $S_{\Delta KBC} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 128 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 128$

$\Leftrightarrow (-2m)^2 - 4(m+2) = 128 \Leftrightarrow m = \dfrac{1 \pm \sqrt{137}}{2}$ (nhận).

Vậy tất cả các giá trị m thỏa đề là $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{137}}{2}$.

Bài 15. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 1$ có đồ thị (C), đường thẳng $(d): y = mx - 1$ và điểm $K(4;11)$. Biết rằng (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C trong đó $A(0;-1)$ còn trọng tâm tam giác KBC nằm trên đường thẳng $y = 2x + 1$. Tìm các giá trị của tham số m.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ: $x^3 - 2x^2 - 1 = mx - 1 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2x - m = 0 \ (1) \end{array}\right.$

Suy ra $A(0;-1)$ và hoành độ của điểm B và C là nghiệm của phương trình (1)

Để (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0

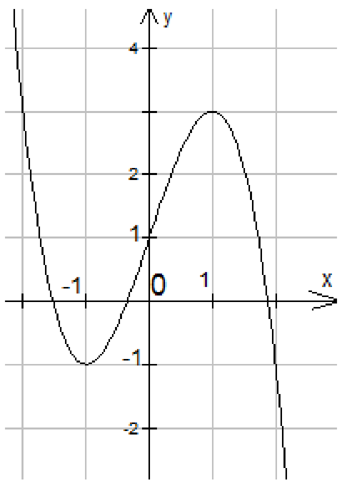
Khi và chỉ khi: $\begin{cases} \Delta'_{(1)} > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \neq 0 \end{cases} (*)$

Giả sử: $B(x_1; m x_1 - 1)$, $C(x_2; m x_2 - 1)$. Theo Viète ta có $x_1 + x_2 = 2$

Gọi G là trọng tâm của tam giác KBC: $\begin{cases} x_G = \dfrac{4 + x_1 + x_2}{3} \\ y_G = \dfrac{11 + mx_1 - 1 + mx_2 - 1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 2 \\ y_G = \dfrac{2m+9}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(2; \dfrac{2m+9}{3}\right)$

Trọng tâm G nằm trên đường thẳng $y = 2x + 1$ suy ra $\dfrac{2m+9}{3} = 2.2 + 1 \Leftrightarrow m = 3$ thỏa mãn $(*)$

Bài 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên.



Tìm số nghiệm phân biệt của phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=1$.

Lời giải

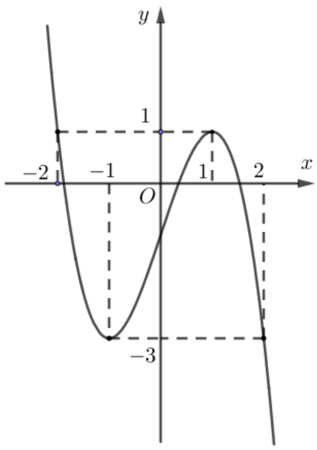
Đặt $f\left(x\right)=t$, khi đó $f\left(t\right)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=a & \left(-2<a<-1\right) \\ t=0 & \\ t=b & \left(1<b<2\right) \end{array}\right.$.

Khi đó ta có $\left[\begin{array}{ll} f\left(x\right)=a & \left(-2<a<-1\right) \\ f\left(x\right)=0 & \\ f\left(x\right)=b & \left(1<b<2\right) \end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị ta có phương trình $f\left(x\right)=a$ có 1 nghiệm, phương trình $f\left(x\right)=0$ có 3 nghiệm, phương trình $f\left(x\right)=b$ có 3 nghiệm. Và các nghiệm này không trùng nhau.

Vậy phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=1$ có 7 nghiệm.

Bài 17. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình $f\left(1-f\left(x\right)\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

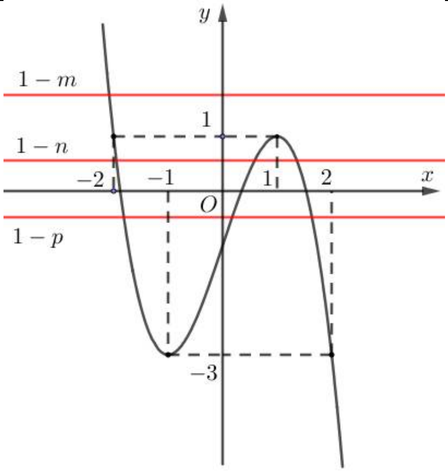
Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta có $f\left(1-f\left(x\right)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 1-f\left(x\right)=m & \left(-2<m<-1\right) \\ 1-f\left(x\right)=n & \left(0<n<1\right) \\ 1-f\left(x\right)=p & \left(1<p<2\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=1-m \\ f\left(x\right)=1-n \\ f\left(x\right)=1-p \end{array}\right.$.

+) Do $-2<m<-1 \Rightarrow 2<1-m<3 \Rightarrow$ phương trình $f\left(x\right)=1-m$ có 1 nghiệm x_1.

+) Do $0<n<1 \Rightarrow 0<1-n<1 \Rightarrow$ phương trình $f\left(x\right)=1-n$ có 3 nghiệm x_2, x_3, x_4.

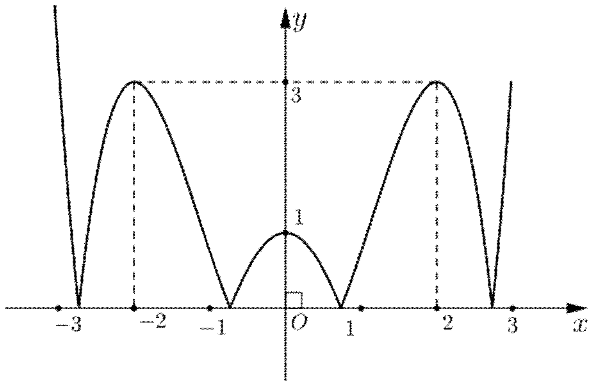
+) Do $1<p<2 \Rightarrow -1<1-p<0 \Rightarrow$ phương trình $f\left(x\right)=1-p$ có 3 nghiệm x_5, x_6, x_7.



Dễ thấy 7 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có đúng 7 nghiệm phân biệt.

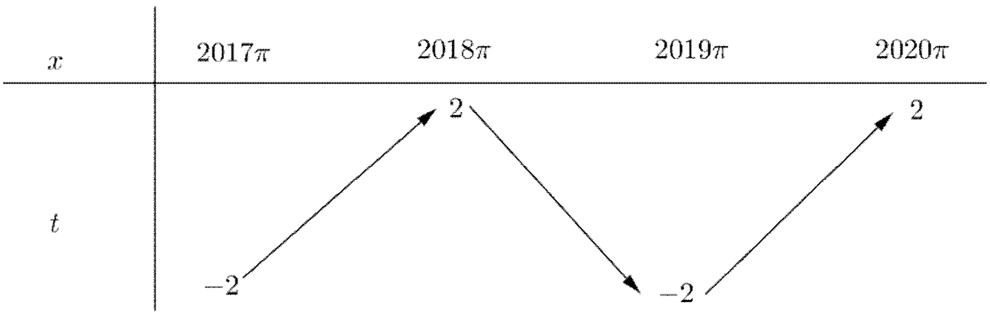
Bài 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[2017\pi; 2020\pi]$ của phương trình $3f(2\cos x) = 8$.

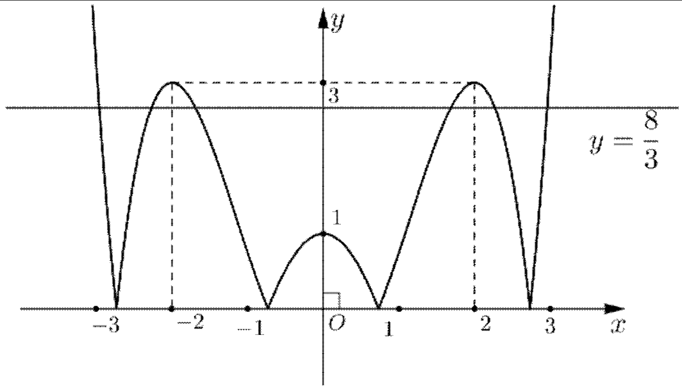
Lời giải

Đặt $t = 2\cos x$, ta có bảng biến thiên của t như sau



Khi đó $3f(2\cos x) = 8 \Leftrightarrow f(t) = \dfrac{8}{3}$.

Vẽ thêm đường thẳng $y = \dfrac{8}{3}$ trên đồ thị $y = f(x)$ đã cho.



Xét trên đoạn $[-2;2]$, đường thẳng $y = \frac{8}{3}$ cắt đồ thị hàm số $f(t)$ tại hai điểm $t_1 \in (-2;-1)$ và $t_2 \in (1;2)$.

Từ bảng biến thiên của t, ứng với giá tị t_1, ta tìm được 3 nghiệm x thỏa $2\cos x = t_1$, tươngtự, ta cũng tìm được 3 nghiệm x thỏa $2\cos x = t_2$.

Vậy phương trình $3f(2\cos x) = 8$ có 6 nghiệm x thuộc đoạn $[2017\pi; 2020\pi]$

Bài 19. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $3f(\cos x) - 2 = 0$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $3f(\cos x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(\cos x) = \frac{2}{3}$

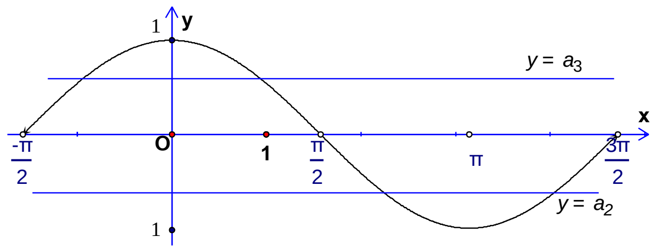
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

$y = \frac{2}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\left\{\begin{array}{l} \cos x = a_1 \in (-\infty; -1) \\ \cos x = a_2 \in (-1; 0) \\ \cos x = a_3 \in (0; 1) \\ \cos x = a_4 \in (1; +\infty) \end{array}\right.$

Phương trình $\cos x = a_1$; $\cos x = a_4$ vô nghiệm.

Xét đồ thị hàm số $y=\cos x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$



Ta có phương trình $\cos x=a_2$ có hai nghiệm trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$; phương trình $\cos x=a_3$ có hai nghiệm trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ và các nghiệm không trùng nhau nên phương trình $3f(\cos x)-2=0$ có 4 nghiệm trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$.

Bài 20. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(2\sin x+1)=1$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $f(2\sin x+1)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x+1=-1 \\ 2\sin x+1=a\in(1;3) \\ 2\sin x+1=b\in(3;+\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x=-1 & (1) \\ \sin x=\frac{a-1}{2}\in(0;1) & (2) \\ \sin x=\frac{b-1}{2}\in(1;+\infty) & (3) \end{array}\right.$

(1) có 2 nghiệm trong $\left[0;\frac{9\pi}{2}\right]$.

(2) có 5 nghiệm trong $\left[0;\frac{9\pi}{2}\right]$.

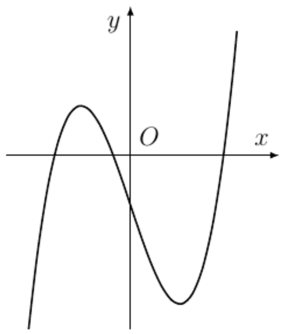
(3) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm trong $\left[0;\frac{9\pi}{2}\right]$.

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình bên?



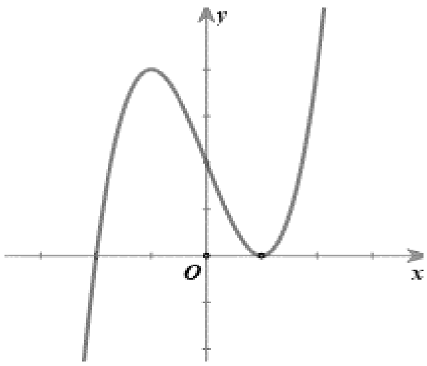
A. $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **C.** $y=x^3-3x-1$. **D.** $y=x^2+x-1$.

Lời giải

Chọn C.

Đường cong trong hình vẽ là đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a>0$ nên đồ thị đã cho là đồ thị của hàm số $y=x^3-3x-1$.

Câu 2. Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



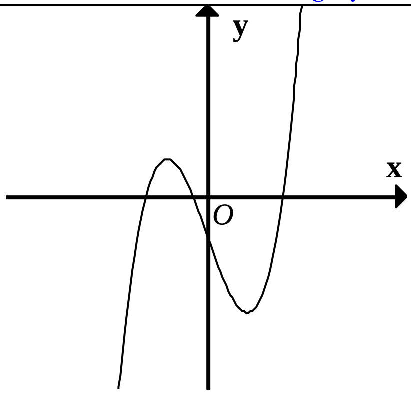
A. $y=-x^3+3x+2$ **B.** $y=x^2+1$ **C.** $y=x^3+x^2+1$ **D.** $y=x^3-3x+2$

Lời giải

Chọn D.

Đồ thị hình vẽ là đồ thị hàm số bậc ba có hệ số $a>0$ nên chỉ có hàm số $y=x^3-3x+2$ thỏa mãn điều kiện trên.

Câu 3. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = x^3 - 3x - 1$ **B.** $y = 3x^2 - 1$ **C.** $y = -x^3 - 3x - 1$ **D.** $y = -x^4 + x^3 - 1$

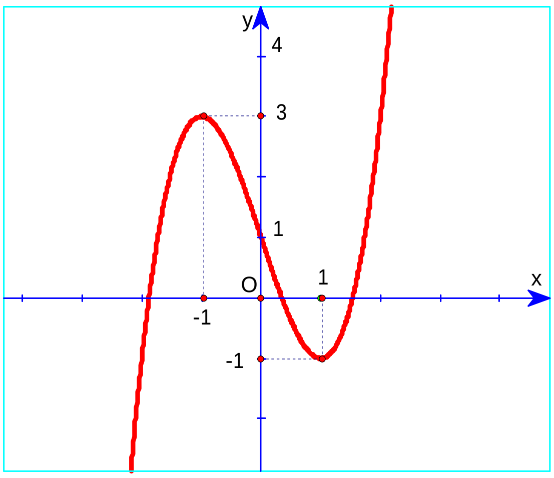
Lời giải

Chọn A.

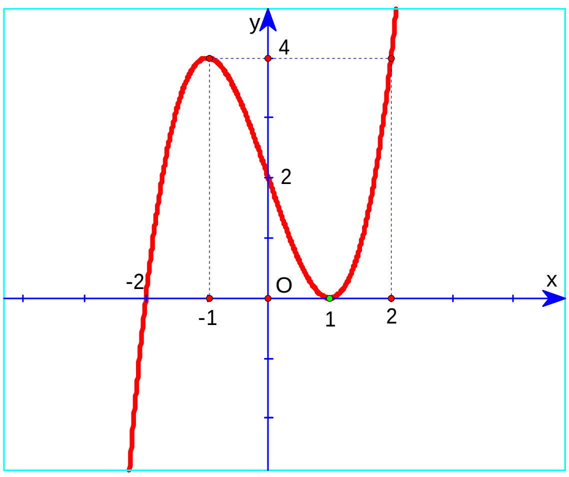
Đồ thị hàm số là đồ thị của hàm số bậc ba nên loại B và **D.**

Đồ thi hàm số bậc ba có hệ số $a > 0$ nên **A** đúng.

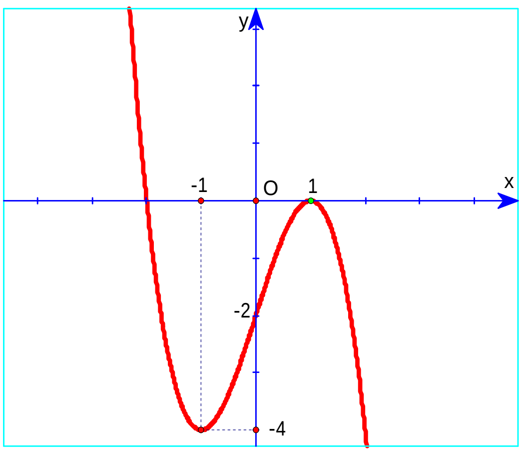
Câu 4. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ là hình nào trong 4 hình dưới đây?



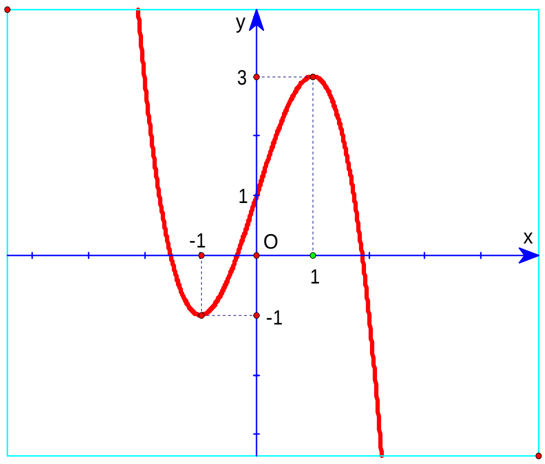
A. Hình 1.



B. Hình 2.



C. Hình 3.



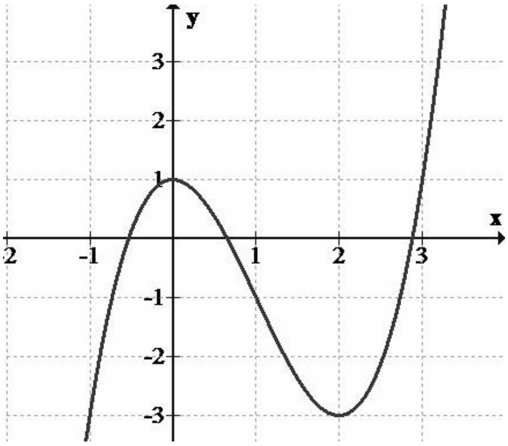
D. Hình 4.

Lời giải

Chọn B.

Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ cắt trục tung tại điểm $(0;2)$. Từ 4 đồ thị ta thấy chỉ có hình 2 cắt trục tung tại điểm $(0;2)$. Vậy chọn B.

Câu 5. Đồ thị hình bên là của hàm số nào?.



Chọn một khẳng định ĐÚNG.

A. $y = -x^3 - 3x^2 + 1$. **B.** $y = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 1$. **C.** $y = 2x^3 - 6x^2 + 1$. **D.** $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Lời giải

Chọn D.

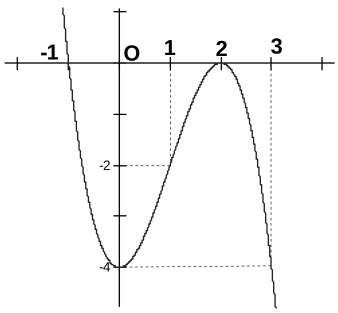
Từ đồ thị hàm số, ta thấy

+ Hàm số đã cho là hàm bậc 3 có nhánh bên phải đi lên nên $a > 0$, do đó loại A và B

+ đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $x = 2, y = -3$, do đó loại C

Vậy chọn D

Câu 6. Đồ thị sau đây là của hàm số nào ?



A. $y = x^3 - 3x - 4$. **B.** $y = -x^3 + 3x^2 - 4$. **C.** $y = x^3 - 3x \ - 4$. **D.** $y = -x^3 - 3x^2 - 4$.

Lời giải

Chọn B.

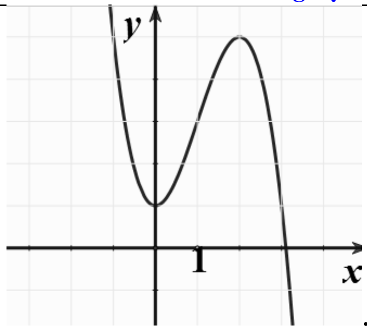
Từ đồ thị hàm số, ta thấy

+ Hàm số đã cho là hàm bậc 3 có nhánh bên phải đi xuống nên $a < 0$, do đó loại A và C

+ đồ thị hàm số có điểm cực đại $x = 2, y = 0$, do đó loại D

Vậy chọn B

Câu 7. Cho đồ thị sau.



Hỏi hàm số nào sau đây có đồ thị ở hình trên?

A. $y=x^3+3x^2+1$. **B.** $y=-x^3-3x^2+1$. **C.** $y=x^3-3x^2+1$. **D.** $y=-x^3+3x^2+1$.

Lời giải

Chọn D.

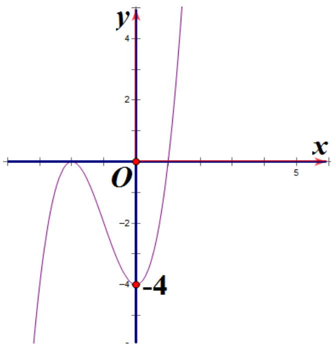
Từ đồ thị hàm số, ta thấy

+ Hàm số đã cho là hàm bậc 3 có nhánh bên phải đi xuống nên $a<0$, do đó loại A và C

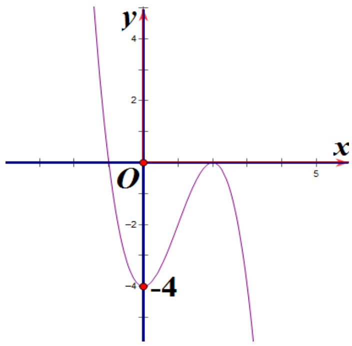
+ đồ thị hàm số có điểm cực trị dương , do đó loại B

Vậy chọn D

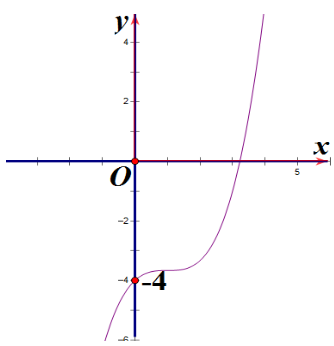
Câu 8. Hàm số $y=x^3+3x^2-4$ có đồ thị là hình nào sau đây?



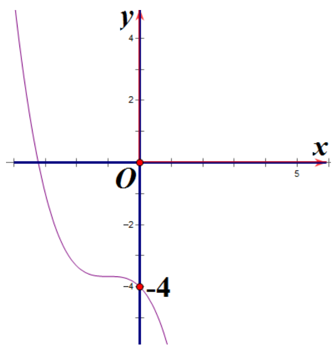
A.



B.



C.



D.

Lời giải

Chọn A.

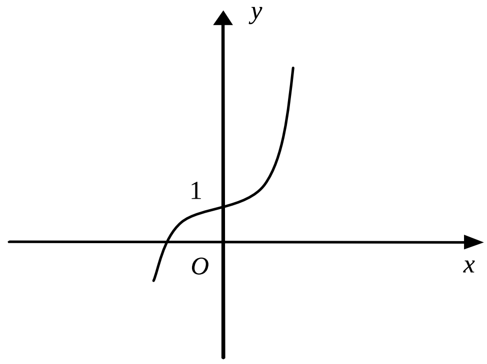
Từ hàm số $y=x^3+3x^2-4$ ta thấy

+ Hàm số đã cho là hàm bậc 3 có $a>0$ nên nhánh bên phải đilên, do đó loại B và D

+ đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị , do đó loại C

Vậy chọn A

Câu 9. Đồ thị hàm số nào sau đây có hình dạng như hình vẽ bên.



A. $y = x^3 + 3x + 1.$ **B.** $y = x^3 - 3x + 1.$ **C.** $y = -x^3 - 3x + 1.$ **D.** $y = -x^3 + 3x + 1.$

Lời giải

Chọn A.

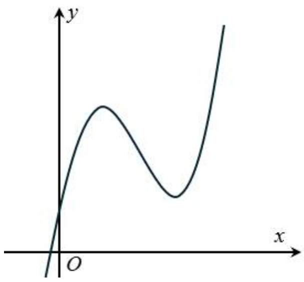
Từ đồ thị hàm số, ta thấy

+ Hàm số đã cho là hàm bậc 3 có nhánh bên phải đi lên nên $a > 0$, do đó loại C và D

+ đồ thị hàm số không có điểm cực trị , do đó loại B

Vậy chọn A

Câu 10. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?



A. $y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1$. **B.** $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

C. $y = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + \frac{9}{2}x + 1.$ **D.** $y = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x + 1$.

Lời giải

Chọn D.

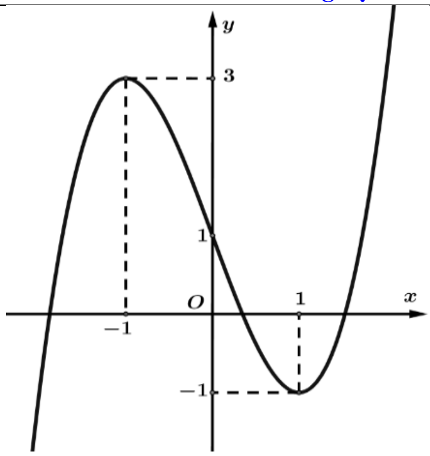
Dựa vào dạng đồ thị ta có $a > 0$.

$y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1 \Rightarrow y(1) = 1$ (loại); $y = x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow y(1) = -1$ (loại).

Xét hàm $y = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x + 1$, $y' = \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 3 \\ x = 3 \Rightarrow y = 1. \end{array}\right.$

Vậy đồ thị là của hàm số $y = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x + 1$.

Câu 11. Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



A. $y = x^3 - 3x + 1$.   **B.** $y = x^3 - 3x - 1$.   **C.** $y = -x^3 - 3x - 1$.   **D.** $y = -x^3 + 3x + 1$.

Lời giải

Chọn A.

Đồ thị hàm số trên là đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$.

Nhìn vào nhánh phải của đồ thị ta thấy đồ thị có hướng đi lên suy ra $a > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ $y = 1$. Vậy hàm số thỏa đề là $y = x^3 - 3x + 1$.

Câu 12. Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A. $y = x^4 - 2x^2$.   **B.** $y = -x^3 + 3x$.   **C.** $y = \dfrac{x-2}{x+3}$.   **D.** $y = x^3 - 3x$.

Lời giải

Chọn D.

Từ bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ nên loại A và B.

Có $x \neq 3$ nên loại C $\Rightarrow$ chọn D.

Câu 13. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình vẽ?

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

A. $y = x^2 + 2x + 1$.   **B.** $y = \dfrac{x^2+1}{x+2}$.   **C.** $y = x^3 + x^2 + 2x - 5$.   **D.** $y = \dfrac{x+1}{x+2}$.

Lời giải

Chọn C.

Từ bảng biến thiên, ta thấy

+ hàm số cần tìm có TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Do đó, phương án B, D bị loại.

+ hàm số cần tìm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Hàm số bậc 2 đã học không thể đơn điệu trên toàn tập xác định $\mathbb{R}$. Do đó, phương án A bị loại.

Kiểm tra phương án C thấy $y'=3x^2+2x+2,\ y'>0\ \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy, đáp án là **C.**

Câu 14. Bảng biến thiên dưới đây là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D?

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	20	↘	-7	↗	$+\infty$

A. $y=-2x^3-3x^2+12x$.

B. $y=2x^3+3x^2-12x$.

C. $y=-2x^4-3x^2+12x$.

D. $y=2x^3-3x^2+12x$.

Lời giải

Chọn B.

Từ bảng biến thiên, ta thấy

+ Hàm số đã cho là hàm bậc 3 có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ nên $a>0$, do đó loại A và C

+ Hàm số có 2 điểm cực trị $(-2;20),(1;-7)$, do đó loại D

Vậy chọn B

Câu 15. Bảng biến thiên sau đây là của một trong 4 hàm số được liệt kê dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

A. $y=-x^3-3x^2+2$. **B.** $y=x^3-3x^2+2$. **C.** $y=x^3+3x^2-2$. **D.** $y=-x^3+3x^2+2$.

Lời giải

Chọn B.

Từ bảng biến thiên, ta thấy

+ Hàm số đã cho là hàm bậc 3 có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ nên $a>0$, do đó loại A và D

+ Hàm số có 2 điểm cực trị $x=0;x=2$, do đó loại C

Vậy chọn B

Câu 16. Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào ?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

A. $y=-3x^2+1$ **B.** $y=x^3-1$. **C.** $y=x^4+3x^2-1$. **D.** $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2+x+\dfrac{2}{3}$

Lời giải

Chọn D.

Từ bảng biến thiên, ta thấy

+ Hàm số đã cho có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ nên $a>0$, do đó loại A

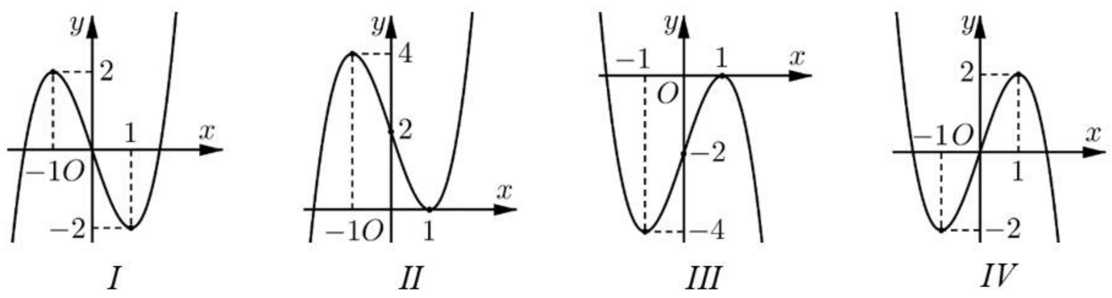
+ Hàm số không có điểm cực trị , do đó loại B, C

Vậy chọn D

Câu 17. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị nào thể hiện hàm số $y=f\left(x\right)$?



A. I. **B.** II. **C.** III. **D.** IV.

Lời giải

Chọn A.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy:

Hàm số có giá trị cực đại bằng 2 và giá trị cực tiểu bằng -2 nên loại **B** và **C.**

Khi $x\to+\infty$ thì $y\to+\infty$ nên chỉ có chọn **A** là phù hợp.

Câu 18. Bảng biến thiên ở hình bên là một trong bốn hàm số nào sau đây?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

A. $y=-x^3-3x^2$. **B.** $y=x^3-3x^2-1$. **C.** $y=x^3+2x^2+1$. **D.** $y=-x^3+3x+1$.

Lời giải

Chọn A.

Ta thấy đây là hàm số bậc ba và $\lim\limits_{x\to-\infty}=-\infty$ nên $a<0$

Ta có $f(0)=1$ nên hàm số cần tìm là $y=-x^3+3x+1$

Câu 19. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+7x$ với trục hoành là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành là: $-x^3+7x=0$

$\Leftrightarrow x\left(x^2-7\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{7} \end{array}\right.$.

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+7x$ với trục hoành bằng 3.

Câu 20. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ và đồ thị hàm số $y=3x^2+3x$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:

$$x^3+3x^2=3x^2+3x \Leftrightarrow x^3-3x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Hai đồ thị đã cho cắt nhau tại 3 điểm.

Câu 21. Số giao điểm của đường cong $y=x^3-2x^2+2x+1$ và đường thẳng $y=1-x$ là

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$x^3-2x^2+2x+1=1-x$

$\Leftrightarrow x^3-2x^2+3x=0$

$\Leftrightarrow x\left(x^2-2x+3\right)=0 \Leftrightarrow x=0$

Câu 22. Cho hàm số $y=(x-3)\left(x^2+2\right)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (C) cắt trục hoành tại hai điểm.

B. (C) cắt trục hoành tại một điểm.

C. (C) không cắt trục hoành.

D. (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

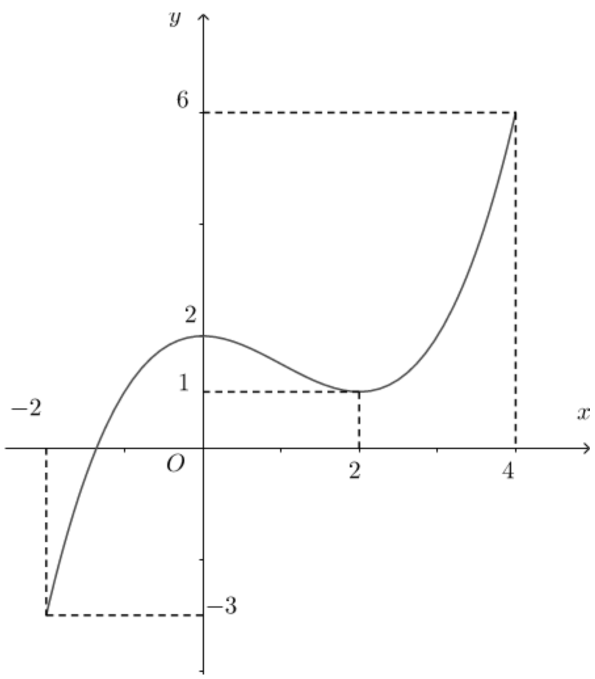
Lời giải

Chọn B.

phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là:

$(x-3)\left(x^2+2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x^2=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=3$ nghĩa là (C) cắt trục hoành tại một điểm

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)-5=0$ trên đoạn $[-2;4]$ là

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 3

Lời giải

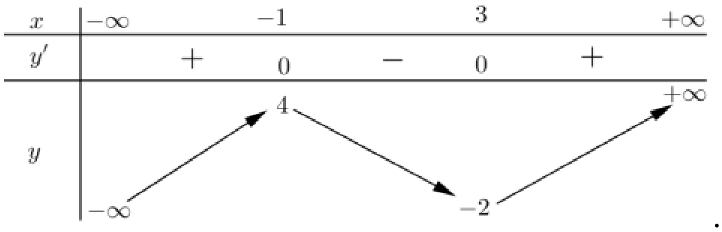
Chọn D

Ta có $3f(x)-5=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{5}{3}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y=\dfrac{5}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt thuộc đoạn $[-2;4]$.

Do đó phương trình $3f(x)-5=0$ có ba nghiệm thực.

Câu 24. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)-2023=0$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C.

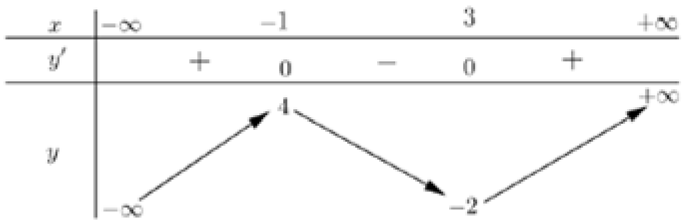
Ta có $f\left(x\right)-2023=0 \Leftrightarrow f\left(x\right)=2023 \quad (1)$

Số nghiệm thực của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ với đường thẳng $y=2023$.

Từ bảng biến thiên đã cho của hàm số $y=f\left(x\right)$, ta thấy đường thẳng $y=2023$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại 1 điểm phân biệt.

Do đó phương trình (1) có 1 nghiệm thực phân biệt.

Câu 25. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm thực của phương trình $2f\left(x\right)-3=0$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D.

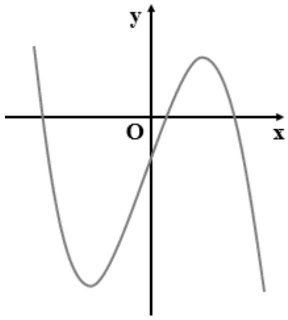
Ta có $2f\left(x\right)-3=0 \Leftrightarrow f\left(x\right)=\dfrac{3}{2} \quad (1)$

Số nghiệm thực của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ với đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$.

Từ bảng biến thiên đã cho của hàm số $y=f\left(x\right)$, ta thấy đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại 3 điểm phân biệt.

Do đó phương trình (1) có 3 nghiệm thực phân biệt.

Câu 26. Cho hàm số $y = ax^3 + 3x + d\ (a; d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a > 0, d > 0$. **B.** $a < 0, d > 0$. **C.** $a > 0, d < 0$. **D.** $a < 0, d < 0$.

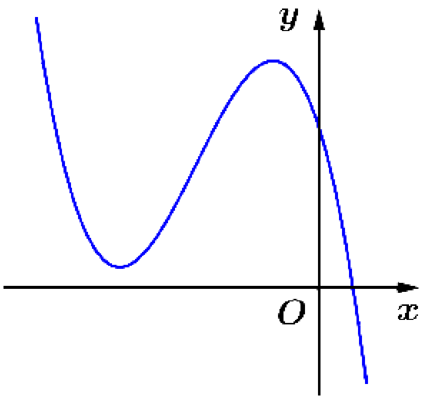
Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} = -\infty \Rightarrow$ đồ thị nhánh ngoài cùng của hàm số hướng đi xuống nên hệ số $a < 0$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung $Oy: x = 0$ là điểm nằm bên dưới trục hoành nên khi $x = 0 \Rightarrow y = d < 0$.

Câu 27. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?



A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

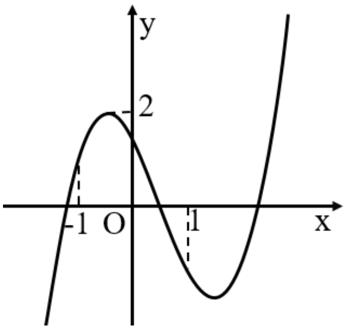
Dựa vào đồ thị ta thấy $a < 0$

Hàm số có 2 cực trị âm nên $\begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 9ac > 0 \\ -\dfrac{2b}{3a} < 0 \\ \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0; d)$ nên $d > 0$

Vậy có đúng 1 số dương trong các số a, b, c, d.

Câu 28. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định nào là đúng?

A. $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$, $d < 0$.   **B.** $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d < 0$.

C. $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$, $d > 0$.   **D.** $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$, $d > 0$.

Lời giải

Chọn D.

+ Dựa vào hình dạng đồ thị ta khẳng định được $a > 0$.

+ Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0; d)$. Dựa vào đồ thị suy ra $d > 0$.

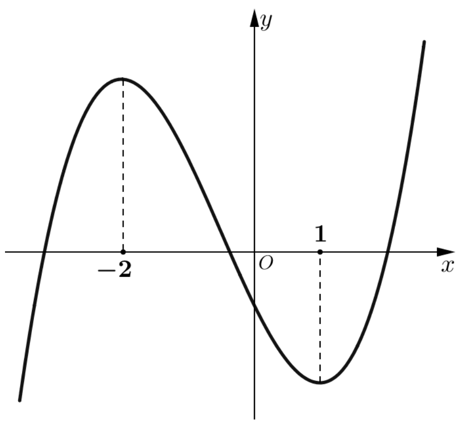
+ Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ trái dấu nên phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 trái dấu. Vì thế $3a.c < 0$, nên suy ra $c < 0$.

+ Mặt khác từ đồ thị ta thấy $\begin{cases} x_1 > -1 \\ x_2 > 1 \end{cases}$ nên $x_1 + x_2 > 0$.

Mà $x_1 + x_2 = \dfrac{-2b}{3a}$ nên suy ra $\dfrac{-2b}{3a} > 0 \Rightarrow b < 0$.

Vậy $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$, $d > 0$.

Câu 29. Cho đường cong $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a > 0, b < 0, c < 0, d < 0$.   **B.** $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

C. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.   **D.** $a > 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

Lời giải

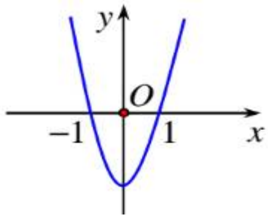
Chọn D.

Từ đồ thị ta có $x = 0 \Rightarrow y = d < 0$, từ dạng đồ thị suy ra $a > 0$.

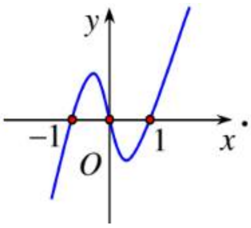
Mặt khác $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ từ đồ thị ta có phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu suy ra $ac < 0$ mà $a > 0$ suy ra $c < 0$.

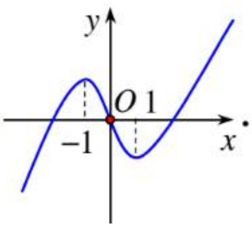
Hơn nữa phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} = -1$ suy ra $3a = 2b \Rightarrow b > 0$.

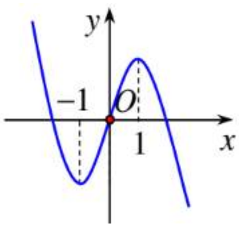
Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, sao cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là parabol có dạng như trong hình bên.

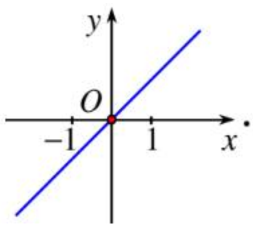


Hỏi đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị nào trong bốn đáp án sau?

A.


B.


C.


D.


Lời giải

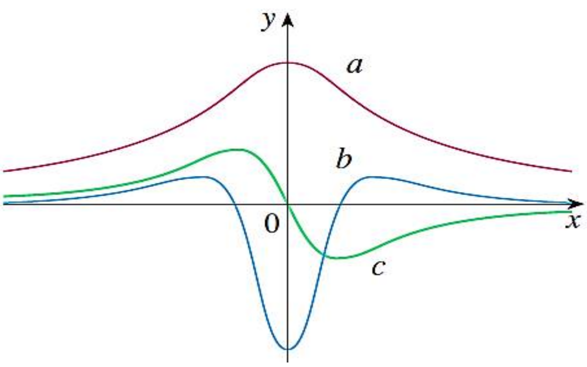
Chọn B.

+ Từ đồ thị ta thấy $y = f'(x)$ là parabol nên là hàm bậc 2 suy ra đồ thị của hàm số $y = f(x)$ hàm bậc 3 suy. Loại đáp án D

+ đồ thị ta thấy $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại 2 điểm có hoành độ $x = -1; x = 1$ suy ra đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có hoành độ điểm cực trị là $x = -1; x = 1$. Loại đáp án A

+ Từ đồ thị $y = f'(x)$ ta thấy $\begin{cases} f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1; x > 1 \\ f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \end{cases}$ suy ra đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đồng biến $x < -1; x > 1$ và nghịch biến $-1 < x < 1$

Câu 31. Cho đồ thị của ba hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. a,b,c. **B.** b,a,c. **C.** a,c,b. **D.** b,c,a.

Lời giải

Chọn C.

Cách 1: Từ đồ thị ta thấy:

+ Đồ thị b cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của c. Suy ra b là đạo hàm của c.

+ Đồ thị c cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của a. Suy ra c là đạo hàm của a.

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt a,c,b.

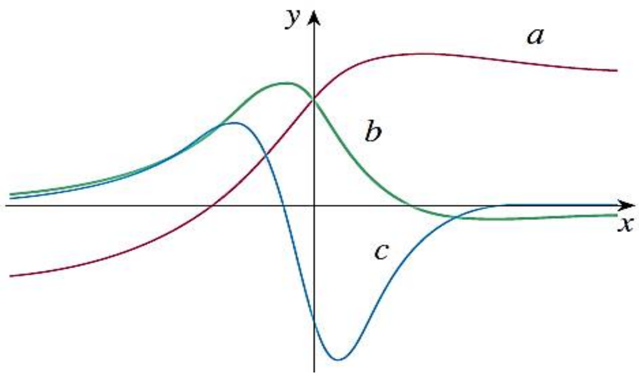
Cách 2: Từ đồ thị ta thấy:

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị c, đồ thị của a đi lên. Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị c, đồ thị của a đi xuống, suy ra c là đạo hàm a.

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị b, đồ thị của c đi lên. Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị b, đồ thị của c đi xuống, suy ra b là đạo hàm c.

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt a,c,b.

Câu 32. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. a,b,c. **B.** b,a,c. **C.** a,c,b. **D.** b,c,a.

Lời giải

Chọn A.

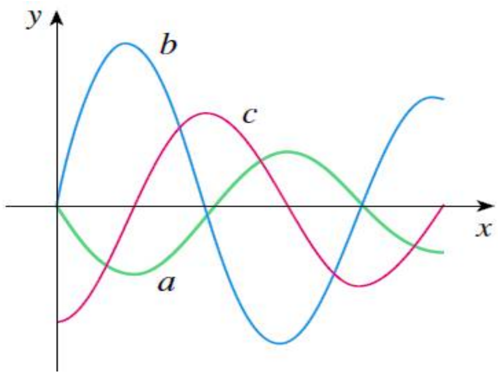
Từ đồ thị ta thấy:

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị b, đồ thị của a đi lên. Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị b, đồ thị của a đi xuống, suy ra b là đạo hàm a.

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị c, đồ thị của b đi lên. Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị c, đồ thị của b đi xuống, suy ra c là đạo hàm b.

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt a,b,c.

Câu 33. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $a,b,c.$ **B.** $b,a,c.$ **C.** $a,c,b.$ **D.** $b,c,a.$

Lời giải

Chọn C.

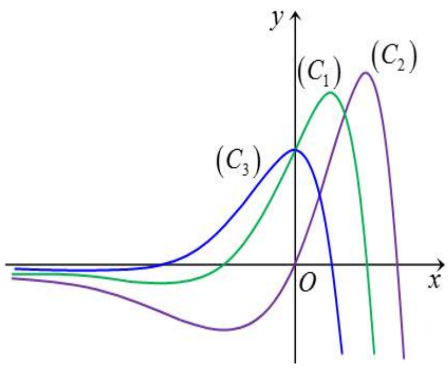
Từ đồ thị ta thấy:

+ Đồ thị c cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của b,a . Suy ra c là đạo hàm của a hoặc b .

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị b, đồ thị của c đi lên. Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị b, đồ thị của c đi xuống, suy ra b là đạo hàm c .

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt $a,c,b.$

Câu 34. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_3);(C_2);(C_1).$ **B.** $(C_2);(C_1);(C_3).$ **C.** $(C_2);(C_3);(C_1).$ **D.** $(C_1);(C_3);(C_2).$

Lời giải

Chọn B.

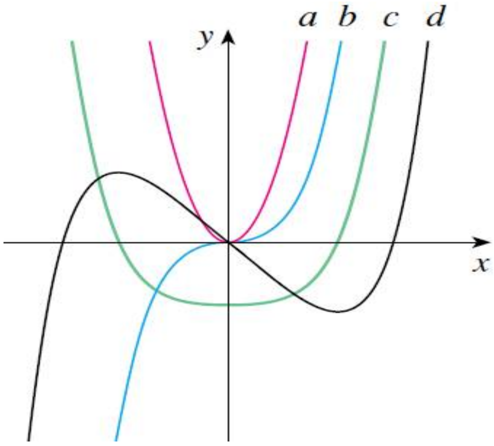
Từ đồ thị ta thấy:

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị (C_3), đồ thị của (C_1) đi lên. Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị (C_3), đồ thị của (C_1) đi xuống, suy ra (C_3) là đạo hàm (C_1) . Loại A, C

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị (C_1), đồ thị của (C_2) đi lên. Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị (C_1), đồ thị của (C_2) đi xuống, suy ra (C_1) là đạo hàm (C_2) .

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ và theo thứ tự, lần lượt $(C_2);(C_1);(C_3)$

Câu 35. Cho đồ thị của bốn hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$, $y=f'''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ và $y=f'''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $c,d,b,a.$ **B.** $d,c,b,a.$ **C.** $d,c,a,b.$ **D.** $d,b,c,a.$

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị ta thấy:

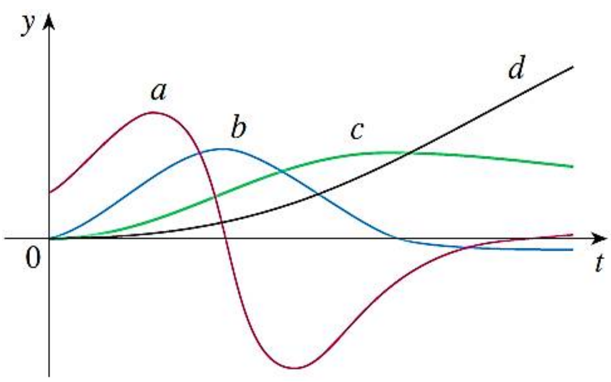
+ đồ thị a nằm trên trục Ox và của đồ thị b luôn đồng biến. Suy ra a là đạo hàm b . Loại C, D

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị b, đồ thị của c đi lên. Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị b, đồ thị của c đi xuống, suy ra b là đạo hàm c .

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị c, đồ thị của d đi lên. Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị c, đồ thị của d đi xuống, suy ra c là đạo hàm d .

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ và theo thứ tự, lần lượt $d,c,b,a.$

Câu 36. Cho đồ thị của bốn hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$, $y=f'''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$, $y=f'''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. c,d,b,a. **B.** d,c,a,b. **C.** d,c,b,a. **D.** d,b,c,a.

Lời giải

Chọn C.

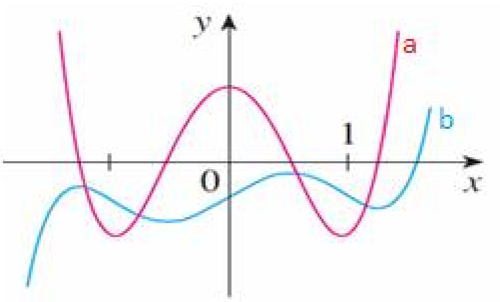
Từ đồ thị ta thấy:

+ đồ thị c nằm trên trục Ox và của đồ thị d luôn đồng biến. Suy ra c là đạo hàm d .

+ đồ thị a cắt trục Ox tại 2 điểm, đồ thị b cắt trục Ox tại 1 điểm. Suy ra b là đạo hàm a .

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$, $y=f'''(x)$ và theo thứ tự, lần lượt d,c,b,a.

Câu 37. Cho đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ như hình bên dưới.



Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $f'(1)<f''(1)$ **B.** $f'(-1)>f''(-1)$

C. $f'(-1)=f''(1)$. **D.** $f''(0)\neq f''(1)$.

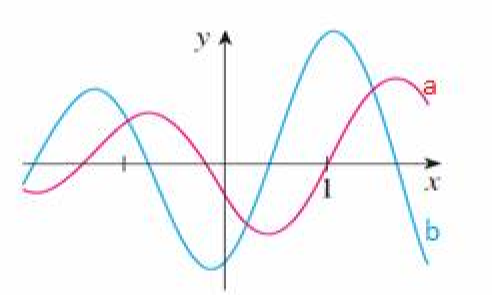
Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị ta thấy: Đồ thị a cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của b. Suy ra a là đạo hàm của b.

Do đó $f'(-1)>f''(-1)$

Câu 38. Cho đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ như hình bên dưới.



Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $f'(-1)<f''(1)$. **B.** $f'(-1)>f''(1)$.

C. $f'(-1)=f''(1)$. **D.** $f'(-1)=2f''(1)$.

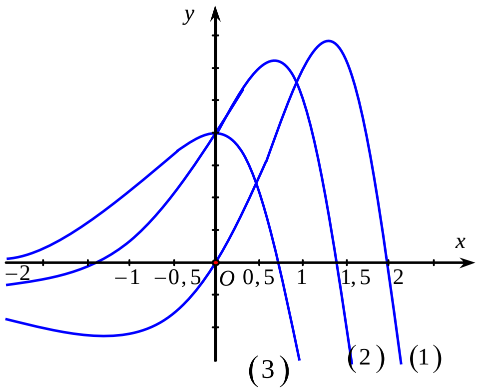
Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị ta thấy: Đồ thị b cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của a. Suy ra b là đạo hàm của a.

Do đó $f'(-1) > f''(1)$.

Câu 39. Cho 3 hàm số $y = f(x)$, $y = g(x) = f'(x)$, $y = h(x) = g'(x)$ có đồ thị là 3 đường cong trong hình vẽ bên.



Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $g(-1) > h(-1) > f(-1)$.

B. $h(-1) > g(-1) > f(-1)$.

C. $h(-1) > f(-1) > g(-1)$.

D. $f(-1) > g(-1) > h(-1)$.

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị ta thấy:

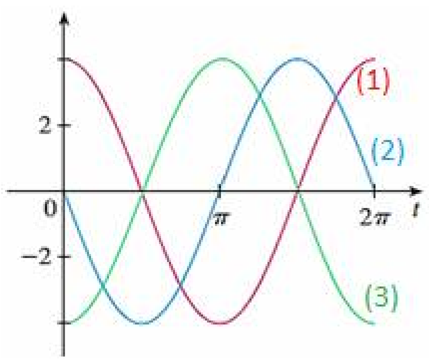
+ Đồ thị (3) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (2). Suy ra (3) là đạo hàm của (2).

+ Đồ thị (2) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (1). Suy ra (2) là đạo hàm của (1).

Suy ra đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x) = f'(x)$, $y = h(x) = g'(x)$ theo thứ tự, lần lượt $(1),(2),(3)$

Vậy $h(-1) > g(-1) > f(-1)$

Câu 40. Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường $s(t)$, hàm vật tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$ theo thời gian t được mô tả ở hình dưới đây.



Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $s(\pi) < v(\pi) < a(\pi)$. **B.** $a(\pi) < v(\pi) < s(\pi)$.

C. $s(\pi) < a(\pi) < v(\pi)$. **D.** $v(\pi) < a(\pi) < s(\pi)$.

Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị ta thấy:

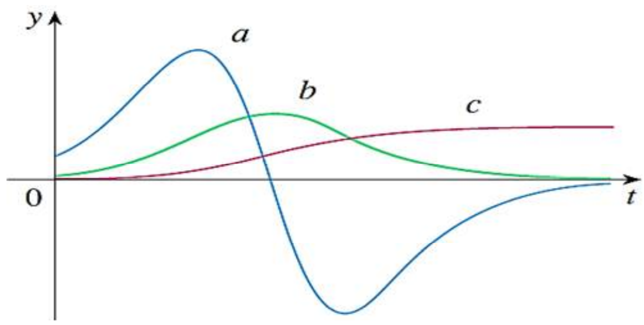
+ Đồ thị (3) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (2). Suy ra (3) là đạo hàm của (2).

+ Đồ thị (2) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (1). Suy ra (2) là đạo hàm của (1).

Do đó hàm quãng đường $s(t)$, hàm vật tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$ theo thứ tự, lần lượt $(1),(2),(3)$

Vậy $s(\pi) < v(\pi) < a(\pi)$.

Câu 41. Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường $s(t)$, hàm vật tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$ theo thời gian t được mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số trên theo thứ tự là các đường cong nào?

A. b,c,a. **B.** c,a,b. **C.** a,c,b. **D.** c,b,a.

Lời giải

Chọn D.

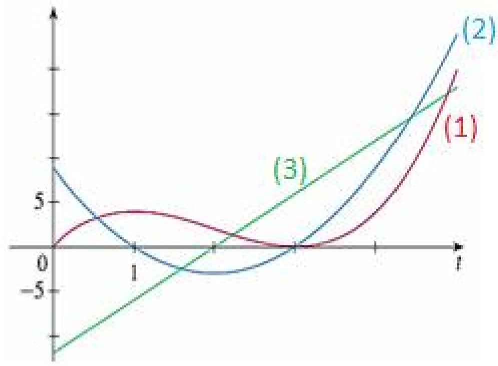
Từ đồ thị ta thấy:

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị a, đồ thị của b đi lên. Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị a, đồ thị của b đi xuống, suy ra a là đạo hàm b . Loại B, C

+ đồ thị c nằm trên trục Ox , mà của đồ thị a không luôn đồng biến. Loại A

Vậy đồ thị của hàm quãng đường, hàm vật tốc và hàm gia tốc theo thứ tự, lần lượt c,b,a.

Câu 42. Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường $s(t)$, hàm vật tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$ theo thời gian t được mô tả ở hình dưới đây.



Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $s(4)<v(4)<a(4)$.　　**B.** $a(4)<v(4)<s(4)$.

C. $s(4)<a(4)<v(4)$.　　**D.** $v(4)<a(4)<s(4)$.

Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị ta thấy:

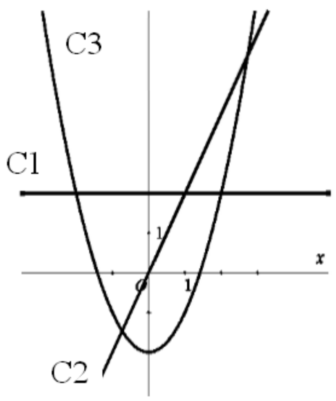
+ Đồ thị (3) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (2). Suy ra (3) là đạo hàm của (2).

+ Đồ thị (2) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (1). Suy ra (2) là đạo hàm của (1).

Do đó hàm quãng đường $s(t)$, hàm vật tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$ theo thứ tự, lần lượt $(1),(2),(3)$

Vậy $s(4)<v(4)<a(4)$.

Câu 43. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_3);(C_2);(C_1)$.　　**B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$.

C. $(C_2);(C_3);(C_1)$.　　**D.** $(C_1);(C_3);(C_2)$.

Lời giải

Chọn A.

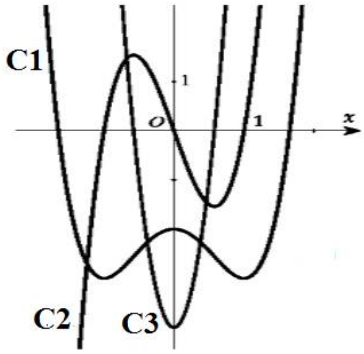
Từ đồ thị ta thấy:

+ Đồ thị (C_2) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (C_3). Suy ra (C_2) là đạo hàm của (C_3).

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị (C_1), đồ thị của (C_2) đi lên. Suy ra (C_1) là đạo hàm của (C_2).

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt (C_3); (C_2); (C_1)

Câu 44. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. (C_3); (C_2); (C_1).
B. (C_2); (C_1); (C_3).
C. (C_2); (C_3); (C_1).
D. (C_1); (C_2); (C_3).

Lời giải

Chọn D.

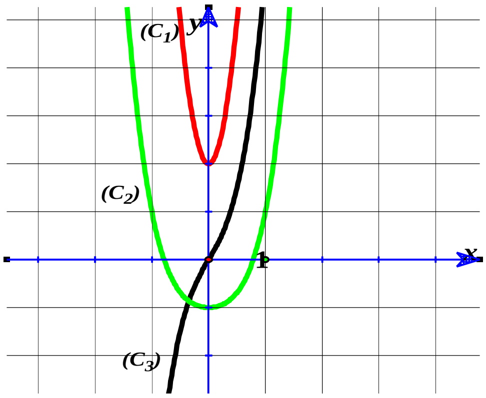
Từ đồ thị ta thấy:

+ Đồ thị (C_3) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (C_2). Suy ra (C_3) là đạo hàm của (C_2).

+ Đồ thị (C_2) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (C_1). Suy ra (C_2) là đạo hàm của (C_1).

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt (C_1); (C_2); (C_3)

Câu 45. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. (C_3); (C_2); (C_1). **B.** (C_2); (C_1); (C_3). **C.** (C_2); (C_3); (C_1). **D.** (C_1); (C_2); (C_3).

Lời giải

Chọn B.

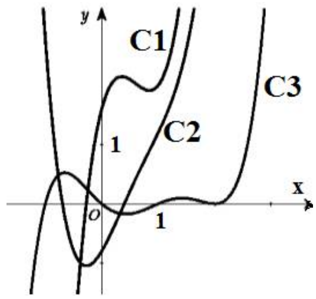
Từ đồ thị ta thấy:

+ Đồ thị (C_3) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (C_1) hoặc (C_2). Suy ra (C_3) là đạo hàm của (C_1) hoặc (C_2).

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị (C_1), đồ thị của (C_2) đi lên. Suy ra (C_1) là đạo hàm của (C_2).

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt $(C_2);(C_1);(C_3)$.

Câu 46. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_1);(C_2);(C_3)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$. **C.** $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_3);(C_2)$.

Lời giải

Chọn D.

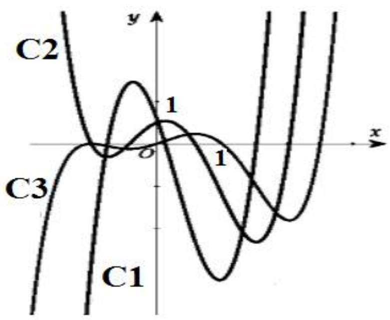
Từ đồ thị ta thấy:

+ Đồ thị (C_2) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (C_3). Suy ra (C_2) là đạo hàm của (C_3).

+ Đồ thị (C_3) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (C_1). Suy ra (C_3) là đạo hàm của (C_1).

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt $(C_1);(C_3);(C_2)$

Câu 47. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_2);(C_1);(C_3)$. **B.** $(C_3);(C_2);(C_1)$. **C.** $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_2);(C_3)$.

Lời giải

Chọn B.

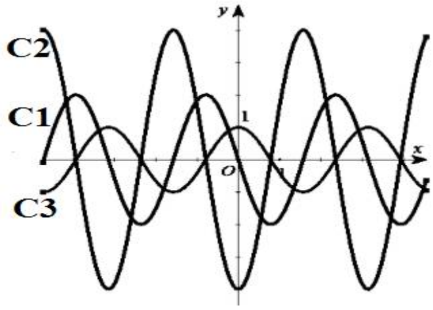
Từ đồ thị ta thấy:

+ Đồ thị (C_1) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (C_2). Suy ra (C_1) là đạo hàm của (C_2).

+ Đồ thị (C_2) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (C_3). Suy ra (C_2) là đạo hàm của (C_3).

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt $(C_3);(C_2);(C_1)$

Câu 48. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_1);(C_2);(C_3)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$. **C.** $(C_3);(C_2);(C_1)$. **D.** $(C_3);(C_1);(C_2)$.

Lời giải

Chọn D.

Cách 1:

Từ đồ thị ta thấy:

+ Đồ thị (C_2) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (C_1). Suy ra (C_2) là đạo hàm của (C_1).

+ Đồ thị (C_1) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (C_3). Suy ra (C_1) là đạo hàm của (C_3).

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt $(C_3);(C_1);(C_2)$

Cách 2:

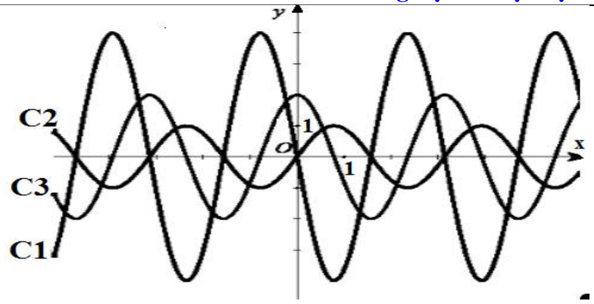
Từ đồ thị ta thấy:

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị (C_2), đồ thị của (C_1) đi lên. Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị (C_2), đồ thị của (C_1) đi xuống, suy ra (C_2) là đạo hàm (C_1) .

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị (C_1), đồ thị của (C_3) đi lên. Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị (C_1), đồ thị của (C_3) đi xuống, suy ra (C_1) là đạo hàm (C_3) .

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt $(C_3);(C_1);(C_2)$

Câu 49. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ và $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_1); (C_2); (C_3)$.   **B.** $(C_1); (C_3); (C_2)$.   **C.** $(C_3); (C_2); (C_1)$.   **D.** $(C_2); (C_3); (C_1)$.

Lời giải

Chọn D.

Cách 1:

Từ đồ thị ta thấy:

+ Đồ thị (C_3) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (C_2). Suy ra (C_3) là đạo hàm của (C_2).

+ Đồ thị (C_1) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (C_3). Suy ra (C_1) là đạo hàm của (C_3).

Vậy đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ và $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt $(C_2); (C_3); (C_1)$

Cách 2:

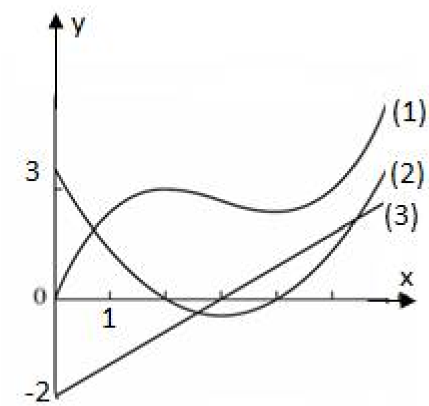
Từ đồ thị ta thấy:

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị (C_1), đồ thị của (C_3) đi lên. Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị (C_1), đồ thị của (C_3) đi xuống, suy ra (C_1) là đạo hàm (C_3) .

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị (C_3), đồ thị của (C_2) đi lên. Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị (C_3), đồ thị của (C_2) đi xuống, suy ra (C_3) là đạo hàm (C_2) .

Vậy đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ và $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt $(C_2); (C_3); (C_1)$

Câu 50. Cho 3 hàm số $y = f(x)$, $y = g(x) = f'(x)$, $y = h(x) = g'(x)$ có đồ thị là 3 đường cong trong hình vẽ bên.



Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $g(1) > h(1) > f(1)$.

B. $h(1) > g(1) > f(1)$.

C. $h(1) > f(1) > g(1)$.

D. $f(1) > g(1) > h(1)$.

Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị ta thấy:

+ Đồ thị (3) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (2). Suy ra (3) là đạo hàm của (2).

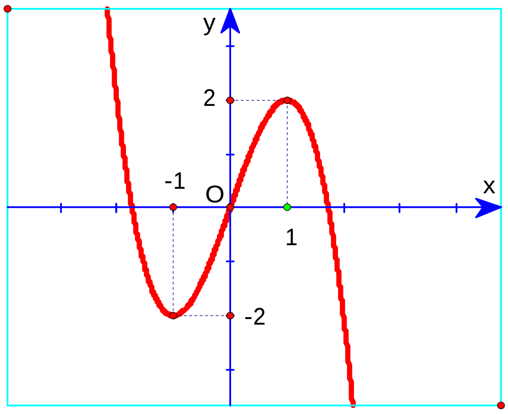
+ Đồ thị (2) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (1). Suy ra (2) là đạo hàm của (1).

Do đó đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x) = f'(x)$, $y = h(x) = g'(x)$ theo thứ tự, lần lượt $(1); (2); (3)$

Vậy $f(1) > g(1) > h(1)$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 51. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ với $\left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$ có tập xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



a) Đồ thị hàm số đã cho có điểm hai cực trị.

b) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$.

c) Điểm $O\left(0;0\right)$ là tâm đối xứng đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$

d) Đồ thị hàm số đã cho là hàm số $y=-x^3+3x$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Dựa vào đồ thị, ta có:

a) Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị $\left(-1;-2\right);\left(1;2\right)$.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$ và nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-1\right);\left(1;+\infty\right)$

c) đồ thị có điểm cực trị $\left(-1;-2\right);\left(1;2\right)$.

Ta có $\begin{cases}\dfrac{-1+1}{2}=0=x_O\\ \dfrac{-2+2}{2}=0=y_O\end{cases}$ suy ra điểm $O\left(0;0\right)$ là trung điểm hai điểm cực trị $\left(-1;-2\right);\left(1;2\right)$.

Vậy điểm $O\left(0;0\right)$ là tâm đối xứng đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$

d)

Cách 1: Trắc nghiệm

+ Dựa vào đồ thị ta thấy nhánh bên phải đi xuống nên $a<0$, suy ra thỏa vì $y=-x^3+3x$ có $a=-1<0$

+ đồ thị qua gốc tọa độ $\Rightarrow O\left(0;0\right)$. Thay $O\left(0;0\right)$ vào $y=-x^3+3x$ ta có : $0=0$ thỏa

+ đồ thị có điểm cực trị $\left(-1;-2\right);\left(1;2\right)$. Thay $\left(-1;-2\right);\left(1;2\right)$ vào $y=-x^3+3x$ ta có

$\begin{cases} -2 = 1 - 3 \\ 2 = -1 + 3 \end{cases}$ thỏa

Vậy đồ thị hàm số đã cho là hàm số $y = -x^3 + 3x$.

Cách 2: Tự luận *(không nên làm cách này vì dài dòng và mất thời gian)*

$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (C)$ và $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Dựa vào đồ thị ta thấy:

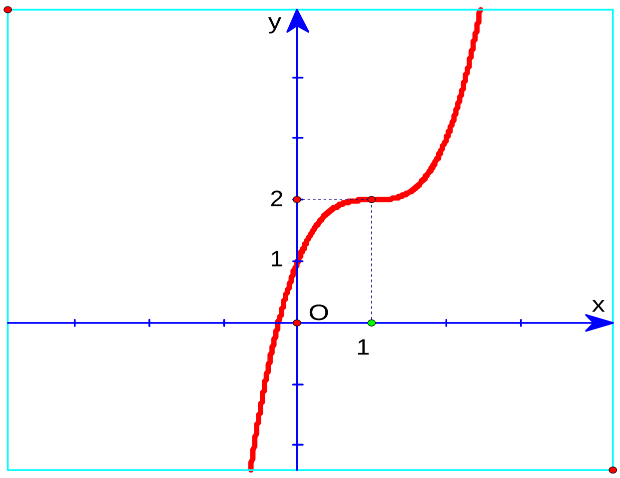
+ đồ thị qua gốc tọa độ $\Rightarrow O(0;0) \in (C) \Rightarrow d = 0$

+ đồ thị có điểm cực trị $(-1;-2);(1;2) \in (C) \Rightarrow \begin{cases} -2 = -a + b - c \\ 2 = a + b + c \end{cases}$

+ $f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 3a - 2b + c = 0$

Ta có hệ: $\begin{cases} -2 = -a + b - c \\ 2 = a + b + c \\ 3a - 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow y = f(x) = -x^3 + 3x$

Câu 52. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



a) Đồ thị hàm số đã cho có một cực trị.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

c) Đồ thị hàm số đã cho không có đường tiệm cận.

d) Đồ thị hàm số đã cho là hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

Dựa vào đồ thị, ta có:

a) Đồ thị hàm số đã cho không có một cực trị.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

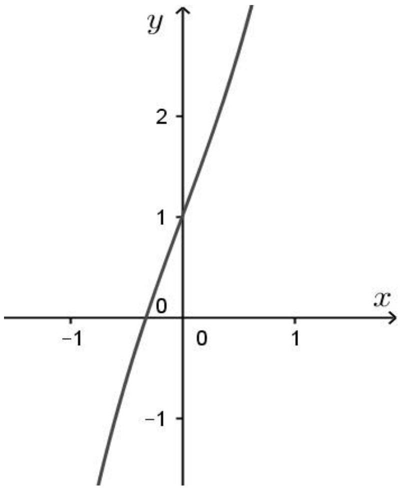
c) Đồ thị hàm số đã cho không có đường tiệm cận.

d) Từ đồ thị ta có 2 điểm $(0;1);(1;2)$ thuộc đồ thị.

Thay $(0;1)$ vào hàm số $y=x^3-3x^2+3x-1$ ta có: $1=-1$ vô lý

Vậy đồ thị hàm số đã cho không phải là hàm số $y=x^3-3x^2+3x-1$.

Câu 53. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) Đồ thị hàm số đã cho không có cực trị.

b) Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

c) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm $(0;1)$.

d) Đồ thị hàm số đã cho là hàm số $y=x^3-3x^2+3x+2$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

Dựa vào đồ thị, ta có:

a) Đồ thị hàm số đã cho không có cực trị.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

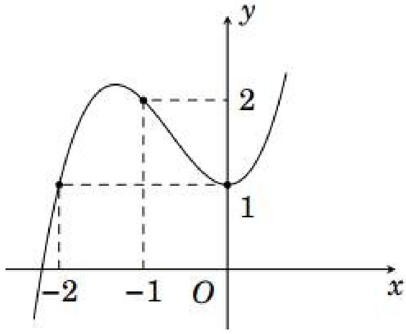
c) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm $(0;1)$.

d) Từ đồ thị ta có 2 điểm $(0;1)$ thuộc đồ thị.

Thay $(0;1)$ vào hàm số $y=x^3-3x^2+3x+2$ ta có: $1=2$ vô lý

Vậy đồ thị hàm số đã cho không phải là hàm số $y=x^3-3x^2+3x+2$.

Câu 54. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$

b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có toạ độ $(0;1)$

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

d) $2a+3b+c=9$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$, giá trị cực tiểu là $y=1$

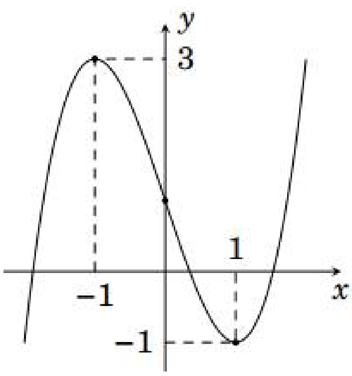
b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có toạ độ $(0;1)$

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;x_0)$ với $-2<x_0<-1$

d) Đồ thị đi qua ba điểm $(-2;1);(-1;2);(0;1)$ và đạt cực trị tại $x=1$ nên ta được hệ:

$$\begin{cases}-8a+4b-2c+d=1\\-a+b-c+d=2\\d=1\\c=0\end{cases} \Leftrightarrow a=1;b=2;c=0;d=1 \Rightarrow 2a+3b+c=8$$

Câu 55. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có toạ độ $(1;0)$

b) Đường thẳng đi qua điểm $(0;1)$ luôn cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng

c) $a-b+c+d=-1$

d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(3;18)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(-1;3)$ và $(1;-1)$ suy ra toạ độ tâm đối xứng là $(0;1)$ nên đồ thị hàm số cắt trục tung tại $(0;1)$.

b) Do $I(0;1)$ là tâm đối xứng của đồ thị nên đường thẳng qua nó sẽ cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt I,A,B với I là trung điểm của *AB*. Suy ra $x_A + x_B = 2x_I$.

Vậy ba điểm này có hoành độ lập thành 1 cấp số cộng.

c) Ta có: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Từ hình vẽ ta có: $\begin{cases} f(-)=3 \\ f(1)=-1 \\ f'(-1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b-c+d=3 \\ a+b+c+d=-1 \\ 3a-2b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \end{cases}$

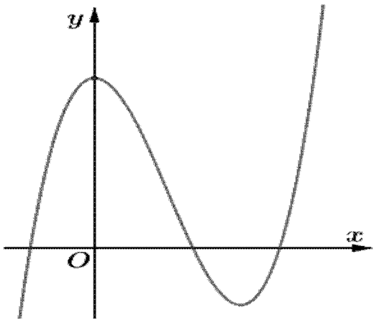
Giải hệ này ta được $a=1;b=0;c=-3;d=1$.

Vậy $a-b+c+d=-1$

d) Do $a=1;b=0;c=-3;d=1$ nên hàm số đã cho là $y=x^3-3x+1$

Vậy hàm số không đi qua điểm có toạ độ $(3;18)$

Câu 56. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hình vẽ dưới đây và có tập xác định trên $\mathbb{R}$.



a) Đồ thị hàm số đã cho có hai cực trị.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

c) Hàm số đã cho không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

d) Đồ thị hàm số đã cho là hàm số $y=\dfrac{2x^2-1}{x+1}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

Dựa vào đồ thị, ta có:

a) Đồ thị hàm số đã cho có hai cực trị.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên một khoảng và nghịch biến trên một khoảng.

c) Hàm số đã cho không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

d) Đồ thị hàm số đã cho tập xác định trên $\mathbb{R}$, mà $y=\dfrac{2x^2-1}{x+1}$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Câu 57. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

a) Đồ thị hàm số đã cho có điểm cực đại là $(0;-1)$.

b) Đồ thị hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng -5

d) Hàm số đã cho là $8a+4b+2c+d=-4$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Từ bảng biến thiên, ta có:

a) Đồ thị hàm số đã cho có điểm cực đại là $(0;-1)$.

b) Đồ thị hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;0);(4;+\infty)$

c) Hàm số không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$

d) Ta có: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$

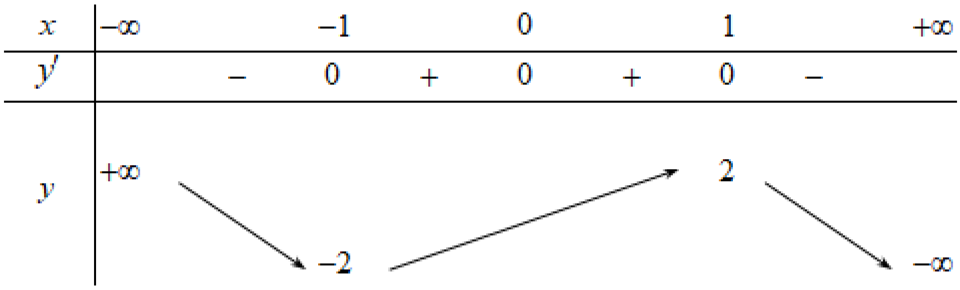
$\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$

Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị $A(0;-1),B(4;-5)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} f(0)=-1 \\ f(4)=-5 \\ f'(0)=0 \\ f'(4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=-1 \\ 64a+16b+4c+d=-5 \\ c=0 \\ 48a+8b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{8} \\ b=-\dfrac{3}{4} \\ c=0 \\ d=-1 \end{cases}.$$

$\Rightarrow 8a+4b+2c+d=4$

Câu 58. Hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dưới đây.



a) Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị.

b) Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$.

d) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

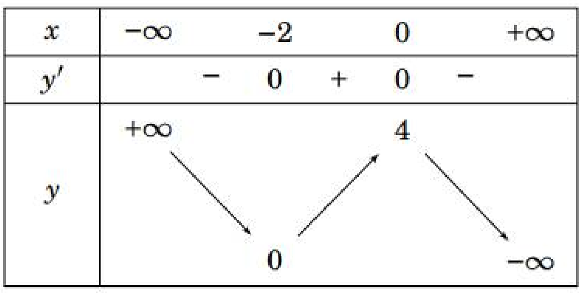
a) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\left(-1;-2\right)$ và $\left(1;2\right)$

b) Hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$.

d) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$.

Câu 59. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:



a) Hàm số đạt giá trị lớn nhất là 4

b) Đường thẳng $y=2$ cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt

c) Trong bốn hệ số a,b,c,d có đúng hai số âm

d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $\left(-4;20\right)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Hàm số không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$

b) Kẻ đường thẳng $y=2$ đi qua điểm $(0;2)$ và song song với Ox thì đường thẳng này cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt.

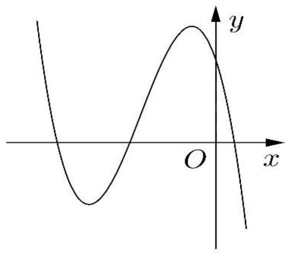
c) Từ bảng biến thiên ta có: $\begin{cases} f(-2)=0 \\ f(0)=4 \\ f'(-2)=0 \\ f'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=-1;\, b=-3;\, c=0; d=4$

Vậy có đúng hai số âm trrong bốn số trên

d) Do $a=-1;\, b=-3;\, c=0; d=4$ nên hàm số đã cho là $y=-x^3-3x^2+4$.

Thay toạ độ điểm $(-4;20)$ vào phương trình thì thoả mãn nên đồ thị hàm số đi qua $(-4;20)$.

Câu 60. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình bên.



a) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm có tung độ âm.

b) Đồ thị hàm số đã cho có hai cực trị.

c) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm, trong đó có hai điểm có hoành độ âm và một điểm có hoành độ dương

d) $a<0,\ b<0,\ c>0,\ d>0$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

Dựa vào đồ thị ta thấy :

a) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.

b) Đồ thị hàm số đã cho có hai cực trị.

c) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm, trong đó có hai điểm có hoành độ âm và một điểm có hoành độ dương

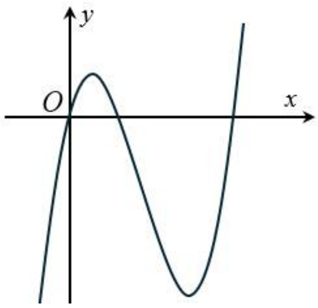
d) Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$. Dựa vào đồ thị ta thấy $a<0$

Hàm số có 2 cực trị âm nên $\begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 9ac > 0 \\ -\dfrac{2b}{3a} < 0 \\ \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0;d)$ nên $d > 0$.

Vậy $a < 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d > 0$

Câu 61. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên.



a) Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu.

b) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu là số dương.

c) Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

d) Trong các hệ số a, b, c, d có 2 hệ số dương.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Dựa vào đồ thị ta thấy :

a) Hàm số có hai điểm cực trị dương nên cùng dấu

b) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu là số âm.

a) Hàm số có hai điểm cực trị nên phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

d) Ta có: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d;\ y' = 3ax^2 + 2bx + c$

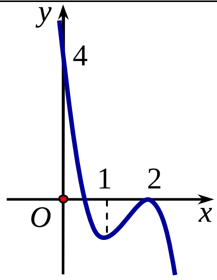
"Nhánh bên phải" hướng lên $\Rightarrow a > 0$

Đồ thị qua gốc tọa độ $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = d = 0$.

Gọi $x_1; x_2$ là hoành độ các cực trị $x_1 + x_2 = \dfrac{-2b}{3a} > 0 \Rightarrow \dfrac{b}{a} < 0 \Rightarrow b < 0; x_1.x_2 = \dfrac{c}{3a} > 0 \Rightarrow c > 0$

Vậy $a > 0, b < 0, c > 0, d = 0$

Câu 62. Cho hàm số $y = -2x^3 + bx^2 + cx + d\ (b, c, d \in \mathbb{R})$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình bên.



a) $y' = -6x^2 + 2bx + c$

b) $d = 4$

c) $b = 4$

d) $c > 0$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

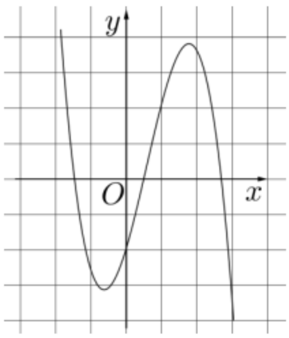
Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;4)$ nên $d = 4$.

Ta có $y' = -6x^2 + 2bx + c$

Dựa vào đồ thị hàm số, suy ra hàm số có hai điểm cực trị là $x = 1$ và $x = 2$, do đó

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 + 2b + c = 0 \\ -24 + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 + 2b + c = 0 \\ -24 + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 9 \\ c = -12 < 0 \end{cases}.$$

Câu 63. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình bên.



a) $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$

b) $a > 0$

c) $d < 0$

d) $c > 0$

Lời giải

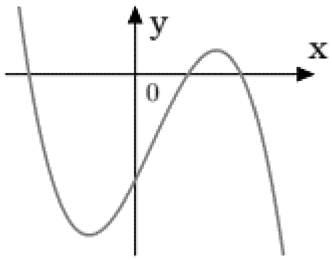
a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Dựa vào đồ thị suy ra hệ số $a<0$

Do $(C)\cap Oy$ tại điểm $(0;d)\Rightarrow d<0.$

$y'=3ax^2+2bx+c=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2 trái dấu (do hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm hai phía với Oy) $\Rightarrow 3a.c<0\Rightarrow c>0$

Câu 64. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình bên.



a) $a<0$

b) $d<0$

c) $c>0$

d) $b>0$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

- Dựa vào hình dáng của đồ thị suy ra hệ số $a<0$.

- Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ âm nên $d<0$.

- Ta thấy đồ thị như hình vẽ có hai điểm cực trị, hoành độ các điểm cực trị trái dấu suy ra phương trình $y'=3ax^2+2bx+c=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2 trái dấu kéo theo $3a.c<0\Rightarrow c>0$.

- Mặt khác $\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{b}{3a}>0\Rightarrow b>0$.

Câu 65. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3m^2x+2025$ có đồ thị (C).

a) Đồ thị hàm số (C) luôn có hai điểm cực trị.

b) Khi m thay đổi thì đồ thị (C) luôn có tâm đối xứng cố định.

c) Khi m thay đổ thì đồ thị (C) luôn cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm.

d) Khi (C) có 2 cực trị thì đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của (C) có dạng $y=ax+b$. Đặt $S=a+b$ thì $S\le 2025$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)

SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

a) $y' = 3x^2 - 3m^2$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - m^2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\forall m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) Khi m thay đổi, (C) luôn có tâm đối xứng cố định.

c) Khi m thay đổi, (C) luôn cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm. (Hàm số bậc ba luôn cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm)

d) Ta có: $y' = 3x^2 - 3m^2$; $y'' = 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2025; y = \frac{1}{3}x.y' + \left(-2m^2 + 2025\right)$

Tại các điểm cực trị, $y' = 0$ nên đường thẳng đi qua các điểm cực trị của hàm số có phương trình $y = -2m^2 x + 2025$.

$\Rightarrow a = -2m^2; b = 2025 \Rightarrow S = a + b = -2m^2 + 2025 < 2025$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 66. Gọi $I(x_0;y_0)$ là tọa độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số $y=-x^3+x^2-x$. Tính giá trị $T=27x_0+27y_0$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 20

$y=-x^3+x^2-x$

$y'=-3x^2+2x-1$

$y''=-6x+2$

$y''=0 \Leftrightarrow -6x+2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3} \Rightarrow y=\dfrac{11}{27} \Rightarrow I\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{11}{27}\right)$

$\Rightarrow T=27x_0+27y_0=27.\dfrac{1}{3}+27.\dfrac{11}{27}=20$

Câu 67. Cho hàm số $y=-x^3+3x+2$ có đồ thị (C). Trên đồ thị hàm số (C) lấy 2 điểm $P(a;b);Q(c;d)$ $(a,b,c,d\in\mathbb{Z})$ sao cho chúng đối xứng nhau qua điểm $M(-1;3)$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c+d$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 4

• Gọi $A(x_0;y_0)$, B là điểm đối xứng với A qua điểm $M(-1;3) \Rightarrow B(-2-x_0;6-y_0)$

$$A,B\in(C) \Leftrightarrow \begin{cases} y_0=-x_0^3+3x_0+2 \\ 6-y_0=-(-2-x_0)^3+3(-2-x_0)+2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 6=-x_0^3+3x_0+2-(-2-x_0)^3+3(-2-x_0)+2$$

$$\Leftrightarrow 6x_0^2+12x_0+6=0$$

$$\Leftrightarrow x_0=-1 \Rightarrow y_0=0$$

Vậy 2 điểm cần tìm là: $(-1;0)$ và $(-1;6)$

$\Rightarrow T=a+b+c+d=4$

Câu 68. Cho hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}+x^2+3x-\dfrac{11}{3}$ có đồ thị (C). Trên đồ thị hàm số (C) lấy 2 điểm $M\left(a;\dfrac{b}{c}\right);N\left(d;\dfrac{e}{f}\right)$ $(\dfrac{b}{c},\dfrac{e}{f}$ là các phân số tối giản, $a,d\in\mathbb{Z}$ và $a>d$) sao cho chúng đối xứng nhau qua trục tung Oy. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c+d+e+f$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 38

Hai điểm $M(x_1;y_1),\ N(x_2;y_2)\in(C)$ đối xứng nhau qua $Oy\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=-x_1\neq 0\\ y_1=y_2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=-x_1\neq 0\\ -\dfrac{x_1^3}{3}+x_1^2+3x_1-\dfrac{11}{3}=-\dfrac{x_2^3}{3}+x_2^3+3x_2-\dfrac{11}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=3\\ x_2=-3\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x_1=-3\\ x_2=3\end{cases}$$

Vậy hai điểm thuộc đồ thị (C) và đối xứng qua Oy là: $M\left(3;\dfrac{16}{3}\right),\ N\left(-3;\dfrac{16}{3}\right)$.

$\Rightarrow T=a+b+c+d+e+f=38$

Câu 69. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $f(x)=-x^3+x+2$ tại điểm $M(-2;8)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -11

Ta có $f'(x)=-3x^2+1$

$\Rightarrow f'(-2)=-11$

Câu 70. Cho hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3-2x^2-3x+1$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến với (C), tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1

Xét tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ x_0 bất kì trên (C).

Khi đó hệ số góc của tiếp tuyến đó là $y'(x_0)=-x_0^2-4x_0-3=1-(x_0+2)^2\leq 1\ \forall x$.

Câu 71. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị (C). Biết tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất là đường thẳng có dạng $y=ax+b$. Tính giá trị $a+b$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 0

Gọi $M(x_0;x_0^3-3x_0^2+2)$ là tiếp điểm của phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C)

$y'=3x_0^2-6x_0$

Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng: $y=k(x-x_0)+y_0$

Mà $k=y'(x_0)=3x_0^2-6x_0=3(x_0^2-2x_0+1)-3$

$\Leftrightarrow 3(x_0-1)^2-3\geq -3$

Hệ số góc nhỏ nhất khi $x_0=1\Rightarrow y_0=y(1)=0;\ k=-3$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm $(1;0)$ có hệ số góc nhỏ nhất là : $y=-3x+3$

$\Rightarrow a+b=0$

Câu 72. Cho hàm số $y=x^3-3x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) song song đường thẳng $y=9x+10$?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=3x^2-6x.$

$$k=9\Rightarrow 3x_o^2-6x_o-9=0\Leftrightarrow x_o^2-2x_o-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_o=3 \\ x_o=-1 \end{array}\right..$$

Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 73. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-6x+1$ (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{18}x+1$?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm

Ta có: $y'=3x^2+6x-6$.

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{18}x+1$ nên

Ta có: $y'(x_0)=15\Leftrightarrow x_0^2+2x_0-8=0\Leftrightarrow x_0=-4, x_0=2$

Từ đó ta tìm được hai tiếp tuyến: $y=18x+81$ và $y=18x-27$.

Câu 74. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-3$ có đồ thị (C). Số tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y=\frac{1}{9}x+2025$ là bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y=\frac{1}{9}x+2025$ có dạng $\Delta: y=-9x+c$.

$$\Delta \text{ là tiếp tuyến của } (C)\Leftrightarrow \begin{cases} -x^3+3x^2-3=-9x+c \\ -3x^2+6x=-9 \end{cases} \text{có nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^3+3x^2-3=-9x+c \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Vậy có hai giá trị thỏa mãn.

Câu 75. Cho hàm số $y=x^3-2x^2+2x$ có đồ thị (C). Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm M, N trên (C), mà tại đó tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y=-x+2017$. Khi đó $x_1.x_2$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

Ta có: $y'=3x^2-4x+2$.

Tiếp tuyến tại M, N của (C) vuông góc với đường thẳng $y=-x+2017$. Hoành độ x_1, x_2 của các điểm M, N là nghiệm của phương trình $3x^2-4x+1=0$.

Suy ra $x_1.x_2=3$.

Câu 76. Biết rằng đường thẳng $y=-2x+2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+x+2$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0;y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-2x+2=x^3+x+2 \Leftrightarrow x^3+3x=0 \Leftrightarrow x=0$

Với $x_0=0 \Rightarrow y_0=2$.

Câu 77. Biết rằng đường thẳng $y=x+2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-x^2+x+4$ tại điểm duy nhất, kí hiệu $(x_0;y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0.

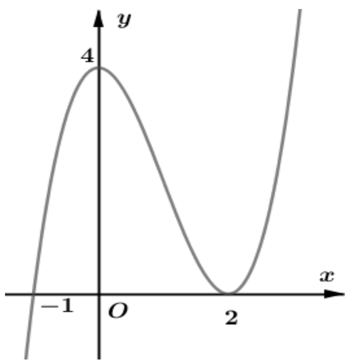
Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1

phương trình hoành độ giao điểm: $x+2=x^3-x^2+x+4 \Leftrightarrow x^3-x^2+2=0 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y_0=1$.

Câu 78. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

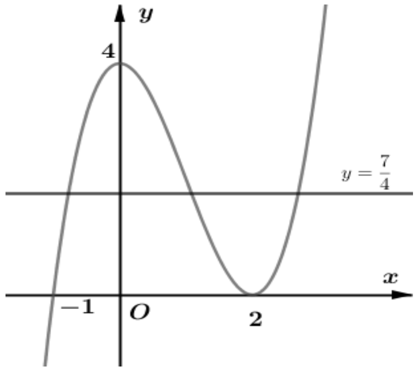


Số nghiệm thực của phương trình $4f(x)-7=0$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

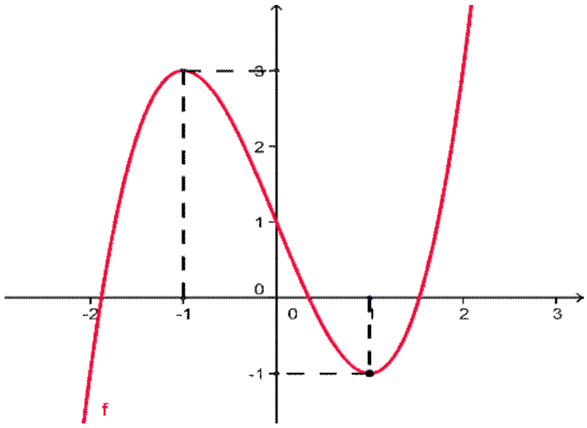
Lời giải

Đáp án: 3



Ta có: $4f(x)-7=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{7}{4}$. Do đường thẳng $y=\frac{7}{4}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Câu 79. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục tung tại tung độ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1

Dựa vào đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục tung tại 1 điểm $(0;1) \Rightarrow y=1$

Câu 80. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)+3=0$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$y=-\frac{3}{2}$

Ta có $2f(x)+3=0 \Leftrightarrow f(x)=-\frac{3}{2}$.

Nhìn bảng biến thiên ta thấy phương trình này có 3 nghiệm.

Câu 81. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $(a,b,c,d\in\mathbb{R},\ a\neq 0)$, có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=4$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Nhìn bảng biến thiên ta thấy phương trình này có 2 nghiệm.

Câu 82. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ \ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số $a,\ b,\ c,\ d$ **?**

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

Từ dáng điệu sự biến thiên hàm số ta có $a>0$.

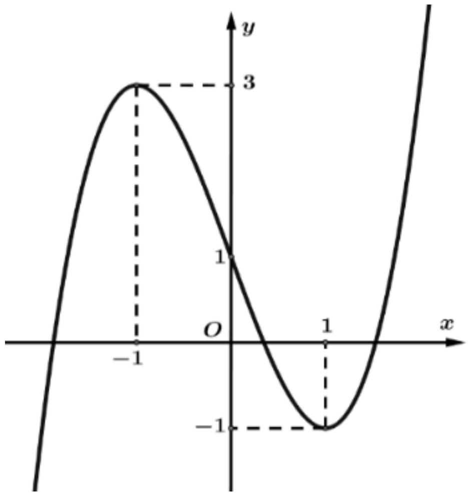
Khi $x=0$ thì $y=d=1>0$.

Mặt khác $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Từ bảng biến thiên ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \end{array}\right.$.

Từ đó suy ra $c = 0; \dfrac{-2b}{3a} = -2 \Rightarrow b = 3a > 0$.

Vậy có 3 số dương là $a,\ b,\ d$.

Câu 83. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên.



Có bao nhiêu số âm trong các số $a,\ b,\ c,\ d$?

Trả lời: ………………..

Lời giải

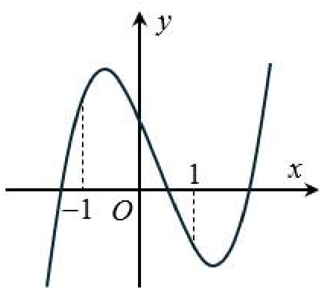
Đáp án: 2

Quan sát đồ thị hàm số ta thấy: $a > 0$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương $\Rightarrow d > 0$.

Hàm số có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ thỏa mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} > 0 \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{3a} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{b}{a} < 0 \\ \dfrac{c}{a} < 0 \end{cases} \Rightarrow b < 0; c < 0$.

Câu 84. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu số âm trong các số $a,\ b,\ c,\ d$?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Nhìn vào nhánh phải của đồ thị ta thấy đồ thị có hướng đi lên suy ra $a > 0$

Nhìn vào giao điểm của đồ thị với trục tung ta thấy đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương suy ra $d > 0$.

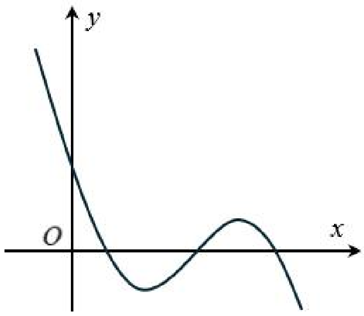
Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Hàm số đã cho có hai điểm cực trị x_1, x_2 với $x_1.x_2 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{c}{3a} < 0 \Leftrightarrow c < 0$ (vì $a > 0$)

Vì $-1 < x_1 < 0$ và $x_2 > 1$ nên $x_1 + x_2 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2b}{3a} > 0 \Leftrightarrow -2b > 0 \Leftrightarrow b < 0$ (vì $a > 0$)

Vậy $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$, $d > 0$.

Câu 85. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên.



Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

Trả lời: ………………..

Lời giải

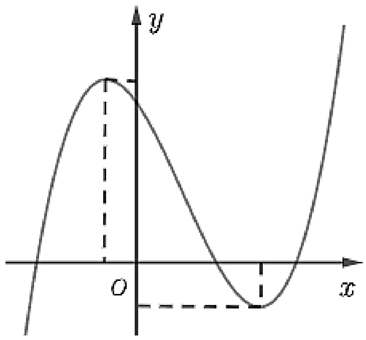
Đáp án: 2

Dựa vào đồ thị suy ra $a < 0$.

Giao điểm của đồ thị với trục Oy suy ra $d > 0$.

Dựa vào cực trị ta có $x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} > 0 \Rightarrow c < 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} > 0 \Rightarrow b > 0$.

Câu 86. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu số dương trong ba số b, c, d ?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ theo hình vẽ:

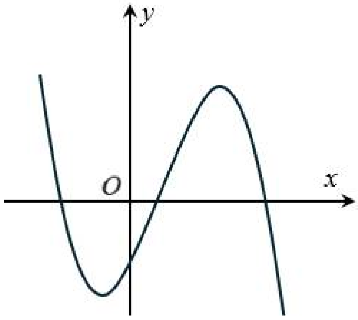
Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0, d)$ nằm phía trên trục hoành nên $d > 0$;

Hàm số có hai cực trị trái dấu nên $ac < 0$ mà $a > 0$, do đó $c < 0$.

Điểm uốn của đồ thị có hoành độ dương nên $\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{2b}{6a}>0 \Leftrightarrow ab<0$.

Do $a>0$ nên $b<0$.

Câu 87. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu số dương trong ba số $b,\ c,\ d$?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta thấy nhánh đồ thị ngoài cùng bên phải hướng xuống suy ra $a<0$

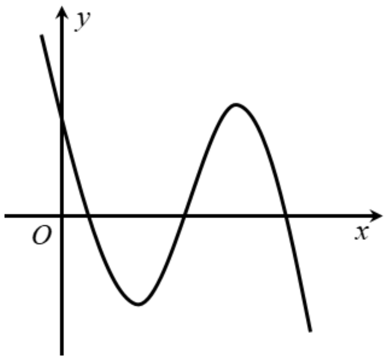
Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ âm suy ra $d<0$

Gọi x_1, x_2 là 2 điểm cực trị của hàm số.

Ta có: $x_1+x_2=\frac{-b}{3a}>0 \Rightarrow b>0$ và $x_1.x_2=\frac{c}{3a}<0 \Rightarrow c>0$

Vậy $a<0, b>0, c>0, d<0$.

Câu 88. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu số dương trong ba số $b,\ c,\ d$?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Do nhánh bên phải của đồ thị đi xuống nên $a<0$.

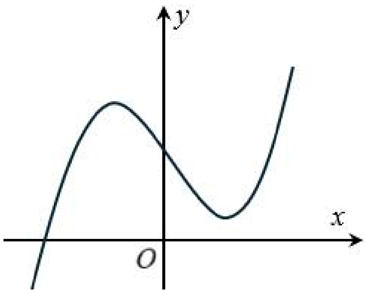
Đồ thị cắt trục tung ở phần dương nên $d>0$

Đồ thị có 2 cực trị tại hai giá trị x dương nên phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt

$\Rightarrow 3ax^2+2bx+c=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ -\dfrac{2b}{3a} > 0 \\ \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > 0 \\ c < 0 \end{cases}.$$

Câu 89. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số âm trong ba số $b,\ c,\ d$?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Dựa vào đồ thị hàm bậc ba ta nhận xét:

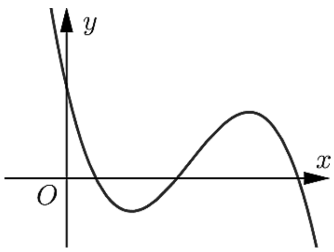
Nhánh cuối đồ thị hàm số đồng biến nên $a > 0$.

Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về 2 phía trục tung nên $ac < 0 \Rightarrow c < 0$.

Đồ thị hàm số có hoành độ điểm uốn dương nên $ab < 0 \Rightarrow b < 0$.

Câu 90. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số âm trong ba số $b,\ c,\ d$?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1

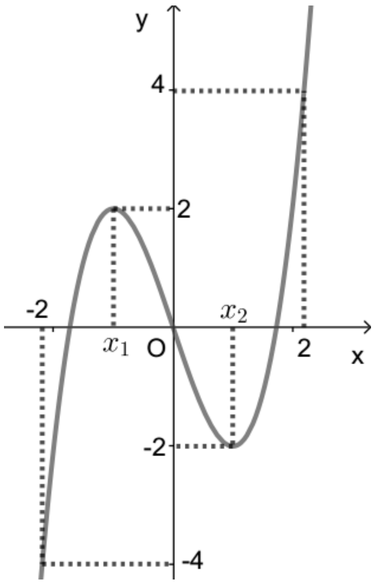
Ta có $a < 0$ và đồ thị cắt Oy tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Mặt khác: $y' = 3ax^2 + 2bx + c; y'' = 6ax + 2b$ và từ đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có hai điểm cực trị có hoành độ dương và điểm uốn có hoành độ dương.

Khi đó $\begin{cases} a.c > 0 \\ -\dfrac{b}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > 0 \\ c < 0 \end{cases}$ do $a < 0$.

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 91. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-2;2\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên.

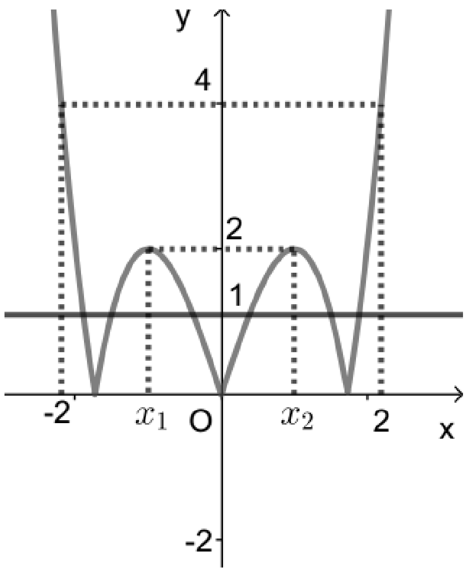


Số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x\right)\right| - 1 = 0$ trên đoạn $\left[-2;2\right]$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 6

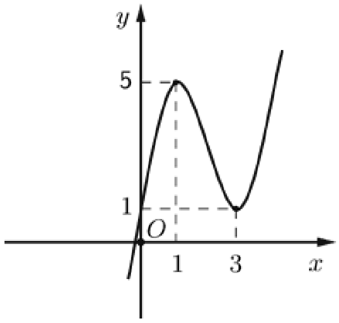
Ta có số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x\right)\right| - 1 = 0$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ với đường thẳng $y = 1$.



Từ hình vẽ ta thấy đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ tại 6 điểm.

Vậy số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x\right)\right| - 1 = 0$ là 6.

Câu 92. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị $\left(C\right)$ như hình vẽ ở bên dưới.



a) Tìm tâm đối xứng của đồ thị (C).

b) Tính $T = a + b + c + d$.

Lời giải

a) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị là $B(1;5)$ và $C(3;1)$ nên tâm đối xứng của đồ thị (C) là trung điểm của BC

Gọi $I(x_I; y_I)$ là tâm đối xứng của đồ thị (C), ta có:

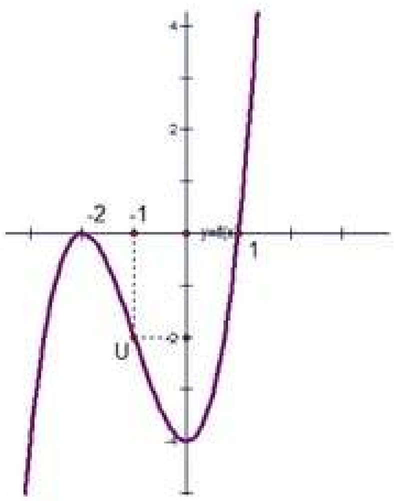
$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_B + x_C}{2} = 2 \\ y_I = \dfrac{y_B + y_C}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow I(2;3)$$

b) Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(0;1)$, $B(1;5)$ và $C(3;1)$ và đạt cực trị tại các điểm B và C.

$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Ta có: $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 5 \\ f'(1) = 0 \\ f'(3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ a + b + c + d = 5 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 27a + 6b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 9 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow T = a + b + c + d = 5$.

Câu 93. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a,b,c,d \in R)$ có đồ thị (C) trong hình dưới đây.



a) Tìm tâm đối xứng của đồ thị (C).

b) Tính tổng $S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

Lời giải

a) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị là $B(-2;0)$ và $C(0;-4)$ nên tâm đối xứng của đồ thị (C) là trung điểm của BC

Gọi $I(x_I;y_I)$ là tâm đối xứng của đồ thị (C), ta có:

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_B + x_C}{2} = -1 \\ y_I = \dfrac{y_B + y_C}{2} = -2 \end{cases} \Rightarrow I(-1;-2)$$

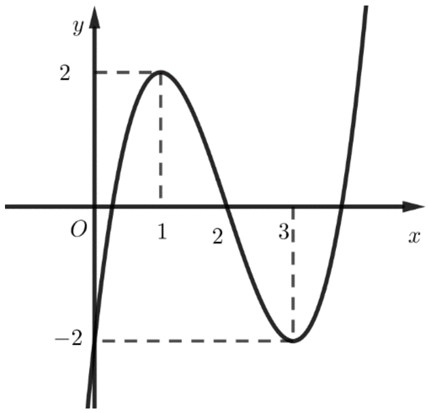
b) Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(0;1)$, $B(-2;0)$ và $C(0;-4)$ và đạt cực trị tại các điểm B và C.

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Từ đồ thị ta có: $\begin{cases} y(1)=0 \\ y(-2)=0 \\ y(0)=-4 \\ y'(-2)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=0 \\ -8a+4b-2c+d=0 \\ d=-4 \\ 12a-4b+c=0 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ d=-4 \\ a+b=4 \\ -8a+4b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ d=-4 \\ a=1 \\ b=3 \end{cases}$

Vậy $S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 26$.

Câu 94. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,b,c,d \in R)$ có đồ thị (C) như hình vẽ.



Số lớn nhất trong các số a, b, c, d bằng bao nhiêu?

Lời giải

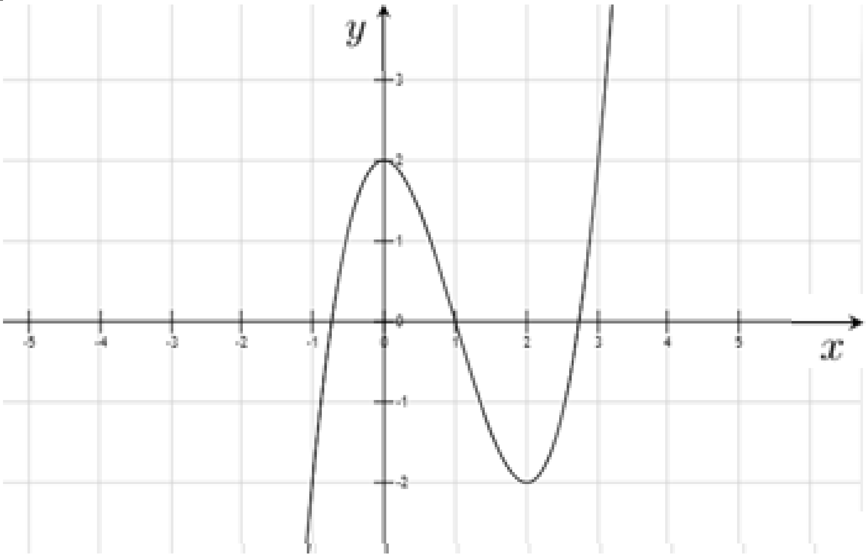
Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $M(1;2)$ và $N(3;-2)$ nên:

$$\begin{cases} a.1^3 + b.1^2 + c.1 + d = 2 \\ a.3^3 + b.3^2 + c.3 + d = -2 \\ 3a.1^2 + 2b.1 + c = 0 \\ 3a.3^2 + 2b.3 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=2 \\ 27a+9b+3c+d=-2 \\ 3a+2b+c=0 \\ 27a+6b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-6 \\ c=9 \\ d=-2 \end{cases}$$

Vậy $c=9$ là số lớn nhất.

Câu 95. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



Tính $S = a + b$.

Lời giải

Vì đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $y = 2$ nên $d = 2$.

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Hàm số đạt cực trị tại $x = 0$ và $x = 2$ nên

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = -3a \end{cases} \quad (1)$$

Từ đồ thị ta nhận thấy $y(2) = -2 \Leftrightarrow 8a + 4b + d = -2 \Leftrightarrow 8a + 4b = -4 \Leftrightarrow 2a + b = -1 \quad (2)$

Thay (1) vào (2) ta tìm được $a = 1, b = -3$.

Vậy $S = -2$.

Câu 96. Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C).

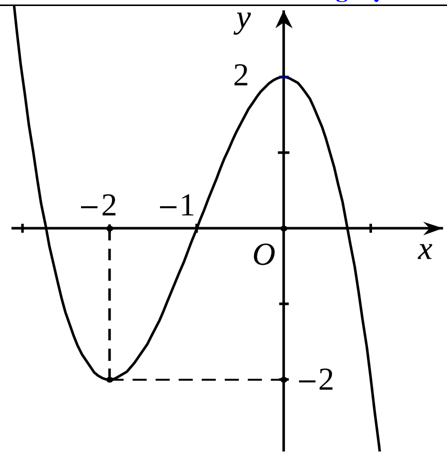
a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C).

b) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $-x^3 - 3x^2 + 1 - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt?

Lời giải

a) Các em tự khảo sát nhé

Đồ thị:



b) Ta có $-x^3-3x^2+1-m=0 \Leftrightarrow -x^3-3x^2+2=m+1(*)$.

Xem phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $(C): y=-x^3-3x^2+2$ và đường thẳng $d: y=m+1$. Số giao điểm của (C) và d là số nghiệm của (*).

Dựa vào đồ thị hàm số, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -2<m+1<2 \Leftrightarrow -3<m<1$.

$m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m=\{-2;-1;0\}$

Câu 97. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm phân biệt?

Lời giải

Số nghiệm của phương trình $f(x)=m$ bằng số điểm chung của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m$.

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy để phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m\in(-2;4)$.

$m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m=\{-1;0;1;2;3\}$

Câu 98. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-9x+2m+1$ và trục Ox có đúng hai điểm chung phân biệt. Tính tổng T của các phần tử thuộc tập S

Lời giải

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-9x+2m+1$ và trục Ox là nghiệm của phương trình :

$x^3+3x^2-9x+2m+1=0 \Leftrightarrow -x^3-3x^2+9x=2m+1$.

Xét hàm số $f(x)=-x^3-3x^2+9x$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$f'(x) = -3x^2 - 6x + 9,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-27	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2m + 1$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = 2m + 1$ cắt đồ thị hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x$ tại hai điểm phân biệt.

Từ bảng biến thiên suy ra : $\left[\begin{array}{l} 2m+1 = 5 \\ 2m+1 = -27 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -14 \end{array}\right. \Rightarrow S = \{-14; 2\}$.

Tổng của các phần tử thuộc tập S là : $T = -14 + 2 = -12$.

Câu 99. Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt. Tổng tất cả các phần tử của T bằng bao nhiêu?

Lời giải

Cách 1: Ta có $x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = m^3 - 3m^2 \Leftrightarrow f(x) = f(m)$ (1)

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

$f(x) = -4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		-1		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$				$+$	0	$-$	0	$+$			
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4 < f(m) < 0$ $\left\{\begin{array}{l} -1 < m < 3 \\ m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{array}\right.$.

Suy ra $T = \{1\}$. Vậy tổng tất cả các phần tử của T bằng 1.

Cách 2: Ta có $x^3-3x^2-m^3+3m^2=0 \Leftrightarrow \left(x^3-m^3\right)-3\left(x^2-m^2\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-m)\left[x^2+(m-3)x+m^2-3m\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x^2+(m-3)x+m^2-3m=0 \ (*) \end{array}\right.$

Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt, khác m

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=(m-3)^2-4\left(m^2-3m\right)>0 \\ m^2+(m-3)m+m^2-3m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)(-3m-3)>0 \\ 3m^2-6m\neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1<m<3 \\ m\neq 0 \\ m\neq 2 \end{cases} \Rightarrow m=1$ (vì $m\in\mathbb{Z}$).

Suy ra $T=\{1\}$. Vậy tổng tất cả các phần tử của T bằng 1.

Câu 100. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để đường thẳng $y=3x+m-2$ cắt đồ thị $y=(x-1)^3$ tại ba điểm phân biệt ?

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị: $3x+m-2=(x-1)^3 \Leftrightarrow m=x^3-3x^2+1 \ (1)$

Nhận xét: (1) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $(d): y=m$ và đồ thị $(C): y=x^3-3x^2+1$.

Xét hàm số $y=x^3-3x^2+1$; $y'=3x^2-6x$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -3<m<1$ nên có ba giá trị nguyên của tham số m.

Câu 101. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+mx+1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=2x+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt?

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3-3x^2+mx+1=2x+1 \Leftrightarrow x^3-3x^2+(m-2)x=0$

$\Leftrightarrow x\left(x^2-3x+m-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-3x+m-2=0 \end{array}\right.$. Đặt $f(x)=x^2-3x+m-2$.

Để đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt thì phương trình $x^3-3x^2+(m-2)x=0$ phải có 3 nghiệm phân biệt, khi đó $f(x)=0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 0. Do đó

$$\begin{cases} f(0)\neq 0 \\ \Delta>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2\neq 0 \\ 9-4(m-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ -4m>-17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ m<\dfrac{17}{4} \end{cases}.$$

Do m là số nguyên dương nên $m\in\{1,3,4\}$.

Câu 102. Với m là một tham số thực thì đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2+x-1$ và đường thẳng $y=m$ có nhiều nhất bao nhiêu giao điểm?

Lời giải

Hàm số $y=x^3-2x^2+x-1$ có tập xác định: $\mathbb{R}$; $y'=3x^2-4x+1$; $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3} \\ x=1 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		$1/3$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\dfrac{23}{27}$	↘	-1	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên đồ thi hàm số $y=x^3-2x^2+x-1$ và đường thẳng $y=m$ có nhiều nhất là ba giao điểm.

Câu 103. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3-3x^2-m^2+5m=0$ có ba nghiệm thực phân biệt?

Lời giải

Đặt $f(x)=x^3-3x^2-m^2+5m$.

Để $x^3-3x^2-m^2+5m=0$ có ba nghiệm thực phân biệt thì $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn: $f(x_1).f(x_2)<0$

Ta có: $f'(x)=3x^2-6x$; $f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

$f(0)=-m^2+5m$; $f(2)=-m^2+5m-4$.

Khi đó: $f(0).f(2)<0\Leftrightarrow (-m^2+5m)(-m^2+5m-4)<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<m<1 \\ 4<m<5 \end{array}\right.$

Vậy không có giá trị nguyên nào của m thỏa mãn.

Câu 104. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $y=(x-2)(x^2+mx+m^2-3)$ có ba nghiệm thực phân biệt?

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $(x-2)\left(x^2+mx+m^2-3\right)=0 \quad (1)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2+mx+m^2-3=0 \quad (2) \end{array}\right.$$

Để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ 4+2m+m^2-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m^2+12>0 \\ m^2+2m+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ m\neq -1 \end{cases}.$$

$m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{0;1\}$.

Câu 105. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+4$ có đồ thị (C). Gọi d là đường thẳng qua $I(1;2)$ với hệ số góc k. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của k để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt I, A, B sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB?

Lời giải

Phương trình $d: y=k(x-1)+2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d:

$$x^3-3x^2+4=kx-k+2 \Leftrightarrow x^3-3x^2-kx+k+2=0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-2x-k-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \underbrace{x^2-2x-k-2}_{g(x)}=0 \quad (*) \end{array}\right.$$

d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_g>0 \\ g(1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+3>0 \\ -3-k\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow k>-3$$

Hơn nữa theo Viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2=2x_I \\ y_1+y_2=k(x_1+x_2)-2k+4=4=2y_I \end{cases}$ nên I là trung điểm AB.

Vậy $k>-3$, hay $(-3;+\infty)$.

Mà k là giá trị nguyên âm nên $k=\{-2;-1\}$

Câu 106. Cho đồ thị $(C_m): y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$. Tổng các giá trị của tham số m để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành là $x^3-2x^2+(1-m)x+m=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-x-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-x-m=0 \quad (1) \end{array}\right.$$

(C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 1-1-m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+4m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}$ (*)

Gọi $x_3 = 1$ còn x_1, x_2 là nghiệm phương trình (1) nên theo Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = -m \end{cases}$.

Vậy $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ (thỏa (*))

chọn $m = 1$.

Câu 107. Cho hàm số $y = x^3 - (m+2)x^2 - (2m+13)x - m - 2$ có đồ thị (C_m); đường thẳng $d: y = mx + m + 8$ và điểm $I(1;4)$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m biết rằng đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A, B, C với A có hoành độ bằng -2 và tam giác IBC cân tại I.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - (m+2)x - (3m+13)x - 2m - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -1 \\ x = m+5 \end{array} \right.$

Để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A, B, C thì $\begin{cases} m \neq -7 \\ m \neq -6 \end{cases}$

Giả sử $B(-1;8), C(m+5; m^2 + 6m + 8)$. Để tam giác IBC cân tại I

thì $IB^2 = IC^2 \Leftrightarrow 20 = (m+4)^2 + (m^2 + 6m + 4)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = -6 \ (loai) \\ m = -2 \pm \sqrt{3} \end{array} \right.$

Vậy có ba giá trị của m thỏa mãn nên tổng các giá trị của m bằng -6.

Câu 108. Gọi đường thẳng d là đường thẳng đi qua $A(2;0)$ có hệ số góc $m\,(m > 0)$ cắt đồ thị $(C): y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C. Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C lên trục tung. Biết rằng hình thang $BB'C'C$ có diện tích bằng 8. Hãy tìm tổng các giá trị của tham số m.

Lời giải

Phương trình đường thẳng $d: y = m(x-2)$. Phương trình hoành độ giao điểm

$-x^3 + 6x^2 - 9x + 2 = m(x-2) \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 4x + m + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow A(2;0) \\ x^2 - 4x + m + 1 = 0 \end{array} \right.$.

Để (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4 - m - 1 > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Giả sử $B(x_1, mx_1 - 2m), C(x_2, mx_2 - 2m) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = m + 1 \end{cases}$.

Ta có $B'(0,mx_1-2m), C'(0,mx_2-2m)$.

$S_{BB'C'C}=\frac{1}{2}B'C'(BB'+CC')=8\Leftrightarrow B'C'(BB'+CC')=16.$

Mà $B'C'=|m(x_1-x_2)|, BB'=|x_1|, CC'=|x_2|$.

Do m dương nên $x_1x_2=m+1>0$ mà $x_1+x_2=4>0\Rightarrow x_1>0, x_2>0.$

$\Rightarrow B'C'=m|x_1-x_2|, BB'=x_1, CC'=x_2\Rightarrow m|x_1-x_2|(x_1+x_2)=16\Leftrightarrow m|x_1-x_2|=4$

$\Leftrightarrow m^2(x_1-x_2)^2=16\Leftrightarrow m^2\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=16\Leftrightarrow m^2(16-4m-4)=16$

$\Leftrightarrow m^3-3m^2+4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1(l) \\ m=2 \end{array}\right.$

Câu 109. Cho hàm số $f(x)=x^3-6(m+1)x^2+3(2m+1)x+2$. Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn -1. Biết rằng $S=\left(-\frac{a}{b};+\infty\right)$; trong đó a,b là các số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ là tối giản. Giá trị biểu thức $T=a+b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-6(m+1)x^2+3(2m+1)x+2=0$

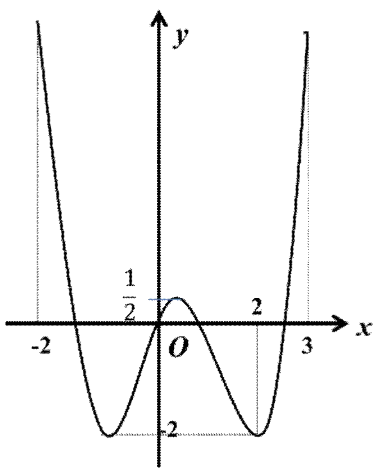
$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-(6m+5)x-2\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-(6m+5)x-2=0(*) \end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ lớn hơn -1và khác

1.Ta có: $\begin{cases} \Delta>0 \\ x_1+x_2>-2 \\ (x_1+1)(x_2+1)>0 \\ 1^2-(6m+5)-2\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 36m^2+60m+33>0 \\ 6m+5>-2 \\ 6m+4>0 \\ m\neq -1 \end{cases}\Leftrightarrow m>\frac{-2}{3}$

Do đó $a=2;b=3\Rightarrow T=a+b=5$

Câu 110. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm của phương trình $f\left(x^3-3x\right)=-1$ thuộc đoạn $[-1;2]$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đặt $t=g(x)=x^3-3x,\ x\in[-1;2]$, $g'(x)=3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $[-1;2]$

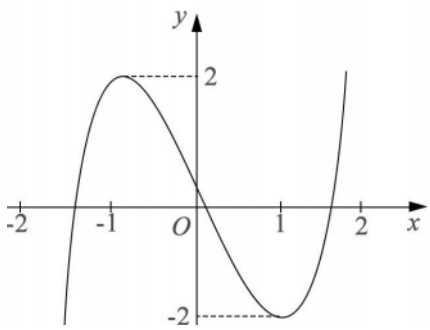
x	-1		1		2
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	2	↘	-2	↗	2

Suy ra với $t=-2$, có 1 giá trị của x thuộc đoạn $[-1;2]$.

$t\in[-2;2]$, có 2 giá trị của x thuộc đoạn $[-1;2]$.

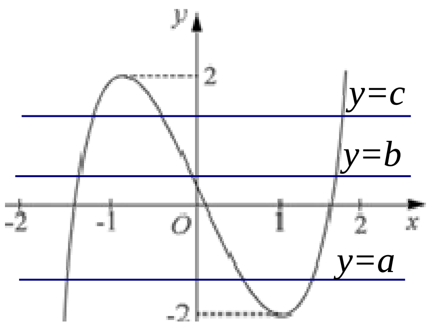
Phương trình $f\left(x^3-3x\right)=-1$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$

Câu 111. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình $f\left(f(x)\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm.

Lời giải

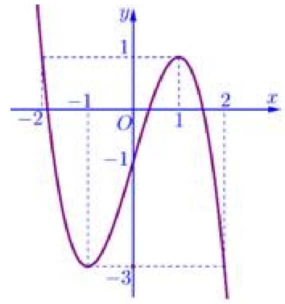


Phương trình $f(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt là: $\left[\begin{array}{l} x=a\ \left(a\in(-2;-1)\right) \\ x=b\ \left(b\in(0;1)\right) \\ x=c\ \left(c\in(1;2)\right) \end{array}\right.$

Các phương trình $f(x)=a, f(x)=b, f(x)=c$ đều có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 112. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y=f(x)$ như hình vẽ bên.



Phương trình $f\left(2-f(x)\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm phân biệt.

Lời giải

Theo đồ thị:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\ \left(-2<a<-1\right) \\ x=b\ \left(0<b<1\right) \\ x=c\ \left(1<c<2\right) \end{array}\right. \Rightarrow f\left(2-f(x)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-f(x)=a \\ 2-f(x)=b \\ 2-f(x)=c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=2-a\ (1) \\ f(x)=2-b\ (2) \\ f(x)=2-c\ (3) \end{array}\right.$$

Nghiệm của phương trình (1); (2); (3) là giao điểm của đường thẳng $y=2-a$; $y=2-b$; $y=2-c$ với đồ thị hàm số $f(x)$.

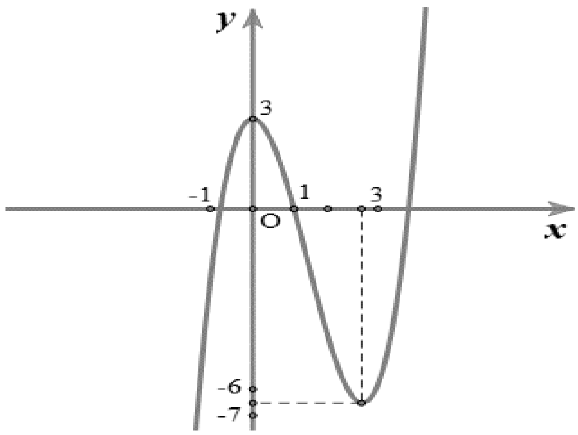
$a\in(-2;1)\Rightarrow 2-a\in(3;4)$ suy ra phương trình (1) có đúng 1 nghiệm.

$b\in(0;1)\Rightarrow 2-b\in(1;2)$ suy ra phương trình (2) có đúng 1 nghiệm.

$c\in(1;2)\Rightarrow 2-c\in(0;1)$ suy ra phương trình (3) có 3 nghiệm phân biệt.

Kết luận: Có tất cả 5 nghiệm phân biệt.

Câu 113. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Đặt $g(x)=f\left[f(x)\right]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.



Lời giải

Ta có $g'(x)=f'(x).f'\left[f(x)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'\left[f(x)\right]=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=0 \\ f(x)=m\in(1;3) \end{array}\right.$.

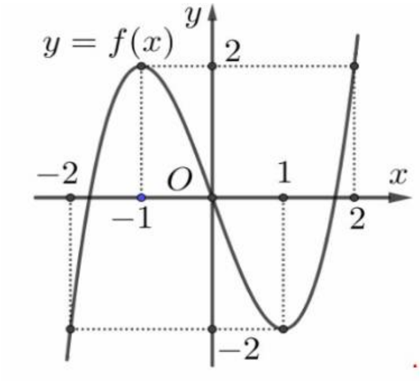
Phương trình $f'(x)=0$ có 2 nghiệm

Phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm

Phương trình $f(x)=m\in(1;3)$ có 3 nghiệm

Vậy phương trình có 8 nghiệm.

Câu 114. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f(x)\right)=f(x)$.

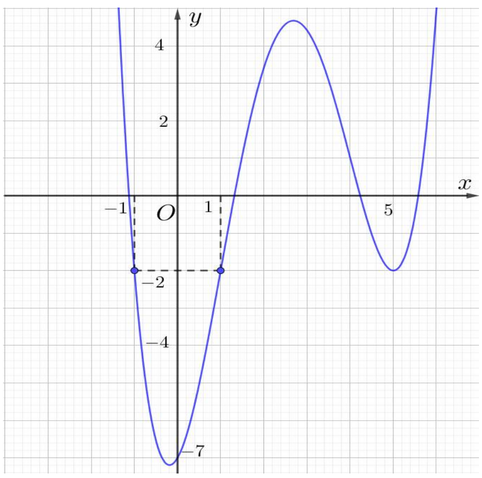
Lời giải

Đặt $t=f(x)$ phương trình trở thành: $f(t)=t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\t=0\\t=2\end{array}\right.$ vì đồ thị $f(t)$ cắt đường thẳng y = t tại ba điểm

có hoành độ $t=-2;t=0;t=2$. Vậy:

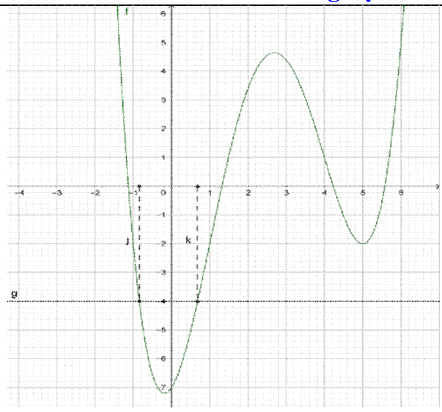
$$\left[\begin{array}{l}f(x)=-2\\f(x)=0\\f(x)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}x=1;x=-2\\x=0;x=a\in(-2;-1);x=b\in(1;2)\\x=-1;x=2\end{array}\right..$$

Câu 115. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ của phương trình $f(\sin x)=-4$.

Lời giải



Xét phương trình: $f(\sin x) = -4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \alpha \in (-1;0) \\ \sin x = \beta \in (0;1) \end{array}\right.$

Vì $x \in (0;\pi) \Rightarrow \sin x \in (0;1]$. Suy ra với $x \in (0;\pi)$ thì $f(\sin x) = -4 \Leftrightarrow \sin x = \beta \in (0;1)$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x \in (0;\pi)$(thỏa mãn).

Câu 116. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $f(1-3x) = 6$ có bao nhiêu nghiệm âm?

Lời giải

Xét $g(x) = f(1-3x) \Rightarrow g'(x) = -3f(1-3x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-3x = -1 \\ 1-3x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3} \\ x = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$+\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(1-3x) = 6$ có một nghiệm âm.

Câu 117. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$			0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-8	↗	5	↗	13	↘	$-\infty$

Phương trình $f(\cos x)=\dfrac{13}{3}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$?

Lời giải

Đặt $t=\cos x$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1]$.

Phương trình $f(\cos x)=\dfrac{13}{3}$ trở thành $f(t)=\dfrac{13}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên trên ta có phương trình $f(t)=\dfrac{13}{3}$ có đúng một nghiệm $t\in(0;1)$

Với một nghiệm $t\in(0;1)$, thay vào phép đặt ta được phương trình $\cos x=t$ có hai nghiệm phân biệt thuộc thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Vậy phương trình $f(\cos x)=\dfrac{13}{3}$ có hai nghiệm phân biệt thuộc thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Câu 118. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	2	↘	$-\infty$

Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[-2\pi;2\pi]$ của phương trình $f(\sin x)-1=0$.

Lời giải

Ta có $-1\le\sin x\le 1\ \forall x$, nên từ bảng biến thiên suy ra $f(\sin x)-1=0$

$\Leftrightarrow f(\sin x)=1\Leftrightarrow\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi\ \ k\in Z$

Mà $x\in[-2\pi;2\pi]\Rightarrow x=-2\pi;-\pi;0;\pi;2\pi$

Vậy số nghiệm của phương trình là 5 nghiệm.

Câu 119. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$ của phương trình $3f(2\sin x)+1=0$.

Lời giải

Đặt $t=2\sin x$. Vì $x\in[-\pi;\pi]$ nên. $t\in[-2;2]$.

$\Rightarrow 3f(t)+1=0 \Leftrightarrow f(t)=-\dfrac{1}{3}$.

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(t)=-\dfrac{1}{3}$ có 2 nghiệm $t_1\in(-2;0)$ và $t_2\in(0;2)$.

Suy ra $\sin x=\dfrac{t_1}{2}\in(-1;0)$ và $\sin x=\dfrac{t_2}{2}\in(0;1)$.

Với $\sin x=\dfrac{t_1}{2}\in(-1;0)$ thì phương trình có 2 nghiệm $-\pi<x_1<x_2<0$.

Với $\sin x=\dfrac{t_2}{2}\in(0;1)$ thì phương trình có 2 nghiệm $0<x_3<x_4<\pi$.

Vậy phương trình có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$.

Câu 120. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		**-1**		**0**		**1**		$+\infty$
f '(x)		+	**0**	-	**0**	+	**0**	-	
f (x)	$-\infty$	$\nearrow$	**3**	$\searrow$	**1**	$\nearrow$	**3**	$\searrow$	$-\infty$

Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$ của phương trình $3f(\sin 2x)-5=0$.

Lời giải

Đặt $t=\sin 2x$. Khi đó: $3f(\sin 2x)-5=0$ trở thành $3f(t)-5=0 \Leftrightarrow f(t)=\dfrac{5}{3}(1)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có 4 nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} t_1=a\in(-\infty;-1)\\ t_2=b\in(-1;0)\\ t_3=c\in(0;1)\\ t_4=d\in(1;+\infty)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x=a\in(-\infty;-1)\,(1')\\ \sin 2x=b\in(-1;0)\quad(2')\\ \sin 2x=c\in(0;1)\quad(3')\\ \sin 2x=d\in(1;+\infty)\;(4')\end{array}\right.$$

Ta thấy:

+) (1’) vô nghiệm.

+) Với $x \in [-\pi; 2\pi]$ thì (2') có 6 nghiệm..

+) Với $x \in [-\pi; 2\pi]$ thì (3') có 6 nghiệm..

+) (4') vô nghiệm.

Vậy, với $x \in [-\pi; 2\pi]$ thì phương trình $3f(\sin 2x) - 5 = 0$ có tất cả 12 nghiệm.

CHỦ ĐỀ 2

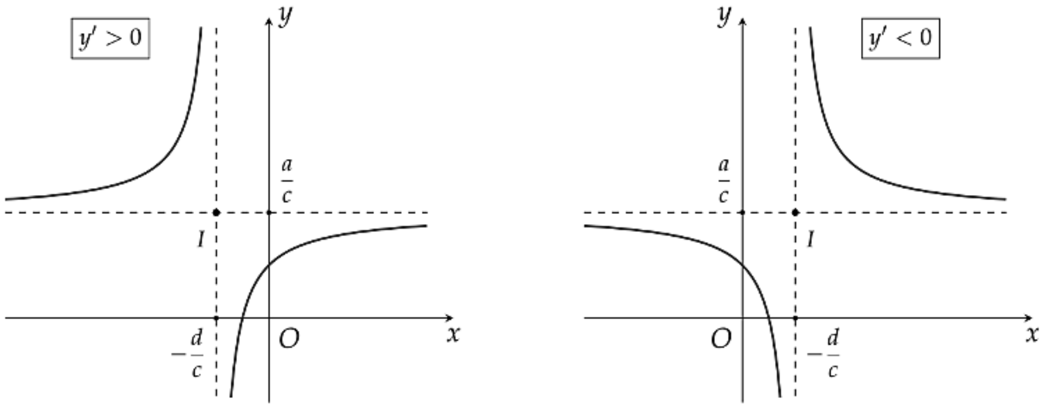
KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN, VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ HỮU TỈ $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$

VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số phân thức: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$.

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.
- Đạo hàm: $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.
- Phương trình các đường tiệm cận: Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$ và đường tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$.
- Đồ thị nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng: $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$
- Đồ thị nhận đường phân giác tạo bởi hai đường tiệm cận làm trục đối xứng.
- Giao với Ox: $y=0\Rightarrow x=-\dfrac{b}{a}$; giao với Oy: $x=0\Rightarrow y=\dfrac{b}{d}$

2. Các dạng đồ thị của hàm số phân thức: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$.



PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1
KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ PHÂN THỨC

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\ (c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$$

Bài 1. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x}{2x+1}$ b) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ c) $y=\dfrac{x+1}{x-2}$

Bài 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ b) $y=\dfrac{x+3}{1-x}$ c) $y=\dfrac{5+x}{2-x}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

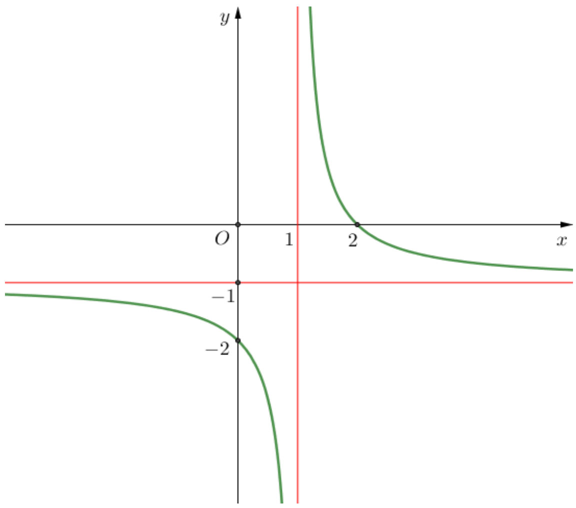
a) $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ b) $y=\dfrac{x+2}{2x-1}$ c) $y=\dfrac{4+2x}{x-1}$

d) $y=\dfrac{3}{x+1}$ e) $y=1-\dfrac{4}{1-x}$ f) $y=2-\dfrac{2}{x+1}$

DẠNG 2
XÁC ĐỊNH HỆ SỐ CỦA HÀM SỐ

Bài 1. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R}$ và $c\neq 0)$. Biết rằng đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $(-1;7)$ và giao điểm hai tiệm cận là $(-2;3)$. Giá trị biểu thức $\dfrac{2a+3b+4c+d}{7c}$ bằng bao nhiêu?

Bài 2. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên dưới, với a, b, $c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+2b+3c$?



Bài 3. Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{ax-6}{bx-c}$ $\left(a,b,c\in\mathbb{R}\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

Trong các số a,b,c có bao nhiêu số âm?

DẠNG 3

BÀI TOÁN LIÊN QUAN HÀM SỐ HỮU TỈ $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$

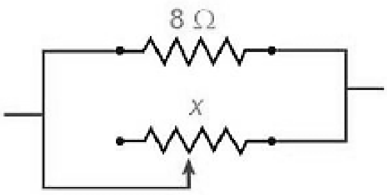
Bài 1. Một cốc chứa 30 ml dung dịch KOH (Potassium Hydroxide) với nồng độ 100 mg/ml. Một bình chứa dung dịch KOH khác với nồng độ 8 mg/ml được trộn vào cốc.

a) Tính nồng độ KOH trong cốc sau khi trộn $x\,(\text{ml})$ từ bình chứa, kí hiệu là $C(x)$.

b) Coi $C(x)$ là hàm số xác định với $x\geq 0$. Khảo sát sự biên thiên và vẽ đồ thị của hàm số này.

c) Giải thích tại sao nồng độ KOH trong cốc giảm theo x nhưng luôn lớn hơn 8 mg/ml

Bài 2. Trong Vật lí, ta biết rằng khi mắc song song hai điện trở R_1 và R_2 thì điện trở tương đương R của mạch điện được tính theo công thức $R=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$



Giả sử một điện trở $8\,\Omega$ được mắc song song với một biến trở như hình bên. Nếu điện trở đó được kí hiệu là $x(\Omega)$ thì điện trở tương đương R là hàm số của x. Vẽ đồ thị của hàm số $y=R(x)$, $x>0$ và dựa vào đồ thị đã vẽ, hãy cho biết:

a) Điện trở tương đương của mạch thay đổi thế nào khi x tăng.

b) Tại sao điện trở tương đương của mạch không bao giờ vượt quá $8\,\Omega$.

Bài 3. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d:\ y=2x-3$. Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm A và B. Tính khoảng cách giữa A và B.

Bài 4. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C). Tìm m để đường thẳng $(d): y=-x+m$ cắt *(C)* tại hai điểm phân biệt.

Bài 5. Cho là đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. Tìm k để đường thẳng $d: y=kx+2k+1$ cắt tại hai điểm phân biệt A,B sao cho khoảng cách từ A đến trục hoành bằng khoảng cách từ B đến trục hoành.

Bài 6. Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=x-m$, với m là tham số thực. Biết rằng đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho điểm $G(2;-2)$ là trọng tâm của tam giác OAB (O là gốc toạ độ). Tìm giá trị của m .

Bài 7. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:\ y=-3x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm ΔOAB thuộc đường thẳng $\Delta:\ x-2y-2=0$, với O là gốc tọa độ.

Bài 8. Cho hàm số $y=\dfrac{3x-2m}{mx+1}$ với m là tham số. Biết rằng với mọi $m\neq 0$, đồ thị hàm số luôn cắt đường thẳng $d: y=3x-3m$ tại hai điểm phân biệt A,B. Tìm tất cả các giá trị của m tìm được để đường thẳng d cắt các trục Ox,Oy lần lượt tại C,D sao cho diện tích ΔOAB bằng 2 lần diện tích ΔOCD.

Bài 9. Gọi $M\left(a;b\right)$ là điểm trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x}$ sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $d: y=2x+6$ nhỏ nhất. Tính $\left(4a+5\right)^2+\left(2b-7\right)^2$.

Bài 10. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $d: y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB\leq 2\sqrt{2}$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng bao nhiêu?

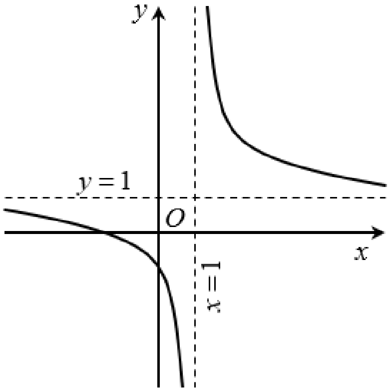
Bài 11. Gọi A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng bao nhiêu?

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM GỒM BA PHẦN

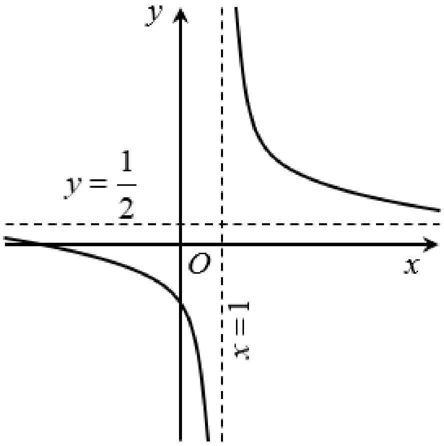
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Hàm số nào sau đây mà đồ thị có dạng như hình vẽ bên dưới?



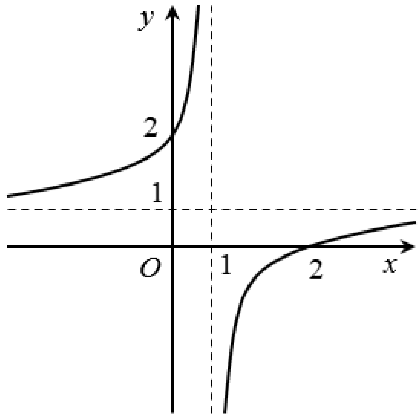
A. $y=\dfrac{x}{1-x}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{1-x}$. **C.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x}{x-1}$.

Câu 2. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?



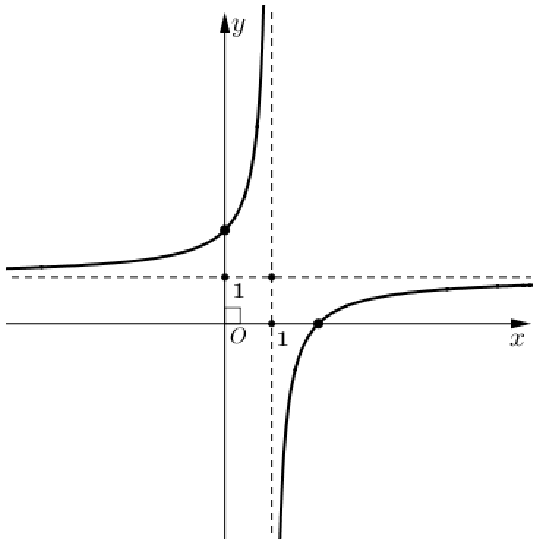
A. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-4}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x+1}{2x-2}$. **D.** $y=\dfrac{2x}{3x-3}$.

Câu 3. Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên dưới



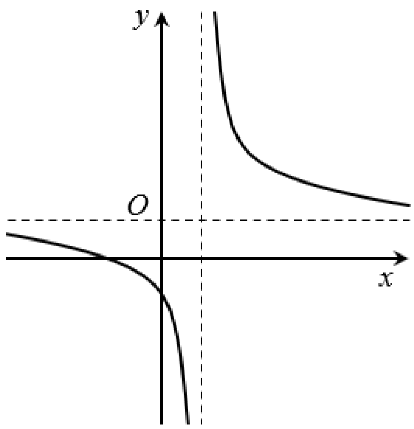
A. $y = x^3 - 3x + 2$. **B.** $y = \dfrac{x+2}{x-1}$. **C.** $y = \dfrac{x-2}{x-1}$. **D.** $y = -x^4 + 5x^2 - 1$.

Câu 4. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



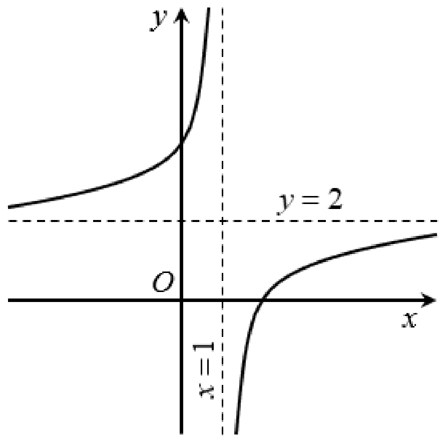
A. $y = \dfrac{x-2}{x-1}$. **B.** $y = \dfrac{x-2}{x+1}$. **C.** $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. **D.** $y = -x^3 + 3x + 2$.

Câu 5. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



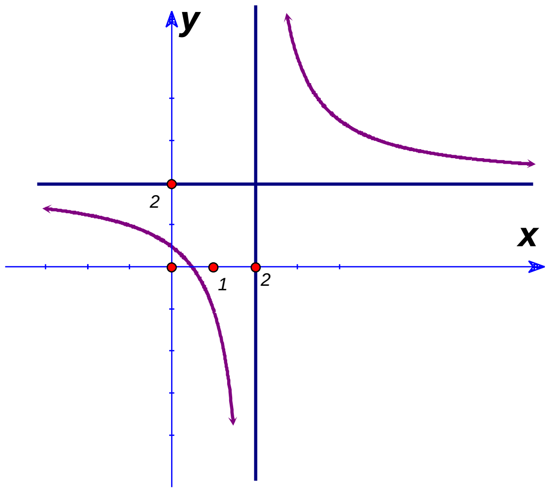
A. $y = x^4 + x^2 + 1$ **B.** $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ **C.** $y = x^3 - 3x - 1$ **D.** $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$

Câu 6. Đường cong bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



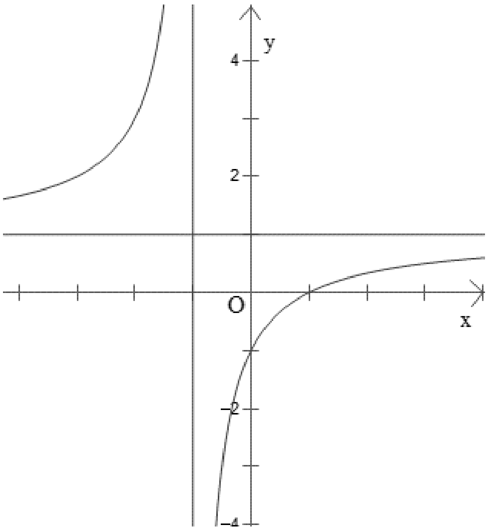
A. $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x-3}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$.

Câu 7. Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình vẽ bên dưới?



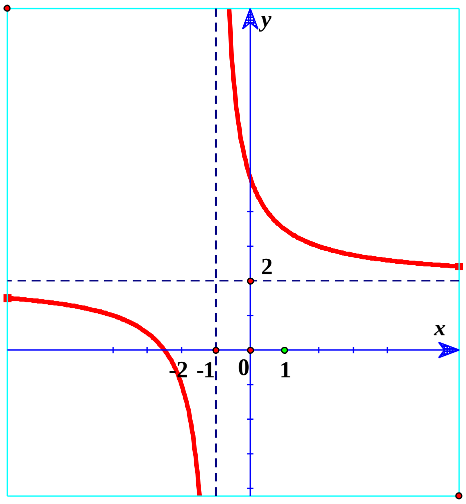
A. $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ **C.** $y=\dfrac{x-1}{x-2}$ **D.** $y=\dfrac{2x-1}{x-2}$.

Câu 8. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



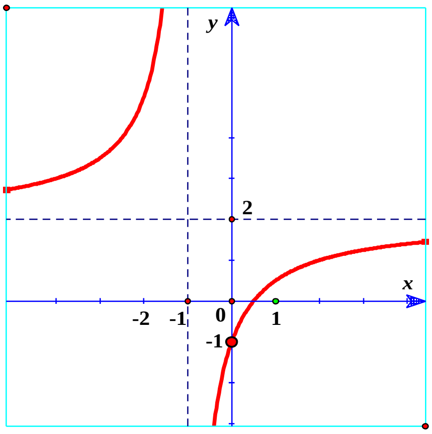
A. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{-2x+1}{2x+2}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-3x+1}{x+2}$. **D.** $y=x^3-3x^2$.

Câu 9. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=x^3+3x^2+1$. **B.** $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$. **C.** $y=-x^3-3x^2$. **D.** $y=\dfrac{2x^2-1}{x+1}$.

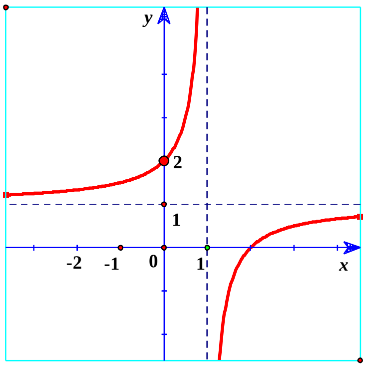
Câu 10. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



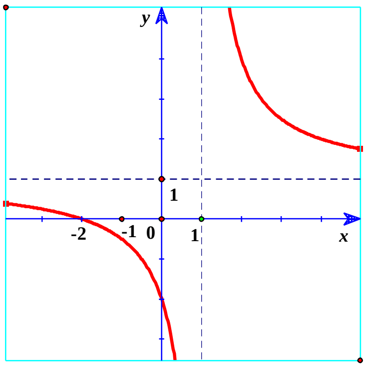
A. $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{1-2x}{x-1}$.

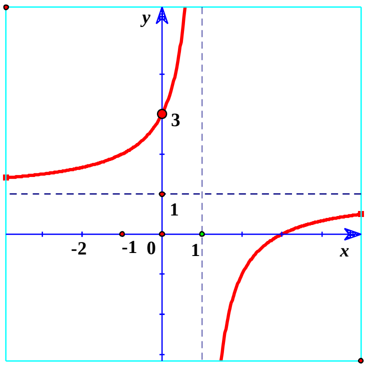
Câu 11. Hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ có đồ thị là hình vẽ nào sau đây? Hãy chọn câu trả lời đúng.

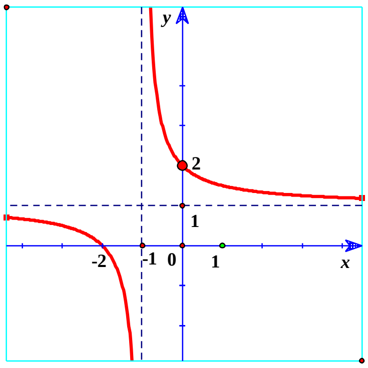
A.



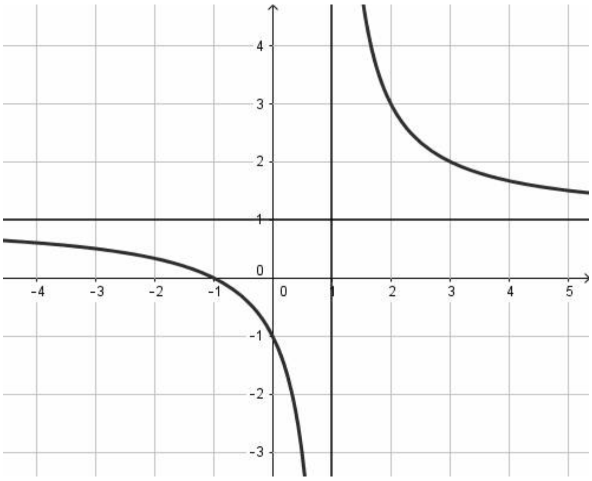
B.



C. 

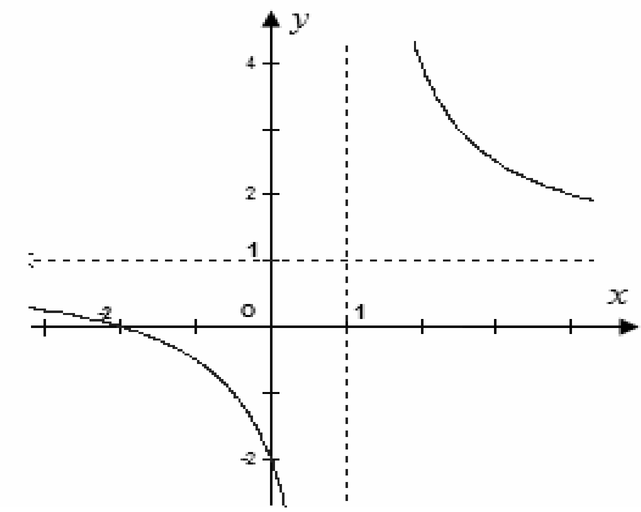
D. 

Câu 12. Đồ thị sau đây là của hàm số nào:



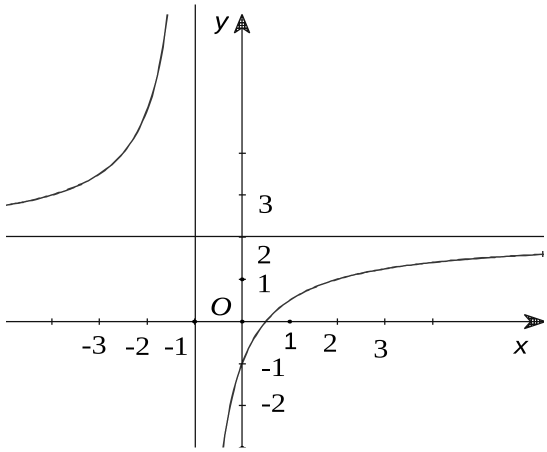
A. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{2x+1}{2x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2}{1-x}$.

Câu 13. Đồ thị trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x+2}{1-x}$.

Câu 14. Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



A. $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{x-2}$. **C.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$

Câu 15. Bảng biến thiên ở hình dưới là của một trong bốn hàm số được liệt kê dưới đây. Hãy tìm hàm số đó.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	2

A. $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{-2x-3}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{-x+1}{x-2}$.

Câu 16. Bảng biến thiên trong hình dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-1

A. $y=\dfrac{x+3}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{-x-2}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{-x+3}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{-x-3}{x-1}$.

Câu 17. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình dưới đây?

x	0		2		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2

A. $y=\dfrac{2x-7}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{2x+1}{x+2}$. **C.** $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{1-2x}{x-2}$.

Câu 18. Bảng biến thiên sau đây của hàm số nào?

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	2

A. $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$.

Câu 19. Đồ thị hàm số nào sau đây cắt trục tung tại điểm có tung độ âm?

A. $y=\dfrac{x-1}{x-3}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{x+4}$. **C.** $y=\dfrac{x-1}{x+2}$. **D.** $y=\dfrac{2x-1}{x+5}$.

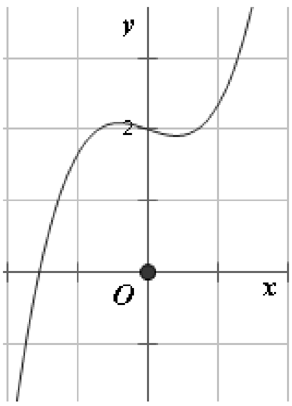
Câu 20. Hoành độ giao điểm của đồ thị $(C):\ y=\dfrac{2x+1}{2x-1}$ và đường thẳng $d: y=x+2$.

A. $x=-\dfrac{3}{2}; x=1$. **B.** $x=-\dfrac{1}{2}; x=1$ **C.** $x=-2; x=\dfrac{1}{2}$. **D.** $x=\dfrac{3}{2}; x=1$.

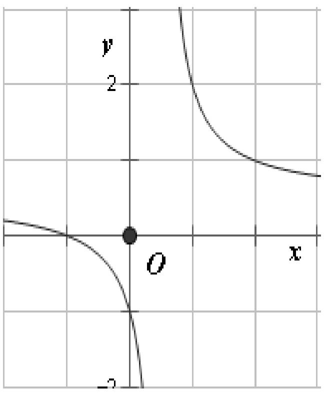
Câu 21. Biết đường thẳng $y=x-2$ cắt đồ thị $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt x_A, x_B hãy tính tổng x_A+x_B

A. $x_A+x_B=2$. **B.** $x_A+x_B=1$. **C.** $x_A+x_B=5$. **D.** $x_A+x_B=3$.

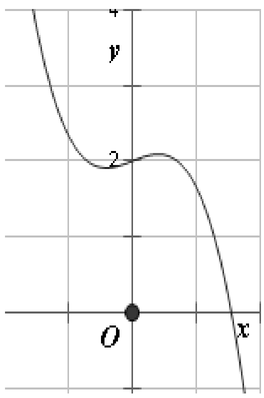
Câu 22. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx+1}{m-x}$ (m là tham số) có dạng nào sau đây ?



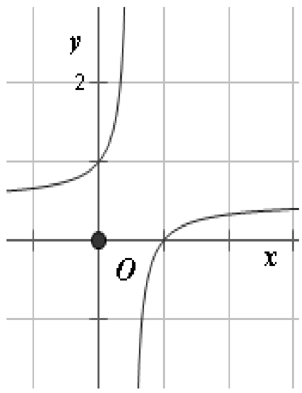
Hình (1)



Hình (2)



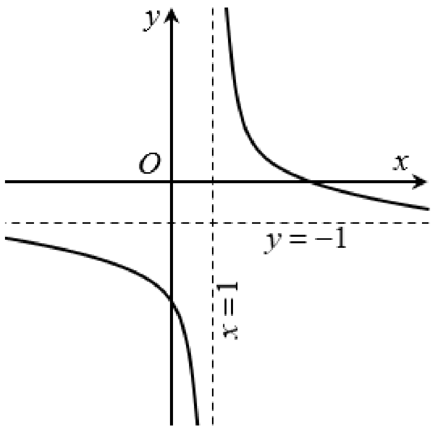
Hình (3)



Hình (4)

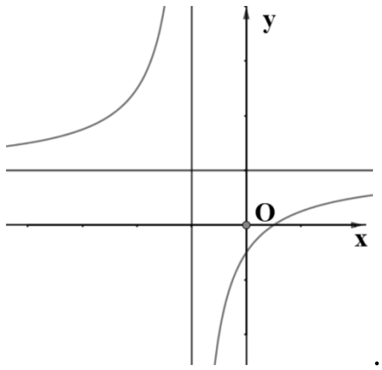
A. Hình (1) **B.** Hình (2) **C.** Hình (3) **D.** Hình (4)

Câu 23. Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $b<0<a$. **B.** $0<b<a$. **C.** $b<a<0$. **D.** $0<a<b$.

Câu 24. Hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

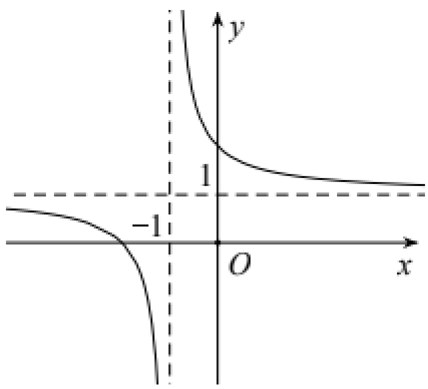


Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $ad>0$ và $bd>0$. **B.** $ad>0$ và $ab<0$.

C. $bd<0$ và $ab>0$. **D.** $ad<0$ và $ab<0$.

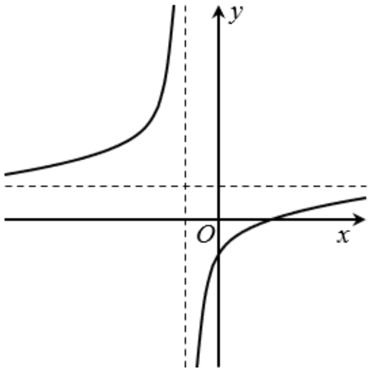
Câu 25. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

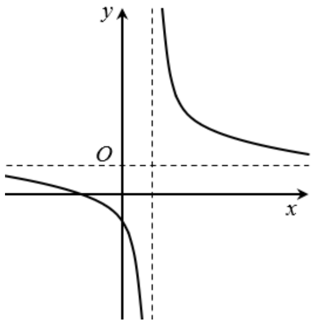
A. $0<b<a$. **B.** $0<a<b$. **C.** $b<0<a$. **D.** $a<b<0$.

Câu 26. Hình vẽ dưới là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?



A. $bd>0, ad>0$. **B.** $bd<0, ab>0$. **C.** $ad>0, ab<0$. **D.** $ab<0, ad<0$.

Câu 27. Cho hàm số $y=\dfrac{bx-c}{x-a}$ ($a\neq 0$ và $a,b,c\in\mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên.



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a>0, b<0, c-ab<0$. **B.** $a>0, b>0, c-ab<0$.

C. $a<0, b>0, c-ab<0$. **D.** $a<0, b<0, c-ab>0$.

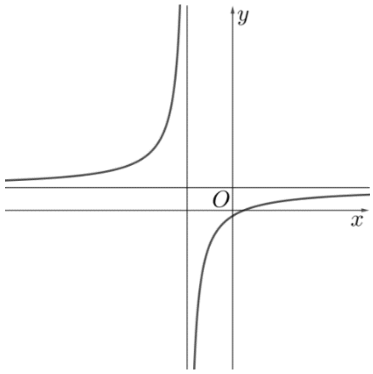
Câu 28. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
$f(x)$	$\frac{1}{2} \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow \frac{1}{2}$

Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\left[\begin{array}{l} b>\dfrac{2}{3} \\ b<0 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} b>0 \\ b<-\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$. **C.** $-\dfrac{2}{3}<b<0$. **D.** $0\le b<\dfrac{2}{3}$.

Câu 29. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

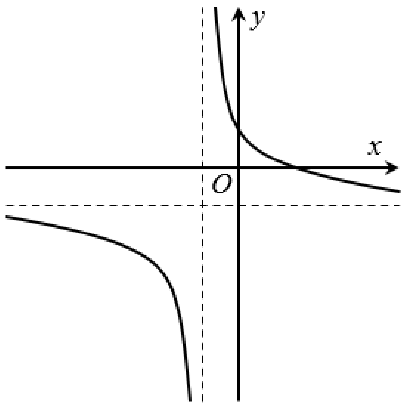
A. $\begin{cases} ad<0 \\ bc<0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} ad<0 \\ bc>0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} ad>0 \\ bc<0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} ad>0 \\ bc>0 \end{cases}$.

Câu 30. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\left(a<0\right)$ có đồ thị như sau:



Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $ab<0, bc<0, cd>0$.

B. $ab>0, bc<0, cd>0$.

C. $ab>0, bc>0, cd>0$.

D. $ab<0, bc>0, cd>0$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 31. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ có đồ thị là (C).

a) Đạo hàm cấp 1 của hàm số đã cho là $y'=\dfrac{3}{(x-2)^2}$

b) Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$

c) Đồ thị của hàm số (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

d) Giao điểm của đồ thị hàm số (C) với trục tung là điểm $\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$ và với trục hoành là điểm $(-1;0)$.

Câu 32. Cho hàm số $y=\dfrac{5+x}{2-x}$ có đồ thị là (C).

a) Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$

c) Đồ thị của hàm số (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

d) Đồ thị của hàm số (C) có tâm đối xứng là điểm $I(-2;1)$.

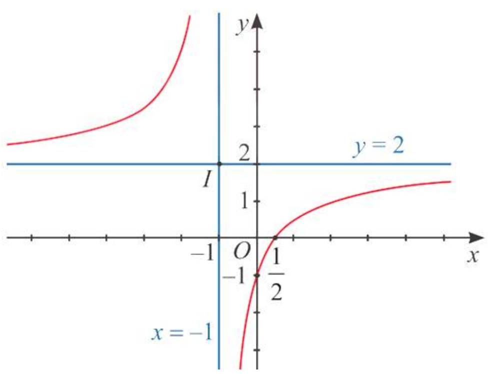
Câu 33. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị là (C).

a) Hàm số có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

b) Bảng biến thiên của hàm số đã cho là:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	2 ↗		$+\infty$ || $-\infty$		↗ 2

c) Đồ thị (C) là hình sau:



d) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số (C) là điểm $I(2;-1)$.

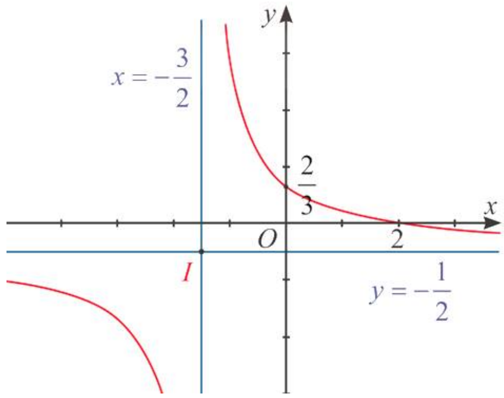
Câu 34. Cho hàm số $y=\dfrac{-x+2}{2x+3}$ có đồ thị là (C).

a) Hàm số có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

b) Bảng biến thiên của hàm số đã cho là:

x	$-\infty$		$-\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$-\dfrac{1}{2}$ ↘		$-\infty$ || $+\infty$	↘	$-\dfrac{1}{2}$

c) Đồ thị (C) là hình sau:



d) Các trục đối xứng của đồ thị hàm số (C) là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x=-\dfrac{3}{2}$ và $y=-\dfrac{1}{2}$.

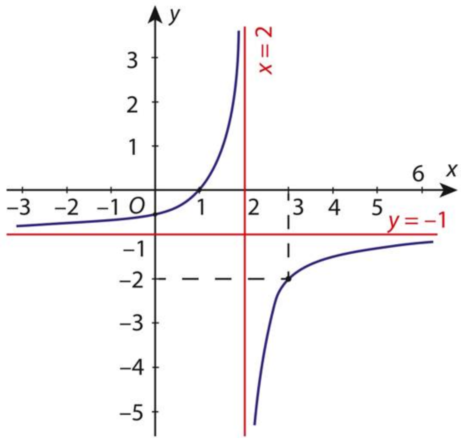
Câu 35. Cho hàm số $y=\dfrac{-x+1}{x-2}$ có đồ thị là (C).

a) Hàm số có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

b) Bảng biến thiên của hàm số đã cho là:

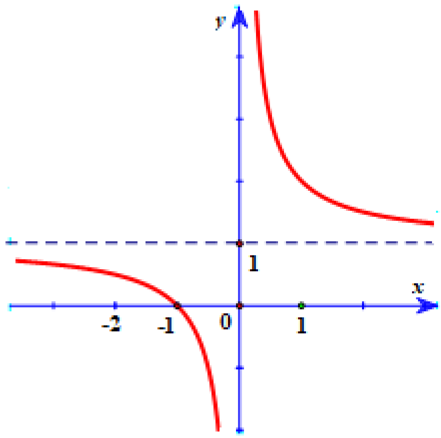
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	2 ↘		$-\infty$ || $+\infty$	↘	2

c) Đồ thị (C) là hình sau:



d) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số (C) là điểm $I(-1;2)$.

Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



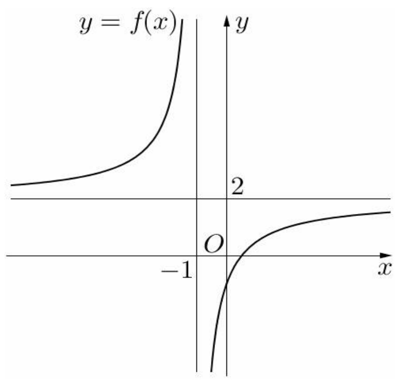
a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=0$, tiệm cận ngang $y=1$.

b) Điểm $(0;1)$ là tâm đối xứng đồ thị hàm số $y=f(x)$

c) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

d) Hàm số $y=f(x)$ có hai cực trị.

Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



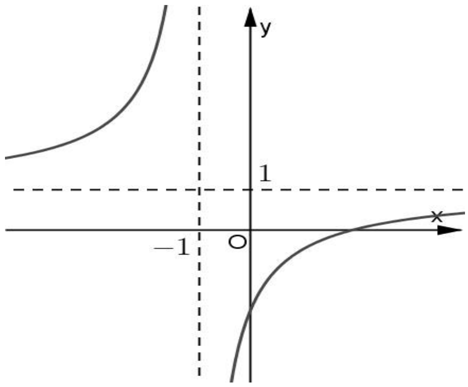
a) Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có tiệm cận đứng $x=2$, tiệm cận ngang $y=-1$.

b) Điểm $\left(-1;2\right)$ là tâm đối xứng đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$

c) Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trong khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(-1;+\infty\right)$.

d) Hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+1}$.

Câu 38. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $\left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-1\right\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trong khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(-1;+\infty\right)$.

b) Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-1$.

c) Điểm $\left(1;-1\right)$ là tâm đối xứng đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$

d) Hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$.

Câu 39. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $\left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$ và có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	-2 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-2

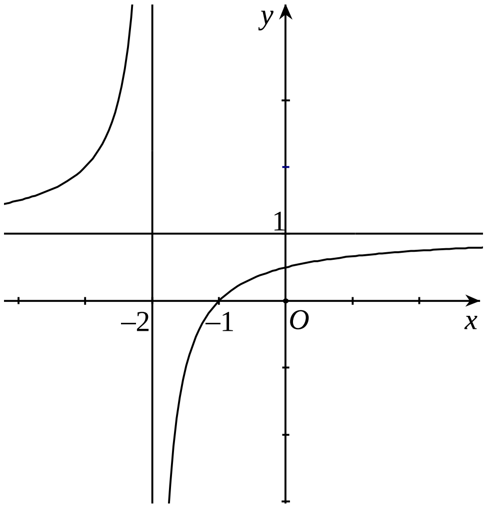
a) Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trong khoảng $\left(-\infty;1\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$.

b) Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-2$.

c) Hàm số $y=f\left(x\right)$ không có điểm cực trị.

d) Hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm số $y=\dfrac{-2x+3}{x-1}$.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



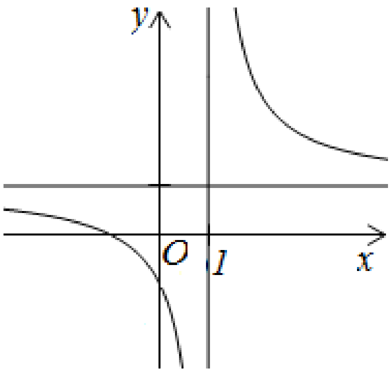
a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$ và tiệm cận ngang là $y = -2$.

b) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2),(-2;+\infty)$.

c) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có tọa độ là $(0;-1)$.

d) Hàm số $y = f(x)$ là hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+2}$.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



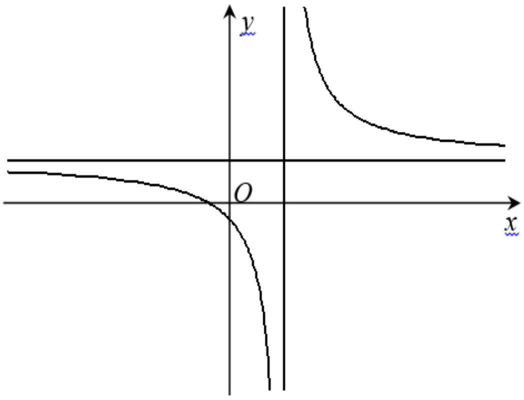
a) $\dfrac{d}{c} > 0$

b) $\dfrac{a}{c} < 0$

c) $ad < 0$

d) $y' < 0$ với mọi $x \neq 1$.

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ liên tục trên từng khoảng xác định và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



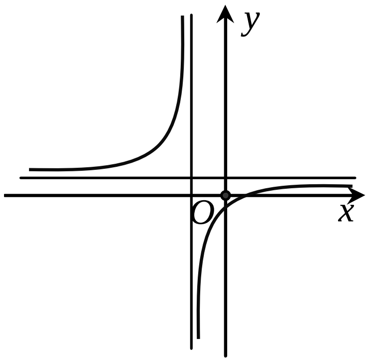
a) $\frac{d}{c} < 0$

b) $\frac{a}{c} > 0$

c) $ad < bc$

d) $ad < 0$.

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ liên tục trên từng khoảng xác định và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



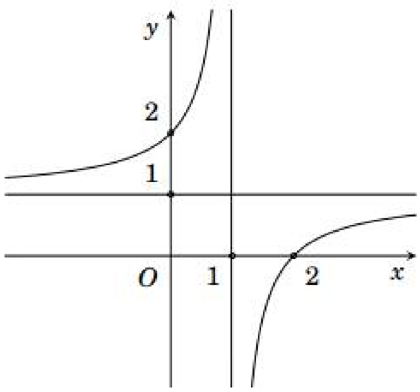
a) a và b trái dấu

b) b và d cùng dấu

c) $ad > 0$

d) $bc < 0$

Câu 44. Cho hàm số $y = \frac{x+a}{bx+c}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$

b) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(1;0)$.

c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

d) $a-3b-2c=-3$

Câu 45. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ (a,b,c là các tham số) có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1

a) Hàm số có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

b) Hàm số luôn đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$

d) $a+b+c=0$

Câu 46. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax-1}{bx+c}$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

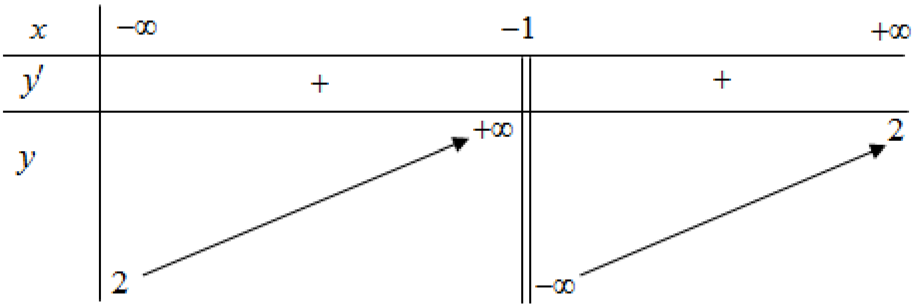
a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=\dfrac{1}{2}$

c) Đồ thị giao với trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 3

d) $b<0$ hoặc $b>\dfrac{2}{3}$

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây



a) $ac = 2$

b) $2a - c = 3$

c) $c - a = -1$

d) $b^3 - 8 < 0$.

Câu 48. Cho hầm số $y = \dfrac{mx-1}{2x+m}$ có đồ thị là (C_m) với m là tham số

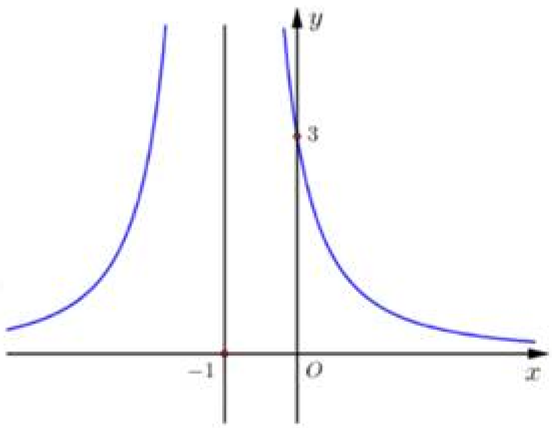
a) Khi $m = 2$ thì đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 1$

b) Khi $m = 2$ thì giao điểm của các đường tiệm cận có toạ độ $I(1;-1)$

c) Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(-1;\sqrt{2}\right)$ thì $m = 2$

d) Với mọi giá trị của tham số m thì hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như trong hình vẽ dưới đây:



Biết rằng đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $A(0;4)$.

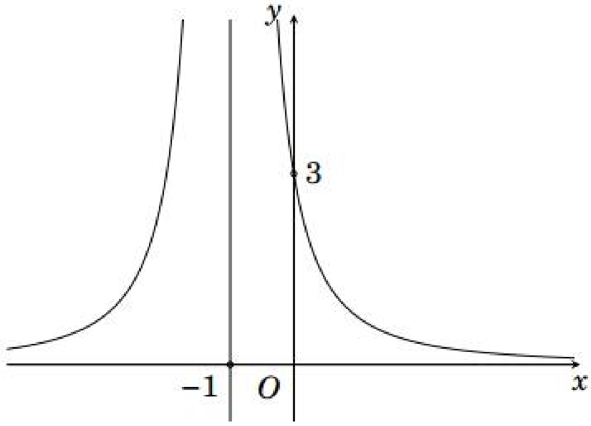
a) $b = 4d$

b) $c = d$

c) $y = \dfrac{7x+4}{x+1}$.

d) $f(2) = 18$

Câu 50. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và nhận $x=-1$ làm tiệm cận đứng như hình vẽ bên. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-3;-2]$ bằng 8



a) $f'(0)=3$

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$

c) Giá trị của $f(-3)$ bằng 8

d) Giá trị của $f(2)$ bằng 4

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 51. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+3}$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

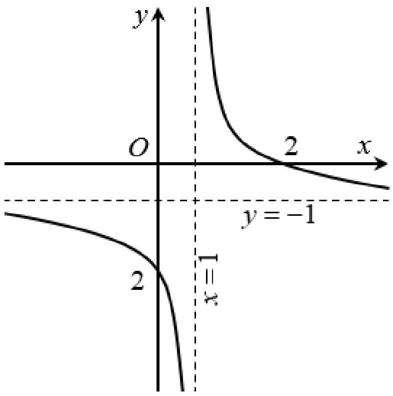
Câu 52. Cho hàm số $y=\dfrac{-x+1}{x-2}$ có đồ thị là (C). Có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ và tung độ đều nguyên?

Trả lời: ………………..

Câu 53. Đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{2x-8}{x}$ cắt đường thẳng $\Delta: y=-x$ tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi $I(x_0;y_0)$ là tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB. Tính x_0+y_0.

Trả lời: ………………..

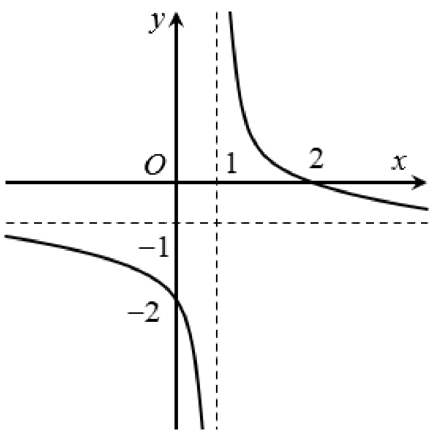
Câu 54. Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ bên



Tích $a.b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

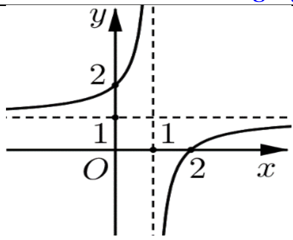
Câu 55. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Giá trị của $a+2b+3c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

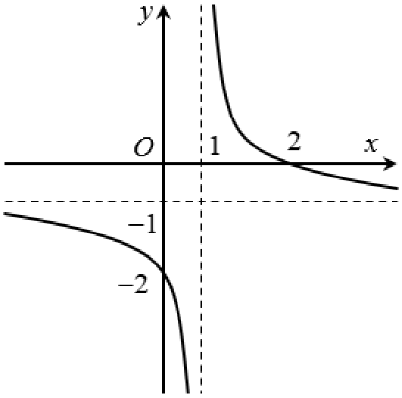
Câu 56. Đường cong ở hình dưới đây là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+a}{bx+c}$, với $a,b,c\in\mathbb{R}$.



Khi đó giá trị biểu thức $T = a - 3b - 2c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

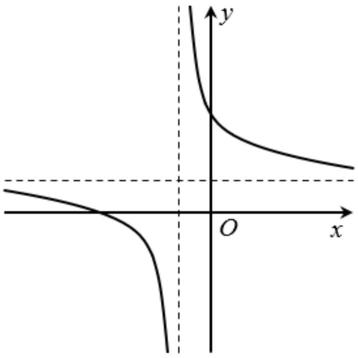
Câu 57. Cho hàm số $y = \dfrac{ax - b}{x - 1}$ có đồ thị như hình vẽ.



Khi đó giá trị biểu thức $T = a + b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

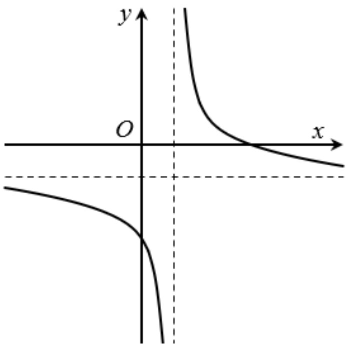
Câu 58. Cho hàm số $y = \dfrac{ax + b}{x + 1}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Trong hai số a, b có tất cả bao nhiêu số âm?

Trả lời: ………………..

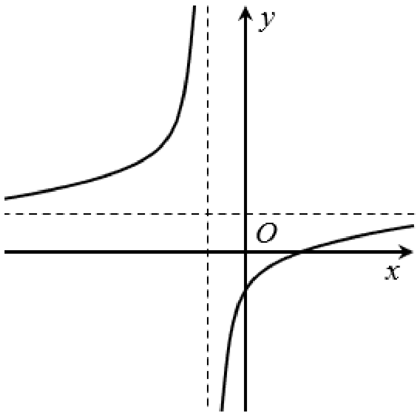
Câu 59. Cho hàm số $y = \dfrac{ax + 4 - b}{cx + b}$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Trong hai số a,b có tất cả bao nhiêu số âm?

Trả lời: ………………..

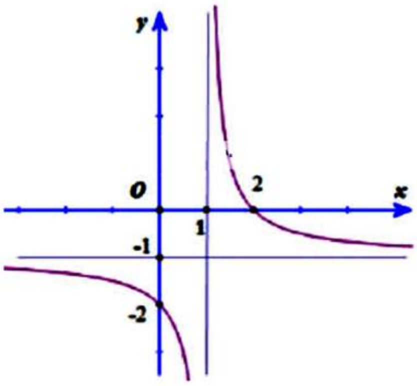
Câu 60. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình bên dưới.



Biết rằng a là một số thực dương, hỏi trong các số b,c,d có tất cả bao nhiêu số dương?

Trả lời: ………………..

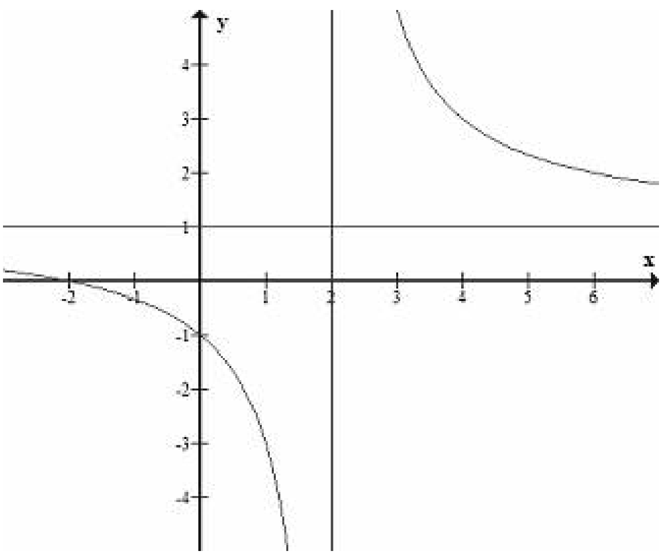
Câu 61. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ và các hệ số a, b, c là các số nguyên.



Tính giá trị của biểu thức $T=a-3b+2c$.

Trả lời: ………………..

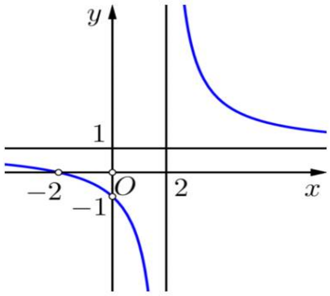
Câu 62. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+2}{cx+b}$ có đồ thị như hình vẽ a, b, c là các số nguyên.



Tính giá trị của biểu thức $T = 2025a - b + 2c$.

Trả lời: ………………..

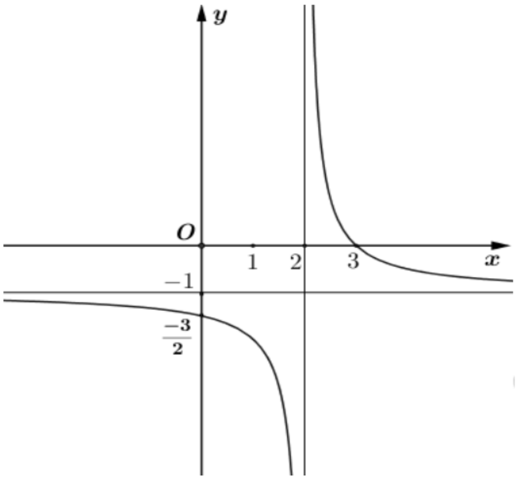
Câu 63. Cho hàm số $y = \dfrac{x-a}{bx+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$.

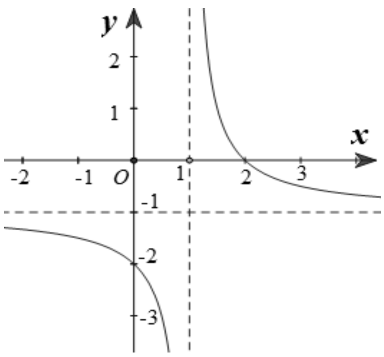
Trả lời: ………………..

Câu 64. Cho hàm số $y = \dfrac{ax+3}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính giá trị của $a - 2c$.



Trả lời: ………………..

Câu 65. Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$ (với $a, b, c \in \mathbb{R}$).



Khi đó tổng $a + b + c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 66. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax+1}{bx+c}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$+$	
$f(x)$	2	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	2

Trong các số a,b,c có bao nhiêu số dương ?

Trả lời: ………………..

Câu 67. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax-4}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	1

Trong các số a,b,c có bao nhiêu số dương?

Trả lời: ………………..

Câu 68. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	1

Trong các số a,b và c có bao nhiêu số dương?

Trả lời: ………………..

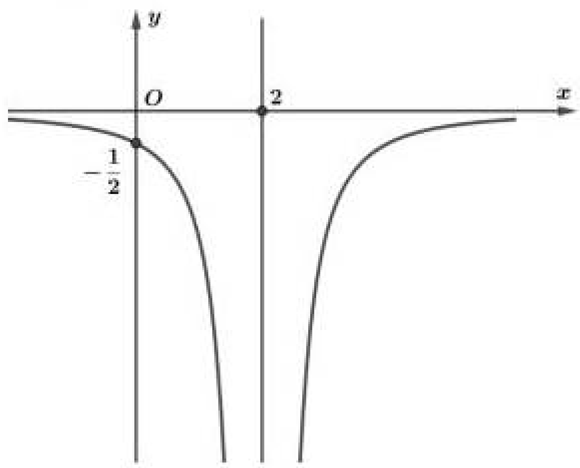
Câu 69. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax-3}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	3	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	3

Trong các số a,b và c có bao nhiêu số âm?

Trả lời: ………………..

Câu 70. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ và nhận $x=2$ làm tiệm cận đứng như hình vẽ sau:



Biết rằng đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ đi qua điểm $A\left(0;2\right)$. Giá trị $f\left(3\right)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 71. Cho hàm số $y=\dfrac{3x-4}{x-2}$ có đồ thị (C).

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C).

b) Biết trên đồ thị hàm số (C) có điểm $M(a;b)$ hoặc điểm $N(c;d)$ $(a,b,c,d\in\mathbb{Z})$ cách đều 2 đường tiệm cận của đồ thị (C). Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c+d$.

Câu 72. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C).

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C).

b) Biết trên đồ thị hàm số (C) có điểm $Q(a;b)$ và điểm $P(c;d)$ (với $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$) đối xứng nhau qua đường thẳng MN biết $M(-3;0)$ và $N(-1;-1)$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c+d$.

Câu 73. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C).

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C).

b) Tìm điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $d:y=-2x+2$ bằng $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.

Câu 74. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x-1}$ có đồ thị (C).

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C).

b) Biết trên đồ thị hàm số (C) có điểm $M\left(\dfrac{a-\sqrt{b}}{2};\dfrac{c-\sqrt{d}}{2}\right)$ hoặc điểm $N\left(\dfrac{e+\sqrt{f}}{2};\dfrac{g+\sqrt{h}}{2}\right)$ $(a,b,c,d,e,f,g,h\in\mathbb{Z})$ cách đều hai điểm $A(2;0)$ và $B(0;2)$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c+d+e+f+g+h$.

Câu 75. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Biết trên đồ thị hàm số (C) có điểm $M(a;b)$ hoặc điểm $N(c;d)$ $(a,b,c,d\in\mathbb{Z})$ mà tổng khoảng cách từ điểm M hoặc điểm N đến hai tiệm cận của đồ thị (C) nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c+d$.

Câu 76. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm thuộc (C) sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là lớn nhất ?

Câu 77. Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:y=x-2m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương là $(a;b)$. Tính giá trị biểu thức $a+b$

Câu 78. Biết rằng có hai giá trị m_1, m_2 của tham số m để đường thẳng $d: y = m - x$ và đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ có đúng một điểm chung. Giá trị $m_1 + m_2$ bằng bao nhiêu?

Câu 79. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để đồ thị hàm số $y = \frac{2mx + 3m + 1}{2x - m^2}$ cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng -4?

Câu 80. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x + m}{x + 1}$ cắt đường thẳng $y = 1 - x$ tại hai điểm phân biệt?

Câu 81. Cho hàm số $y = \frac{2x - 1}{x - 1}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 4$?

Câu 82. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x - 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x - 3}{x + 1}$ (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương là $(a; b)$. Tính $T = a + b$.

Câu 83. Cho hàm số $y = \frac{(2m-1)x - m}{x + m}$ $(m \neq 0)$ có đồ thị (C_m). Biết rằng tồn tại duy nhất một đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$ sao cho (C_m) luôn tiếp xúc với (d). Tính giá trị của $a + b$

Câu 84. Cho hàm số $y = \frac{x + m}{x - 1}$ có đồ thị là đường cong (H) và đường thẳng Δ có phương trình $y = x + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để đường thẳng Δ cắt đường cong (H) tại hai điểm phân biệt nằm về hai nhánh của đồ thị?

Câu 85. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m sao cho đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$ tại hai điểm phân biệt A, B và $AB \leq 4$.

Câu 86. Cho hàm số $y = \frac{x + 2}{x + 1}(C)$ và đường thẳng $(d): y = x + m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên m thuộc khoảng $(-10; 10)$ để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm về hai phía của trục hoành?

Câu 87. Cho hàm số $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$ có đồ thị (C) và điểm $P(2; 5)$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tam giác PAB đều.

Câu 88. Giả sử $m = -\frac{b}{a}$ (với $a, b \in \mathbb{Z}^+$) là giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = -3x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $\Delta: x - 2y - 2 = 0$, với O là gốc toạ độ. Tính $a + 2b$.

Câu 89. Cho hàm số $y=\dfrac{3x+2}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=ax+2b-4$. Đường thẳng d cắt (C) tại A, B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O. Khi đó $T=a+b$ bằng bao nhiêu?

Câu 90. Gọi (H) là đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$. Điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc (H) có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất, với $x_0<0$ khi đó x_0+y_0 bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

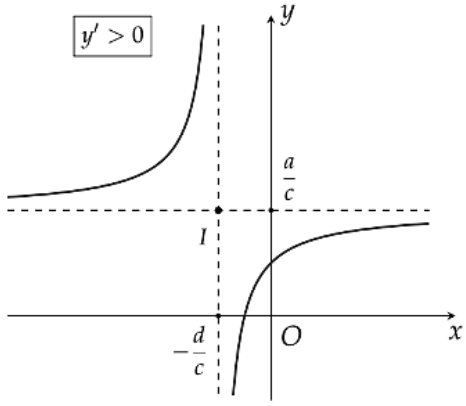
CHỦ ĐỀ 2

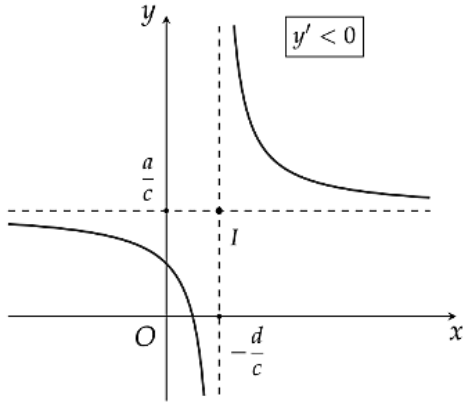
KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN, VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ HỮU TỈ $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số phân thức: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$.

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.
- Đạo hàm: $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.
- Phương trình các đường tiệm cận: Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$ và đường tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$.
- Đồ thị nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng: $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$
- Đồ thị nhận đường phân giác tạo bởi hai đường tiệm cận làm trục đối xứng.
- Giao với Ox: $y=0\Rightarrow x=-\dfrac{b}{a}$; giao với Oy: $x=0\Rightarrow y=\dfrac{b}{d}$

2. Các dạng đồ thị của hàm số phân thức: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$.





PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1
KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ PHÂN THỨC

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\ (c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$$

Bài 1. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y=\frac{x}{2x+1}$ b) $y=\frac{x+1}{x-1}$ c) $y=\frac{x+1}{x-2}$

Lời giải

a) $y=\frac{x}{2x+1}$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

• Sự biến thiên

+ Chiều biến thiên

Ta có: $y'=\frac{1}{(2x+1)^2}>0\ \forall x\neq -\frac{1}{2}$.

Do $y'>0$ với mọi $x\neq -\frac{1}{2}$ nên hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

+ Cực trị: Hàm số không có cực trị.

+ Các giới hạn:

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$ nên đường thẳng $y=\frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-}y=\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-}\frac{x}{2x+1}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+}y=\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+}\frac{x}{2x+1}=-\infty$ nên đường thẳng $x=-\frac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	$\frac{1}{2}$ ↗	$+\infty$	||	$-\infty$ ↗	$\frac{1}{2}$

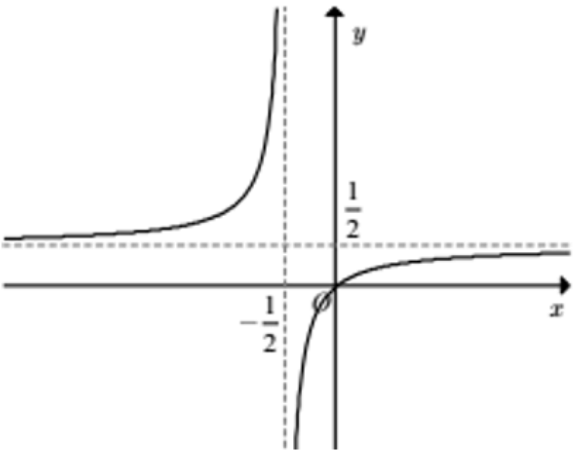
- Đồ thị:

 + Giao điểm của đồ thị với trục tung tại điểm $(0;0)$.

 + Giao điểm của đồ thị với trục hoành tại điểm $(0;0)$.

 + Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $I\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

 + Đồ thị nhận đường phân giác tạo bởi hai đường tiệm cận đứng $x=-\frac{1}{2}$ và tiệm cận ngang $y=\frac{1}{2}$ làm trục đối xứng.



b) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

- Sự biến thiên

 + Chiều biến thiên

 Ta có: $y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}<0\ \ \forall x\neq 1$.

 Do $y'<0$ với mọi $x\neq 1$ nên hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

 + Cực trị: Hàm số không có cực trị.

 + Các giới hạn:

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 1$ nên đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có: $\lim\limits_{x\to1^-} y = \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x+1}{x-1} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} y = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+1}{x-1} = +\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$-$	
y	$1 \searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty \searrow$	1

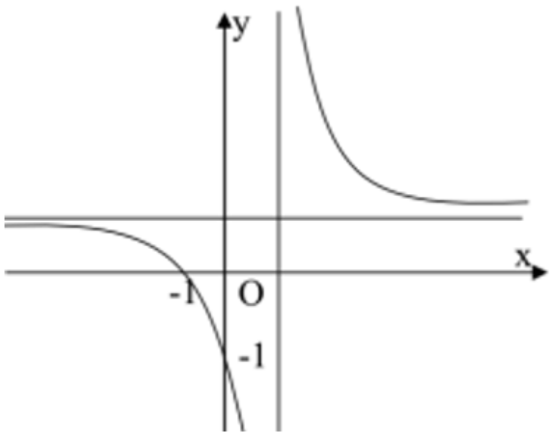
• Đồ thị:

+ Giao điểm của đồ thị với trục tung tại điểm $(0;1)$.

+ Giao điểm của đồ thị với trục hoành tại điểm $(-1;0)$.

+ Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $I(1;1)$.

+ Đồ thị nhận đường phân giác tạo bởi hai đường tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận ngang $y=1$ làm trục đối xứng.



c) $y=\dfrac{x+1}{x-2}$

Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Sự biến thiên: $y' = -\dfrac{3}{(x-2)^2} < 0$ với mọi $x \neq 2$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Tiệm cận:

$\lim\limits_{x\to2^-} y = \lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x+1}{x-2} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+} y = \lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x+1}{x-2} = +\infty$;

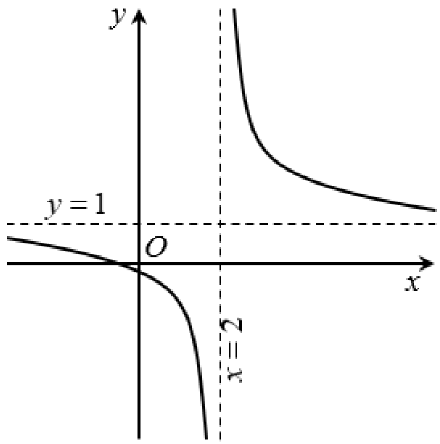
$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x-2} = 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x-2} = 1$.

Do đó, đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
$f(x)$	$1 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 1$

Đồ thị



Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là điểm $(-1;0)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2;1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng.

Bài 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ b) $y = \dfrac{x+3}{1-x}$ c) $y = \dfrac{5+x}{2-x}$

Lời giải

a) $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Sự biến thiên: Đạo hàm : $y' = \dfrac{2(x+1)-(2x-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$ với mọi $x \neq -1$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Tiệm cận:

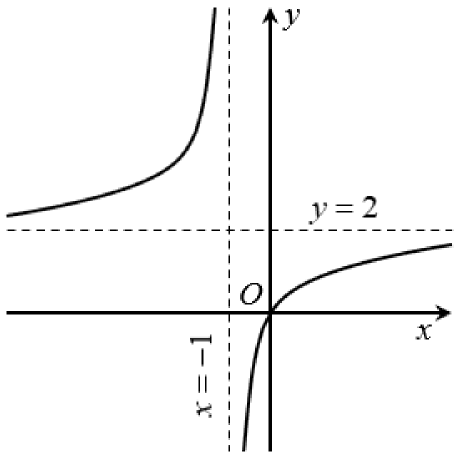
$\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = \lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{2x+1}{x+1} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{2x+1}{x+1} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}} = 2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}} = 2$

Do đó $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	2 ↗		$+\infty$ || $-\infty$		↗ 2

Đồ thị



Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $(0;1)$ và giao với trục hoành tại điểm $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $(-1;2)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận này là trục đối xứng.

b) $y=\dfrac{x+3}{1-x}$

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Sự biến thiên có đạo hàm $y'=\dfrac{(1-x)+(x+3)}{(1-x)^2}=\dfrac{4}{(1-x)^2}>0$ với mọi $x\neq1$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Tiệm cận

$\lim\limits_{x\to1^+} y = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x+3}{1-x} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-} y = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x+3}{1-x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\dfrac{3}{x}}{\dfrac{1}{x}-1} = -1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+\dfrac{3}{x}}{\dfrac{1}{x}-1} = -1$

Do đó $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

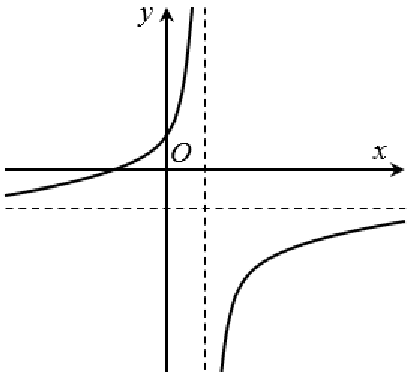
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$+$	$\|\|$	$+$
y	$-1 \nearrow +\infty$	$\|\|$	$-\infty \nearrow -1$

Đồ thị

Giao điểm của đồ thị với trục tung là $(0;3)$, giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(-3;0)$.

Đồ thị của hàm số nhận giao điểm $I(1;-1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng.



c) $y=\dfrac{5+x}{2-x}$

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Sự biến thiên: Đạo hàm $y'=\dfrac{7}{(-x+2)^2}>0$ với mọi $x\neq 2$

Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x\to 2^-} y=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+3}{1-x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} y=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+3}{1-x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-1$

Do đó $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

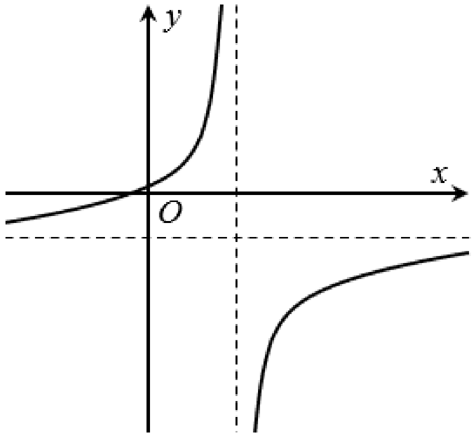
x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	$+$	$\|\|$	$+$
y	$-1 \nearrow +\infty$	$\|\|$	$-\infty \nearrow -1$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Đồ thị

Giao điểm của đồ thị với trục tung là $(0;3)$, giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(-3;0)$.

Đồ thị của hàm số nhận giao điểm $I(2;-1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng.



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$

b) $y=\dfrac{x+2}{2x-1}$

c) $y=\dfrac{4+2x}{x-1}$

d) $y=\dfrac{3}{x+1}$

e) $y=1-\dfrac{4}{1-x}$

f) $y=2-\dfrac{2}{x+1}$

DẠNG 2
XÁC ĐỊNH HỆ SỐ CỦA HÀM SỐ

Bài 1. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R}$ và $c\neq 0)$. Biết rằng đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $(-1;7)$ và giao điểm hai tiệm cận là $(-2;3)$. Giá trị biểu thức $\dfrac{2a+3b+4c+d}{7c}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

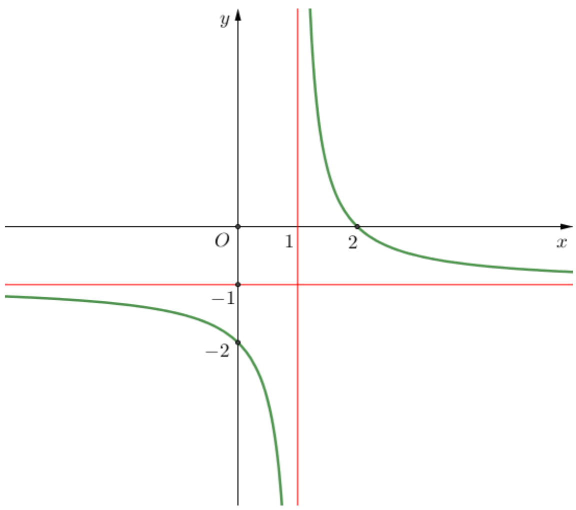
Ta có đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{a}{c}$, đường tiệm cận đứng là $x=\dfrac{-d}{c}$.

Theo bài ra, ta có: $\begin{cases}\dfrac{a}{c}=3\\ \dfrac{-d}{c}=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3c\\ d=2c\end{cases}$.

+ Điểm $(-1;7)$ thuộc đồ thị hàm số $f(x)$ nên $\dfrac{-a+b}{-c+d}=7\Leftrightarrow\dfrac{-3c+b}{-c+2c}=7\Leftrightarrow b=10c$.

Vậy $\dfrac{2a+3b+4c+d}{7c}=\dfrac{2.(3c)+3.(10c)+4c+2c}{7c}=6$.

Bài 2. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên dưới, với a, b, $c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+2b+3c$?



Lời giải

Từ đồ thị hàm số, ta suy ra

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=-1$.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(2;0)$, $B(0;-2)$.

Từ biểu thức hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ (vì đồ thị hàm số là đồ thị hàm nhất biến nên $ac-b\neq 0$), ta suy ra

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-c$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=a$.

Đồ thị hàm số đi qua $A\left(-\dfrac{b}{a};0\right)$, $B\left(0;\dfrac{b}{c}\right)$.

Đối chiếu lại, ta suy ra $c=-1$, $a=-1$, $b=2$.

Vậy $T=a+2b+3c=(-1)+2.2+3(-1)=0$.

Bài 3. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax-6}{bx-c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

Trong các số a,b,c có bao nhiêu số âm?

Lời giải

Từ bảng biến thiên của hàm số, ta thấy đồ thị có hai đường tiệm cận, trong đó tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

Suy ra $\begin{cases}\dfrac{c}{b}=-2\\ \dfrac{a}{b}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}bc<0\\ ab>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b>0,c<0,a>0\ \ (1)\\ b<0,c>0,a<0\ \ (2)\end{array}\right.$

Lại có hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định $f'(x)=\dfrac{-ac+6b}{(bx-c)^2}<0\Rightarrow ac>6b$.

Ta thấy (1) không thể xảy ra do nếu $b>0$ thì $ac>6b>0$; và (2) có thể xảy ra do nếu $c>0,a<0$ thì $6b<ac<0$.

Vậy trong các số a,b,c có hai số âm.

DẠNG 3

BÀI TOÁN LIÊN QUAN HÀM SỐ HỮU TỈ $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(\mathrm{c}\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$

Bài 1. Một cốc chứa 30 ml dung dịch KOH (Potassium Hydroxide) với nồng độ 100 mg / ml. Một bình chứa dung dịch KOH khác với nồng độ 8 mg / ml được trộn vào cốc.

a) Tính nồng độ KOH trong cốc sau khi trộn $x\ (\text{ml})$ từ bình chứa, kí hiệu là $C(x)$.

b) Coi $C(x)$ là hàm số xác định với $x\geq 0$. Khảo sát sự biên thiên và vẽ đồ thị của hàm số này.

c) Giải thích tại sao nồng độ KOH trong cốc giảm theo x nhưng luôn lớn hơn 8 mg/ml

Lời giải

a) Tổng khối lượng KOH sau khi trộn là: $30.100+8x=3000+8x\,(mg)$.

Tổng thể tích dung dịch sau khi trộn là: $30+x\ (\text{ml})$

Nồng độ KOH trong cốc sau khi trộn là $C(x)=\dfrac{3000+8x}{30+x}(\text{mg / ml})$.

b) $C(x)=\dfrac{3000+8x}{30+x}, x\geq 0$. Tập xác định của hàm số là $D=[0;+\infty)$.

Sự biến thiên: Đạo hàm $C'(x)=\dfrac{8(30+x)-(3000+8x)}{(30+x)^2}=\dfrac{-2760}{(30+x)^2}<0$ với mọi $x\neq -30$.

Hàm số luôn nghịch biến trên $[0;+\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Tiệm cận: $\lim\limits_{x\to+\infty} C(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3000+8x}{30+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{3000}{x}+8}{\frac{30}{x}+1}=8$

Do đó $y=8$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (phần bên phải trục Oy).

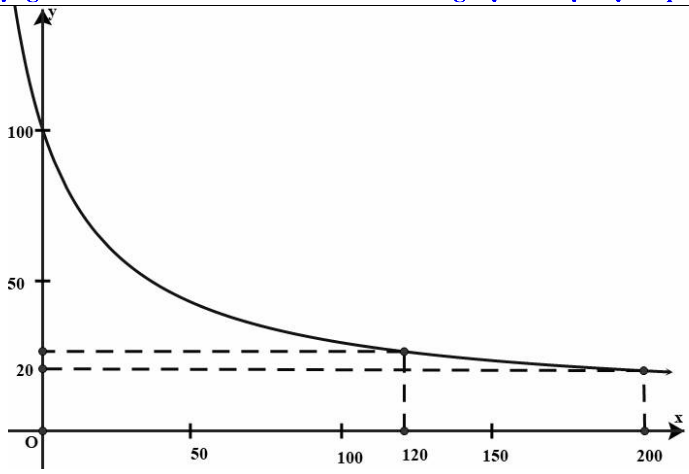
Bảng biến thiên

x	0	$+\infty$
y'	$-$	
y	100 ↘	8

Đồ thị:

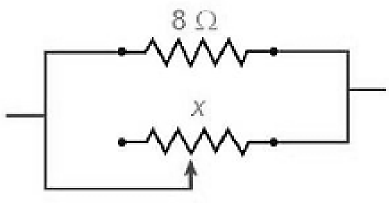
Hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0;100)$.

Hàm số đi qua điểm $\left(120;\dfrac{132}{5}\right);(200;20)$.



c) Vì $C'(x)=\dfrac{-2760}{(30+x)^2}<0,\forall x\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}C(x)=8$ nên nồng độ KOH trong cốc giảm theo x nhưng luôn lớn hơn $8\text{mg}/\text{ml}$.

Bài 2. Trong Vật lí, ta biết rằng khi mắc song song hai điện trở R_1 và R_2 thì điện trở tương đương R của mạch điện được tính theo công thức $R=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$



Giả sử một điện trở $8\,\Omega$ được mắc song song với một biến trở như hình bên. Nếu điện trở đó được ki hiệu là $x(\Omega)$ thì điện trở tương đương R là hàm số của x. Vẽ đồ thị của hàm số $y=R(x),\ x>0$ và dựa vào đồ thị đã vẽ, hãy cho biết:

a) Điện trở tương đương của mạch thay đổi thế nào khi x tăng.

b) Tại sao điện trở tương đương của mạch không bao giờ vượt quá $8\,\Omega$.

Lời giải

Ta có $y=R(x)=\dfrac{8x}{8+x},x>0$ có tập xác định $D=(0;+\infty)$.

Sự biến thiên: Đạo hàm: $y'=\dfrac{8(8+x)-8x}{(8+x)^2}=\dfrac{64}{(8+x)^2}>0,\forall x>0$

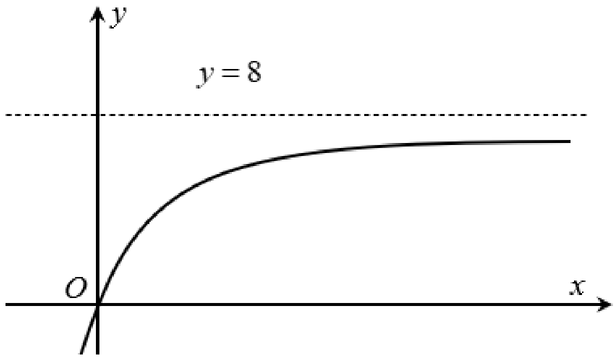
Hàm số luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$ vàm số không có cực trị. Tiệm cận: $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8}{\dfrac{8}{x}+1}=8$

Vậy $y=8$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (phần bên phải trục Oy).

Bảng biến thiên

x	0		$+\infty$
y'		$+$	
y	0	$\nearrow$	8

Đồ thị: Đồ thị hàm số giao với Ox,Oy tại $(0;0)$; Đồ thị hàm số đi qua $\left(1;\frac{8}{9}\right);\left(2;\frac{8}{5}\right)$



a) Vì $y'=\frac{64}{(8+x)^2}>0,\forall x>0$ nên khi x tăng thì điện trở tương đương của mạch cũng tăng.

b) Vì $y'=\frac{64}{(8+x)^2}>0,\forall x>0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y=8$ nên điện trở tương đương của mạch không bao giờ vượt quá $8\,\Omega$.

Bài 3. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d:\ y=2x-3$. Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm A và B. Tính khoảng cách giữa A và B.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d

$$\frac{2x-1}{x+1}=2x-3\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-1\\2x^2-3x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\Rightarrow y=1\quad\Rightarrow A(2;1)\\x=-\frac{1}{2}\Rightarrow y=-4\quad\Rightarrow B\left(-\frac{1}{2};-4\right)\end{array}\right.$$

Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{5}{2};-5\right)$.

Suy ra $AB=\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

Bài 4. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C). Tìm m để đường thẳng $(d): y=-x+m$ cắt *(C)* tại hai điểm phân biệt.

Lời giải

Đường thẳng $(d): y=-x+m$ cắt *(C)* tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x-1} = -x+m$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2 - (m-2)x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-2)^2 - 4(m+1) > 0 \\ 1^2 - (m-2).1 + m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m > 0 \\ 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 8 \end{array}\right.$$

Vậy, với $m < 0$ hoặc $m > 8$ thì đường thẳng (d) cắt đồ thì (C) tại hai điểm phân biệt.

Bài 5. Cho là đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$. Tìm k để đường thẳng $d: y = kx + 2k + 1$ cắt tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A đến trục hoành bằng khoảng cách từ B đến trục hoành.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{2x+1}{x+1} = kx + 2k + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ kx^2 + (3k-1)x + 2k = 0 \quad (1) \end{cases}.$$

Ycbt tương đương có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $|kx_1 + 2k + 1| = |kx_2 + 2k + 1|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = k^2 - 6k + 1 > 0 \\ k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k^2 - 6k + 1 > 0 \\ 1 - 3k + 4k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = -3 \end{cases} \Leftrightarrow k = -3.$$

Bài 6. Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = x - m$, với m là tham số thực. Biết rằng đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho điểm $G(2;-2)$ là trọng tâm của tam giác OAB (O là gốc toạ độ). Tìm giá trị của m .

Lời giải

Hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+1}$ có $y' = \dfrac{-2}{(x+1)^2} < 0$, $\forall x \in D$ và đường thẳng $d: y = x - m$ có hệ số $a = 1 > 0$ nên d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ với mọi giá trị của tham số m.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $\dfrac{x+3}{x+1} = x - m$

$\Leftrightarrow x^2 - mx - m - 3 = 0 \quad (x \neq -1)$.

Suy ra x_A, x_B là 2 nghiệm của phương trình $x^2 - mx - m - 3 = 0$.

Theo định lí Viet, ta có $x_A + x_B = m$.

Mặt khác, $G(2;-2)$ là trọng tâm của tam giác OAB nên $x_A + x_B + x_O = 3x_G$

$\Leftrightarrow x_A + x_B = 6$

$\Leftrightarrow m = 6$.

Vậy $m = 6$ thoả mãn yêu cầu đề bài.

Bài 7. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=-3x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm ΔOAB thuộc đường thẳng $\Delta: x-2y-2=0$, với O là gốc tọa độ.

Lời giải

Hoành độ hai điểm A, B là nghiệm của phương trình $-3x+m=\dfrac{2x+1}{x-1}$

$\Leftrightarrow (-3x+m)(x-1)=2x+1$ (vì $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình).

$\Leftrightarrow 3x^2-(m+1)x+m+1=0$ (*)

Điều kiện: $\Delta>0 \Leftrightarrow (m+1)^2-4.3(m+1)>0 \Leftrightarrow (m+1)(m-11)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>11 \end{array}\right.$.

Khi đó phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_A, x_B thỏa mãn $x_A+x_B=\dfrac{m+1}{3}$.

Gọi $A(x_A;-3x_A+m)$, $B(x_B;-3x_B+m)$ thì trọng tâm của tam giác OAB là $G\left(\dfrac{x_A+x_B}{3};\dfrac{-3(x_A+x_B)+2m}{3}\right)$ hay $G\left(\dfrac{m+1}{9};\dfrac{m-1}{3}\right)$.

$G\in\Delta \Leftrightarrow \dfrac{m+1}{9}-2.\dfrac{m-1}{3}-2=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{11}{5}$.

Bài 8. Cho hàm số $y=\dfrac{3x-2m}{mx+1}$ với m là tham số. Biết rằng với mọi $m\neq 0$, đồ thị hàm số luôn cắt đường thẳng $d: y=3x-3m$ tại hai điểm phân biệt A,B. Tìm tất cả các giá trị của m tìm được để đường thẳng d cắt các trục Ox,Oy lần lượt tại C,D sao cho diện tích ΔOAB bằng 2 lần diện tích ΔOCD.

Lời giải

Với $m\neq 0$, xét phương trình $\dfrac{3x-2m}{mx+1}=3x-3m \Leftrightarrow 3x^2-3mx-1=0$. (*)

Gọi tọa độ các giao điểm của d với đồ thị hàm số đã cho là: $A(x_1;3x_1-3m)$, $B(x_2;3x_2-3m)$.

Tọa độ các điểm C, D là $C(m;0)$ và $D(0;-3m)$.

Gọi $h=d_{(O,d)}$ thì h là chiều cao của các tam giác OAB và OCD.

Theo giả thiết: $S_{\Delta OAB}=2S_{\Delta OCD} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}AB.h=2.\dfrac{1}{2}CD.h \Leftrightarrow AB=2CD \Leftrightarrow AB^2=4CD^2$

$\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2+\left[3(x_1-x_2)\right]^2=4\left[m^2+(-3m)^2\right]$

$\Leftrightarrow 10(x_1-x_2)^2=40m^2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4m^2$

$\Leftrightarrow m^2+\dfrac{4}{3}=4m^2 \Leftrightarrow m^2=\dfrac{4}{9} \Leftrightarrow m=\pm\dfrac{2}{3}$.

Bài 9. Gọi $M(a;b)$ là điểm trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x}$ sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $d: y=2x+6$ nhỏ nhất. Tính $(4a+5)^2+(2b-7)^2$.

Lời giải

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d là:

$$\frac{x-2}{x}=2x+6 \Leftrightarrow 2x^2+5x+2=0\ (x\neq 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\dfrac{-1}{2} \end{array}\right..$$

Suy ra đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $M_1(-2;2)$, $M_2\left(-\dfrac{1}{2};5\right)$.

Ta có $d(M;d)\geq 0, \forall M \Rightarrow \min d(M;d)=0$ khi $M\in d$.

Mà $M\in(C) \Rightarrow M=d\cap(C) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(-2;2) \\ M\left(-\dfrac{1}{2};5\right) \end{array}\right..$

Với $M(-2;2)\Rightarrow a=-2, b=2 \Rightarrow (4a+5)^2+(2b-7)^2=18$.

Với $M\left(-\dfrac{1}{2};5\right)\Rightarrow a=-\dfrac{1}{2}, b=5 \Rightarrow (4a+5)^2+(2b-7)^2=18$.

Bài 10. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $d: y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB\leq 2\sqrt{2}$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng bao nhiêu?

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{-2x+1}{x+1}=-x+m$ (1)

Điều kiện: $x\neq -1$.

Phương trình (1) $\Rightarrow \dfrac{-2x+1}{x+1}=-x+m$

$\Leftrightarrow -2x+1=(-x+m)(x+1)$

$\Leftrightarrow -x^2+(m+1)x+m-1=0$ (2).

Để đường thẳng $d: y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B thì phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ -3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2+6m-3>0$.

$\Leftrightarrow m\in\left(-\infty;-3-2\sqrt{3}\right)\cup\left(-3+2\sqrt{3};+\infty\right)$ (3).

Gọi $A(x_A;-x_A+m), B(x_B;-x_B+m)$ là tọa độ giao điểm:

Theo đề ta có:

$AB \le 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(x_B-x_A)^2+(x_B-x_A)^2} \le 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2(x_B-x_A)^2 = 8 \Leftrightarrow x_B^2 - 2x_A.x_B + x_A^2 - 4 \le 0$

$\Leftrightarrow (x_A+x_B)^2 - 4x_A.x_B - 4 \le 0$.

$\Leftrightarrow (m+1)^2 - 4(1-m) - 4 < 0$

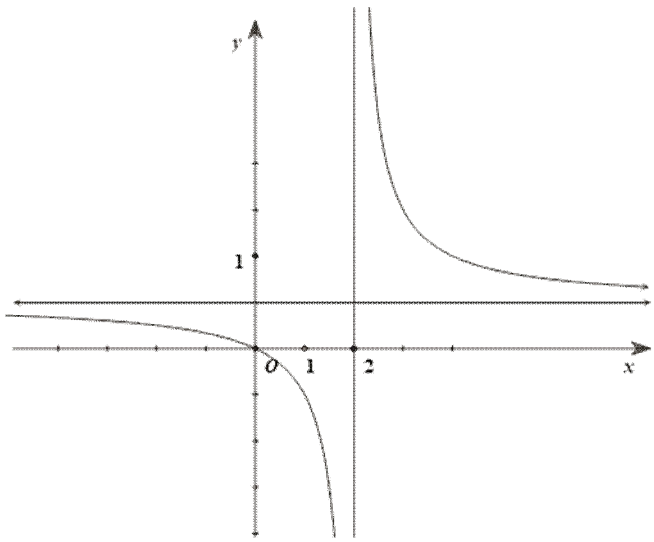
$\Leftrightarrow m^2 + 6m - 7 < 0 \Leftrightarrow m \in (-7;1)$ (4)

Từ (3) và (4) ta có $m \in \left(-7;-3-2\sqrt{2}\right) \cup \left(-3+2\sqrt{2};1\right)$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-6;0\} \Rightarrow S = 6$

Bài 11. Gọi A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải



Hàm số $y=\dfrac{x}{x-2}$ có đồ thị (C) như hình vẽ.

Gọi $A\left(a;\dfrac{a}{a-2}\right)$ và $B\left(b;\dfrac{b}{b-2}\right)$ là hai điểm thuộc hai nhánh của (C) $(a<2<b)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = \left(b-a;\dfrac{b}{b-2}-\dfrac{a}{a-2}\right) = \left(b-a;\dfrac{b-a}{(b-2)(2-a)}\right)$.

Áp dụng BĐT Côsi ta có: $(b-2)(2-a) \le \dfrac{(b-a)^2}{4}$.

Suy ra: $AB^2 = (b-a)^2 + \dfrac{(b-a)^2}{\left[(b-2)(2-a)\right]^2} \ge (b-a)^2 + \dfrac{64}{(b-a)^2} \ge 16$

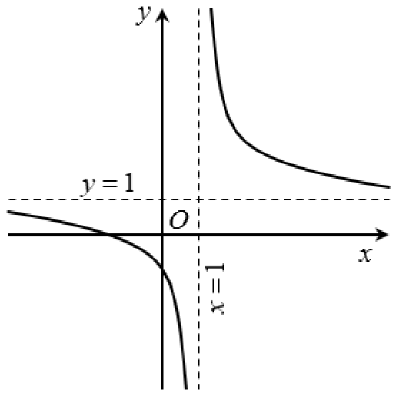
$\Rightarrow AB \ge 4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = 2-\sqrt{2}$ và $b = 2+\sqrt{2}$.

Vậy $AB_{\min} = 4$.

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Hàm số nào sau đây mà đồ thị có dạng như hình vẽ bên dưới?



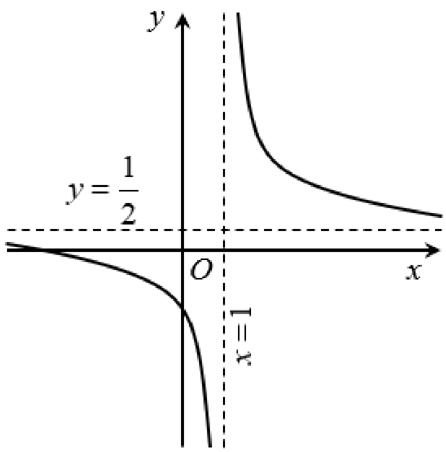
A. $y=\dfrac{x}{1-x}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{1-x}$. **C.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x}{x-1}$.

Lời giải

Chọn D.

Đồ thị trong hình bên có đường tiệm cận ngang $y=1$ và tiệm cận đứng $x=1$, và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $M\left(0;0\right)$. Mặt khác ta thấy hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định. Do đó chỉ có hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$ thỏa mãn những yếu tố trên.

Câu 2. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?



A. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-4}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x+1}{2x-2}$. **D.** $y=\dfrac{2x}{3x-3}$.

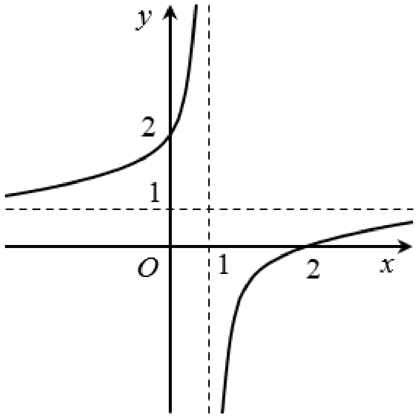
Lời giải

Chọn C.

Dựa vào đồ thị ta thầy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{2}$.

Do đó đáp án **C** thỏa mãn vì $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{2x-2} = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{2x-2} = \dfrac{1}{2}$.

Câu 3. Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên dưới



A. $y = x^3 - 3x + 2$. **B.** $y = \dfrac{x+2}{x-1}$. **C.** $y = \dfrac{x-2}{x-1}$. **D.** $y = -x^4 + 5x^2 - 1$.

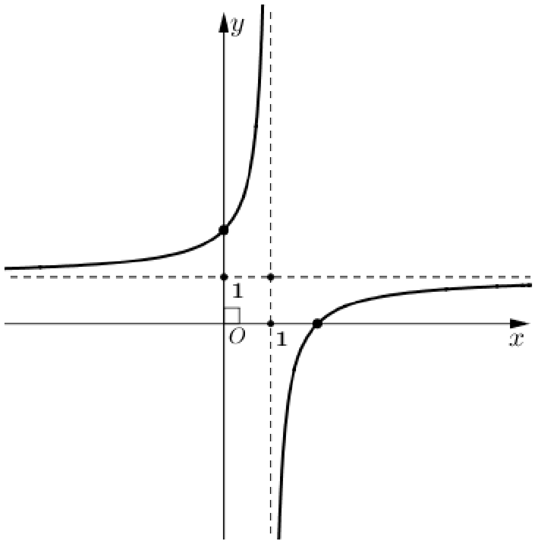
Lời giải

Chọn C.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 1$, $\lim\limits_{x\to1^+} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-} y = +\infty$ nên loại phương án **A, D**

Mặt khác quan sát đồ thị thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến nên $y = \dfrac{x-2}{x-1}$.

Câu 4. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



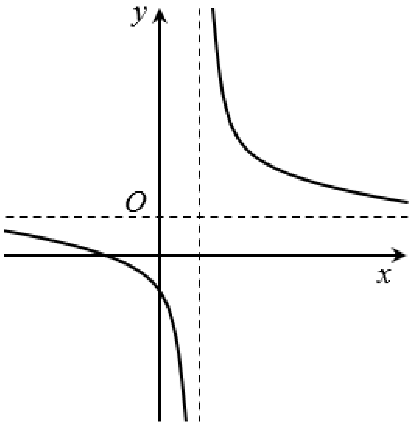
A. $y = \dfrac{x-2}{x-1}$. **B.** $y = \dfrac{x-2}{x+1}$. **C.** $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. **D.** $y = -x^3 + 3x + 2$.

Lời giải

Chọn A.

Đường cong có dạng của đồ thị hàm số hữu tỉ bậc 1 trên bậc 1, đồ thị có các đường tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận ngang $y = 1$ nên chỉ có hàm số $y = \dfrac{x-2}{x-1}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 5. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=x^4+x^2+1$ **B.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ **C.** $y=x^3-3x-1$ **D.** $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$

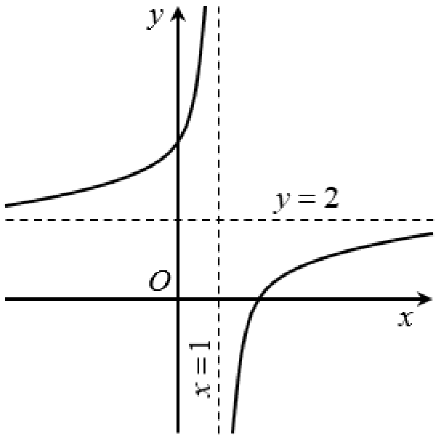
Lời giải

Chọn B.

Ta thấy đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng $x=1$ và một đường tiệm cận ngang $y=1$

Vậy đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

Câu 6. Đường cong bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x-3}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$.

Lời giải

Chọn A.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận ngang $y=2$.

Từ hình vẽ ta được hàm số đồng biến trên các khoảng xác định.

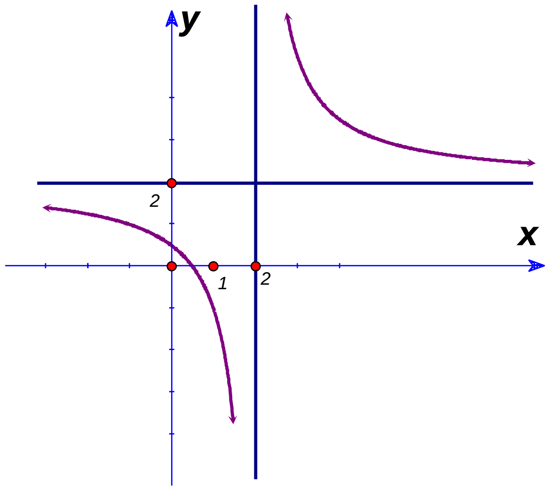
Hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$ có đạo hàm $y'=\dfrac{1}{(x-1)^2}>0$, $\forall x\neq 1$.

Hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đạo hàm $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}<0$, $\forall x\neq 1$.

Hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ có đạo hàm $y'=\dfrac{-5}{(x-1)^2}<0$, $\forall x\neq 1$.

Do đó hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$ thỏa mãn bài toán.

Câu 7. Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình vẽ bên dưới?



A. $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ **C.** $y=\dfrac{x-1}{x-2}$ **D.** $y=\dfrac{2x-1}{x-2}$.

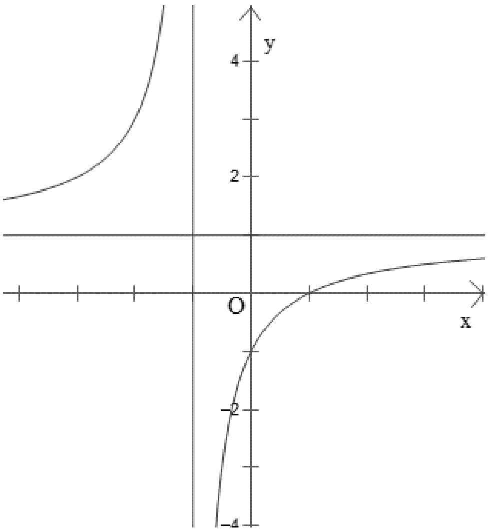
Lời giải

Chọn D.

Quan sát đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang theo thứ tự là $x=2;\ y=2$. Như vậy, chỉ có hai hàm số ở phương án A và D thoả mãn điều kiện này.

Mặt khác, theo hình vẽ, đồ thị hàm số cần tìm cắt trục Oy tại $M\left(0;\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y(0)=\dfrac{1}{2} \Rightarrow$Chỉ có hàm số cho ở phương án D thoả mãn.

Câu 8. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{-2x+1}{2x+2}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-3x+1}{x+2}$. **D.** $y=x^3-3x^2$.

Lời giải

Chọn A.

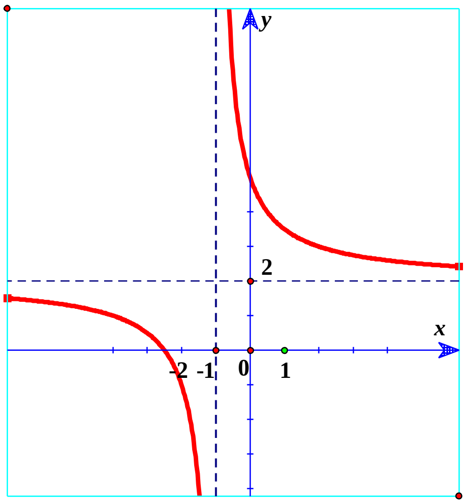
Hình vẽ trên là đồ thị của hàm số dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\left(c\neq 0;ad-bc\neq 0\right)\Rightarrow$ Loại phương án C, D

Ta thấy: Đồ thị có đường tiệm cận đứng là $x=-1$ và đường tiệm cận ngang là $y=1$

Phương án B: Đồ thị có đường tiệm cận đứng là $x=-2\Rightarrow$ loại B

$\Rightarrow$ A đúng.

Câu 9. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=x^3+3x^2+1$. **B.** $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$. **C.** $y=-x^3-3x^2$. **D.** $y=\dfrac{2x^2-1}{x+1}$.

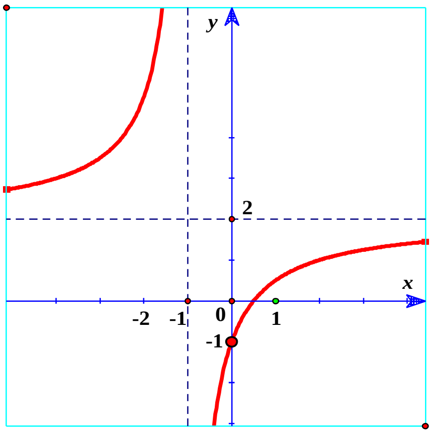
Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị của hàm số, ta có

+ đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là $x=-1;\ y=2$, do đó loại A, C, D

Câu 10. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{1-2x}{x-1}$.

Lời giải

Chọn A.

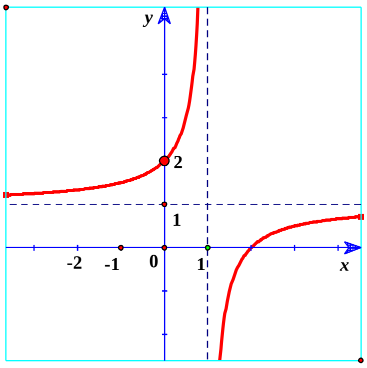
Từ đồ thị của hàm số, ta có

+ đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là $x=-1;\ y=2$, do đó loại B, D

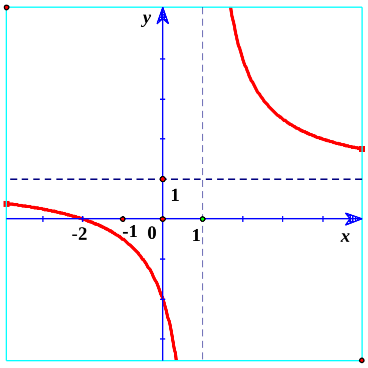
+ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0;-1)$, do đó loại C

Câu 11. Hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ có đồ thị là hình vẽ nào sau đây? Hãy chọn câu trả lời đúng.

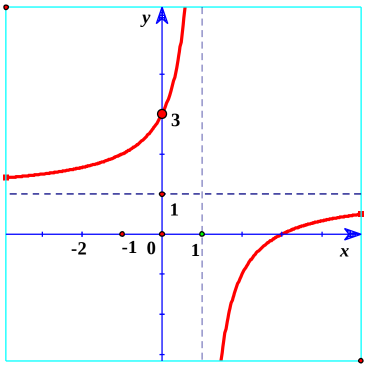
A.



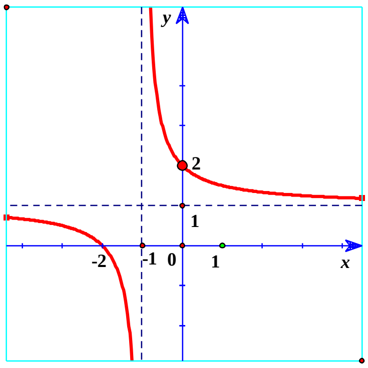
B.



C.



D.



Lời giải

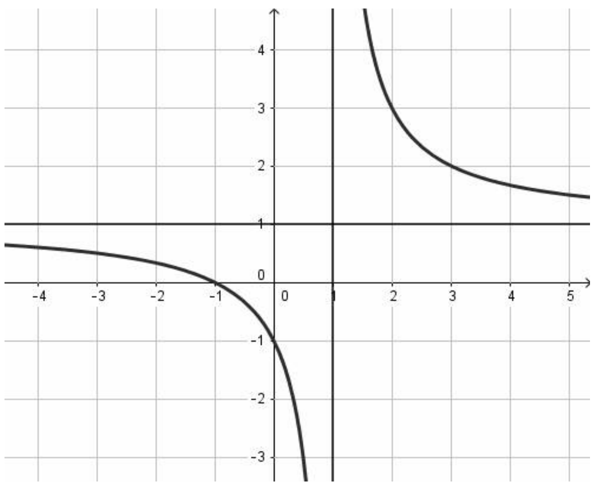
Chọn A.

Từ hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$, ta có

+ đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là $x=1;\ y=1$, do đó loại D

+ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0;2)$, do đó loại B,C

Câu 12. Đồ thị sau đây là của hàm số nào:



A. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{2x+1}{2x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2}{1-x}$.

Lời giải

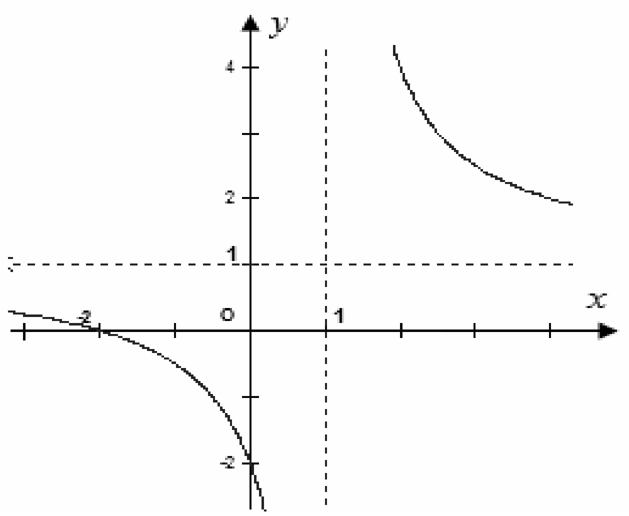
Chọn A.

Từ đồ thị của hàm số, ta có

+ đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là $x=1;\ y=1$, do đó loại B, D

+ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0;-1)$, do đó loại C

Câu 13. Đồ thị trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



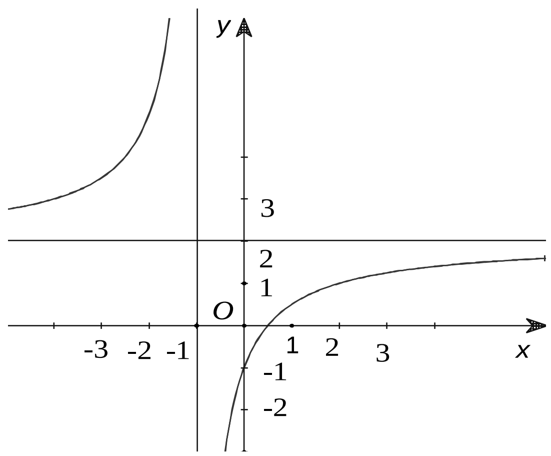
A. $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x+2}{1-x}$.

Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị của hàm số, ta có: đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là $x=1;\ y=1$, do đó loại A, B, D

Câu 14. Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



A. $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{x-2}$. **C.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$

Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị của hàm số, ta có

+ đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là $x=-1;\ y=2$, do đó loại B, C

+ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0;-1)$, do đó loại A

Câu 15. Bảng biến thiên ở hình dưới là của một trong bốn hàm số được liệt kê dưới đây. Hãy tìm hàm số đó.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$+$	
y	2	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	2

A. $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{-2x-3}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{-x+1}{x-2}$.

Lời giải

Chọn A.

Từ bảng biến thiên, ta có: đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là $x=-1;\ y=2$, do đó loại B, C, D

Câu 16. Bảng biến thiên trong hình dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$-$	
y	-1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	-1

A. $y=\dfrac{x+3}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{-x-2}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{-x+3}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{-x-3}{x-1}$.

Lời giải

Chọn C.

Từ bảng biến thiên, ta có

+ đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là $x=1;\ y=-1$, do đó loại A

+ hàm số nghịch biến $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, do đó loại B, D

Câu 17. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình dưới đây?

x	0		2		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$-$	
y	2	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	2

A. $y=\dfrac{2x-7}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{2x+1}{x+2}$. **C.** $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{1-2x}{x-2}$.

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào bảng biến thiên, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$ nên ta loại đáp án **B.**

Dựa vào bảng biến thiên, đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$ nên ta loại đáp án **D.**

Xét đáp án A có $y'=\dfrac{3}{(x-2)^2}>0$ nên loại đáp án **A.**

Câu 18. Bảng biến thiên sau đây của hàm số nào?

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	2	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	2

A. $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$.

Lời giải

Chọn C.

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$ nên loại $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$, $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$.

Xét phương án $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$: $y=\dfrac{2x+3}{x+1}\Rightarrow y'=\dfrac{-1}{(x+1)^2}<0,\forall x\neq -1$ suy ra hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định (loại).

Xét phương án $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$: $y=\dfrac{2x-1}{x+1}\Rightarrow y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0,\forall x\neq -1$ suy ra hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định (chọn).

Câu 19. Đồ thị hàm số nào sau đây cắt trục tung tại điểm có tung độ âm?

A. $y=\dfrac{x-1}{x-3}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{x+4}$. **C.** $y=\dfrac{x-1}{x+2}$. **D.** $y=\dfrac{2x-1}{x+5}$.

Lời giải

Chọn D.

Trục tung có phương trình $x=0$, ta thay $x=0$ lần lượt vào các phương án thì chỉ có phương án C cho ta $y=-\dfrac{1}{2}<0$.

Câu 20. Hoành độ giao điểm của đồ thị (C): $y=\dfrac{2x+1}{2x-1}$ và đường thẳng $d: y=x+2$.

A. $x=-\dfrac{3}{2};x=1$. **B.** $x=-\dfrac{1}{2};x=1$ **C.** $x=-2;x=\dfrac{1}{2}$. **D.** $x=\dfrac{3}{2};x=1$.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x+1}{2x-1}=x+2 \qquad (1)$

Điều kiện: $x \neq \frac{1}{2}$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow 2x+1=(2x-1)(x+2) \Leftrightarrow 2x^2+x-3=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{3}{2} \\ x=1 \end{array}\right.$$

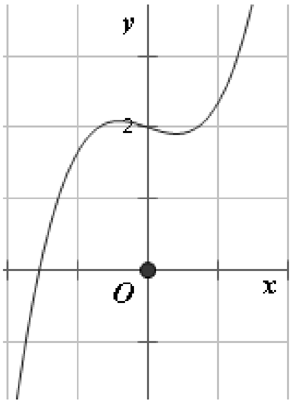
Câu 21. Biết đường thẳng $y=x-2$ cắt đồ thị $y=\frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt x_A, x_B hãy tính tổng x_A+x_B

A. $x_A+x_B=2$. **B.** $x_A+x_B=1$. **C.** $x_A+x_B=5$. **D.** $x_A+x_B=3$.

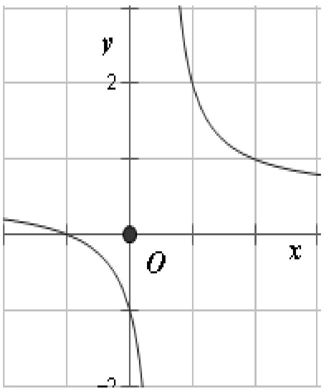
Lời giải

Chọn C.

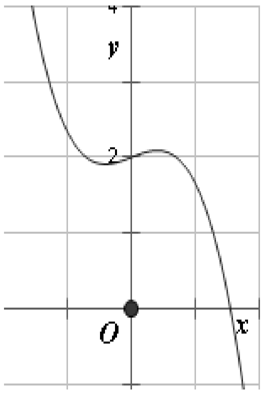
Câu 22. Đồ thị hàm số $y=\frac{mx+1}{m-x}$ (m là tham số) có dạng nào sau đây ?



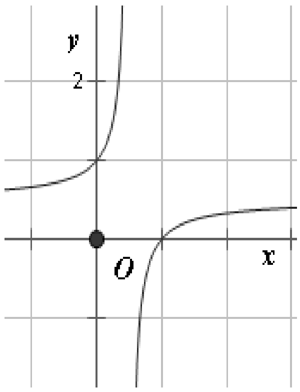
Hình (1)



Hình (2)



Hình (3)



Hình (4)

A. Hình (1) **B.** Hình (2) **C.** Hình (3) **D.** Hình (4)

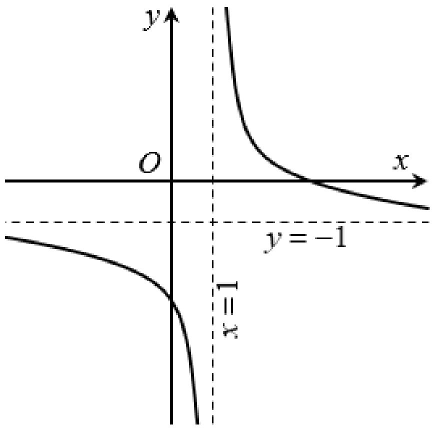
Lời giải

Chọn D.

Đồ thị hàm số là hàm phân thức suy ra loại câu A, C

$y=\frac{mx+1}{m-x} \Rightarrow y'=\frac{m^2+1}{(m-x)^2}>0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến suy ra loại câu B

Câu 23. Cho hàm số $y=\frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $b < 0 < a$. **B.** $0 < b < a$. **C.** $b < a < 0$. **D.** $0 < a < b$.

Lời giải

Chọn C.

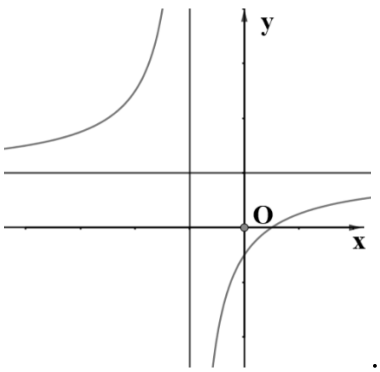
Ta có: $y' = \dfrac{-a+b}{(x-1)^2}$.

Từ đồ thị suy ra hàm số nghịch biến nên: $-a+b<0 \Leftrightarrow a>b$.

Mặt khác đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=-1$ nên $a<0$.

Vậy $b<a<0$.

Câu 24. Hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $ad>0$ và $bd>0$. **B.** $ad>0$ và $ab<0$.

C. $bd<0$ và $ab>0$. **D.** $ad<0$ và $ab<0$.

Lời giải

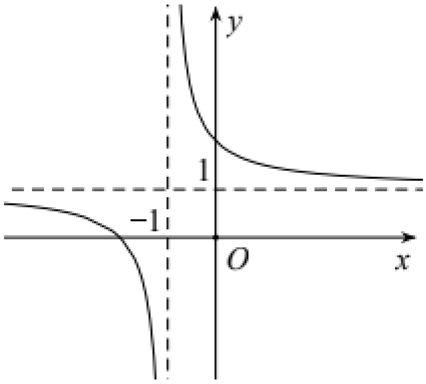
Chọn B.

Đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm có hoành độ $x=-\dfrac{b}{a}$, giao với Oy tại điểm có tung độ $y=\dfrac{b}{d}$.

Dựa vào hình vẽ ta có $\begin{cases} -\dfrac{b}{a}>0 \\ \dfrac{b}{d}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{b}{a}<0 \\ \dfrac{b}{d}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab<0 \\ bd<0 \end{cases} \Rightarrow ad>0$.

Trong các phương án chỉ có phương án B thỏa mãn.

Câu 25. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $0<b<a$. **B.** $0<a<b$. **C.** $b<0<a$. **D.** $a<b<0$.

Lời giải

Chọn B.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang và tiệm cận đứng lần lượt là $y=1;x=-1$

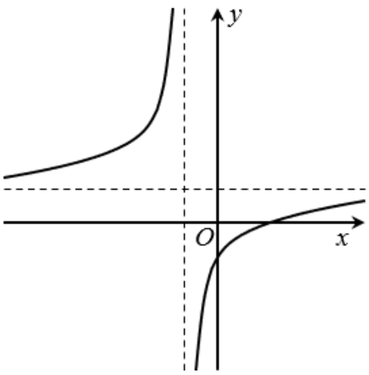
$\Rightarrow \dfrac{a}{c}=1;\dfrac{-d}{c}=-1\Rightarrow a=c;d=c\Rightarrow a=c=d$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn $-1\Rightarrow \dfrac{-b}{a}<-1\Rightarrow \dfrac{b}{a}>1$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn $1\Rightarrow \dfrac{b}{d}>1$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định nên $ad-bc<0$ mà $a=c=d;\dfrac{b}{a}>1\Rightarrow b>a>0$

Câu 26. Hình vẽ dưới là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?



A. $bd>0,ad>0$. **B.** $bd<0,ab>0$. **C.** $ad>0,ab<0$. **D.** $ab<0,ad<0$.

Lời giải

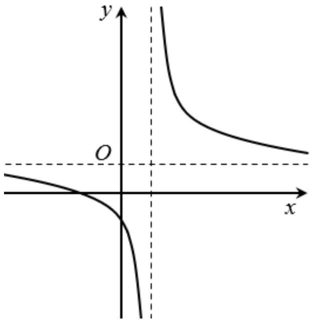
Chọn C.

Từ đồ thị suy ra đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm có hành độ dương.

Mặt khác, từ $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ suy ra đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm $A\left(-\dfrac{b}{a};0\right)$.

Từ đó suy ra : $-\dfrac{b}{a}>0 \Rightarrow ab<0$. Từ hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ suy ra đồ thị có các đường tiệm cận ngang và đứng lần lượt $y=\dfrac{a}{c}; x=-\dfrac{d}{c}$. Từ đồ thị hàm số suy ra $\begin{cases}\dfrac{a}{c}>0\\-\dfrac{d}{c}<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}ac>0\\dc>0\end{cases} \Rightarrow adc^2>0 \Rightarrow ad>0.$

Câu 27. Cho hàm số $y=\dfrac{bx-c}{x-a}$ ($a \neq 0$ và $a,b,c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên.



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a>0, b<0, c-ab<0$.
B. $a>0, b>0, c-ab<0$.
C. $a<0, b>0, c-ab<0$.
D. $a<0, b<0, c-ab>0$.

Lời giải

Chọn B.

Vì hàm số $y=\dfrac{bx-c}{x-a}$ nghịch biến trên tập xác định nên $-ab+c<0 \Leftrightarrow c-ab<0.$

Mặc khác tiệm cận đứng $x=a$ nằm bên phải trục tung nên $a>0.$

Câu 28. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ $(a,b,c \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$		↘ $\frac{1}{2}$

Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\left[\begin{array}{l}b>\dfrac{2}{3}\\b<0\end{array}\right.$.
B. $\left[\begin{array}{l}b>0\\b<-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$.
C. $-\dfrac{2}{3}<b<0$.
D. $0 \le b<\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-c}{b}\right\}$

Từ bảng biến thiên ta có

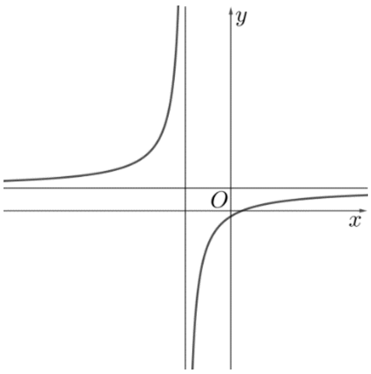
$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$ nên đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$ nên đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{-c}{b} = 3 \\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -3b \\ a = \dfrac{1}{2}b \end{cases}$ (1). Mặt khác : $y' = \dfrac{ac-b}{(bx+c)^2} < 0 \Leftrightarrow ac - b < 0\ (2)$.

Từ (1) và (2) ta có: $\dfrac{1}{2}b.(-3b) - b < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2}b^2 - b < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b > 0 \\ b < -\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$.

Câu 29. Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. $\begin{cases} ad < 0 \\ bc < 0 \end{cases}$.   **B.** $\begin{cases} ad < 0 \\ bc > 0 \end{cases}$.   **C.** $\begin{cases} ad > 0 \\ bc < 0 \end{cases}$.   **D.** $\begin{cases} ad > 0 \\ bc > 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C.

Tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c} > 0 \Rightarrow ac > 0\ (1)$

Tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c} < 0 \Rightarrow \dfrac{d}{c} > 0 \Rightarrow cd > 0\ (2)$

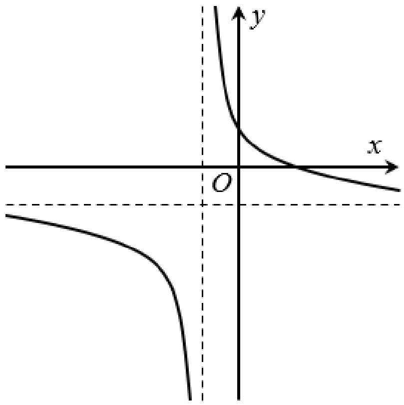
Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow \dfrac{b}{d} < 0 \Rightarrow bd < 0\ (3)$

Đồ thị cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương $\Rightarrow -\dfrac{b}{a} > 0 \Rightarrow \dfrac{b}{a} < 0 \Rightarrow ab < 0\ (4)$

Lấy $(3).(4) \Rightarrow adb^2 > 0 \Rightarrow ad > 0\ (5)$

Lấy $(1).(4) \Rightarrow bca^2 < 0 \Rightarrow bc < 0\ (6)$

Câu 30. Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}\ (a<0)$ có đồ thị như sau:



Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $ab < 0, bc < 0, cd > 0$.

B. $ab > 0, bc < 0, cd > 0$.

C. $ab > 0, bc > 0, cd > 0$.

D. $ab < 0, bc > 0, cd > 0$.

Lời giải

Chọn D.

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c} < 0$, tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c} < 0$

Mà theo giả thiết $a < 0$ nên $c > 0$ suy ra $d > 0$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $\left(0; \frac{b}{d}\right)$ và $\frac{b}{d} > 0$ nên $b > 0$

Do đó: $ab < 0, bc > 0, cd > 0$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 31. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ có đồ thị là (C).

a) Đạo hàm cấp 1 của hàm số đã cho là $y'=\dfrac{3}{(x-2)^2}$

b) Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$

c) Đồ thị của hàm số (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

d) Giao điểm của đồ thị hàm số (C) với trục tung là điểm $\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$ và với trục hoành là điểm $(-1;0)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

: $y'=-\dfrac{3}{(x-2)^2}<0$ với mọi $x\neq 2$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Tiệm cận:

$$\lim_{x\to 2^-} y=\lim_{x\to 2^-}\frac{x+1}{x-2}=-\infty;\ \lim_{x\to 2^+} y=\lim_{x\to 2^-}\frac{x+1}{x-2}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to +\infty} y=\lim_{x\to +\infty}\frac{x+1}{x-2}=1;\ \lim_{x\to -\infty} y=\lim_{x\to -\infty}\frac{x+1}{x-2}=1.$$

Do đó, đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là điểm $(-1;0)$.

Câu 32. Cho hàm số $y=\dfrac{5+x}{2-x}$ có đồ thị là (C).

a) Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$

c) Đồ thị của hàm số (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

d) Đồ thị của hàm số (C) có tâm đối xứng là điểm $I(-2;1)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Sự biến thiên: Đạo hàm $y'=\dfrac{7}{(-x+2)^2}>0$ với mọi $x\neq 2$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x\to 2^-} y=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+3}{1-x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} y=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+3}{1-x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} y=-1$; $\lim\limits_{x\to -\infty} y=-1$

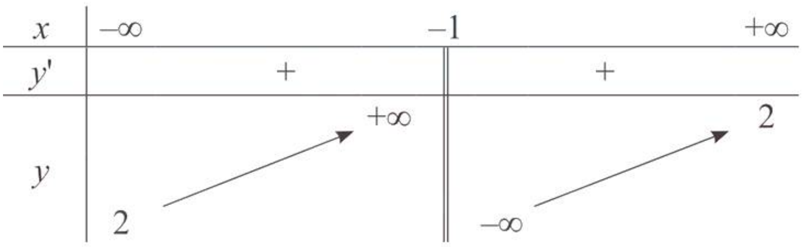
Do đó $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Đồ thị của hàm số nhận giao điểm $I(2;-1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng

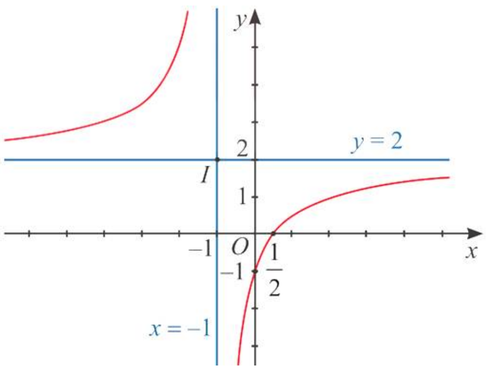
Câu 33. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị là (C).

a) Hàm số có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

b) Bảng biến thiên của hàm số đã cho là:



c) Đồ thị (C) là hình sau:



d) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số (C) là điểm $I(2;-1)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

b) Sự biến thiên:

Đạo hàm $y' = \dfrac{3}{(x+1)^2}$. Vì $y' > 0$ với mọi $x \neq -1$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

- Tiệm cận:

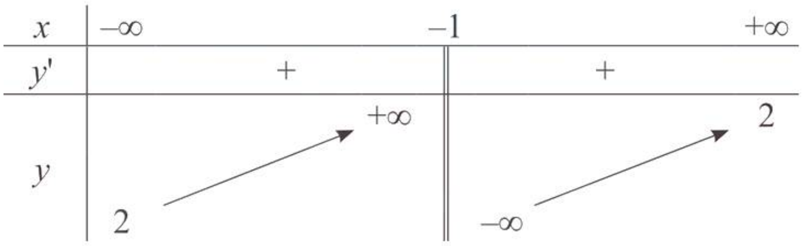
Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-1}{x+1} = 2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{x+1} = 2$.

Suy ra đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to-1^-} y = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{2x-1}{x+1} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^+} y = \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{2x-1}{x+1} = -\infty$.

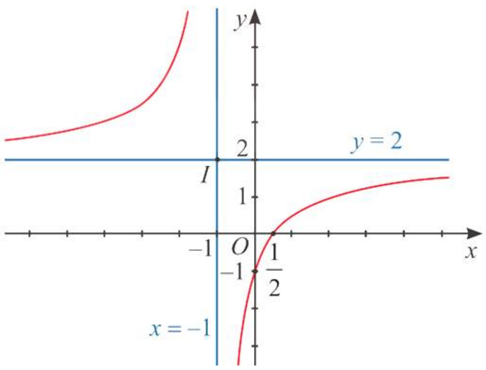
Suy ra đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Bảng biến thiên:



c) Đồ thị:

Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $\left(\dfrac{1}{2};0\right)$, giao với trục Oy tại điểm $(0;-1)$.

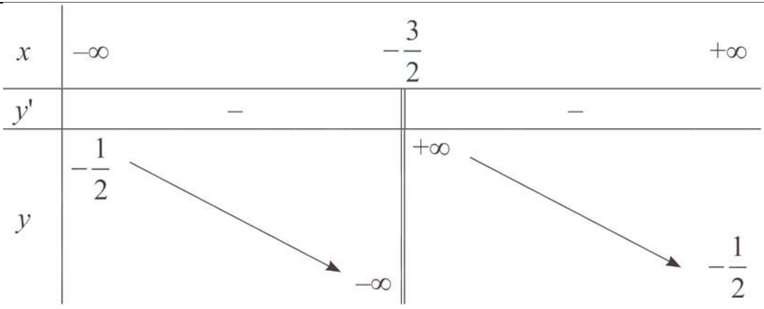


d) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là giao điểm của hai đường tiệm cận $x = -1$ và $y = 2$ là $I(-1;2)$.

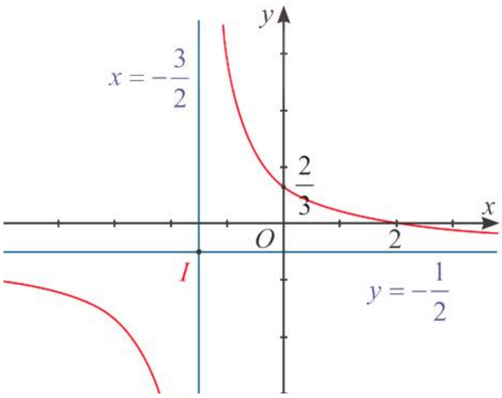
Câu 34. Cho hàm số $y = \dfrac{-x+2}{2x+3}$ có đồ thị là (C).

a) Hàm số có tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

b) Bảng biến thiên của hàm số đã cho là:



c) Đồ thị (C) là hình sau:



d) Các trục đối xứng của đồ thị hàm số (C) là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x=-\frac{3}{2}$ và $y=-\frac{1}{2}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

b) Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y'=\frac{-7}{(2x+3)^2}$.

Vì $y'<0$ với mọi $x\neq-\frac{3}{2}$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$ và $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$.

- Tiệm cận:

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x+2}{2x+3}=-\frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x+2}{2x+3}=-\frac{1}{2}$.

Suy ra đường thẳng $y=-\frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-}y=\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-}\frac{-x+2}{2x+3}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+}y=\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+}\frac{-x+2}{2x+3}=+\infty$.

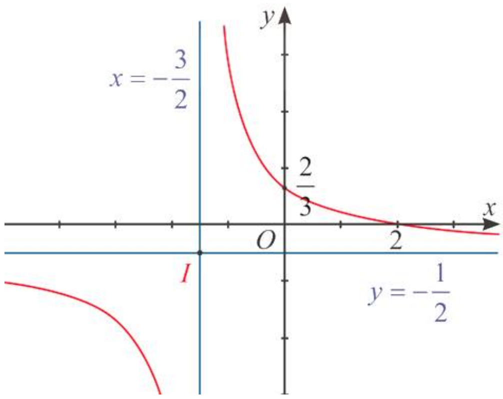
Suy ra đường thẳng $x=-\dfrac{3}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$-\dfrac{1}{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\dfrac{1}{2}$

c) Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $(2;0)$, giao với trục Oy tại điểm $\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.



d) Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x=-\dfrac{3}{2}$ và $y=-\dfrac{1}{2}$.

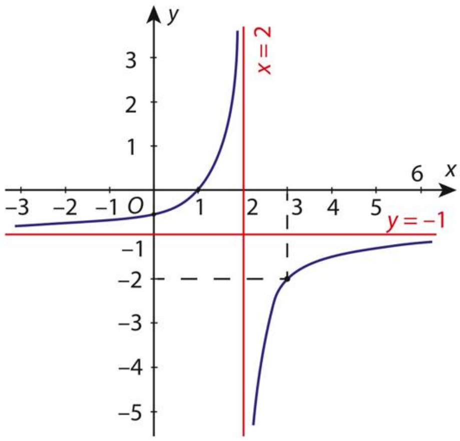
Câu 35. Cho hàm số $y=\dfrac{-x+1}{x-2}$ có đồ thị là (C).

a) Hàm số có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

b) Bảng biến thiên của hàm số đã cho là:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

c) Đồ thị (C) là hình sau:



d) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số (C) là điểm $I(-1;2)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

b) Sự biến thiên:

Giới hạn, tiệm cận:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{-x+1}{x-2}=-\infty;\ \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{-x+1}{x-2}=+\infty$$

Suy ra đường thẳng $x=2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{-x+1}{x-2}=-1;\ \lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{-x+1}{x-2}=-1.$$

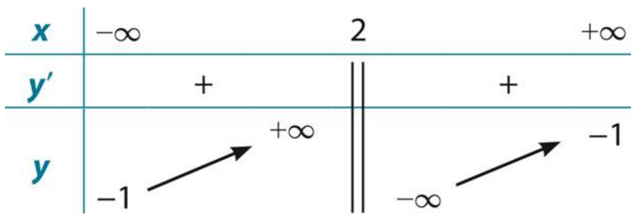
Suy ra đường thẳng $y=-1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Ta có $y'=\dfrac{1}{(x-2)^2}>0,\forall x\in D; y'$ không xác định tại $x=2$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

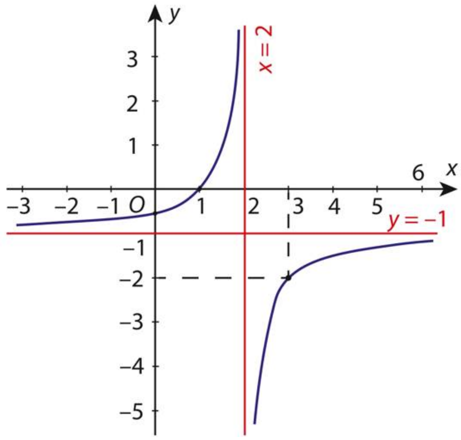
Hàm số không có cực trị.

- Bảng biến thiên:



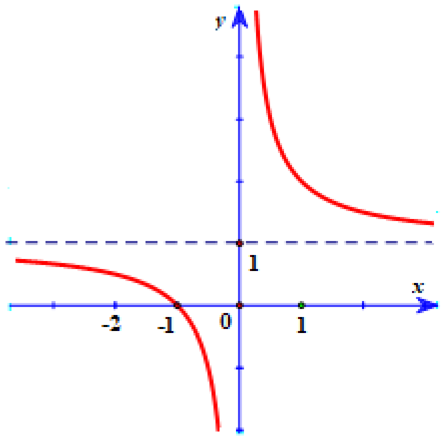
c) Đồ thị:

- Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$ và giao với trục Ox tại điểm $(1;0)$.



d) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số (C) là điểm $I(2;-1)$.

Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=0$, tiệm cận ngang $y=1$.

b) Điểm $(0;1)$ là tâm đối xứng đồ thị hàm số $y=f(x)$

c) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

d) Hàm số $y=f(x)$ có hai cực trị.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Dựa vào đồ thị, ta có:

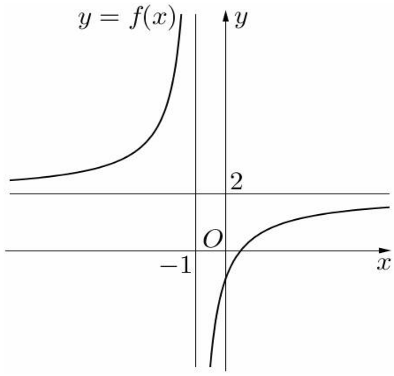
a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=0$, tiệm cận ngang $y=1$.

b) Do điểm $(0;1)$ là giao điểm hai đường tiệm cận $x=0$ và $y=1$ nên là tâm đối xứng đồ thị hàm số $y=f(x)$

c) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

d) Hàm số $y = f\left(x\right)$ không có cực trị.

Câu 37. Cho hàm số $y = f\left(x\right) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $\left(a,b,c,d \in \mathbb{R}\right)$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\backslash\left\{-1\right\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) Đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ có tiệm cận đứng $x = 2$, tiệm cận ngang $y = -1$.

b) Điểm $\left(-1;2\right)$ là tâm đối xứng đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$

c) Hàm số $y = f\left(x\right)$ đồng biến trong khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(-1;+\infty\right)$.

d) Hàm số $y = f\left(x\right)$ là hàm số $y = \dfrac{x+2}{x+1}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Dựa vào đồ thị, ta có:

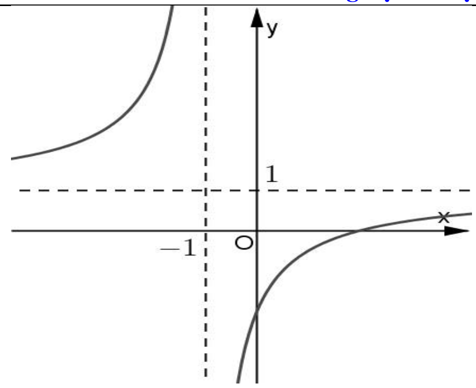
a) Đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ có tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận ngang $y = 2$.

b) Do điểm $\left(-1;2\right)$ là giao điểm hai đường tiệm cận $x = -1$ và $y = 2$ nên là tâm đối xứng đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$

c) Hàm số $y = f\left(x\right)$ đồng biến trong khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(-1;+\infty\right)$.

d) Hàm số $y = \dfrac{x+2}{x+1}$ có tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận ngang $y = 1$ nên hàm số $y = f\left(x\right)$ không phải là hàm số $y = \dfrac{x+2}{x+1}$.

Câu 38. Cho hàm số $y = f\left(x\right) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $\left(a,b,c,d \in \mathbb{R}\right)$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\backslash\left\{-1\right\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trong khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(-1;+\infty\right)$.

b) Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-1$.

c) Điểm $\left(1;-1\right)$ là tâm đối xứng đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$

d) Hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

Dựa vào đồ thị, ta có:

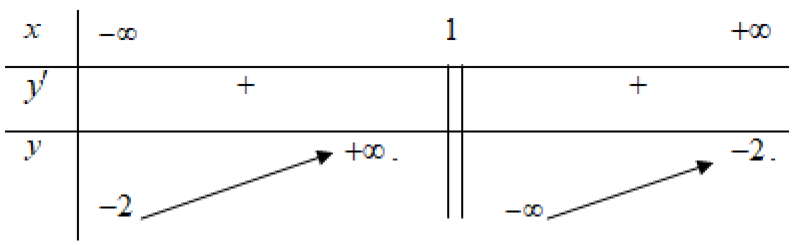
a) Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trong khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(-1;+\infty\right)$.

b) Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=1$.

c) Do điểm $\left(-1;1\right)$ là giao điểm hai đường tiệm cận $x=-1$ và $y=1$ nên là tâm đối xứng đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$

d) Hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=1$ nên hàm số $y=f\left(x\right)$ không phải là hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$.

Câu 39. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $\left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên dưới đây



a) Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trong khoảng $\left(-\infty;1\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$.

b) Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-2$.

c) Hàm số $y = f(x)$ không có điểm cực trị.

d) Hàm số $y = f(x)$ là hàm số $y = \dfrac{-2x+3}{x-1}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

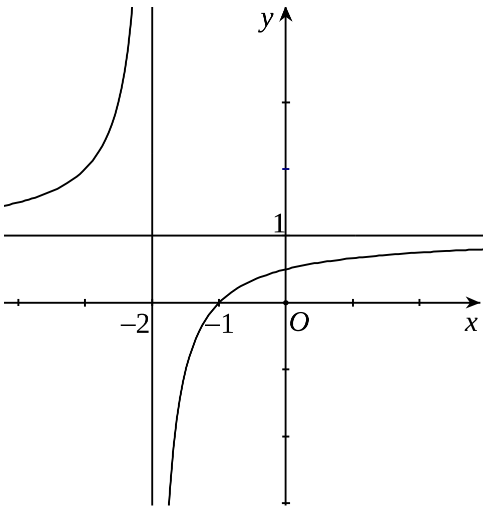
b) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-2$.

c) Hàm số $y = f(x)$ không có điểm cực trị.

d) Hàm số $y = \dfrac{-2x+3}{x-1}$ có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-2$ thỏa

Ta tiếp tục tính $y' = \dfrac{-5}{(x-1)^2} < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ suy ra nghịch biến trong khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ nên hàm số $y = f(x)$ không phải là hàm số $y = \dfrac{-2x+3}{x-1}$.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$ và tiệm cận ngang là $y=-2$.

b) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2),(-2;+\infty)$.

c) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có tọa độ là $(0;-1)$.

d) Hàm số $y = f(x)$ là hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+2}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Từ đồ thị ta có:

a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-2$ và tiệm cận ngang là $y=1$.

b) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2),(-2;+\infty)$.

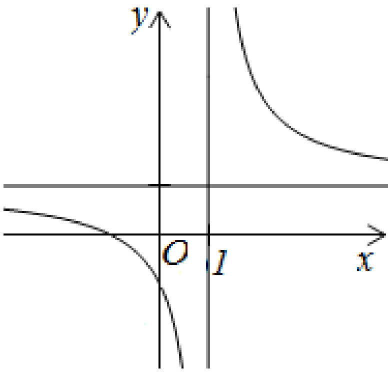
c) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có tọa độ là $(-1;0)$.

d) Hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+2}$ có tiệm cận đứng $x=-2$ và tiệm cận ngang là $y=1$ thỏa

Ta tiếp tục tính $y'=\dfrac{-1}{(x+2)^2}<0\ \ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ suy ra nghịch biến trong khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$

nên hàm số $y=f(x)$ không phải là hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+2}$.

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) $\dfrac{d}{c}>0$

b) $\dfrac{a}{c}<0$

c) $ad<0$

d) $y'<0$ với mọi $x\neq 1$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Dựa vào hình dáng của đồ thị ta được:

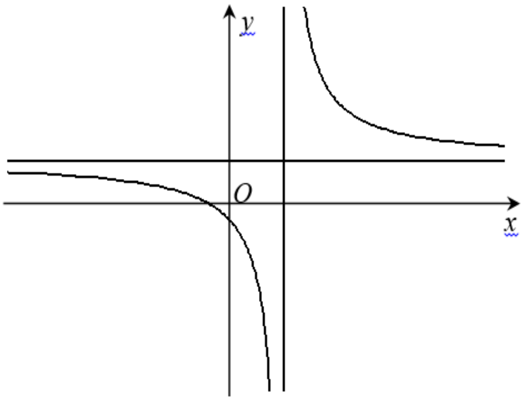
a) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng $x=1=-\dfrac{d}{c}\Rightarrow\dfrac{d}{c}<0$

b) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}>0\Rightarrow\dfrac{a}{c}>0$

c) ta có $\begin{cases} \dfrac{d}{c} < 0 \\ \dfrac{a}{c} > 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{d}{c}.\dfrac{a}{c} < 0 \Rightarrow \dfrac{ad}{c^2} < 0 \Rightarrow ad < 0$

d) Đây là đồ thị của hàm nghịch biến nên $y' < 0$ với mọi $x \neq 1$.

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ liên tục trên từng khoảng xác định và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) $\dfrac{d}{c} < 0$

b) $\dfrac{a}{c} > 0$

c) $ad < bc$

d) $ad < 0$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Theo đồ thị:

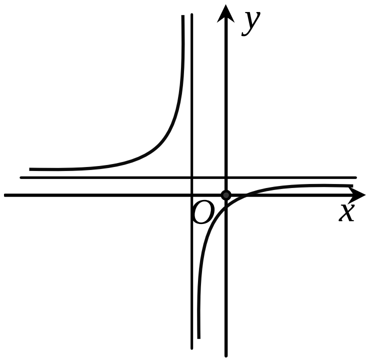
a) Tiệm cận đứng: $x = -\dfrac{d}{c} > 0 \Rightarrow \dfrac{d}{c} < 0$

b) Tiệm cận ngang: $y = \dfrac{a}{c} > 0$

c) Đây là đồ thị của hàm nghịch biến nên $y' < 0 \Leftrightarrow \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2} < 0 \Rightarrow ad - bc < 0 \Rightarrow ad < bc$.

d) ta có $\begin{cases} \dfrac{d}{c} < 0 \\ \dfrac{a}{c} > 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{d}{c}.\dfrac{a}{c} < 0 \Rightarrow \dfrac{ad}{c^2} < 0 \Rightarrow ad < 0$

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ liên tục trên từng khoảng xác định và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) a và b trái dấu

b) b và d cùng dấu

c) $ad > 0$

d) $bc < 0$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Nhận xét từ đồ thị:

+ Giao với trục hoành tại $x_o = -\dfrac{b}{a} > 0 \Rightarrow$ a và b trái dấu (1).

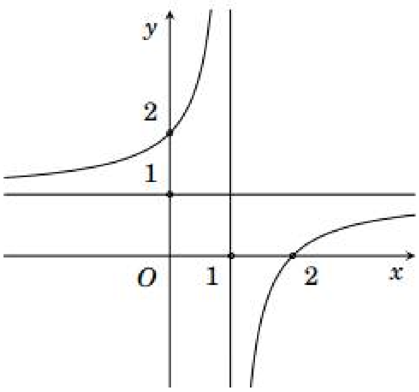
+ Giao với trục tung tại $y_o = \dfrac{b}{d} < 0 \Rightarrow b$ và d trái dấu (2).

+ Tiệm cận đứng: $x = -\dfrac{d}{c} < 0 \Rightarrow d$ và c cùng dấu (3).

Từ (1) và (2) suy ra: a và d cùng dấu hay $ad > 0$.

Từ (2) và (3) suy ra: b và c trái dấu hay $bc < 0$.’

Câu 44. Cho hàm số $y = \dfrac{x+a}{bx+c}$ với $a,b,c \in \mathbb{Z}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$

b) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(1;0)$.

c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

d) $a-3b-2c=-3$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

Từ đồ thị, ta có:

a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$

Do đó tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(1;1)$.

c) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

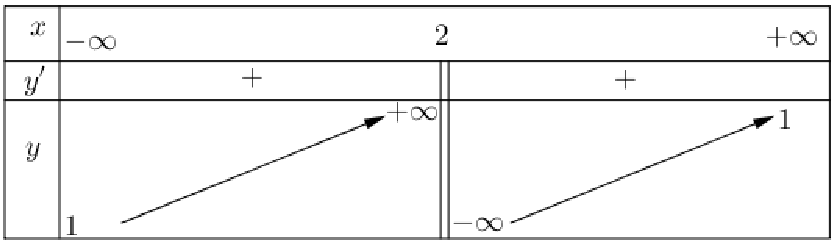
d) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$ nên $\frac{1}{b}=1 \Rightarrow b=1$

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$ nên $-\frac{c}{b}=1$ mà $b=1 \Rightarrow c=-1$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0;2)$ nên $\frac{a}{c}=2$ mà $c=-1 \Rightarrow a=-2$

Vậy $T=a-3b-2c=-2-3.1-2.(-1)=-3$.

Câu 45. Cho hàm số $y=\frac{ax+1}{bx+c}$ (a,b,c là các tham số) có bảng biến thiên như hình vẽ



a) Hàm số có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

b) Hàm số luôn đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$

d) $a+b+c=0$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

b) Hàm số luôn đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$ nên

d) ta có hệ

$$\begin{cases} -\dfrac{c}{b}=2 \\ \dfrac{a}{b}=1 \\ ac-b>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-2b \\ a=b \\ ac-b>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-2b \\ a=b \\ -2b^2-b>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<c<1 \\ -\dfrac{1}{2}<a<0 \\ -\dfrac{1}{2}<b<0 \\ a+b+c=0 \end{cases}$$

Câu 46. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax-1}{bx+c}$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
$f(x)$	$\frac{1}{2} \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow \frac{1}{2}$

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=\dfrac{1}{2}$

c) Đồ thị giao với trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 3

d) $b<0$ hoặc $b>\dfrac{2}{3}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$ nên nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=3$

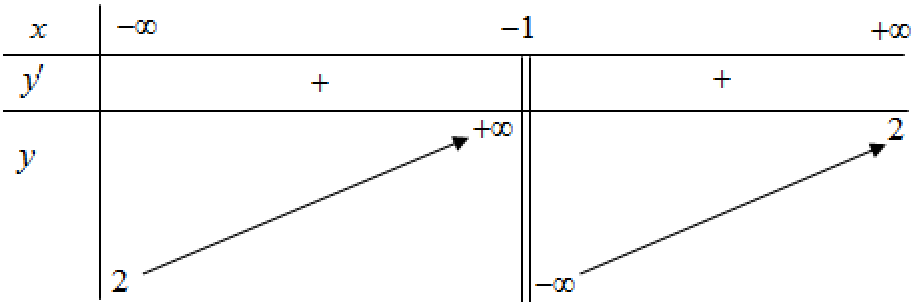
c) Đồ thị giao với trục hoành tại điểm thuộc nhánh trái của đồ thị, suy ra hoành độ giao điểm này nhỏ hơn 3

d) Từ bảng biến thiên suy ra $\begin{cases} \dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{c}{b}=3 \end{cases}$ (1)

Ta có: $y' = \dfrac{ac+b}{(bx+c)^2} < 0, \forall x \neq -\dfrac{c}{b} \Leftrightarrow ac+b<0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{b}{2}.(-3b).+b<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b>\dfrac{2}{3} \\ b<0 \end{array}\right.$

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây



a) $ac=2$

b) $2a-c=3$

c) $c-a=-1$

d) $b^3-8<0$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+1}$ có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-\dfrac{1}{c}$ và đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{a}{c}$.

Nhìn vào bảng biến thiên, ta thấy $-\dfrac{1}{c}=-1 \Rightarrow c=1$ và $\dfrac{a}{c}=2 \Rightarrow a=2$ (vì $c=1$).

Ta có $y'=\dfrac{a-bc}{(cx+1)^2}$.

Vì hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$ nên

$y'=\dfrac{a-bc}{(bx+c)^2}>0 \Leftrightarrow a-bc>0 \Leftrightarrow 2-b>0 \Leftrightarrow b<2 \Leftrightarrow b^3<8 \Leftrightarrow b^3-8<0$.

Câu 48. Cho hầm số $y=\dfrac{mx-1}{2x+m}$ có đồ thị là (C_m) với m là tham số

a) Khi $m=2$ thì đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=1$

b) Khi $m=2$ thì giao điểm của các đường tiệm cận có toạ độ $I(1;-1)$

c) Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(-1;\sqrt{2}\right)$ thì $m=2$

d) Với mọi giá trị của tham số m thì hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Khi $m=2$ thì đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=1$

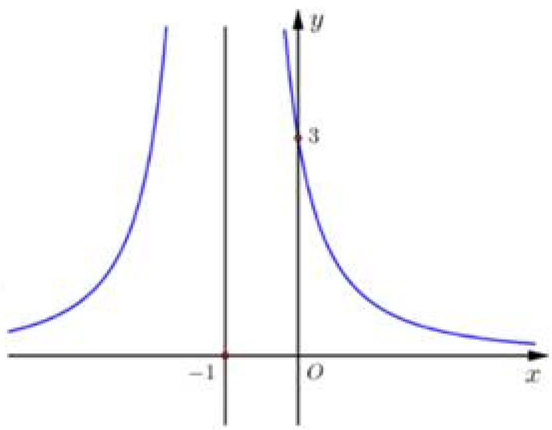
b) Khi $m=2$ thì giao điểm của các đường tiệm cận có toạ độ $I\left(-1;1\right)$

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng khi và chỉ khi $m\left(-\dfrac{m}{2}\right)-1\neq 0\Leftrightarrow m^2+2\neq 0$ đúng với mọi giá trị m.

Khi đó đường thẳng $-\dfrac{m}{2}=-1\Leftrightarrow m=2$ là giá trị cần tìm.

d) Ta có $y'=\dfrac{m^2+2}{\left(2x+m\right)^2}>0,\forall x\neq -\dfrac{m}{2}$. Vậy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $\left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-1\right\}$ và đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ như trong hình vẽ dưới đây:



Biết rằng đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $A\left(0;4\right)$.

a) $b=4d$

b) $c=d$

c) $y=\dfrac{7x+4}{x+1}$.

d) $f\left(2\right)=18$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

Đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua $A(0;4)$ nên $b=4d$ (1).

Ta có: $f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Căn cứ theo đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có $-\dfrac{d}{c}=-1 \Rightarrow c=d$ (2).

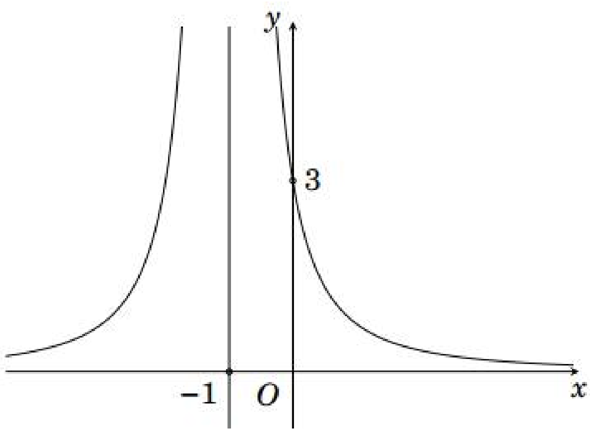
Đồ thị hàm số $f'(x)$ đi qua $(0;3)$ nên $\dfrac{ad-bc}{d^2}=3 \Rightarrow ad-bc=3d^2$ (3).

Thay (1), (2) vào (3) ta được $ad-4d^2=3d^2 \Rightarrow a=7d$ $(d \neq 0)$ vì nếu $d=0$ thì $a=b=c=d=0$ (vô lí).

Do đó $f(x)=\dfrac{7dx+4d}{dx+d}=\dfrac{7x+4}{x+1}$.

Vậy $f(2)=6$.

Câu 50. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và nhận $x=-1$ làm tiệm cận đứng như hình vẽ bên. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-3;-2]$ bằng 8



a) $f'(0)=3$

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$

c) Giá trị của $f(-3)$ bằng 8

d) Giá trị của $f(2)$ bằng 4

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Theo hình vẽ, đồ thị $f'(x)$ qua điểm $(0;3)$ nên $f'(0)=3$

b) Do $f'(x)>0, \forall x \neq -1$ nên hàm số đã cho $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

c) Do $f'(x)>0,\forall x\neq -1 \Rightarrow \max\limits_{[-3;-2]} f(x)=f(-2)=8$ suy ra $f(-3)\neq 8$

d) Ta có $f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;3)$ nên $f'(0)=3 \Leftrightarrow \dfrac{ad-bc}{d^2}=3$

Mặt khác, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có tiệm cận đứng $x=-1$ nên $-c+d=0$

Vì $f'(x)>0,\forall x\neq 1 \Rightarrow \max\limits_{[-3;-2]} f(x)=f(-2)=8 \Leftrightarrow \dfrac{-2a+b}{-2c+d}=8$

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} ad-bc=3d^2 \\ -c+d=0 \\ b-2a=8(d-2c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=d \\ a-b=3d \\ b-2a=-8d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5d \\ b=2d \\ c=d \end{cases}$

Từ đó suy ra $f(x)=\dfrac{5dx+2d}{dx+d}=\dfrac{5x+2}{x+1} \Rightarrow f(2)=4$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 51. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+3}$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1

Đồ thị hàm số cắt trục tung thỏa mãn $x=0\Rightarrow y=1$

Câu 52. Cho hàm số $y=\dfrac{-x+1}{x-2}$ có đồ thị là (C). Có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ và tung độ đều nguyên?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Gọi điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ thuộc đồ thị (C) có hoành độ và tung độ đều nguyên với $x_0\neq 2$

Ta có: $y_0=\dfrac{-x_0+1}{x_0-2}=\dfrac{-\left(x_0-2\right)-1}{x_0-2}=-1-\dfrac{1}{x_0-2}$

Vì y_0 nguyên nên $1\vdots\left(x_0-2\right)$ hay x_0-2 là ước của 1

Do đó:

$x_0-2=-1\Rightarrow x_0=1\Rightarrow y_0=0$

$x_0-2=1\Rightarrow x_0=3\Rightarrow y_0=-2$

Vậy có 2 điểm thỏa yêu cầu bài toán

Câu 53. Đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{2x-8}{x}$ cắt đường thẳng $\Delta: y=-x$ tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi $I\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB. Tính x_0+y_0.

Trả lời: ………………..

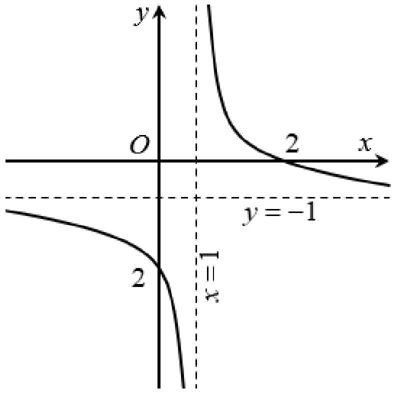
Lời giải

Đáp án: 0

$$\frac{2x-8}{x}=-x\Rightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x^2+2x-8=0\end{cases}$$

Ta có: $$\begin{cases}x_0=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\ y_0=\dfrac{y_A+y_B}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\ y_0=\dfrac{-x_A-x_B}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\ y_0=-\dfrac{x_A+x_B}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=\dfrac{-2}{2}=-1\\ y_0=-\dfrac{-2}{2}=1\end{cases}\Rightarrow I(-1;1)\Rightarrow x_0+y_0=0$$

Câu 54. Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ bên



Tích $a.b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

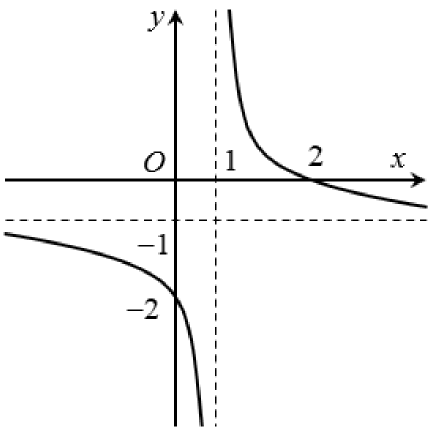
Đáp án: 2

Từ đồ thị ta có tiệm cận ngang $y=-1$ nên $a=-1$.

Và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 nên

$M\left(2;0\right)\in y=\dfrac{-x-b}{x-1}\Leftrightarrow b=-2$. Vậy $a.b=2$.

Câu 55. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Giá trị của $a+2b+3c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 0

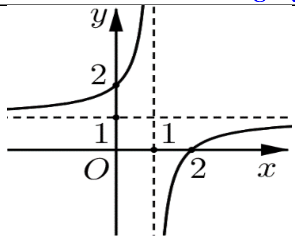
Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số: $x=-c$ suy ra $-c=1\Leftrightarrow c=-1$.

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số: $y=a$ suy ra $a=-1$.

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $\left(0;\dfrac{b}{c}\right)$ nên $\dfrac{b}{c}=-2$ mà $c=-1$ suy ra $b=2$.

Vậy, $a+2b+3c=0$.

Câu 56. Đường cong ở hình dưới đây là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+a}{bx+c}$, với $a,b,c\in\mathbb{R}$.



Khi đó giá trị biểu thức $T = a - 3b - 2c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -3

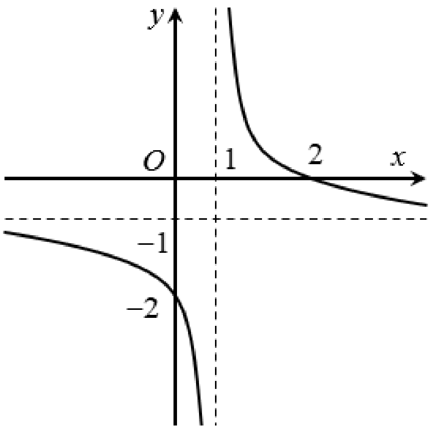
Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{b} = 1 \Leftrightarrow b = 1$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1 \Rightarrow -\dfrac{c}{b} = 1 \Leftrightarrow b = -c \Rightarrow c = -1$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;2) \Rightarrow 2 = \dfrac{0 + a}{1.0 + (-1)} \Leftrightarrow a = -2$.

Vậy $T = a - 3b - 2c = (-2) - 3.1 - 2.(-1) = -3$.

Câu 57. Cho hàm số $y = \dfrac{ax - b}{x - 1}$ có đồ thị như hình vẽ.



Khi đó giá trị biểu thức $T = a + b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

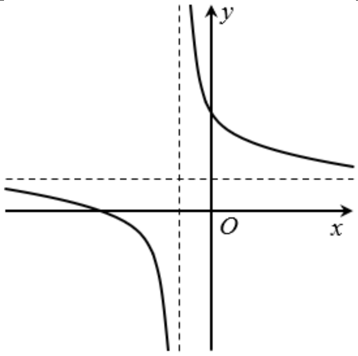
Đáp án: -3

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -1$ $\Rightarrow$ $\dfrac{a}{c} = -1 \Rightarrow a = -1$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(2;0) \Rightarrow 2a - b = 0 \Rightarrow b = -2$

$\Rightarrow T = a + b = -3$

Câu 58. Cho hàm số $y = \dfrac{ax + b}{x + 1}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Trong hai số a,b có tất cả bao nhiêu số âm?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 0

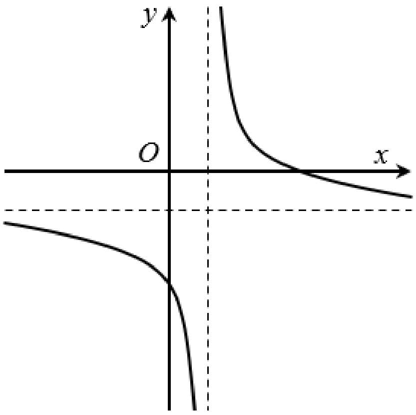
Ta có: $y'=\dfrac{a-b}{(x+1)^2}$, $\forall x\neq -1$. Dựa vào đồ thị ta thấy:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=a \Rightarrow y=a$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Dựa vào đồ thị ta có: $a>0$.

Đồ thị hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$

$\Rightarrow y'<0,\forall x\neq -1 \Leftrightarrow a-b<0 \Leftrightarrow a<b \Rightarrow 0<a<b$.

Câu 59. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+4-b}{cx+b}$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Trong hai số a,b có tất cả bao nhiêu số âm?

Trả lời: ………………..

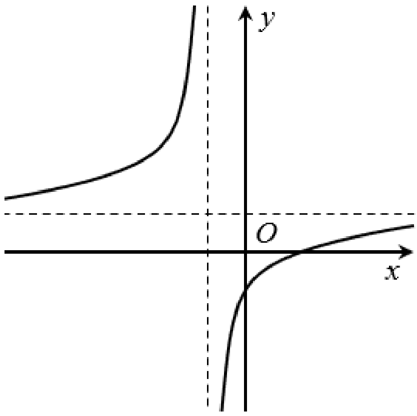
Lời giải

Đáp án: 1

Dựa vào đồ thị, ta thấy tiệm cận ngang, tiệm cận đứng, giao của đồ thị với trục tung và trục hoành

Suy ra $\begin{cases} \dfrac{a}{c} < 0 \\ -\dfrac{b}{c} > 0 \\ \dfrac{4-b}{b} > 0 \\ \dfrac{b-4}{a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < b < 4 \\ a > 0 \\ c < 0 \end{cases}$.

Câu 60. Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình bên dưới.



Biết rằng a là một số thực dương, hỏi trong các số b, c, d có tất cả bao nhiêu số dương?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

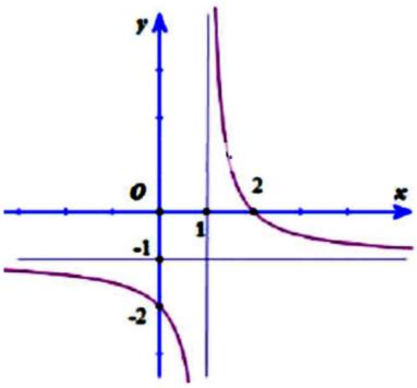
Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = \dfrac{a}{c} > 0$ nên $c > 0$.

Đồ thì hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = -\dfrac{d}{c} < 0$ nên $d > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = -\dfrac{b}{a} > 0$ nên $b < 0$.

Vậy trong các số b, c, d có 2 số dương,

Câu 61. Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ và các hệ số a, b, c là các số nguyên.



Tính giá trị của biểu thức $T = a - 3b + 2c$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -9

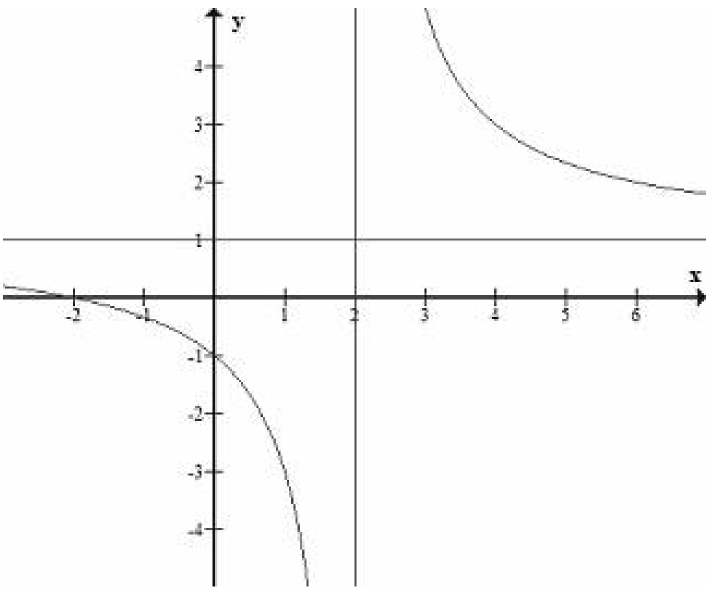
Đồ thị hàm số trên hình vẽ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=-1$ mà $\lim\limits_{x\to+\infty} y=a$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=a$ nên đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=a$ suy ra $a=-1$

Suy ra $y=\dfrac{-x+b}{x+c}$

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(0;-2),B(2;0)$ suy ra $\begin{cases}\dfrac{b}{c}=-2\\ 0=\dfrac{-2+b}{2+c}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=2\\ c=-1\end{cases}$

$T=a-3b+2c=-1-6-2=-9$.

Câu 62. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+2}{cx+b}$ có đồ thị như hình vẽ a, b, c là các số nguyên.



Tính giá trị của biểu thức $T=2025a-b+2c$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2029.

Đồ thị hàm số trên hình vẽ, ta có:

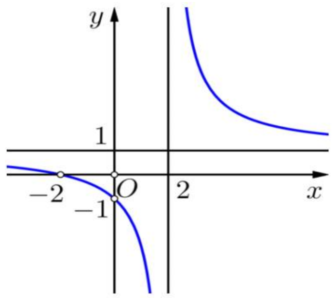
+ Đồ thị hàm số cắt trục tung $x=0, y=-1 \Rightarrow \dfrac{2}{b}=-1 \Leftarrow b=-2$

+ tiệm cận đứng là $y=2 \Rightarrow -\dfrac{b}{c}=2 \Rightarrow b=-2c \Rightarrow c=1$

+ tiệm cận ngang là $y=1 \Rightarrow \dfrac{a}{c}=1 \Rightarrow a=c=1$

$\Rightarrow T=2025a-b+2c=2029$

Câu 63. Cho hàm số $y=\dfrac{x-a}{bx+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -3

Ta có: Tiệm cận đứng: $x=2\Rightarrow -\dfrac{c}{b}=2\Leftrightarrow 2b+c=0\ (1)$.

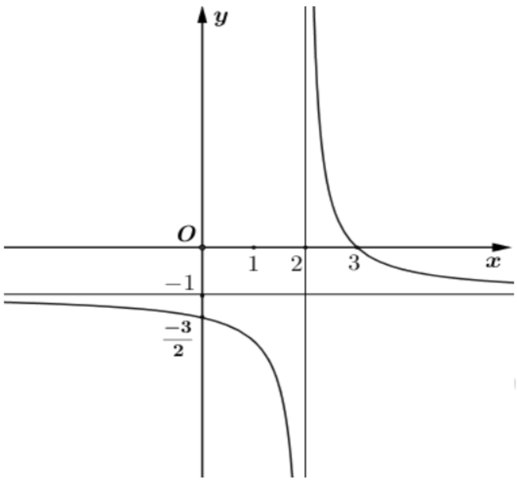
Tiệm cận ngang: $y=1\Rightarrow \dfrac{1}{b}=1\Leftrightarrow b=1\ (2)$.

Thế (2) vào (1) suy ra $c=-2$. Suy ra hàm số có dạng $y=\dfrac{x-a}{x-2}$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-2;0)$ nên ta có: $0=\dfrac{-2-a}{-2-2}\Leftrightarrow a=-2$.

Vậy $P=-2+1-2=-3$.

Câu 64. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+3}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính giá trị của $a-2c$.



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

Đồ thị hàm số có TCN $y=-1\Leftrightarrow \dfrac{a}{1}=-1\Leftrightarrow a=-1$.

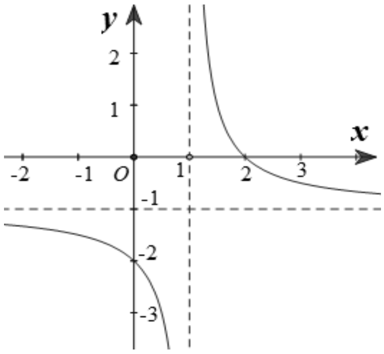
Mặt khác đồ thị hàm số có TCĐ $x=2$ nên $2+c=0\Leftrightarrow c=-2$.

$\Rightarrow a-2c=-1-2.(-2)=3.$

Dựa vào đồ thị ta thấy các điểm $(3;0)$ và $\left(0;-\frac{3}{2}\right)$ thuộc vào đồ thị hàm số đã cho nên ta được hệ phương trình $\begin{cases} 0=\dfrac{a.3+3}{3+c} \\ -\dfrac{3}{2}=\dfrac{a.0+3}{0+c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+3=0 \\ -3c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ c=-2 \end{cases}$

$\Rightarrow a-2c=-1-2.(-2)=3.$

Câu 65. Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ (với $a,b,c\in\mathbb{R}$).



Khi đó tổng $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 0

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ có đường tiệm cận ngang $y=a$, đường tiệm cận đứng $x=-c$ và cắt Oy tại điểm $\left(0;\dfrac{b}{c}\right)$.

Từ đồ thị hàm số ta có đường tiệm cận ngang $y=-1$, đường tiệm cận đứng $x=1$ và cắt Oy tại điểm $(0;-2)$.

Từ đó suy ra: $\begin{cases} a=-1 \\ -c=1 \\ \dfrac{b}{c}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ c=-1 \\ b=-2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ c=-1 \\ b=2 \end{cases}.$

Vậy $a+b+c=-1-1+2=0$.

Câu 66. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$+$
$f(x)$	$2 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 2$

Trong các số a,b,c có bao nhiêu số dương ?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=-1$ và tiệm cận ngang $y=2$ suy ra $\begin{cases} \dfrac{-c}{b}=-1 \\ \dfrac{a}{b}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=b \\ a=2b \end{cases}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó suy ra:

$ac-b<0 \Rightarrow 2b^2-b<0 \Rightarrow 0<b<\dfrac{1}{2}$.

Suy ra cả ba số a,b,c đều dương.

Câu 67. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax-4}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow 1$

Trong các số a,b,c có bao nhiêu số dương?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Tiệm cận ngang: $y=\dfrac{a}{b}=1 \Rightarrow a=b$ $\quad(1)$.

Tiệm cận đứng: $x=-\dfrac{c}{b}=1 \Rightarrow c=-b$ $\quad(2)$.

Ta có: $y'=\dfrac{ac+4b}{(bx+c)^2}>0 \Rightarrow ac+4b>0$ $\quad(3)$.

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra: $-b^2+4b>0 \Leftrightarrow 0<b<4$. Suy ra $a>0, c<0$.

Câu 68. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

Trong các số a,b và c có bao nhiêu số dương?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1

Hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-\dfrac{c}{b}$ và đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{a}{b}$.

Từ bảng biến thiên ta có: $\begin{cases} -\dfrac{c}{b}=2 \\ \dfrac{a}{b}=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=-\dfrac{c}{2}$ (1)

Mặt khác: $f'(x)=\dfrac{ac-b}{(bx+c)^2}$.

Vì hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$ nên

$f'(x)=\dfrac{ac-b}{(bx+c)^2}>0 \Leftrightarrow ac-b>0$ (2)

Thay (1) vào (2), ta được: $-\dfrac{c^2}{2}+\dfrac{c}{2}>0 \Leftrightarrow -c^2+c>0 \Leftrightarrow 0<c<1$.

Suy ra c là số dương và a, b là số âm.

Câu 69. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax-3}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3

Trong các số a,b và c có bao nhiêu số âm?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

Hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{ax-3}{bx+c}$ có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-\dfrac{c}{b}$ và đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{a}{b}$.

Từ bảng biến thiên ta có $\begin{cases}-\dfrac{c}{b}=-2\\ \dfrac{a}{b}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=2b\ \ (1)\\ a=3b\ \ (2)\end{cases}$

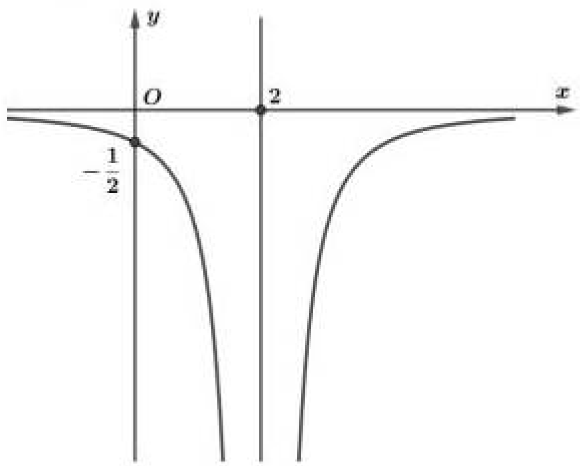
Vì hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-2\right)$ và $\left(-2;+\infty\right)$ nên $f'\left(x\right)=\dfrac{ac+3b}{\left(bx+c\right)^2}<0\Leftrightarrow ac+3b<0\ \ (3)$

Thay $\left(1\right),\left(2\right)$ vào $\left(3\right)$ ta được $6b^2+3b<0\Leftrightarrow-\dfrac{1}{2}<b<0.$

Vậy b là số âm nên a và c cũng là số âm.

Do đó trong các số a,b và c có 3 số âm.

Câu 70. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ và nhận $x=2$ làm tiệm cận đứng như hình vẽ sau:



Biết rằng đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ đi qua điểm $A\left(0;2\right)$. Giá trị $f\left(3\right)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 5

Ta có: $y=f\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow f'\left(x\right)=\dfrac{ad-bc}{\left(cx+d\right)^2}$.

Vì đồ thị thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $A(0;2)$ suy ra $f(0)=2 \Rightarrow \frac{b}{d}=2 \Leftrightarrow b=2d\ (1)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có: $\begin{cases} f'(0)=-\frac{1}{2} \\ x=-\frac{d}{c}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{ad-bc}{d^2}=-\frac{1}{2}\ (2) \\ d=-2c\ (3) \end{cases}$.

Thay (1) vào (2): $\frac{ad-2dc}{d^2}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a-2c}{d}=-\frac{1}{2} \Rightarrow a=-\frac{1}{2}d+2c=-\frac{1}{2}.(-2c)+2c=3c$.

Vậy, $f(3)=\frac{3a+b}{3c+d}=\frac{3.3c-4c}{3c-2c}=\frac{5c}{c}=5$.

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 71. Cho hàm số $y=\dfrac{3x-4}{x-2}$ có đồ thị (C).

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C).

b) Biết trên đồ thị hàm số (C) có điểm $M(a;b)$ hoặc điểm $N(c;d)$ $(a,b,c,d\in\mathbb{Z})$ cách đều 2 đường tiệm cận của đồ thị (C). Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c+d$.

Lời giải

a) Các em tự khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C) nhé.

b) Gọi $M(x;y)\in(C)$ và cách đều 2 tiệm cận $x=2$ và $y=3$.

Ta có:

$$|x-2|=|y-3|$$
$$\Leftrightarrow |x-2|=\left|\frac{3x-4}{x-2}-3\right|$$
$$\Leftrightarrow |x-2|=2$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=0 \end{array}\right.$$

Vậy có 2 điểm thoả mãn đề bài là : M(4; 4) và N(0;2)

$\Rightarrow T=a+b+c+d=10$

Câu 72. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C).

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C).

b) Biết trên đồ thị hàm số (C) có điểm $Q(a;b)$ và điểm $P(c;d)$ (với $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$) đối xứng nhau qua đường thẳng MN biết $M(-3;0)$ và $N(-1;-1)$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c+d$.

Lời giải

a) Các em tự khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C) nhé.

b) $\overrightarrow{MN}=(2;-1)\Rightarrow$ Phương trình MN: $x+2y+3=0$.

Gọi d là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm Q,P

Phương trình đường thẳng $d\perp MN$ nên có dạng: $y=2x+m$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C)và d:

$$\frac{2x-4}{x+1}=2x+m\Leftrightarrow 2x^2+mx+m+4=0\ \ (x\neq -1)\qquad (1)$$

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $Q,P\Leftrightarrow \Delta=m^2-8m-32>0$ (2)

Khi đó $Q(x_1;2x_1+m)$, $P(x_2;2x_2+m)$ với x_1, x_2 là các nghiệm của (1)

Trung điểm của QP là $I\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};x_1+x_2+m\right)\equiv I\left(-\dfrac{m}{4};\dfrac{m}{2}\right)$ (theo định lý Viète)

Q,P đối xứng nhau qua $MN \Leftrightarrow I\in MN \Leftrightarrow -\dfrac{m}{4}+2.\dfrac{m}{2}+3=0 \Leftrightarrow m=-4$

Suy ra (1) $\Leftrightarrow\ 2x^2-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right. \Rightarrow Q(0;-4),P(2;0)$

$\Rightarrow T=a+b+c+d=-2$

Câu 73. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C).

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C).

b) Tìm điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $d:y=-2x+2$ bằng $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

a) Các em tự khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C) nhé.

b) Gọi $M\left(m;\dfrac{m+2}{m-1}\right)\in(C)$.

Ta có: $d(M,d)=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\Leftrightarrow\left|2m^2-3m+4\right|=6\left|m-1\right|\Leftrightarrow m=2;m=\dfrac{5}{2};m=-2;m=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow M(2;4);\ M\left(\dfrac{5}{2};3\right);\ M(-2;0);\ M\left(\dfrac{1}{2};-5\right)$.

Câu 74. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x-1}$ có đồ thị (C).

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C).

b) Biết trên đồ thị hàm số (C) có điểm $M\left(\dfrac{a-\sqrt{b}}{2};\dfrac{c-\sqrt{d}}{2}\right)$ hoặc điểm $N\left(\dfrac{e+\sqrt{f}}{2};\dfrac{g+\sqrt{h}}{2}\right)$ $(a,b,c,d,e,f,g,h\in\mathbb{Z})$ cách đều hai điểm $A(2;0)$ và $B(0;2)$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c+d+e+f+g+h$.

Lời giải

a) Các em tự khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C) nhé.

b) PT đường trung trực đọan AB: $y=x$.

Những điểm thuộc đồ thị cách đều A và B có hoành độ là nghiệm của PT:

$$\frac{x+2}{2x-1}=x\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1-\sqrt{5}}{2};\ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Hai điểm cần tìm là: $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right);\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=5 \\ c=1 \\ d=5 \\ e=1 \\ f=5 \\ g=1 \\ h=5 \end{cases} \Rightarrow T=a+b+c+d+e+f+g+h=24$$

Câu 75. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Biết trên đồ thị hàm số (C) có điểm $M(a;b)$ hoặc điểm $N(c;d)$ $(a,b,c,d\in\mathbb{Z})$ mà tổng khoảng cách từ điểm M hoặc điểm N đến hai tiệm cận của đồ thị (C) nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c+d$.

Lời giải

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$, $(x_0\neq -1)$ thì $y_0=\dfrac{2x_0+1}{x_0+1}=2-\dfrac{1}{x_0+1}$

Gọi A, B lần lượt là hình chiếu của M trên TCĐ và TCN thì:

$MA=|x_0+1|$, $MB=|y_0-2|=\left|\dfrac{1}{x_0+1}\right|$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $MA+MB\geq 2\sqrt{MA.MB}=2\sqrt{|x_0+1|.\left|\dfrac{1}{x_0+1}\right|}=2$

$\Rightarrow$ $MA+MB$ nhỏ nhất bằng 2 khi $|x_0+1|=\dfrac{1}{|x_0+1|}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=-2 \end{array}\right.$.

Vậy ta có hai điểm cần tìm là (0; 1) và (–2; 3).

$\Rightarrow T=a+b+c+d=2$

Câu 76. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm thuộc (C) sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là lớn nhất ?

Lời giải

Giả sử $M\left(x_0;2-\dfrac{3}{x_0+1}\right)\in(C)$. PTTT Δ của (C) tại M là:

$$y-2+\frac{3}{x_0+1}=\frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)\Leftrightarrow 3(x-x_0)-(x_0+1)^2(y-2)-3(x_0+1)=0$$

Khoảng cách từ $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến Δ là:

$$d=\frac{|3(-1-x_0)-3(x_0+1)|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6|x_0+1|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6}{\sqrt{\dfrac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}.$$

Theo BĐT Cauchy: $\frac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2\ge 2\sqrt{9}=6\Rightarrow d\le\sqrt{6}$.

Khoảng cách d lớn nhất bằng $\sqrt{6}$ khi $\frac{9}{(x_0+1)^2}=(x_0+1)^2\Leftrightarrow(x_0+1)^2=3\Leftrightarrow x_0=-1\pm\sqrt{3}$.

Vậy có hai điểm cần tìm là: $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$ hoặc $M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$

Câu 77. Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:y=x-2m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{x-3}{x+1}$ (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương là $(a;b)$. Tính giá trị biểu thức $a+b$

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x-3}{x+1}=x-2m\Rightarrow x-3=(x+1)(x-2m)$

$\Leftrightarrow x-3=x^2-2mx+x-2m\Leftrightarrow x^2-2mx+3-2m=0$ (1)

Đường thẳng $d:y=x-2m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{x-3}{x+1}$ (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương

$\Leftrightarrow(1)$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2-(3-2m)>0\\ S=2m>0\\ P=3-2m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+2m-3>0\\ m>0\\ m<\frac{3}{2}\end{cases}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-3\\ m>1\end{array}\right.\\ m>0\\ m<\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow 1<m<\frac{3}{2}.$$

Vậy với $1<m<\frac{3}{2}$ thì đường thẳng $d:y=x-2m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{x-3}{x+1}$ (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương nên $a+b=\frac{5}{2}=2,5$.

Câu 78. Biết rằng có hai giá trị m_1,m_2 của tham số m để đường thẳng $d:y=m-x$ và đồ thị hàm số $y=\frac{x}{x-1}$ có đúng một điểm chung. Giá trị m_1+m_2 bằng bao nhiêu?

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\frac{x}{x-1}$ và đường thẳng $d:y=m-x$

là $\frac{x}{x-1}=m-x\Leftrightarrow x^2-mx+m=0(1)$ $\quad(x\ne1)$

Đồ thị hàm số và đường thẳng d có 1 điểm chung khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 1 nghiệm $\Leftrightarrow\Delta=0\Leftrightarrow m^2-4m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=4\end{array}\right.$ Vậy $m_1=0,m_2=4\Rightarrow m_1+m_2=4$

Câu 79. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2mx+3m+1}{2x-m^2}$ cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng -4?

Lời giải

Vì đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng -4 nên ta có:

$\dfrac{3m+1}{-m^2}=-4 \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 3m+1=4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$ vì m nguyên dương nên $m=1$

Câu 80. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+m}{x+1}$ cắt đường thẳng $y=1-x$ tại hai điểm phân biệt?

Lời giải

Điều kiện $x\neq -1$.

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{2x+m}{x+1}=1-x \Leftrightarrow x^2+2x+m-1=0 \ (*)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-(m-1)>0 \\ 1-2+m-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<2 \\ m\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m<2$ vì m nguyên dương nên có hai giá trị của m thoả mãn

Câu 81. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $d: y=x+m$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $AB=4$?

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{2x-1}{x-1}=x+m \ (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x^2+(m-3)x+1-m=0 \ (2) \end{cases}$ (C) cắt d tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \\ 1^2+(m-3).1+1-m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)^2-4(1-m)>0 \\ -1\neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-2m+5>0 \\ -1\neq 0 \end{cases}$ (đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$)

Khi đó x_A, x_B là nghiệm phân biệt khác 1 của (2).

Theo Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_A+x_B=3-m \\ x_A.x_B=1-m \end{cases}$ và

$AB=4\Leftrightarrow AB^2=16\Leftrightarrow (x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2=16\Leftrightarrow 2(x_B-x_A)^2=16\Leftrightarrow (x_B-x_A)^2=8.$

Suy ra: $(x_B+x_A)^2-4x_Ax_B=8\Rightarrow (3-m)^2-4(1-m)=8\Leftrightarrow m^2-2m-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1\\ m=3\end{array}\right.$.

Câu 82. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=x-2m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương là $(a;b)$. Tính $T=a+b$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x-2m=\dfrac{x-3}{x+1}\Leftrightarrow x^2-2mx-2m+3=0$

Yêu cầu đề bài $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=m^2+2m-3>0\\ S=2m>0\\ P=-2m+3>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m<1, m>3\\ m>0\\ m<\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<1$ nên $T=a+b=1$

Câu 83. Cho hàm số $y=\dfrac{(2m-1)x-m}{x+m}(m\neq 0)$ có đồ thị (C_m). Biết rằng tồn tại duy nhất một đường thẳng (d) có phương trình $y=ax+b$ sao cho (C_m) luôn tiếp xúc với (d). Tính giá trị của $a+b$

Lời giải

Cách 1: Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) như sau:

$\dfrac{(2m-1)x-m}{x+m}=ax+b\Leftrightarrow ax^2+(am+b-2m+1)x+bm+m=0$

Do (d) luôn tiếp xúc với (C) nên phải luôn có nghiệm kép với $\forall m\neq 0$

Suy ra $a\neq 0$ và $\Delta'=(am+b-2m+1)^2-4am(b+1)=0, \forall m\neq 0$

$\Leftrightarrow (a-2)^2m^2+\left[2(a-2)(b+1)-4a(b+1)\right]x+(b+1)^2=0, \forall m\neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(a-2)^2=0\\ 2(a-2)(b+1)-4a(b+1)=0\\ (b+1)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=2\\ b=-1\end{cases}.$

Vậy $a+b=1$

Cách 2: Ta có $y=\dfrac{(2x-1)m-x}{m+x}\Rightarrow y'(m)=\dfrac{2x^2}{(m+x)^2}\Rightarrow y'(m)=0\Leftrightarrow x=0$.

Dự đoán $A(0;-1)$ là tiếp điểm, nên ta có phân tích như sau

$y=\dfrac{(2m-1)x-m}{x+m}=\dfrac{-2x^2+2x^2+(2m-1)x-m}{x+m}=\dfrac{-2x^2+(2x-1)(x+m)}{x+m}=\dfrac{-2x^2}{x+m}+2x-1.$

Do đó phương trình $\dfrac{(2x-1)m-x}{m+x}=2x-1$ luôn có nghiệm kép $x=0$ nên $y=2x-1$ là đường thẳng luôn tiếp xúc với (C), suy ra $a=2,b=-1\Rightarrow a+b=1$.

Câu 84. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-1}$ có đồ thị là đường cong (H) và đường thẳng Δ có phương trình $y=x+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để đường thẳng Δ cắt đường cong (H) tại hai điểm phân biệt nằm về hai nhánh của đồ thị?

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x+m}{x-1}=x+1\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ f(x)=x^2-x-m-1=0\ (*)\end{cases}$

Đường thẳng Δ cắt đường cong (H) tại hai điểm phân biệt khi

$$\begin{cases}f(1)\neq 0\\ \Delta_{(*)}>0\end{cases}\Leftrightarrow 4m+5>0\Leftrightarrow m>-\frac{5}{4};\forall m\in\mathbb{R}.$$

Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $(*)$, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=1\\ x_1x_2=-m-1\end{cases}$.

Yêu cầu bài toán $(x_1-1)(x_2-1)<0\Leftrightarrow x_1x_2-(x_1+x_2)+1<0\Leftrightarrow -m-1<0\Leftrightarrow m>-1$

Suy ra $m\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Vậy có 10 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 85. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m sao cho đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A,B và $AB\le 4$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x-1}{x+1}=x+m\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1\\ (x+1)(x+m)=2x-1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1\\ x^2+(m-1)x+m+1=0\ (*)\end{cases}$$

Đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt $A,B\Leftrightarrow$ Phương trình **(*)** có 2 nghiệm phân biệt khác $-1\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ (-1)^2+(m-1).(-1)+m+1\neq 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(m-1)^2-4(m+1)>0\\ 3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m^2-6m-3>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>3+2\sqrt{3}\\ m<3-2\sqrt{3}\end{array}\right..$$

Giao điểm của 2 đồ thị hàm số lần lượt là $A(x_1;x_1+m)$ và $B(x_2;x_2+m)$, trong đó x_1,x_2 là 2 nghiệm phân biệt của phương trình **(*)**.

Theo Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - m \\ x_1 x_2 = m + 1 \end{cases}$

$AB = \sqrt{2(x_1 - x_2)^2} \le 4 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \le 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \le 8 \Leftrightarrow (1-m)^2 - 4(m+1) \le 8$

$\Leftrightarrow m^2 - 6m - 11 \le 0 \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{5} \le m \le 3 + 2\sqrt{5}$

Kết hợp với $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 + 2\sqrt{3} \\ m < 3 - 2\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3 + 2\sqrt{3} < m \le 3 + 2\sqrt{5} \\ 3 - 2\sqrt{5} \le m < 3 - 2\sqrt{3} \end{array}\right.$

Có 1 giá trị nguyên dương của m là 7.

Câu 86. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{x+1}(C)$ và đường thẳng $(d): y = x + m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên m thuộc khoảng $(-10;10)$ để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm về hai phía của trục hoành?

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là: $\dfrac{x+2}{x+1} = x + m(1)$.

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -1 \\ f(x) = x^2 + mx + m - 2 = 0(2) \end{cases}$.

(d)cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2)có hai nghiệm phân biệt khác

$-1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4m + 8 > 0 \\ f(-1) = 1 - m + m - 2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}$.

Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm phương trình (2). Theo viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1.x_2 = m - 2 \end{cases}$.

Đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm về hai phía của trục hoành

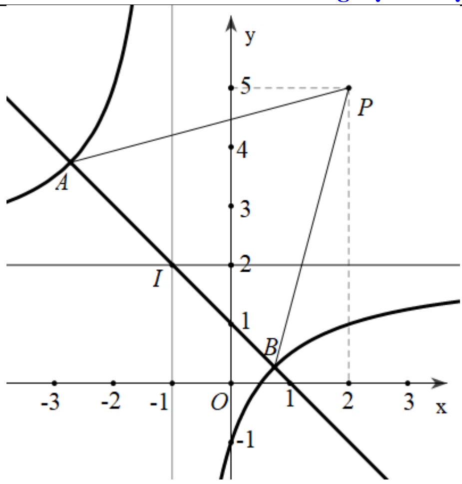
$\Leftrightarrow y_1.y_2 < 0 \Leftrightarrow (x_1 + m)(x_2 + m) < 0 \Leftrightarrow x_1.x_2 + m(x_1 + x_2) + m^2 < 0 \Leftrightarrow m - 2 - m^2 + m^2 < 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-10;10) \Rightarrow m \in \{-9;-8;...;-1;0;1\}$.

Vậy có 11 giá trị m.

Câu 87. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $P(2;5)$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tam giác PAB đều.

Lời giải



Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình $\dfrac{2x-1}{x+1}=-x+m$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ 2x-1=(-x+m)(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow x^2-(m-3)x-m-1=0 \ \ (1)$$

Ta có $\Delta_{(1)}=(m-3)^2+4(m+1)=m^2-2m+13=(m-1)^2+12>0, \forall m\in\mathbb{R}$ nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt, hay d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm phân biệt của (1), tọa độ giao điểm của d và (C) là

$A(x_1;-x_1+m), B(x_2;-x_2+m)$

Trung điểm của AB là $I\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};\dfrac{-(x_1+x_2)+2m}{2}\right)\equiv I\left(\dfrac{m-3}{2};\dfrac{m+3}{2}\right)$

Ta có $\overrightarrow{PI}=\left(\dfrac{m-7}{2};\dfrac{m-7}{2}\right)$, véctơ chỉ phương của d là $\vec{u}_d=(1;-1)$, dễ thấy $\vec{u}_d.\overrightarrow{PI}=0$ nên $P\equiv I$ hoặc $PI\perp d$, như vậy hoặc $P\equiv I$ (khi đó P,A,B thẳng hàng) hoặc tồn tại tam giác PAB luôn cân tại P,

Suy ra tam giác PAB tồn tại và đều khi và chỉ khi

$$PI=AB\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow 8\left(\frac{m-7}{2}\right)^2=3\left[2(x_1-x_2)^2\right]\Leftrightarrow (m-7)^2=3\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]$$

$$\Leftrightarrow (m-7)^2=3\left[(m-3)^2+4(m+1)\right]\Leftrightarrow m^2+4m-5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-5 \end{array}\right..$$

Vậy $m\in\{-5;1\}$.

Câu 88. Giả sử $m=-\dfrac{b}{a}$ (với $a,b\in\mathbb{Z}^+$) là giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=-3x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $\Delta: x-2y-2=0$, với O là gốc toạ độ. Tính $a+2b$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x+1}{x-1}=-3x+m$, $x\neq 1$.

$\Rightarrow 3x^2-(m+1)x+m+1=0\ (*)$.

Để (C) cắt d tại hai điểm phân biệt thì $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1.

Suy ra $\begin{cases}(m+1)^2-12(m+1)>0\\ 3.1^2-(m+1).1+(m+1)\neq 0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m+1<0\\ m+1>12\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>11\end{array}\right.$.

Khi đó $A(x_1;-3x_1+m)$, $B(x_2;-3x_2+m)$, với x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình $(*)$ đồng thời thoả mãn $x_1+x_2=\dfrac{m+1}{3}$.

Gọi G là trọng tâm của ΔOAB, ta có $G\left(\dfrac{m+1}{9};\dfrac{m-1}{3}\right)$.

Mà $G\in\Delta$ nên $\dfrac{m+1}{9}-2\dfrac{m-1}{3}-2=0\Rightarrow m=-\dfrac{11}{5}$. Suy ra $\begin{cases}a=11\\ b=5\end{cases}$.

Vậy $a+2b=21$.

Câu 89. Cho hàm số $y=\dfrac{3x+2}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=ax+2b-4$. Đường thẳng d cắt (C) tại A,B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O. Khi đó $T=a+b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Xét phương trình hoành độ: $\dfrac{3x+2}{x+2}=ax+2b-4; x\neq -2.$

$\Leftrightarrow ax^2+(2a+2b-7)x-10=0(*)$.

Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 0\\ (2\text{a}+2b-7)^2-4a(4b-10)>0(2*)\\ 4\neq 0\end{cases}$

Gọi $A(x_1;ax_1+2b-4); B(x_2;ax_2+2b-4)$.

Do A, B đối xứng nhau qua gốc O nên $\begin{cases}x_1+x_2=0\\ 4b-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=0\\ b=2\end{cases}$

Theo Viét của phương trình (*) ta có $x_1+x_2=\dfrac{7-2a-2b}{a}$.

$\Rightarrow\dfrac{7-2a-2b}{a}=0\Leftrightarrow 7-2a-2b=0\Rightarrow a=\dfrac{3}{2}$.

Thay $\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\ b=2\end{cases}$ vào điều kiện (2*) thấy thỏa mãn.

Vậy $a+b=\dfrac{7}{2}=3,5$

Câu 90. Gọi (H) là đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$. Điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc (H) có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất, với $x_0<0$ khi đó x_0+y_0 bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -1

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Dễ thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $d_1: x=-1$ và tiệm cận ngang $d_2: y=2$.

Do $M\in(H)\Rightarrow M\left(x_0;\dfrac{2x_0+3}{x_0+1}\right)$.

Xét $d(M,d_1)+d(M,d_2)=|x_0+1|+\left|\dfrac{2x_0+3}{x_0+1}-2\right|=|x_0+1|+\left|\dfrac{1}{x_0+1}\right|\ge 2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $|x_0+1|=\left|\dfrac{1}{x_0+1}\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=-2\end{array}\right.$.

Theo đề bài, ta có $x_0<0$ nên nhận $x_0=-2\Rightarrow y_0=1$.

Vậy $x_0+y_0=-1$.

CHỦ ĐỀ 3

KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN, VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ HỮU TỈ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0,\, m\neq 0)$ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số phân thức: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0,\, m\neq 0)$.

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{n}{m}\right\}$.

• Đạo hàm: $y'=\dfrac{amx^2+2anx+bn-cm}{(mx+n)^2}$.

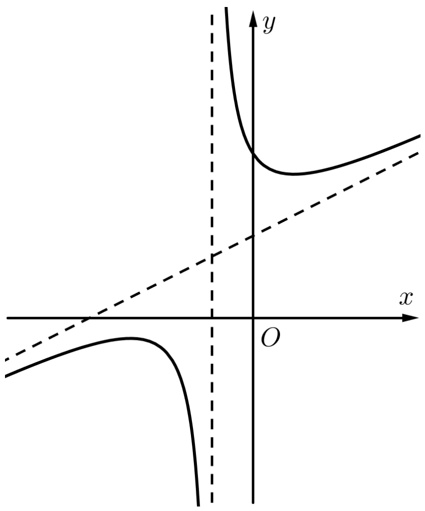
• Phương trình các đường tiệm cận: Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$ và đường tiệm cận xiên $y=\dfrac{a}{m}x+\dfrac{b-am}{m^2}$.

• Đồ thị có tâm đối xứng I là giao điểm hai đường tiệm cận và nhận đường phân giác tạo bởi hai đường tiệm cận làm trục đối xứng.

2. Các dạng đồ thị của hàm số phân thức: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0,\, m\neq 0)$

<table>
<tr><th></th><th>$am>0$</th><th>$am<0$</th></tr>
<tr>
<td>Phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt</td>
<td>

• Đồ thị

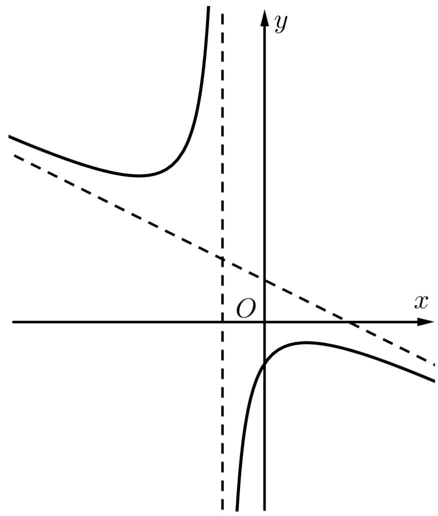


• Bảng biến thiên

$$\begin{array}{c|ccccccccc}
x & -\infty & & x_{CĐ} & & -\frac{n}{m} & & x_{CT} & & +\infty \\
\hline
y' & & + & 0 & - & \| & - & 0 & + & \\
\hline
y & -\infty & \nearrow & y_{CĐ} & \searrow & -\infty \,\|\, +\infty & \searrow & y_{CT} & \nearrow & +\infty
\end{array}$$

</td>
<td>

• Đồ thị

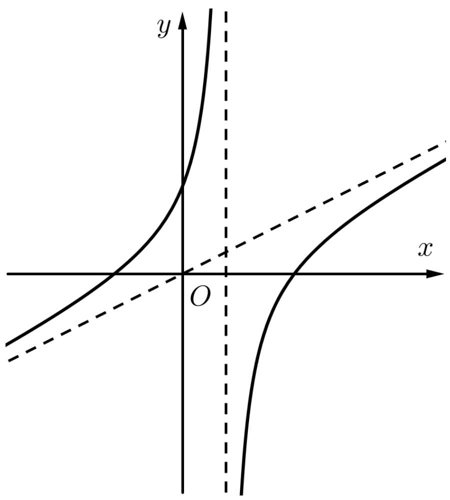


• Bảng biến thiên

$$\begin{array}{c|ccccccccc}
x & -\infty & & x_{CT} & & -\frac{n}{m} & & x_{CĐ} & & +\infty \\
\hline
y' & & - & 0 & + & \| & + & 0 & - & \\
\hline
y & +\infty & \searrow & y_{CT} & \nearrow & +\infty \,\|\, -\infty & \nearrow & y_{CĐ} & \searrow & -\infty
\end{array}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>Phương trình $y'=0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm</td>
<td>

• Đồ thị

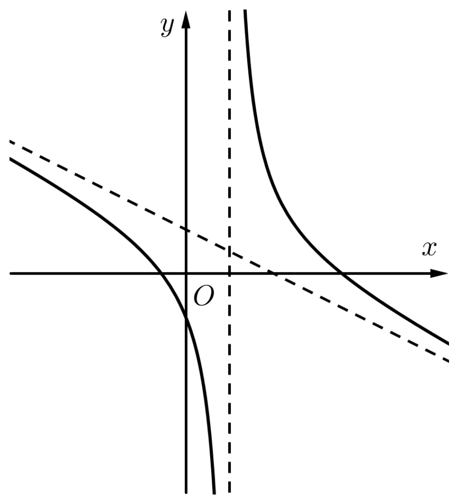


• Bảng biến thiên

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & -\infty & & -\frac{n}{m} & & +\infty \\
\hline
y' & & + & \| & + & \\
\hline
y & -\infty & \nearrow & +\infty \,\|\, -\infty & \nearrow & +\infty
\end{array}$$

</td>
<td>

• Đồ thị



• Bảng biến thiên

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & -\infty & & -\frac{n}{m} & & +\infty \\
\hline
y' & & - & \| & - & \\
\hline
y & +\infty & \searrow & -\infty \,\|\, +\infty & \searrow & -\infty
\end{array}$$

</td>
</tr>
</table>

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1
KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ PHÂN THỨC

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{mx+n}\ (a\neq 0,\ m\neq 0)$$

Để khảo sát hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}, a\neq 0, m\neq 0$ thì ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{n}{m}\right\}$

Bước 2: Khảo sát sự biến thiên của hàm số

Tính đạo hàm $y'=\dfrac{am.x^2+2an.x+b.n-m.c}{(mx+n)^2}$. Tìm các điểm tại đó $y'=0$

Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

Lập bảng biến thiên, xác định chiều biến thiên và các điểm cực trị của hàm số

Bước 3: Cho thêm điểm và vẽ đồ thị hàm số dựa vào bảng biến thiên

Bài 1. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ b) $y=\dfrac{x^2+x-1}{x}$ c) $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ d) $y=\dfrac{-x^2+1}{x}$

Bài 2. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$ b) $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$ c) $y=\dfrac{-x^2-3x+4}{x+2}$ d) $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x+1}$

Bài 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x^2-x-1}{x-2}$ b) $y=\dfrac{x^2+x-2}{x+1}$ c) $y=\dfrac{2x^2-x+4}{x-1}$ d) $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x+3}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ b) $y=\dfrac{x^2+x-2}{2-x}$ c) $y=\dfrac{2x^2+5x+4}{x+2}$

d) $y=x-\dfrac{1}{x}$ e) $y=-x+1+\dfrac{1}{x+1}$ f) $y=-3x+7-\dfrac{18}{x+2}$

Bài 5. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x+1}$

b) $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 3}{x-1}$

c) $y = \dfrac{2x^2 + 5x + 4}{x+2}$

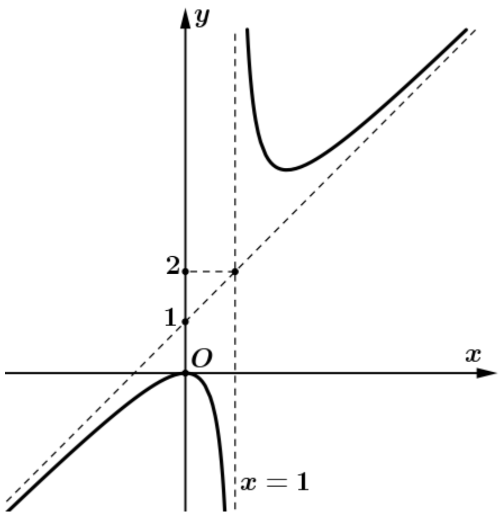
d) $y = x - \dfrac{2}{x+1}$

e) $y = x - 2 + \dfrac{4}{x-1}$

f) $y = x + 4 + \dfrac{5}{x-3}$

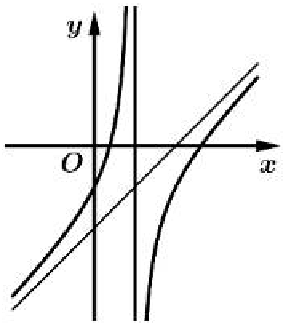
DẠNG 2
XÁC ĐỊNH HỆ SỐ CỦA HÀM SỐ

Bài 1. Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số $y = ax + b + \dfrac{1}{x+c}$

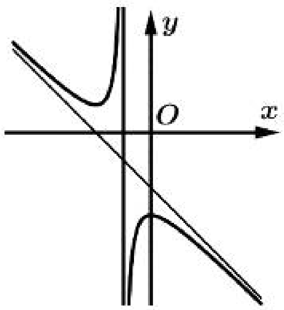


Khi đó tổng $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

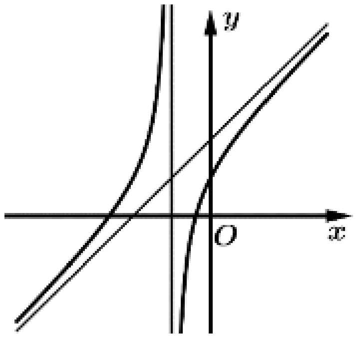
Bài 2. Đồ thị trong hình vẽ là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax^2+bx+1}{cx+d}$. Hỏi có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d ?



Bài 3. Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}\,(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d ?



Bài 4. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+1}{cx+d}(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d ?



DẠNG 3

BÀI TOÁN LIÊN QUAN HÀM SỐ HỮU TỈ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0,\, m\neq 0)$

Bài 1. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x+1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C). Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M\left(0;\,\dfrac{5}{4}\right)$ và tiếp xúc với đồ thị.

Bài 2. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$ có đồ thị là đường cong (C) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến này vuông góc với đường thẳng $x-3y-6=0$

Bài 3. Biết rằng đường thẳng $y=2x+2m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt $A,\,B$ với mọi giá trị của tham số m. Tìm hoành độ trung điểm của AB theo tham số m.

Bài 4. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx-1}{x-1}$ có đồ thị là (C) (m là tham số thực). Tổng bình phương các giá trị của m để đường thẳng $d: y=m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm A, B sao cho $OA\perp OB$ bằng bao nhiêu?

Bài 5. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx+m}{x+m}$. Tìm giá trị m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại hai điểm và tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm đó vuông góc.

Bài 6. Tìm m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2mx+2m^2-1}{x-1}$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến với (C_m) tại hai điểm này vuông góc với nhau.

Bài 7. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2mx+2}{x+1}$ (C_m). Tìm các giá trị của m để hàm số có cực đại, cực tiểu và khoảng cách từ hai điểm đó tới đường thẳng $d: x+y+2=0$ bằng nhau.

Bài 8. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+(2m+1)x+m^2+m+4}{2(x+m)}$ (1). Tìm điều kiện của m để hàm số (1) có 2 điểm cực trị và tính khoảng cách giữa hai điểm này.

Bài 9. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx-1}{x-1}$ có đồ thị là đường cong (C_m). Tìm m để đường thẳng $d: y=2x$ cắt (C_m) tại 2 điểm thuộc 2 nhánh của (C_m)

Bài 10. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2(m+1)x-5}{x-1}$

a) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có cực đại, cực tiểu

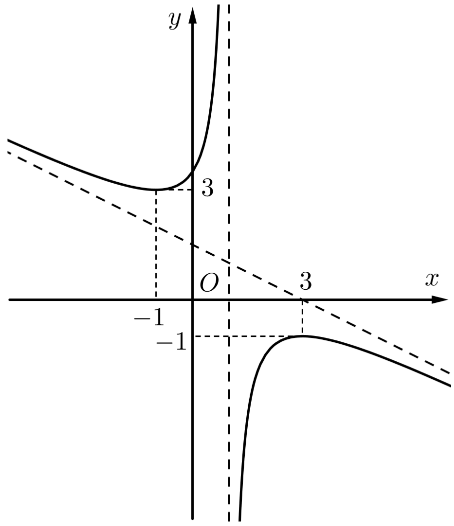
b) Tìm điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho $x_M>1$ và độ dài IM ngắn nhất (I là tâm đối xứng của (C)).

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM GỒM BA PHẦN

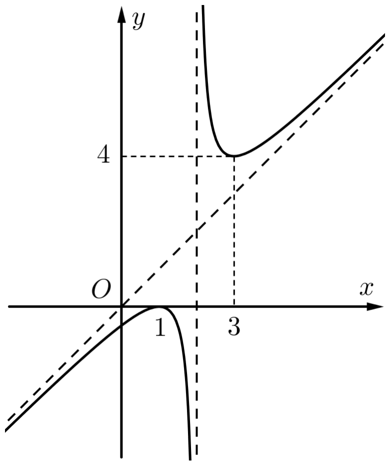
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



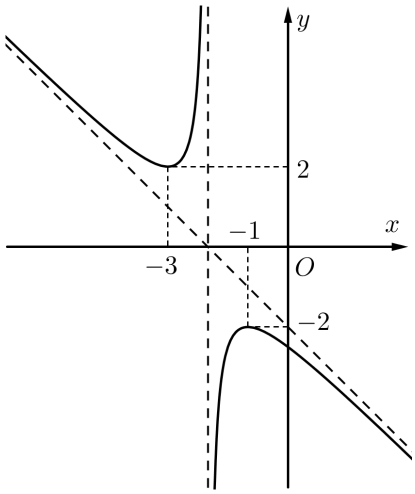
A. $y=\dfrac{-x^2-3x-8}{2x-2}$. **B.** $y=\dfrac{-x^2-3x-8}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2+4x-7}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{-x^2+4x-7}{2x-2}$.

Câu 2. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



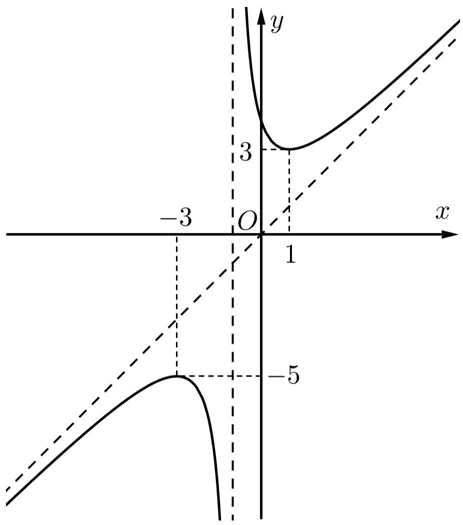
A. $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{2x^2+6x-8}{x-2}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2-2x+1}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{-2x^2+6x-8}{x-2}$.

Câu 3. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



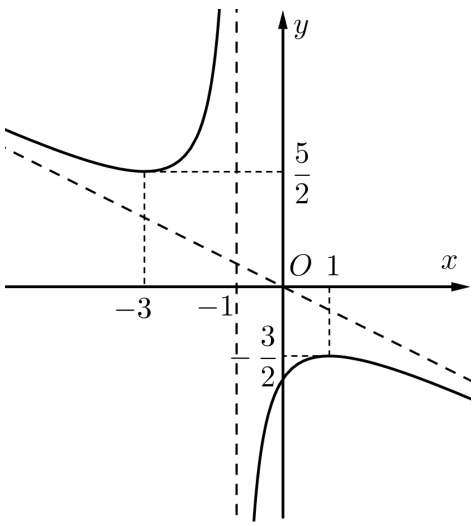
A. $y=\dfrac{2x^2+8x+4}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{2x^2+8x+4}{x+2}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2-4x-5}{x+2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x-2}$.

Câu 4. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



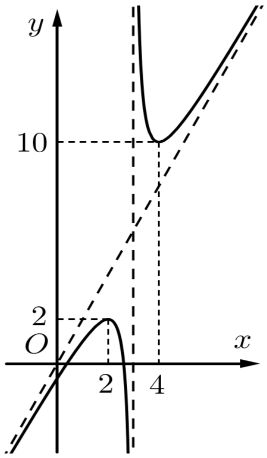
A. $y=\dfrac{2x^2+3x+1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{3x^2+5x-2}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2-3x+10}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$.

Câu 5. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



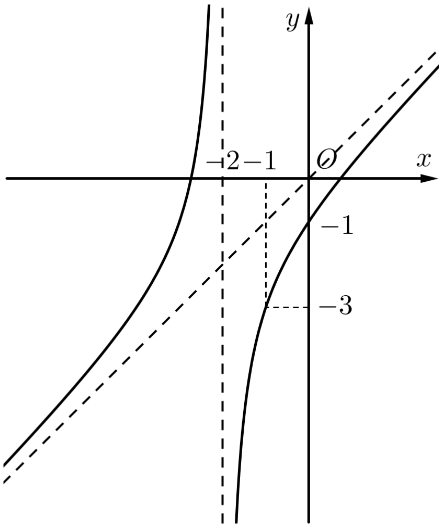
A. $y=\dfrac{2x^2+5x-13}{2x+2}$. **B.** $y=\dfrac{-x^2-x-4}{2x+2}$. **C.** $y=\dfrac{-2x^2-3x-1}{2x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+3x-10}{2x+2}$.

Câu 6. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



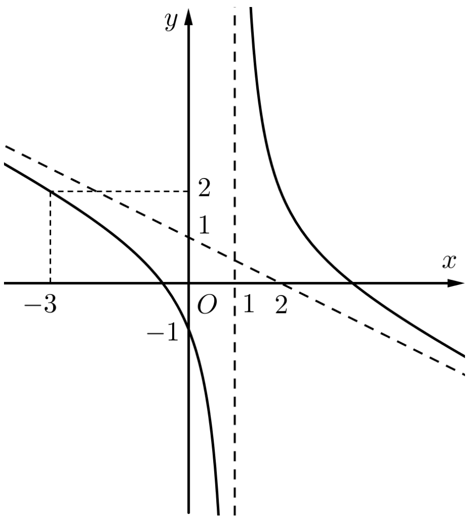
A. $y=\dfrac{2x^2-6x+2}{x-3}$.
B. $y=\dfrac{x^2-6}{x-3}$.
C. $y=\dfrac{x^2-6}{x+3}$.
D. $y=\dfrac{2x^2-6x+2}{x+3}$.

Câu 7. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



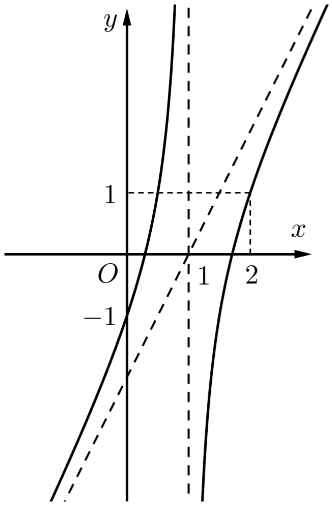
A. $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x-2}$.
B. $y=\dfrac{-3x^2+4x-2}{x+2}$.
C. $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x+2}$.
D. $y=\dfrac{3x^2+4x-2}{x-2}$.

Câu 8. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



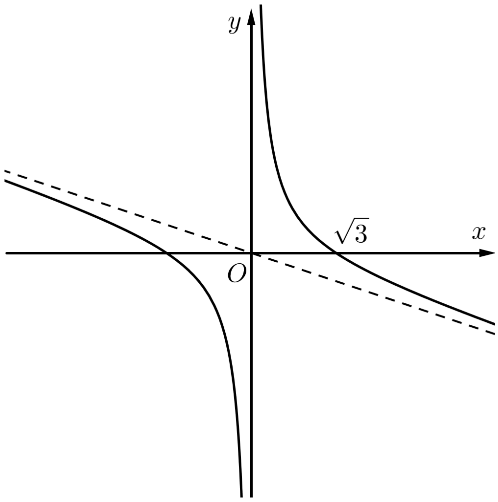
A. $y=\dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}$.
B. $y=\dfrac{-x^2+1}{x-1}$.
C. $y=\dfrac{-x^2+3x+2}{2x-2}$.
D. $y=\dfrac{x^2+6x+1}{x-1}$.

Câu 9. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



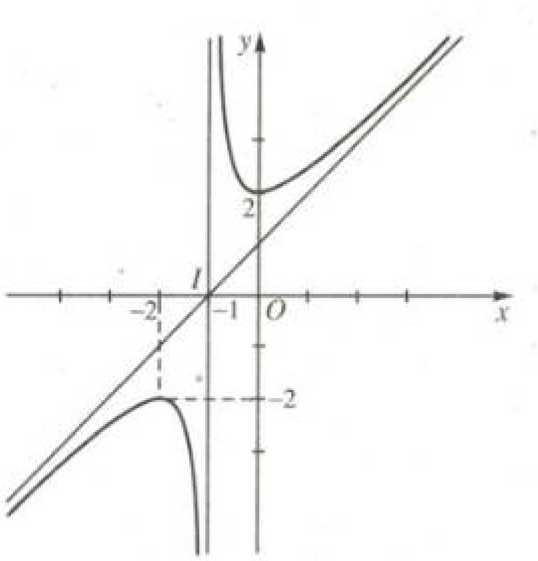
A. $y=\dfrac{2x^2-4x+1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{-3x^2+6x+1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{3x^2-6x+1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{2x^2-4x+1}{x-1}$.

Câu 10. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



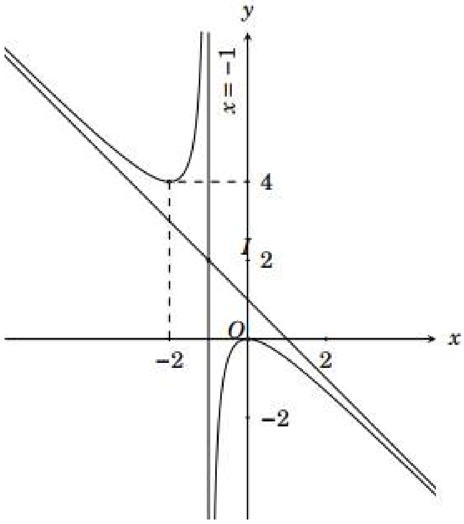
A. $y=\dfrac{x^2-3}{-3x}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-3}{3x}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+3}{-3x}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+3}{3x}$.

Câu 11. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



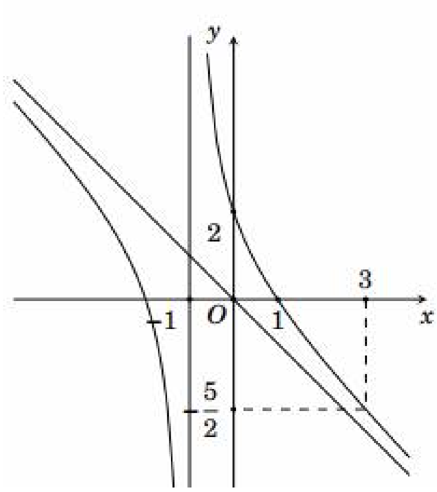
A. $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-2x}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+3x}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$.

Câu 12. Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



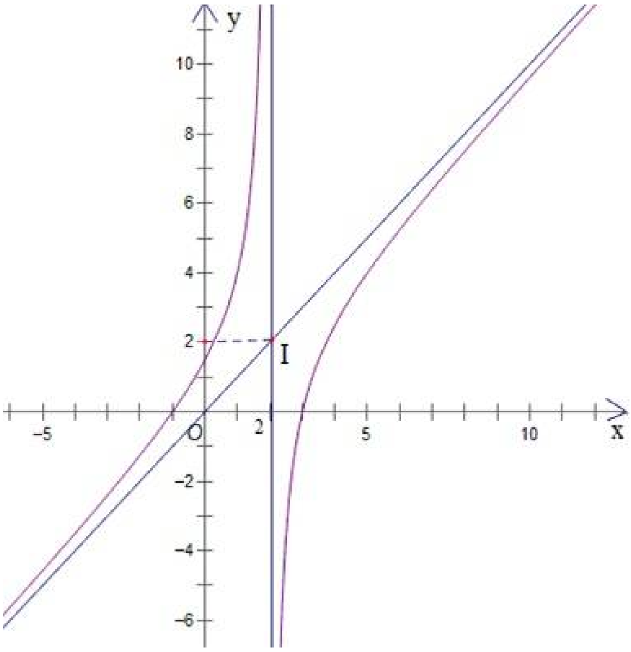
A. $y=\dfrac{x^2-x}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+x+2}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{-x^2}{x+1}$.

Câu 13. Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



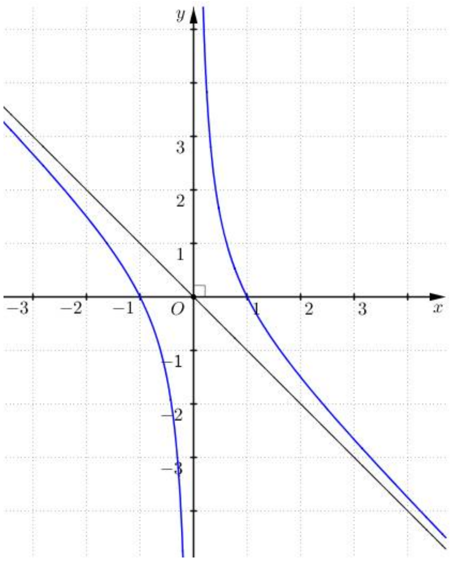
A. $y=\dfrac{x^2-x+4}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$.

Câu 14. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



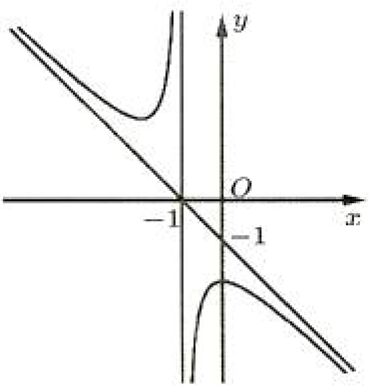
A. $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-3x}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+3x}{x+1}$.

Câu 15. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



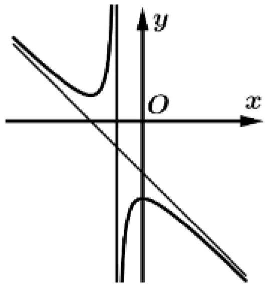
A. $y=\dfrac{-x^2+1}{x}$. **B.** $y=\dfrac{-2x+1}{2x+2}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$. **D.** $y=x^3-3x^2$.

Câu 16. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số:



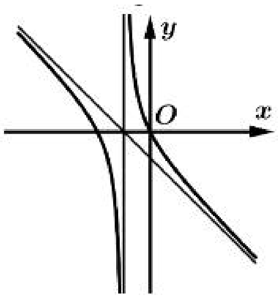
A. $y=\dfrac{x^2+2x+2}{-x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x+1}$.

Câu 17. Đồ thị trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây



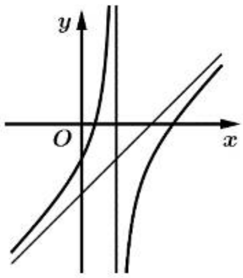
A. $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{-x^2-3x-3}{x+1}$.

Câu 18. Đồ thị trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây



A. $y=\dfrac{-x^2-2x}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2-3x}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-x}{x+1}$.

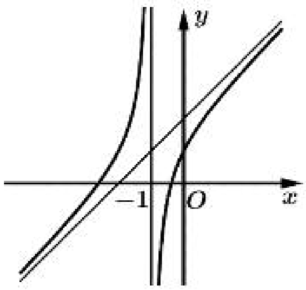
Câu 19. Đồ thị trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây



A. $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2+3x+1}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-3x+1}{x-1}$.

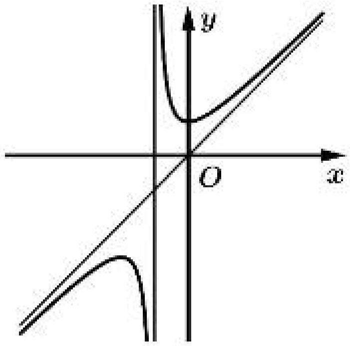
Câu 20. Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ với a,b,c,d,e là các số thực.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?



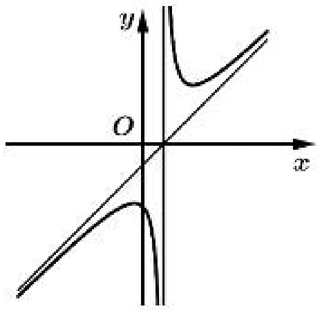
A. $y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$. **B.** $y'>0,\forall x\neq -1$. **C.** $y'>0,\forall x\in\mathbb{R}$. **D.** $y'<0,\forall x\neq -1$.

Câu 21. Đồ thị trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau:



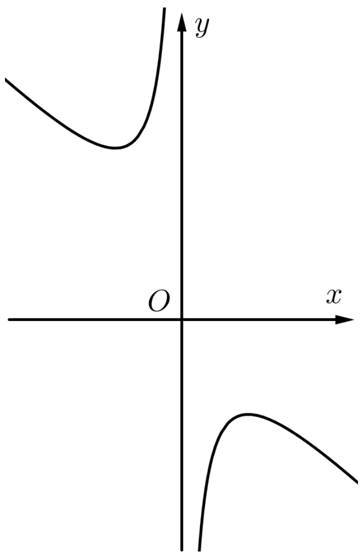
A. $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{-x^2-x+1}{x+1}$.

Câu 22. Đồ thị trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau:



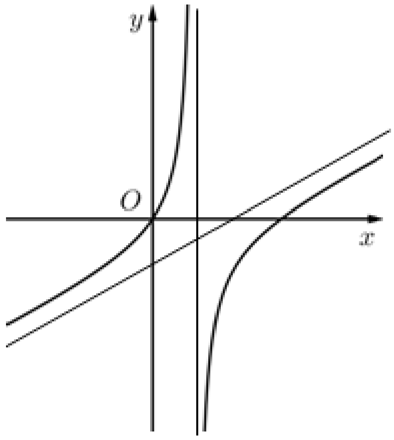
A. $y=x+1-\dfrac{3}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{-x^2-2x+3}{x-1}$.

Câu 23. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



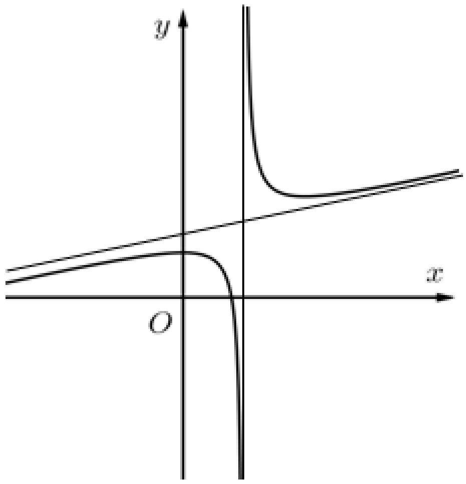
A. $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x}$. **B.** $y=\dfrac{-x^2+x+3}{x}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2+x-3}{x}$. **D.** $y=\dfrac{-x^2+x+2}{x}$.

Câu 24. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



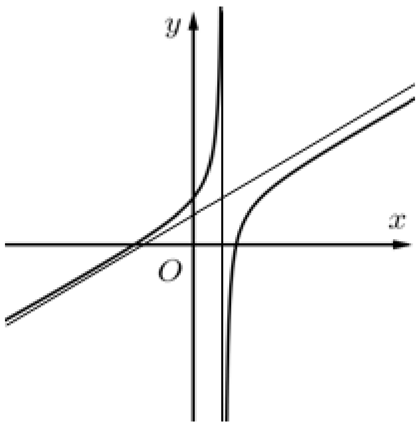
A. $y=\dfrac{x^2+3x}{2x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-3x}{2x-2}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+3x}{x-1}$.

Câu 25. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



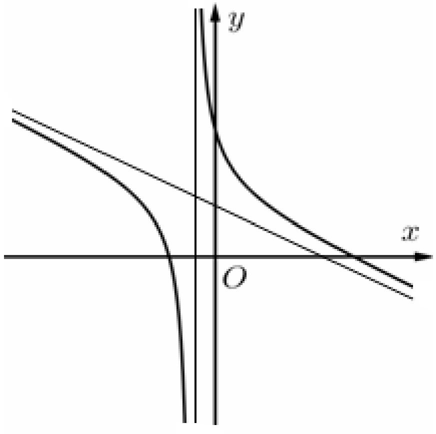
A. $y=\dfrac{x^2+4x-5}{2x-1}$. **B.** $y=\dfrac{-x^2+4x-5}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+4x+5}{2x-3}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+4x-5}{4x-5}$.

Câu 26. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



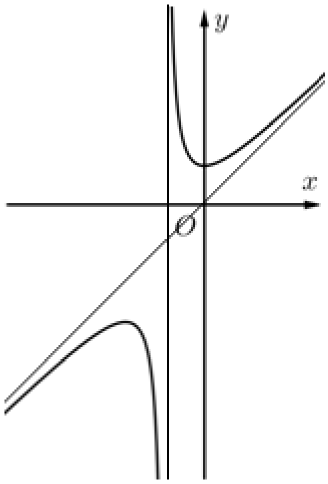
A. $y=\dfrac{3x^2+x-3}{5x-3}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-5x+2}{2x-3}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+2x+3}{2x-3}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+4x+3}{x+2}$.

Câu 27. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{-2x^2+x-1}{2x+1}$. **B.** $y=\dfrac{-x^2+2x+3}{2x+1}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2+2x+3}{x+2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+3x+4}{2x+1}$.

Câu 28. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x+2}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+4x+2}{x+3}$.

Câu 29. Bảng biến thiên trong hình dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$+\infty$ ↘	$-\infty$	||	$+\infty$ ↘	$-\infty$

A. $y=\dfrac{x^2-2x}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+3x}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{1-x^2}{x}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-1}{x}$.

Câu 30. Bảng biến thiên trong hình dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	-	||	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	-4	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	4	↗	$+\infty$

A. $y=\dfrac{x^2-2x}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+3x}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{1-x^2}{x}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+2x+5}{x+1}$.

Câu 31. Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		-10		-4		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	24	↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗	0	↘	$-\infty$

A. $y=\dfrac{x^2-3x+4}{-x-4}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-4x+4}{-x-4}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x+4}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-4x+4}{x+4}$.

Câu 32. Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗	-9	↘	$-\infty$

A. $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$. **B.** $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x-3}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2+x+2}{x-3}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-4x+4}{-x+3}$.

Câu 33. Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		-9		-4		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-20	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	0	↗	$+\infty$

A. $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x+4}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x+4}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-x+2}{-x-4}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-3x+4}{-x-4}$.

Câu 34. Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	$+$	‖	$+$
y	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

A. $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-4x+5}{x-2}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-x}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x-2}$.

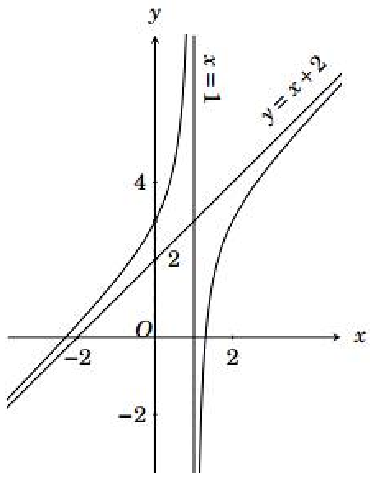
Câu 35. Bảng biến thiên sau là của hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0,\ m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
y'	$-$	‖	$-$
y	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -\infty$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$. **B.** $y'>0,\forall x\neq -3$. **C.** $y'>0,\forall x\in\mathbb{R}$. **D.** $y'<0,\forall x\neq -3$.

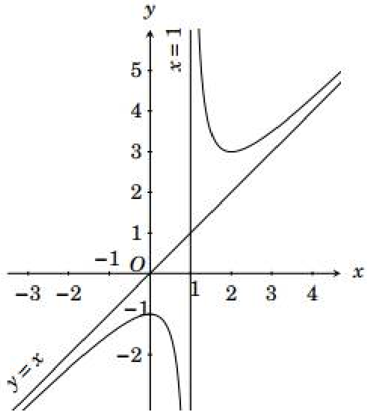
Câu 36. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0,\ m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có đồ thị là (C) có dạng như hình vẽ sau.



Tọa độ tâm đối xứng I của đồ thị là (C) là

A. $I(3;1)$. **B.** $I(1;3)$. **C.** $I(1;0)$. **D.** $I(3;0)$.

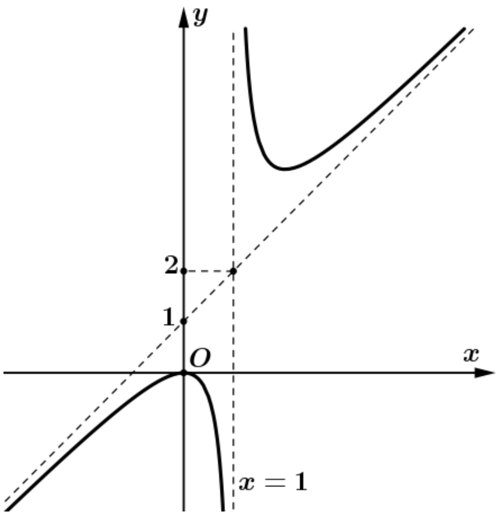
Câu 37. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0,\ m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có đồ thị là (C) có dạng như hình vẽ sau.



Tọa độ tâm đối xứng I của đồ thị là (C) là

A. $I(0;1)$. **B.** $I(0;0)$. **C.** $I(1;0)$. **D.** $I(1;1)$.

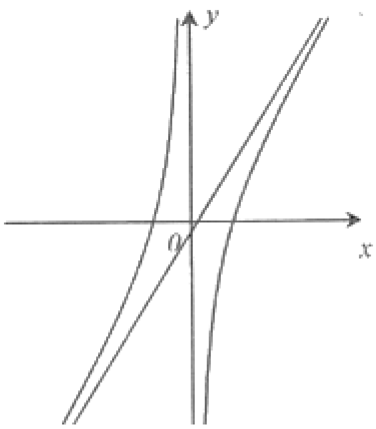
Câu 38. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0,\, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có đồ thị là (C) có dạng như hình vẽ sau.



Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng nối hai cực trị của đồ thị là (C) là

A. $(0;1)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(2;1)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 39. Cho hàm số $y=ax+b-\dfrac{r}{x}(abr\neq 0)$ và có đồ thị là (C) có dạng như hình vẽ sau.



Các hệ số a,b,r phải thoả mãn điều kiện nào dưới đây.

A. $\begin{cases} a>0 \\ b<0 \\ r>0 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} a>0 \\ b>0 \\ r<0 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} a<0 \\ b>0 \\ r>0 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} a>0 \\ b>0 \\ r>0 \end{cases}$

Câu 40. Hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+5}{x+2}$ có giá trị cực tiểu bằng:

A. $-1-2\sqrt{3}$. **B.** $-1+2\sqrt{3}$. **C.** $1+2\sqrt{3}$. **D.** $1-2\sqrt{3}$.

Câu 41. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x}{x-1}$ là

A. $y=-2x-2$. **B.** $y=2x+2$. **C.** $y=2x-2$. **D.** $y=-2x+2$.

Câu 42. Đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-x+2}{x+2}$ có phương trình là

A. $y=2x-1$. **B.** $y=2x+1$. **C.** $y=x-2$. **D.** $y=-2x-1$.

Câu 43. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x}{x-1}$. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{15}$.

Câu 44. Biết rằng đồ thị $(H): y=\dfrac{x^2+2x+m}{x-2}$ (với m là tham số thực) có hai điểm cực trị là A, B. Hãy tính khoảng cách từ gốc toạ độ $O(0;0)$ đến đường thẳng AB.

A. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 45. Giao điểm giữa đồ thị $(C): y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-1}$ và đường thẳng $(d): y=x+1$ là

A. $A(-1;0)$ **B.** $A(3;0)$ **C.** $A(1;0)$ **D.** $A(-3;0)$

Câu 46. Phương trình tiếp tuyến của đường cong $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0=-1$ là:

A. $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{5}{4}$. **B.** $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$. **C.** $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{5}{4}$. **D.** $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{5}{4}$.

Câu 47. Cho đường cong $(C): y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ và điểm $A\in(C)$ có hoành độ $x=3$. Lập phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A.

A. $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$. **B.** $y=3x+5$. **C.** $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{5}{4}$. **D.** $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

Câu 48. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}$ và xét các phương trình tiếp tuyến có hệ số góc $k=2$ của đồ thị hàm số là

A. $y=2x-1$; $y=2x-3$. **B.** $y=2x-5$; $y=2x-3$.

C. $y=2x-1$; $y=2x-5$. **D.** $y=2x-1$; $y=2x+5$.

Câu 49. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{x-2}$ có đồ thị (H). Tìm tất cả tọa độ tiếp điểm của đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d: y=2x-1$ và tiếp xúc với (H).

A. $M\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$

B. $M(2;3)$

C. $M_1(2;3)$ và $M_2(1;2)$

D. Không tồn tại

Câu 50. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$, tiếp tuyến của đồ thị hàm số vuông góc với đường thẳng. $d: 3y-x+6=0$ là

A. $y=-3x-3;\ y=-3x-11$.

B. $y=-3x-3;\ y=-3x+11$.

C. $y=-3x+3;\ y=-3x-11$.

D. $y=-3x-3;\ y=3x-11$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

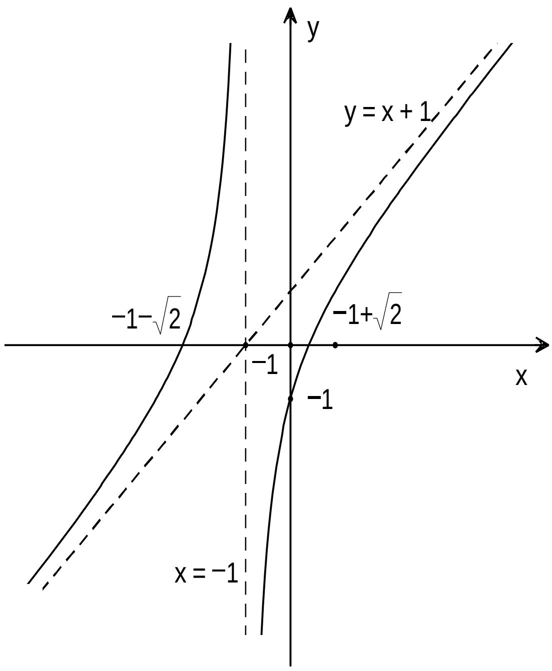
Câu 51. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x+1}$ có đồ thị là (C).

a) Hàm số có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

b) Bảng biến thiên của hàm số đã cho là:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	||	+	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$

c) Đồ thị (C) là hình sau:



d) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số (C) là điểm $I(0;-1)$.

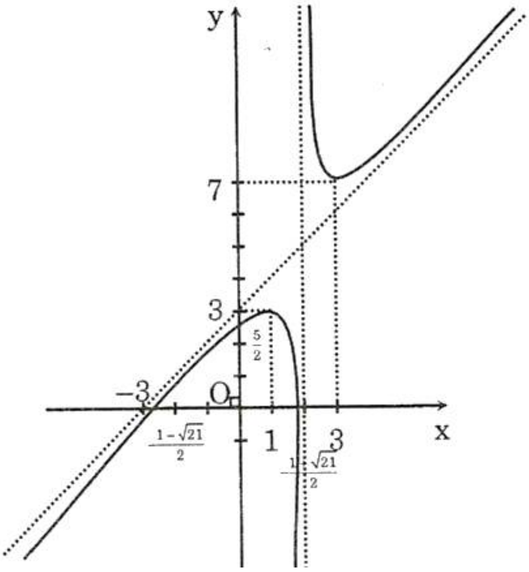
Câu 52. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x-5}{x-2}$ có đồ thị là (C).

a) Hàm số có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

b) Bảng biến thiên của hàm số đã cho là:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		+	0	−	||	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	7	↗	$+\infty$

c) Đồ thị (C) là hình sau:



d) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số (C) là điểm $I(2;5)$.

Câu 53. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x-1}{x-2}$ có đồ thị là (C).

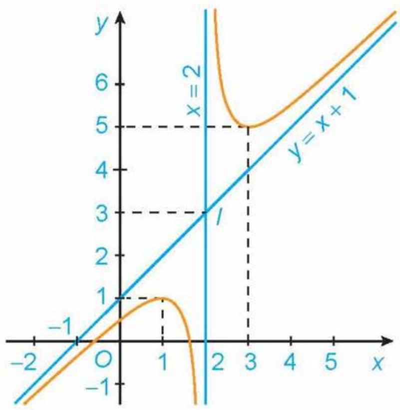
a) Hàm số có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

b) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$

c) Bảng biến thiên của hàm số đã cho là:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

d) Đồ thị (C) là hình sau:



Câu 54. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2-3x+4}{x-3}$ có đồ thị là (C).

a) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là $y=-x-6$.

b) Đồ thị (C) nhận giao điểm $I(3;9)$ làm tâm đối xứng.

c) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy.

d) Đồ thị (C) cắt Ox tại một điểm phân biệt.

Câu 55. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x-1}{x-2}$ có đồ thị là (C).

a) Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang

b) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy.

c) Đồ thị (C) không cắt trục Ox.

d) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm M. Khi đó, phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là $3x-4y+2=0$

Câu 56. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x+1}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng khoảng $(-2,-1)$ và $(-1,0)$

b) Hàm số có hai điểm cực trị $(-2;5)$ và $(0;1)$

c) Đồ thị (C) cắt Ox tại một điểm phân biệt.

d) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(1;2)$

Câu 57. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$

b) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x+2$

c) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$

d) Đồ thị hàm số (C) nhận điểm $I(-2;0)$ làm tâm đối xứng.

Câu 58. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-2x+2}{-x+1}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty,0)\cup(2;+\infty)$

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right]$ bằng $-\dfrac{19}{3}$

d) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $2x+y=0$

Câu 59. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+3x+2}{x+1}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.

b) Hàm số có 2 điểm cực trị.

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;3]$ tại $x=1$.

d) Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang.

Câu 60. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-2x+2}{-x+1}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$.

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1,5;2,5]$ là $-\dfrac{19}{3}$.

d) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $2x+y=0$.

Câu 61. Cho hàm số $y=x-\dfrac{1}{x}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

c) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1;3]$ tại $x=2$.

d) Đồ thị hàm số đối xứng qua điểm $O(0;0)$.

Câu 62. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x-3}{x-1}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

b) Hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-3;0]$ tại $x=0$.

d) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=1$.

Câu 63. Cho hàm số $y=\dfrac{1-x^2}{x}$ có đồ thị (C).

a) Đồ thị hàm sồ có tiệm cận đứng là $x=0$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=-x$.

c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

d) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là O.

Câu 64. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2x}{x-1}$ có đồ thị (C).

a) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=-x+1$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

d) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là $I(1;1)$.

Câu 65. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3,-1)$.

b) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $x=-1$.

c) Đồ thị (C) nhận $I(-2;0)$ làm tâm đối xứng.

d) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(1;2)$.

Câu 66. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$ có đồ thị (C).

a) Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng $y=x$.

b) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

c) Đồ thị hàm số đã cho nhận điểm $I(4;4)$ là tâm đối xứng.

d) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang.

Câu 67. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ có đồ thị (C).

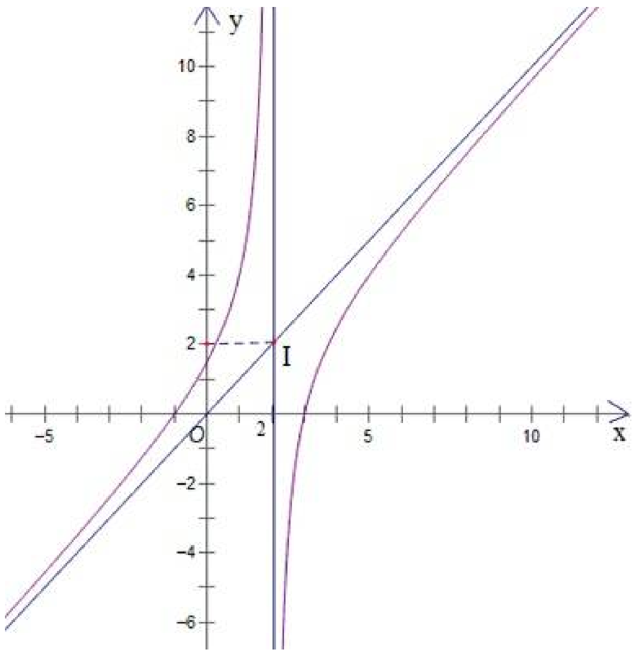
a) Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.

b) Hàm số đã cho không có cực trị.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y=x$.

d) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là $I(-1;-1)$.

Câu 68. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $(a,b,c,m,n\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



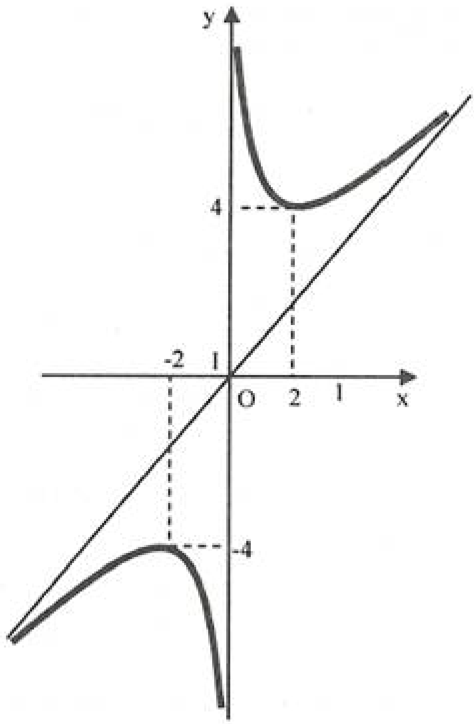
a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có hai cực trị.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=2$ và tiệm cận xiên $y=x$.

d) Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ là của đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-1}$.

Câu 69. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $(a,b,c,m,n\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



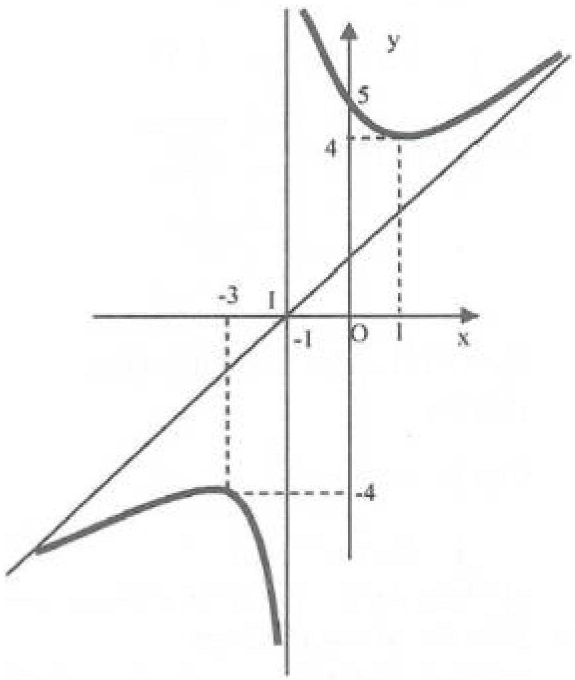
a) Đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ có tiệm cận đứng và tiệm cận xiên

b) Đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

c) Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;2\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$

d) Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có điểm cực đại $\left(2;4\right)$ và điểm cực tiểu $\left(-2;-4\right)$.

Câu 70. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $\left(a,b,c,m,n\in\mathbb{R}\right)$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) Đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ có tiệm cận đứng $x=0$

b) Đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

c) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-3)$ và $(1;+\infty)$

d) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại $(-3;-4)$ và điểm cực tiểu $(1;4)$.

Câu 71. Cho hàm số $y = \dfrac{mx^2 + (3m^2-2)x - 2}{x + 3m}$ (1) với m là số thực

a) Khi $m = 1$ đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị

b) Khi $m = 1$ đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = x - 2$

c) Khi $m = 1$ giao điểm của đường tiệm cận xiên và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $I(3;-5)$

d) Có 2 giá trị m để góc giữa hai tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng 45^0

Câu 72. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ với $(a,b,c,m,n \in \mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

a) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại $(-2;2)$ và điểm cực tiểu $(0;2)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-2;-1)$ và $(-1;0)$.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = -1$.

d) Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là của đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 2}$.

Câu 73. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ với $(a,b,c,m,n \in \mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

a) Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = 0$.

b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

c) Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là của đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 2}$.

d) Trên đoạn $[2024;2025]$ hàm số $y=f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là $f(2025)$ và giá trị lớn nhất là $f(2024)$.

Câu 74. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $(a,b,c,m,n\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ và có bảng biến thiên dưới đây

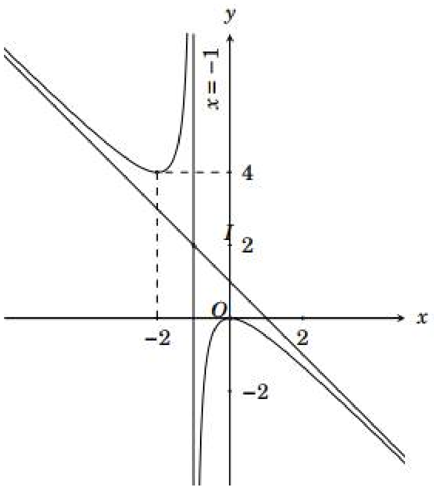
x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(2;6)$ và điểm cực tiểu $(0;2)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=1$.

d) Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ là như hình vẽ sau:



Câu 75. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx-1}{mx+2}$ với $(a,b,m\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ và có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

a) $f'(x)<0$ khi $x\in(-3;-2)\cup(-2;-1)$

b) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-3;-2)$ và $(-2;-1)$.

c) $a+b+m=3$

d) Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có tọa độ tâm đối xứng là $(-2;3)$.

Câu 76. Cho hàm số $y = f\left(x\right) = \dfrac{ax^2+2x+c}{x+n}$ với $\left(a,c,n \in \mathbb{R}\right)$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{2\right\}$ và có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-6	↘	$-\infty$

a) Đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ có điểm cực đại $\left(4;-6\right)$ và điểm cực tiểu $\left(0;2\right)$.

b) Đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ có đường tiệm cận đứng $x = 2$.

c) $f'\left(x\right) < 0$ khi $x \in \left(0;2\right) \cup \left(2;4\right)$

d) $a + c + n = 7$.

Câu 77. Cho hàm số $y = x - \dfrac{1}{x+1}$ có đồ thị (C).

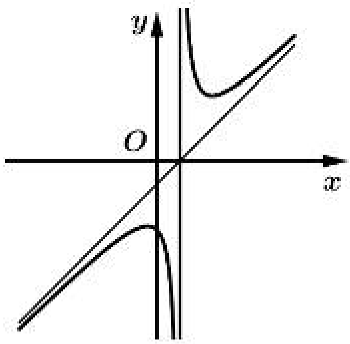
a) Đồ thị của hàm số (C) có tiệm cận đứng là $x = 1$

b) Đồ thị của hàm số (C) có tiệm cận xiên là $y = x$.

c) Đồ thị hàm số (C) cắt trục Oy tại M. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y = 2x + 1$.

d) Tồn tại hai tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với nhau

Câu 78. Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ $(a,b,c,d,e \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên.



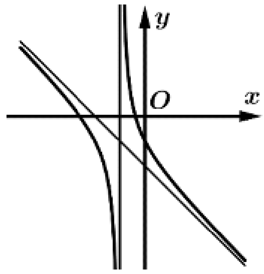
a) $ad > 0$.

b) $ed < 0$.

c) $ce < 0$.

d) $bd > 0$.

Câu 79. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên.



a) $ad>0$.

b) $de<0$.

c) $ac>0$.

d) $bd>0$.

Câu 80. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2(m+1)x-5}{x-1}$ có đồ thị (C) với m là tham số

a) Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

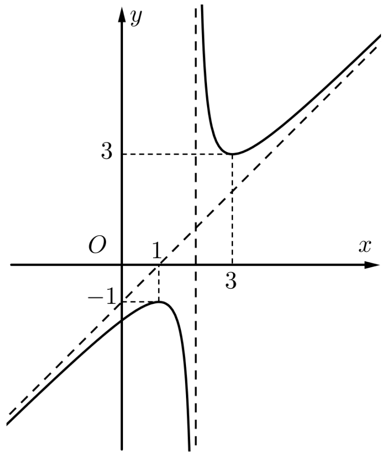
b) Khi $m=0$ thì đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(-2;4)$ và $(3;-4)$

c) Khi $m=0$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=-x+1$

d) Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì $m>4$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

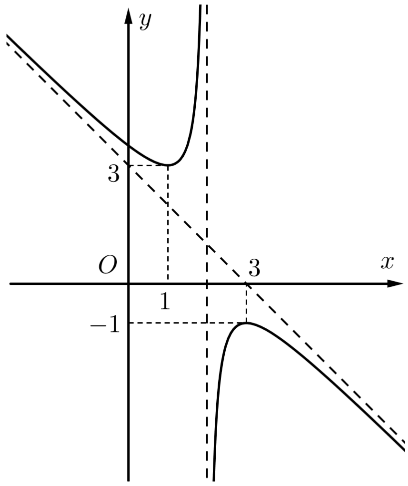
Câu 81. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0,\, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có đồ thị là (C) có dạng như hình vẽ sau.



Gọi $I\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị là (C). Tính giá trị của x_0+y_0.

Trả lời: ………………..

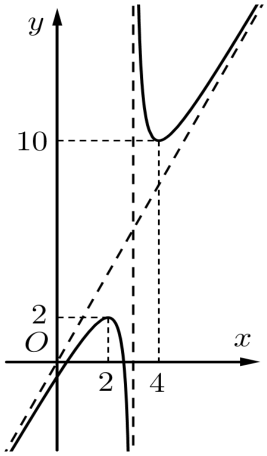
Câu 82. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0,\, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có đồ thị là (C) có dạng như hình vẽ sau.



Gọi $I\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị là (C). Tính giá trị của $x_0+2025y_0$.

Trả lời: ………………..

Câu 83. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0,\, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có đồ thị là (C) có dạng như hình vẽ sau.



Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho. Tính giá trị của x_0+y_0.

Trả lời: ………………..

Câu 84. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0,\, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$ $-\infty$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Gọi $I\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho. Tính giá trị của x_0+y_0.

Trả lời: ………………..

Câu 85. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0,\, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	15	$\nearrow$ $+\infty$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	-9	$\searrow$	$-\infty$

Gọi $I\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho. Tính giá trị của x_0+y_0.

Trả lời: ………………..

Câu 86. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho. Tính giá trị của x_0+y_0.

Trả lời: ………………..

Câu 87. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-5		-4		-3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	12	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho. Tính giá trị của x_0+y_0.

Trả lời: ………………..

Câu 88. Gọi $I\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số $y=x-2+\dfrac{4}{x-1}$. Tính giá trị $T=2025x_0-2024y_0$.

Trả lời: ………………..

Câu 89. Gọi $I\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x+2}$. Tính giá trị $T=x_0-y_0$.

Trả lời: ………………..

Câu 90. Gọi $I\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x}{x-1}$. Tính giá trị $T=x_0-y_0$.

Trả lời: ………………..

Câu 91. Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ cắt trục tung tại điểm $M\left(x_M;y_M\right)$. Tính giá trị biểu thức $T=x_M+y_M$.

Trả lời: ………………..

Câu 92. Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x-2}$ cắt trục hoành tại hai điểm $M\left(x_M;y_M\right)$ và $N\left(x_N;y_N\right)$. Tính giá trị biểu thức $T=x_M+x_N$.

Trả lời: ………………..

Câu 93. Đường thẳng $y=2x-1$ có bao nhiêu điểm chung với đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$?

Trả lời: ………………..

Câu 94. Trên đồ thị (C): $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x-2}$, có bao nhiêu cặp điểm đối xứng nhau qua điểm $I\left(\dfrac{1}{2};1\right)$?

Trả lời: ………………..

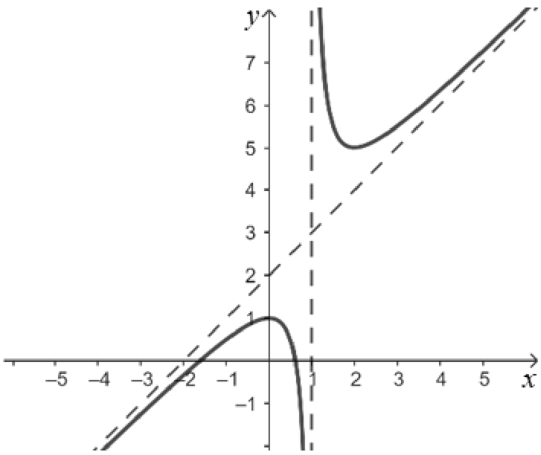
Câu 95. Số điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+3x+10}{x+2}$ là bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 96. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$ có đồ thị là (C). Có bao nhiêu điểm trên đồ thị (C) của hàm số có tọa độ là các số nguyên?

Trả lời: ………………..

Câu 97. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}\left(a>0,m\neq 0\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi trong các số b,c,m,n có tất cả bao nhiêu số dương?



Trả lời: ………………..

Câu 98. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-mx+2m}{x+m}\left(C_m\right)$. Có bao nhiêu đồ thị $\left(C_m\right)$ đi qua điểm $(0,1)$.

Trả lời: ………………..

Câu 99. Tìm giá trị m để đường thẳng $y=-2x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x}$ tại hai điểm A,B sao cho trung điểm đoạn AB thuộc Oy.

Trả lời: ………………..

Câu 100. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ (với m là tham số). Tìm giá trị của tham số m để hàm số có giá trị cực đại là 7.

Trả lời: ………………..

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 101. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x}{x-2}$ có đồ thị (C).

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $A(1;-2)$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành.

Câu 102. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+1}{2x-1}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung có dạng $y=ax+b$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+b$

Câu 103. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{x-2}$ có đồ thị (H). Có bao nhiêu tiếp điểm của đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d:y=2x-1$ và tiếp xúc với (H).

Câu 104. Tìm được trên đồ thị $(C):y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$ hai điểm $M_1(a;b)$ và $M_2(c;d)$ có khoảng cách đến đường thẳng $3x+y+6=0$ nhỏ nhất. Khi đó, tính giá trị biểu thức $T=a+b+c+d$.

Câu 105. Có bao nhiêu giá trị của m để đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{x}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB=\sqrt{6}$?

Câu 106. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-m^2}{x+1}$ có đồ thị (C_m), trong đó m là tham số thực. Đường thẳng $d:y=m-x$ cắt (C_m) tại hai điểm $A(x_A;y_A),B(x_B;y_B)$ với $x_A<x_B$; đường thẳng $d':y=2-m-x$ cắt (C_m) tại hai điểm $C(x_C;y_C),D(x_D;y_D)$ với $x_C<x_D$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $x_A.x_D=-3$. Số phần tử của tập S bằng bao nhiêu?

Câu 107. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+m^2-2m-4}{x-2}$ (1). Tìm giá trị m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị cách đều đường thẳng $\Delta:2x+y+1=0$.

Câu 108. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+(m+1)x+m+1}{x+1}$. Gọi $A;B$ là hai điểm cực trị, tìm tham số m để diện tích ΔOAB bằng 2.

Câu 109. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2mx+5}{x-1}$. Tìm tham số thực m để hàm số có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị này nằm về hai phía so với đường thẳng $\Delta:y=2x$.

Câu 110. Tìm các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{x^2-(m+1)x-m^2+4m-2}{x-1}$ có cực đại và cực tiểu, đồng thời tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất.

CHỦ ĐỀ 3

KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN, VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ HỮU TỈ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số phân thức: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$.

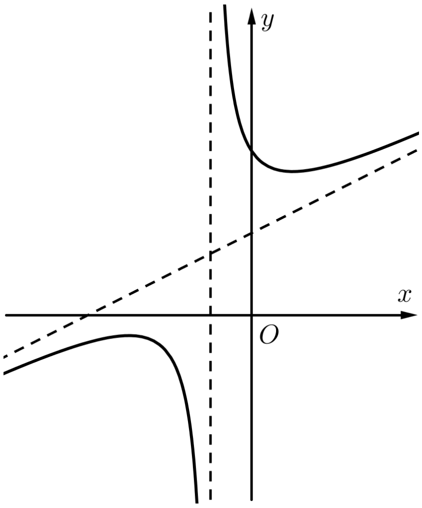
- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{n}{m}\right\}$.
- Đạo hàm: $y'=\dfrac{amx^2+2anx+bn-cm}{(mx+n)^2}$.
- Phương trình các đường tiệm cận: Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$ và đường tiệm cận xiên $y=\dfrac{a}{m}x+\dfrac{b-am}{m^2}$.
- Đồ thị có tâm đối xứng I là giao điểm hai đường tiệm cận và nhận đường phân giác tạo bởi hai đường tiệm cận làm trục đối xứng.

2. Các dạng đồ thị của hàm số phân thức: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0,\, m\neq 0)$

Phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt

$am>0$

• Đồ thị

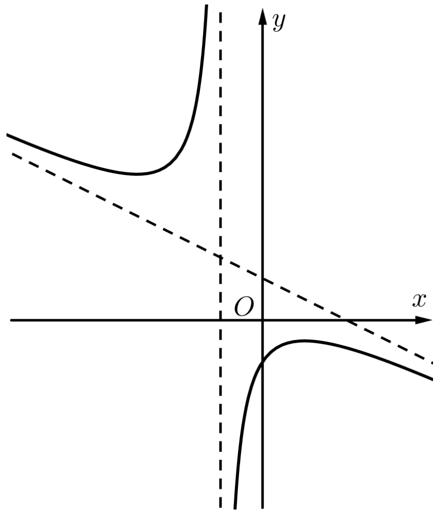


• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$x_{CĐ}$		$-\dfrac{n}{m}$		x_{CT}		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$y_{CĐ}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	y_{CT}	↗	$+\infty$

$am<0$

• Đồ thị



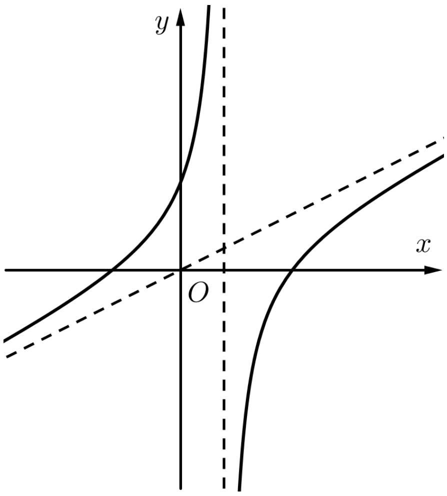
• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_{CT}		$-\dfrac{n}{m}$		$x_{CĐ}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	y_{CT}	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$y_{CĐ}$	↘	$-\infty$

Phương trình $y'=0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm

$am>0$

• Đồ thị

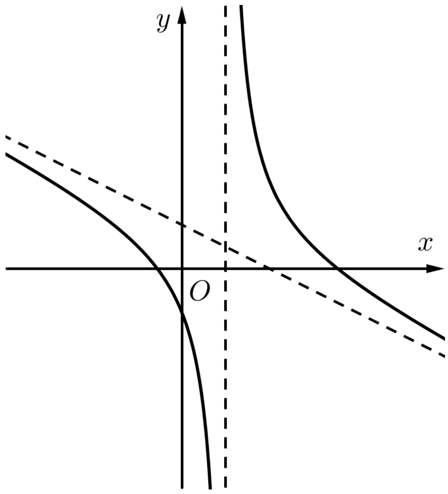


• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{n}{m}$		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	$-\infty$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

$am<0$

• Đồ thị



• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{n}{m}$		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$+\infty$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$-\infty$

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1
KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ PHÂN THỨC

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{mx+n}\ (a\neq 0,\ m\neq 0)$$

Để khảo sát hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}, a\neq 0, m\neq 0$ thì ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{n}{m}\right\}$

Bước 2: Khảo sát sự biến thiên của hàm số

Tính đạo hàm $y'=\dfrac{am.x^2+2an.x+b.n-m.c}{(mx+n)^2}$. Tìm các điểm tại đó $y'=0$

Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

Lập bảng biến thiên, xác định chiều biến thiên và các điểm cực trị của hàm số

Bước 3: Cho thêm điểm và vẽ đồ thị hàm số dựa vào bảng biến thiên

Bài 1. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ b) $y=\dfrac{x^2+x-1}{x}$ c) $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ d) $y=\dfrac{-x^2+1}{x}$

Lời giải

a) $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

• Sự biến thiên

+ Chiều biến thiên

Ta có: $y'=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

$y'=0\Leftrightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=-2$.

Trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$ ta có $y'>0$ nên hàm số đồng biến trên các khoảng đó.

Trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(-1;0)$ ta có $y'<0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng đó.

+ Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ và $y_{CĐ}=f(-2)=-2$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ và $y_{CT}=f(0)=2$

+ Các giới hạn:

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}{1+\dfrac{1}{x}}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}{1+\dfrac{1}{x}}=+\infty$

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-1)^-}y=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+}y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}=+\infty$ nên đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$y=f(x)=\frac{x^2+2x+2}{x+1}=x+1+\frac{1}{x+1}$$

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$ nên đường thẳng $y=x+1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y		↗	-2	↘	|| $+\infty$	↘		↗	$+\infty$
	$-\infty$				$-\infty$ ||		2		

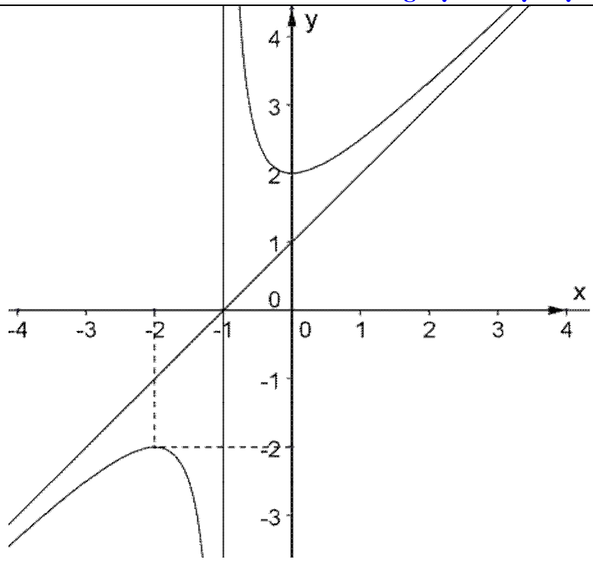
• Đồ thị:

+ Giao điểm của đồ thị với trục tung tại điểm $(0;2)$.

+ Đồ thị hàm số có điểm cực đại $(-2;-2)$ và điểm cực tiểu $(0;2)$.

+ Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $I(-1;0)$.

+ Đồ thị nhận đường phân giác tạo bởi hai đường tiệm cận đứng $x=-1$ và tiệm cận xiên $y=x+1$ làm trục đối xứng.



b) $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x}$

• Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

• Sự biến thiên

+ Chiều biến thiên

Ta có: $y' = \dfrac{x^2 + 1}{x^2} > 0$ với mọi $x \neq 0$ nên hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

+ Cực trị: Hàm số không có cực trị.

+ Các giới hạn:

Ta có: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$

Ta có: $\lim\limits_{x \to 0^-} y = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 + x - 1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} y = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 + x - 1}{x} = -\infty$ nên đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$y = f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x} = x + 1 - \frac{1}{x}$$

Ta có: $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (x+1)\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (x+1)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$ nên đường thẳng $y = x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

+ Bảng biến thiên:

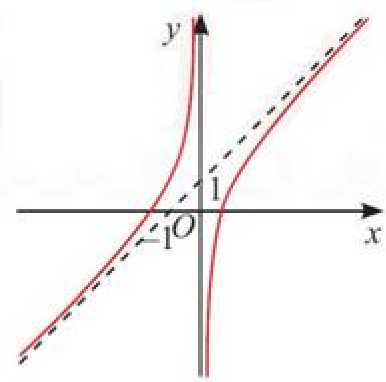
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

• Đồ thị:

+ Chọn $x=1 \Rightarrow y=1; x=2 \Rightarrow y=\dfrac{5}{2}$. Đồ thị qua 2 điểm $(1;1);\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$

+ Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $I(0;1)$.

+ Đồ thị nhận đường phân giác tạo bởi hai đường tiệm cận đứng $x=0$ và tiệm cận xiên $y=x+1$ làm trục đối xứng.



c) $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$

•Tập xác định: $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

• Sự biến thiên

- Giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận:

Ta viết hàm số đã cho dưới dạng: $y=x+\dfrac{1}{x-1}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty.. \lim\limits_{x\to1^-} y=-\infty, \lim\limits_{x\to1^+} y=+\infty$.

Do đó, đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-1}=0, \lim\limits_{x\to-\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$.

Do đó, đường thẳng $y=x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

$y'=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

$y'=0 \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$; nghịch biến trên mỗi khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$.

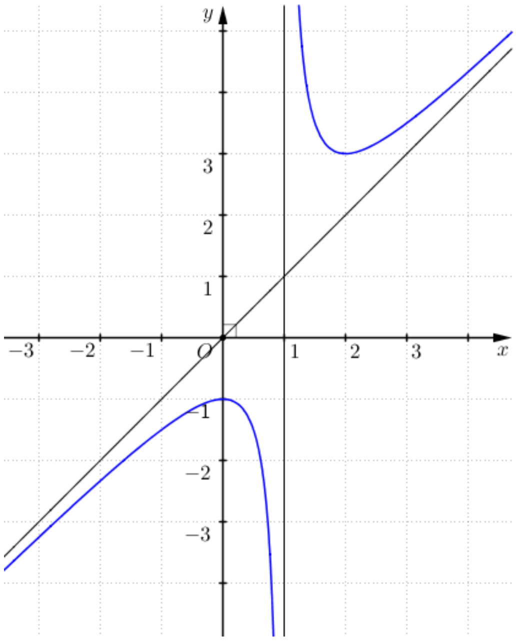
Hàm số đạt cực đại tại $x=0, y_{CĐ}=-1$; đạt cực tiểu tại $x=2, y_{CT}=3$.

- Đồ thị

Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0;-1)$.

Đồ thị hàm số không cắt trục hoành.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0;-1),\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right),\left(-1;-\frac{3}{2}\right),(2;3),\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$ và $\left(3;\frac{7}{2}\right)$.



Quan sát đồ thị ở Hình, đồ thị đó nhận giao điểm $I(1;1)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận Hình hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

d) $y=\frac{-x^2+1}{x}$

- Tập xác định: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

- Sự biến thiên

- Giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận:

Ta viết hàm số đã cho dưới dạng: $y=-x+\frac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$. $\lim\limits_{x\to0^-} y=-\infty, \lim\limits_{x\to0^+} y=+\infty$. Do đó, đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(y+x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0, \lim\limits_{x\to-\infty}(y+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$. Do đó, đường thẳng $y=-x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

- $y'=-\frac{x^2+1}{x^2}, y'<0, \forall x\neq 0.$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$+\infty$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$-\infty$

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

- Đồ thị

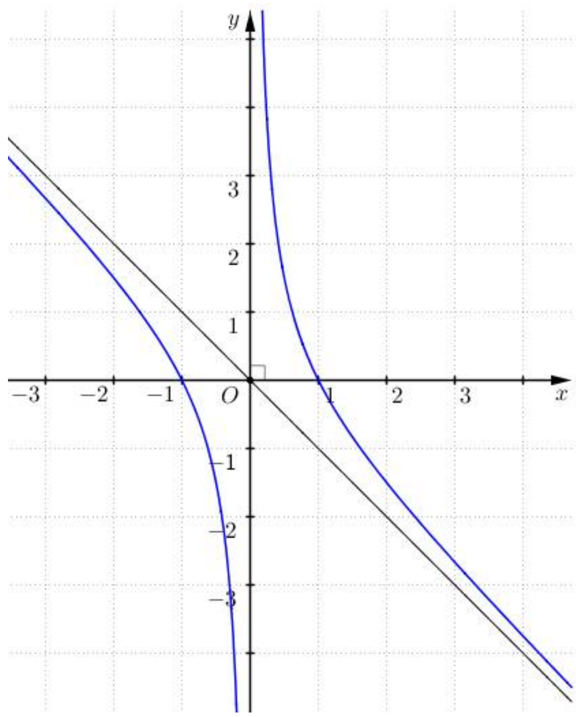
· Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại các điểm $(-1;0),(1;0)$.

· Đồ thị hàm số không cắt trục tung.

· Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-1;0)$, $(1;0)$, $\left(-2;\frac{3}{2}\right),\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right),\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right),\left(2;-\frac{3}{2}\right)$.

· Đồ thị hàm số nhận giao điểm $O(0;0)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{-x^2+1}{x}$ được cho ở Hình.



Bài 2. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$ b) $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$ c) $y=\dfrac{-x^2-3x+4}{x+2}$ d) $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x+1}$

Lời giải

a) $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
- Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$. Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty), y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó. Trên các khoảng $(0;1)$ và $(1;2), y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

- Cực trị:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và $y_{CT} = 6$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CD} = 2$.

- Các giới hạn tại vô cực và tiệm cận:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x-2}{x-1} = -\infty; \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x-2}{x-1} = +\infty.$$

Ta có: $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2x-2}{x^2-x} = 1$ và $b = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2+2x-2}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-2}{x-1} = 3$.

Suy ra đường thẳng $y = x + 3$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^-} y = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x^2+2x-2}{x-1} = -\infty; \lim\limits_{x\to1^+} y = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x^2+2x-2}{x-1} = +\infty$.

Suy ra đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

• Đồ thị:

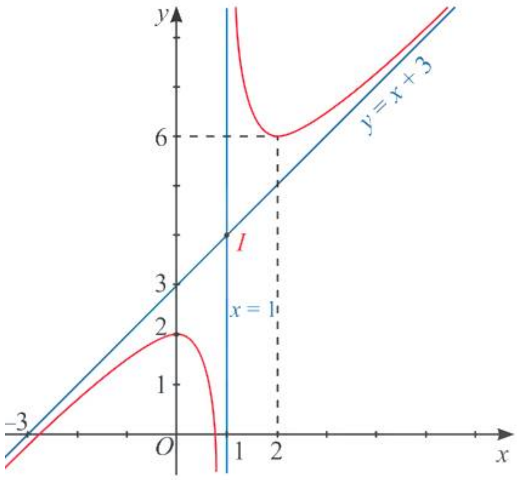
Ta có $y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{3}$ hoặc $x = -1 - \sqrt{3}$.

Vậy đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-1+\sqrt{3};0)$ và điểm $(-1-\sqrt{3};0)$.

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0;2)$.

Đồ thị hàm số được biểu diễn trên Hình.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(1;4)$. Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = 1$ và $y = x + 3$.



b) $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

- Sự biến thiên:

- Giới hạn, tiệm cận:

Ta có: $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}=x+2+\dfrac{1}{x+2}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2+\dfrac{1}{x+2}\right)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+2+\dfrac{1}{x+2}\right)=-\infty$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}=-\infty$.

Suy ra đường thẳng $x=-2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+2}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+2}=0$.

Suy ra đường thẳng $y=x+2$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

- Bảng biến thiên:

Ta có: $y'=1-\dfrac{1}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$;

$y'=0\Leftrightarrow x=-3$ hoặc $x=-1$.

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

- Chiều biến thiên:

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-1;+\infty)$;

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-3;-2)$ và $(-2;-1)$.

- Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=-3$, $f_{CĐ}=f(-3)=-2$;

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=-1,\ f_{CT}=f(-1)=2$.

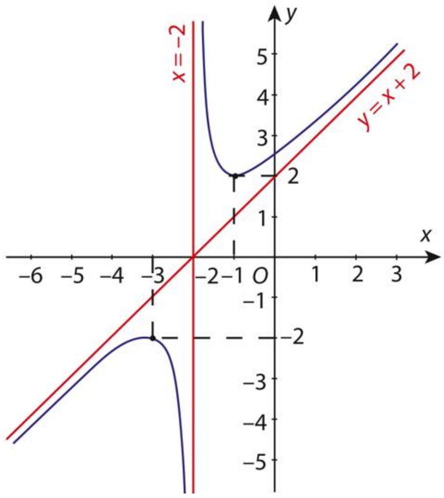
- Đồ thị:

Vẽ các đường tiệm cận $x=-2$ và $y=x+2$.

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $\left(0;\dfrac{5}{2}\right)$ và không giao với trục Ox.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-2;0)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

Đồ thị hàm số được cho như Hình.



c) $y=\dfrac{-x^2-3x+4}{x+2}$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

• Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y'=\dfrac{-x^2-4x-10}{(x+2)^2}$.

Vì $y'<0$ với mọi $x\neq-2$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

- Các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tiệm cận:

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2-3x+4}{x+2}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2-3x+4}{x+2}=-\infty.$

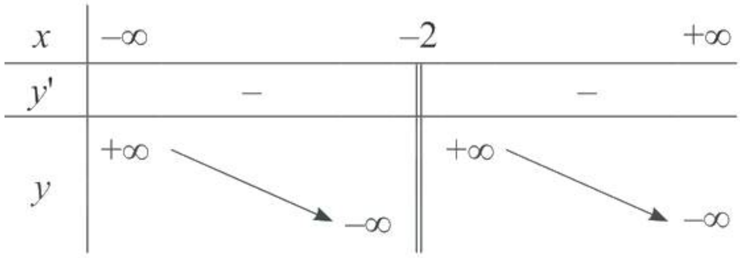
Ta có: $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2-3x+4}{x^2+2x}=-1$ và $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{-x^2-3x+4}{x+2}-(-1)x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x+4}{x+2}\right)=-1$.

Suy ra đường thẳng $y=-x-1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to-2^-}y=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{-x^2-3x+4}{x+2}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to-2^+}y=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{-x^2-3x+4}{x+2}=+\infty$.

Suy ra đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Bảng biến thiên:



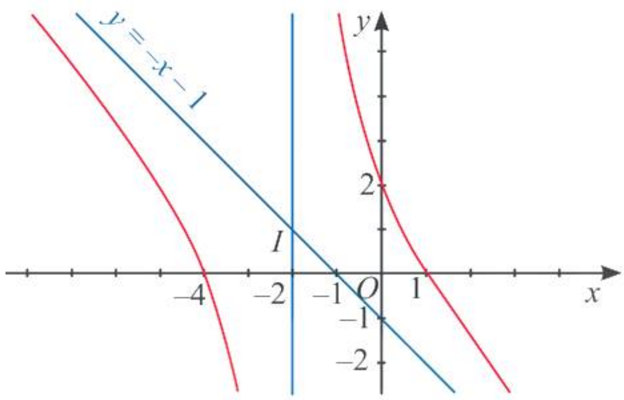
• Đồ thị:

Ta có $y=0 \Leftrightarrow -x^2-3x+4=0$

$\Leftrightarrow x=-4 \vee x=1$.

Vậy đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-4;0)$ và điểm $(1;0)$.

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0;2)$. Đồ thị của hàm số được biểu diễn trên Hình. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(-2;1)$. Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x=-2$ và $y=-x-1$.



d) $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x+1}$

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

- Sự biến thiên:

- Giới hạn, tiệm cận:

Ta có: $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x+1}=-x+\dfrac{2}{x+1}$;

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x+\frac{2}{x+1}\right)=-\infty;\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x+\frac{2}{x+1}\right)=+\infty.$$

Ta có: $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{-x^2-x+2}{x+1}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{-x^2-x+2}{x+1}=-\infty$.

Suy ra đường thẳng $x=-1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-x)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x+1}=0;\ \lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x)]=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x+1}=0.$$

Suy ra đường thẳng $y=-x$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

- Bảng biến thiên:

Ta có $y' = -1 - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{-x^2-2x-3}{(x+1)^2}$.

Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm, y' không xác định tại $x = -1$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$-$	
y	$+\infty \searrow -\infty$		$\|$	$+\infty \searrow -\infty$	

- Chiều biến thiên: Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

- Cực trị: Hàm số không có cực trị.

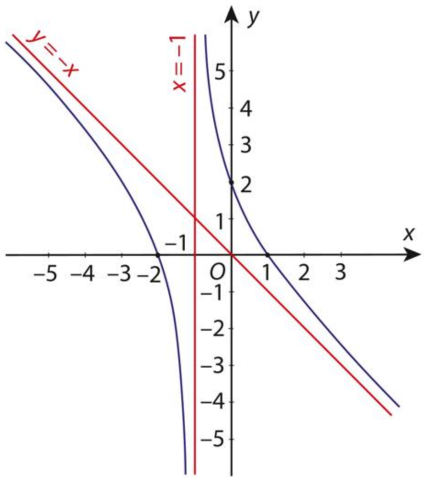
- Đồ thị:

Vẽ các đường tiệm cận $x = -1$ và $y = -x$.

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại $(0;2)$ và giao với trục Ox tại $(-2;0)$ và $(1;0)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-1;1)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

Đồ thị hàm số được cho như Hình.



Bài 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2-x-1}{x-2}$ b) $y = \frac{x^2+x-2}{x+1}$ c) $y = \frac{2x^2-x+4}{x-1}$ d) $y = \frac{x^2+2x+1}{x+3}$

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Sự biến thiên: $y = x+1+\frac{1}{x-2}$.

Ta có: $y' = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$. Vậy $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.

Trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$ $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên từng khoảng này.

Trên các khoảng $(1;2)$ và $(2;3)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng này.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ với $y_{CĐ} = 1$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ với $y_{CT} = 5$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-x-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-1-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{2}{x}} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-x-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{2}{x}} = +\infty$.

Tiệm cận: $\lim\limits_{x\to 2^-} y = \lim\limits_{x\to 2^-} \left(x+1+\dfrac{1}{x-2}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} y = \lim\limits_{x\to 2^+} \left(x+1+\dfrac{1}{x-2}\right) = +\infty$

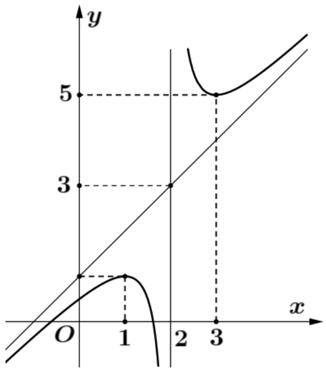
$\lim\limits_{x\to+\infty} \left[y-(x+1)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[y-(x+1)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0.$

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x+1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

Đồ thị:



Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Ta có $y=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x-1}{x-2}=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)$ và $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};0\right)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2;3)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

b) Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Sự biến thiên: Viết $y=x-\dfrac{2}{x+1}$ ta có $y'=1+\dfrac{2}{(x+1)^2}>0$ với mọi $x\neq -1$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$. Hàm số không có cực trị.

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x-2}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -\infty;\ \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-2}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} = +\infty$$

Tiệm cận: $\lim\limits_{x\to-1^-} y = \lim\limits_{x\to-1^+}\left(x-\dfrac{2}{x+1}\right) = +\infty;\ \lim\limits_{x\to-1^+} y = \lim\limits_{x\to-1^+}\left(x-\dfrac{2}{x+1}\right) = -\infty$

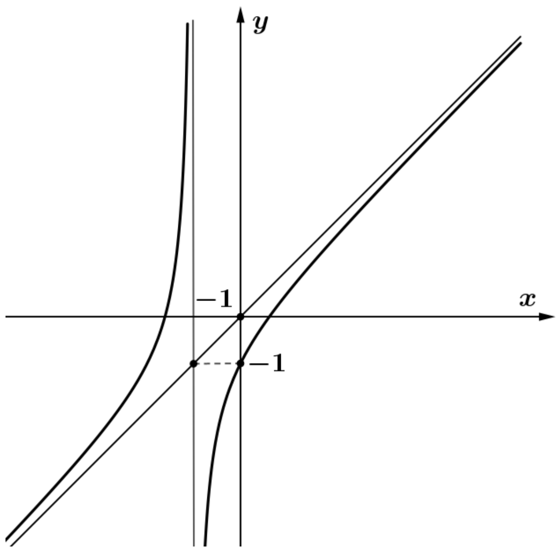
$$\lim_{x\to+\infty}\left[y-x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{x+1}\right) = 0;\ \lim_{x\to-\infty}\left[y-x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{2}{x+1}\right) = 0.$$

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị :



Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $(0;-2)$

Ta có $y=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+x-2}{x+1}=0 \Leftrightarrow x=-2$ hoặc $x=1$.

Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $(-2;0)$ và $(1;0)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-1;-1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

c) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Sự biến thiên: Ta có $y=\dfrac{2x^2-x+4}{x-1}=2x+1+\dfrac{5}{x-1}$

Đạo hàm $y' = 2 - \dfrac{5}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2 - \dfrac{5}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2-\sqrt{10}}{2}$ hoặc $x = \dfrac{2+\sqrt{10}}{2}$.

Trên các khoảng $\left(-\infty; \dfrac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{2+\sqrt{10}}{2}; +\infty\right)$ có $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên từng khoảng này.

Trên các khoảng $\left(\dfrac{2-\sqrt{10}}{2}; 1\right)$ và $\left(1; \dfrac{2+\sqrt{10}}{2}\right)$ có $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

Hàm số đạt cực cực đại tại $x = \dfrac{2-\sqrt{10}}{2}$ và đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{2+\sqrt{10}}{2}$.

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2 - x + 4}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = -\infty$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[y - (2x+1)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x-1} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[y - (2x+1)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5}{x-1} = 0$.

Do đó $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y = 2x+1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên

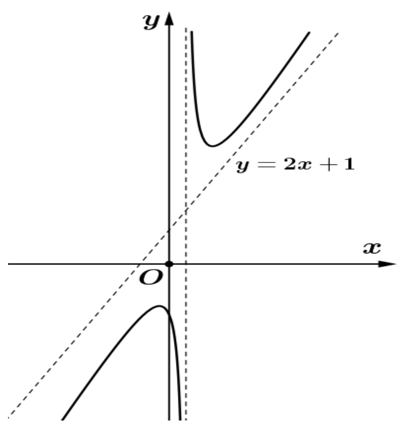
x	$-\infty$		$\frac{1}{2}\left(-\sqrt{10}+2\right)$		1		$\frac{1}{2}\left(\sqrt{10}+2\right)$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-2\sqrt{10}+3$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{10}+3$	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $(0;-4)$.

Đồ thị hàm số không cắt trục hoành.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(1;3)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.



Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

Sự biến thiên: Ta có $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x+3}=x-1+\dfrac{4}{x+3}$

Đạo hàm $y'=1-\dfrac{4}{(x+3)^2}=0\Leftrightarrow 1-\dfrac{4}{(x+3)^2}=0\Leftrightarrow (x+3)^2=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-5\end{array}\right.$

Trên các khoảng $(-\infty;-5)$ và $(-1;+\infty)$, $y'>0$ nên hàm số đồng biến trên các khoảng này.

Trên các khoảng $(-5;-3)$ và $(-3;-1)$, $y'<0$ nên hàm số nghịch biến trên các khoảng này.

Hàm số đạt cực đại tại $x=-5$ với $y_{CD}=-8$; hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ với $y_{CT}=0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x+1}{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}=+\infty$;

- $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2x+1}{x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}=-\infty$

Tiệm cận: $\lim\limits_{x\to(-3)^+} y=\lim\limits_{x\to(-3)^+}\dfrac{x^2+2x+1}{x+3}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to(-3)^-} y=\lim\limits_{x\to(-3)^-}\dfrac{x^2+2x+1}{x+3}=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[y-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x+3}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[y-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x+3}=0$

Do đó $x=-3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y=x-1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên

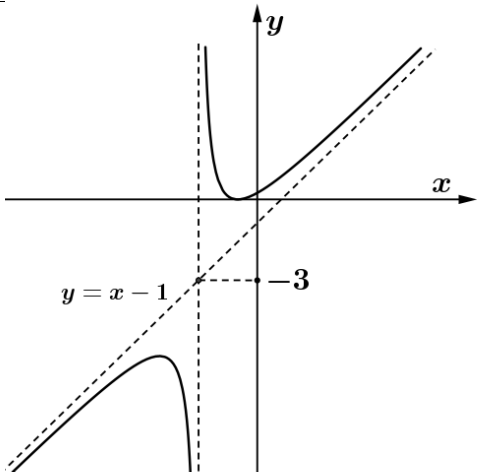
x	$-\infty$		-5		-3		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-8	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị:

Giao điểm của đồ thị với trục tung là $\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$

Giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(-1;0)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $(-3;-4)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ b) $y=\dfrac{x^2+x-2}{2-x}$ c) $y=\dfrac{2x^2+5x+4}{x+2}$

d) $y=x-\dfrac{1}{x}$ e) $y=-x+1+\dfrac{1}{x+1}$ f) $y=-3x+7-\dfrac{18}{x+2}$

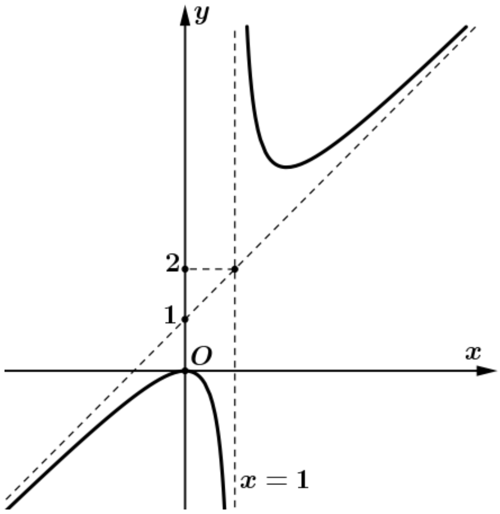
Bài 5. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x^2-2x}{x+1}$ b) $y=\dfrac{2x^2-3x+3}{x-1}$ c) $y=\dfrac{2x^2+5x+4}{x+2}$

d) $y=x-\dfrac{2}{x+1}$ e) $y=x-2+\dfrac{4}{x-1}$ f) $y=x+4+\dfrac{5}{x-3}$

DẠNG 2
XÁC ĐỊNH HỆ SỐ CỦA HÀM SỐ

Bài 1. Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số $y = ax + b + \dfrac{1}{x+c}$



Khi đó tổng $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

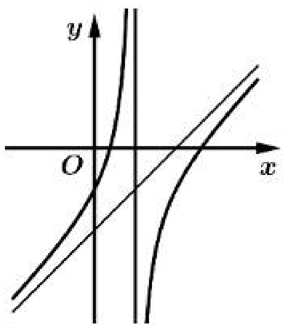
Lời giải

Ta có $y = ax + b$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số. Từ đồ thị ta suy ra được $y = x + 1$ là tiệm cận xiên nên $a = 1, b = 1$

$x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nên $c = -1$.

Vậy $a + b + c = 3$

Bài 2. Đồ thị trong hình vẽ là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + 1}{cx + d}$. Hỏi có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?



Lời giải

Từ đồ thị hàm số đã cho ta thấy

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $\dfrac{1}{d} < 0 \Rightarrow d < 0$.

Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng $x = x_0 > 0$. Suy ra $\dfrac{-d}{c} > 0 \Rightarrow c > 0$.

Dựa vào hình dạng đồ thị hàm số dể thấy hàm số không có cực trị và $ac > 0$.

Suy ra $a>0$.

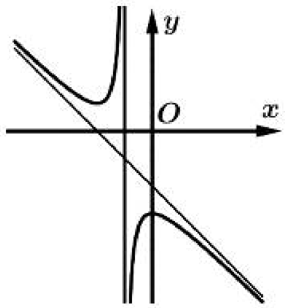
Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ dương.

Nên phương trình $ax^2+bx+1=0$ có hai nghiệm phân biệt dương.

Suy ra $x_1+x_2>0\Rightarrow \dfrac{-b}{a}>0\Rightarrow b<0$.

Vậy có 2 số dương trong các số $a;b;c;d$.

Bài 3. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d ?



Lời giải

Từ đồ thị hàm số đã cho ta có

Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng $x=x_0<0$.

Suy ra $-d<0\Rightarrow d>0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm. Nên $\dfrac{c}{d}<0\Rightarrow c<0$.

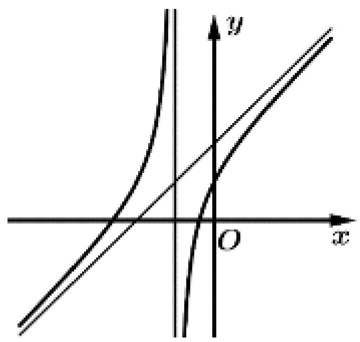
Dựa vào hình dạng đồ thị dể thấy hàm số đã cho có 2 cực trị và $a<0$.

Đồ thị hàm số có đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị có dạng $y=\dfrac{2ax+b}{d}$.

Mà đường thẳng cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $\dfrac{b}{d}<0\Rightarrow b<0$.

Vậy có 1 số dương trong các số $a;b;c;d$.

Bài 4. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+1}{cx+d}(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d ?



Lời giải

Từ đồ thị hàm số đã cho ta thấy

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $\frac{1}{d} > 0 \Rightarrow d > 0$.

Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng $x = x_0 < 0$. Suy ra $\frac{-d}{c} < 0 \Rightarrow c > 0$.

Dựa vào hình dạng đồ thị hàm số dể thấy hàm số không có cực trị và $ac > 0$. Suy ra $a > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ âm.

Nên phương trình $ax^2 + bx + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt dương.

Suy ra $x_1 + x_2 < 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow b > 0$.

Vậy có 4 số dương trong các số $a; b; c; d$.

DẠNG 3

BÀI TOÁN LIÊN QUAN HÀM SỐ HỮU TỈ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$

Bài 1. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x+1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C). Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M\left(0;\dfrac{5}{4}\right)$ và tiếp xúc với đồ thị.

Lời giải

Gọi (d) là đường thẳng $y\ =kx+\dfrac{5}{4}$.

Để (d) tiếp xúc với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ:

$$\begin{cases}\dfrac{-x_0^2+x_0+1}{x_0+1}=kx_0+\dfrac{5}{4} & (1)\\ \dfrac{-x_0^2-2x_0}{(x_0+1)^2}=k & (2)\end{cases} \text{ có nghiệm } x_0$$

Thế k từ (2) vào (1): $\dfrac{-x_0^2+x_0+1}{x_0+1}=\dfrac{-x_0^2-2x_0}{(x_0+1)^2}.x_0+\dfrac{5}{4}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0\neq -1\\ (-x_0^2+x_0+1)(x_0+1)=-x_0^2-2x_0^2+\dfrac{5}{4}(x_0+1)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0\neq -1\\ 3x_0^2-2x_0-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\ x_0=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$$

Tại $x_0\ =\ 1\Rightarrow k=-\dfrac{3}{4}$, có tiếp tuyến $(T_1): y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

Tại $x_0=-\dfrac{1}{3}\ \Rightarrow k=\dfrac{5}{4}$, có tiếp tuyến $(T_2): y=\dfrac{5}{4}x+\dfrac{5}{4}$

Bài 2. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$ có đồ thị là đường cong (C) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến này vuông góc với đường thẳng $x-3y-6=0$

Lời giải

Đường thẳng $x-3y-6=0$ có hệ số góc $k_1=\dfrac{1}{3}\Rightarrow$ tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng này có hệ số góc $k_2=-3$

Xét phương trình $y'_x=-3$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}=-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -2 \\ x^2+4x+3=-3x^2-12x-12 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -2 \\ 4x^2+16x+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{5}{2}\Rightarrow y=-\dfrac{7}{2} \\ x=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow y=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Tại $A\left(-\dfrac{5}{2};-\dfrac{7}{2}\right)$ có tiếp tuyến $(T_1): y=-3\left(x+\dfrac{5}{2}\right)-\dfrac{7}{2} \Leftrightarrow y=-3x-11$

Tại $B\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ có tiếp tuyến $(T_2): y=-3\left(x+\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow y=-3x-3$

Bài 3. Biết rằng đường thẳng $y=2x+2m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị của tham số *m*. Tìm hoành độ trung điểm của AB theo tham số *m*.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$\dfrac{x^2+3}{x+1}=2x+2m \Leftrightarrow x^2+2(1+m)x+2m-3=0 \;\; (1), (x\neq -1)$.

Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=(1+m)^2-(2m-3)>0 \\ (-1)^2+2(1+m).(-1)+2m-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+4>0, \forall m \\ -4\neq 0 \end{cases}$.

Khi đó, gọi $A(x_1;2x_1+2m)$; $B(x_2;2x_2+2m)$

Hoành độ trung điểm của *AB* là $x_I=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{2+2m}{2}=-m-1$.

Bài 4. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx-1}{x-1}$ có đồ thị là (C) (m là tham số thực). Tổng bình phương các giá trị của m để đường thẳng $d: y=m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm A, B sao cho $OA\perp OB$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d là

$\dfrac{x^2+mx-1}{x-1}=m \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x^2+mx-1=mx-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ g(x)=x^2+m-1=0 \end{cases}$.

Đường thẳng $d: y=m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=1-m>0 \\ g(1)=m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\in(-\infty;1)\setminus\{0\}$.

Gọi $A(x_1;m), B(x_2;m)$. Khi đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $g(x)=0$.

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1x_2 = m - 1 \end{cases}$.

Khi đó $OA \perp OB \Leftrightarrow x_1x_2 + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ m = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy tổng bình phương các giá trị của m để đường thẳng $d: y = m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm

A, B sao cho $OA \perp OB$ bằng $\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 3$.

Bài 5. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2mx + m}{x + m}$. Tìm giá trị m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại hai điểm và tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm đó vuông góc.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $(C): y = \dfrac{x^2 - 2mx + m}{x + m}$ và trục hoành:

$\dfrac{x^2 - 2mx + m}{x + m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2mx + m = 0 \ (*) \\ x \neq -m \end{cases}$.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2mx + m}{x + m}$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác $-m \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m > 0 \\ 3m^2 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \vee m > 1 \\ m \neq -\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của đồ thị (C) với trục hoành thì $y_0 = x_0^2 - 2mx_0 + m = 0$ và hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại M là:

$k = y'(x_0) = \dfrac{(2x_0 - 2m)(x_0 - 1) - (x_0^2 - 2mx_0 + m)}{(x_0 + m)^2} = \dfrac{2x_0 - 2m}{x_0 + m}$.

Vậy hệ số góc của hai tiếp tuyến với (C) tại hai giao điểm với trục hoành là $k_1 = \dfrac{2x_1 - 2m}{x_1 + m}$, $k_2 = \dfrac{2x_2 - 2m}{x_2 + m}$.

Hai tiếp tuyến này vuông góc $\Leftrightarrow k_1.k_2 = -1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2x_1 - 2m}{x_1 + m}\right)\left(\dfrac{2x_2 - 2m}{x_2 + m}\right) = -1$

$\Leftrightarrow 4\left[x_1x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2\right] = -\left[x_1x_2 + m(x_1 + x_2) + m^2\right] \ (**)$.

Ta lại có $\begin{cases} x_1x_2 = m \\ x_1 + x_2 = 2m \end{cases}$, do đó $(**) \Leftrightarrow m^2 - 5m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 5 \end{array}\right.$. Nhận $m = 5$.

Bài 6. Tìm m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2mx+2m^2-1}{x-1}$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến với (C_m) tại hai điểm này vuông góc với nhau.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành:

$$\frac{x^2+2mx+2m^2-1}{x-1}=0 \Leftrightarrow x^2+2mx+2m^2-1=0,\ (x\neq 1)\ (1)$$

Để (C_m) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A,B thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1. Tức là ta phải có: $\begin{cases}\Delta'=m^2-2m^2+1>0\\1+2m+2m^2-1\neq 0\end{cases}$ hay $\begin{cases}(1-m)(1+m)>0\\2m(m+1)\neq 0\end{cases}$ tức $\begin{cases}-1<m<1\\m\neq 0\end{cases}$ (2).

Gọi $x_1;x_2$ là hai nghiệm của (1).

Theo định lý Viète, ta có: $x_1+x_2=-2m,\ x_1.x_2=2m^2-1$

Giả sử $I(x_0;0)$ là giao điểm của (C_m) và trục hoành. Tiếp tuyến của (C_m) tại điểm I có hệ số góc

$$y'(x_0)=\frac{(2x_0+2m)(x_0-1)-(x_0^2+2mx_0+2m^2-1)}{(x_0-1)^2}=\frac{2x_0+2m}{x_0-1}$$

Như vậy, tiếp tuyến tại A,B lần lượt có hệ số góc là $y'(x_1)=\dfrac{2x_1+2m}{x_1-1}$, $y'(x_2)=\dfrac{2x_2+2m}{x_2-1}$.

Tiếp tuyến tại A,B vuông góc nhau khi và chỉ khi $y'(x_1)y'(x_2)=-1$ hay

$\left(\dfrac{2x_1+2m}{x_1-1}\right)\left(\dfrac{2x_2+2m}{x_2-1}\right)=-1 \Leftrightarrow 5x_1.x_2+(4m-1)(x_1+x_2)+4m^2+1=0$ tức $3m^2+m-2=0 \Leftrightarrow m=-1$ hoặc $m=\dfrac{2}{3}$. Đối chiếu điều kiện chỉ có $m=\dfrac{2}{3}$ thỏa mãn.

Bài 7. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2mx+2}{x+1}$ (C_m). Tìm các giá trị của m để hàm số có cực đại, cực tiểu và khoảng cách từ hai điểm đó tới đường thẳng $d: x+y+2=0$ bằng nhau.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đạo hàm: $y'=\dfrac{x^2+2x+2m-2}{(x+1)^2}$

Hàm số có cực đại, cực tiểu thì $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1.

$\Leftrightarrow g(x;m)=x^2+2x+2m-2=0$ (1) (có hai nghiệm $x_1,x_2\neq -1$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=3-2m>0\\g(-1;m)=2m-3\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow m<\frac{3}{2}\quad (*)$$

Gọi $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số với $x_1,x_2\neq -1$ là hai nghiệm của phương trình (1).

Theo định lý Viète: $x_1+x_2=-2;x_1.x_2=2m-2$.

$$y=\frac{x^2+2mx+2}{x+1}=x+2m-1+\frac{3-2m}{x+1}\,(C_m)$$

Mặt khác đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có phương trình là $y=2x+m$ cho nên

$y_1=2x_1+m;y_2=2x_2+m\Rightarrow A(x_1;2x_1+m);B(x_2;2x_2+m)$

Theo giả thiết: $\dfrac{|x_1+y_1+2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|x_2+y_2+2|}{\sqrt{2}}\Rightarrow |x_1+y_1+2|=|x_2+y_2+2|$

$\Leftrightarrow |3x_1+2m+2|=|3x_2+2m+2|$

$\Leftrightarrow (3x_1+2m+2)^2-(3x_2+2m+2)^2=0\Leftrightarrow (x_1-x_2)\left[3(x_1+x_2+4m+4)\right]=0$

$\Leftrightarrow 3(x_1+x_2+4m+4)=0,(x_1\neq x_2)\Leftrightarrow 3(-2+4m+4)=0\Rightarrow m=-\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn $(*)$

Vậy giá trị m cần tìm là: $m=-\dfrac{1}{2}$.

Bài 8. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+(2m+1)x+m^2+m+4}{2(x+m)}$ (1). Tìm điều kiện của m để hàm số (1) có 2 điểm cực trị và tính khoảng cách giữa hai điểm này.

Lời giải

$$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+2mx+m(2m+1)-m^2-m-4}{(x+m)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+2mx+m^2-4}{(x+m)^2}$$

$$y'=0\Leftrightarrow x^2+2mx+m^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-m-2\Rightarrow y=-\dfrac{3}{2}\\ x=-m+2\Rightarrow y=\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$$

$\forall m,(C_m)$ luôn có hai điểm cực trị là $A\left(-m-2,-\dfrac{3}{2}\right)$; $B\left(-m+2,\dfrac{5}{2}\right)$

$\Rightarrow AB=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

Bài 9. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx-1}{x-1}$ có đồ thị là đường cong (C_m). Tìm m để đường thẳng $d:y=2x$ cắt (C_m) tại 2 điểm thuộc 2 nhánh của (C_m)

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (C_m):

$$\frac{x^2+mx-1}{x-1}=2x\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ x^2+mx-1=2x^2-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ x^2-(m+2)x+1=0\end{cases}$$

Để d cắt C_m tại hai điểm thuộc 2 nhánh của (C_m), ta phải có $x_1 < 1 < x_2$, với x_1, x_2 là 2 hoành độ của 2 giao điểm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 1 < 0 \\ x_2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0$$

Ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 2 \\ x_1x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 - (m+2) + 1 < 0 \Leftrightarrow m > 0.$

Bài 10. Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2 + 2(m+1)x - 5}{x - 1}$

a) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có cực đại, cực tiểu

b) Tìm điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho $x_M > 1$ và độ dài IM ngắn nhất (I là tâm đối xứng của (C))

Lời giải

a) $y = \dfrac{-x^2 + 2(m+1)x - m - 5}{x - 1}$

$$y' = \frac{-x^2 + 2x - 2m - 2 + m + 5}{(x-1)^2} = \frac{-x^2 + 2x - m + 3}{(x-1)^2}$$

y có cực đại cực tiểu khi phương trình $-x^2 + 2x - m + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - m + 3 = 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4, x = 1$ không phải là nghiệm của phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow -1 + 2 - m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 4$

Đối chiếu điều kiện ta được: $m < 4$

b) $x_M > 1 \Rightarrow M$ thuộc nhánh bên phải của (C). $I(1,0)$

$$M\left(m, -m + 1 - \frac{4}{m-1}\right)$$

$$IM^2 = (m-1)^2 + \left[(-m+1)^2 + \frac{16}{(m-1)^2} + 8\right]$$

$$= 2(m-1)^2 + \frac{16}{(m-1)^2} + 8 \geq 2\sqrt{2}(m-1) \cdot \frac{4}{(m-1)} + 8$$

$$\Rightarrow IM^2 \geq 8(\sqrt{2} + 1) \Rightarrow IM \geq \sqrt{8(\sqrt{2} + 1)}$$

IM ngắn nhất khi $2(m-1)^2 = \dfrac{16}{(m-1)^2} \Leftrightarrow (m-1)^4 = 8 \Leftrightarrow m = 1 + \sqrt[4]{8}$

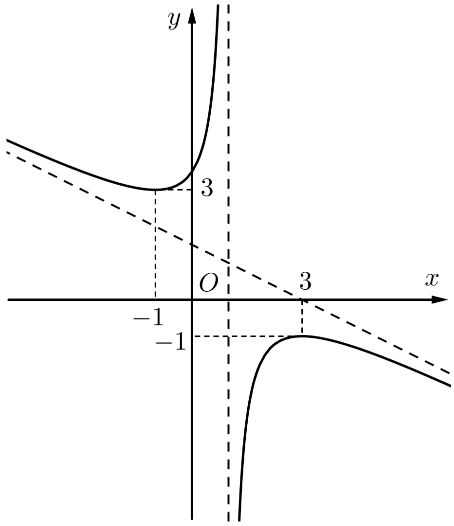
$$\Rightarrow y_M = -\sqrt[4]{8} - \frac{4}{\sqrt[4]{8}}$$

Điểm cần tìm: $M\left(1 + \sqrt[4]{8}; -\sqrt[4]{8} - \dfrac{4}{\sqrt[4]{8}}\right)$

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{-x^2-3x-8}{2x-2}$. **B.** $y=\dfrac{-x^2-3x-8}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2+4x-7}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{-x^2+4x-7}{2x-2}$.

Lời giải

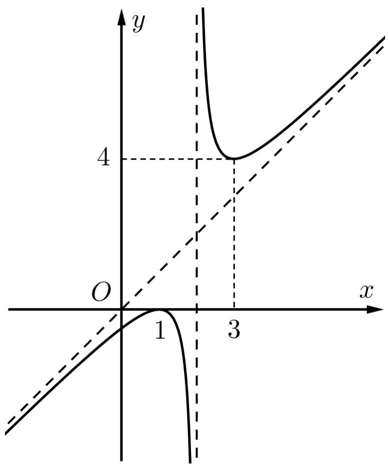
Chọn D.

Thay điểm $(-1;3)$ vào các đáp án, ta loại đáp án A, C

Thay điểm $(3;-1)$ vào hai đáp án còn lại , ta loại đáp án B

Vậy chọn đáp án D đúng

Câu 2. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{2x^2+6x-8}{x-2}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2-2x+1}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{-2x^2+6x-8}{x-2}$.

Lời giải

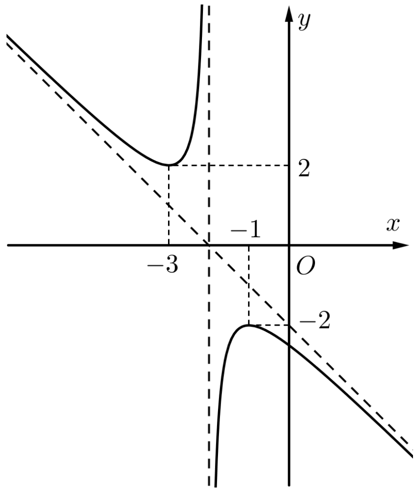
Chọn A.

Từ đồ thị ta có $am>0$, ta loại đáp án C, D

Thay điểm $(3;4)$ vào hai đáp án còn lại , ta loại đáp án B

Vậy chọn đáp án A đúng

Câu 3. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{2x^2+8x+4}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{2x^2+8x+4}{x+2}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2-4x-5}{x+2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x-2}$.

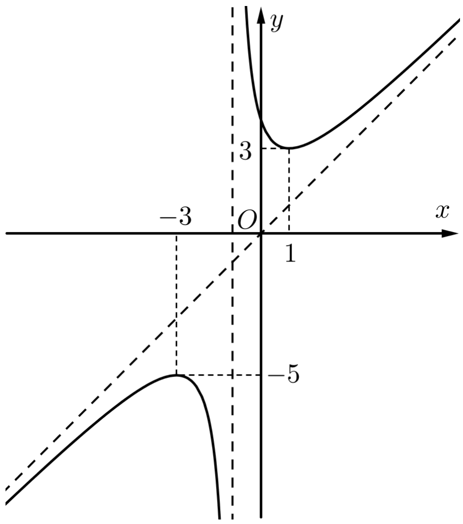
Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị ta có $am<0$, ta loại đáp án A, B, D

Vậy chọn đáp án C đúng

Câu 4. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{2x^2+3x+1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{3x^2+5x-2}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2-3x+10}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$.

Lời giải

Chọn D.

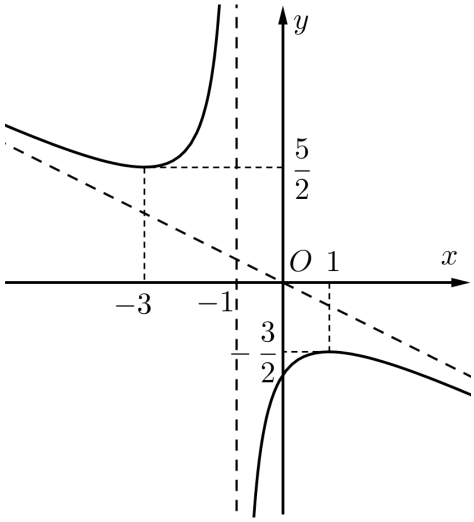
Từ đồ thị ta có $am>0$, ta loại đáp án C

$y=\dfrac{2x^2+3x+1}{x+1}\Rightarrow y'=\dfrac{2x^2+6x+2}{(x+1)^2}>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, ta loại đáp án A

$y=\dfrac{3x^2+5x-1}{x+1}\Rightarrow y'=\dfrac{3x^2+6x+6}{(x+1)^2}>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, ta loại đáp án B

Vậy chọn đáp án D đúng

Câu 5. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{2x^2+5x-13}{2x+2}$. **B.** $y=\dfrac{-x^2-x-4}{2x+2}$. **C.** $y=\dfrac{-2x^2-3x-1}{2x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+3x-10}{2x+2}$.

Lời giải

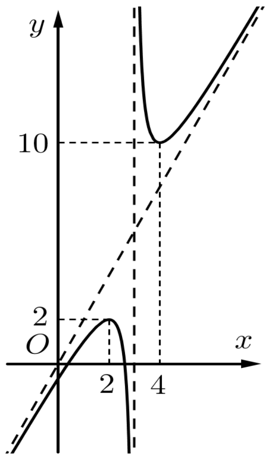
Chọn B.

Từ đồ thị ta có $am<0$, ta loại đáp án A, D

Đồ thị có tiệm cận đứng $x=-1$, ta loại đáp án C

Vậy chọn đáp án B đúng

Câu 6. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{2x^2-6x+2}{x-3}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-6}{x-3}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-6}{x+3}$. **D.** $y=\dfrac{2x^2-6x+2}{x+3}$.

Lời giải

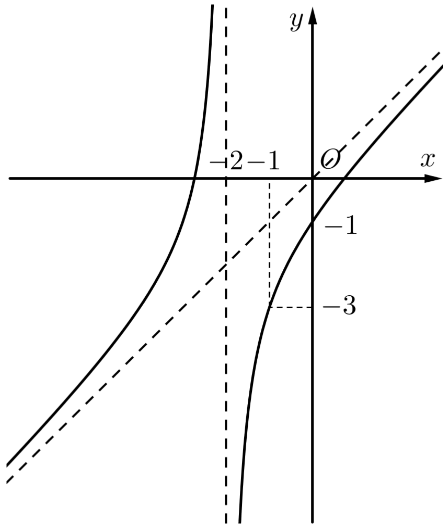
Chọn A.

Đồ thị có tiệm cận đứng $x=x_0, 2<x_0<4$, ta loại đáp án C,D

$y=\dfrac{x^2-6}{x-3}\Rightarrow y'=\dfrac{x^2-6x+6}{(x-1)^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3-\sqrt{3}\\x=3+\sqrt{3}\end{array}\right.$, ta loại đáp án B

Vậy chọn đáp án A đúng

Câu 7. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{-3x^2+4x-2}{x+2}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x+2}$. **D.** $y=\dfrac{3x^2+4x-2}{x-2}$.

Lời giải

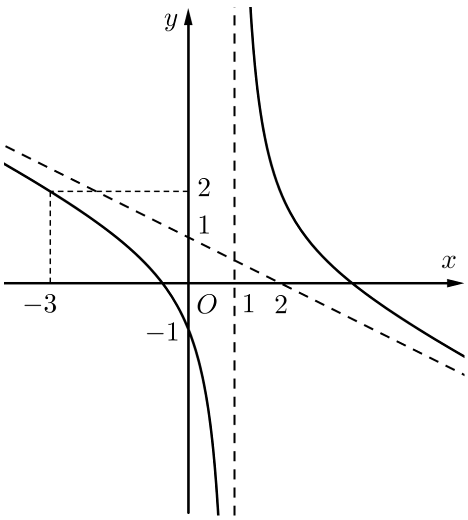
Chọn C.

Từ đồ thị ta có $am>0$, ta loại đáp án B

Đồ thị có tiệm cận đứng $x=-2$, ta loại đáp án A, D

Vậy chọn đáp án C đúng

Câu 8. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{-x^2+1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2+3x+2}{2x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+6x+1}{x-1}$.

Lời giải

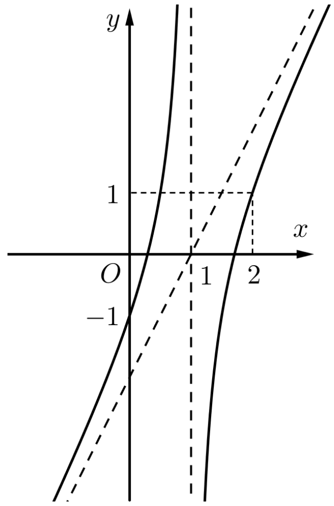
Chọn C.

Từ đồ thị ta có $am<0$, ta loại đáp án A, D

$y=\dfrac{-x^2+1}{x-1}\Rightarrow y'=\dfrac{-x^2+2x+1}{(x-1)^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow -x^2+2x+1=0$ có nghiệm nên ta loại đáp án B

Vậy chọn đáp án C đúng

Câu 9. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{2x^2-4x+1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{-3x^2+6x+1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{3x^2-6x+1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{2x^2-4x+1}{x-1}$.

Lời giải

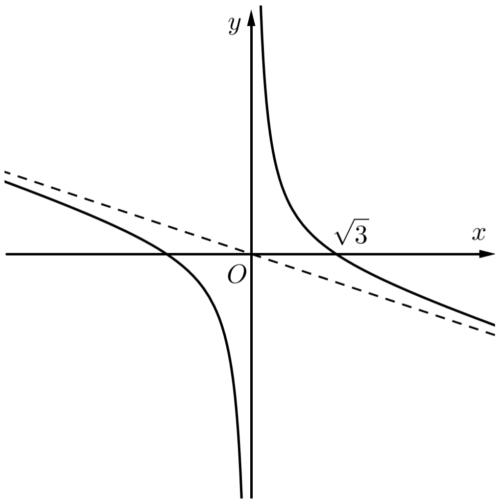
Chọn D.

Từ đồ thị ta có $am>0$, ta loại đáp án B

Đồ thị có tiệm cận đứng $x=1$, ta loại đáp án A, C

Vậy chọn đáp án D đúng

Câu 10. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{x^2-3}{-3x}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-3}{3x}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+3}{-3x}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+3}{3x}$.

Lời giải

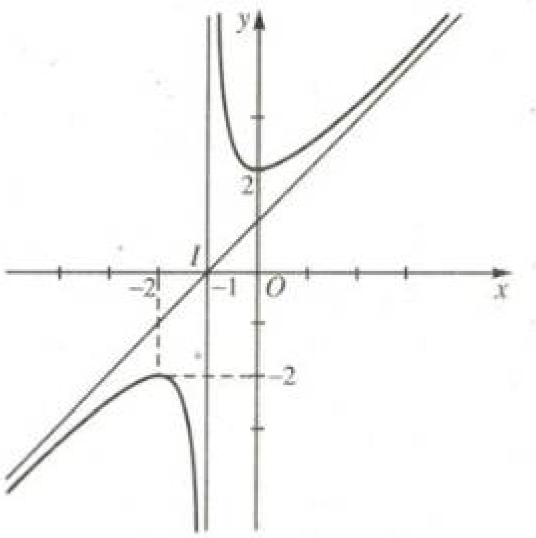
Chọn A.

Từ đồ thị ta có $am<0$, ta loại đáp án B, D

Thay điểm $\left(\sqrt{3};0\right)$ vào hai đáp án còn lại , ta loại đáp án C

Vậy chọn đáp án A đúng

Câu 11. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-2x}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+3x}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$.

Lời giải

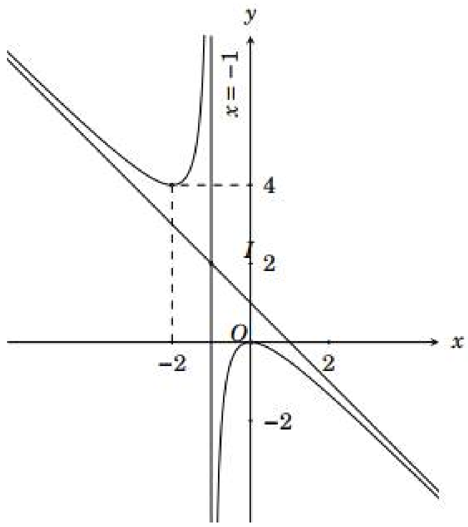
Chọn D.

Dựa vào đồ thị, ta có tiệm cận đứng $x=-1$ suy ra loại đáp án A và C

đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0;2)$ suy ra loại đáp án B

Vậy đáo án D đúng

Câu 12. Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



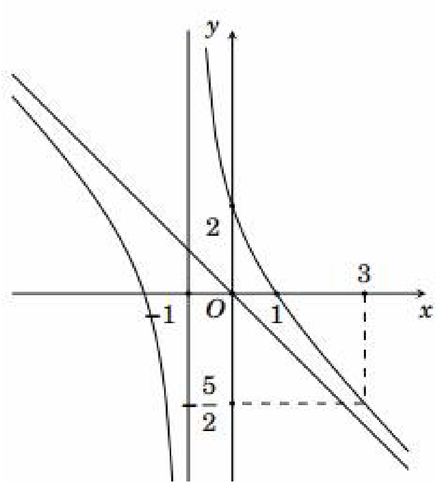
A. $y=\dfrac{x^2-x}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+x+2}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{-x^2}{x+1}$.

Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị ta có $am<0$, ta loại đáp án A,B,C

Câu 13. Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



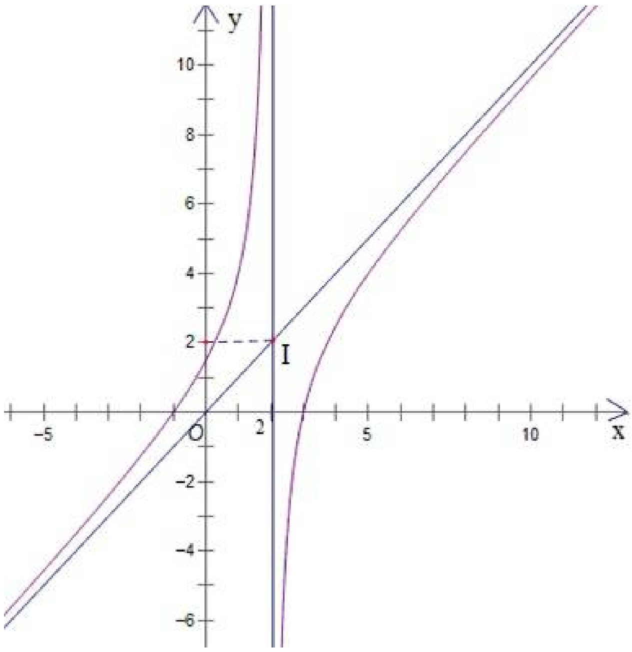
A. $y=\dfrac{x^2-x+4}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$.

Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị ta có $am<0$, ta loại đáp án A,B,D

Câu 14. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-3x}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+3x}{x+1}$.

Lời giải

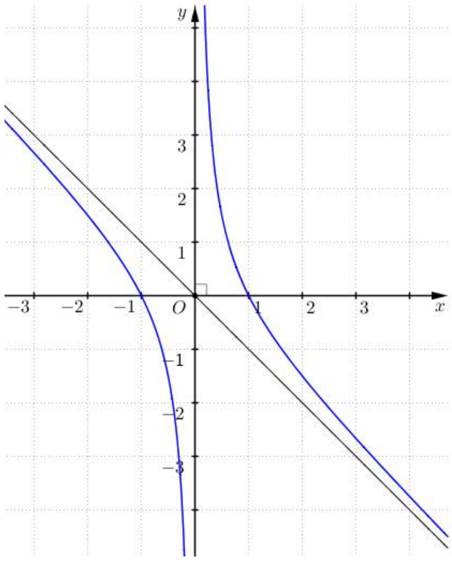
Chọn A.

Dựa vào đồ thị, ta có tiệm cận đứng $x=2$ suy ra loại đáp án B và D

Thay điểm $(-1;0)$ vào hai đáp án còn lại , ta loại đáp án C

Vậy đáp án A đúng

Câu 15. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



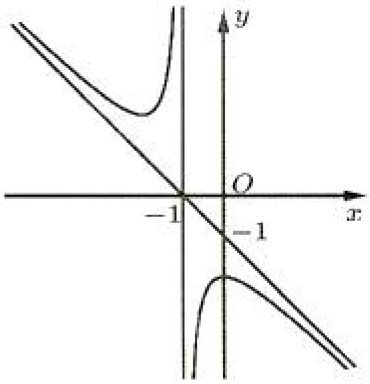
A. $y=\dfrac{-x^2+1}{x}$. **B.** $y=\dfrac{-2x+1}{2x+2}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$. **D.** $y=x^3-3x^2$.

Lời giải

Chọn A.

Đồ thị có tiệm cận đứng $x=0$, ta loại đáp án B,C,D

Câu 16. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số:



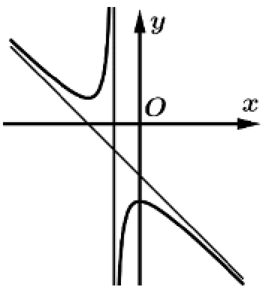
A. $y=\dfrac{x^2+2x+2}{-x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x+1}$.

Lời giải

Chọn D.

Dựa vào hình dạng đồ thị ta thấy hàm số đã có có 2 cực trị và $a.m<0$. Chọn đáp án A.

Câu 17. Đồ thị trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây



A. $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{-x^2-3x-3}{x+1}$.

Lời giải

Chọn D.

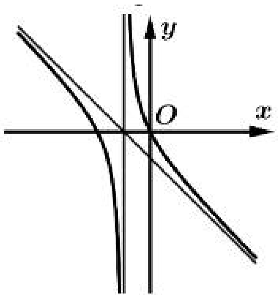
Từ đồ thị ta thấy hàm số đã cho 2 cực trị và $am < 0$.

Xét các đáp án A, B, C, D suy ra loại B, C

Dựa vào đồ thị hàm số ta có hàm số có tiệm cận đứng $x = x_0 < 0$. Suy ra loại đáp án A

Vậy đáp án đúng là D

Câu 18. Đồ thị trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây



A. $y = \dfrac{-x^2 - 2x}{x+1}$.　**B.** $y = \dfrac{x^2 + 2x}{x+1}$.　**C.** $y = \dfrac{-x^2 - 3x}{x-1}$.　**D.** $y = \dfrac{x^2 - x}{x+1}$.

Lời giải

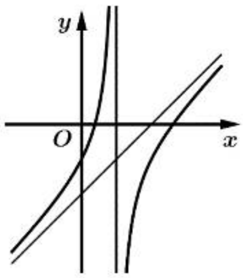
Chọn A.

Từ đồ thị ta có $am < 0$, ta loại đáp án B,D

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = x_0 < 0$. Suy ra loại đáp án C

Vậy đáp án đúng là A

Câu 19. Đồ thị trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây



A. $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.　**B.** $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.　**C.** $y = \dfrac{-x^2 + 3x + 1}{x-1}$.　**D.** $y = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x-1}$.

Lời giải

Chọn D.

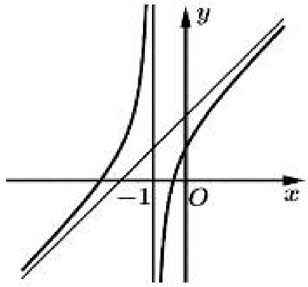
Dựa vào hình dạng đồ thị ta thấy hàm số đã cho là hàm số bậc hai trên bậc nhất , ta loại đáp án A,B

Từ đồ thị ta có $am > 0$, ta loại đáp án C

Vậy đáp án đúng là D

Câu 20. Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ với a, b, c, d, e là các số thực.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?



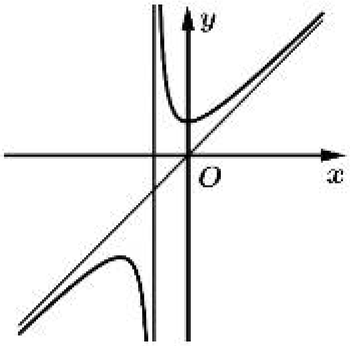
A. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. **B.** $y' > 0, \forall x \neq -1$. **C.** $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. **D.** $y' < 0, \forall x \neq -1$.

Lời giải

Chọn B.

Dựa vào đồ thị hàm số dễ thấy hàm số đồng biến trên khoảng xác định Chọn đáp án B

Câu 21. Đồ thị trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau:



A. $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$. **B.** $y = \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$. **C.** $y = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. **D.** $y = \dfrac{-x^2-x+1}{x+1}$.

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào đồ thị ta thấy

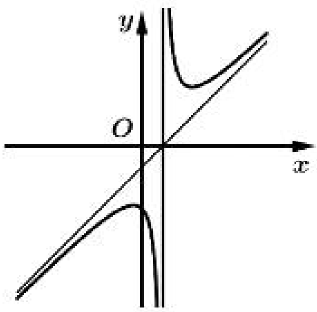
Hàm số có dạng $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ nên loại đáp án A.

Hàm số có 2 điểm cực trị và $a.m > 0$. Loại đáp án **D.**

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = x_0 < 0$. Suy ra loại đáp án B

Vậy đáp án đúng là C

Câu 22. Đồ thị trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau:



A. $y = x+1-\dfrac{3}{x-1}$. **B.** $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. **C.** $y = \dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$. **D.** $y = \dfrac{-x^2-2x+3}{x-1}$.

Lời giải

Chọn A.

Dựa vào đồ thị ta thấy

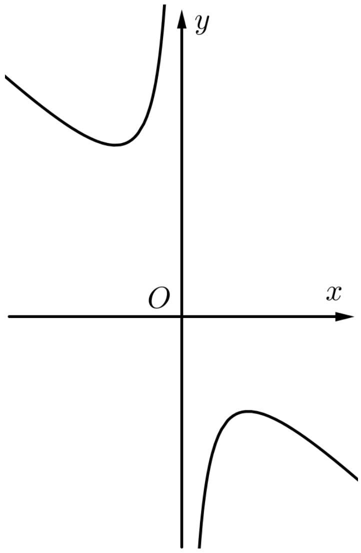
Hàm số có dạng $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ nên loại đáp án **B.**

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=x_0>0$. Suy ra loại đáp án C

Hàm số có 2 điểm cực trị và $a.m>0$. Loại đáp án **D.**

Vậy đáp án đúng là A.

Câu 23. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x}$. **B.** $y=\dfrac{-x^2+x+3}{x}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2+x-3}{x}$. **D.** $y=\dfrac{-x^2+x+2}{x}$.

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có dạng $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$

Hàm số có 2 điểm cực trị và $am<0$.

Tính y' từng đáp án, ta loại đáp án A, B,D

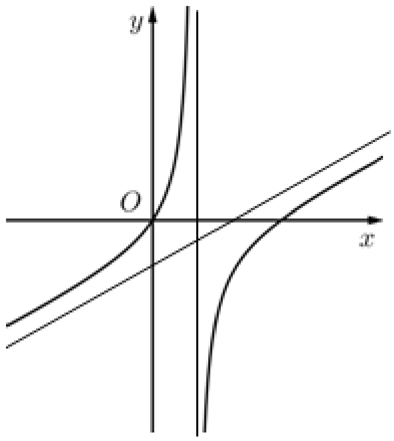
$y=\dfrac{-x^2+x+1}{x}\Rightarrow y'=\dfrac{-x^2-1}{x^2}<0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, ta loại đáp án A

$y=\dfrac{-x^2+x+3}{x}\Rightarrow y'=\dfrac{-x^2-3}{x^2}<0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, ta loại đáp án B

$y=\dfrac{-x^2+x-3}{x}\Rightarrow y'=\dfrac{-x^2+3}{x^2}\Rightarrow\ y'=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$, ta chọn đáp án C

$y=\dfrac{-x^2+x+2}{x}\Rightarrow y'=\dfrac{-x^2-2}{x^2}<0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, ta loại đáp án D

Câu 24. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{x^2+3x}{2x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-3x}{2x-2}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+3x}{x-1}$.

Lời giải

Chọn B.

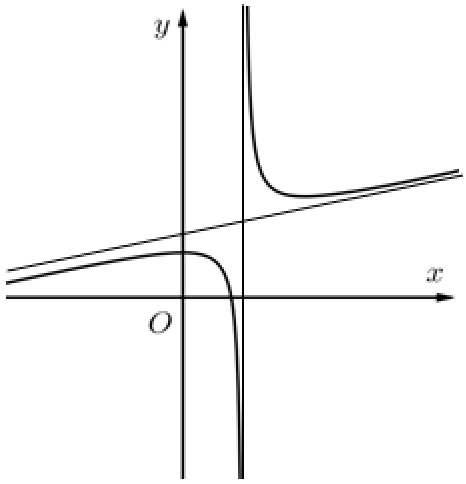
Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có dạng $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$

Hàm số không có cực trị và $am>0$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm có: $x=0; x=x_0\left(x_0>0\right)$ nên ta loại đáp án A, D

Tính y' hai đáp án còn lại, ta loại đáp án C

Câu 25. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{x^2+4x-5}{2x-1}$. **B.** $y=\dfrac{-x^2+4x-5}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+4x+5}{2x-3}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+4x-5}{4x-5}$.

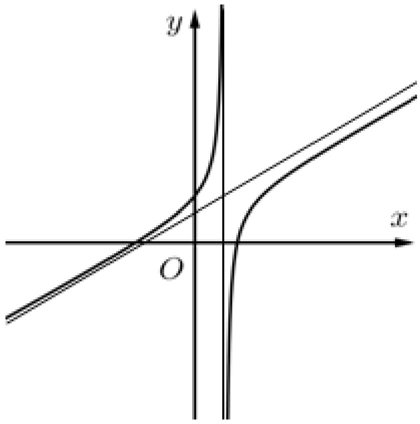
Lời giải

Chọn B.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có dạng $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$

Hàm số có 2 điểm cực trị và $am<0$, ta loại đáp án A, C,D

Câu 26. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{3x^2+x-3}{5x-3}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-5x+2}{2x-3}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+2x+3}{2x-3}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+4x+3}{x+2}$.

Lời giải

Chọn A.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có dạng $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$

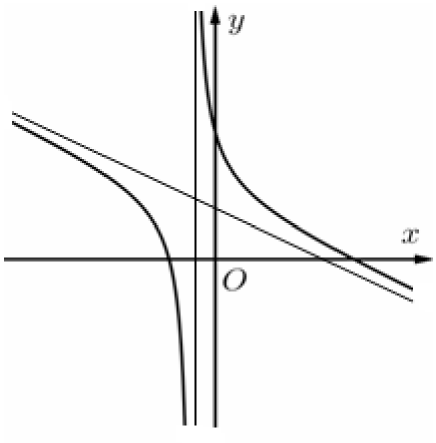
Hàm số không có cực trị và $am>0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có: $y=y_0>0$ nên ta loại đáp án B,C

Tính y' hai đáp án còn lại, ta loại đáp án D

Chú ý: có thể loại đáp án D bằng cách dùng tiệm cận đứng $x=-2<0$

Câu 27. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{-2x^2+x-1}{2x+1}$. **B.** $y=\dfrac{-x^2+2x+3}{2x+1}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2+2x+3}{x+2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+3x+4}{2x+1}$.

Lời giải

Chọn C.

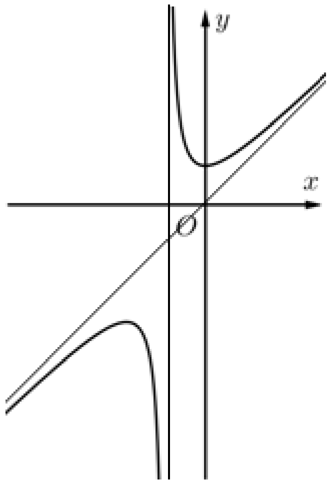
Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có dạng $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$

Hàm số không có cực trị và $am<0$, ta loại đáp án D

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có: $y=y_0>0$ nên ta loại đáp án A

Tính y' từng hai đáp án còn lại , ta loại đáp án C

Câu 28. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x+2}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+4x+2}{x+3}$.

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có dạng $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$

Hàm số có 2 điểm cực trị và $am<0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có: $y=y_0>0$ nên ta loại đáp án B

Đồ thị hàm số không cắt trục hoành nên ta loại đáp án A

Tính y' hai đáp án còn lại, ta loại đáp án D

Câu 29. Bảng biến thiên trong hình dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		–	‖	–	
y	$+\infty$	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

A. $y=\dfrac{x^2-2x}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+3x}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{1-x^2}{x}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-1}{x}$.

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có tiệm cận đứng $x=0$ suy ra loại đáp án A và B

Hàm số nghịch biến trên muỗi khoảng xác định suy ra loại đáp án D

Vậy đáo án C đúng

Câu 30. Bảng biến thiên trong hình dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	-	‖	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	-4	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4	↗	$+\infty$

A. $y=\dfrac{x^2-2x}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+3x}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{1-x^2}{x}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+2x+5}{x+1}$.

Lời giải

Chọn D.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có tiệm cận đứng $x=-1$ suy ra loại đáp án C

Hàm số có điểm cực đại $(-3;-4)$ và cực tiểu $(1;4)$ suy ra loại đáp án A và B

Vậy đáp án D đúng

Câu 31. Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		-10		-4		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	24	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0	↘	$-\infty$

A. $y=\dfrac{x^2-3x+4}{-x-4}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-4x+4}{-x-4}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x+4}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-4x+4}{x+4}$.

Lời giải

Chọn B.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Hàm số có 2 điểm cực trị và $am<0$ nên ta loại đáp án C, D

Điểm cực đại $A(2;0)$ và điểm cực tiểu $B(-10;24)$. Do đó hàm số cần tìm là $y=\dfrac{x^2-4x+4}{-x-4}$

Câu 32. Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	-9	↘	$-\infty$

A. $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$. **B.** $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x-3}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2+x+2}{x-3}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-4x+4}{-x+3}$.

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Hàm số có 2 điểm cực trị và $am<0$ nên ta loại đáp án A, D

Điểm cực đại $A(5;-9)$ và điểm cực tiểu $B(1;-1)$. Do đó hàm số cần tìm là $y=\dfrac{-x^2+x+2}{x-3}$

Câu 33. Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		-9		-4		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-20	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

A. $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x+4}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x+4}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-x+2}{-x-4}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-3x+4}{-x-4}$.

Lời giải

Chọn B.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Hàm số có 2 điểm cực trị và $am>0$ nên ta loại đáp án C, D

Điểm cực đại $A(-9;-20)$ và điểm cực tiểu $B(1;0)$. Do đó hàm số cần tìm là $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x+4}$

Câu 34. Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

A. $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-4x+5}{x-2}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-x}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x-2}$.

Lời giải

Chọn D.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Hàm số không có điểm cực trị và $am>0$

Tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$ và có đạo hàm $y'>0$ với mọi $x\neq 2$

Do đó hàm số cần tìm là $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x-2}$.

Câu 35. Bảng biến thiên sau là của hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

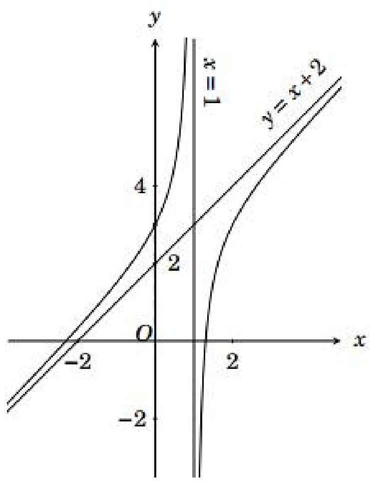
A. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. **B.** $y' > 0, \forall x \neq -3$. **C.** $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. **D.** $y' < 0, \forall x \neq -3$.

Lời giải

Chọn D.

Dựa vào đồ thị hàm số dễ thấy hàm số nghịch biến trên khoảng xác định nên $y' < 0, \forall x \neq -3$

Câu 36. Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ $(a \neq 0,\, m \neq 0)$ với a, b, c, m, n là các số thực và có đồ thị là (C) có dạng như hình vẽ sau.



Tọa độ tâm đối xứng I của đồ thị là (C) là

A. $I(3;1)$. **B.** $I(1;3)$. **C.** $I(1;0)$. **D.** $I(3;0)$.

Lời giải

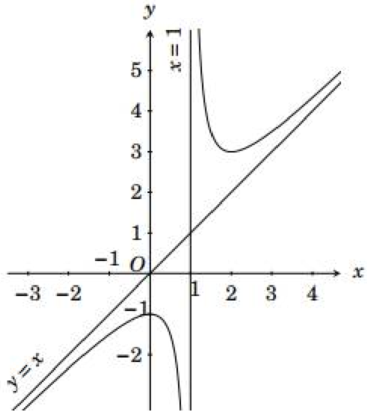
Chọn B.

Dựa vào đồ thị ta thấy:

Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ và tiệm cận xiên $y = x + 2$

Do đó tọa độ tâm đối xứng của đồ thị là (C) là $I(1;3)$

Câu 37. Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ $(a \neq 0,\, m \neq 0)$ với a, b, c, m, n là các số thực và có đồ thị là (C) có dạng như hình vẽ sau.



Tọa độ tâm đối xứng I của đồ thị là (C) là

A. $I(0;1)$. **B.** $I(0;0)$. **C.** $I(1;0)$. **D.** $I(1;1)$.

Lời giải

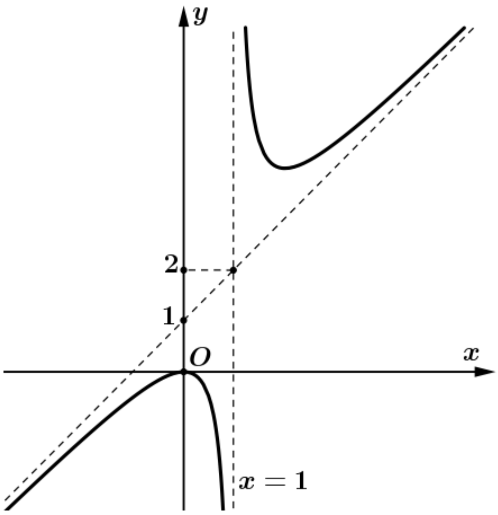
Chọn D.

Dựa vào đồ thị ta thấy:

Tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$ và tiệm cận xiên $y=x$

Do đó tọa độ tâm đối xứng của đồ thị là (C) là $I(1;1)$

Câu 38. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0,\, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có đồ thị là (C) có dạng như hình vẽ sau.



Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng nối hai cực trị của đồ thị là (C) là

A. $(0;1)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(2;1)$. **D.** $(1;2)$.

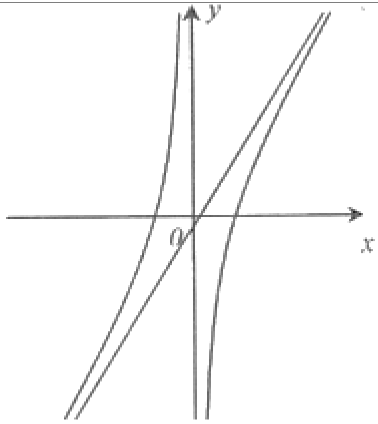
Lời giải

Chọn D.

Dựa vào đồ thị ta thấy: tọa độ tâm đối xứng của đồ thị là (C) là $I(1;2)$

Nên tọa độ trung điểm của đoạn thẳng nối hai cực trị của đồ thị là (C) là $I(1;2)$

Câu 39. Cho hàm số $y=ax+b-\dfrac{r}{x}(abr\neq 0)$ và có đồ thị là (C) có dạng như hình vẽ sau.



Các hệ số a,b,r phải thoả mãn điều kiện nào dưới đây.

A. $\begin{cases} a>0 \\ b<0 \\ r>0 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} a>0 \\ b>0 \\ r<0 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} a<0 \\ b>0 \\ r>0 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} a>0 \\ b>0 \\ r>0 \end{cases}$

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y' = a + \dfrac{r}{x^2}$

Vì đồ thị (C) không có cực trị nên $a.r > 0$.

Do đó B và C bị loại.

Mặt khác, theo hình vẽ tiệm cận xiên cắt Oy tại (O,b) nên $b<0$.

Do đó D bị loại.

Vậy chọn đáp án là A.

Câu 40. Hàm số $y = \dfrac{x^2+3x+5}{x+2}$ có giá trị cực tiểu bằng:

A. $-1-2\sqrt{3}$. **B.** $-1+2\sqrt{3}$. **C.** $1+2\sqrt{3}$. **D.** $1-2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B.

$y' = \dfrac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2+4x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2-\sqrt{3} \\ x=-2+\sqrt{3} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		-1		$-2+\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		+	0	−	||	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	cđ	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	ct	↗	$+\infty$

Vậy $y_{CT}=\dfrac{2x_{CT}+3}{1}=-1+2\sqrt{3}$

Câu 41. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x}{x-1}$ là

A. $y=-2x-2$. **B.** $y=2x+2$. **C.** $y=2x-2$. **D.** $y=-2x+2$.

Lời giải

Chọn B.

Áp dụng công thức phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$

là $y=\dfrac{\left(ax^2+bx+c\right)'}{(mx+n)'}=\dfrac{2ax+b}{m}$.

Vậy với hàm số $y=\dfrac{x^2+2x}{x-1}\to y=2x+2$ là đường thẳng cần tìm. Chọn B

Câu 42. Đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-x+2}{x+2}$ có phương trình là

A. $y=2x-1$. **B.** $y=2x+1$. **C.** $y=x-2$. **D.** $y=-2x-1$.

Lời giải

Chọn A.

Áp dụng công thức phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$

là $y=\dfrac{\left(ax^2+bx+c\right)'}{(mx+n)'}=\dfrac{2ax+b}{m}$.

Do đó phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị đã cho là $y=\dfrac{\left(x^2-x+2\right)'}{(x+2)'}=2x-1$.

Câu 43. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x}{x-1}$. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{15}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$

$y'=0\Leftrightarrow x^2-2x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=1-\sqrt{3}\Rightarrow y_1=2x_1+2\\ x_2=1+\sqrt{3}\Rightarrow y_2=2x_2+2\end{array}\right.$ 219

Suy ra khoảng cách giữa hai điểm cực trị: $\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}=\sqrt{5\left(x_1-x_2\right)^2}=2\sqrt{15}$

Câu 44. Biết rằng đồ thị $(H): y=\dfrac{x^2+2x+m}{x-2}$ (với m là tham số thực) có hai điểm cực trị là A, B. Hãy tính khoảng cách từ gốc toạ độ $O(0;0)$ đến đường thẳng AB.

A. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn A.

$$y=\frac{\left(x^2+2x+m\right)'}{(x-2)'}=2x+2$$

Suy ra phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị trên là: $y=2x+2 \Leftrightarrow 2x-y+2=0(d)$.

Vậy $d(O;d)=\dfrac{|2.0-0+2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Câu 45. Giao điểm giữa đồ thị $(C): y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-1}$ và đường thẳng $(d): y=x+1$ là

A. $A(-1;0)$ **B.** $A(3;0)$ **C.** $A(1;0)$ **D.** $A(-3;0)$

Lời giải

Chọn A.

Lập phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x^2-2x-3}{x-1}=x+1 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y=0$.

Vậy chọn $(-1;\,0)$.

Câu 46. Phương trình tiếp tuyến của đường cong $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0=-1$ là:

A. $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{5}{4}$. **B.** $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$. **C.** $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{5}{4}$. **D.** $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(x_0;\,y_0\right)$ có phương trình là: $y-y_0=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+x-1}{x-1}\right)'=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2},\ f'(-1)=\frac{3}{4};y(-1)=\frac{1}{2}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $x_0=-1$ có dạng $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

Câu 47. Cho đường cong $(C): y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ và điểm $A\in(C)$ có hoành độ $x=3$. Lập phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A.

A. $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$. **B.** $y=3x+5$. **C.** $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{5}{4}$. **D.** $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $y'=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$. Tại điểm $A\in(C)$ có hoành độ: $x_0=3\Rightarrow y_0=\dfrac{7}{2}$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại A là : $k=y'(3)=\dfrac{3}{4}$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm A là : $y=k(x-x_0)+y_0\Leftrightarrow y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

Câu 48. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}$ và xét các phương trình tiếp tuyến có hệ số góc $k=2$ của đồ thị hàm số là

A. $y=2x-1;\ y=2x-3$. **B.** $y=2x-5;\ y=2x-3$.

C. $y=2x-1;\ y=2x-5$. **D.** $y=2x-1;\ y=2x+5$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta có $y'=\dfrac{x^2-4x+5}{(x-2)^2}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến $k=2\Rightarrow y'(x_0)=2\Leftrightarrow\dfrac{x_0^2-4x_0+5}{(x_0-2)^2}=2\Leftrightarrow x_0^2-4x_0+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\x_0=3\end{array}\right.$.

Với $x_0=1\Rightarrow y_0=1\Rightarrow$ pttt: $y=2(x-1)+1\Leftrightarrow y=2x-1$.

Với $x_0=3\Rightarrow y_0=1\Rightarrow$ pttt: $y=2(x-3)+1\Leftrightarrow y=2x-5$.

Vậy hai phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=2x-1,\ y=2x-5$.

Câu 49. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{x-2}$ có đồ thị (H). Tìm tất cả tọa độ tiếp điểm của đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d: y=2x-1$ và tiếp xúc với (H).

A. $M\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ **B.** $M(2;3)$

C. $M_1(2;3)$ và $M_2(1;2)$ **D.** Không tồn tại

Lời giải

Chọn C.

Đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d: y=2x-1$ có dạng $\Delta: y=2x+c$ $(c\neq -1)$.

Δ là tiếp tuyến của $(H)\Leftrightarrow\dfrac{x^2-2x-1}{x-2}=2x+c$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow x^2+(c-2)x+1-2c=0$ có nghiệm kép $x\neq 2\Leftrightarrow\begin{cases}c^2+4c=0\\4+2(c-2)+1-2c\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=0\\c=-4\end{array}\right.$

Vậy có hai giá trị c thỏa mãn nên có hai tiếp tuyến tương ứng với hai tiếp điểm.

Câu 50. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$, tiếp tuyến của đồ thị hàm số vuông góc với đường thẳng. $d:3y-x+6=0$ là

A. $y=-3x-3;\ y=-3x-11$. **B.** $y=-3x-3;\ y=-3x+11$.

C. $y=-3x+3;\ y=-3x-11$. **D.** $y=-3x-3;\ y=3x-11$.

Lời giải

Chọn A.

$d:3y-x+6=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{3}x-2 \Rightarrow k_d=\dfrac{1}{3}$.

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta có $y'=\dfrac{x^2+4x+3}{\left(x+2\right)^2}$.

Tiếp tuyến vuông góc với $d \Rightarrow k_{tt}.k_d=-1 \Leftrightarrow k_{tt}=-\dfrac{1}{k_d}=-3 \Rightarrow y'\left(x_0\right)=-3$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0^2+4x_0+3}{\left(x_0+2\right)^2}=-3 \Leftrightarrow 4x_0^2+16x_0+15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-\dfrac{3}{2} \\ x_0=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right..$$

Với $x_0=-\dfrac{3}{2} \Rightarrow y_0=\dfrac{3}{2} \Rightarrow$ pttt: $y=-3\left(x+\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow y=-3x-3$.

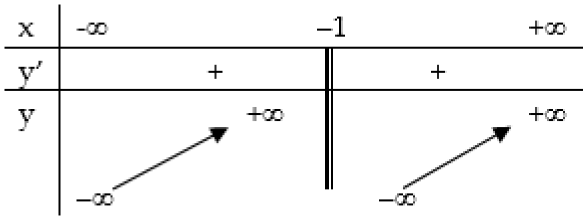
Với $x_0=-\dfrac{5}{2} \Rightarrow y_0=-\dfrac{7}{2} \Rightarrow$ pttt: $y=-3\left(x+\dfrac{5}{2}\right)-\dfrac{7}{2} \Leftrightarrow y=-3x-11$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

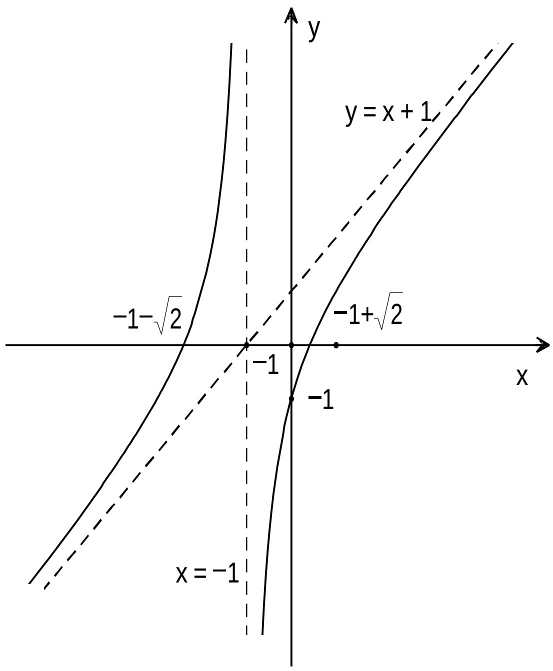
Câu 51. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x+1}$ có đồ thị là (C).

a) Hàm số có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

b) Bảng biến thiên của hàm số đã cho là:



c) Đồ thị (C) là hình sau:



d) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số (C) là điểm $I(0;-1)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x+1}=x+1-\dfrac{2}{x+1}$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

b) Sự biến thiên: $y'=\dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}>0$ với mọi x thuộc D: hàm số luôn luôn đồng biến trên D, không có cực đại và cực tiểu.

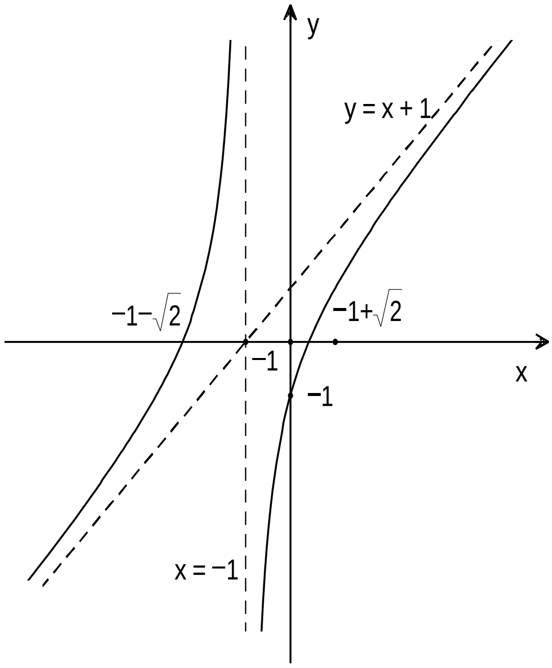
Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x\to 11^-} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 11^+} y=-\infty \Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y-(x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} y-(x+1)=0 \Rightarrow y=x+1$ là tiệm cận xiên.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$			-1			$+\infty$
y'		$+$		$\|\|$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

c) Đồ thị nhận điểm $I(-1;0)$ làm tâm đối xứng; cắt trục Oy tại $(0,-1)$, cắt trục Ox tại $\left(-1-\sqrt{2};\,0\right)$, $\left(-1+\sqrt{2};\,0\right)$.



d) Đồ thị nhận điểm $I(-1;0)$ làm tâm đối xứng.

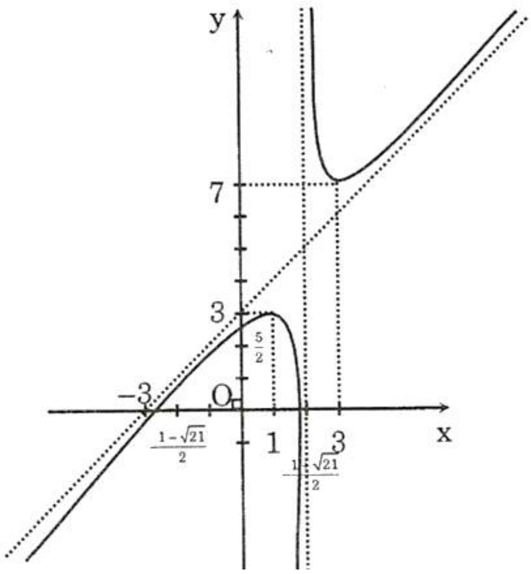
Câu 52. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x-5}{x-2}$ có đồ thị là (C).

a) Hàm số có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

b) Bảng biến thiên của hàm số đã cho là:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

c) Đồ thị (C) là hình sau:



d) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số (C) là điểm $I(2;5)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) $y=\dfrac{x^2+x-5}{x-2}=x+3+\dfrac{1}{x-2}$

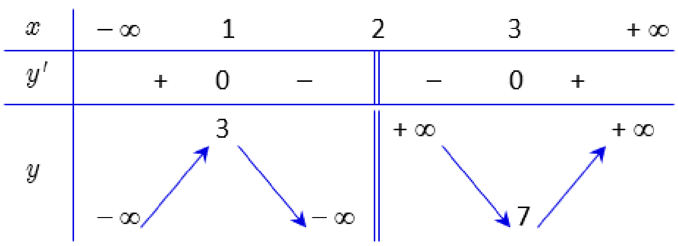
Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

b) $y'=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=3\\x=3\Rightarrow y=7\end{array}\right.$

$\lim\limits_{x\to 2\pm} y=\pm\infty: x=2$ là tiệm cận đứng

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=x+3\Rightarrow y=x+3$ là tiệm cận xiên

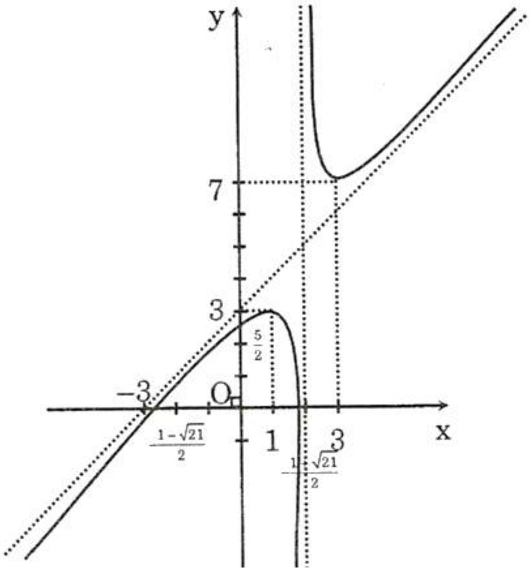
Bảng biến thiên:



c) Đồ thị:

$x=0\Rightarrow y=\dfrac{5}{2}$

$y=0\Rightarrow x^2+x-5=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\\x=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\end{array}\right.$



d) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số (C) là điểm $I(2;5)$.

Câu 53. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x-1}{x-2}$ có đồ thị là (C).

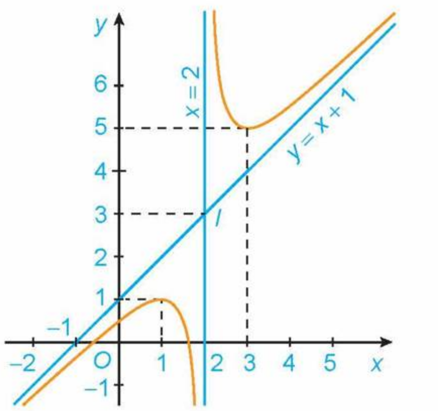
a) Hàm số có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

b) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$

c) Bảng biến thiên của hàm số đã cho là:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$ $\nearrow$		2	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

d) Đồ thị (C) là hình sau:



Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

b) Sự biến thiên: Viết $y = x+1+\dfrac{1}{x-2}$.

- Ta có: $y' = 1-\dfrac{1}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$. Vậy $y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=3$.

- Trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty), y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên từng khoảng này. Trên các khoảng $(1;2)$ và $(2;3), y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng này.

- Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ với $y_{CĐ} = 1$; hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$ với $y_{CT} = 5$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-x-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-1-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-x-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}} = +\infty$.

- Tiệm cận: $\lim\limits_{x\to2^-} y = \lim\limits_{x\to2^-}\left(x+1+\dfrac{1}{x-2}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+} y = \lim\limits_{x\to2^+}\left(x+1+\dfrac{1}{x-2}\right) = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}[y-(x+1)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-2} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}[y-(x+1)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-2} = 0.$

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x+1$.

- Bảng biến thiên:

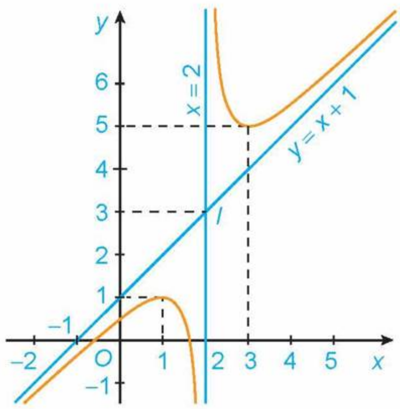
x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		+	0	−	||	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	1	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	5	↗	$+\infty$

d) Đồ thị

- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

- Ta có $y=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x-1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)$ và $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};0\right)$.



Câu 54. Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2-3x+4}{x-3}$ có đồ thị là (C).

a) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là $y=-x-6$.

b) Đồ thị (C) nhận giao điểm $I(3;9)$ làm tâm đối xứng.

c) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy.

d) Đồ thị (C) cắt Ox tại một điểm phân biệt.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Ta có $y=-x-6-\dfrac{14}{x-3}$

Khi đó tiệm cận xiên là $y=-x-6$ và có tiệm cận đứng là $x=3$.

b) Suy ra giao điểm 2 tiệm cận là $I(3,-9)$ là tâm đối xứng.

c) Ta có: $y'=\dfrac{-x+6x+5}{(x-3)^2}=0\Leftrightarrow x^2-6x-5=0\quad(*)$

Phương trình $(*)$ luôn có 2 nghiệm $x_1<0<x_2$ nên (C) luôn có 2 điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy.

d) Ta có $y=0\Leftrightarrow -x^2-3x+4=0$. Phương trình luôn có 2 nghiệm (vì $(-1).4<0$)

Suy ra (C) cắt Ox tại hai điểm phân biệt.

Câu 55. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x-1}{x-2}$ có đồ thị là (C).

a) Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang

b) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy.

c) Đồ thị (C) không cắt trục Ox.

d) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm M. Khi đó, phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là $3x-4y+2=0$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ và có đạo hàm $y'=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

a) Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang

c) Hàm số đạt cực trị tại $x=1$ và $x=3$ nên 2 điểm cực trị nằm cùng phía đối với Oy.

d) Ta có $y=\dfrac{x^2-x-1}{x-2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$ do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là

$\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)$ và $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};0\right)$

d) Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $M\left(\dfrac{1}{2};0\right)$ và $y'(0)=\dfrac{3}{4}$ nên phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$

Câu 56. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x+1}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng khoảng $(-2,-1)$ và $(-1,0)$

b) Hàm số có hai điểm cực trị $(-2;5)$ và $(0;1)$

c) Đồ thị (C) cắt Ox tại một điểm phân biệt.

d) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(1;2)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

Ta có $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x+1}=-x+2-\dfrac{1}{x+1}$ có đạo hàm $y'=\dfrac{-x-2x}{(x+1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$

Khi đó ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

a) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng khoảng $(-2,-1)$ và $(-1,0)$

b) Hàm số có hai điểm cực trị $(-2;5)$ và $(0;1)$

c) $y=0 \Leftrightarrow -x^2+x+1=0$ $(*)$

Vậy phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt. Hay (C) luôn cắt Ox tại hai điểm phân biệt.

d) Tiệm cận xiên của đồ thị là $y=-x+2$ nên đi qua điểm $A(1;2)$

Câu 57. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$

b) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x+2$

c) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$

d) Đồ thị hàm số (C) nhận điểm $I(-2;0)$ làm tâm đối xứng.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

b) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x+2$

Giới hạn, tiệm cận: Ta có $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}=x+2+\dfrac{1}{x+2}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+2+\frac{1}{x+2}\right)=+\infty;\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+2+\frac{1}{x+2}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+2}\right)=0;\ \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x+2}\right)=0$$

c) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}\left(\frac{x^2+4x+5}{x+2}\right)=-\infty;\ \lim_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}\left(\frac{x^2+4x+5}{x+2}\right)=+\infty$$

d) Đồ thị hàm số (C) nhận điểm $I(-2;0)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Câu 58. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-2x+2}{-x+1}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty,0)\cup(2;+\infty)$

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right]$ bằng $-\dfrac{19}{3}$

d) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $2x+y=0$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

Ta có $y'=\dfrac{-2x^2+4x}{(-x+1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-6	$\searrow$	$-\infty$

a) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty,0)$ và $(2;+\infty)$

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right]$ bằng -7 đạt tại $x=\dfrac{3}{2}$

d) Ta có $2x+y=0\Rightarrow y=-2x$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x^2-2x+2}{-x+1}-(-2x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{-x+1}\right)=0$ nên đồ thị có tiệm cận xiên là đường thẳng $2x+y=0$ hay $y=-2x$.

Câu 59. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+3x+2}{x+1}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.

b) Hàm số có 2 điểm cực trị.

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;3]$ tại $x=1$.

d) Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Ta có $y'=\dfrac{-x^2-2x+1}{(x+1)^2}; y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1-\sqrt{2}\\x=-1+\sqrt{2}.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$5+2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$5-2\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty$

a) Hàm số đồng biến trên trên khoảng $(-1-\sqrt{2};-1)$ nên đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.

b) Dựa vào bảng biến thiên, hàm số có 2 điểm cực trị.

c) Ta có hàm số nghịch biến trên $[1;3]$. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1;3]$ tại $x=3$.

d) Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$ nên hàm số không có tiệm cận ngang.

Câu 60. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-2x+2}{-x+1}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$.

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1,5;2,5]$ là $-\dfrac{19}{3}$.

d) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $2x+y=0$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

Ta có $y'=\dfrac{-2x^2+4x}{(-x+1)^2}; y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-6	$\searrow$	$-\infty$

a) Dựa vào bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

c) Ta có $f(1,5)=-7, f(2)=-6$ và $f(2,5)=-\dfrac{19}{3}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1,5;2,5]$ là -7.

d) Ta có $2x+y=0 \Rightarrow y=-2x$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2-2x+2}{-x+1}-(-2x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{-x+1}=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=-2x$.

Câu 61. Cho hàm số $y=x-\dfrac{1}{x}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

c) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1;3]$ tại $x=2$.

d) Đồ thị hàm số đối xứng qua điểm $O(0;0)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

Tập xác định $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ta có $y'=1+\dfrac{1}{x^2}>0, \forall x\in D$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

a) Hàm số đồng biến trên trên khoảng $(0;+\infty)$.

b) Hàm số không có cực trị.

c) Ta có $f(1)=0;\ f(2)=\dfrac{3}{2};\ f(3)=\dfrac{8}{3}$. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1;3]$ tại $x=1$.

d) Hàm số có đồ thị đối xứng qua điểm $O(0;0)$, là giao điểm của hai tiệm cận đứng và xiên.

Câu 62. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x-3}{x-1}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

b) Hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-3;0]$ tại $x=0$.

d) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=1$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)

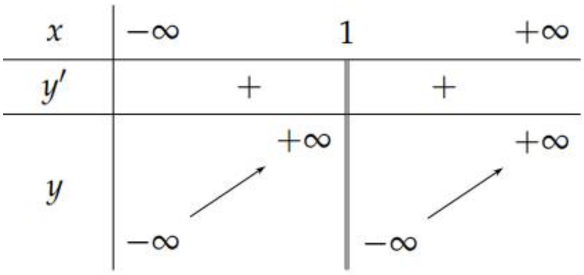
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

Ta có $y=\dfrac{x^2-x-3}{x-1}=x-2-\dfrac{1}{x-1}$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$y'=1+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0,\forall x\in D.$

Bảng biến thiên



a) Hàm số nghịch biến trên trên khoảng $(-\infty;-1)$.

b) Hàm số không có cực trị.

c) Ta có $f(-3)=-\dfrac{19}{4}, f(0)=3$. Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-3;0]$ tại $x=0$.

d) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=1$.

Câu 63. Cho hàm số $y=\dfrac{1-x^2}{x}$ có đồ thị (C).

a) Đồ thị hàm sồ có tiệm cận đứng là $x=0$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=-x$.

c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

d) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là O.

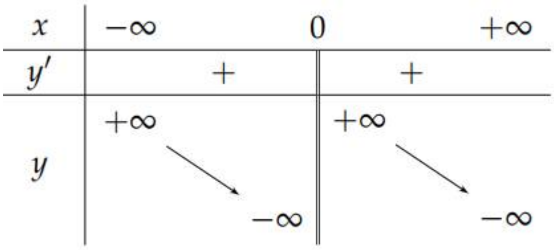
Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

Ta có $y=f(x)=-x+\dfrac{1}{x}$. Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ta có $y'=-1-\dfrac{1}{x^2}<0$.

Bảng biến thiên



a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=0$ vì $\lim\limits_{x\to 0^+} y=+\infty$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y=-x$ vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(-x)]=0$.

c) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

d) Đồ thì hàm số đối xứng qua $O(0;0)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Câu 64. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2x}{x-1}$ có đồ thị (C).

a) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=-x+1$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

d) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là $I(1;1)$.

Lời giải

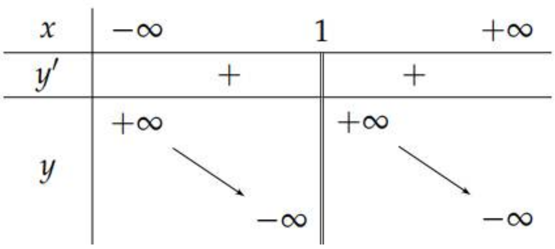
a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$ và tiệm cận xiên $y=-x+1$.

Ta có $y'=\dfrac{-x^2+2x-2}{(x+1)^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow -x^2+2x-2=0$ (vô nghiệm).

Bảng biến thiên



Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

Hàm số nhận giao điểm hai tiệm cận $I(1,0)$ làm tâm đối xứng.

a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$ vì $\lim\limits_{x\to 1^+} y=+\infty$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y=-x+1$ vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(-x+1)]=0$.

c) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

d) Đồ thì hàm số đối xứng qua $I(1;0)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Câu 65. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3,-1)$.

b) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $x=-1$.

c) Đồ thị (C) nhận $I(-2;0)$ làm tâm đối xứng.

d) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(1;2)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Sự biến thiên:

- Giới hạn, tiệm cận:

Ta có $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}=x+2+\dfrac{1}{x+2}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2+\dfrac{1}{x+2}\right)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+2+\dfrac{1}{x+2}\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}=-\infty.$

Suy ra đường thẳng $x=-2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+2}=0;\ \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+2}=0.$

Suy ra đường thẳng $y=x+2$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $y'=1-\dfrac{1}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$; $y'=0\Leftrightarrow x=-3$ hoặc $x=-1$.

Chiều biến thiên: Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-1;+\infty)$; Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-3;-2)$ và $(-2;-1)$.

a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-3,-2)$ và $(-2,-1)$.

b) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(-1;2)$.

c) Ta có $x=-2$ là đường tiệm cận đứng và $y=x+2$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số. Suy ra đồ thị nhận giao điểm $I(-2;0)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

d) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=x+2$ không đi qua điểm $A(1;2)$.

Câu 66. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$ có đồ thị (C).

a) Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng $y=x$.

b) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

c) Đồ thị hàm số đã cho nhận điểm $I(4;4)$ là tâm đối xứng.

d) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang.

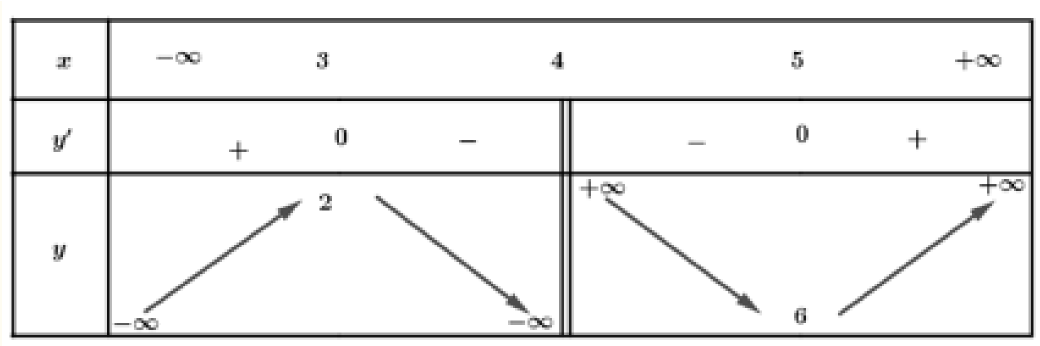
Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{4\}$

$$y=\frac{x^2-4x+1}{x-4}=x+\frac{1}{x-4}\Rightarrow y'=1-\frac{1}{(x-4)^2}=0\Leftrightarrow (x-4)^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-4=1\\x-4=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=5\\x=3\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:



a) Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng $y=x$ vì:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-4x+1}{x-4}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x-4}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-4}\right)=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-4x+1}{x-4}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{x-4}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x-4}\right)=0$$

b) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

c) Đồ thị hàm số đã cho nhận điểm $I(4;4)$ là tâm đối xứng.

d) Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

Câu 67. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.

b) Hàm số đã cho không có cực trị.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = x$.

d) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là $I(-1;-1)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Ta có: $y = \dfrac{x^2+x+1}{x+1} = x + \dfrac{1}{x+1}$

Tập xác định: $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$y' = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=1 \\ x+1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$ ta có $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên các khoảng này.

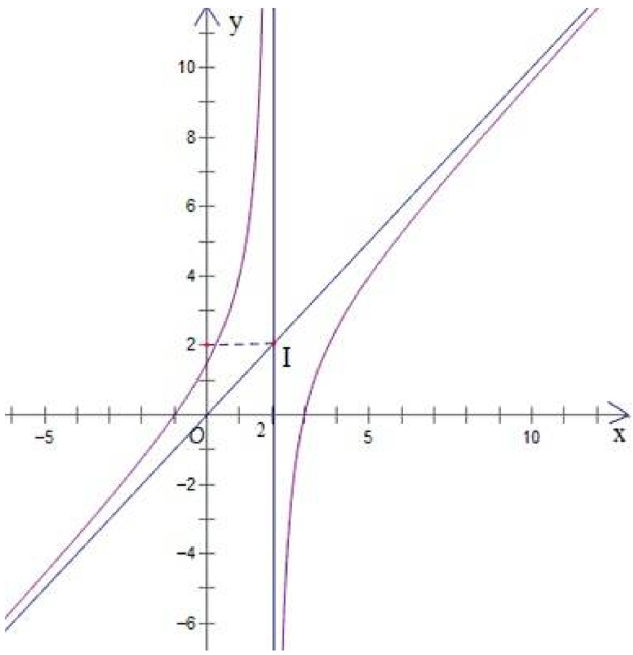
b) Hàm số đạt cực đại tại $x_C = -2$ và $y_C = -3$, hàm số đạt cực tiểu tại $x_{CT} = 0$ và $y_{CT} = 1$.

c) Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+1} = 0$

Đồ thị hàm số đã cho có một đường tiệm cận xiên $y = x$.

d) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là $I(-1;-1)$.

Câu 68. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $(a,b,c,m,n \in \mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=2$ và tiệm cận xiên $y=x$.

d) Đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ là của đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-1}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

Từ đồ thị ta có:

a) Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;2\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$.

b) Hàm số $y=f\left(x\right)$ không có cực trị.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=2$

Tìm tiệm cận xiên:

Cách 1: Trắc nghiệm

Từ đồ thị ta thấy tiệm cận xiên đi qua 2 điểm $\left(0;0\right);\left(2;2\right)$ nên thay vào $y=x$ ta được $\begin{cases}0=0\\2=2\end{cases}$ thỏa , do đó $y=x$ là tiệm cận xiên đồ thị hàm số đã cho.

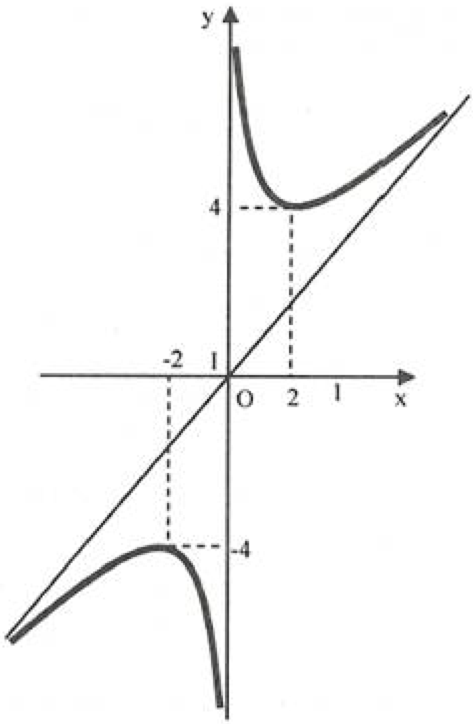
Cách 2: Tự luận *(không nên làm cách này vì mất thời gian)*

Gọi tiệm cận xiên cần tìm là $y=ax+b$

tiệm cận xiên đi qua 2 điểm $\left(0;0\right);\left(2;2\right)$ nên có hệ phương trình sau: $\begin{cases}0=b\\2=2a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\a=1\end{cases}\Rightarrow y=x$ là tiệm cận xiên đồ thị hàm số đã cho.

d) Hàm số $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-1}$ có tiệm cận đứng $x=1$ nên hàm số $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-1}$ không phải là hàm số $y=f\left(x\right)$.

Câu 69. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $\left(a,b,c,m,n\in\mathbb{R}\right)$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng và tiệm cận xiên

b) Đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

c) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$

d) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại $(2;4)$ và điểm cực tiểu $(-2;-4)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Từ đồ thị ta có:

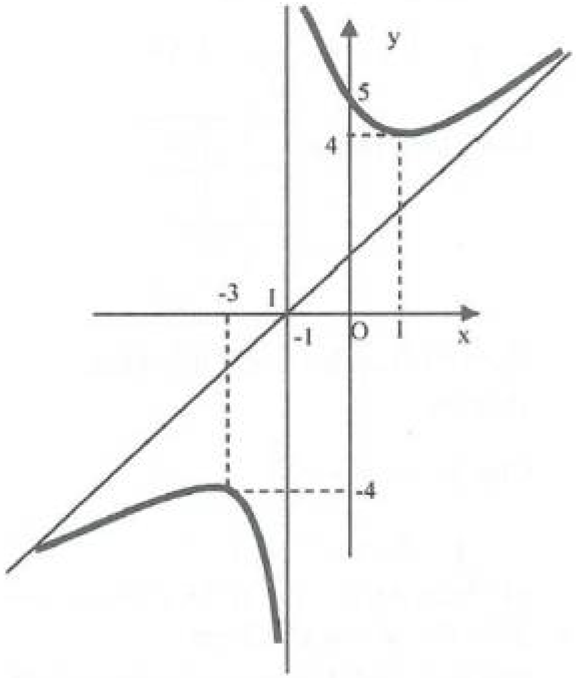
a) Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng và tiệm cận xiên

b) Đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng vì O là giao điểm hai đường tiệm cận.

c) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(0;2)$ và đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$

d) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại $(-2;-4)$ và điểm cực tiểu $(2;4)$.

Câu 70. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ với $(a,b,c,m,n \in \mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = 0$

b) Đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

c) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -3)$ và $(1; +\infty)$

d) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại $(-3; -4)$ và điểm cực tiểu $(1; 4)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

Từ đồ thị ta có:

a) Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = -1$

b) Đồ thị hàm số nhận tọa độ $I(-1; 0)$ làm tâm đối xứng vì $I(-1; 0)$ là giao điểm hai đường tiệm cận.

c) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-3; -1)$ và $(-1; 1)$, đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -3)$ và $(1; +\infty)$

d) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại $(-3; -4)$ và điểm cực tiểu $(1; 4)$.

Câu 71. Cho hàm số $y = \dfrac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x + 3m}$ (1) với m là số thực

a) Khi $m = 1$ đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị

b) Khi $m = 1$ đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = x - 2$

c) Khi $m = 1$ giao điểm của đường tiệm cận xiên và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $I(3; -5)$

d) Có 2 giá trị m để góc giữa hai tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng 45^0

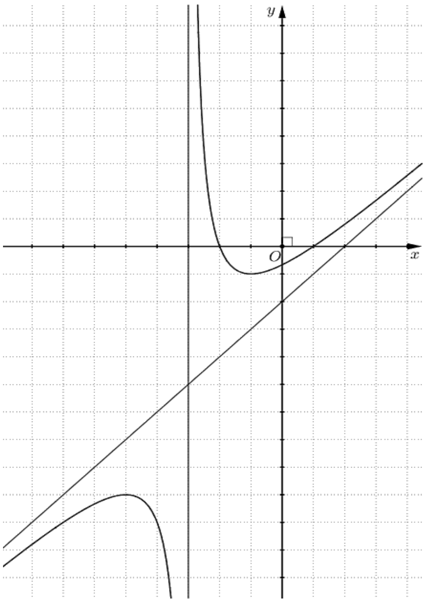
Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Khi $m=1$ đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị

b) Khi $m=1$ đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y=x-2$

c) Khi $m=1 \Leftrightarrow y=x-2+\dfrac{4}{x+3}$



d) Ta có: $y=\dfrac{mx^2+\left(3m^2-2\right)x-2}{x+3m}=mx-2+\dfrac{6m-2}{x+3m}$

Nếu $m=\dfrac{1}{3}$ đồ thị hàm số không tồn tại hai tiệm cận

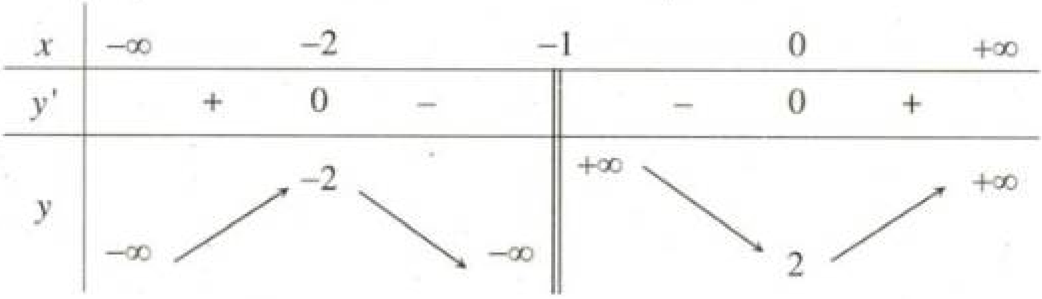
Nếu $m\neq\dfrac{1}{3}$, đồ thị hàm số có hai tiệm cận

$d_1: x=-3m \Leftrightarrow x+3m=0$ và $d_2: y=mx-2 \Leftrightarrow mx-y-2=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_1}(1;0);\ \overrightarrow{n_2}(m;-1)$ lần lượt là véc tơ pháp của d_1 và d_2.

Góc giữa d_1 và d_2 bằng $45^0 \Leftrightarrow \cos 45^0=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} \Leftrightarrow \dfrac{|m|}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m=\pm 1$.

Câu 72. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $\left(a,b,c,m,n\in\mathbb{R}\right)$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-1\right\}$ và có bảng biến thiên dưới đây



a) Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có điểm cực đại $\left(-2;2\right)$ và điểm cực tiểu $\left(0;2\right)$.

b) Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-2;-1\right)$ và $\left(-1;0\right)$.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=-1$.

d) Đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ là của đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-2x}{x-2}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

Từ bảng biến thiên ta có:

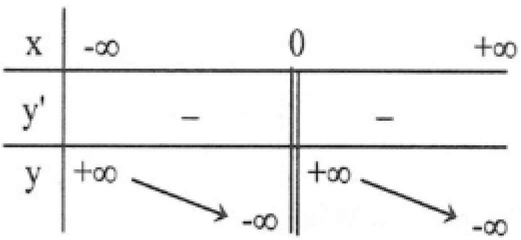
a) Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có điểm cực đại $\left(-2;2\right)$ và điểm cực tiểu $\left(0;2\right)$.

b) Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-2;-1\right)$ và $\left(-1;0\right)$.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=-1$.

d) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x}{x-2}$ có tiệm cận đứng $x=2$ nên hàm số $y=f\left(x\right)$ không phải là hàm số $y=\dfrac{x^2-2x}{x-2}$.

Câu 73. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $\left(a,b,c,m,n\in\mathbb{R}\right)$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}$ và có bảng biến thiên dưới đây



a) Đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ có tiệm cận đứng $x=0$.

b) Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$.

c) Đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ là của đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-2x}{x-2}$.

d) Trên đoạn $[2024;2025]$ hàm số $y=f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là $f(2025)$ và giá trị lớn nhất là $f(2024)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

Từ bảng biến thiên ta có:

a) Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=0$.

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0);(0;+\infty)$.

c) $y=\dfrac{x^2-2}{x}$

$y'=\dfrac{x^2+2}{x^2}>0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ nên hàm số $y=\dfrac{x^2-2}{x}$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0);(0;+\infty)$.

Do đó đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-2}{x}$ không phải là của đồ thị của hàm số $y=f(x)$.

d) Do hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0);(0;+\infty)$ nên $\min\limits_{[2024;2025]} y=f(2025);\ \max\limits_{[2024;2025]} y=f(2024)$

Câu 74. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $(a,b,c,m,n\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên dưới đây

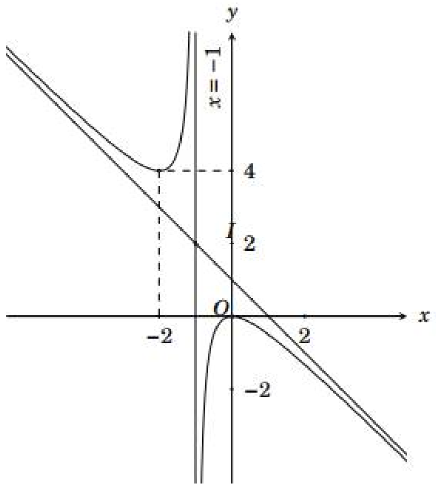
x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty\ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(2;6)$ và điểm cực tiểu $(0;2)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=1$.

d) Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ là như hình vẽ sau:



Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

Từ bảng biến thiên ta có:

a) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại $(0;2)$ và điểm cực tiểu $(2;6)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 1$.

d) Từ đồ thị hàm số có điểm cực đại $(0;0)$ và điểm cực tiểu $(-2;4)$ mâu thuẫn giả thiết bảng biến thiên

Câu 75. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax^2 + bx - 1}{mx + 2}$ với $(a, b, m \in \mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ và có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

a) $f'(x) < 0$ khi $x \in (-3;-2) \cup (-2;-1)$

b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-3;-2)$ và $(-2;-1)$.

c) $a + b + m = 3$

d) Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có tọa độ tâm đối xứng là $(-2;3)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

Từ bảng biến thiên ta có: $y=\dfrac{x^2+x-1}{x+2}$

a) $f'(x)<0$ khi $x\in(-3;-2)\cup(-2;-1)$

b) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-1;+\infty)$.

c) Ta có hệ: $\begin{cases}\dfrac{-2}{m}=-2\\ -5=\dfrac{a(-3)^2-3b-1}{-3m+2}\\ -1=\dfrac{a(-1)^2-b-1}{-m+2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=1\\ a=1\\ b=1\end{cases}\Rightarrow a+b+m=3$

d) Từ câu c, ta có $y=\dfrac{x^2+x-1}{x+2}=x-1+\dfrac{1}{x+2}\Rightarrow y=x-1$ là tiệm cận xiên.

Từ bảng biến thiên ta có tiệm cận đứng $x=-2$

Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có tọa độ tâm đối xứng là giao điểm của hai đường tiệm cận hay $(-2;-3)$.

Câu 76. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+2x+c}{x+n}$ với $(a,c,n\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ và có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-6	$\searrow$	$-\infty$

a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(4;-6)$ và điểm cực tiểu $(0;2)$.

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đường tiệm cận đứng $x=2$.

c) $f'(x)<0$ khi $x\in(0;2)\cup(2;4)$

d) $a+c+n=7$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(4;-6)$ và điểm cực tiểu $(0;2)$.

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đường tiệm cận đứng $x=2$.

c) $f'(x)>0$ khi $x\in(0;2)\cup(2;4)$

c) Ta có hệ: $\begin{cases} -n=2 \\ 2=\dfrac{a.0+2.0+c}{0+n} \\ -6=\dfrac{a.4^2+2.4+c}{4+n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=-2 \\ a=-1 \Rightarrow a+c+n=-7 \\ c=-4 \end{cases}$

Câu 77. Cho hàm số $y=x-\dfrac{1}{x+1}$ có đồ thị (C).

a) Đồ thị của hàm số (C) có tiệm cận đứng là $x=1$

b) Đồ thị của hàm số (C) có tiệm cận xiên là $y=x$.

c) Đồ thị hàm số (C) cắt trục Oy tại M. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y=2x+1$.

d) Tồn tại hai tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với nhau

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) $\lim\limits_{x\to -1\mp} y=\pm\infty : x=-1$ là tiệm cận đứng

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=x : y=x$ là tiệm cận xiên

c) $M(0;-1), y'(0)=2$

Phương trình tiếp tuyến (T) tại $M: y=2(x-0)-1 \Leftrightarrow y=2x-1$

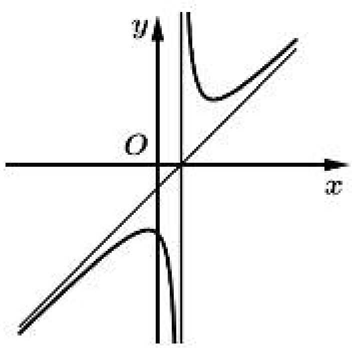
d) $y'=1+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0, \forall x\in D$

Tiếp tuyến (T_1) của (C) tại $P(x_1,y_1)$ có hệ số góc $k_1=y'_{x_1}=1+\dfrac{1}{(x_1+1)^2}>0$

Tiếp tuyến (T_2) của (C) tại $Q(x_2,y_2)$ có hệ số góc $k_2=y'_{x_2}=1+\dfrac{1}{(x_2+1)^2}>0$

Do $y'_{x_1}>0, y'_{x_2}>0$ nên không thể có 2 tiếp tuyến của (C) vuông góc nhau

Câu 78. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên.



a) $ad > 0$.

b) $ed < 0$.

c) $ce < 0$.

d) $bd > 0$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

Dựa vào đồ thị hàm số, ta có:

a) $ad > 0$.

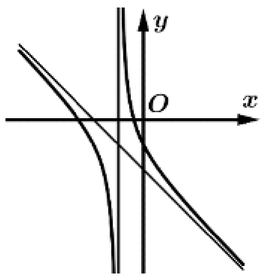
b) đồ thị có tiệm đường tiệm cận đứng $x = \dfrac{-e}{d} > 0 \Rightarrow ed < 0$.

c) hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $\dfrac{c}{e} < 0 \Rightarrow ce < 0$

d) đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số đã cho là $y = \dfrac{2ax + b}{d}$.

Mà đường thẳng cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $\dfrac{b}{d} < 0 \Rightarrow bd < 0$.

Câu 79. Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}\ (a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên.



a) $ad > 0$.

b) $de < 0$.

c) $ac > 0$.

d) $bd > 0$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

Dựa vào đồ thị hàm số, ta có:

a) $ad < 0$

b) đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = \dfrac{-e}{d} < 0$. Nên $ed < 0$.

c) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ âm.

Nên $ax^2+bx+c=0$ có 2 nghiệm phân biệt âm.

Suy ra $x_1.x_2>0\Rightarrow \frac{c}{a}>0\Rightarrow ca>0$

d) Vì đồ thị hàm số có đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị có dạng $y=\frac{2ax+b}{d}$.

Mà đường thẳng cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $\frac{b}{d}<0\Rightarrow bd<0$.

Câu 80. Cho hàm số $y=\frac{-x^2+2(m+1)x-5}{x-1}$ có đồ thị (C) với m là tham số

a) Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) Khi $m=0$ thì đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(-2;4)$ và $(3;-4)$

c) Khi $m=0$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=-x+1$

d) Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì $m>4$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) c) Khi $m=0: y=\frac{-x^2+2x-5}{x-1}=-x+1-\frac{4}{x-1}$

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Đạo hàm $y'=\frac{-x^2+2x+3}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow -x^2+2x+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\Rightarrow y=4\\ x=3\Rightarrow y=-4\end{array}\right.$

$\lim\limits_{x\to 1\mp} y=\pm\infty: x=1$ là đường tiệm cận đứng; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=-x+1: y=-x+1$ là tiệm cận xiên

c) $y=\frac{-x^2+2(m+1)x-m-5}{x-1}$; $y'=\frac{-x^2+2x-2m-2+m+5}{(x-1)^2}=\frac{-x^2+2x-m+3}{(x-1)^2}$

Hàm số y có cực đại cực tiểu khi phương trình $-x^2+2x-m+3=0$ có hai nghiệm phân biệt

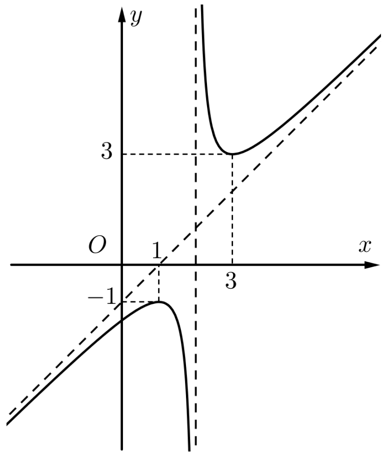
$\Leftrightarrow \Delta'=1-m+3=4-m>0\Leftrightarrow m<4$

Nghiệm $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình $y'=0\Leftrightarrow -1+2-m+3\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 4$

Điều kiện sau cùng: $m<4$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 81. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có đồ thị là (C) có dạng như hình vẽ sau.



Gọi $I\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị là (C). Tính giá trị của x_0+y_0.

Trả lời: ………………..

Lời giải

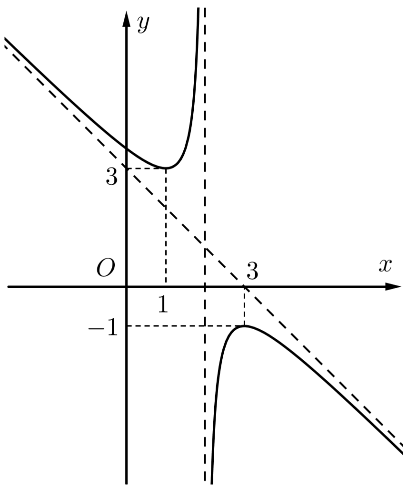
Đáp án: 3

Dựa vào đồ thị ta thấy: Điểm cực đại và cực tiểu là $A(3;3);B(1;-1)$

Vì $I\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị là (C) nên là $I\left(x_0;y_0\right)$ trung điểm của đoạn thẳng AB

Do đó: $\begin{cases} x_0=\dfrac{3+1}{2}=2 \\ y_0=\dfrac{3-1}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow x_0+y_0=3$

Câu 82. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có đồ thị là (C) có dạng như hình vẽ sau.



Gọi $I\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị là (C). Tính giá trị của $x_0+2025y_0$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

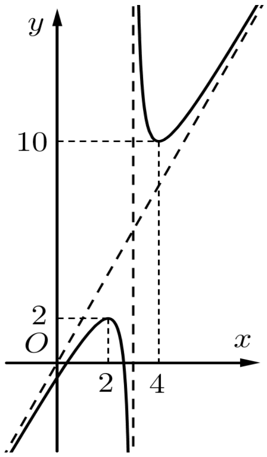
Đáp án: 2027

Dựa vào đồ thị ta thấy: Điểm cực đại và cực tiểu là $A(1;3);B(3;-1)$

Vì $I(x_0;y_0)$ là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị là (C) nên là $I(x_0;y_0)$ trung điểm của đoạn thẳng AB

Do đó: $\begin{cases} x_0=\dfrac{1+3}{2}=2 \\ y_0=\dfrac{3-1}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow x_0+2025y_0=2027$

Câu 83. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0,\, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có đồ thị là (C) có dạng như hình vẽ sau.



Gọi $M(x_0;y_0)$ là giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho. Tính giá trị của x_0+y_0.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 9

Dựa vào đồ thị ta thấy: Điểm cực đại và cực tiểu là $A(2;2);B(4;10)$

Vì $M(x_0;y_0)$ là giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho nên cũng là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị . Do đó $M(x_0;y_0)$ trung điểm của đoạn thẳng AB

Ta có: $\begin{cases} x_0=\dfrac{2+4}{2}=3 \\ y_0=\dfrac{2+10}{2}=6 \end{cases} \Rightarrow x_0+y_0=9$

Câu 84. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0,\, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

Gọi $I\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho. Tính giá trị của x_0+y_0.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 4

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Điểm cực đại và cực tiểu là $A\left(0;-2\right);B\left(4;6\right)$

Vì $I\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị nên là $I\left(x_0;y_0\right)$ trung điểm của đoạn thẳng AB

Do đó: $\begin{cases} x_0=\dfrac{0+4}{2}=2 \\ y_0=\dfrac{-2+6}{2}=2 \end{cases} \Rightarrow x_0+y_0=4$

Câu 85. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0,\, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	15	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-9	↘	$-\infty$

Gọi $I\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho. Tính giá trị của x_0+y_0.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Điểm cực đại và cực tiểu là $A\left(-3;15\right);B\left(1;-9\right)$

Vì $I\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị nên là $I\left(x_0;y_0\right)$ trung điểm của đoạn thẳng AB

Do đó: $\begin{cases} x_0=\dfrac{-3+1}{2}=-1 \\ y_0=\dfrac{15-9}{2}=3 \end{cases} \Rightarrow x_0+y_0=2$

Câu 86. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0,\, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho. Tính giá trị của x_0+y_0.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Điểm cực đại và cực tiểu là $A(0;0);B(2;4)$

Vì $M\left(x_0;y_0\right)$ là giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho nên cũng là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị . Do đó $M\left(x_0;y_0\right)$ trung điểm của đoạn thẳng AB

Ta có: $\begin{cases} x_0=\dfrac{0+2}{2}=1 \\ y_0=\dfrac{0+4}{2}=2 \end{cases} \Rightarrow x_0+y_0=3$

Câu 87. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0,\, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-5		-4		-3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	12	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho. Tính giá trị của x_0+y_0.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 4

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Điểm cực đại và cực tiểu là $A(-3;4);B(-5;12)$

Vì $M\left(x_0;y_0\right)$ là giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho nên cũng là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị . Do đó $M\left(x_0;y_0\right)$ trung điểm của đoạn thẳng AB

Ta có: $\begin{cases} x_0 = \dfrac{-3-5}{2} = -4 \\ y_0 = \dfrac{4+12}{2} = 8 \end{cases} \Rightarrow x_0 + y_0 = 4$

Câu 88. Gọi $I\left(x_0; y_0\right)$ là tọa độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số $y = x - 2 + \dfrac{4}{x-1}$. Tính giá trị $T = 2025x_0 - 2024y_0$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 4049

đồ thị hàm số có tiệm cận đứng: $x = 1$

đồ thị hàm số có tiệm cận xiên: $y = x - 2$

điểm đối xứng của đồ thị hàm số là giao hai đường tiệm cận $\Rightarrow I\left(1;-1\right)$

$\Rightarrow T = 2025x_0 - 2024y_0 = 2025.1 - 2024\left(-1\right) = 4049$

Câu 89. Gọi $I\left(x_0; y_0\right)$ là tọa độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2x - 2}{x+2}$. Tính giá trị $T = x_0 - y_0$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 0

Ta có $y = \dfrac{x^2 + 2x - 2}{x+2} = \dfrac{x(x+2) - 2}{x+2} = x - \dfrac{2}{x+2}$. $\lim\limits_{x \to +\infty} [y - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2}{x+2} = 0$ và

$\lim\limits_{x \to -\infty} [y - x] = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2}{x+2} = 0$.

Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x$.

đồ thị hàm số có tiệm cận đứng: $x = -2$

điểm đối xứng của đồ thị hàm số là giao hai đường tiệm cận $\Rightarrow I\left(-2;-2\right)$

$\Rightarrow T = x_0 - y_0 = 0$

Câu 90. Gọi $I\left(x_0; y_0\right)$ là tọa độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x-1}$. Tính giá trị $T = x_0 - y_0$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

$y = \dfrac{x^2 - 3x}{x-1} = x - 2 - \dfrac{2}{x-1}$.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x-1}$ có TCĐ: $x = 1$, TCX : $y = x - 2$.

Vậy tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x}{x-1}$ có toạ độ là $(1;-1)$.

$\Rightarrow T=x_0-y_0=2$

Câu 91. Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ cắt trục tung tại điểm $M\left(x_M;y_M\right)$. Tính giá trị biểu thức $T=x_M+y_M$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Điều kiện $x\neq 2$.

Đồ thị của hàm số cắt trục tung nên $x=0\Rightarrow y=2\Rightarrow M\left(0;2\right)$

$T=x_M+y_M=2$

Câu 92. Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x-2}$ cắt trục hoành tại hai điểm $M\left(x_M;y_M\right)$ và $N\left(x_N;y_N\right)$. Tính giá trị biểu thức $T=x_M+x_N$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 4

Điều kiện $x\neq 2$.

Đồ thị của hàm số cắt trục hoành nên:

$$\frac{x^2-4x+3}{x-2}=0\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\left(N\right)\\x=3\left(N\right)\end{array}\right.$$

Do đó, đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại hai điểm $\left(1;0\right);\left(3;0\right)$

$\Rightarrow T=x_M+x_N=4$

Câu 93. Đường thẳng $y=2x-1$ có bao nhiêu điểm chung với đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Điều kiện $x\neq -1$.

Hoành độ giao điểm là nghiệm phương trình $2x-1=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}\Leftrightarrow\dfrac{x^2+2x}{x+1}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$.

Vì phương trình hoành độ giao điểm có hai nghiệm phân biệt nên đường thẳng $y=2x-1$ có hai điểm chung với đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$.

Câu 94. Trên đồ thị (C): $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x-2}$, có bao nhiêu cặp điểm đối xứng nhau qua điểm $I\left(\dfrac{1}{2};1\right)$?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1

Gọi $M(x;y);M'(x';y')$ thuộc (C) và đối xứng nhau qua điểm $I\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Khi đó ta có hệ: $\begin{cases}x+x'=1\\ y+y'=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=1-x\\ y'=2-y\end{cases}\Rightarrow M'(1-x;2-y)$.

Vì $M(x;y);M'(x';y')$ thuộc (C) nên ta có $\begin{cases}y=\dfrac{x^2-3x+6}{x-2}\\ 2-y=\dfrac{x^2-x+4}{-x-1}\end{cases}$

$\Rightarrow 2=\dfrac{x^2-3x+6}{x-2}+\dfrac{x^2+x+4}{-x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x-6=0\\ x\neq -1,x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\Rightarrow y=-4\\ x=3\Rightarrow y=6\end{array}\right.$

Vậy trên (C) có đúng một cặp điểm: $M(-2,-4)$; $M'(3;6)$

Câu 95. Số điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+3x+10}{x+2}$ là bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 12

Ta có: $y=\dfrac{2x^2+3x+10}{x+2}=2x-1+\dfrac{12}{x+2}$

Điểm $M(x;y)\in(C)$ có toạ độ nguyên thì $\begin{cases}x\in\mathbb{Z}\\ y\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{Z}\\ 12\,\vdots\,(x+2)\end{cases}$

12 có 12 ước số nên có 12 điểm có toạ độ nguyên.

Câu 96. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$ có đồ thị là (C). Có bao nhiêu điểm trên đồ thị (C) của hàm số có tọa độ là các số nguyên?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 6

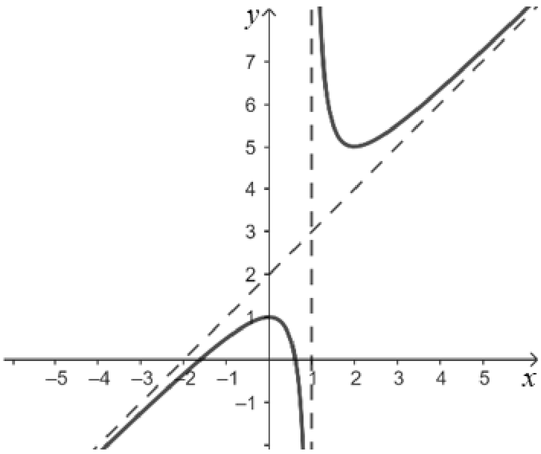
Ta có $y=x+\dfrac{4}{x+1}$

$x,y\in Z\Leftrightarrow 4$ chia hết cho $x+1$.

$\Leftrightarrow x+1\in\{\pm1;\pm2;\pm4\}\Leftrightarrow x\in\{-2;0;-3;1;-5;3\}$

Vậy có tất cả 6 điểm nguyên.

Câu 97. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}\left(a>0,m\neq 0\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi trong các số b,c,m,n có tất cả bao nhiêu số dương?



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}\left(a>0,m\neq 0\right);D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-n}{m}\right\}$

Tiệm cận xiên $y=x+2$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax^2+bx+c}{mx^2+nx}\right)=\frac{a}{m}=1\Leftrightarrow a=m>0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{ax^2+bx+c}{mx+n}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(b+n\right)x+c}{mx+n}\right]=\frac{b+n}{m}=2$$

$$\Leftrightarrow b+n=2m\Leftrightarrow b-m=2m\Leftrightarrow b=3m=3a>0$$

Tiệm cận đứng $x=\dfrac{-n}{m}=1\Leftrightarrow n=-m=-a<0$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại $y_0=\dfrac{c}{n}>0\Rightarrow c<0$

Câu 98. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-mx+2m}{x+m}\left(C_m\right)$. Có bao nhiêu đồ thị $\left(C_m\right)$ đi qua điểm $(0,1)$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 0

Ta có $x=0$. Suy ra $y=\dfrac{2m}{m}=2\neq 1$

Vậy không có $\left(C_m\right)$ nào qua $(0,1)$

Câu 99. Tìm giá trị m để đường thẳng $y=-2x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x}$ tại hai điểm A,B sao cho trung điểm đoạn AB thuộc Oy.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1

Phương trình hoành độ giao điểm: $3x^2+(1-m)x-1=0 \quad (x\neq 0)$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khác 0 với mọi m

Hoành độ trung điểm I của $AB: x_I=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{m-1}{6}$ mà $I\in Oy \Leftrightarrow x_1=0 \Leftrightarrow \dfrac{m-1}{6}=0 \Leftrightarrow m=1$

Câu 100. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ (với m là tham số). Tìm giá trị của tham số m để hàm số có giá trị cực đại là 7.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -9

Tập xác định của hàm số là: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

$$y=\frac{x^2+mx+1}{x+m} \Rightarrow y'=\frac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}$$

$$y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -m \\ x^2+2mx+m^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -m \\ \left[\begin{array}{l} x=-m+1 \\ x=-m-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-m+1 \\ x=-m-1 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	-∞		-m-1		-m		-m+1		+∞
y'		+	0	−	||	−	0	+	
y	-∞	↗	$y_{CĐ}$	↘	-∞ || +∞	↘	y_{CT}	↗	+∞

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=-m-1$.

Vậy $y(-m-1)=7 \Leftrightarrow -m-2=7 \Leftrightarrow m=-9$.

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 101. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x}{x-2}$ có đồ thị (C) .

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $A(1;-2)$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành.

Lời giải

Ta có: $y=\dfrac{x^2+x}{x-2}\Rightarrow y'=\dfrac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}$

a) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $A(1;-2)$ là: $y=f'(x_0).(x-x_0)+y_0=f'(1).(x-1)-2$

Ta có: $f'(1)=-5$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm: $y=-5(x-1)-2\Leftrightarrow y=-5x+3$.

b) Giao điểm M của đồ thị với trục tung : $x_0=0\Rightarrow y_0=0$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại M là : $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm M là : $y=f'(0)(x-0)+0\Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{2}x$.

c) Giao điểm N của đồ thị với trục hoành : $y_0=0\Rightarrow\dfrac{x_0^2+x_0}{x_0-2}=0\Leftrightarrow x_0^2+x_0=0\Leftrightarrow x_0=-1;x_0=0$

+ Với $N(-1;0)$. Hệ số góc của tiếp tuyến tại N là : $f'(-1)=\dfrac{1}{3}$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm N là : $y=f'(-1)(x+1)+0\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$.

+ Với $N(0;0)$. Hệ số góc của tiếp tuyến tại N là : $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm N là : $y=f'(0)(x-0)+0\Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{2}x$.

Câu 102. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+1}{2x-1}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung có dạng $y=ax+b$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+b$

Lời giải

Ta có: $y'=\dfrac{2x^2-2x+1}{(2x-1)^2}$.

Giao điểm M của đồ thị với trục tung : $x_0=0\Rightarrow y_0=-1$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại M là : $k=y'(0)=1$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm M là : $y=k\left(x-x_0\right)+y_0 \Leftrightarrow y=x-1$.

$\Rightarrow P=a+b=0$

Câu 103. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{x-2}$ có đồ thị (H). Có bao nhiêu tiếp điểm của đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d: y=2\mathrm{x}-1$ và tiếp xúc với (H).

Lời giải

Đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d: y=2x-1$ có dạng $\Delta: y=2x+c \quad (c\neq -1)$.

Δ là tiếp tuyến của $(H) \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x-1}{x-2}=2\mathrm{x}+c$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow x^2+(c-2)x+1-2c=0$ có nghiệm kép

$\mathrm{x}\neq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} c^2+4c=0 \\ 4+2(c-2)+1-2c\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=-4 \end{array}\right.$

Vậy có hai giá trị c thỏa mãn nên có hai tiếp tuyến tương ứng với hai tiếp điểm.

Câu 104. Tìm được trên đồ thị $(C): y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$ hai điểm $M_1(a;b)$ và $M_2(c;d)$ có khoảng cách đến đường thẳng $3x+y+6=0$ nhỏ nhất. Khi đó, tính giá trị biểu thức $T=a+b+c+d$.

Lời giải

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)\in(C)\Rightarrow M\left(x_0;\dfrac{x_0^2+4x_0+5}{x_0+2})\right)$.

Gọi (d) là khoảng cách từ M đến đường thẳng $3x+y+6=0$

$$d=\frac{1}{\sqrt{10}}\left|\frac{4x_0^2+16x_0+17}{x_0+2}\right|=\frac{1}{\sqrt{10}}\left|4\left(x_0+2\right)+\frac{1}{x_0+2}\right|\geq\frac{4}{\sqrt{10}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 4\left|x_0+2\right|=\dfrac{1}{\left|x_0+2\right|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_0=\dfrac{-3}{2}\Rightarrow y_0=\dfrac{5}{2} \\ x_0=\dfrac{-5}{2}\Rightarrow y_0=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$

Vậy có hai điểm thoả yêu cầu bài toán là $M_1\left(\dfrac{-3}{2};\dfrac{5}{2}\right)$ và $M_2\left(\dfrac{-5}{2};\dfrac{-5}{2}\right)$

$T=a+b+c+d=\dfrac{-3}{2}+\dfrac{5}{2}+\dfrac{-5}{2}+\dfrac{-5}{2}=-4$

Câu 105. Có bao nhiêu giá trị của m để đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{x}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB=\sqrt{6}$?

Lời giải

Tọa độ A,B thỏa: $\dfrac{x^2-1}{x}=-x+m\Leftrightarrow 2x^2-mx-1=0,\ (x\neq 0)\ (1)$

Ta thấy (1) có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 khác 0 với mọi m.

Gọi $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2) \Rightarrow AB^2 = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 = 2(x_1-x_2)^2$

Áp dụng định lí viet cho phương trình (1) ta có được:

$$AB^2 = 2\left[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2\right] = \frac{m^2}{2} + 4$$

$$AB = 6 \Leftrightarrow \frac{m^2}{2} + 4 = 6 \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

Câu 106. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-m^2}{x+1}$ có đồ thị (C_m), trong đó m là tham số thực. Đường thẳng $d: y = m - x$ cắt (C_m) tại hai điểm $A(x_A;y_A), B(x_B;y_B)$ với $x_A < x_B$; đường thẳng $d': y = 2-m-x$ cắt (C_m) tại hai điểm $C(x_C;y_C), D(x_D;y_D)$ với $x_C < x_D$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $x_A.x_D = -3$. Số phần tử của tập S bằng bao nhiêu?

Lời giải

Hoành độ điểm A và B là nghiệm phương trình: $2x - m^2 = (x+1)(m-x)$

$\Leftrightarrow x^2 + (3-m)x - m^2 - m = 0$ suy ra $x_A.x_B = -m^2 - m; x_A + x_B = m - 3$

Hoành độ điểm C và D là nghiệm phương trình: $2x - m^2 = (x+1)(2-m-x)$

$\Leftrightarrow x^2 + (m+1)x - m^2 + m - 2 = 0$ suy ra $x_C.x_D = -m^2 + m - 2; x_C + x_D = -m - 1$

Mặc khác x_A và x_D là nghiệm của phương trình: $x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = -3 \\ x_D = 1 \end{array}\right.$. Suy ra

$$m^2 + 6m + 9 = 5m^2 - 2m + 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right..$$

Câu 107. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + m^2 - 2m - 4}{x-2}$ (1). Tìm giá trị m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị cách đều đường thẳng $\Delta: 2x + y + 1 = 0$.

Lời giải

Đạo hàm: $y' = \dfrac{x^2 - 4x + 4 - m^2}{(x-2)^2}$.

Dấu của y' là dấu của $g(x) = x^2 - 4x + 4 - m^2$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - 4 + m^2 = m^2 > 0 \\ 4 - 8 + 4 - m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Nghiệm của phương trình $g(x) = 0$ là $x_1 = 2 - m$ hoặc $x_2 = 2 + m$.

Suy ra hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(2-m;\ 4-m)$, $B(2+m;\ 4+3m)$

$d(A,\Delta)=\dfrac{|9-3m|}{\sqrt{5}}$; $d(B,\Delta)=\dfrac{|9+5m|}{\sqrt{5}}$.

$d(A,\Delta)=d(B,\Delta)\Leftrightarrow|9-3m|=|9+5m|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}9-3m=9+5m\\9-3m=-9-5m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-9\end{array}\right.$

So với điều kiện $m\neq 0$ nhận $m=-9$.

Câu 108. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+(m+1)x+m+1}{x+1}$. Gọi $A;B$ là hai điểm cực trị, tìm tham số m để diện tích ΔOAB bằng 2.

Lời giải

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

* Ta có: $y'=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2};\ \forall x\neq -1$. Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=m+1\\x=-2\Rightarrow y=m-3\end{array}\right.$.

Do đó hai điểm cực trị là $A(0;m+1);B(-2;m-3)$.

* Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{OA}=(x_A-x_O;y_A-y_O)=(0;m+1)\Rightarrow OA=\sqrt{(0)^2+(m+1)^2}=|m+1|\\\overrightarrow{OB}=(x_B-x_O;y_B-y_O)=(-2;m-3)\Rightarrow OB=\sqrt{(-2)^2+(m-3)^2}=\sqrt{m^2-6m+13}\end{cases}$.

$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(OA.OB)^2-\left(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(m+1)^2(m^2-6m+13)-\left[(m-1)(m-3)\right]^2}=|m+1|$.

* Mà $S_{\Delta ABC}=2\Leftrightarrow|m+1|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-3\\m=1\end{array}\right.$.

Câu 109. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2mx+5}{x-1}$. Tìm tham số thực m để hàm số có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị này nằm về hai phía so với đường thẳng $\Delta: y=2x$.

Lời giải

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

* Để hàm số có hai cực trị thì $y'=\dfrac{-x^2+2x-(2m-5)}{(x-1)^2}=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2\neq 1$.

$\Leftrightarrow g(x)=-x^2+2x-(2m-5)=0\ (1)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2\neq 1$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+2x-(2m-5)=0\ \ (co\ nghiem)\\ g(1)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{cases}a=-1\neq 0\\\Delta'=-2m+6>0\end{cases}\Leftrightarrow m<3\ (2)\\-2m+6\neq 0\end{cases}$.

* Gọi hoành độ cực trị của hàm số là x_1,x_2, nó cũng chính là 2 nghiệm của phương trình (1).

* Theo định lý Viet: $S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=2;\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}=2m-5\ \ (3)$

* Giả sử $M\left(x_1;y_1\right),N\left(x_2;y_2\right)$ là các điểm cực trị của hàm số. Ta có: $y_1=-2x_1+2m;\ y_2=-2x_2+2m$.

(thay vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị)

* Để hai điểm cực trị $M\left(x_1;y_1\right),N\left(x_2;y_2\right)$ nằm về hai phía so với đường thẳng $\Delta: y=2x$ thì:

$\left(2x_1-y_1\right)\left(2x_2-y_2\right)<0\Leftrightarrow\left(4x_1-2m\right)\left(4x_2-2m\right)<0\Leftrightarrow 16x_1x_2-8m\left(x_1+x_2\right)+4m^2<0\ \left(4\right)$.

* Thay (3) vào (4), ta được: $16\left(2m-5\right)-8m.2+4m^2<0\Leftrightarrow m^2+4m-20<0$

$\Leftrightarrow -2-2\sqrt{6}<m<-2+2\sqrt{6}$

* So với $\left(2\right)$, ta được: $-2-2\sqrt{6}<m<-2+2\sqrt{6}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 110. Tìm các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{x^2-\left(m+1\right)x-m^2+4m-2}{x-1}$ có cực đại và cực tiểu, đồng thời tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

* Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi:

$y'=\dfrac{x^2-2x+m^2-3m+3}{\left(x-1\right)^2}=0\Leftrightarrow g(x)=x^2-2x+m^2-3m+3=0\ \left(1\right)$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1;x_2\neq 1\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\neq 0\\ \Delta'=-m^2+3m-2>0\\ g\left(1\right)=m^2-3m+2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow 1<m<2\ \ \left(2\right).$$

* Gọi $A\left(x_1;y_1\right);B\left(x_2;y_2\right)$ là các điểm cực trị của hàm số thì $x_1;x_2$ là nghiệm của $g\left(x\right)=0$.

* Khi đó: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=1-\sqrt{-m^2+3m-2}\Rightarrow y_1=1-m+2\sqrt{-m^2+3m-2}\\ x_2=1+\sqrt{-m^2+3m-2}\Rightarrow y_2=1-m-2\sqrt{-m^2+3m-2}\end{array}\right.$.

* Ta có: $y_1.y_2=\left(1-m+2\sqrt{-m^2+3m-2}\right)\left(1-m-2\sqrt{-m^2+3m-2}\right)$.

$$=\left(1-m\right)^2-4\left(-m^2+3m-2\right)=5m^2-14m+9=5\left(m-\frac{7}{5}\right)^2-\frac{4}{5}\geq-\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow\left(y_1.y_2\right)_{\min}=-\frac{4}{5}\ khi\ m=\frac{7}{5}$$

* So lại với điều kiện $\left(2\right)\Rightarrow m=\dfrac{7}{5}$ là giá trị cần tìm.

CHỦ ĐỀ 4
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN THỰC TIỄN

Phương pháp chung

- **Bước 1:** Chọn đặt biến x, kèm điền kiện tồn tại x.
- **Bước 2:** Dựa vào giả thiết và các quan hệ bài toán để xác lập hàm số chứa ẩn x.
- **Bước 3:** Dựa vào hàm đã xác lập để giải quyết yêu cầu bài toán đưa ra.

Chú ý

• Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v = s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian).

Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật: $a = v'(t) = s''(t)$

• Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hóa học tại thời điểm t, thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất điểm đó tại thời điểm t.

• Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t, thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t.

• Nếu $C = C(x)$ là **hàm chi phí** , tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hóa, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên. Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hóa tiếp theo, tức là đơn vị hàng hóa thứ $x+1$.

• Gọi $p(x)$ là giá bán mỗi đơn vị mà công ty có thể tính nếu bán x đơn vị. Khi đó, p được gọi là **hàm cầu** (hay **hàm giá**) và chúng ta mong đợi đó là một hàm giảm của x. Nếu x đơn vị được bán và giá mỗi đơn vị là $p(x)$ thì tổng doanh thu là $R(x) = x.p(x)$ và $R(x)$ được gọi là **hàm doanh thu**. Đạo hàm $R'(x)$ của hàm doanh thu được gọi là hàm doanh thu biên và là tốc độ thay đổi của doanh thu đối với số lượng đơn vị sản phẩm bán ra.

• Nếu x đơn vị được bán thì tổng lợi nhuận là $P(x) = R(x) - C(x)$ và $P(x)$) được gọi là hàm lợi nhuận. Hàm lợi nhuận biên là đạo hàm $P'(x)$ của **hàm lợi nhuận**.

PHẦN A

TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

PHẦN A

TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

- Nếu phương trình chuyển động của vật là $s = f(t)$ thì $v(t) = f'(t)$ là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t.
- Một vật chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) là gia tốc tức thời của chuyển động. Ta có: $a(t) = f''(t)$.

Bài 1. Một chất điểm chuyển động thẳng, chiều dương hướng theo chiều chuyển động và điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = -t^3 + 6t^2$, $t \geq 0$ với t là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $s(t)$ là quãng đường đi được trong khoảng thời gian t.

a) Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 2$.

b) Tính vận tốc và gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3$

c) Chất điểm tăng tốc và giảm tốc trong khoảng thời gian nào?

d) Thời điểm nào chất điểm có vận tốc đạt giá trị lớn nhất?

Bài 2. Một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $s(t) = 6t^2 - 2t^3$, $(t \geq 0)$

a) Sau khi hạt chuyển động, thời điểm nào thì vận tốc của hạt bằng 0?

b) Khi nào hạt chuyển động lên trên và khi nào hạt chuyển động xuống dưới?

c) Hỏi trong khoảng 6 giây kể từ lúc vật bắt đầu chuyển động vận tốc lớn nhất của hạt là bao nhiêu?

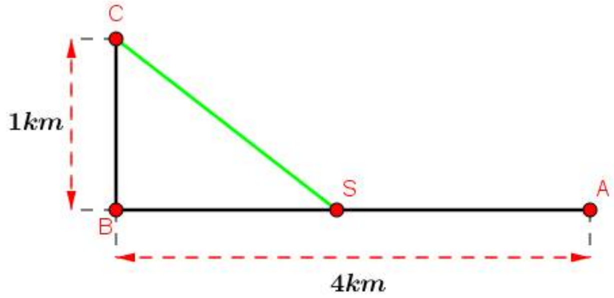
Bài 3. Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s = -t^3 + 6t^2 + 17t$, với $t(s)$ là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $s(m)$ là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Trong khoảng thời gian 8 giây đầu tiên, vận tốc $v(m/s)$ của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng?

DẠNG 2
CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN QUÃNG ĐƯỜNG ĐI

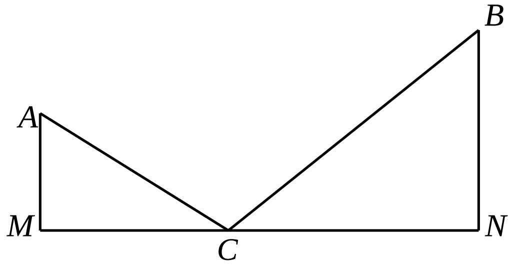
Bài 1. Một công ty điện lực cần nối một đường dây điện từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C như hình vẽ. Biết khoảng cách ngắn nhất từ C đến B là 1 km và khoảng cách từ B đến A là 4 km. Mỗi km dây điện đặt dưới nước là mất 5000 USD, còn đặt dưới đất mất 3000 USD.

a) Hỏi điểm S trên bờ cách A bao nhiêu để khi mắc dây điện từ A qua S rồi đến C là ít tốn kém nhất.

b) Hỏi chi phí mà công ty điện lực cần bỏ ra ít tốn kém nhất là bao nhiêu?

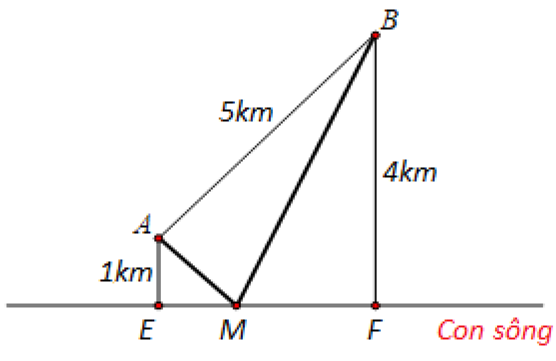


Bài 2. Người ta định xây dựng một trạm biến áp 110 Kv tại ô đất C cạnh đường quốc lộ MN để cấp điện cho hai khu công nghiệp A và B như hình vẽ.



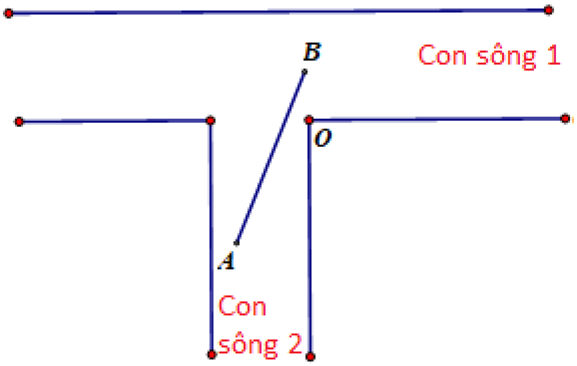
Hai khu công nghiệp A và B cách quốc lộ lần lượt là $AM = 3km$, $BN = 6km$. Biết rằng quốc lộ MN có độ dài $12km$. Hỏi phải đặt trạm biến áp cách khu công nghiệp A bao nhiêu km để tổng chiều dài đường dây cấp điện cho hai khu công nghiệp A và B là ngắn nhất.

Bài 3. Bác Hùng đang ở tháp canh kiểm soát cháy rừng được đặt ở vị trí A, nhìn thấy đám cháy ở vị trí B, cách vị trí A khoảng $5km$. Cách vị trí A và B lần lượt $1km$, $4km$ có một con sông, bác Hùng cần đi đến vị trí điểm M ở bờ sông để lấy nguồn nước rồi đến vị trí B để dập tắt đám cháy (như hình vẽ). Tính khoảng cách ngắn nhất mà Bác Hùng cần đi để dập tắt đám cháy (kết quả làm tròn đến hàng chục).

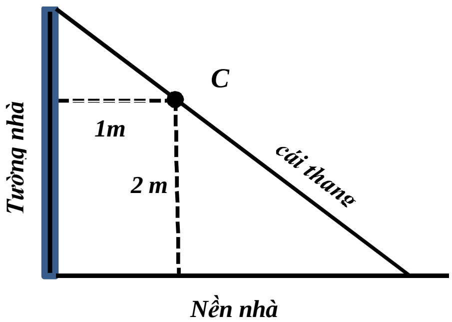


Bài 4. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là $200km$. Vận tốc của dòng nước là $8km/h$. nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v(km/h)$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức: $E(v)=cv^3t$ (trong đó c là một hằng số, E được tính bằng jun). Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.

Bài 5. Một con sông 1 thông với con sông 2, bờ của con sông 1 vuông góc với bờ của con sông 2 (như hình vẽ). Chiều rộng của hai con sông bằng nhau và bằng $8m$. Một thanh gỗ AB, thiết diện nhỏ không đáng kể trôi từ mương 1 sang mương 2. Độ dài lớn nhất của thanh gỗ AB (Làm tròn kết quả đến phần chục) sao cho AB khi trôi không bị vướng là bao nhiêu?



Bài 6. Thầy Thanh cần sản xuất một cái thang để trèo qua một bức tường nhà. Thầy Thanh muốn cái thang phải luôn được đặt qua vị trí C, biết rằng điểm C cao $2m$ so với nền nhà và điểm C cách tường nhà $1m$ (như hình vẽ bên).



Giả sử kinh phí để sản xuất thang là 300.000 đồng/1 mét dài. Hỏi thầy Thanh cần ít nhất bao nhiêu tiền để sản xuất thang? (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng).

DẠNG 3
CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN KINH DOANH

Bài 1. Giả sử chi phí (tính bằng trăm nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị hàng hóa nào đó là: $C\left(x\right)=23000+50x-0,5x^2+0,00175x^3$. Biết hàm chi phí biên là $C'\left(x\right)$.

a) Tìm hàm chi phí biên.

b) Tìm C'(100) và giải thích ý nghĩa của nó.

c) So sánh C'(100) với chi phí sản xuất đơn vị hàng hóa thứ 101.

Bài 2. Giả sử hàm cầu đối với một loại hàng hóa được cho bởi công thức $p=\dfrac{354}{1+0,01x}$, $x\ge 0$, trong đó p là giá bán (nghìn đồng) của mỗi đơn vị sản phẩm và x là số lượng đơn vị sản phẩm đã bán.

a) Tìm công thức tính x như là hàm số của p. Tìm tập xác định của hàm số này. Tính số đơn vị sản phẩm đã bán khi giá bán của mỗi đơn vị sản phẩm là 240 nghìn đồng.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số x = x(p). Từ đồ thị đã vẽ, hãy cho biết:

- Số lượng đơn vị sản phẩm bán được sẽ thay đổi thế nào khi giá bán p tăng;
- Ý nghĩa thực tiễn của giới hạn $\lim\limits_{p\to 0^+} x\left(p\right)$.

Bài 3. Trung tâm thương mại Center Nha Trang có 50 gian hàng cho thuê bán hàng. Biết rằng nếu cho thuê mỗi gian hàng với giá $2\,000\,000$ đồng một tháng thì mọi gian hàng đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi gian hàng thêm $50\,000$ đồng một tháng thì có thêm một gian hàng bị bỏ trống.

a) Số lần tăng giá gian hàng nằm trong khoảng nào thì tổng doanh thu cho thuê gian hàng của trung tâm thương mại Center sẽ giảm so với ban đầu khi chưa tăng giá gian hàng.

b) Hỏi thu nhập cao nhất của trung tâm thương mại Center có thể đạt được trong 1 tháng là bao nhiêu?

Bài 4. Chị Mai xây dựng 32 phòng trọ cho sinh viên trường Đại Học Nha Trang thuê. Biết giá cho thuê mỗi tháng là $2.000.000$ đồng trên 1 phòng trọ, thì không có phòng trống. Nếu cứ tăng giá mỗi phòng trọ lên 200.000 đồng trên 1 tháng, thì sẽ có 2 phòng bị bỏ trống.

a) Số lần tăng giá phòng trọ nằm trong khoảng nào thì tổng doanh thu cho thuê phòng trọ của chị Mai sẽ tăng so với ban đầu khi chưa tăng giá phòng trọ.

b) Hỏi chị Mai sẽ cho thuê phòng trọ với giá là bao nhiêu để có thu nhập mỗi tháng cao nhất?

Bài 5. Một cơ sở sản xuất khăn mặt tại Nha Trang đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiế**c.** Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18000. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.

Bài 6. Doanh nghiệp tư nhân Thành Đạt – Nha Trang chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay, doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe honda Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 (triệu đồng) và bán với giá 31 (triệu đồng) mỗi chiếc. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 (triệu đồng) mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp Thành Đạt phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất?

Bài 7. Giả sử rằng mối quan hệ giữa nhu cầu thị trường và sản lượng gạo của một doanh nghiệp X được cho theo hàm $Q_D = 656 - \frac{1}{2}P$ với Q_D là lượng gạo thị trường cần và P là giá bán cho một tấn gạo. Chi phí cho việc sản xuất được cho theo hàm $C(Q) = Q^3 - 77Q^2 + 1000Q + 100$ với C là chi phí doanh nghiệp X bỏ ra, Q (tấn) là lượng gạo sản xuất được trong một đơn vị thời gian. Để đạt lợi nhuận cao nhất thì doanh nghiệp X cần sản xuất lượng gạo bao nhiêu?

Bài 8. Mỗi chuyến xe buýt của hãng xe Phương Trang có sức chứa tối đa là 50 hành khách. Nếu một chuyến xe buýt chở x hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là $20\left(3 - \frac{x}{40}\right)^2$ (nghìn đồng). Hỏi mỗi chuyến xe buýt chở bao nhiêu hành khách thì hãng xe Phương Trang thu được số tiền nhiều nhất?

Bài 9. Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật Logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \frac{5000}{1+5e^{-t}}, t \geq 0,$ trong đó thời gian

t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

Bài 10. Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức: $N(t)=1000+\frac{100t}{100+t^2}(\text{con}),$ trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

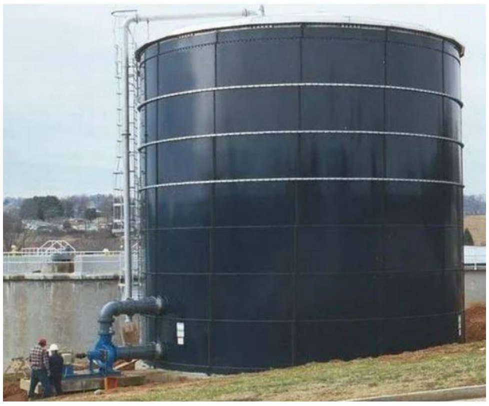
DẠNG 4
CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN HÌNH HỌC VÀ MỘT SỐ DẠNG KHÁC

Bài 1. Người ta muốn mạ vàng cho bề mặt phía ngoài của một cái hộp dạng hình hộp đứng không nắp (nắp trên), có đáy là một hình vuông và thể tích của hộp đứng là $8\ dm^3$.

a) Cạnh đáy của hình vuông thuộc khoảng nào thì tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của hình hộp đứng không nắp giảm?

b) Tìm chiều cao của hộp để lượng vàng phải dùng để mạ là ít nhất, biết lớp mạ ở mọi nơi như nhau, giao giữa các mặt là không đáng kể.

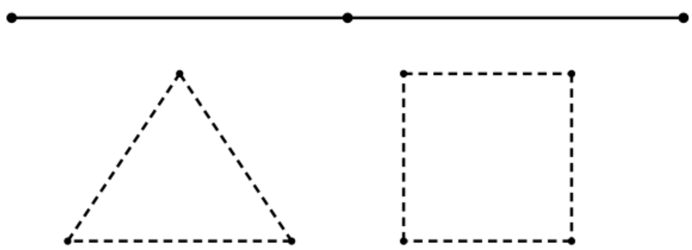
Bài 2. Một công ty xăng dầu cần làm một thùng chứa dạng hình trụ kín, có thể tích $5000m^3$. Vật liệu để làm hai đáy có giá 250000 đồng trên m^2, vật liệu làm phần còn lại có giá 400000 đồng trên m^2.



a) Bán kính đáy của hình trụ thuộc khoảng nào thì tổng chi phí làm thùng chứa sẽ giảm?

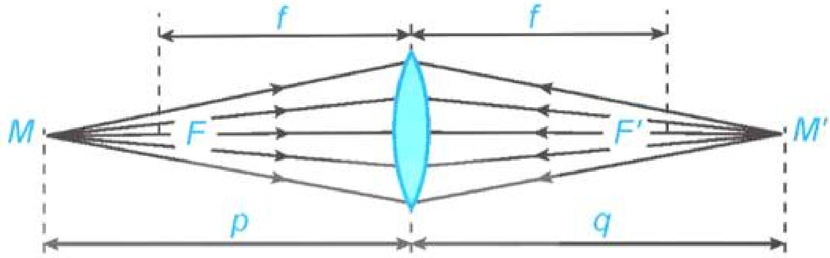
b) Tìm chiều cao của hình trụ để tổng chi phí nhỏ nhất.

Bài 3. Cắt một đoạn dây dài 60m thành hai đoạn dây, đoạn dây thứ nhất gấp thành một tam giác đều có diện tích S_1, đoạn dây thứ hai gấp thành một hình vuông có diện tích S_2 (như hình vẽ dưới)



Khi đó giá trị nhỏ nhất của tổng $T = S_1 + S_2$ là bao nhiêu?

Bài 4. Xét một thấu kính hội tụ có tiêu cự f (hình vẽ). Khoảng cách p từ vật đến thấu kính liên hệ với khoảng cách q từ ảnh đến thấu kính bởi hệ thức: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$.



a) Viết công thức tính $q = g(p)$ như một hàm số của biến $p \in (f; +\infty)$.

b) Tính các giới hạn $\lim_{p \to +\infty} g(p); \lim_{p \to f^+} g(p)$ và giải thích ý nghĩa các kết quả này.

c) Lập bảng biến thiên của hàm số $q = g(p)$ trên khoảng $(f; +\infty)$

PHẦN B

TRẮC NGHIỆM GỒM BA PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Một vật chuyển động theo quy luật $s=\frac{1}{3}t^3-t^2+9t,$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. $9\,m/s$. **B.** $8\,m/s$. **C.** $89\,m/s$ **D.** $100\,m/s$.

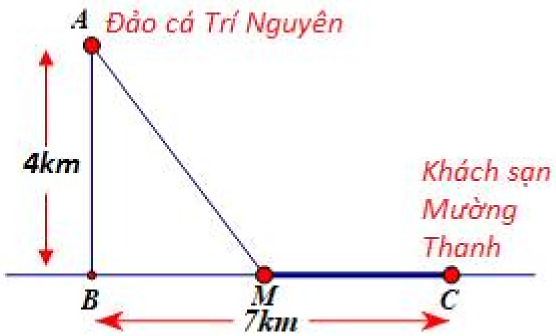
Câu 2. Một đoàn tàu chuyển động thẳng khởi hành từ một nhà ga. Quảng đường s (mét) đi được của đoàn tàu là một hàm số của thời gian t (giây), hàm số đó là $s=6t^2-t^3,(t>0)$. Thời điểm t (giây) nào mà tại đó gia tốc của tàu bằng 0 ?

A. $t=1s$. **B.** $t=2s$. **C.** $t=3s$. **D.** $t=4s$.

Câu 3. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t)=1+3t^2-t^3$. Vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi t bằng bao nhiêu

A. $t=2$. **B.** $t=1$. **C.** $t=3$. **D.** $t=4$.

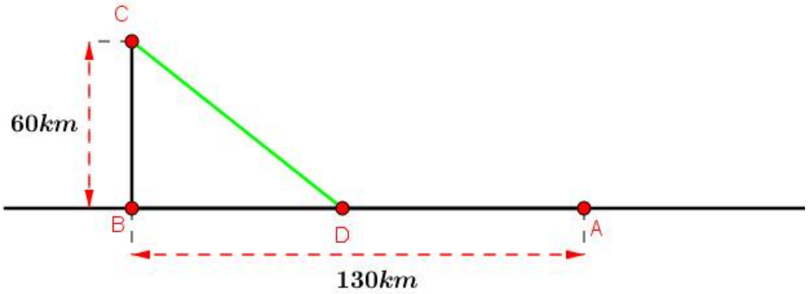
Câu 4. Đảo cá Trí Nguyên Nha Trang ở vị trí A cách đường Trần Phú một khoảng $AB=4(km)$. Trên đường Trần Phú có khách sạn Mường Thanh ở vị trí C cách B một khoảng $BC=7(km)$ (như hình vẽ).



Bạn Minh Hiền phải đi ca nô từ vị trí Đảo cá Trí Nguyên đến vị trí M trên đường Trần Phú với vận tốc $6(km/h)$ rồi đi xe taxi từ M đến khách sạn Mường Thanh với vận tốc $10(km/h)$. Xác định khoảng cách từ M đến khách sạn Mường Thanh để bạn Minh Hiền đi từ Đảo cá Trí Nguyên đến khách sạn Mường Thanh là nhanh nhất.

A. $6km$. **B.** $3km$. **C.** $4km$. **D.** $9km$.

Câu 5. Một kho hàng được đặt tại ví trí A trên bến cảng cần được chuyển tới kho C trên một đảo, biết rằng khoảng cách ngắn nhất từ kho C đến bờ biển AB bằng độ dài $CB=60\,km$ và khoảng cách giữa 2 điểm A, B là $AB=130\,km$ (như hình vẽ). Chi phí để vận chuyển toàn bộ kho hàng bằng đường bộ là 300.000 đồng/km, trong khi đó chi phí vận chuyển hàng bằng đường thủy là 500.000 đồng/km. Hỏi phải chọn điểm trung chuyển hàng D (giữa đường bộ và đường thủy) cách kho A một khoảng bằng bao nhiêu thì tổng chi phí vận chuyển hàng từ kho A đến kho C là ít nhất?



A. $45km$. **B.** $65km$. **C.** $85km$. **D.** $105km$.

Câu 6. Chi phí về nhiên liệu của một tàu hỏa được chia làm hai phần. Trong đó phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 ngàn đồng/giờ. Phần thứ hai tỷ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi v = 10km/h thì phần thứ hai bằng 30 ngàn đồng/giờ. Hãy xác định vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

A. $15(km/h)$ **B.** $10(km/h)$ **C.** $20(km/h)$ **D.** $5(km/h)$

Câu 7. Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu P (tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số $P(t)=\dfrac{25t^2+125}{t^2+1}$, $(0\le t\le 10)$, trong đó thời gian t được tính bằng giây. Tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây kể từ khi máu rời tim là:

A. $\dfrac{375}{13}$. **B.** $\dfrac{125}{13}$. **C.** $\dfrac{250}{169}$. **D.** $\dfrac{375}{169}$.

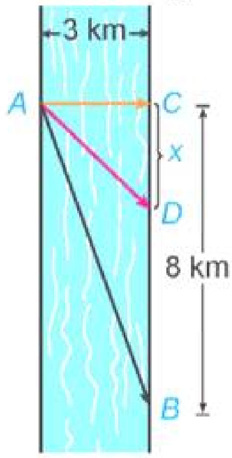
Câu 8. Người quản lí của một khu chung cư có 100 căn hộ cho thuê nhận thấy rằng tất cả các căn hộ sẽ có người thuê nếu giá thuê một căn hộ là 8 triệu đồng một tháng. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thuê căn hộ thêm 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Người quản lí nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là bao nhiêu để doanh thu là lớn nhất?

A. 800 000 000 (đồng). **B.** 8 100 000 (đồng).
C. 8 000 000 (đồng). **D.** 9 000 000 (đồng).

Câu 9. Một đội bóng đá thi đấu trong một sân vận động có sức chứa 55 000 khán giả. Với giá mỗi vé là 100 nghìn đồng, số khán giả trung bình là 27 000 người. Qua thăm dò dư luận, người ta thấy rằng mỗi khi giá vé giảm thêm 10 nghìn đồng, sẽ có thêm khoảng 3000 khán giả. Hỏi ban tổ chức nên đặt giá vé là bao nhiêu để doanh thu từ tiền bán vé là lớn nhất?

A. 100 000 (đồng). **B.** 80 000 (đồng). **C.** 90 000 (đồng). **D.** 95 000 (đồng).

Câu 10. Anh An chèo thuyền từ điểm A trên bờ một con sông thẳng rộng 3 km và muốn đến điểm B ở bờ đối diện cách 8 km về phía hạ lưu càng nhanh càng tốt (hình vẽ). Anh An có thể chèo thuyền trực tiếp qua sông đến điểm C rồi chạy bộ đến B, hoặc anh có thể chèo thuyền thẳng đến B, hoặc anh cũng có thể chèo thuyền đến một điểm D nào đó giữa C và B rồi chạy bộ đến B. Nếu vận tốc chèo thuyền là 6 km/h và vận tốc chạy bộ là 8 km/h thì anh An phải chèo thuyền sang bờ ở điểm nào để đến được B càng sớm càng tốt? (Giả sử rằng vận tốc của nước là không đáng kể so với vận tốc chèo thuyền của anh An).



A. Anh An phải chèo thuyền đến điểm D cách C một đoạn $8\,\text{km}$ thì sẽ đến B sớm nhất.

B. Anh An phải chèo thuyền đến điểm D cách C một đoạn $\dfrac{9\sqrt{7}}{7}$ km thì sẽ đến B sớm nhất..

C. Anh An phải chèo thuyền đến điểm D cách C một đoạn $3\sqrt{7}$ km thì sẽ đến B sớm nhất..

D. Anh An phải chèo thuyền đến điểm D cách C một đoạn $\dfrac{\sqrt{73}}{6}$ km thì sẽ đến B sớm nhất..

Câu 11. Từ một bờ tường có sẵn, người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 100 m thẳng hàng rào. Vậy làm thế nào để rào khu đất ấy theo hình chữ nhật sao cho có diện tích lớn nhất? Khi đó, chiều dài và chiều rộng hình chữ nhật là

A. 50 và 50 **B.** 30 và 20 **C.** 75 và 25 **D.** 25 và 25

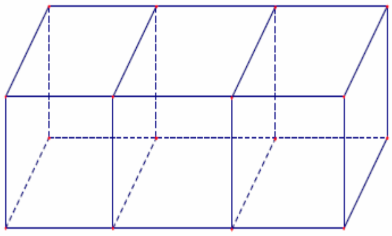
Câu 12. Một xưởng cơ khí nhận làm những chiếc thùng phi chứa dầu với thể tích theo yêu cầu là 2000π lít mỗi chiếc. Hỏi bán kính đáy và chiều cao của thùng lần lượt bằng bao nhiêu để tiết kiệm vật liệu nhất?

A. $1m$ và $2m$ **B.** $1dm$ và $2dm$ **C.** $2m$ và $1m$ **D.** $2dm$ và $1dm$

Câu 13. Thầy Tiến muốn xây một bể chứa nước dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích $200m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công xây bể là 500.000 đồng/m^2. Hỏi thầy Tiến cần tốn chi phí thuê công nhân thấp nhất là bao nhiêu?

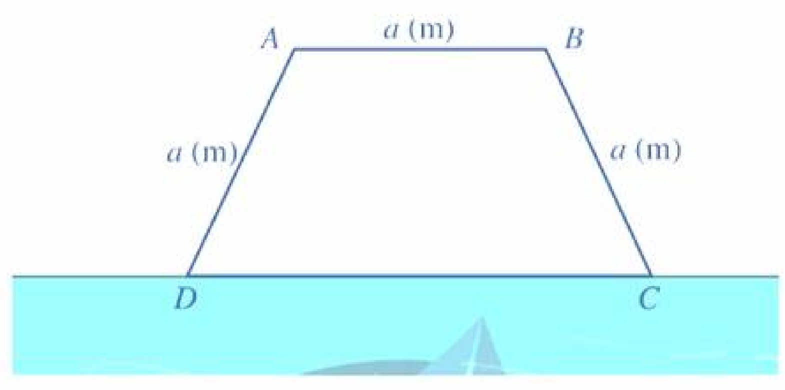
A. 85 triệu đồng. **B.** 50 triệu đồng. **C.** 100 triệu đồng. **D.** 120 triệu đồng.

Câu 14. Một người xây nhà xưởng hình hộp chữ nhật có diện tích mặt sàn là 1152m^2 và chiều cao cố định. Người đó xây các bức tường xung quanh và bên trong để ngăn nhà xưởng thành ba phòng hình chữ nhật có kích thước như nhau (không kể trần nhà). Vậy cần phải xây các phòng theo kích thước nào để tiết kiệm chi phí nhất (bỏ qua độ dày các bức tường).



A. $24\text{m}\times 32\text{m}$. **B.** $8\text{m}\times 48\text{m}$. **C.** $12\text{m}\times 32\text{m}$. **D.** $16\text{m}\times 24\text{m}$.

Câu 15. Một bác nông dân có ba tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài a (m) và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ (bờ sông là đường thẳng CD không phải rào). Hỏi bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?



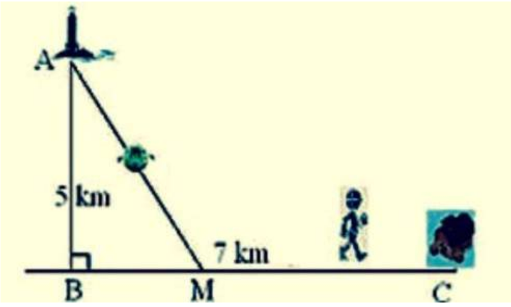
A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(m^2\right)$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\left(m^2\right)$. **C.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\left(m^2\right)$. **D.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}\left(m^2\right)$.

Câu 16. Bác Nam chia đất cho con trai để người con xây dựng nhà xưởng kinh doanh, biết người con sẽ được chọn miếng đất hình chữ nhật có chu vi bằng $800m$. Hỏi anh ta chọn mỗi kích thước của nó bằng bao nhiêu để diện tích xây dựng nhà xưởng kinh doanh lớn nhất?

A. $150m \times 250m$ **B.** $200m \times 200m$ **C.** $100m \times 300m$ **D.** $140m \times 260m$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 17. Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A có khoảng cách đến bờ biển $AB = 5\text{km}$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng 7km (như hình vẽ).



Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến M trên bờ biển với vận tốc 4km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6km/h. Gọi $x(km)$ là khoảng cách từ B đến M, với $0 \le x \le 7$.

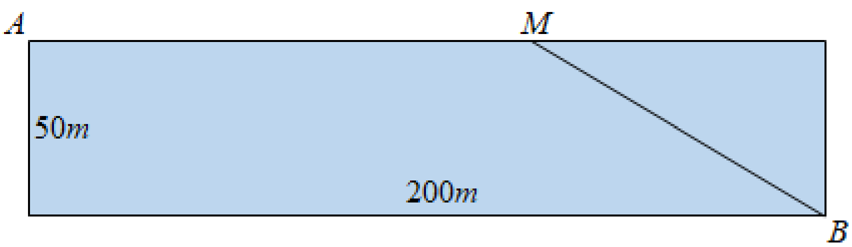
a) Thời gian người canh hải đăng chèo đò từ A đến M là: $\dfrac{\sqrt{x^2+25}}{6}(h)$.

b) Thời gian người canh hải đăng đi bộ đi bộ từ M đến C là: $\dfrac{7-x}{4}(h)$.

c) Thời gian người canh hải đăng đi từ A đến kho C là: $\dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4}+\dfrac{7-x}{6}$.

d) Vị trí của điểm M cách B một khoảng $2\sqrt{5}km$ thì người canh hải đăng đi đến kho nhanh nhất.

Câu 18. Có một bể bơi hình chữ nhật rộng $50m$, dài $200m$. Một vận động viên chạy phối hợp với bơi như sau: Xuất phát từ điểm A, chạy đến điểm M và bơi từ điểm M đến điểm B (như hình vẽ). Biết vận tốc chạy $4{,}8m/s$, vận tốc bơi $2{,}4m/s$. Gọi $x(m)$ là khoảng cách từ A đến M, với $0 \le x \le 200$.



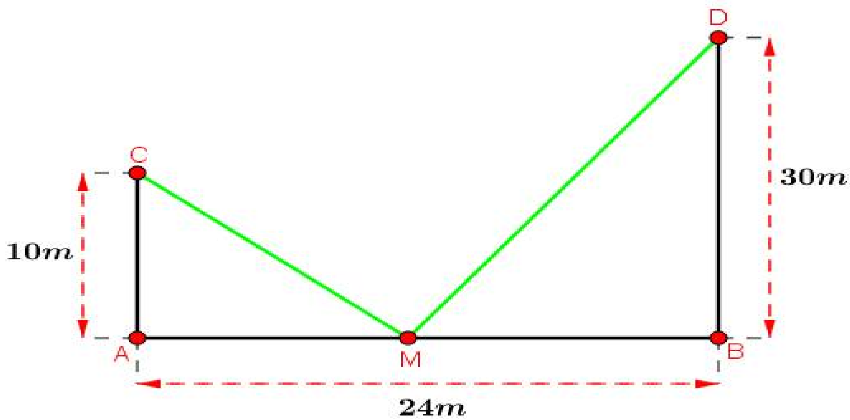
a) Thời gian vận động viên chạy từ A đến M là: $\dfrac{\sqrt{(200-x)^2+50^2}}{4{,}8}(s)$

b) Thời gian vận động viên bơi từ M đến B là: $\dfrac{x}{2{,}4}(s)$

c) Thời gian vận động viên chạy phối hợp với bơi từ A đến B: $\dfrac{\sqrt{(200-x)^2+50^2}}{4{,}8}+\dfrac{x}{2{,}4}(s)$

d) Vận động viên chọn điểm M cách A gần bằng 29 mét thì đến B nhanh nhất (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 19. Nhà Văn hóa Thanh niên của thành phố Nha Trang muốn trang trí đèn dây led gần cổng để đón ngày Quốc Khánh $2-9$ nên đã nhờ bạn Nam đến giúp. Ban giám đốc Nhà Văn hóa Thanh niên chỉ cho bạn Nam biết chỗ chuẩn bị trang trí đã có hai trụ đèn cao áp mạ kẽm đặt cố định ở vị trí A và B có độ cao lần lượt là $10m$ và $30m$, khoảng cách giữa hai trụ đèn $24m$ và cũng yêu cầu bạn Nam chọn một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất nằm giữa hai chân trụ đèn để giăng đèn dây Led nối đến hai đỉnh C và D của trụ đèn (như hình vẽ). Đặt $MB = x(m)$ với $0 \le x \le 24$.



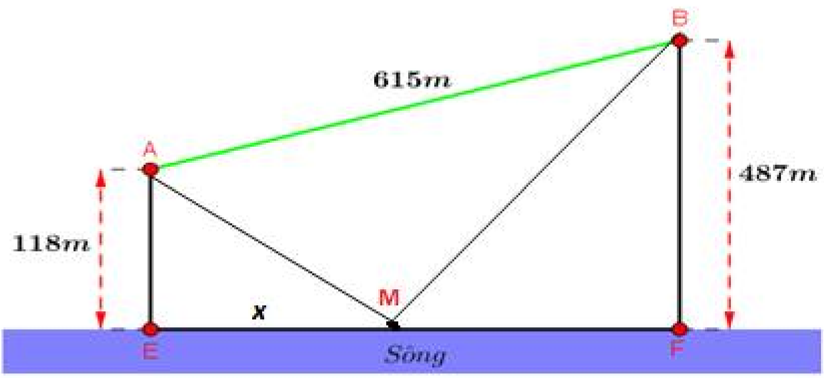
a) Chiều dài đèn dây Led giăng từ C đến chốt M rồi đến D là: $\sqrt{(24-x)^2+10^2}+\sqrt{x^2+30^2}\,(m)$

b) Khi vị trí chốt M đến trụ đèn cao áp B nằm trong khoảng $(0;18)$ thì tổng chiều dài đèn dây Led giăng từ C đến chốt M rồi đến D sẽ tăng.

c) Khi vị trí chốt M đến trụ đèn cao áp B nằm trong khoảng $(18;24)$ thì tổng chiều dài đèn dây Led giăng từ C đến chốt M rồi đến D sẽ giảm.

d) Bạn Nam phải đặt chốt M ở vị trí cách trụ đèn B trên mặt đất là $6m$ thì tổng độ dài của hai sợi dây đèn led ngắn nhất.

Câu 20. Cho hai vị trí A, B cách nhau 615m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ.



Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118m và 487m. Bạn An đi từ A đến M trên bờ sông để lấy nước và mang về B. Đặt $EM = x$, với $0 \le x \le 492$.

a) Quãng đường bạn An đi từ A đến M là: $AM = \sqrt{x^2+118^2}\,(m)$

b) Quãng đường bạn An đi từ M đến B là: $BM = \sqrt{(492-x)^2+487^2}\,(m)$

c) Thời gian vận động viên chạy phối hợp với bơi từ A đến B là: $\sqrt{x^2+118^2}+\sqrt{(492-x)^2+487^2}\,(m)$

d) Đoạn đường ngắn nhất mà bạn An phải đi A từ đến bờ sông lấy nước và mang về B là $741m$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 21. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là $400km$. Vận tốc dòng nước là $10km/h$. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v(km/h), v>10$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v)=cv^3t$, trong đó c là một hằng số, E được tính bằng jun.

a) Khi bơi ngược dòng vận tốc của cá là: $v-10(km/h)$.

b) Thời gian để cá vượt khoảng cách 400 km là $\frac{400}{v-10}(h)$.

c) Năng lượng tiêu hao của cá khi vượt khoảng cách 400km là: $400cv^3(v-10)(jun)$.

d) Khi nước đứng yên, cá phải bơi với vận tốc $18(km/h)$ thì ít tiêu hao năng lượng ít nhất.

Câu 22. Một chuyến xe buýt có sức chứa tối đa là 60 hành khách. Nếu một chuyến xe chở x hành khác thì giá cho mỗi hành khách là $\left(3-\frac{x}{40}\right)^2$ USD.

a) Số tiền thu được trong một chuyến xe buýt là : $\frac{x^3}{1600}-\frac{3}{20}x^2+9x$ (USD), với $0\le x\le 60, x\in\mathbb{N}$.

b) Nếu một chuyến xe buýt chở lượng khách trong khoảng $(0;40)$ thì thu được số tiền sẽ giảm dần.

c) Nếu một chuyến xe buýt chở lượng khách trong khoảng $(40;60)$ thì thu được số tiền sẽ tăng dần.

d) Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất bằng 40 (USD).

Câu 23. Một công ty vận tải ở Nha Trang đang dự định mở tuyến xe đi từ Nha Trang ra Đà Nẵng. Mỗi chuyến xe có sức chứa tối đa là 60 hành khách. Một chuyến xe chở x hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là $30\left(3-\dfrac{x}{40}\right)^2$ (nghìn đồng), với $0 \le x \le 60, x \in \mathbb{N}$. Chi phí vận hành mỗi chuyến xe đi từ Nha Trang ra Đà Nẵng là 3000000 (đồng).

a) Số tiền thu được từ x hành khách trong một chuyến xe là : $30x\left(3-\dfrac{x}{40}\right)^2$ (nghìn đồng)

b) Số tiền mà công ty thu được lợi nhuận nhiều nhất trong một chuyến xe là $30\left(\dfrac{x^3}{1600}-\dfrac{3}{20}x^2+9x\right)-3000000$ (nghìn đồng).

c) Để công ty thu được lợi nhuận nhiều nhất thì mỗi chuyến chở 40 hành khách.

d) Số tiền mà công ty thu được lợi nhuận nhiều nhất trong một chuyến xe là 4800000 đồng.

Câu 24. Công ty in Khatoco Khánh Hòa muốn xuất bản $x\left(x \in \mathbb{N}^*\right)$ cuốn tạp chí giới thiệu về các địa điểm Du Lịch của tỉnh Khánh Hòa. Công ty đã khảo sát, tính được chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in…) được cho bởi $C(x)=x^2-2000x+100000000$ (đồng) và chi phí phát hành (bao gồm: chi phí quảng cáo và vận chuyển đến các nhà sách) cho mỗi cuốn tạp chí là 4000 đồng.

a) Chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn tạp chí là: $\dfrac{x^2-2000x+10000000}{x}$ (đồng)

b) Nếu công ty xuất bản số tạp chí trong khoảng $(0;10000)$ cuốn thì chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn tạp chí sẽ tăng.

c) Nếu công ty xuất bản số tạp chí lớn hơn 10000 cuốn thì chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn tạp chí sẽ giảm.

d) Chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn tạp chí thấp nhất là 22000 đồng.

Câu 25. Cửa hàng Điện Máy Chợ Lớn Nha Trang bán lẻ được 2500 cái ti vi mỗi năm. Để đặt hàng về bán, chi phí cố định cho mỗi lần đặt là 2000000 (đồng) cộng thêm 900000 (đồng) mỗi cái. Mỗi lần cửa hàng đặt hàng về, một nửa số lượng đó được gởi vào kho chứa hàng, biết chi phí gởi trong kho chứa hàng là 1000000 (đồng) một cái mỗi năm. Gọi x là số ti vi mà cửa hàng đặt mỗi lần.

a) Chi phí mỗi năm gởi ti vi trong kho chứa hàng cho mỗi lần đặt hàng về bán là $500000x$ (đồng)

b) Số lần đặt hàng về bán mỗi năm là $\dfrac{2500}{x}$ (lần).

c) Chi phí mỗi lần đặt hàng về bán là $2900000.\dfrac{2500}{x}$ (đồng).

d) Cửa hàng nên đặt hàng về bán mỗi lần 500 cái ti vi để tổng chi phí mà cửa hàng phải trả cho mỗi lần đặt là nhỏ nhất.

Câu 26. Công ty bất động sản Sealand Nha Trang có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 000 000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 100 000 đồng một tháng thì có thêm hai căn hộ bị bỏ trống. Gọi x là số lần tăng giá căn hộ.

a) Mỗi lần tăng giá thì số căn hộ cho thuê là $50-x$ (căn).

b) Số tiền thuê một căn hộ sau mỗi lần tăng là: $2000000+100000x$ (đồng).

c) Tổng số tiền cho thuê căn hộ 1 tháng là: $200000\left(-x^2+5x+600\right)$ (đồng).

d) Để doanh thu lớn nhất thì công ty đặt giá thuê mỗi căn hộ là 2250000 (đồng).

Câu 27. Ban quản lí chung cư Mường Thanh Nha Trang có 150 căn hộ cho thuê, biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 5 căn hộ bị bỏ trống.

a) Gọi x là số lần tăng giá căn hộ thì số tiền thuê một căn hộ sau mỗi lần tăng là: $2000000+100000x$ (đồng), với $0<x<30$.

b) Khi số lần tăng giá căn hộ nằm trong khoảng $(0;5)$ thì tổng doanh thu sẽ giảm so với ban đầu khi chưa tăng giá căn hộ.

c) Khi số lần tăng giá căn hộ nằm trong khoảng $(5;30)$ thì tổng doanh thu sẽ tăng so với ban đầu khi chưa tăng giá căn hộ.

d) Để doanh thu lớn nhất thì công ty đặt giá thuê mỗi căn hộ là 2250000 (đồng).

Câu 28. Một quán cà phê Highland Nha Trang sắp khai trương, đang nghiên cứu thị trường để định giá bán cho mỗi cốc cà phê. Sau khi nghiên cứu, người quản lý thấy rằng nếu bán với giá 20000 đồng một cốc thì mỗi tháng trung bình sẽ bán được 2000 cốc, còn từ mức giá 20000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì sẽ bán ít đi 100 cốc. Biết chi phí nguyên vật liệu để pha một cốc cà phê không thay đổi là 18000 đồng. Gọi x là số lần tăng giá cốc cà phê, với $0<x<20$.

a) Sau x là số lần tăng giá thì số cốc cà phê bán được là $2000-x$ (cốc).

b) Chi phí nguyên vật liệu để pha cà phê mỗi tháng là $(2000-x)18000$ đồng

c) Lợi nhuận thu được mỗi tháng là: $100000\left(-x^2+18x+240\right)$ đồng

d) Quán cà phê Highland Nha Trang phải bán mỗi cốc cà phê với giá 29000 đồng thì đạt lợi nhuận lớn nhất.

Câu 29. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được xác định bởi công thức $G(x)=0,024x^2(30-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp (x được tính bằng mg). Tìm lượng thuốc để tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp để huyết áp giảm nhiều nhất.

a) Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân nằm trong khoảng $(0;20)$ mg thì huyết áp bệnh nhân sẽ tăng.

a) Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân lớn hơn 20 mg thì huyết áp bệnh nhân sẽ giảm.

c) Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là 20 mg.

d) Độ giảm huyết áp giảm nhiều nhất sau khi bệnh nhân tiêm thuốc là 96.

Câu 30. Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y=t^3-12t+3,\ (t\ge 0)$

a) Hàm vận tốc là: $v(t)=y'=3t^2-12,\ (t\ge 0)$ và hàm gia tốc là $a(t)=6t,\ (t\ge 0)$.

b) Hạt chuyển động lên trên khi $t>2$ và hạt chuyển động xuống dưới khi $t<2$.

c) Quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian $0\le t\le 3$ là 9 m.

d) Hạt tăng tốc khi $t>2$ và hạt giảm tốc khi $0<t<2$.

Câu 31. Một nhà sản xuất trung bình bán được 1000 ti vi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 14 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng, số lượng ti vi bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 ti vi mỗi tuần. Gọi p (triệu đồng) là giá của mỗi ti vi, x là số ti vi.

a) Hàm cầu là $P=-\dfrac{1}{200}x+19$ (triệu đồng).

b) Tổng doanh thu từ tiền bán ti vi là $200p^2+3800p$ (triệu đồng).

c) Công ty giảm giá 4,5 triệu đồng cho người mua thì doanh thu của công ty sẽ lớn nhất.

d) Nếu hàm chi phí hằng tuần là C(x) = 12000 – 3x (triệu đồng), trong đó x là số ti vi bán ra trong tuần, nhà sản xuất nên đặt giá bán 8 triệu đồng thì lợi nhuận là lớn nhất.

Câu 32. Dân số của một quốc gia sau t (năm) kể từ năm 2023 được ước tính bởi công thức: $N(t)=100.e^{0,012t}$ ($N(t)$ được tính bằng triệu người, $0\le t\le 50$).

a) Ước tính dân số của quốc gia này vào năm 2030 là 108,763 triệu người. (kết quả làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba).

b) Ước tính dân số của quốc gia này vào năm 2035 là 145,488 triệu người. (kết quả làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba).

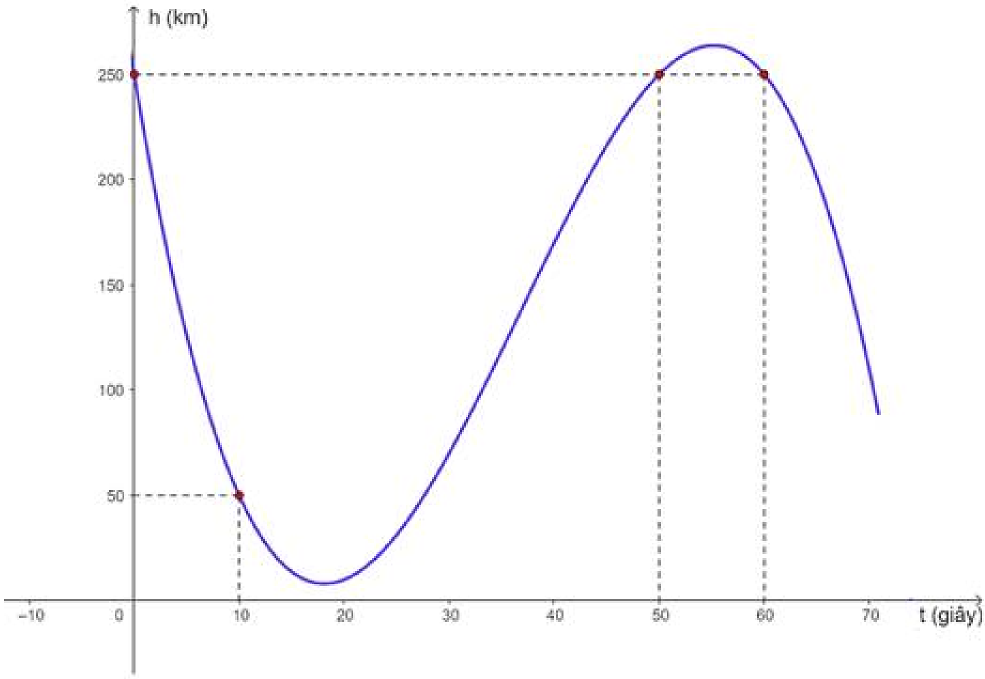
c) Xem $N(t)$ là hàm số của biến số t xác định trên đoạn $[0;50]$. Hàm số $N(t)$ luôn nghịch biến trên đoạn $[0;50]$.

d) Đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/năm). Vào năm 2046 tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm.

Câu 33. Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng. Trong khoảng 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm $h(t)=-0,01t^3+1,1t^2-30t+250$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và h là độ cao tính bằng kilômét

a) Xét thời điểm $0\le t\le 50$ thì tại thời điểm $t\approx 18$ giây thì con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng và khoảng cách nhỏ nhất này bằng 8,08 km.

b) Đồ thị của hàm số $y=h(t)$ với $0\le t\le 70$ (đơn vị trên trục hoành là 10 giây, đơn vị trên trục tung là 50 km) như sau:



c) Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t (giây) kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với $0 \le t \le 50$. Vận tốc tức thời của con tàu tại thời điểm $t = 25$ (giây) là 5,25 km/s.

d) Tại thời điểm $t = 25$ (giây), vận tốc tức thời của con tàu vẫn giảm.

Câu 34. Xét phản ứng hóa học tạo ra chất C từ hai chất A và B:

A + B → C.

Giả sử nồng độ của hai chất A và B bằng nhau $[A] = [B] = a(mol/l)$. Khi đó, nồng độ của chất C theo thời gian t (t > 0) được cho bởi công thức: $[C] = \dfrac{a^2Kt}{aKt+1}(mol/l)$

a) Nồng độ của chất A sau thời gian t là $\dfrac{a}{aKt+1}(mol/l)$

b) Nồng độ của chất B sau thời gian t là $\dfrac{a}{aKt+1}(mol/l)$

c) Tốc độ phản ứng ở thời điểm t > 0 là $\dfrac{a^2K}{aKt+1}$

d) Nếu $x = [C]$ thì $x'(t) = K(a-x)^2$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 35. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = -2t^3 + 18t^2 + 2t + 1$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Vận tốc chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu mét/giây?

Trả lời: ………………..

Câu 36. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (mét) là quãng đường vật chuyển động trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của chất điểm ở thời gian bao nhiêu giây?

Trả lời: ………………..

Câu 37. Một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $s(t) = 6t^2 - t^3$, $(t \geq 0)$. Biết trong khoảng thời gian $(a;b)$, với $a, b \in \mathbb{R}$ thì hạt chuyển động lên trên. Tính giá trị $a - b$.

Trả lời: ………………..

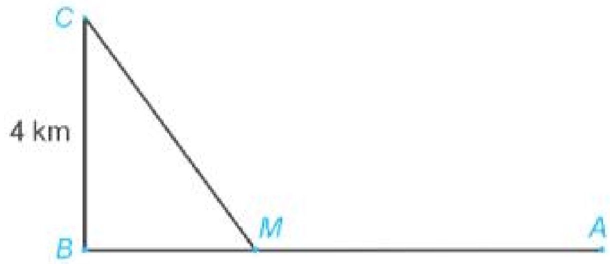
Câu 38. Một chất điểm chuyển động trong 20 giây đầu tiên có phương trình $s(t) = \frac{1}{12}t^4 - t^3 + 6t^2 + 10t$, trong đó $t > 0$ với t tính bằng giây (s) và $s(t)$ tính bằng mét (m). Hỏi tại thời gian bao nhiêu giây thì gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất?

Trả lời: ………………..

Câu 39. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$ trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Biết liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân nằm trong khoảng $(a;b)$ miligam thì huyết áp bệnh nhân giảm. Tính giá trị $a + b$.

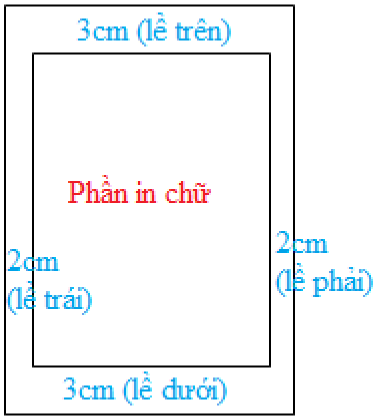
Trả lời: ………………..

Câu 40. Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C như hình vẽ. Khoảng cách từ C đến B là 4 km. Bờ biển chạy thẳng từ A đến B với khoảng cách là 10 km. Tổng chi phí lắp đặt cho 1 km dây điện trên biển là 50 triệu đồng, còn trên đất liền là 30 triệu đồng. Vị trí điểm M trên đoạn AB (điểm nối dây từ đất liền ra đảo) cách điểm B một đoạn bằng bao nhiêu km để tổng chi phí lắp đặt là nhỏ nhất?



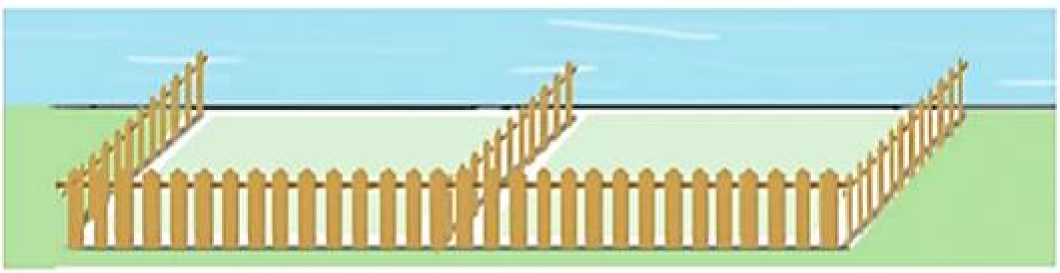
Trả lời: ………………..

Câu 41. Một trang sách có dạng hình chữ nhật với diện tích là 384 cm^2. Sau khi để lề trên và lề dưới đều là 3 cm, để lề trái và lề phải đều là 2 cm. Phần còn lại của trang sách được in chữ (như hình vẽ). Kích thước tối ưu của trang sách là $a \times b$ (cm) thì phần in chữ trên trang sách có diện tích lớn nhất. Tính giá trị $a+b$.



Trả lời: ………………..

Câu 42. Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (*Hình vẽ*). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất (m^2) của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.

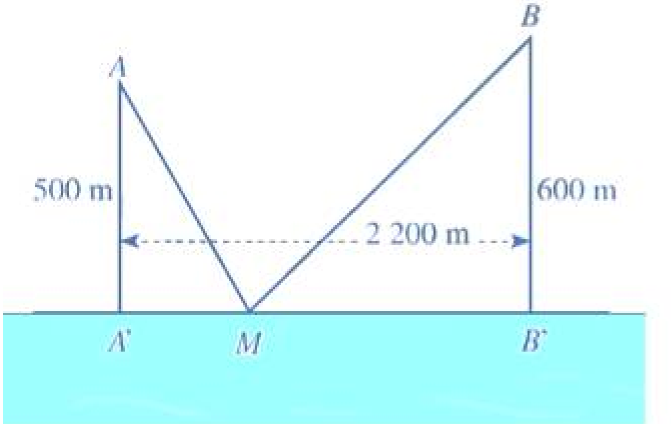


Trả lời: ………………..

Câu 43. Một công ty kinh doanh bất động sản có 20 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng/1 tháng thì tất cả các căn hộ đều có người thuê. Nhưng cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 200 nghìn đồng/1 tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi công ty nên cho thuê mỗi căn hộ bao nhiêu triệu đồng/1 tháng để tổng số tiền thu được là lớn nhất?

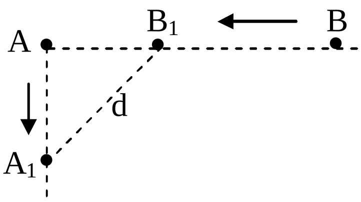
Trả lời: ………………..

Câu 44. Có hai xã cùng ở một bên bờ sông. Người ta đo được khoảng cách từ trung tâm A, B của hai xã đó đến bờ sông lần lượt là AA′ = 500 m, BB′ = 600 m và A′B′ = 2 200 m (*Hình vẽ*). Các kĩ sư muốn xây một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông cho người dân hai xã. Để tiết kiệm chi phí, các kĩ sư cần phải chọn vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn A′B′ sao cho tổng khoảng cách từ hai vị trí A, B đến vị trí M là nhỏ nhất. Khoảng cách AM bằng bao nhiêu mét?



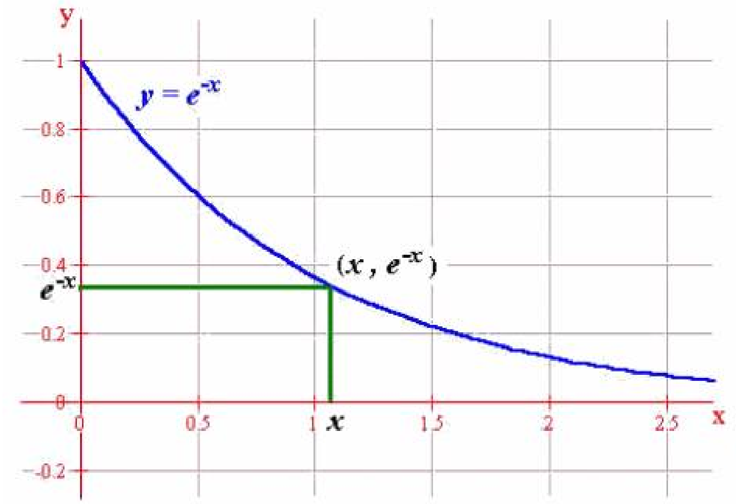
Trả lời: ………………..

Câu 45. Hai con tàu đang ở hai vị trí A, B cùng một vĩ tuyến và cách nhau 5 hải lý. Đồng thời cả hai tàu cùng khởi hành, một chạy về hướng Nam với 6 hải lý/giờ, còn tàu kia chạy về vị trí hiện tại của tàu thứ nhất với vận tốc 7 hải lý/ giờ (như hình vẽ). Hãy xác định thời điểm (giờ) mà khoảng cách của hai tàu là nhỏ nhất (kết quả lấy tròn đến phần trăm).



Trả lời: ………………..

Câu 46. Một máy tính được lập trình để vẽ một chuỗi các hình chữ nhật ở góc phần tư thứ nhất của trục tọa độ Oxy , nội tiếp dưới đường cong $y = e^{-x}$ (như hình vẽ). Hỏi diện tích lớn nhất của hình chữ nhật có thể được vẽ bằng cách lập trình trên (kết quả lấy tròn đến phần trăm).



Trả lời: ………………..

Câu 47. Người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 180 mét thẳng hàng rào. Ở đó người ta tận dụng một bờ giậu có sẵn để làm một cạnh của hàng rào và rào thành mảnh đất hình chữ nhật. Hỏi mảnh đất hình chữ nhật được rào có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu mét vuông?

Trả lời: ………………..

Câu 48. Một Bác nông dân cần xây dựng một hố ga không có nắp dạng hình hộp chữ nhật có thể tích $3200cm^3$, tỉ số giữa chiều cao của hố và chiều rộng của đáy bằng 2. Hãy xác định diện tích $\left(cm^2\right)$ của đáy hố ga để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất.

Trả lời: ………………..

Câu 49. Một người có một dải ruy băng dài 130cm, người đó cần bọc dải ruy băng đó quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10cm của dải ruy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (như hình vẽ minh họa). Hỏi dải dây duy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích lớn nhất là nhiêu cm^3? (kết quả là tròn đến hàng đơn vị)

Trả lời: ………………..

Câu 50. Người ta muốn xây một cái bể chứa nước dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích $\frac{500}{3}m^3$ Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/m^3. Nếu biết xác định kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất, chi phí thấp nhất đó bằng bao nhiêu triệu đồng?

Trả lời: ………………..

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 51. Công ti truyền hình cáp Vista hiện có 100000 thuê bao. Mỗi thuê bao đang trả cước thuê bao 40 đô la/ tháng. Một cuộc khảo sát cho thấy cứ mỗi lần giảm $0,25$ đô la cước thuê bao, công ti có thể có thêm 1000 thuê bao. Để doanh thu thu được là tối đa, công ti cần xác định mức cước thuê bao mỗi tháng là bao nhiêu?

Câu 52. Một bài báo trong tạp chí xã hội học phát biểu rằng nếu một chương trình chăm sóc sức khỏe đặc biệt cho người già được khởi xướng, thì t năm sau khi nó được khởi động, n ngàn người già có thể trực tiếp nhận được các phúc lợi, trong đó $n=\frac{t^3}{3}-6t^2+32t\ \left(0\le t\le 12\right)$. Với giá trị nào của t thì số người nhận phúc lợi tối đa là bao nhiêu?

Câu 53. Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 8000 quả bóng tennis. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ. Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí hoạt động là thấp nhất?

Câu 54. Thể tích V của 1 (kg) nước ở nhiệt độ t (t nằm giữa $0^\circ C$ đến $30^\circ C$) được cho bởi công thức

$$V=999,87-0,06426t+0,0085043t^2-0,0000679t^3\left(m^3\right).$$

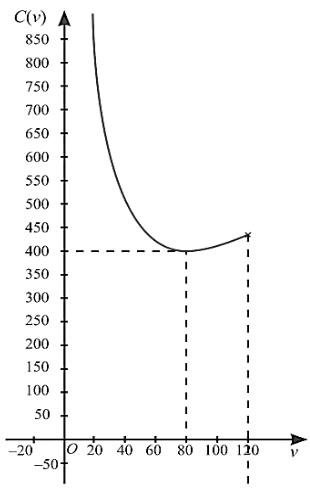
Ở nhiệt độ bao nhiêu độ C thì nước có khối lượng riêng lớn nhất?

Câu 55. Một công ty đánh giá rằng sẽ bán được N lô hàng nếu chi hết số tiền là x (triệu đồng) vào việc quảng cáo. Biết rằng N và x liên hệ với nhau bằng biểu thức $N\left(x\right)=-x^2+30x+6, 0\le x\le 30$. Hãy tìm số lô hàng lớn nhất mà công ti có thể bán sau đợt quảng cáo?

Câu 56. Giả sử chi phí tiền xăng C (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình v (km/h) theo công thức:

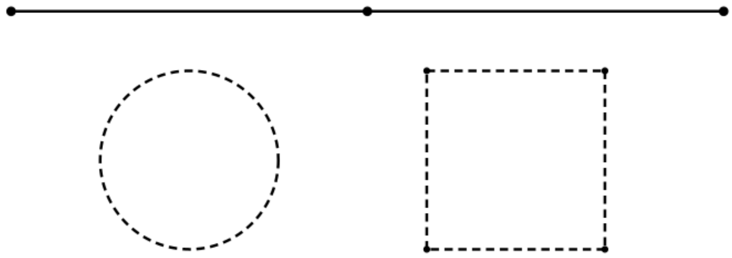
$$C\left(v\right)=\frac{16000}{v}+\frac{5}{2}v\ \left(0<v\le 120\right)$$

Để biểu diễn trực quan sự thay đổi của $C\left(v\right)$ theo v, người ta đã vẽ đồ thị hàm số $C\left(v\right)$ như hình bên.



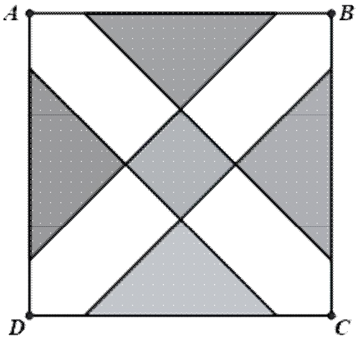
Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình là bao nhiêu để tiết kiệm tiền xăng nhất?

Câu 57. Cắt một đoạn dây dài 30m thành hai đoạn dây, đoạn dây thứ nhất gấp thành một đường tròn có diện tích S_1, đoạn dây thứ hai gấp thành một hình vuông có diện tích S_2 (như hình vẽ dưới)

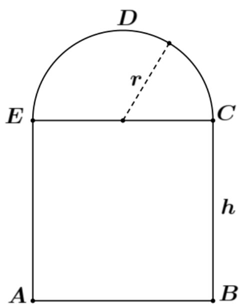


Khi đó giá trị nhỏ nhất của tổng $T = S_1 + S_2$ là bao nhiêu?

Câu 58. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4, chính giữa có một hình vuông đồng tâm với $ABCD$. Biết rằng bốn tam giác là bốn tam giác cân. Hỏi tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ nhất bằng bao nhiêu?



Câu 59. Bác thợ hàn dùng một thanh kim loại dài 4 m để uốn thành khung cửa sổ có dạng như hình vẽ. Gọi r là bán kính của nửa đường tròn. Tìm r để diện tích tạo thành đạt giá trị lớn nhất.



Câu 60. Một cửa hàng nhận làm những chiếc xô bằng nhôm hình trụ không có nắp để chứa nước. Gọi $x\,(\text{cm})$ là bán kính đáy của chiếc xô và $S(x) = \pi x^2 + \dfrac{20000}{x}\,(\text{cm}^2)$ là diện tích toàn phần của chiếc xô, khi đó x bằng bao nhiêu để cửa hàng tốn ít nguyên vật liệu nhất (kết quả làm tròn tới hàng phần mười)?

CHỦ ĐỀ 4
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN THỰC TIỄN

Phương pháp chung

- **Bước 1:** Chọn đặt biến x, kèm điền kiện tồn tại x.
- **Bước 2:** Dựa vào giả thiết và các quan hệ bài toán để xác lập hàm số chứa ẩn x.
- **Bước 3:** Dựa vào hàm đã xác lập để giải quyết yêu cầu bài toán đưa ra.

Chú ý

- Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v = s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian).

Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật: $a = v'(t) = s''(t)$

- Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hóa học tại thời điểm t, thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất điểm đó tại thời điểm t.
- Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t, thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t.
- Nếu $C = C(x)$ là **hàm chi phí** , tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hóa, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên. Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hóa tiếp theo, tức là đơn vị hàng hóa thứ $x+1$.
- Gọi $p(x)$ là giá bán mỗi đơn vị mà công ty có thể tính nếu bán x đơn vị. Khi đó, p được gọi là **hàm cầu** (hay **hàm giá**) và chúng ta mong đợi đó là một hàm giảm của x. Nếu x đơn vị được bán và giá mỗi đơn vị là $p(x)$ thì tổng doanh thu là $R(x) = x.p(x)$ và $R(x)$ được gọi là **hàm doanh thu**. Đạo hàm $R'(x)$ của hàm doanh thu được gọi là hàm doanh thu biên và là tốc độ thay đổi của doanh thu đối với số lượng đơn vị sản phẩm bán ra.
- Nếu x đơn vị được bán thì tổng lợi nhuận là $P(x) = R(x) - C(x)$ và $P(x)$) được gọi là hàm lợi nhuận. Hàm lợi nhuận biên là đạo hàm $P'(x)$ của **hàm lợi nhuận**.

PHẦN A

TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1

CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN CHUYỂN ĐỘNG THẲNG

- Nếu phương trình chuyển động của vật là $s = f(t)$ thì $v(t) = f'(t)$ là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t.
- Một vật chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) là gia tốc tức thời của chuyển động. Ta có: $a(t) = f''(t)$.

Bài 1. Một chất điểm chuyển động thẳng, chiều dương hướng theo chiều chuyển động và điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = -t^3 + 6t^2$, $t \geq 0$ với t là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $s(t)$ là quãng đường đi được trong khoảng thời gian t.

a) Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 2$.

b) Tính vận tốc và gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3$

c) Chất điểm tăng tốc và giảm tốc trong khoảng thời gian nào?

d) Thời điểm nào chất điểm có vận tốc đạt giá trị lớn nhất?

Lời giải

a) Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 2$ là: $y(2) - y(0) = -2^3 + 6.2^2 = 16(m)$

b) Hàm vận tốc là: $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t,\ (t \geq 0)$

Suy ra vận tốc của chất điểm ở thời điểm là $t = 3$: $v(3) = -3.3^2 + 12.3 = 9(m/s)$

Hàm gia tốc là $a(t) = v'(t) = -6t + 12,\ (t \geq 0)$

Suy ra gia tốc của chất điểm ở thời điểm là $t = 3 : a(3) = -6.3 + 12 = -6(m/s^2)$

c) Ta có $v(t) = -3t^2 + 12t,\ (t \geq 0)$

$v'(t) = -6t + 12$

$v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Bảng biến thiên:

t	0		2		$+\infty$
$v'(t)$		$+$	0	$-$	
$v(t)$	0	$\nearrow$	12	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

+ trong khoảng thời gian $0 < t < 2$ thì chất điểm tăng tốc

+ khi $t > 2$ thì chất điểm giảm tốc

d) Từ bảng biến thiên, ta có: $max\left(v(t)\right) = 12$ khi $t = 2$

Vậy vận tốc đạt giá trị lớn nhất bằng $12(m/s)$ tại thời điểm $2(s)$

Chú ý: Để giải câu c và d theo cách khác, ta làm như sau

c)

Chất điểm tăng tốc khi $v'(t) > 0 \Leftrightarrow -6t + 12 > 0 \Leftrightarrow t < 2$. Do đó trong khoảng thời gian $0 < t < 2$ thì chất điểm tăng tốc

Chất điểm giảm tốc khi $v'(t) < 0 \Leftrightarrow -6t + 12 < 0 \Leftrightarrow t > 2$. Do đó khi $t > 2$ thì chất điểm giảm tốc

d) Ta có

$v(t) = -3t^2 + 12t = -3\left(t^2 - 2.2t + 4 - 4\right) = -3(t-2)^2 + 12 \le 12$

$\Rightarrow max\left(v(t)\right) = 12$ khi $t = 2$

Vậy vận tốc đạt giá trị lớn nhất bằng $12(m/s)$ tại thời điểm $2(s)$

Bài 2. Một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $s(t) = 6t^2 - 2t^3,\ (t \ge 0)$

a) Sau khi hạt chuyển động, thời điểm nào thì vận tốc của hạt bằng 0?

b) Khi nào hạt chuyển động lên trên và khi nào hạt chuyển động xuống dưới?

c) Hỏi trong khoảng 6 giây kể từ lúc vật bắt đầu chuyển động vận tốc lớn nhất của hạt là bao nhiêu?

Lời giải

a) Vận tốc của hạt là: $v(t) = s'(t) = 12t - 6t^2,\ (t \ge 0)$

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow 12t - 6t^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2 \end{array}\right.$$

Do sau khi hạt chuyển động nên $t = 0$ loại, nhận $t = 2$

Vậy sau khi hạt chuyển động, thời điểm $t = 2$ thì vận tốc của hạt bằng 0.

b) Ta có $v(t) = 12t - 6t^2,\ (t \ge 0)$

$v'(t) = 12 - 12t$

$v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Bảng biến thiên:

t	0		1		$+\infty$
$v'(t)$		$+$	0	$-$	
$v(t)$	0	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

+ trong khoảng thời gian $0 < t < 1$ thì hạt chuyển động lên trên

+ khi $t > 1$ thì hạt chuyển động xuống dưới

c) Từ bảng biến thiên, ta có: trong khoảng 6 giây kể từ lúc vật bắt đầu chuyển động thì $max(v(t)) = 6(m/s)$ khi $t = 1$

Vậy vận tốc đạt giá trị lớn nhất bằng $6(m/s)$ tại thời điểm$1(s)$

Bài 3. Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s = -t^3 + 6t^2 + 17t$, với $t(s)$ là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $s(m)$ là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Trong khoảng thời gian 8 giây đầu tiên, vận tốc $v(m/s)$của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng?

Lời giải

Ta có : $v = s' = -3t^2 + 12t + 17$

Ta đi tìm giá trị lớn nhất của $v = -3t^2 + 12t + 17$ trên khoảng $(0;8)$

Mặt khác: $v' = -6t^2 + 12 = 0 \Rightarrow t = 2$

Bảng biến thiên:

t	0		2		8
$V'(t)$		$+$	0	$-$	
$V(t)$		$\nearrow$	29	$\searrow$	

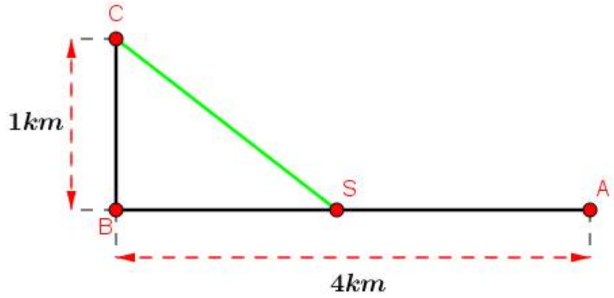
Vậy vận tốc lớn nhất trong khoảng 8 giây đầu tiên là: 29 (m/s).

DẠNG 2
CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN QUÃNG ĐƯỜNG ĐI

Bài 1. Một công ty điện lực cần nối một đường dây điện từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C như hình vẽ. Biết khoảng cách ngắn nhất từ C đến B là 1 km và khoảng cách từ B đến A là 4 km. Mỗi km dây điện đặt dưới nước là mất 5000 USD, còn đặt dưới đất mất 3000 USD.

a) Hỏi diểm S trên bờ cách A bao nhiêu để khi mắc dây điện từ A qua S rồi đến C là ít tốn kém nhất.

b) Hỏi chi phí mà công ty điện lực cần bỏ ra ít tốn kém nhất là bao nhiêu?



Lời giải

Trước tiên, ta xây dựng hàm số $f(x)$ là hàm số tính tổng chi phí sử dụng.

Đặt $BS = x$ thì ta được: $SA = 4 - x,\ CS = \sqrt{x^2+1}$.

Theo đề bài, mỗi km dây điện đặt dưới nước mất 5000USD, còn đặt dưới đất mất 3000USD, như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định như sau:

$f(x) = 3000.(4-x) + 5000.\sqrt{x^2+1}$ với $x \in [0;4]$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được số tiền ít nhất cần sử dụng và từ đó xácđịnh được vị trí điểm S.

$$f'(x) = -3000 + 5000.\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3000 + 5000.\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow -3000\sqrt{x^2+1} + 5000x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+1} = 5x$$

$$\Rightarrow 16x^2 = 9$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{3}{4}(L) \\ x = \frac{3}{4}(N) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{3}{4}$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	17000	$\searrow$	16000	$\nearrow$	$20615,5$

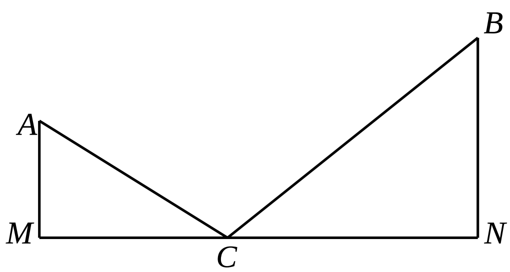
Từ bảng biến thiên, ta có: giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là 16000 tại $x=\frac{3}{4}$. Khi đó chi phí là thấp nhất và điểm S nằm cách A một đoạn $SA=4-x=4-\frac{3}{4}=\frac{13}{4}km.$

Vậy:

a) điểm S nằm cách A một đoạn $\frac{13}{4}km$

b) Chi phí ít nhất mà công ty cần bỏ ra là 16000 USD

Bài 2. Người ta định xây dựng một trạm biến áp 110 Kv tại ô đất C cạnh đường quốc lộ MN để cấp điện cho hai khu công nghiệp A và B như hình vẽ.



Hai khu công nghiệp A và B cách quốc lộ lần lượt là $AM=3km$, $BN=6km$. Biết rằng quốc lộ MN có độ dài $12km$. Hỏi phải đặt trạm biến áp cách khu công nghiệp A bao nhiêu km để tổng chiều dài đường dây cấp điện cho hai khu công nghiệp A và B là ngắn nhất.

Lời giải

Đặt $MC=x(m)\Rightarrow NC=12-x(km)$ với $0\le x\le 12$

$AC=\sqrt{x^2+9}\,(km)$

$CN=\sqrt{(12-x)^2+36}\,(km)$

Như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định bằng tổng quãng đường AC và CB:

$f(x)=\sqrt{x^2+9}+\sqrt{(12-x)^2+36}$ với $x\in[0;12]$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được quãng đường ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm *M*.

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-\frac{12-x}{\sqrt{(12-x)^2+36}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-\frac{12-x}{\sqrt{(12-x)^2+36}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{12-x}{\sqrt{(12-x)^2+36}}$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{(12-x)^2+36}=(12-x)\sqrt{x^2+9}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\left[(12-x)^2+36\right]=(12-x)^2\left(x^2+9\right)\\0\le x\le 12\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(6x)^2=\left[3(12-x)\right]^2\\0\le x\le 12\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}6x=3(12-x)\ \ hay\ \ 6x=-3(12-x)\\0\le x\le 12\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\ \ hay\ \ x=-12\\0\le x\le 12\end{cases}\Leftrightarrow x=4$$

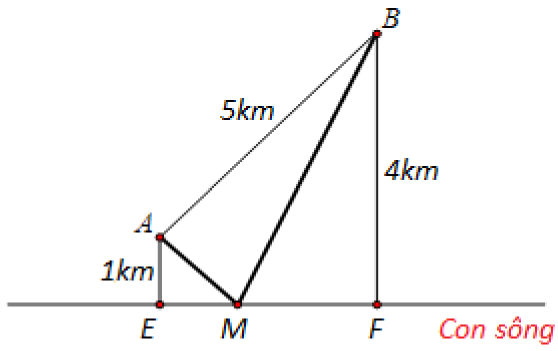
Bảng biến thiên:

x	0		4		12
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(4)=15$	$\nearrow$	$f(12)$

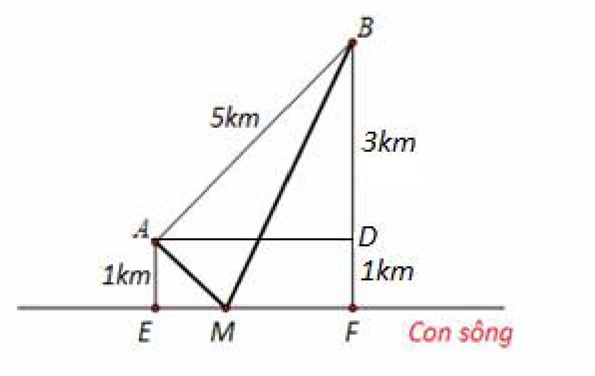
Từ bảng biến thiên, ta có: giá trị nhỏ nhất là $f(4)=15$ tại $x=4$

Khi đó, phải đặt trạm biến áp cách khu công nghiệp A là: $AC=\sqrt{x^2+9}=\sqrt{4^2+9}=5(km)$

Bài 3. Bác Hùng đang ở tháp canh kiểm soát cháy rừng được đặt ở vị trí A, nhìn thấy đám cháy ở vị trí B, cách vị trí A khoảng $5km$. Cách vị trí A và B lần lượt $1km$, $4km$ có một con sông, bác Hùng cần đi đến vị trí điểm M ở bờ sông để lấy nguồn nước rồi đến vị trí B để dập tắt đám cháy (như hình vẽ). Tính khoảng cách ngắn nhất mà Bác Hùng cần đi để dập tắt đám cháy (kết quả làm tròn đến hàng chục).



Lời giải



Ta giả sử bác Hùng đi từ *A* đến *M* để lấy nước và đi từ *M* về *B*.

Đặt $EM = x(km)$

Ta dễ dàng tính được:

$BD = BF - DF = BF - AE = 4 - 1 = 3(km)$

$EF = AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4(km)$

Khi đó ta được: $MF = 4 - x(km)$ với $0 \le x \le 4$

Quãng đường bác Hùng đi từ A đến M là: $AM = \sqrt{x^2 + 1}(km)$

Quãng đường bác Hùng đi từ M đến B là: $BM = \sqrt{(4-x)^2 + 4^2}\,(km)$

Quãng đường bác Hùng đi từ A đến M trên bờ sông để lấy nước và mang về B là: $AM + MB = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{(4-x)^2 + 16}\,(km)$

Như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định bằng tổng quãng đường *AM* và *MB*:

$f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{(4-x)^2+16}$ với $x \in [0;4]$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được quãng đường ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm M.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2+16}}.$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2+16}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2+16}}$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{(4-x)^2+16}=(4-x)\sqrt{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left[(4-x)^2+16\right]=(4-x)^2\left(x^2+1\right) \\ 0\le x\le 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4x)^2=(4-x)^2 \\ 0\le x\le 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{5} \ \ hay \ \ x=-\frac{4}{3} \\ 0\le x\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{4}{5}$$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{4}{5}$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f\left(\frac{4}{5}\right)=\sqrt{41}$	$\nearrow$	$f(4)$

Từ bảng biến thiên, ta có: giá trị nhỏ nhất là $f\left(\frac{4}{5}\right)=\sqrt{41}\approx 6,4(km)$ tại $x=\frac{4}{5}$

Khi đó đoạn đường ngắn nhất mà bác Hùng phải đi là: $6,4(km)$

Bài 4. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là $200km$. Vận tốc của dòng nước là $8km/h$. nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v(km/h)$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức: $E(v)=cv^3t$ (trong đó c là một hằng số, E được tính bằng jun). Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.

Lời giải

Khi bơi ngược dòng vận tốc của cá là: $v-8\left(km/h\right)$ với $v>8$

Thời gian để cá vượt khoảng cách 400 km là $t=\dfrac{200}{v-8}\left(h\right)$

Năng lượng tiêu hao của cá khi vượt khoảng cách 400km là: $E\left(v\right)=cv^3.\dfrac{200}{v-8}=200c.\dfrac{v^3}{v-8}\left(jun\right)$

Xét hàm số: $E\left(v\right)=200c.\dfrac{v^3}{v-8}$ với $v>8$

$E'\left(v\right)=200c.\dfrac{v^2\left(2v-24\right)}{\left(v-8\right)^2}$

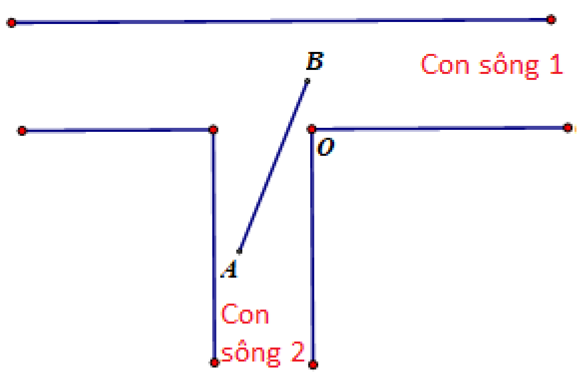
$E'\left(v\right)=0\Leftrightarrow v^2\left(2v-24\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v=0\left(L\right)\\v=12\left(N\right)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

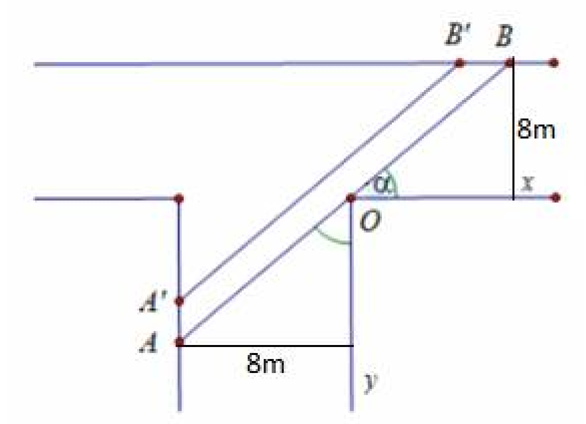
v	8		12		$+\infty$
$E'(v)$		$-$	0	$+$	
$E(v)$	$+\infty$	$\searrow$	$E(12)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có: Cá phải bơi với vận tốc $12\left(km/h\right)$ thì ít tiêu hao năng lượng ít nhất.

Bài 5. Một con sông 1 thông với con sông 2, bờ của con sông 1 vuông góc với bờ của con sông 2 (như hình vẽ). Chiều rộng của hai con sông bằng nhau và bằng $8m$. Một thanh gỗ AB, thiết diện nhỏ không đáng kể trôi từ mương 1 sang mương 2. Độ dài lớn nhất của thanh gỗ AB (Làm tròn kết quả đến phần chục) sao cho AB khi trôi không bị vướng là bao nhiêu?



Lời giải



Để thanh gỗ AB có độ dài lớn nhất thì AB đi qua O như hình vẽ trên.

Đặt $\widehat{BOx}=\alpha \Rightarrow \widehat{BOy}=90^0-\alpha$ với $0^0\le \alpha \le 90^0$

Ta có: $OB=\dfrac{8}{\sin\alpha};OA=\dfrac{8}{\sin\left(90^0-\alpha\right)}=\dfrac{8}{\cos\alpha}$

Mà $AB=OA+OB=\dfrac{8}{\cos\alpha}+\dfrac{8}{\sin\alpha}=8\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)$

Xét hàm số: $f\left(\alpha\right)=8\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)$ với $0^0\le \alpha \le 90^0$

$f'\left(\alpha\right)=8\left(\dfrac{-\sin\alpha}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right)=8\left(\dfrac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha.\sin^2\alpha}\right)$

$f'\left(\alpha\right)=0$

$\Leftrightarrow \cos^3\alpha-\sin^3\alpha=0$

$\Leftrightarrow \cos\alpha=\sin\alpha$

$\Leftrightarrow \cos\alpha=\cos\left(90^0-\alpha\right)$

$\Rightarrow \alpha=45^0$

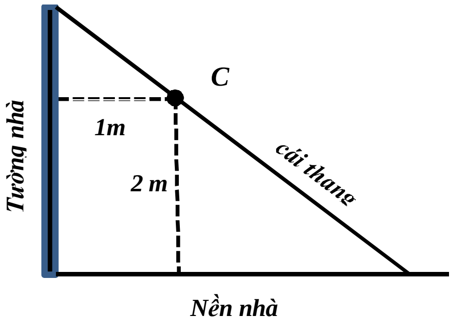
Bảng biến thiên:

α	0		45^0		90^0
$f'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$f(\alpha)$	$f(0^0)$	$\nearrow$	$16\sqrt{2}$	$\searrow$	$f(90^0)$

Từ bảng biến thiên, ta có: giá trị lớn nhất của $f\left(\alpha\right)$ bằng $16\sqrt{2}$ tại $\alpha=45^0$.

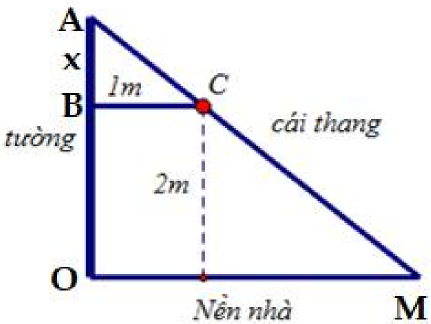
Vậy độ dài lớn nhất của thanh gỗ AB gần bằng $16\sqrt{2}\approx 22,6m$

Bài 6. Thầy Thanh cần sản xuất một cái thang để trèo qua một bức tường nhà. Thầy Thanh muốn cái thang phải luôn được đặt qua vị trí C, biết rằng điểm C cao $2m$ so với nền nhà và điểm C cách tường nhà $1m$ (như hình vẽ bên).



Giả sử kinh phí để sản xuất thang là 300.000 đồng/1 mét dài. Hỏi thầy Thanh cần ít nhất bao nhiêu tiền để sản xuất thang? (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng).

Lời giải



Đặt $AB = x$, với $x > 0$

Ta có:

+ $AC = \sqrt{x^2+1}$

+ Theo Thalès thì : $\dfrac{AB}{AO} = \dfrac{AC}{AM} \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{AM} \Rightarrow AM = \dfrac{(x+2)\sqrt{x^2+1}}{x}$

Ta xét hàm $f(x) = \dfrac{(x+2)\sqrt{x^2+1}}{x}$ với $x > 0$

$f'(x) = \dfrac{x^3-2}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

$f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^3-2}{x^2\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f\left(\sqrt[3]{2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Căn cứ vào bảng biến thiên trên, ta có: Chiều dài thang ngắn nhất bằng $f\left(\sqrt[3]{2}\right)$ khi $x=\sqrt[3]{2}$

Do đó $AM_{\min}=f\left(\sqrt[3]{2}\right)\approx 4,1619m$, suy ra kinh phí để sản xuất thang ít nhất là: $4,1619.300000\approx 1248570$ đồng

Vì kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng nên chi phí là 1249000 đồng

DẠNG 3
CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN KINH DOANH

Bài 1. Giả sử chi phí (tính bằng trăm nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị hàng hóa nào đó là: $C(x) = 23000 + 50x - 0,5x^2 + 0,00175x^3$. Biết hàm chi phí biên là $C'(x)$.

a) Tìm hàm chi phí biên.

b) Tìm C'(100) và giải thích ý nghĩa của nó.

c) So sánh C'(100) với chi phí sản xuất đơn vị hàng hóa thứ 101.

Lời giải

a) Hàm chi phí biên là $C'(x) = 50 - x + \frac{21}{4000}x^3 = \frac{21}{4000}x^3 - x + 50$

b) $C'(100) = 50 - 100 + \frac{21}{4000}100^3 = 2,5$ (trăm nghìn đồng).

Chi phí biên tại x = 100 là 250 000 đồng, nghĩa là chi phí để sản xuất thêm 1 đơn vị hàng hóa tiếp theo (đơn vị hàng hóa thứ 101) là khoảng 250 000 đồng.

c) Chi phí sản xuất đơn vị hàng hóa thứ 101 là

C(101) – C(100) = 24752,52675 – 24750 = 2,52675 (trăm nghìn đồng).

Giá trị này xấp xỉ với chi phí biên C'(100) đã tính ở câu b.

Bài 2. Giả sử hàm cầu đối với một loại hàng hóa được cho bởi công thức $p = \frac{354}{1+0,01x}$, $x \ge 0$, trong đó p là giá bán (nghìn đồng) của mỗi đơn vị sản phẩm và x là số lượng đơn vị sản phẩm đã bán.

a) Tìm công thức tính x như là hàm số của p. Tìm tập xác định của hàm số này. Tính số đơn vị sản phẩm đã bán khi giá bán của mỗi đơn vị sản phẩm là 240 nghìn đồng.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số x = x(p). Từ đồ thị đã vẽ, hãy cho biết:

- Số lượng đơn vị sản phẩm bán được sẽ thay đổi thế nào khi giá bán p tăng;
- Ý nghĩa thực tiễn của giới hạn $\lim\limits_{p \to 0^+} x(p)$.

Lời giải

Ta có $p = \frac{354}{1+0,01x}$, $x \ge 0$

$\Leftrightarrow p(1+0,01x) = 345$

$\Leftrightarrow x = \frac{35400}{p} - 100$

Vì $x \ge 0$ nên $\frac{35400}{p} - 100 \ge 0 \Leftrightarrow 0 < p \le 354$

tập xác định của hàm số $D = (0;354]$

đơn vị sản phẩm đã bán khi giá bán của mỗi đơn vị sản phẩm là 240 nghìn đồng là $x = \dfrac{35400}{240} - 100 = 47,5$

b) $x = \dfrac{35400}{p} - 100$

Tập xác định của hàm số là $D = (0;354]$

Sự biến thiên

$x' = \dfrac{35400}{p^2} < 0, \forall p \in D$

Hàm số luôn nghịch biến với mọi $p \in (0;354)$

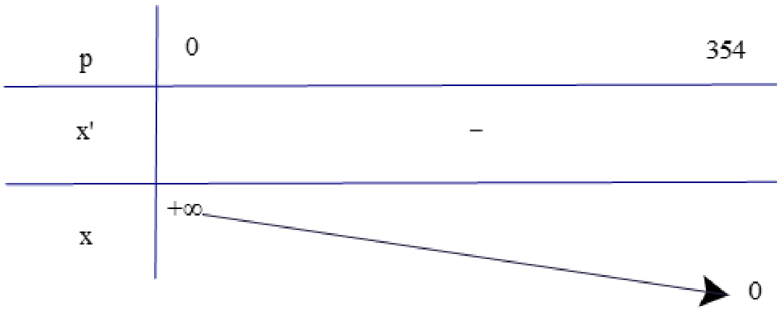
Hàm số không có cực trị.

Tiệm cận

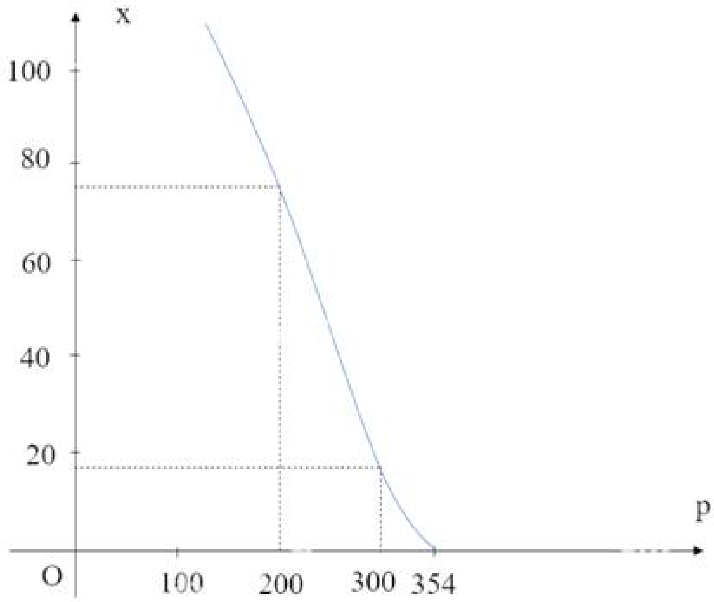
$\lim\limits_{p \to 0^+} x = \lim\limits_{p \to 0^+} \left(\dfrac{35400}{p} - 100 \right) = +\infty$

Do đó $p = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

+ Bảng biến thiên



Đồ thị hàm số giao với trục hoành tại điểm (354; 0) và đi qua điểm (300; 18); (200; 77).



- Số lượng đơn vị sản phẩm bán sẽ giảm đi khi giá bán tăng và sẽ không bán được sản phẩm nào nếu giá bán là 354 nghìn đồng.

- Ý nghĩa thực tiễn của giới hạn $\lim\limits_{p\to 0^+} x(p)$: vì $\lim\limits_{p\to 0^+}\left(\dfrac{35400}{p}-100\right)=+\infty$ nên giá bán càng thấp thì số lượng đơn vị sản phẩm sẽ bán được càng nhiều.

Bài 3. Trung tâm thương mại Center Nha Trang có 50 gian hàng cho thuê bán hàng. Biết rằng nếu cho thuê mỗi gian hàng với giá 2000000 đồng một tháng thì mọi gian hàng đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi gian hàng thêm 50000 đồng một tháng thì có thêm một gian hàng bị bỏ trống.

a) Số lần tăng giá gian hàng nằm trong khoảng nào thì tổng doanh thu cho thuê gian hàng của trung tâm thương mại Center sẽ giảm so với ban đầu khi chưa tăng giá gian hàng.

b) Hỏi thu nhập cao nhất của trung tâm thương mại Center có thể đạt được trong 1 tháng là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi x là số lần tăng giá gian hàng, với $0<x<50$

Mỗi lần tăng giá thì số gian hàng cho thuê là $50-x$ (căn).

Số tiền thuê một gian hàng sau mỗi lần tăng là: $2000000+50000x$ đồng

Khi đó tổng số tiền cho thuê gian hàng 1 tháng là:

$T(x)=(50-x)(2000000+50000x)=50000(-x^2+10x+200)$ đồng

Bài toán trở thành tìm x để $T(x)$ lớn nhất

$T(x)=50000(-x^2+10x+200)$ với $0<x<50$

$T'(x)=50000(10-2x)$

$T'(x)=0$

$\Leftrightarrow 50000(10-2x)=0$

$\Leftrightarrow x=5$

Bảng biến thiên:

x	0		5		50
$T'(x)$		$+$	0	$-$	
$T(x)$			$T(5)$		
	$T(0)$	$\nearrow$		$\searrow$	$T(50)$

Căn cứ vào bảng biến thiên trên, ta có

a) Số lần tăng giá gian hàng nằm trong khoảng $(5;50)$ thì tổng doanh thu cho thuê gian hàng của trung tâm thương mại Center sẽ giảm so với ban đầu khi chưa tăng giá gian hàng.

b) Thu nhập cao nhất của trung tâm thương mại Center có thể đạt được trong 1 tháng là: $T(5)=11250000$ (đồng)

Chú ý: Để tìm $T(x)$ lớn nhất ta dùng kiến thức lớp 8 như sau nhanh hơn trong trắc nghiệm:

$$\begin{aligned} T(x) &= 50000\left(-x^2+10x+200\right) \\ &= 50000\left[\left(-x^2+10x-25\right)+225\right] \\ &= 50000\left[-(x-5)^2+225\right] \le 50000.225 = 11250000 \end{aligned}$$

Vậy $\max T(x)=11250000$ khi $x=5$

Bài 4. Chị Mai xây dựng 32 phòng trọ cho sinh viên trường Đại Học Nha Trang thuê. Biết giá cho thuê mỗi tháng là $2.000.000$ đồng trên 1 phòng trọ, thì không có phòng trống. Nếu cứ tăng giá mỗi phòng trọ lên 200.000 đồng trên 1 tháng, thì sẽ có 2 phòng bị bỏ trống.

a) Số lần tăng giá phòng trọ nằm trong khoảng nào thì tổng doanh thu cho thuê phòng trọ của chị Mai sẽ tăng so với ban đầu khi chưa tăng giá phòng trọ.

b) Hỏi chị Mai sẽ cho thuê phòng trọ với giá là bao nhiêu để có thu nhập mỗi tháng cao nhất?

Lời giải

Gọi x là số lần tăng giá phòng trọ, với $0<x<16$

Mỗi lần tăng giá thì số phòng trọ cho thuê là $32-2x$ (căn).

Số tiền thuê một phòng trọ sau mỗi lần tăng là: $2000000+200000x$ đồng

Khi đó tổng số tiền cho thuê phòng trọ 1 tháng là:

$T(x) = (32 - 2x)(2000000 + 200000x) = 400000(-x^2 + 6x + 160)$ đồng

Bài toán trở thành tìm x để $T(x)$ lớn nhất

$T(x) = 400000(-x^2 + 6x + 160)$ với $0 < x < 16$

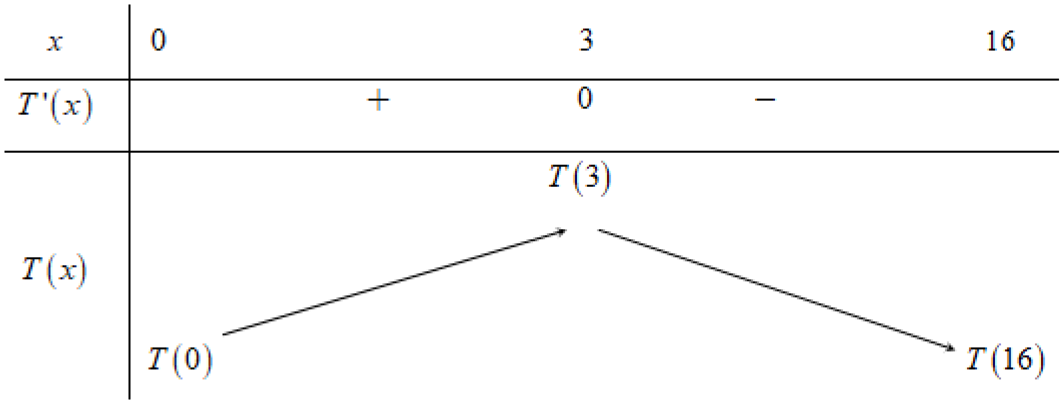
$T'(x) = 400000(6 - 2x)$

$T'(x) = 0$

$\Leftrightarrow 400000(6 - 2x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

a) Số lần tăng giá phòng trọ nằm trong khoảng $(0;3)$ thì tổng doanh thu cho thuê phòng trọ của chị Mai sẽ tăng so với ban đầu khi chưa tăng giá phòng trọ.

b) Để có thu nhập mỗi tháng cao nhất, Chị Mai sẽ cho thuê phòng trọ với giá là:

$2000000 + 200000x = 2000000 + 200000.3 = 2600000$ (đồng).

Chú ý: Để tìm $T(x)$ lớn nhất ta dùng kiến thức lớp 8 như sau nhanh hơn trong trắc nghiệm:

$$T = 400000(-x^2 + 6x + 160)$$
$$= 400000(-x^2 + 6x - 9 + 169)$$
$$= -400000(x-3)^2 + 67600000 \le 67600000$$

Vậy $\max T(x) = 67600000$ khi $x = 3$

Bài 5. Một cơ sở sản xuất khăn mặt tại Nha Trang đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiế**c.** Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18000. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.

Lời giải

Gọi x là số lần tăng giá chiếc khăn, với $0 < x < 30$

Mỗi lần tăng giá thì số chiếc khăn bán được là $3000 - 100x$ (chiếc).

Số tiền chiếc khăn sau mỗi lần tăng là: $30000 + 1000x$ đồng

Chi phí nguyên vật liệu để sản xuất khăn mỗi tháng là $(3000 - 100x)18000$ đồng

Số tiền thu được mỗi tháng là $(30000 + 1000x)(3000 - 100x)$ đồng

Khi đó, lợi nhuận thu được mỗi tháng là:

$T(x) = (30000 + 1000x)(3000 - 100x) - (3000 - 100x)18000 = 100000(-x^2 + 18x + 360)$ đồng

Bài toán trở thành tìm x để $T(x)$ lớn nhất

$T(x) = 100000(-x^2 + 18x + 360)$ với $0 < x < 30$

$T'(x) = 100000(18 - 2x)$

$T'(x) = 0$

$\Leftrightarrow 100000(18 - 2x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 9$

Bảng biến thiên:

x	0		9		30
$T'(x)$		$+$	0	$-$	
$T(x)$	$T(0)$	$\nearrow$	$T(9)$	$\searrow$	$T(30)$

Căn cứ vào bảng biến thiên trên, ta có

Lợi nhuận thu được lớn nhất mỗi tháng là: $T(9) = 100000(-9^2 + 18.9 + 360) = 44100000$ đồng khi $x = 9$

Vậy phải bán mỗi cốc cà phê với giá $30000 + 1000x = 30000 + 1000.9 = 39000$ đồng thì đạt lợi nhuận lớn nhất.

Chú ý: Để tìm $T(x)$ lớn nhất ta dùng kiến thức lớp 8 như sau nhanh hơn:

$$T(x) = 100000(-x^2 + 18x + 240)$$
$$= 100000\left[(-x^2 + 18x - 81) + 441\right]$$
$$= 100000\left[-(x-9)^2 + 441\right] \le 100000.441 = 44100000$$

Vậy $\max T(x) = 44100000$ khi $x = 9$

Bài 6. Doanh nghiệp tư nhân Thành Đạt – Nha Trang chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay, doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe honda Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 (triệu đồng) và bán với giá 31 (triệu đồng) mỗi chiếc. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 (triệu đồng) mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp Thành Đạt phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất?

Lời giải

Gọi x $(0 < x < 31$, đơn vị: triệu đồng) là giá bán mới. Khi đó:

Số tiền đã giảm là: $31 - x$. Số lượng xe tăng lên là: $200(31 - x)$

Vậy tổng số sản phẩm bán được là: $600 + 200(31 - x) = 6800 - 200x$

Doanh thu mà doanh nghiệp sẽ đạt được là: $(6800 - 200x)x$

Tiền vốn mà doanh nghiệp phải bỏ ra là: $(6800 - 200x).27$

Lợi nhuận mà công ty đạt được sẽ là:

$T(x) =$ Doanh thu – Tiền vốn $= (6800 - 200x)x - (6800 - 200x).27 = -200x^2 + 12200x - 183600$

Xét hàm số: $L(x) = -200x^2 + 12200x - 183600$ với $0 < x < 31$

$T'(x) = -400x + 12200$

$T'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 30,5$

Bảng biến thiên:

x	0		$30,5$		31
$T'(x)$		$+$	0	$-$	
$T(x)$	$T(0)$	$\nearrow$	$T(30,5)$	$\searrow$	$T(31)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: lợi nhuật lớn nhất khi $x = 30,5$.

Vậy giá bán mới là $30,5$ (triệu đồng)

Bài 7. Giả sử rằng mối quan hệ giữa nhu cầu thị trường và sản lượng gạo của một doanh nghiệp X được cho theo hàm $Q_D = 656 - \frac{1}{2}P$ với Q_D là lượng gạo thị trường cần và P là giá bán cho một tấn gạo. Chi phí cho việc sản xuất được cho theo hàm $C(Q) = Q^3 - 77Q^2 + 1000Q + 100$ với C là chi phí doanh nghiệp X bỏ ra, Q (tấn) là lượng gạo sản xuất được trong một đơn vị thời gian. Để đạt lợi nhuận cao nhất thì doanh nghiệp X cần sản xuất lượng gạo bao nhiêu?

Lời giải

Do $Q_D > 0 \Rightarrow P < 1312$

Số tiền thu được khi bán Q_D tấn gạo là $Q_D.P = 656P - \frac{1}{2}P^2$

Chi phí sản xuất Q_D tấn là

$$C(Q_D) = Q_D^3 - 77Q_D^2 + 1000Q_D + 100 = \left(656 - \frac{1}{2}P\right)^3 - 77\left(656 - \frac{1}{2}P\right)^2 + 1000\left(656 - \frac{1}{2}P\right) + 100$$

Suy ra số tiền lãi là :

$$T(P) = Q_D.P - C(Q_D) = 656P - \frac{1}{2}P^2 - \left(656 - \frac{1}{2}P\right)^3 + 77\left(656 - \frac{1}{2}P\right)^2 - 1000\left(656 - \frac{1}{2}P\right) - 100$$

Lợi nhuận lớn nhất khi $T(P)$ đạt giá trị lớn nhất.

Xét hàm số :

$$T(P)=656P-\frac{1}{2}P^2-\left(656-\frac{1}{2}P\right)^3+77\left(656-\frac{1}{2}P\right)^2-1000\left(656-\frac{1}{2}P\right)-100 \text{ với } 0<P<1312$$

$$T'(P)=\frac{3}{2}\left(656-\frac{1}{2}P\right)^2-77\left(656-\frac{1}{2}P\right)+1156-P$$

$$T'(P)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P=1208\ (N) \\ P=1316\ (L) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

P	0		1208		1312
$T'(P)$		$+$	0	$-$	
$T(P)$	$T(0)$	$\nearrow$	$T(1208)$	$\searrow$	$T(1312)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: $T(P)$ đạt giá trị lớn nhất khi $P=1208$

Vậy $Q_D=656-\frac{1}{2}P=52$ tấn gạo

Bài 8. Mỗi chuyến xe buýt của hãng xe Phương Trang có sức chứa tối đa là 50 hành khách. Nếu một chuyến xe buýt chở x hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là $20\left(3-\frac{x}{40}\right)^2$ (nghìn đồng). Hỏi mỗi chuyến xe buýt chở bao nhiêu hành khách thì hãng xe Phương Trang thu được số tiền nhiều nhất?

Lời giải

Số tiền thu được là : $f(x)=20x\left(3-\frac{x}{40}\right)^2=20\left(\frac{x^3}{1600}-\frac{3}{20}x^2+9x\right)$ (nghìn đồng)

Xét hàm số: $f(x)=20\left(\frac{x^3}{1600}-\frac{3}{20}x^2+9x\right)$ với $0\le x\le 50$

$$f'(x)=20\left(\frac{3x^2}{1600}-\frac{3}{10}x+9\right)$$

$f'(x)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x^2}{1600}-\dfrac{3}{10}x+9=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=40\,(N) \\ x=120\,(L) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		40		50
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$			3200		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$f(0)$				$f(50)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: GTLN của $f(x)$ là 3200 khi $x=40$

Vậy một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất là 3200 nghìn đồng khi có 40 hành khách.

Bài 9. Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật Logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t)=\dfrac{5000}{1+5e^{-t}}, t\ge 0,$ trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

Lời giải

Ta có: $f'(t)=\dfrac{-5000\left(1+5e^{-t}\right)'}{\left(1+5e^{-t}\right)^2}=\dfrac{25000e^{-t}}{\left(1+5e^{-t}\right)^2}$. Tốc độ bán hàng là lớn nhất khi $f'(t)$ lớn nhất.

Đặt $h(t)=\dfrac{25000e^{-t}}{\left(1+5e^{-t}\right)^2}$ có $h'(t)=\dfrac{-25000e^{-t}\left(1+5e^{-t}\right)^2-2.\left(-5e^{-t}\right).\left(1+5e^{-t}\right).25000e^{-t}}{\left(1+5e^{-t}\right)^4}$

$=\dfrac{-25000e^{-t}\left(1+5e^{-t}\right)\left(1+5e^{-t}-10e^{-t}\right)}{\left(1+5e^{-t}\right)^4}=\dfrac{-25000e^{-t}\left(1-5e^{-t}\right)}{\left(1+5e^{-t}\right)^3}$

$h'(t)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-25000e^{-t}\left(1-5e^{-t}\right)}{\left(1+5e^{-t}\right)^3}=0 \Leftrightarrow 1-5e^{-t}=0 \Leftrightarrow e^{-t}=\dfrac{1}{5} \Leftrightarrow t=\ln 5\ (thoa\ man)$

Ta có bảng biến thiên với $t\in[0;+\infty)$:

t	0		$\ln 5$		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	$\frac{6250}{9}$	$\nearrow$	1250	$\searrow$	0

Vậy sau khi phát hành khoảng $\ln 5 \approx 1,6$ năm thì thì tốc độ bán hàng là lớn nhất.

Bài 10. Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức: $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100 + t^2}$ (con), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

Lời giải

Xét hàm số $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100 + t^2} \; (t > 0)$.

Ta có: $N'(t) = \frac{100.(100 + t^2) - 100t.2t}{(100 + t^2)^2} = \frac{100.(100 - t^2)}{(100 + t^2)^2}$.

Khi đó, với $t > 0$, $N'(t) = 0 \Leftrightarrow 100 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 100 \Leftrightarrow t = 10$.

Bảng biến thiên của hàm số $N(t)$ như sau:

t	0		10		$+\infty$
$N'(t)$		$+$	0	$-$	
$N(t)$	1000	$\nearrow$	1005	$\searrow$	1000

Căn cứ bảng biến thiên, ta thấy:

Trên khoảng $(0; +\infty)$ hàm số $N(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 1005 tại $t = 10$.

Vậy số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng là 1005 con.

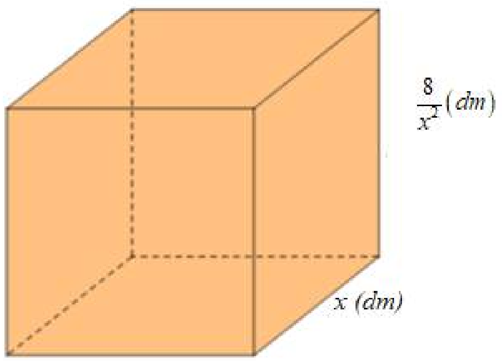
DẠNG 4
CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN HÌNH HỌC VÀ MỘT SỐ DẠNG KHÁC

Bài 1. Người ta muốn mạ vàng cho bề mặt phía ngoài của một cái hộp dạng hình hộp đứng không nắp (nắp trên), có đáy là một hình vuông và thể tích của hộp đứng là $8\ dm^3$.

a) Cạnh đáy của hình vuông thuộc khoảng nào thì tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của hình hộp đứng không nắp giảm?

b) Tìm chiều cao của hộp để lượng vàng phải dùng để mạ là ít nhất, biết lớp mạ ở mọi nơi như nhau, giao giữa các mặt là không đáng kể.

Lời giải



Gọi $x\ (dm)$ là cạnh đáy của hình vuông, với $x > 0$

Ta có:

+ Diện tích đáy của hình vuông là: $x^2\ (dm^2)$

+ Chiều cao của hình hộp đứng là: $\frac{8}{x^2}(dm)$

+ Tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của hình hộp đứng không nắp là:

$S = 4.x.\frac{8}{x^2} + x^2 = \frac{32}{x} + x^2\ (dm^2)$

Xét hàm số: $S(x) = \frac{32}{x} + x^2$ với $x > 0$

$S'(x) = -\frac{32}{x^2} + 2x$

$S'(x) = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{32}{x^2} + 2x = 0$

$\Leftrightarrow x^3 = 64$

$\Leftrightarrow x = 4$

Bảng biến thiên:

x	0		4		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$	$+\infty$	$\searrow$	24	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

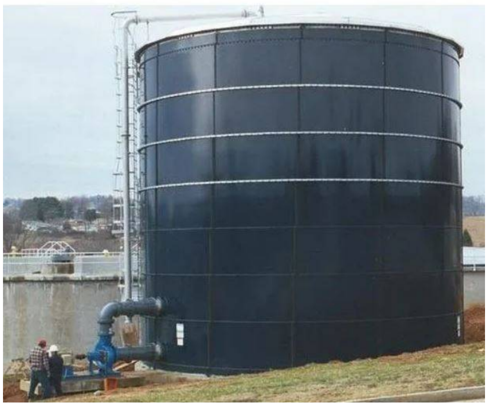
a) Cạnh đáy của hình vuông thuộc khoảng $(0;4)$ thì tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của hình hộp đứng không nắp sẽ giảm.

b) Giá trị nhỏ nhất của $S(x)$ bằng 24 khi $x=4$

Lượng vàng phải dùng để mạ là ít nhất khi tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của hình hộp đứng không nắp nhỏ nhất.

Do đó, chiều cao của hình hộp đứng là: $\dfrac{8}{4^2}=\dfrac{1}{2}(dm)$

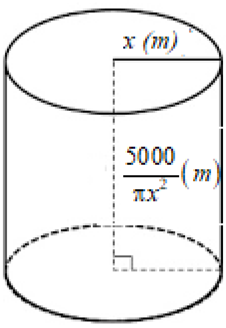
Bài 2. Một công ty xăng dầu cần làm một thùng chứa dạng hình trụ kín, có thể tích $5000m^3$. Vật liệu để làm hai đáy có giá $250\,000$ đồng trên m^2, vật liệu làm phần còn lại có giá $400\,000$ đồng trên m^2.



a) Bán kính đáy của hình trụ thuộc khoảng nào thì tổng chi phí làm thùng chứa sẽ giảm?

b) Tìm chiều cao của hình trụ để tổng chi phí nhỏ nhất.

Lời giải



Gọi $x\,(m)$ là bán kính đáy của hình trụ , với $x>0$

+ Diện tích hai đáy của hình trụ là: $\pi x^2+\pi x^2=2\pi x^2\ \left(m^2\right)$

+ Chiều cao của hình trụ là: $\dfrac{5000}{\pi x^2}(m)$

Suy ra diện tích xung quanh hình trụ là: $2\pi.x.\dfrac{5000}{\pi x^2}=\dfrac{10000}{x}\left(m^2\right)$

+ Tổng chi phí vật liệu để làm thùng chứa dạng hình trụ là

$S=400000.\dfrac{10000}{x}+250000.2\pi x^2=100000\left(\dfrac{40000}{x}+5\pi x^2\right)$ đồng

Xét hàm số: $S(x)=100000\left(\dfrac{40000}{x}+5\pi x^2\right)$ với $x>0$

$S'(x)=100000\left(-\dfrac{40000}{x}+10\pi x\right)$

$S'(x)=0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{40000}{x}+10\pi x=0$

$\Leftrightarrow x^3=\dfrac{4000}{\pi}$

$\Leftrightarrow x=10.\sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}}$

Bảng biến thiên:

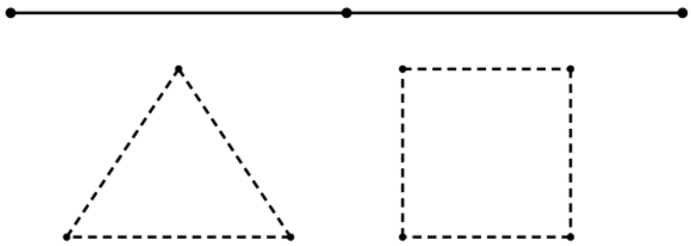
x	0		$10.\sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}}$		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$S\left(10.\sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

a) Bán kính đáy của hình trụ thuộc khoảng $\left(0;10.\sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}}\right)$ thì tổng chi phí sẽ giảm.

b) Chiều cao của hình trụ để tổng chi phí nhỏ nhất là: $\dfrac{5000}{\pi x^2}=\dfrac{5000}{\pi\left(10.\sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}}\right)^2}=\dfrac{25}{\sqrt[3]{2\pi}}(m)$

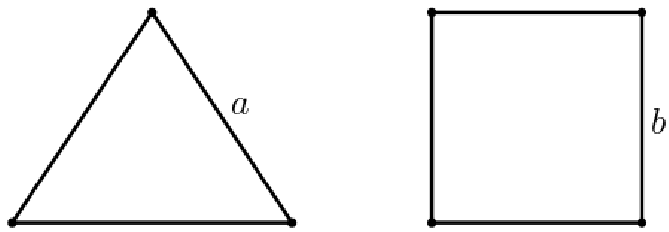
Bài 3. Cắt một đoạn dây dài 60m thành hai đoạn dây, đoạn dây thứ nhất gấp thành một tam giác đều có diện tích S_1, đoạn dây thứ hai gấp thành một hình vuông có diện tích S_2 (như hình vẽ dưới)



Khi đó giá trị nhỏ nhất của tổng $T = S_1 + S_2$ là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi độ dài đoạn dây gấp tam giác đều là x thì độ dài đoạn dây gấp hình vuông là $60 - x$ (mét)



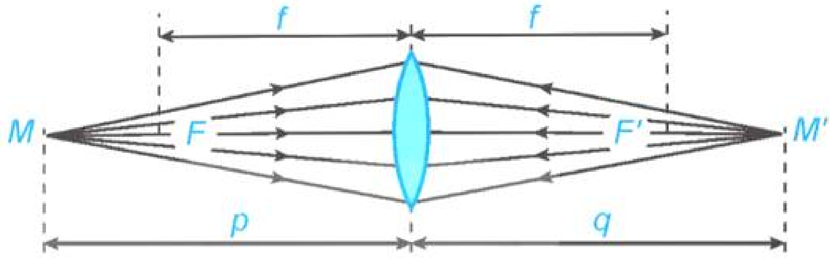
Khi đó $x = 3a \Leftrightarrow a = \dfrac{x}{3} \Rightarrow S_1 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{36}$

Mặt khác: $60 - x = 4b \Rightarrow b = \dfrac{60 - x}{4} \Rightarrow S^2 = b^2 = \left(\dfrac{60 - x}{4}\right)^2$

Khi đó $S_1 + S_2 = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{36} + \left(\dfrac{60 - x}{4}\right)^2 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{\left(9 + 4\sqrt{3}\right)x^2 - 1080x + 32400}{144}$

Dễ dàng tính được $\left(S_1 + S_2\right)_{\min} = \min f(x) = f\left(\dfrac{540}{9 + 4\sqrt{3}}\right) \approx 97{,}87\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Bài 4. Xét một thấu kính hội tụ có tiêu cự f (hình vẽ). Khoảng cách p từ vật đến thấu kính liên hệ với khoảng cách q từ ảnh đến thấu kính bởi hệ thức: $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{f}$.



a) Viết công thức tính $q = g(p)$ như một hàm số của biến $p \in (f; +\infty)$.

b) Tính các giới hạn $\lim\limits_{p \to +\infty} g(p)$; $\lim\limits_{p \to f^+} g(p)$ và giải thích ý nghĩa các kết quả này.

c) Lập bảng biến thiên của hàm số $q = g(p)$ trên khoảng $(f; +\infty)$

Lời giải

a)

Ta có $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}\Rightarrow q=\frac{pf}{p-f}$

Do đó: $q=g(p)=\frac{pf}{p-f}$ với $p\in(f;+\infty)$

b)

$$\lim_{p\to+\infty} g(p)=\lim_{p\to+\infty}\frac{pf}{p-f}=\lim_{p\to+\infty}\frac{f}{1-\frac{f}{p}}=f$$

$$\lim_{p\to f^+} g(p)=\lim_{p\to f^+}\frac{pf}{p-f}=+\infty$$

Ý nghĩa $\lim\limits_{p\to+\infty} g(p)=f$ là khoảng cách từ vật đến thấu kính tiến ra vô cùng thì khoảng cách từ ảnh đến thấu kính xấp xỉ tiêu cự.

$\lim\limits_{p\to f^+} g(p)=+\infty$ nghĩa là khoảng cách từ vật đến thấu kính tiến gần về tiêu cự f thì khoảng cách từ ảnh đến thấu kính càng lớn.

c)

$q=g(p)=\frac{pf}{p-f}$ với $p\in(f;+\infty)$

Ta có $q'=\frac{-f^2}{(p-f)^2}<0,\ \forall p\in(f;+\infty)$

Do đó hàm số $q=g(p)$ nghịch biến trên khoảng $(f;+\infty)$

Bảng biến thiên:

p	f	$+\infty$
p'	$-$	
q	$+\infty$ ↘	f

PHẦN B

TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Một vật chuyển động theo quy luật $s=\frac{1}{3}t^3-t^2+9t,$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. $9\,m/s$. **B.** $8\,m/s$. **C.** $89\,m/s$ **D.** $100\,m/s$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $v(t)=s'(t)=t^2-2t+9$, với $0\le t\le 10$

$v'=2t-2\ \Rightarrow v'=0\Leftrightarrow t=1$

Bảng biến thiên:

t	0		1		10
$v'(t)$		$-$	0	$+$	
$v(t)$	$v(0)=9$	↘	$v(1)=8$	↗	$v(10)=89$

Từ bảng biến thiên, ta có: vận tốc lớn nhất là $89(\text{m/s})$.

Câu 2. Một đoàn tàu chuyển động thẳng khởi hành từ một nhà ga. Quảng đường s (mét) đi được của đoàn tàu là một hàm số của thời gian t (giây), hàm số đó là $s=6t^2-t^3,(t>0)$. Thời điểm t (giây) nào mà tại đó gia tốc của tàu bằng 0 ?

A. $t=1s$. **B.** $t=2s$. **C.** $t=3s$. **D.** $t=4s$.

Lời giải

Chọn B

Ta có vận tốc của đoàn tàu là: $v(t)=s'=12t-3t^2,(t>0)$

Gia tốc tốc của đoàn tàu là: $a(t)=v'(t)=12-6t$

$a(t)=0\Leftrightarrow 12-6t=0\Leftrightarrow t=2$

Câu 3. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t)=1+3t^2-t^3$. Vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi t bằng bao nhiêu

A. $t=2$. **B.** $t=1$. **C.** $t=3$. **D.** $t=4$.

Lời giải

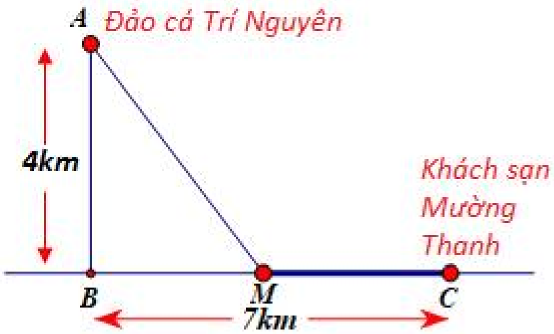
Chọn B

Chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t)=1+3t^2-t^3$. Vì vận tốc của chuyển động ở thời điểm t chính là $S'(t)$; ta đi tìm giá trị lớn nhất của hàm số $S'(t)$.

Ta có $S'(t)=\left(1+3t^2-t^3\right)'=6t-3t^2 \;=-3\left(t^2-2t\right)=3-3(t-1)^2\leq 3, \forall t\in\mathbb{R}$

$\max\limits_{\mathbb{R}} S'(t)=3$ khi $t-1=0\Leftrightarrow t=1$.

Câu 4. Đảo cá Trí Nguyên Nha Trang ở vị trí A cách đường Trần Phú một khoảng $AB=4(km)$. Trên đường Trần Phú có khách sạn Mường Thanh ở vị trí C cách B một khoảng $BC=7(km)$ (như hình vẽ).

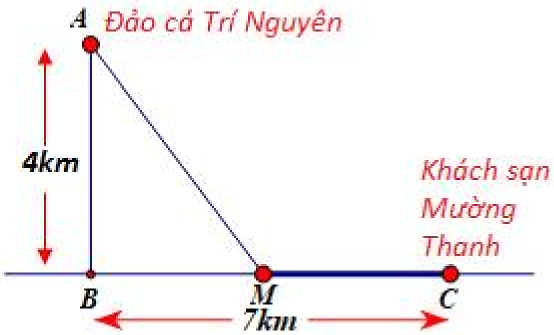


Bạn Minh Hiền phải đi ca nô từ vị trí Đảo cá Trí Nguyên đến vị trí M trên đường Trần Phú với vận tốc $6(km/h)$ rồi đi xe taxi từ M đến khách sạn Mường Thanh với vận tốc $10(km/h)$. Xác định khoảng cách từ M đến khách sạn Mường Thanh để bạn Minh Hiền đi từ Đảo cá Trí Nguyên đến khách sạn Mường Thanh là nhanh nhất.

A. $6km$. **B.** $3km$. **C.** $4km$. **D.** $9km$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $BM=x(km)\Rightarrow MC=7-x(km)$ với $0\leq x\leq 7$

Thời gian bạn Minh Hiền phải đi ca nô từ vị trí từ A đến M là: $t_{AM}=\dfrac{\sqrt{x^2+16}}{6}(h)$

Thời gian bạn Minh Hiền phải đi xe taxi từ M đến C là: $t_{MC}=\dfrac{7-x}{10}(h)$

Thời gian bạn Minh Hiền phải đi từ A đến C: $t(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+16}}{6}+\dfrac{7-x}{10}(h)$ với $0\le x\le 7$

Khi đó: $t'(x)=\dfrac{x}{6\sqrt{x^2+16}}-\dfrac{1}{10}=\dfrac{5x-3\sqrt{x^2+16}}{30\sqrt{x^2+16}}$ với $0\le x\le 7$

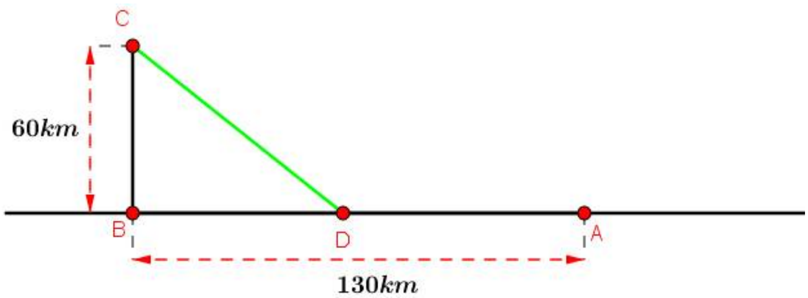
$t'(x)=0\Leftrightarrow 5x-3\sqrt{x^2+16}=0\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+16}=5x\Rightarrow x^2=9\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3(L)\\x=3(N)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		3		7
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
$t(x)$	$\dfrac{41}{30}$	$\searrow$	$\dfrac{37}{30}$	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{65}}{6}$

Từ bảng biến thiên, ta có: giá trị nhỏ nhất của $t(x)$ là $\dfrac{37}{30}$ tại $x=3$. Khi đó thời gian đi là ít nhất và điểm M nằm cách khách sạn Mường Thanh một đoạn $MC=7-3=4km$

Câu 5. Một kho hàng được đặt tại ví trí A trên bến cảng cần được chuyển tới kho C trên một đảo, biết rằng khoảng cách ngắn nhất từ kho C đến bờ biển AB bằng độ dài $CB=60\,km$ và khoảng cách giữa 2 điểm A, B là $AB=130\,km$ (như hình vẽ). Chi phí để vận chuyển toàn bộ kho hàng bằng đường bộ là 300.000 đồng/km, trong khi đó chi phí vận chuyển hàng bằng đường thủy là 500.000 đồng/km. Hỏi phải chọn điểm trung chuyển hàng D (giữa đường bộ và đường thủy) cách kho A một khoảng bằng bao nhiêu thì tổng chi phí vận chuyển hàng từ kho A đến kho C là ít nhất?



A. $45\,km$. **B.** $65\,km$. **C.** $85\,km$. **D.** $105\,km$.

Lời giải

Chọn C

Trước tiên, ta xây dựng hàm số $f(x)$ là hàm số tính tổng chi phí sử dụng.

Đặt $BD=x(km)$ thì ta được: $DA=130-x(km)$, $CD=\sqrt{x^2+3600}(km)$ với $0\le x\le 130$

Theo đề bài, chi phí để vận chuyển toàn bộ kho hàng bằng đường bộ là 300.000 đồng/km, trong khi đó chi phí vận chuyển hàng bằng đường thủy là 500.000 đồng/km, như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định như sau:

$f(x) = 300000.(130 - x) + 500000.\sqrt{x^2 + 3600}$ với $x \in [0;130]$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được số tiền ít nhất cần sử dụng và từ đó xác định được vị trí điểm *D*.

$$f'(x) = -300000 + 500000.\frac{x}{\sqrt{x^2 + 3600}}$$

$f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow -300000 + 500000.\frac{x}{\sqrt{x^2 + 3600}} = 0$$

$\Leftrightarrow -300000\sqrt{x^2 + 3600} + 500000x = 0$

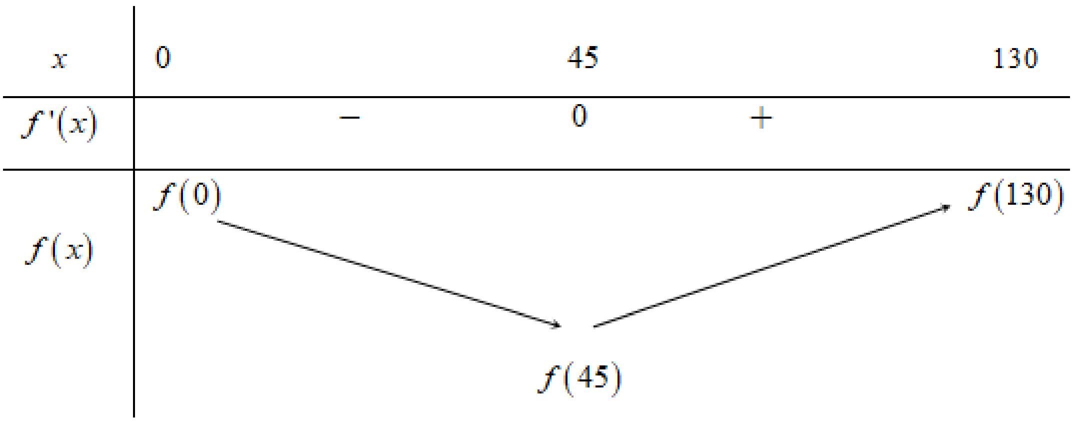
$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 + 3600} = 5x$

$\Rightarrow x^2 = 2025$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -45(L) \\ x = 45(N) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow x = 45$

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên, ta có: giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là $f(45)$ tại $x = 45$. Khi đó chi phí là thấp nhất và điểm D nằm cách A một đoạn $DA = 130 - 45 = 85km$.

Câu 6. Chi phí về nhiên liệu của một tàu hỏa được chia làm hai phần. Trong đó phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 ngàn đồng/giờ. Phần thứ hai tỷ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi v = 10km/h thì phần thứ hai bằng 30 ngàn đồng/giờ. Hãy xác định vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

A. $15(km/h)$ **B.** $10(km/h)$ **C.** $20(km/h)$ **D.** $5(km/h)$

Lời giải

Chọn A

Gọi $x(km/h)$ là vận tốc của tàu $\Rightarrow$ thời gian tàu đi $1km$ là $\frac{1}{x}$ giờ.

Phần chi phí thứ nhất là: $480.\frac{1}{x}=\frac{480}{x}$ (ngàn).

Giả sử, phần chi phí thứ 2 kí hiệu là y thì $y=kx^3 \Rightarrow k=\frac{y}{x^3}$.

Với $x=10 \Rightarrow y=\frac{1}{10}.30=3$ (ngàn) $\Rightarrow k=\frac{3}{1000}=0,003 \Rightarrow y=0,003x^3$.

Do đó, tổng chi phí là: $T=\frac{480}{x}+0,003x^3$.

Khảo sát hàm: $T\left(x\right)=\frac{480}{x}+0,003x^3$ với $x>0$

$T'\left(x\right)=-\frac{480}{x^2}+0,009x^2$

$T'\left(x\right)=0$

$\Leftrightarrow -\frac{480}{x^2}+0,009x^2=0$

$\Leftrightarrow x^4=\frac{480}{0,009}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=-\sqrt{\frac{480}{0,009}}\left(L\right) \\ x^2=\sqrt{\frac{480}{0,009}}\left(N\right) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt[4]{\frac{480}{0,009}}\left(L\right) \\ x=\sqrt[4]{\frac{480}{0,009}}\left(N\right) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt[4]{\frac{480}{0,009}}$		$+\infty$
$T'(x)$		$-$	0	$+$	
$T(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(50)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy: $T\left(x\right)$ đạt GTNN khi $x=\sqrt[4]{\frac{480}{0,009}}\approx 15(km/h)$.

Câu 7. Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu P (tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số $P(t)=\dfrac{25t^2+125}{t^2+1}$, $(0\le t\le 10)$, trong đó thời gian t được tính bằng giây. Tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây kể từ khi máu rời tim là:

A. $\dfrac{375}{13}$. **B.** $\dfrac{125}{13}$. **C.** $\dfrac{250}{169}$. **D.** $\dfrac{375}{169}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $P(t)=\dfrac{25t^2+125}{t^2+1}$, $(0\le t\le 10)$

Suy ra tốc độ thay đổi của huyết áp sau t giây là: $P'(t)=-\dfrac{200t}{\left(t^2+1\right)^2}$, $(0\le t\le 10)$

Tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây là : $P'(5)=-\dfrac{250}{169}$

Vậy tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây kể từ khi máu rời tim là giảm $\dfrac{250}{169}$

Câu 8. Người quản lí của một khu chung cư có 100 căn hộ cho thuê nhận thấy rằng tất cả các căn hộ sẽ có người thuê nếu giá thuê một căn hộ là 8 triệu đồng một tháng. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thuê căn hộ thêm 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Người quản lí nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là bao nhiêu để doanh thu là lớn nhất?

A. 800 000 000 (đồng). **B.** 8 100 000 (đồng).

C. 8 000 000 (đồng). **D.** 9 000 000 (đồng).

Lời giải

Chọn D

Gọi x là số lần tăng giá (0 < x < 100).

Mỗi lần tăng giá thì số căn hộ cho thuê là 100 – x (căn).

Số tiền thuê căn hộ sau mỗi lần tăng là: 8 000 000 + 100 000x.

Khi đó tổng số tiền cho thuê căn hộ 1 tháng là:

y = (8 000 000 + 100 000x)(100 – x)

= 800 000 000 – 8 000 000x + 10 000 000x – 100 000x^2

= 800 000 000 + 2 000 000x – 100 000x^2

Bài toán trở thành tìm x để y lớn nhất

Xét hàm f(x) = 800 000 000 + 2 000 000x – 100 000x^2 với 0 < x < 100.

Ta có f'(x) = −200 000x + 2 000 000;

f'(x) = 0 $\Leftrightarrow$ x = 10.

Bảng biến thiên:

x	0		10		100
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(10)$	$\searrow$	$f(100)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy doanh thu lớn nhất khi người quản lí đặt giá thuê căn hộ là 8 000 000 + 100 000.10 = 9 000 000 (đồng).

Câu 9. Một đội bóng đá thi đấu trong một sân vận động có sức chứa 55 000 khán giả. Với giá mỗi vé là 100 nghìn đồng, số khán giả trung bình là 27 000 người. Qua thăm dò dư luận, người ta thấy rằng mỗi khi giá vé giảm thêm 10 nghìn đồng, sẽ có thêm khoảng 3000 khán giả. Hỏi ban tổ chức nên đặt giá vé là bao nhiêu để doanh thu từ tiền bán vé là lớn nhất?

A. 100 000 (đồng).　　**B.** 80 000 (đồng).　　**C.** 90 000 (đồng).　　**D.** 95 000 (đồng).

Lời giải

Chọn D

Gọi x $(x > 0)$) là số lần giảm giá vé.

Khi đó giá vé sau khi giảm là $100 - 10x$ (nghìn đồng).

Sau mỗi lần giảm giá thì có thêm 3000x khán giả.

Do đó tổng số khán giả đến xem là 27000 + 3000x.

Vì sân vận động có sức chứa 55 000 khán giá nên

$27000 + 3000x \le 55000$

$\Leftrightarrow x \le \dfrac{28}{3}$

Doanh thu từ tiền bán vé là:

$$y = (27000 + 3000x)(100 - 10x) = -30000x^2 + 30000x + 2700000$$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = -30000x^2 + 30000x + 2700000 \quad (x > 0)$$

Tập xác định D = (0; +∞).

$$y' = -60000x + 30000$$

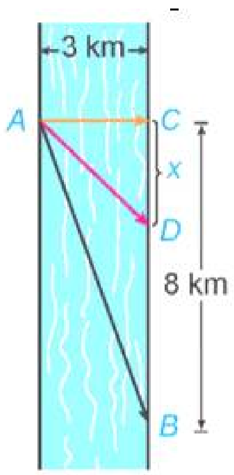
$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{28}{3}$
y'		$+$	0	$-$	
y	$y(0) = 270000$	$\nearrow$	$y\left(\frac{1}{2}\right) = 2707500$	$\searrow$	$y\left(\frac{28}{3}\right) = 2700000$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy ban tổ chức nên đặt giá vé là 95 nghìn đồng thì doanh thu tiền bán vé là lớn nhất.

Câu 10. Anh An chèo thuyền từ điểm A trên bờ một con sông thẳng rộng 3 km và muốn đến điểm B ở bờ đối diện cách 8 km về phía hạ lưu càng nhanh càng tốt (hình vẽ). Anh An có thể chèo thuyền trực tiếp qua sông đến điểm C rồi chạy bộ đến B, hoặc anh có thể chèo thuyền thẳng đến B, hoặc anh cũng có thể chèo thuyền đến một điểm D nào đó giữa C và B rồi chạy bộ đến B. Nếu vận tốc chèo thuyền là 6 km/h và vận tốc chạy bộ là 8 km/h thì anh An phải chèo thuyền sang bờ ở điểm nào để đến được B càng sớm càng tốt? (Giả sử rằng vận tốc của nước là không đáng kể so với vận tốc chèo thuyền của anh An).



A. Anh An phải chèo thuyền đến điểm D cách C một đoạn 8 km thì sẽ đến B sớm nhất.

B. Anh An phải chèo thuyền đến điểm D cách C một đoạn $\frac{9\sqrt{7}}{7}$ km thì sẽ đến B sớm nhất..

C. Anh An phải chèo thuyền đến điểm D cách C một đoạn $3\sqrt{7}$ km thì sẽ đến B sớm nhất..

D. Anh An phải chèo thuyền đến điểm D cách C một đoạn $\frac{\sqrt{73}}{6}$ km thì sẽ đến B sớm nhất..

Lời giải

Chọn B

Gọi độ dài đoạn CD là x (km, $0 \le x \le 8$).

Khi đó độ dài quãng đường AD là $\sqrt{x^2+9}$ (km).

Thời gian đi hết quãng đường AD là: $\frac{\sqrt{x^2+9}}{6}(h)$.

Độ dài quãng đường BD là $8-x(km)$

Thời gian đi hết quãng đường BD là: $\frac{8-x}{8}(h)$

Thời gian người đó đi đến B bằng cách chèo thuyền đến một điểm D nào đó giữa C và B rồi chạy bộ đến B là $\frac{\sqrt{x^2+9}}{6}+\frac{8-x}{8}(h)$.

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\sqrt{x^2+9}}{6}+\frac{8-x}{8} \quad (0 \le x \le 8)$

$y'=\frac{x}{6\sqrt{x^2+9}}-\frac{1}{8}$

$y'=0$

$\Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}}-\frac{1}{8}=0$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+9}=4x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 8 \\ x^2=\frac{81}{7} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=\frac{9\sqrt{7}}{7}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{9\sqrt{7}}{7}$		8
y'		$-$	0	$+$	
y	$y(0)=\frac{3}{2}$	$\searrow$	$y\left(\frac{9\sqrt{7}}{7}\right)=1+\frac{\sqrt{7}}{8}$	$\nearrow$	$y(8)=\frac{\sqrt{73}}{6}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy anh An phải chèo thuyền đến điểm D cách C một đoạn $\frac{9\sqrt{7}}{7}$ km thì sẽ đến B sớm nhất.

Câu 11. Từ một bờ tường có sẵn, người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 100 m thẳng hàng rào. Vậy làm thế nào để rào khu đất ấy theo hình chữ nhật sao cho có diện tích lớn nhất? Khi đó, chiều dài và chiều rộng hình chữ nhật là

A. 50 và 50 **B.** 30 và 20 **C.** 75 và 25 **D.** 25 và 25

Lời giải

Chọn D

Gọi $x(m), (0<x<50)$ là chiều rộng của hình chữ nhật

Khi đó, chiều dài của hình chữ nhật là $\frac{100-2x}{2}=50-x(m)$

Nên diện tích của hình chữ nhật là: $x(50-x)=-x^2+50x$

Xét hàm số: $f(x)=-x^2+50x$ với $0<x<50$

$\Rightarrow f'(x)=-2x+50$.

$f'(x)=0 \Rightarrow -2x+50=0 \Rightarrow x=25$

Bảng biến thiên:

x	0		25		50
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	625	$\searrow$	$f(50)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max\limits_{(0;50)} f(x) = f(25) = 625$

Vậy để rào khu đất ấy có diện tích lớn nhất theo hình chữ nhật có chiều rộng bằng 25 và chiều dài bằng 25

Nhận xét: *Hình chữ nhật có diện tích lớn nhất khi hình chữ nhật đó là hình vuông.*

Câu 12. Một xưởng cơ khí nhận làm những chiếc thùng phi chứa dầu với thể tích theo yêu cầu là 2000π lít mỗi chiếc. Hỏi bán kính đáy và chiều cao của thùng lần lượt bằng bao nhiêu để tiết kiệm vật liệu nhất?

A. $1m$ và $2m$ **B.** $1dm$ và $2dm$ **C.** $2m$ và $1m$ **D.** $2dm$ và $1dm$

Lời giải

Chọn D

Đổi $2000\pi(lit) = 2\pi(m^3)$.

Gọi bán kính đáy và chiều cao lần lượt là $x(m)$ và $h(m)$.

Ta có thể tích thùng phi $V = \pi x^2.h = 2\pi \Rightarrow h = \dfrac{2}{x^2}$

Vật liệu tỉ lệ thuận với diện tích toàn phần nên ta chỉ cần tìm x để diện tích toàn phần bé nhất.

$$S_{tp} = 2\pi x^2 + 2\pi x.h = 2\pi x\left(x + \frac{2}{x^2}\right) = 2\pi\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)$$

Xét hàm số: $f(x) = 2\pi\left(x^2 + \dfrac{2}{x}\right)$ với $x > 0$

$$f'(x) = 2\pi\left(2x - \frac{2}{x^2}\right)$$

$f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - \dfrac{2}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow x^3 = 1$

$\Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy: $f(x)$ GTNN tại $x=1$, khi đó $h=2$

Câu 13. Thầy Tiến muốn xây một bể chứa nước dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích $200m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công xây bể là 500.000 đồng/m². Hỏi thầy Tiến cần tốn chi phí thuê công nhân thấp nhất là bao nhiêu?

A. 85 triệu đồng. **B.** 50 triệu đồng. **C.** 100 triệu đồng. **D.** 120 triệu đồng.

Lời giải

Chọn A

Gọi $x(m)$ chiều rộng của đáy bể , với $x>0$

Ta có:

Chiều dài của đáy bể là $2x(m)$

Diện tích của đáy bể là $2x.x=2x^2\left(m^2\right)$

Chiều cao của bể là: $\dfrac{200}{2x^2}=\dfrac{100}{x^2}(m)$,

Diện tích các mặt bên và mặt đáy của bể là: $S=2x.\dfrac{100}{x^2}+2.2x.\dfrac{100}{x^2}+2x^2=\dfrac{600}{x}+2x^2\left(m^2\right)$

Chi phí thuê công nhân xây bể là: $T=500000\left(\frac{600}{x}+2x^2\right)$ đồng

Xét hàm số $T(x)=500000\left(\frac{600}{x}+2x^2\right)$ với $x>0$

$T'(x)=500000\left(-\frac{600}{x^2}+4x\right)$

$T'(x)=0$

$\Leftrightarrow -\frac{600}{x^2}+4x=0$

$\Leftrightarrow 4x^3=600$

$\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{150}$

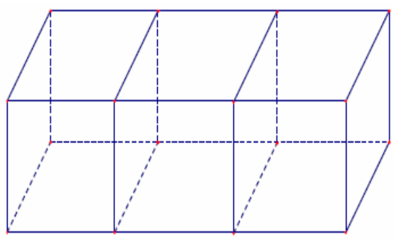
Bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt[3]{150}$		$+\infty$
$T'(x)$		$-$	0	$+$	
$T(x)$	$T(0)$	$\searrow$	$T\left(\sqrt[3]{150}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: GTNN của $T(x)$ là $T\left(\sqrt[3]{150}\right)\approx 84693243$ khi $x=\sqrt[3]{150}$

Vậy chi phí thấp nhất gần bằng là 85 triệu đồng

Câu 14. Một người xây nhà xưởng hình hộp chữ nhật có diện tích mặt sàn là 1152m^2 và chiều cao cố định. Người đó xây các bức tường xung quanh và bên trong để ngăn nhà xưởng thành ba phòng hình chữ nhật có kích thước như nhau (không kể trần nhà). Vậy cần phải xây các phòng theo kích thước nào để tiết kiệm chi phí nhất (bỏ qua độ dày các bức tường).

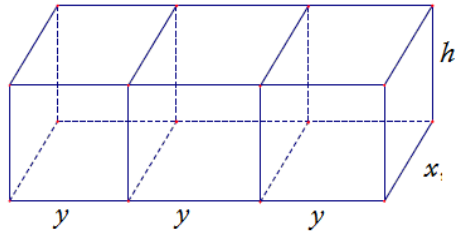


A. $24\text{m}\times 32\text{m}$. **B.** $8\text{m}\times 48\text{m}$. **C.** $12\text{m}\times 32\text{m}$. **D.** $16\text{m}\times 24\text{m}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $x,\ y,\ h$ lần lượt là chiều dài, chiều rộng và chiều cao mỗi phòng.



Theo giả thiết, ta có $x.3y = 1152 \Leftrightarrow y = \dfrac{384}{x}$.

Để tiết kiệm chi phí nhất khi diện tích toàn phần nhỏ nhất.

Ta có $S_{tp} = 4xh + 6yh + 3xy = 4xh + 6.\dfrac{384}{x}h + 1152 = 4h\left(x + \dfrac{576}{x}\right) + 1152$.

Vì h không đổi nên S_{tp} nhỏ nhất khi $f(x) = x + \dfrac{576}{x}$ (với $x > 0$) nhỏ nhất.

Xét hàm số: $f(x) = x + \dfrac{576}{x}$ với $x > 0$

$f'(x) = 1 - \dfrac{576}{x^2}$

$f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \dfrac{576}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 576 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -24\,(L) \\ x = 24\,(N) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		24		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(24)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: GTNN của $f(x)$ là $f(24) = 48$ khi $x = 24$

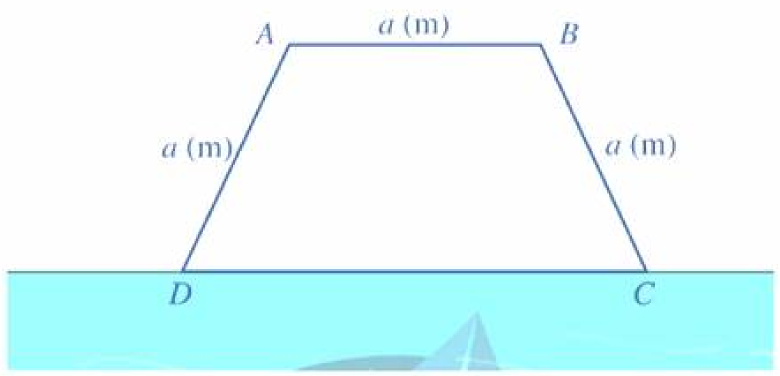
Vậy chiều dài, chiều rộng lần lượt là: $16\text{m} \times 24\text{m}$

Chú ý: Để tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x) = x + \dfrac{576}{x}$ (với $x > 0$) ta có thể dùng Cauchy như sau:

Áp dụng BĐT Cauchy $x + \dfrac{576}{x} \geq 2\sqrt{x.\dfrac{576}{x}} = 48$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \dfrac{576}{x} \Leftrightarrow x = 24 \Rightarrow y = 16$.

Câu 15. Một bác nông dân có ba tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài a (m) và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ (bờ sông là đường thẳng CD không phải rào). Hỏi bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?



A. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(m^2\right)$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}\left(m^2\right)$. **C.** $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}\left(m^2\right)$. **D.** $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}\left(m^2\right)$.

Lời giải

Chọn D

Dựng các đường cao AE và BF của hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ trên.

Vì $ABCD$ là hình thang cân nên $DE = FC$ và $EF = AB = a$.

Đặt $DE = FC = x\left(x > 0\right)$

Ta có $DC = DE + EF + FC = x + a + x = 2x + a$

Theo định lí Pythagore, ta suy ra $AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$

Ta thấy, x phải thỏa mãn điều kiện $0 < x < a$.

Diện tích của hình thang cân $ABCD$ là

$$S = \frac{1}{2}\left(AB + CD\right)AE = \frac{1}{2}\left(a + 2x + a\right)\sqrt{a^2 - x^2} = \left(a + x\right)\sqrt{a^2 - x^2}$$

Xét hàm số $S\left(x\right) = \left(a + x\right)\sqrt{a^2 - x^2}$ với $x \in \left(0; a\right)$

$$\Rightarrow S'\left(x\right) = \frac{-2x^2 - ax + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\Rightarrow S'\left(x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x^2 - ax + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 - ax + a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + a\right)\left(a - 2x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -a\left(loai\right) \\ x = \dfrac{a}{2}\left(nhan\right) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số $S\left(x\right)$ như sau:

x	0		$\frac{a}{2}$		a
S'(x)		+	0	−	
S(x)	a^2	↗	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$	↘	0

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ tại $x=\frac{a}{2}$.

Vậy bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ (m^2).

Câu 16. Bác Nam chia đất cho con trai để người con xây dựng nhà xưởng kinh doanh, biết người con sẽ được chọn miếng đất hình chữ nhật có chu vi bằng $800m$. Hỏi anh ta chọn mỗi kích thước của nó bằng bao nhiêu để diện tích xây dựng nhà xưởng kinh doanh lớn nhất?

A. $150m\times 250m$ **B.** $200m\times 200m$ **C.** $100m\times 300m$ **D.** $140m\times 260m$

Lời giải

Chọn B

Gọi $x(m)$ là chiều dài của miếng đất, với $0<x<400$

Suy ra chiều rộng của miếng đất là $\frac{800-2x}{2}=400-x(m)$

Diện tích miếng đất là : $S=x(400-x)=400x-x^2\left(m^2\right)$

Xét hàm số: $S(x)=-x^2+400x$ với $0<x<400$

$S(x)=-2x+400$.

$S'(x)=0$

$\Leftrightarrow x=200$

Bảng biến thiên:

x	0		200		400
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$	$S(0)$	$\nearrow$	40000	$\searrow$	$S(400)$

Từ bảng biến thiên ta được: $S_{\max} = 40000$ khi $x = 200 \Rightarrow y = 200$.

Vậy kích thước của miếng đất hình chữ nhật là 200×200 (là hình vuông).

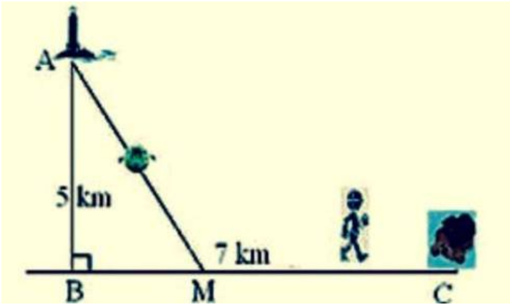
Chú ý: Để tìm $S(x) = -x^2 + 400x$ lớn nhất ta dùng kiến thức lớp 8 như sau nhanh hơn:

$$\begin{aligned} S(x) &= -x^2 + 400x \\ &= -\left(x^2 - 2.200x + 40000 - 40000\right) \\ &= -(x-200)^2 + 40000 \le 40000 \end{aligned}$$

Vậy $\max S(x) = 40000$ khi $x = 200$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 17. Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A có khoảng cách đến bờ biển $AB = 5(km)$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng $7(km)$ (như hình vẽ).



Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến M trên bờ biển với vận tốc $4(km/h)$ rồi đi bộ đến C với vận tốc $6(km/h)$. Gọi $x(km)$ là khoảng cách từ B đến M, với $0 \le x \le 7$.

a) Thời gian người canh hải đăng chèo đò từ A đến M là: $\dfrac{\sqrt{x^2+25}}{6}(h)$.

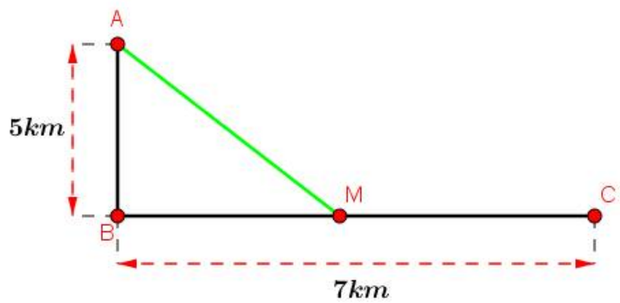
b) Thời gian người canh hải đăng đi bộ đi bộ từ M đến C là: $\dfrac{7-x}{4}(h)$.

c) Thời gian người canh hải đăng đi từ A đến kho C là: $\dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4}+\dfrac{7-x}{6}$.

d) Vị trí của điểm M cách B một khoảng $2\sqrt{5}km$ thì người canh hải đăng đi đến kho nhanh nhất.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**



Ta có $BM = x(km) \Rightarrow MC = 7 - x(km)$ với $0 \le x \le 7$

Thời gian người canh hải đăng chèo đò từ A đến M là: $t_{AM} = \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4}(h)$

Thời gian người canh hải đăng đi bộ đi bộ từ M đến C là: $t_{MC} = \dfrac{7-x}{6}(h)$

Thời gian người canh hải đăng đi từ A đến kho C: $t(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4}+\dfrac{7-x}{6}(h)$ với $0 \le x \le 7$

Khi đó: $t'(x)=\frac{x}{4\sqrt{x^2+25}}-\frac{1}{6}=\frac{3x-2\sqrt{x^2+25}}{12\sqrt{x^2+25}}$

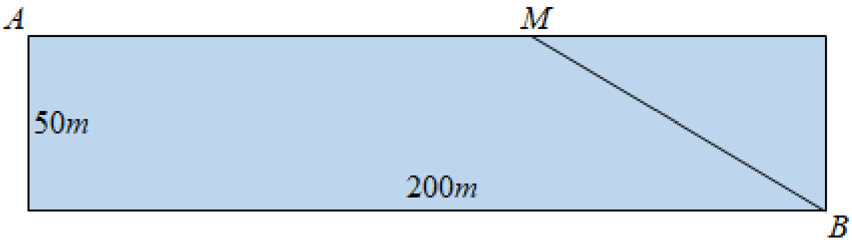
$t'(x)=0\Leftrightarrow 3x-2\sqrt{x^2+25}=0\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+25}=3x\Rightarrow x^2=20\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\sqrt{5}\,(L)\\x=2\sqrt{5}\,(N)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		$2\sqrt{5}$		7
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
$t(x)$	$\frac{29}{12}$	↘	$\frac{14+5\sqrt{5}}{12}$	↗	$\frac{\sqrt{74}}{4}$

Từ bảng biến thiên, ta có: giá trị nhỏ nhất của $t(x)$ là $\frac{14+5\sqrt{5}}{12}$ tại $x=2\sqrt{5}$. Khi đó thời gian đi là ít nhất và điểm M nằm cách B một đoạn $BM=x=2\sqrt{5}km$

Câu 18. Có một bể bơi hình chữ nhật rộng $50m$, dài $200m$. Một vận động viên chạy phối hợp với bơi như sau: Xuất phát từ điểm A, chạy đến điểm M và bơi từ điểm M đến điểm B (như hình vẽ). Biết vận tốc chạy $4,8m/s$, vận tốc bơi $2,4m/s$. Gọi $x(m)$ là khoảng cách từ A đến M, với $0\le x\le 200$.



a) Thời gian vận động viên chạy từ A đến M là: $\frac{\sqrt{(200-x)^2+50^2}}{4,8}(s)$

b) Thời gian vận động viên bơi từ M đến B là: $\frac{x}{2,4}(s)$

c) Thời gian vận động viên chạy phối hợp với bơi từ A đến B: $\frac{\sqrt{(200-x)^2+50^2}}{4,8}+\frac{x}{2,4}(s)$

d) Vận động viên chọn điểm M cách A gần bằng 29 mét thì đến B nhanh nhất (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

a)	b)	c)	d)

SAI	**SAI**	**SAI**	**SAI**

Ta có: $AM = x(m) \Rightarrow MB = \sqrt{(200-x)^2 + 50^2}\,(m)$ với $0 \le x \le 200$

Thời gian vận động viên chạy từ A đến M là: $t_{AM} = \dfrac{x}{4,8}(s)$

Thời gian vận động viên bơi từ M đến B là: $t_{MC} = \dfrac{\sqrt{(200-x)^2 + 50^2}}{2,4}(s)$

Thời gian vận động viên chạy phối hợp với bơi từ A đến B:

$t(x) = \dfrac{x}{4,8} + \dfrac{\sqrt{(200-x)^2 + 50^2}}{2,4}(s)$ với $0 \le x \le 200$

Khi đó: $t'(x) = \dfrac{1}{4,8} - \dfrac{200-x}{2,4\sqrt{(200-x)^2 + 50^2}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4,8} - \dfrac{200-x}{2,4\sqrt{(200-x)^2 + 50^2}} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{(200-x)^2 + 50^2} = 2(200-x)$

$\Rightarrow (200-x)^2 + 50^2 = 4(200-x)^2$

$\Rightarrow (200-x)^2 = \dfrac{50^2}{3}$

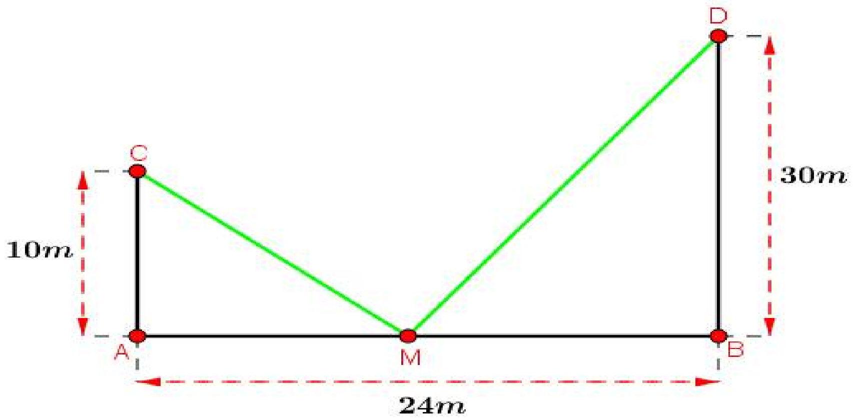
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 200 - \dfrac{50\sqrt{3}}{3}\,(N) \\ x = 200 + \dfrac{50\sqrt{3}}{3}\,(L) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	0		$200 - \dfrac{50\sqrt{3}}{3}$		200
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
$t(x)$	$t(0)$	$\searrow$	$t\left(200 - \dfrac{50\sqrt{3}}{3}\right)$	$\nearrow$	$t(200)$

Từ bảng biến thiên, ta có: giá trị nhỏ nhất của $t(x)$ là $t\left(200 - \dfrac{50\sqrt{3}}{3}\right)$ tại $x = 200 - \dfrac{50\sqrt{3}}{3} \approx 171(m)$. Khi đó thời gian là ít nhất và điểm M nằm cách A một đoạn $AM = x \approx 171(m)$

Câu 19. Nhà Văn hóa Thanh niên của thành phố Nha Trang muốn trang trí đèn dây led gần cổng để đón ngày Quốc Khánh $2-9$ nên đã nhờ bạn Nam đến giúp. Ban giám đốc Nhà Văn hóa Thanh niên chỉ cho bạn Nam biết chỗ chuẩn bị trang trí đã có hai trụ đèn cao áp mạ kẽm đặt cố định ở vị trí A và B có độ cao lần lượt là $10m$ và $30m$, khoảng cách giữa hai trụ đèn $24m$ và cũng yêu cầu bạn Nam chọn một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất nằm giữa hai chân trụ đèn để giăng đèn dây Led nối đến hai đỉnh C và D của trụ đèn (như hình vẽ). Đặt $MB = x(m)$ với $0 \le x \le 24$.



a) Chiều dài đèn dây Led giăng từ C đến chốt M rồi đến D là: $\sqrt{(24-x)^2+10^2}+\sqrt{x^2+30^2}\,(m)$

b) Khi vị trí chốt M đến trụ đèn cao áp B nằm trong khoảng $(0;18)$ thì tổng chiều dài đèn dây Led giăng từ C đến chốt M rồi đến D sẽ tăng.

c) Khi vị trí chốt M đến trụ đèn cao áp B nằm trong khoảng $(18;24)$ thì tổng chiều dài đèn dây Led giăng từ C đến chốt M rồi đến D sẽ giảm.

d) Bạn Nam phải đặt chốt M ở vị trí cách trụ đèn B trên mặt đất là $6m$ thì tổng độ dài của hai sợi dây đèn led ngắn nhất.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

Đặt $MB = x(m) \Rightarrow AM = 24 - x(m)$ với $0 \le x \le 24$

Chiều dài đèn dây Led giăng từ C đến M là: $CM = \sqrt{(24-x)^2+10^2}\,(m)$

Chiều dài đèn dây Led giăng từ D đến M là: $CM = \sqrt{x^2+30^2}\,(m)$

Chiều dài đèn dây Led giăng từ C đến chốt M rồi đến D là: $\sqrt{(24-x)^2+10^2}+\sqrt{x^2+30^2}\,(m)$

Như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định bằng tổng quãng đường CM và MD:

$f(x)=\sqrt{(24-x)^2+10^2}+\sqrt{x^2+30^2}$ với $x \in [0;24]$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được quãng đường ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm *M*.

$$f'(x) = -\frac{24-x}{\sqrt{(24-x)^2+10^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+30^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{24-x}{\sqrt{(24-x)^2+10^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+30^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+30^2}} = \frac{24-x}{\sqrt{(24-x)^2+10^2}}$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{(24-x)^2+10^2} = (24-x)\sqrt{x^2+30^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left[(24-x)^2+10^2\right] = (24-x)^2\left(x^2+30^2\right) \\ 0 \le x \le 24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (10x)^2 = \left[30(24-x)\right]^2 \\ 0 \le x \le 24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x = 30(24-x) \;\; hay \;\; 10x = -30(24-x) \\ 0 \le x \le 24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \;\; hay \;\; x = 36 \\ 0 \le x \le 24 \end{cases} \Leftrightarrow x = 18$$

Bảng biến thiên:

x	0		18		24
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(18) = 8\sqrt{34}$	$\nearrow$	$f(24)$

Từ bảng biến thiên, ta có:

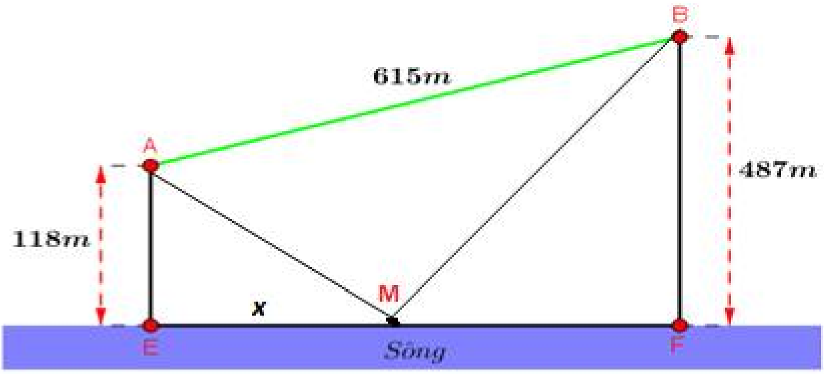
+ Khi vị trí chốt M đến trụ đèn cao áp B nằm trong khoảng $(0;18)$ thì tổng chiều dài đèn dây Led giăng từ C đến chốt M rồi đến D sẽ giảm.

+ Khi vị trí chốt M đến trụ đèn cao áp B nằm trong khoảng $(18;24)$ thì tổng chiều dài đèn dây Led giăng từ C đến chốt M rồi đến D sẽ tăng.

+ giá trị nhỏ nhất là $f(18) = 8\sqrt{34}$ tại $x = 18$

Khi đó Bạn Nam phải đặt chốt M ở vị trí cách trụ đèn B trên mặt đất là $18m$ thì tổng độ dài của hai sợi dây đèn led ngắn nhất.

Câu 20. Cho hai vị trí A, B cách nhau 615m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ.



Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118m và 487m. Bạn An đi từ A đến M trên bờ sông để lấy nước và mang về B. Đặt $EM = x$, với $0 \le x \le 492$.

a) Quãng đường bạn An đi từ A đến M là: $AM = \sqrt{x^2 + 118^2}\,(m)$

b) Quãng đường bạn An đi từ M đến B là: $BM = \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}\,(m)$

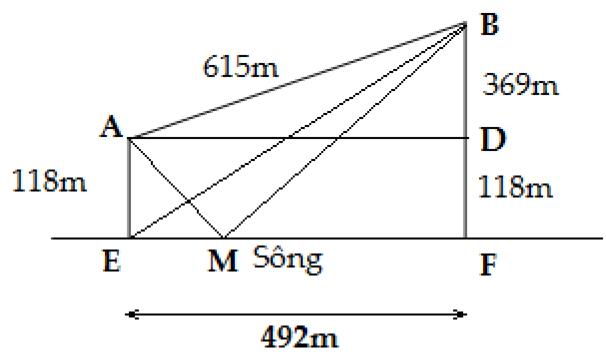
c) Quãng đường bạn An đi từ A đến M trên bờ sông để lấy nước và mang về B là:

$\sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}\,(m)$

d) Đoạn đường ngắn nhất mà bạn An phải đi A từ đến bờ sông lấy nước và mang về B là $741m$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**



Ta có $EM = x$, với $0 \le x \le 492$

Ta dễ dàng tính được:

$BD = BF - DF = BF - AE = 487 - 118 = 369\,(m)$

$EF = AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{615^2 - 369^2} = 492\,(m)$

Khi đó ta được: $MF = 492 - x\,(m)$

Quãng đường bạn An đi từ A đến M là: $AM=\sqrt{x^2+118^2}\,(m)$

Quãng đường bạn An đi từ M đến B là: $BM=\sqrt{(492-x)^2+487^2}\,(m)$

Quãng đường bạn An đi từ A đến M trên bờ sông để lấy nước và mang về B là: $AM+MB=\sqrt{x^2+118^2}+\sqrt{(492-x)^2+487^2}\,(m)$

Như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định bằng tổng quãng đường AM và MB:

$f(x)=\sqrt{x^2+118^2}+\sqrt{(492-x)^2+487^2}$ với $x\in[0;492]$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được quãng đường ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm M.

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+118^2}}-\frac{492-x}{\sqrt{(492-x)^2+487^2}}.$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2+118^2}}-\frac{492-x}{\sqrt{(492-x)^2+487^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2+118^2}}=\frac{492-x}{\sqrt{(492-x)^2+487^2}}$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{(492-x)^2+487^2}=(492-x)\sqrt{x^2+118^2}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\left[(492-x)^2+487^2\right]=(492-x)^2\left(x^2+118^2\right)\\0\le x\le 492\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(487x)^2=(58056-118x)^2\\0\le x\le 492\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{58056}{605}\ hay\ x=-\frac{58056}{369}\\0\le x\le 492\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{58056}{605}$$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{58056}{605}$		429
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f\left(\frac{58056}{605}\right)$	$\nearrow$	$f(429)$

Từ bảng biến thiên, ta có: giá trị nhỏ nhất là $f\left(\frac{58056}{605}\right)\approx 780m$ tại $x=\frac{58056}{605}$

Khi đó đoạn đường ngắn nhất mà bạn An phải đi là: $780m$

Câu 21. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là $400km$. Vận tốc dòng nước là $10km/h$. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v(km/h), v > 10$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là một hằng số, E được tính bằng jun.

a) Khi bơi ngược dòng vận tốc của cá là: $v - 10(km/h)$.

b) Thời gian để cá vượt khoảng cách 400 km là $\frac{400}{v-10}(h)$.

c) Năng lượng tiêu hao của cá khi vượt khoảng cách 400km là: $400cv^3(v-10)(jun)$.

d) Khi nước đứng yên, cá phải bơi với vận tốc $18(km/h)$ thì ít tiêu hao năng lượng ít nhất.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Khi bơi ngược dòng vận tốc của cá là: $v - 10(km/h)$ với $v > 10$

Thời gian để cá vượt khoảng cách 400 km là $t = \frac{400}{v-10}(h)$

Năng lượng tiêu hao của cá khi vượt khoảng cách 400km là: $E(v) = cv^3.\frac{400}{v-10} = 400c.\frac{v^3}{v-10}(jun)$

Xét hàm số: $E(v) = 400c.\frac{v^3}{v-10}$ với $v > 10$

$$E'(v) = 400c.\frac{v^2(2v-30)}{(v-10)^2}$$

$$E'(v) = 0 \Leftrightarrow v^2(2v-30) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 0(L) \\ v = 15(N) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

v	10		15		$+\infty$
$E'(v)$		$-$	0	$+$	
$E(v)$	$+\infty$	$\searrow$	$E(15)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có: Cá phải bơi với vận tốc $15(km/h)$ thì ít tiêu hao năng lượng ít nhất.

Câu 22. Một chuyến xe buýt có sức chứa tối đa là 60 hành khách. Nếu một chuyến xe chở x hành khách thì giá cho mỗi hành khách là $\left(3-\frac{x}{40}\right)^2$ USD .

a) Số tiền thu được trong một chuyến xe buýt là : $\frac{x^3}{1600}-\frac{3}{20}x^2+9x$ (USD), với $0\le x\le 60, x\in\mathbb{N}$.

b) Nếu một chuyến xe buýt chở lượng khách trong khoảng $(0;40)$ thì thu được số tiền sẽ giảm dần.

c) Nếu một chuyến xe buýt chở lượng khách trong khoảng $(40;60)$ thì thu được số tiền sẽ tăng dần.

d) Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất bằng 40 (USD).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

Số tiền thu được trong một chuyến xe buýt là :

$$f(x)=x\left(3-\frac{x}{40}\right)^2=\frac{x^3}{1600}-\frac{3}{20}x^2+9x \text{ (USD) với } 0\le x\le 60, x\in\mathbb{N}$$

Xét hàm số: $f(x)=\frac{x^3}{1600}-\frac{3}{20}x^2+9x$ với $0\le x\le 60, x\in\mathbb{N}$

$$f'(x)=\frac{3x^2}{1600}-\frac{3}{10}x+9$$

$f'(x)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x^2}{1600}-\dfrac{3}{10}x+9=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=40\,(N) \\ x=120\,(L) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		40		60
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$			160		
	$f(0)$	$\nearrow$		$\searrow$	$f(60)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

+ Nếu một chuyến xe buýt chở lượng khách trong khoảng $(0;40)$ thì thu được số tiền sẽ tăng dần.

+ Nếu một chuyến xe buýt chở lượng khách trong khoảng $(40;60)$ thì thu được số tiền sẽ giảm dần.

+ Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất bằng 160 (USD).

Câu 23. Một công ty vận tải ở Nha Trang đang dự định mở tuyến xe đi từ Nha Trang ra Đà Nẵng. Mỗi chuyến xe có sức chứa tối đa là 60 hành khách. Một chuyến xe chở x hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là $30\left(3-\dfrac{x}{40}\right)^2$ (nghìn đồng), với $0\le x\le 60, x\in\mathbb{N}$. Chi phí vận hành mỗi chuyến xe đi từ Nha Trang ra Đà Nẵng là 3000000 (đồng).

a) Số tiền thu được từ x hành khách trong một chuyến xe là : $30x\left(3-\dfrac{x}{40}\right)^2$ (nghìn đồng)

b) Số tiền mà công ty thu được lợi nhuận nhiều nhất trong một chuyến xe là $30\left(\dfrac{x^3}{1600}-\dfrac{3}{20}x^2+9x\right)-3000000$ (nghìn đồng).

c) Để công ty thu được lợi nhuận nhiều nhất thì mỗi chuyến chở 40 hành khách.

d) Số tiền mà công ty thu được lợi nhuận nhiều nhất trong một chuyến xe là 4800000 đồng.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

Ta có $0 \le x \le 60, x \in \mathbb{N}$

Số tiền thu được từ x hành khách trong một chuyến xe là : $30x\left(3-\dfrac{x}{40}\right)^2$ (nghìn đồng)

Số tiền mà công ty thu được lợi nhuận nhiều nhất trong một chuyến xe là :

$$30x\left(3-\frac{x}{40}\right)^2-3000=30\left(\frac{x^3}{1600}-\frac{3}{20}x^2+9x\right)-3000 \text{ (nghìn đồng)}$$

Xét hàm số: $f(x)=30\left(\dfrac{x^3}{1600}-\dfrac{3}{20}x^2+9x\right)-3000$ với $0 \le x \le 60, x \in \mathbb{N}$

$$f'(x)=30\left(\frac{3x^2}{1600}-\frac{3}{10}x+9\right)$$

$$f'(x)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2}{1600}-\frac{3}{10}x+9=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=40\,(N) \\ x=120\,(L) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	0		40		60
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	1800	$\searrow$	$f(60)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

\+ Nếu một chuyến xe buýt chở lượng khách trong khoảng $(0;40)$ thì thu được số tiền sẽ tăng dần.

\+ Nếu một chuyến xe buýt chở lượng khách trong khoảng $(40;60)$ thì thu được số tiền sẽ giảm dần.

\+ Số tiền mà công ty thu được lợi nhuận nhiều nhất trong một chuyến xe là 1800000 đồng khi có 40 hành khách.

Câu 24. Công ty in Khatoco Khánh Hòa muốn xuất bản $x\left(x \in \mathbb{N}^*\right)$ cuốn tạp chí giới thiệu về các địa điểm Du Lịch của tỉnh Khánh Hòa. Công ty đã khảo sát, tính được chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in…) được cho bởi $C(x) = x^2 - 2000x + 100000000$ (đồng) và chi phí phát hành (bao gồm: chi phí quảng cáo và vận chuyển đến các nhà sách) cho mỗi cuốn tạp chí là 4000 đồng.

a) Chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn tạp chí là: $\dfrac{x^2 - 2000x + 10000000}{x}$ (đồng)

b) Nếu công ty xuất bản số tạp chí trong khoảng $(0;10000)$ cuốn thì chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn tạp chí sẽ tăng.

c) Nếu công ty xuất bản số tạp chí lớn hơn 10000 cuốn thì chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn tạp chí sẽ giảm.

d) Chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn tạp chí thấp nhất là 22000 đồng.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

Ta có:

+ Chi phí phát hành cho x cuốn tạp chí là $4000x$ (đồng)

+ Tổng chi phí xuất bản và phát hành cho x cuốn tạp chí là:

$C(x) + 4000x = x^2 - 2000x + 100000000 + 4000x = x^2 + 2000x + 10000000$ (đồng)

+ Chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn tạp chí là: $T(x) = \dfrac{x^2 + 2000x + 10000000}{x}$ (đồng)

Xét hàm số: $T(x) = \dfrac{x^2 + 2000x + 10000000}{x}$ với $x \in \mathbb{N}^*$

$T'(x) = \dfrac{x^2 - 100000000}{x^2}$

$T'(x) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 100000000 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 100000000$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -10000\,(L) \\ x = 10000\,(N) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		10000		$+\infty$
$T'(x)$		$-$	0	$+$	
$T(x)$	$T(0)$	$\searrow$	22000	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

\+ Nếu công ty xuất bản số tạp chí trong khoảng $(0;10000)$ cuốn thì chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn tạp chí sẽ giảm.

\+ Nếu công ty xuất bản số tạp chí lớn hơn 10000 cuốn thì chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn tạp chí sẽ tăng.

\+ Chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn tạp chí thấp nhất là 22000 đồng khi sản xuất 10000 cuốn tạp chí

Câu 25. Cửa hàng Điện Máy Chợ Lớn Nha Trang bán lẻ được 2500 cái ti vi mỗi năm. Để đặt hàng về bán, chi phí cố định cho mỗi lần đặt là 2000000 (đồng) cộng thêm 900000 (đồng) mỗi cái. Mỗi lần cửa hàng đặt hàng về, một nửa số lượng đó được gởi vào kho chứa hàng, biết chi phí gởi trong kho chứa hàng là 1000000 (đồng) một cái mỗi năm. Gọi x là số ti vi mà cửa hàng đặt mỗi lần với $1 \le x \le 2500, x \in \mathbb{Z}$.

a) Chi phí mỗi năm gởi ti vi trong kho chứa hàng cho mỗi lần đặt hàng về bán là $500000x$ (đồng)

b) Số lần đặt hàng về bán mỗi năm là $\dfrac{2500}{x}$ (lần).

c) Chi phí mỗi lần đặt hàng về bán là $2900000.\dfrac{2500}{x}$ (đồng).

d) Cửa hàng nên đặt hàng về bán mỗi lần 500 cái ti vi để tổng chi phí mà cửa hàng phải trả cho mỗi lần đặt là nhỏ nhất.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Ta có x là số ti vi mà cửa hàng đặt mỗi lần, với $1 \le x \le 2500, x \in \mathbb{Z}$

Số lượng ti vi gởi trong kho chứa hàng là $\frac{x}{2}$ nên chi phí lưu kho tương ứng là :

$\frac{x}{2}.1000000 = 500000x$ (đồng)

Số lần đặt hàng về bán mỗi năm là $\frac{2500}{x}$ và chi phí đặt hàng là : $\frac{2500}{x}(2000000+900000x)$ (đồng).

Khi đó tổng chi phí mà cửa hàng phải trả cho mỗi lần đặt là:

$\frac{2500}{x}(2000000+900000x)+500000x = 5.10^5.\left(x+\frac{10000}{x}+4500\right)$ (đồng)

Xét hàm số: $f(x) = 5.10^5.\left(x+\frac{10000}{x}+4500\right)$ với $1 \le x \le 2500, x \in \mathbb{Z}$

$f'(x) = 5.10^5.\left(1-\frac{10000}{x^2}\right)$

$f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow 1-\frac{10000}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 10000$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 100\,(N) \\ x = -100\,(L) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	1		100		2500
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	↘	2350000000	↗	$f(2500)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Cửa hàng nên đặt hàng về bán mỗi lần 100 cái ti vi để tổng chi phí mà cửa hàng phải trả cho mỗi lần đặt là nhỏ nhất.

Câu 26. Công ty bất động sản Sealand Nha Trang có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 000 000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 100 000 đồng một tháng thì có thêm hai căn hộ bị bỏ trống. Gọi x là số lần tăng giá căn hộ với $0 < x < 25, x \in \mathbb{N}$.

a) Mỗi lần tăng giá thì số căn hộ cho thuê là $50 - x$ (căn).

b) Số tiền thuê một căn hộ sau mỗi lần tăng là: $2000000 + 100000x$ (đồng).

c) Tổng số tiền cho thuê căn hộ 1 tháng là: $200000\left(-x^2 + 5x + 600\right)$ (đồng).

d) Để doanh thu lớn nhất thì công ty đặt giá thuê mỗi căn hộ là 2250000 (đồng).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Ta có x là số lần tăng giá căn hộ, với $0 < x < 25, x \in \mathbb{N}$

Mỗi lần tăng giá thì số căn hộ cho thuê là $50 - 2x$ (căn).

Số tiền thuê một căn hộ sau mỗi lần tăng là: $2000000 + 100000x$

Khi đó tổng số tiền cho thuê căn hộ 1 tháng là:

$$T(x) = (50 - 2x)(2000000 + 100000x) = 200000\left(-x^2 + 5x + 600\right)$$

Bài toán trở thành tìm x để $T(x)$ lớn nhất

$T(x) = 200000\left(-x^2 + 5x + 600\right)$ với $0 < x < 25$

$T'(x) = 200000(5 - 2x)$

$T'(x) = 0$

$\Leftrightarrow 200000(5 - 2x) = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{5}{2}$		25
$T'(x)$		$+$	0	$-$	
$T(x)$	$T(0)$	$\nearrow$	$T\left(\frac{5}{2}\right)$	$\searrow$	$T(25)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy doanh thu lớn nhất khi công ty đặt giá thuê căn hộ là:

$2000000+100000x=2000000+100000.\dfrac{5}{2}=2250000$ (đồng).

Câu 27. Ban quản lí chung cư Mường Thanh Nha Trang có 150 căn hộ cho thuê, biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 5 căn hộ bị bỏ trống.

a) Gọi x là số lần tăng giá căn hộ thì số tiền thuê một căn hộ sau mỗi lần tăng là: $2000000+100000x$ (đồng), với $0<x<30$.

b) Khi số lần tăng giá căn hộ nằm trong khoảng $(0;5)$ thì tổng doanh thu sẽ giảm so với ban đầu khi chưa tăng giá căn hộ.

c) Khi số lần tăng giá căn hộ nằm trong khoảng $(5;30)$ thì tổng doanh thu sẽ tăng so với ban đầu khi chưa tăng giá căn hộ.

d) Để doanh thu lớn nhất thì công ty đặt giá thuê mỗi căn hộ là 2250000 (đồng).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

Gọi x là số lần tăng giá căn hộ, với $0<x<30$

Mỗi lần tăng giá thì số căn hộ cho thuê là $150-5x$ (căn).

Số tiền thuê một căn hộ sau mỗi lần tăng là: $2000000+100000x$

Khi đó tổng số tiền cho thuê căn hộ 1 tháng là:

$T(x) = (150 - 5x)(2000000 + 100000x) = 500000(-x^2 + 10x + 600)$

Ta xét hàm $T(x)$

$T(x) = 500000(-x^2 + 10x + 600)$ với $0 < x < 30$

$T'(x) = 500000(10 - 2x)$

$T'(x) = 0$

$\Leftrightarrow 500000(10 - 2x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 5$

Bảng biến thiên:

x	0		5		30
$T'(x)$		$+$	0	$-$	
$T(x)$	$T(0)$	$\nearrow$	$T(5)$	$\searrow$	$T(30)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

+ Khi số lần tăng giá căn hộ nằm trong khoảng $(0;5)$ thì tổng doanh thu sẽ tăng so với ban đầu khi chưa tăng giá căn hộ.

+ Khi số lần tăng giá căn hộ nằm trong khoảng $(5;30)$ thì tổng doanh thu sẽ giảm so với ban đầu khi chưa tăng giá căn hộ.

+ doanh thu lớn nhất khi ban quản lí chung cư đặt giá thuê căn hộ là:

$2000000 + 100000x = 2000000 + 100000.5 = 2500000$ (đồng).

Vậy để doanh thu lớn nhất thì công ty đặt giá thuê mỗi căn hộ là 2500000 (đồng).

Câu 28. Một quán cà phê Highland Nha Trang sắp khai trương, đang nghiên cứu thị trường để định giá bán cho mỗi cốc cà phê. Sau khi nghiên cứu, người quản lý thấy rằng nếu bán với giá 20000 đồng một cốc thì mỗi tháng trung bình sẽ bán được 2000 cốc, còn từ mức giá 20000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì sẽ bán ít đi 100 cốc. Biết chi phí nguyên vật liệu để pha một cốc cà phê không thay đổi là 18000 đồng. Gọi x là số lần tăng giá cốc cà phê, với $0 < x < 20$.

a) Sau x là số lần tăng giá thì số cốc cà phê bán được là $2000 - x$ (cốc).

b) Chi phí nguyên vật liệu để pha cà phê mỗi tháng là $(2000 - x)18000$ đồng

c) Lợi nhuận thu được mỗi tháng là: $100000(-x^2 + 18x + 240)$ đồng

d) Quán cà phê Highland Nha Trang phải bán mỗi cốc cà phê với giá 29000 đồng thì đạt lợi nhuận lớn nhất.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Gọi x là số lần tăng giá cốc phê, với $0 < x < 20$

Sau x là số lần tăng giá thì số cốc cà phê bán được là $2000 - 100x$ (cốc).

Số tiền cốc phê sau mỗi lần tăng là: $20000 + 1000x$ đồng

Chi phí nguyên vật liệu để pha cà phê mỗi tháng là $(2000 - 100x)18000$ đồng

Số tiền thu được mỗi tháng là $(20000 + 1000x)(2000 - 100x)$ đồng

Khi đó, lợi nhuận thu được mỗi tháng là:

$T(x) = (20000 + 1000x)(2000 - 100x) - (2000 - 100x)18000 = 100000(-x^2 + 18x + 240)$ đồng

Bài toán trở thành tìm x để $T(x)$ lớn nhất

$T(x) = 100000(-x^2 + 18x + 240)$ với $0 < x < 20$

$T'(x) = 100000(18 - 2x)$

$T'(x) = 0$

$\Leftrightarrow 100000(18 - 2x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 9$

Bảng biến thiên:

x	0		9		20
$T'(x)$		$+$	0	$-$	
$T(x)$			$T(9)$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$T(0)$				$T(20)$

Căn cứ vào bảng biến thiên trên, ta có

Lợi nhuận thu được lớn nhất mỗi tháng là: $T(9)=100000\left(-9^2+18.9+240\right)=32100000$ đồng khi $x=9$

Vậy phải bán mỗi cốc cà phê với giá $20000+1000x=20000+1000.9=29000$ đồng thì đạt lợi nhuận lớn nhất.

Chú ý: Để tìm $T(x)$ lớn nhất ta dùng kiến thức lớp 8 như sau nhanh hơn:

$$\begin{aligned}T(x)&=100000\left(-x^2+18x+240\right)\\&=100000\left[\left(-x^2+18x-81\right)+321\right]\\&=100000\left[-(x-9)^2+321\right]\le 100000.321=32100000\end{aligned}$$

Vậy $\max T(x)=32100000$ khi $x=9$

Câu 29. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được xác định bởi công thức $G(x)=0,024x^2(30-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp (x được tính bằng mg). Tìm lượng thuốc để tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp để huyết áp giảm nhiều nhất.

a) Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân nằm trong khoảng $(0;20)$ mg thì huyết áp bệnh nhân sẽ tăng.

a) Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân lớn hơn 20 mg thì huyết áp bệnh nhân sẽ giảm.

c) Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là 20 mg.

d) Độ giảm huyết áp giảm nhiều nhất sau khi bệnh nhân tiêm thuốc là 96.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Ta có: $G(x)=0,024x^2(30-x)=0,72x^2-0,024x^3, x>0$

$G'(x)=1,44x-0,072x^2$

$G'(x)=0$

$\Leftrightarrow 1,44x-0,072x^2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0(L) \\ x=20(N) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		20		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	96	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy

a) Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân nằm trong khoảng $(0;20)$ mg thì huyết áp bệnh nhân sẽ giảm.

a) Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân lớn hơn 20 mg thì huyết áp bệnh nhân sẽ tăng.

c) Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là 20 mg.

d) Độ giảm huyết áp giảm nhiều nhất sau khi bệnh nhân tiêm thuốc là 96.

Câu 30. Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y=t^3-12t+3, \ (t\geq 0)$

a) Hàm vận tốc là: $v(t)=y'=3t^2-12, \ (t\geq 0)$ và hàm gia tốc là $a(t)=6t, \ (t\geq 0)$.

b) Hạt chuyển động lên trên khi $t>2$ và hạt chuyển động xuống dưới khi $t<2$.

c) Quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian $0\leq t\leq 3$ là 9 m.

d) Hạt tăng tốc khi $t>2$ và hạt giảm tốc khi $0<t<2$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Hàm vận tốc là: $v(t)=y'=3t^2-12, \ (t\geq 0)$

Hàm gia tốc là $a(t)=v'(t)=6t, \ (t\geq 0)$

b) Hạt chuyển động lên trên khi $v(t)>0 \Leftrightarrow 3t^2-12>0 \Leftrightarrow t>2, \ (do\ t\geq 0)$

Hạt chuyển động xuống dưới khi $v(t)<0 \Leftrightarrow 3t^2-12<0 \Leftrightarrow 0<t<2$

c) Quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian $0 \le t \le 3$.

Ta có $y(3)-y(0)=-9$

Quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian $0<t<3$ là 9m

d) Hạt tăng tốc khi $v'(t)>0 \Leftrightarrow 6t>0 \Leftrightarrow t>0$

Hạt giảm tốc khi $v'(t)<0 \Leftrightarrow 6t<0 \Leftrightarrow t<0$ loại vì $t \ge 0$

Vậy hạt tăng tốc khi $t>0$ và hạt không giảm tốc

Câu 31. Một nhà sản xuất trung bình bán được 1000 ti vi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 14 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng, số lượng ti vi bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 ti vi mỗi tuần. Gọi p (triệu đồng) là giá của mỗi ti vi, x là số ti vi với $x>0, x \in \mathbb{N}$.

a) Hàm cầu là $P=-\dfrac{1}{200}x+19$ (triệu đồng).

b) Tổng doanh thu từ tiền bán ti vi là $200p^2+3800p$ (triệu đồng).

c) Công ty giảm giá 4,5 triệu đồng cho người mua thì doanh thu của công ty sẽ lớn nhất.

d) Nếu hàm chi phí hằng tuần là C(x) = 12000 – 3x (triệu đồng), trong đó x là số ti vi bán ra trong tuần, nhà sản xuất nên đặt giá bán 8 triệu đồng thì lợi nhuận là lớn nhất.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Gọi p (triệu đồng) là giá của mỗi ti vi, x là số ti vi.

Khi đó ta cần xác định hàm cầu $p=p(x)$

Theo giả thiết tốc độ thay đổi của x tỉ lệ với tốc độ thay đổi của p nên hàm số $p=p(x)$ là hàm số bậc nhất. Do đó $p(x)=ax+b\,(a \ne 0)$

Theo đề có: $x_1=1000$ thì $p_1=14$; $x_2=1100$ thì $p_1=13,5$.

Khi đó phương trình đường thẳng $p(x)=ax+b\left(a\neq 0\right)$ đi qua hai điểm (1000; 14) và (1100; 13,5) nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}1000a+b=14\\1100a+b=1,35\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{200}\\b=19\end{cases}$$

Vậy $p=-\dfrac{1}{200}x+19$

b) Vì $p=-\dfrac{1}{200}x+19$ nên $x=-200p+3800$.

Khi đó tổng doanh thu từ tiền bán ti vi là

$R(p)=x.p=(-200p+3800)p=-200p^2+3800p$

Bài toán trở thành tìm p để $f(p)$) đạt giá trị lớn nhất.

$R(p)=-200p^2+3800p$

$\Rightarrow R'(p)=-400p+3800$

$\Rightarrow R'(p)=0\Leftrightarrow p=9,5$

Bảng biến thiên

x	0		$9,5$		$+\infty$
$R'(x)$		$+$	0	$-$	
$R(x)$			$R(9,5)=18050$		
	0	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy công ty giảm giá 14 – 9,5 = 4,5 triệu đồng cho người mua thì doanh thu của công ty sẽ lớn nhất.

c) Doanh thu từ bán x ti vi là

$$R(x)=x.p(x)=x\left(-\frac{1}{200}x+19\right)=-\frac{1}{200}x^2+19x$$

Khi đó tổng lợi nhuận từ bán x ti vi là:

$$P(x)=R(x)-C(x)=-\frac{1}{200}x^2+19x-(12000-3x)=-\frac{1}{200}x^2+22x-12000$$

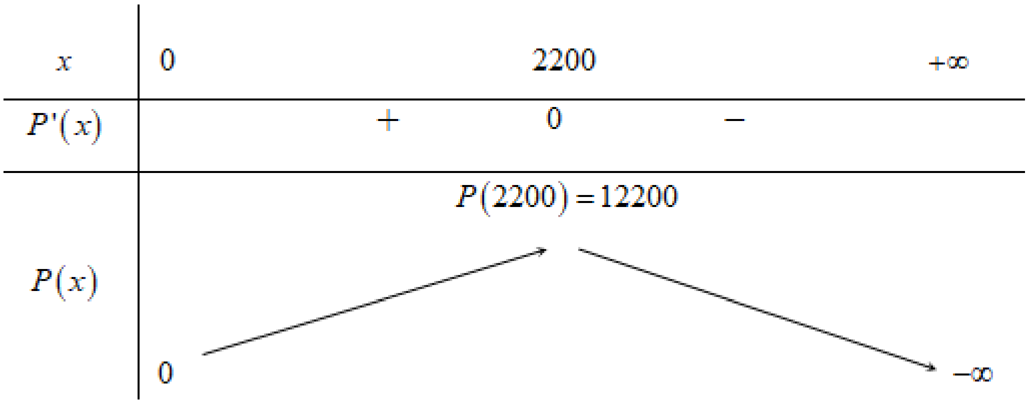
Bài toán trở thành tìm x để $P(x)$ lớn nhất.

$$P(x)=-\frac{1}{200}x^2+22x-12000$$

$\Rightarrow P'(x) = -\dfrac{1}{100}x + 22$

$\Rightarrow P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2200$

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy số ti vi bán ra trong 1 tuần là 2200 chiếc thì lợi nhuận đạt giá trị lớn nhất.

Tức là mỗi tuần bán thêm 1200 chiếc thì số tiền phải giảm giá 1200.500:100 = 6 000 nghìn đồng.

Vậy phải để giá bán là 14 – 6 = 8 triệu đồng.

Câu 32. Dân số của một quốc gia sau t (năm) kể từ năm 2023 được ước tính bởi công thức: $N(t) = 100.e^{0,012t}$ ($N(t)$ được tính bằng triệu người, $0 \le t \le 50$).

a) Ước tính dân số của quốc gia này vào năm 2030 là 108,763 triệu người. (kết quả làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba).

b) Ước tính dân số của quốc gia này vào năm 2035 là 145,488 triệu người. (kết quả làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba).

c) Xem $N(t)$ là hàm số của biến số t xác định trên đoạn $[0;50]$. Hàm số $N(t)$ luôn nghịch biến trên đoạn $[0;50]$.

d) Đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/năm). Vào năm 2046 tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Dân số của quốc gia này vào các năm 2030 (t = 7) là:

$N(7) = 100.e^{0,012.7} = 108,763$ triệu người.

Dân số của quốc gia này vào các năm 2035 (t = 12) là:

$N(12) = 100.e^{0,012.12} = 115,488$ triệu người.

b) Ta có

$N(t) = 100.e^{0,012t}$

$\Rightarrow N'(t) = 1,2.e^{0,012t} > 0$ với mọi $t \in [0;50]$.

Do đó hàm số $N(t)$ luôn đồng biến trên đoạn $[0;50]$.

c) Theo đề có: $N'(t)=1,2.e^{0,012t}$

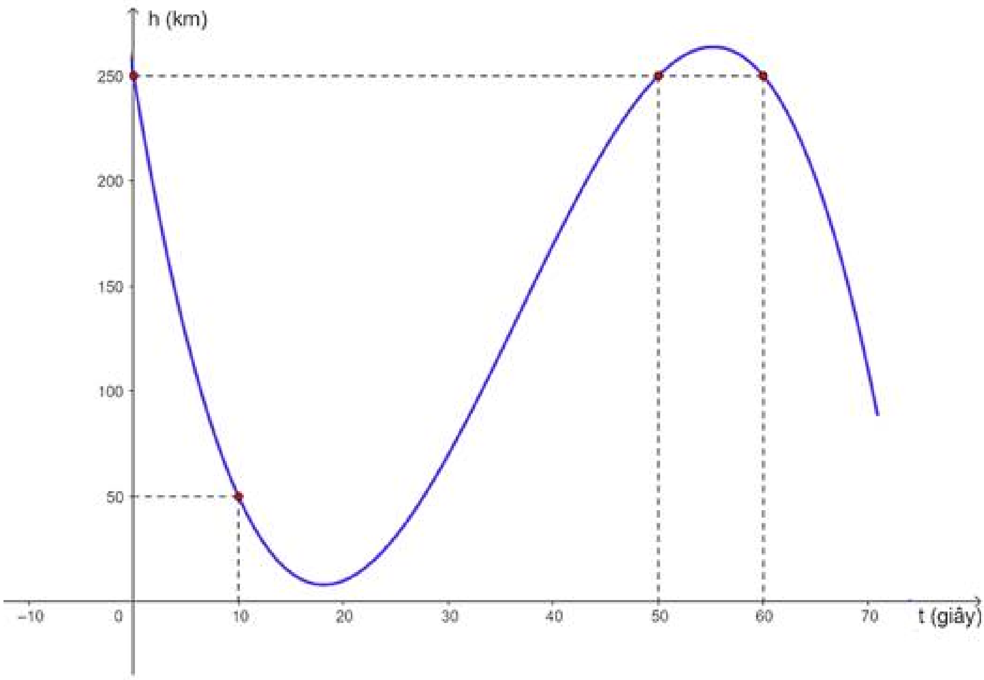
$$1,2.e^{0,012t}=1,6 \Leftrightarrow t=\frac{\ln\frac{4}{3}}{0,012}\approx 23,97 \text{ năm.}$$

Vậy vào năm 2046 tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm.

Câu 33. Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng. Trong khoảng 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm $h(t)=-0,01t^3+1,1t^2-30t+250$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và h là độ cao tính bằng kilômét

a) Xét thời điểm $0\le t\le 50$ thì tại thời điểm $t\approx 18$ giây thì con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng và khoảng cách nhỏ nhất này bằng 8,08 km.

b) Đồ thị của hàm số $y=h(t)$ với $0\le t\le 70$ (đơn vị trên trục hoành là 10 giây, đơn vị trên trục tung là 50 km) như sau:



c) Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t (giây) kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với $0 \le t \le 50$. Vận tốc tức thời của con tàu tại thời điểm $t = 25$ (giây) là 5,25 km/s.

d) Tại thời điểm $t = 25$ (giây), vận tốc tức thời của con tàu vẫn giảm.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Xét hàm số $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$ với $t \in [0;50]$

Ta có $h'(t) = -0,03t^2 + 2,2t - 30$

$\Rightarrow h'(t) = 0 \Leftrightarrow -0,03t^2 + 2,2t - 30 = 0 \Leftrightarrow t \approx 18$

Ta có:

$h(0) = 250$

$h(18) = 8,08$

$h(50) = 250$

Do đó, $\min\limits_{[0;50]} h(t) = 8,08$ tại $t \approx 18$.

Vậy tại thời điểm $t \approx 18$ giây thì con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng và khoảng cách nhỏ nhất này bằng 8,08 km.

b) Xét hàm số $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$ với $t \in [0;70]$

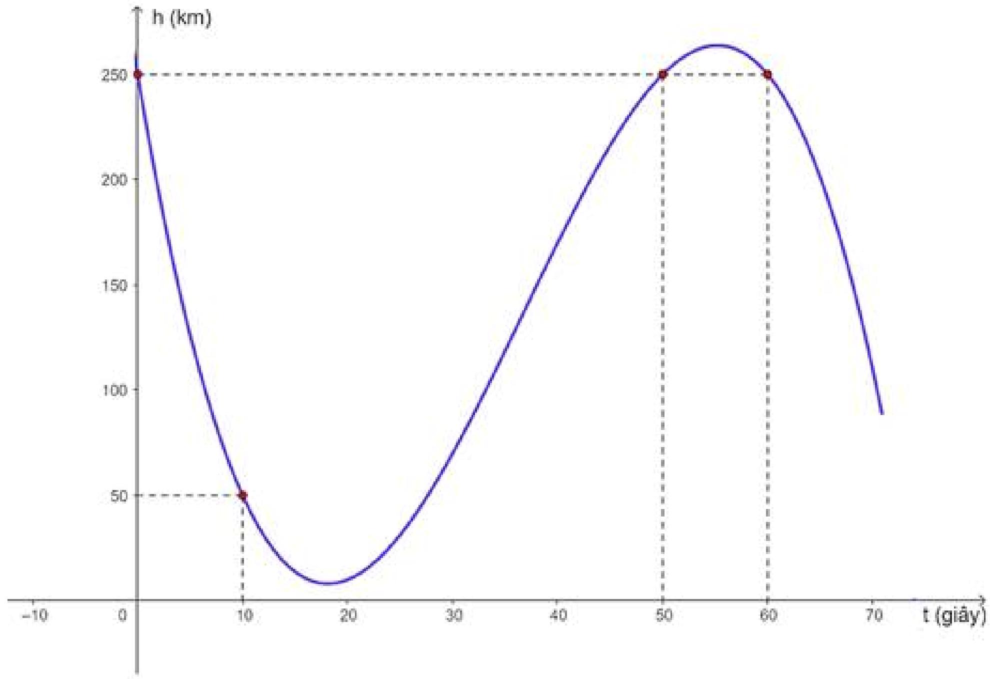
Ta có $h'(t) = -0,03t^2 + 2,2t - 30$

$\Rightarrow h'(t) = 0 \Leftrightarrow -0,03t^2 + 2,2t - 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \approx 18 \\ t \approx 55 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số h(t) như sau:

t	0		18		55		70
h'(t)		–	0	+	0	–	
h(t)	250	↘	8,08	↗	263,75	↘	110

Trên khoảng (0; 70), đồ thị hàm số h(t) đi qua các điểm (0; 250), (10; 50), (50; 250) và (60; 250).



c) Ta có $v(t)$ là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t (giây) kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với 0 $\leq t \leq 50$.

Khi đó $v(t) = h'(t) = -0,03t^2 + 2,2t - 30$ với $t \in [0;50]$

$v(25) = -0,03.25^2 + 2,2.25 - 30 = 6,25$ (km/s).

e) Tại thời điểm $t = 25$ (giây), lúc đó $t \in [18;55]$, căn cứ vào bảng biến thiên ở câu b), ta thấy rằng $h'(t) > 0$, tức là $v(t) > 0$, vậy vận tốc tức thời của con tàu đang tăng trở lại.

Câu 34. Xét phản ứng hóa học tạo ra chất C từ hai chất A và B:

$$A + B \to C.$$

Giả sử nồng độ của hai chất A và B bằng nhau $[A] = [B] = a(mol/l)$. Khi đó, nồng độ của chất C theo thời gian t (t > 0) được cho bởi công thức: $[C] = \dfrac{a^2Kt}{aKt+1}(mol/l)$

a) Nồng độ của chất A sau thời gian t là $\dfrac{a}{aKt+1}(mol/l)$

b) Nồng độ của chất B sau thời gian t là $\dfrac{a}{aKt+1}(mol/l)$

c) Tốc độ phản ứng ở thời điểm t > 0 là $\dfrac{a^2K}{aKt+1}$

d) Nếu $x = [C]$ thì $x'(t) = K(a-x)^2$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a)

Ta có:	A	+	B	$\rightarrow$	C.
Ban đầu:	a		a		0

b) Sau thời gian t: $a-\dfrac{a^2Kt}{aKt+1}=\dfrac{a}{aKt+1}$ $\quad a-\dfrac{a^2Kt}{aKt+1}=\dfrac{a}{aKt+1}$ $\quad \dfrac{a^2Kt}{aKt+1}$

c) Tốc độ ở thời điểm t > 0 là: $v(t)=\dfrac{\Delta C_C}{\Delta t}=\dfrac{\dfrac{a^2Kt}{aKt+1}}{t}=\dfrac{a^2K}{aKt+1}$

d) Ta có $x=[C]$ nên $x=\dfrac{a^2Kt}{aKt+1}$

$$x'(t)=\left(\frac{a^2Kt}{aKt+1}\right)'$$

$$\Rightarrow x'(t)=\frac{a^2K}{(aKt+1)^2}$$

Mà $K(a-x)^2=K\left(a-\dfrac{a^2Kt}{aKt+1}\right)^2=K\left(\dfrac{a}{aKt+1}\right)^2=\dfrac{a^2K}{(aKt+1)^2}=x'(t)$

Vậy $x=[C]$ thì $x'(t)=K(a-x)^2$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 35. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S=-2t^3+18t^2+2t+1$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Vận tốc chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu mét/giây?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 56

Có $v(t)=S'=-6t^2+36t+2=-6\left(t^2-2.3t+9-9\right)+2=-6(t-3)^2+56\le 56$

giá trị lớn nhất của $v(t)$ bằng $56(m/s)$ tại $t=3(s)$.

Câu 36. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S=-\frac{1}{3}t^3+4t^2+9t$ với t(giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (mét) là quãng đường vật chuyển động trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của chất điểm ở thời gian bao nhiêu giây?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 4

Ta có $v=S'=-t^2+8t+9,\ t\in(0;10)$

$v'=-2t+8$.

Xét $v'=0\Rightarrow t=4\in(0;10)$

Bảng biến thiên:

t	0		4		10
v'		+	0	−	
v	$v(0)$	↗	25	↘	$v(10)$

Vậy vận tốc lớn nhất của chất điểm là $25(\text{m/s})$ tại $t=4(s)$

Câu 37. Một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $s(t)=6t^2-t^3$, $(t\ge 0)$. Biết trong khoảng thời gian $(a;b)$, với $a,b\in\mathbb{R}$ thì hạt chuyển động lên trên. Tính giá trị $a-b$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -6

Vận tốc của chuyển động là $v=s'$ tức là $v(t)=12t-3t^2, t>0$

$v'(t)=12-6t,\ v'(t)=0\Leftrightarrow t=2$

Bảng biến thiên:

t	0		2		$+\infty$
$v'(t)$		$+$	0	$-$	
$v(t)$		$\nearrow$	12	$\searrow$	

Hàm số $v(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ nên thì hạt chuyển động lên trên

Vậy $a-b=-6$

Câu 38. Một chất điểm chuyển động trong 20 giây đầu tiên có phương trình $s(t)=\frac{1}{12}t^4-t^3+6t^2+10t$, trong đó $t>0$ với t tính bằng giây (s) và $s(t)$ tính bằng mét (m). Hỏi tại thời gian bao nhiêu giây thì gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

Vận tốc của chuyển động là $v(t)=s'(t)=\frac{1}{3}t^3-3t^2+12t+10$.

Gia tốc của chuyển động là $a(t)=v'(t)=t^2-6t+12=(t-3)^2+3\geq 3$.

Vậy gia tốc đạt giá trị nhỏ nhất khi $t=3$.

Câu 39. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x)=0,025x^2(30-x)$ trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Biết liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân nằm trong khoảng $(a;b)$ miligam thì huyết áp bệnh nhân giảm. Tính giá trị $a+b$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 20.

Ta có: $G(x)=0,025x^2(30-x)=0,75x^2-0,025x^3, x>0$

$G'(x)=1,5x-0,075x^2$

$G'(x)=0$

$\Leftrightarrow 1,5x-0,075x^2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0(L) \\ x=20(N) \end{array}\right.$

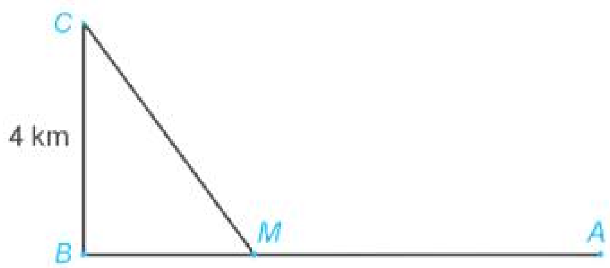
Bảng biến thiên:

x	0		20		$+\infty$
$G'(x)$		$+$	0	$-$	
$G(x)$		$\nearrow$	100	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên, ta thấy: Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân nằm trong khoảng $(0;20)$ miligam thì huyết áp bệnh nhân giảm

$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=20 \end{cases} \Rightarrow a+b=20$

Câu 40. Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C như hình vẽ. Khoảng cách từ C đến B là 4 km. Bờ biển chạy thẳng từ A đến B với khoảng cách là 10 km. Tổng chi phí lắp đặt cho 1 km dây điện trên biển là 50 triệu đồng, còn trên đất liền là 30 triệu đồng. Vị trí điểm M trên đoạn AB (điểm nối dây từ đất liền ra đảo) cách điểm B một đoạn bằng bao nhiêu km để tổng chi phí lắp đặt là nhỏ nhất?



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

Gọi khoảng cách BM là x (km), ($0\le x\le 10$).

Khi đó khoảng cách AM là $10-x(km)$ (km).

Khoảng cách CM là $\sqrt{16+x^2}\,(km)$.

Khi đó chi phí lắp đặt dây điện là: $f(x)=30(10-x)+50\sqrt{16+x^2}$ (triệu đồng).

Bài toán trở thành tìm x để $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$f(x)=30(10-x)+50\sqrt{16+x^2}$ với $0\le x\le 10$

Ta có: $f'(x)=-30+\dfrac{50x}{\sqrt{16+x^2}}$

$f'(x)=0$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{16+x^2}=5x$

$\Rightarrow 9\left(16+x^2\right)=25x^2$

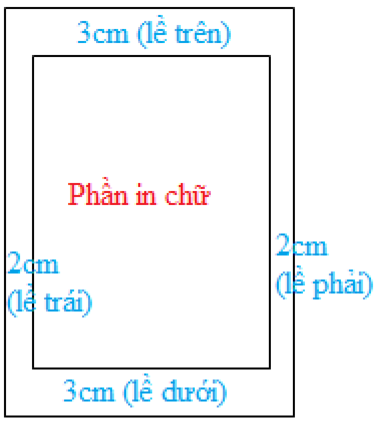
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3(loai) \\ x=3(nhan) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		3		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	500	$\searrow$	460	$\nearrow$	$100\sqrt{29}$

Từ bảng biến thiên, ta có: chi phí nhỏ nhất để lắp dây điện là 460 triệu đồng khi M cách B một đoạn 3 km trên đoạn AB.

Câu 41. Một trang sách có dạng hình chữ nhật với diện tích là 384 cm^2. Sau khi để lề trên và lề dưới đều là 3 cm, để lề trái và lề phải đều là 2 cm. Phần còn lại của trang sách được in chữ (như hình vẽ). Kích thước tối ưu của trang sách là $a\times b$ (cm) thì phần in chữ trên trang sách có diện tích lớn nhất. Tính giá trị $a+b$.



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 40

Gọi x (cm) là chiều rộng của trang sách.

Khi đó, chiều dài của trang sách là $\dfrac{384}{x}$ (cm).

Sau khi để lề thì phần in chữ có dạng hình chữ nhật có chiều rộng là $x-4$ (cm) và chiều dài là $\dfrac{384}{x}-6$ (cm).

Rõ ràng, x phải thỏa mãn điều kiện $x \in (4;64)$.

Diện tích phần in chữ trên trang sách là

$$S(x) = (x-4)\left(\frac{384}{x} - 6\right) = \frac{-6x^2 + 408x - 1536}{x}\left(cm^2\right)$$

Xét hàm số $S(x) = \dfrac{-6x^2 + 408x - 1536}{x}$ với $x \in (4;64)$.

$$S'(x) = \frac{-6x^2 + 1536}{x^2}$$

$$\Rightarrow S'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-6x^2 + 1536}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -6x^2 + 1536 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -16(loai) \\ x = 16(nhan) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số S(x) như sau:

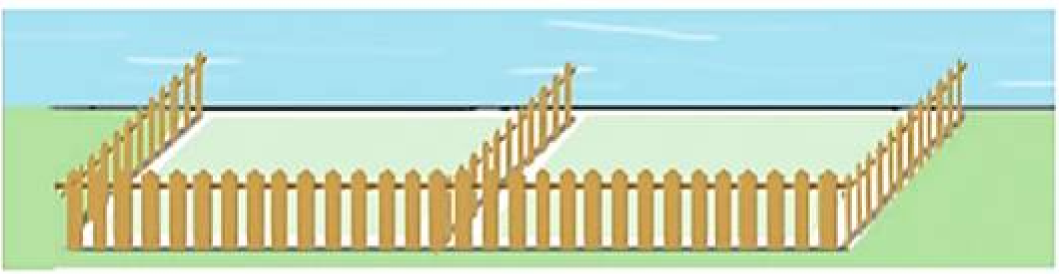
x	4		16		64
S′(x)		+	0	–	
S(x)	0	↗	216	↘	0

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta thấy: Trên khoảng $(4;64)$, hàm số $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 216 tại $x = 16$. Khi đó, $\dfrac{384}{x} = \dfrac{384}{16} = 24$

Vậy kích thước tối ưu của trang sách là 16 × 24 (cm) thì in chữ trên trang sách có diện tích lớn nhất.

$\Rightarrow a + b = 40$

Câu 42. Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (*Hình vẽ*). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất (m^2) của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 6250

Giả sử chiều dài từng mặt của ba mặt hàng rào song song nhau là x (m) $\left(x>0\right)$.

Chi phí để làm ba mặt hàng rào song song là: $3.x.50000=150000x$ (đồng).

Chi phí để làm mặt hàng rào song song với bờ sông là: $15000000-150000x$ (đồng).

Chiều dài của mặt hàng rào song song với bờ sông là

$$\frac{15000000-15000x}{60000}=\frac{1500-15x}{6}\left(m\right)$$

Rõ ràng, x phải thỏa mãn điều kiện $0<x<100$.

Giả sử diện tích hàng rào không đáng kể, khi đó diện tích hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào là

$$S\left(x\right)=\frac{\left(1500-15x\right)x}{6}=-\frac{15}{6}x^2+\frac{1500}{6}x\left(m^2\right)$$

Xét hàm số $S\left(x\right)=-\frac{15}{6}x^2+\frac{1500}{6}x$ với $0<x<100$

$$\Rightarrow S'\left(x\right)=-\frac{15}{3}x+\frac{1500}{6}$$

$$\Rightarrow S'\left(x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{15}{3}x+\frac{1500}{6}=0$$

$$\Leftrightarrow x=50\left(nhan\right)$$

Bảng biến thiên của hàm số S(x) như sau:

x	0		50		100
S′(x)		+	0	–	
S(x)	0	↗	6 250	↘	0

Căn cứ bảng biến thiên, ta thấy: Trên khoảng (0; 100), hàm số S(x) đạt giá trị lớn nhất bằng 6250 tại $x=50$.

Vậy diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào là 6 250 m^2.

Câu 43. Một công ty kinh doanh bất động sản có 20 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng/1 tháng thì tất cả các căn hộ đều có người thuê. Nhưng cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 200 nghìn đồng/1 tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi công ty nên cho thuê mỗi căn hộ bao nhiêu triệu đồng/1 tháng để tổng số tiền thu được là lớn nhất?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

Cứ tăng thêm 200 nghìn đồng vào giá thuê một căn hộ trên một tháng thì có một căn hộ bị bỏ trống.

Gọi số lần tăng 200 nghìn đồng vào giá thuê một căn hộ trên một tháng là $x\left(x\in\mathbb{N}^*\right)$.

Khi đó x cũng là số căn hộ bị bỏ trống.

Tổng số tiền công ty thu được lúc này là

$T\left(x\right)=\left(2000+200x\right)\left(20-x\right)=-200x^2+2000x+40000$ (nghìn đồng).

Xét hàm số $T\left(x\right)=-200x^2+2000x+40000$ với $x\in\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow T'\left(x\right)=-400x^2+2000$

$\Rightarrow T'\left(x\right)=0$

$\Leftrightarrow -400x^2+2000=0$

$\Leftrightarrow x=5\left(nhan\right)$

Bảng biến thiên của hàm số $T\left(x\right)$ như sau:

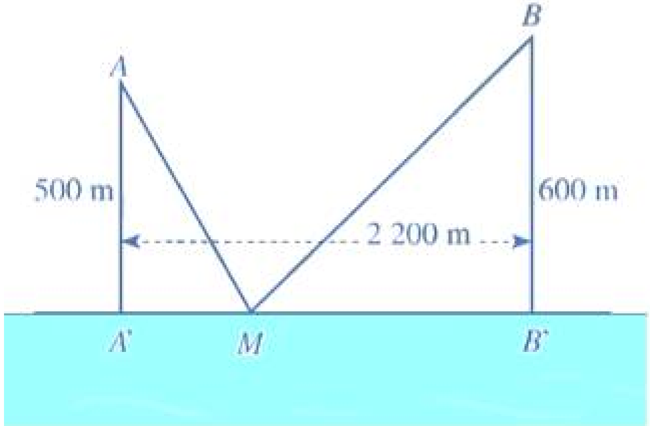
x	0		5		$+\infty$
T′(x)		+	0	–	
T(x)	40 000	↗	45 000	↘	$-\infty$

Căn cứ vào bảng biến thiên trên, ta thấy hàm số $T\left(x\right)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 45 000 khi x = 5.

Khi đó, số tiền tăng lên khi cho thuê một căn hộ là 200 · 5 = 1 000 nghìn đồng = 1 triệu đồng.

Vậy công ty nên cho thuê mỗi căn hộ 3 triệu đồng/1 tháng thì tổng số tiền thu được là lớn nhất.

Câu 44. Có hai xã cùng ở một bên bờ sông. Người ta đo được khoảng cách từ trung tâm A, B của hai xã đó đến bờ sông lần lượt là AA′ = 500 m, BB′ = 600 m và A′B′ = 2 200 m (*Hình vẽ*). Các kĩ sư muốn xây một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông cho người dân hai xã. Để tiết kiệm chi phí, các kĩ sư cần phải chọn vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn A′B′ sao cho tổng khoảng cách từ hai vị trí A, B đến vị trí M là nhỏ nhất. Khoảng cách AM bằng bao nhiêu mét?



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1000

Đặt $AM = x$ (m).

Suy ra $BM = AB' - AM = 2200 - x$ (m) với $0 < x < 2200$

Áp dụng định lí Pythagore ta tính được:

$$AM = \sqrt{AA'^2 + A'M^2} = \sqrt{500^2 + x^2}$$

$$BM = \sqrt{BB'^2 + B'M^2} = \sqrt{600^2 + (2200 - x)^2}$$

Tổng khoảng cách từ hai vị trí A, B đến vị trí M là

$$D = AM + BM = \sqrt{500^2 + x^2} + \sqrt{600^2 + (2200 - x)^2}$$

Xét hàm số $D(x) = \sqrt{500^2 + x^2} + \sqrt{600^2 + (2200 - x)^2}$ với $0 < x < 2200$

$$\Rightarrow D'(x) = \frac{x}{\sqrt{500^2 + x^2}} + \frac{x - 2200}{\sqrt{600^2 + (2200 - x)^2}}$$

$$\Rightarrow D'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{500^2 + x^2}} + \frac{x - 2200}{\sqrt{600^2 + (2200 - x)^2}} = 0$$

$$\Rightarrow x = 1000$$

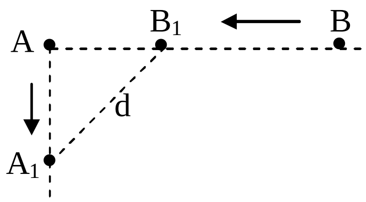
Bảng biến thiên của hàm số $D(x)$) như sau:

x	0	1 000	2 200
D′(x)	–	0	+
D(x)	$500 + 200\sqrt{130}$ ↘	$1100\sqrt{5}$	↗ $600 + 100\sqrt{509}$

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số $D(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $1100\sqrt{5}$ tại $x = 1000$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách cần tìm là $1100\sqrt{5}$ m

Câu 45. Hai con tàu đang ở hai vị trí A, B cùng một vĩ tuyến và cách nhau 5 hải lý. Đồng thời cả hai tàu cùng khởi hành, một chạy về hướng Nam với 6 hải lý/giờ, còn tàu kia chạy về vị trí hiện tại của tàu thứ nhất với vận tốc 7 hải lý/ giờ (như hình vẽ). Hãy xác định thời điểm (giờ) mà khoảng cách của hai tàu là nhỏ nhất (kết quả lấy tròn đến phần trăm).



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $0,41$

Tại thời điểm t sau khi xuất phát, khoảng cách giữa hai tàu là d.

Ta có $d^2 = AB_1^2 + AA_1^2 = (5 - BB_1)^2 + AA_1^2 = (5 - 7t)^2 + (6t)^2 = 85t^2 - 70t + 25$

Suy ra $d = \sqrt{85t^2 - 70t + 25}$.

Xét hàm số $f(t) = 85t^2 - 70t + 25$ với $t > 0$

$f'(t) = 170t - 70$

$f'(t) = 0$

$\Leftrightarrow 170t - 70 = 0$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{7}{17}$

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{7}{17}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$f(0)$	$\searrow$	$f\left(\frac{7}{17}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

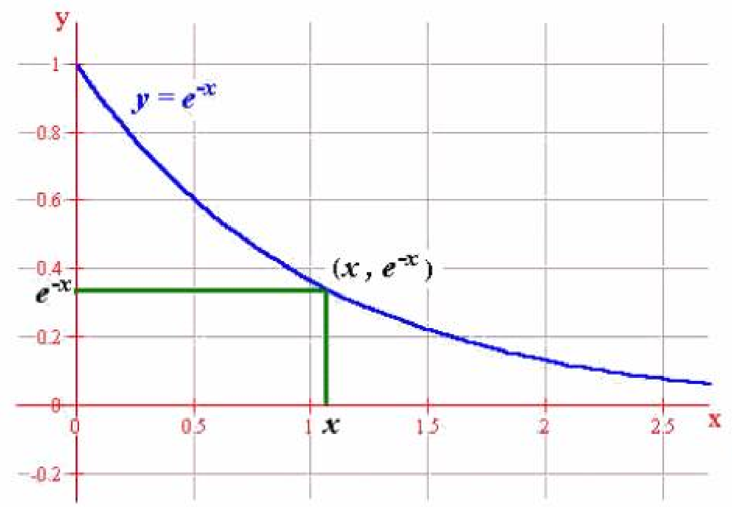
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: d nhỏ nhất khi $t = \dfrac{7}{17} \approx 0,41$ (giờ), khi đó ta có $d = \sqrt{f\left(\dfrac{7}{17}\right)} \approx 3,25$ hải lý.

Chú ý: Để tìm $f(t)$ nhỏ nhất ta dùng kiến thức lớp 8 như sau nhanh hơn: $f(t) = 85t^2 - 70t + 25$

$$f(t) = 85t^2 - 70t + 25$$
$$= 85\left(t^2 - \frac{14}{17}t\right) + 25$$
$$= 85\left[t^2 - 2.\frac{7}{17}t + \left(\frac{7}{17}\right)^2 - \left(\frac{7}{17}\right)^2\right] + 25$$
$$= 85\left(t - \frac{7}{17}\right)^2 + \frac{180}{17} \geq \frac{180}{17}$$

Vậy $\min f(t) = \frac{180}{17}$ khi $t = \frac{7}{17}$ hay $\min d = \sqrt{\frac{180}{17}}$ khi $t = \frac{7}{17}$

Câu 46. Một máy tính được lập trình để vẽ một chuỗi các hình chữ nhật ở góc phần tư thứ nhất của trục tọa độ Oxy , nội tiếp dưới đường cong $y = e^{-x}$ (như hình vẽ). Hỏi diện tích lớn nhất của hình chữ nhật có thể được vẽ bằng cách lập trình trên (kết quả lấy tròn đến phần trăm).



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 0,37

Diện tích hình chữ nhật tại điểm x là $S = x.e^{-x}$

Xét hàm số $S(x) = x.e^{-x}$ với $x > 0$

$S'(x) = e^{-x}(1-x)$

$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: GTLN của $S(x)$ là $\frac{1}{e} \approx 0,37$ khi $x = 1$

Câu 47. Người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 180 mét thẳng hàng rào. Ở đó người ta tận dụng một bờ giậu có sẵn để làm một cạnh của hàng rào và rào thành mảnh đất hình chữ nhật. Hỏi mảnh đất hình chữ nhật được rào có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu mét vuông?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 4050

Gọi x là chiều dài cạnh song song với bờ giậu và y là chiều dài cạnh vuông góc với bờ giậu, theo bài ra ta có $x + 2y = 180$.

Diện tích của miếng đất là $S = y(180 - 2y)$.

Ta có: $y(180-2y) = \frac{1}{2} \cdot 2y(180-2y) \le \frac{1}{2} \cdot \frac{(2y+180-2y)^2}{4} = \frac{180^2}{8} = 4050$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow 2y = 180 - 2y \Leftrightarrow y = 45m$.

Vậy $S_{max} = 4050m^2$ khi $x = 90m, y = 45m$.

Chú ý: Để tìm $S(y) = y(180-2y)$ lớn nhất ta dùng kiến thức lớp 8 hoặc dùng đạo hàm nhé.

Câu 48. Một Bác nông dân cần xây dựng một hố ga không có nắp dạng hình hộp chữ nhật có thể tích $3200cm^3$, tỉ số giữa chiều cao của hố và chiều rộng của đáy bằng 2. Hãy xác định diện tích (cm^2) của đáy hố ga để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 160

Gọi x, y $(x, y > 0)$ lần lượt là chiều rộng, chiều dài của đáy hố ga.

Gọi h là chiều cao của hố ga ($h > 0$). Ta có $\frac{h}{x} = 2 => h = 2x \ (1)$

suy ra thể tích của hố ga là : $V = xyh = 3200 => y = \frac{3200}{xh} = \frac{1600}{x^2} (2)$

Diện tích toàn phần của hố ga là: $S = 2xh + 2yh + xy = 4x^2 + \frac{6400}{x} + \frac{1600}{x} = 4x^2 + \frac{8000}{x} = f(x)$

Khảo sát hàm số $y = f(x), (x > 0)$. Các em khảo sát và vẽ bảng biến thiên nhé.

Từ bảng biến thiên suy ra diện tích toàn phần của hố ga nhỏ nhất bằng $1200cm^2$ khi $x = 10cm => y = 16cm$

Suy ra diện tích đáy của hố ga là $10.16 = 160cm^2$

Chú ý: Để tìm $f(x)$ nhỏ nhất ta dùng Cauchy nhé.

Câu 49. Một người có một dải ruy băng dài 130cm, người đó cần bọc dải ruy băng đó quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10cm của dải ruy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (như hình vẽ minh họa). Hỏi dải dây duy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích lớn nhất là nhiêu cm^3? (kết quả là tròn đến hàng đơn vị)

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3142

Gọi $x(cm); y(cm)$ lần lượt là bán kính đáy và chiều của hình trụ $(x, y > 0; x < 30)$.

Dải dây duy băng còn lại khi đã thắt nơ là: $120\,cm$

Ta có $(2x + y).4 = 120 \Leftrightarrow y = 30 - 2x$

Thể tích khối hộp quà là: $V = \pi x^2.y = \pi x^2(30 - 2x)$

Thể tích V lớn nhất khi hàm số $f(x) = x^2(30 - 2x)$ với $0 < x < 30$ đạt giá trị lớn nhất.

$f'(x) = -6x^2 + 60x$, cho $f'(x) = -6x^2 + 60x = 0 \Rightarrow x = 10$

Lập bảng biến thiên, ta thấy thể tích đạt giá trị lớn nhất là $V = 1000\pi \approx 3142(cm^3)$.

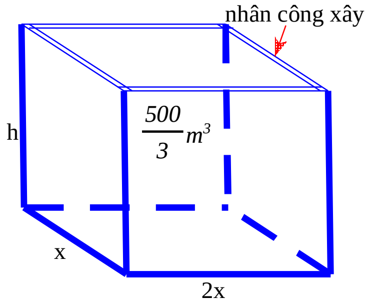
Câu 50. Người ta muốn xây một cái bể chứa nước dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích $\frac{500}{3}m^3$

Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/m^3. Nếu biết xác định kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất, chi phí thấp nhất đó bằng bao nhiêu triệu đồng?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 75



Gọi các yếu tố như hình vẽ, diện tích phần phải xây của bể là phần xung quanh và đáy.

$V = 2x^2.h = \frac{500}{3}; S = 2x^2 + 6xh$

$\Rightarrow S = 2x^2 + \frac{500}{x} = 2x^2 + \frac{250}{x} + \frac{250}{x} \overset{co-si}{\geq} 150$

Số chi phí thấp nhất là $150 \times 500000 = 75$ triệu.

Chú ý: Để tìm $S = 2x^2 + \frac{500}{x}$ nhỏ nhất ta dùng đạo hàm dễ hiểu hơn nhưng lại dài dòng hơn.

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 51. Công ty truyền hình cáp Vista hiện có 100000 thuê bao. Mỗi thuê bao đang trả cước thuê bao 40 đô la/ tháng. Một cuộc khảo sát cho thấy cứ mỗi lần giảm $0,25$ đô la cước thuê bao, công ty có thể có thêm 1000 thuê bao. Để doanh thu thu được là tối đa, công ty cần xác định mức cước thuê bao mỗi tháng là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi x là số lần giảm $0,25$ đô la.

Cước thuê bao hàng tháng lúc này là $40-0,25x$ với $0 \le x \le 160$ (do mức cước không thể âm), và số thuê bao mới là $1000x$.

Do đó, tổng số thuê bao là $100000+1000x$.

Hàm doanh thu được cho bởi R = (số thuê bao) x (cước mỗi thuê bao trả)

$$R=(100000+1000x)(40-0,25x)=1000(100+x)(40-0,25x)=1000\left(4000+15x-0,25x^2\right)$$

Đạo hàm $R'=0$, ta được $R'=1000(15-0,5x)=0 \Leftrightarrow x=30.$

Vì tập xác định của R là khoảng đóng [0; 160] nên R đạt cực đại tại $x=30$ hoặc tại các điểm đầu mút của đoạn [0; 160].

Ta có: $R(0)=4000000;\ R(30)=4225000;\ R(160)=0$

Vậy doanh thu tối đa khi $x=30$. Điều này tương ứng với 30 lần giảm $0,25$ đô la, tức là cước thuê bao hàng tháng là $40-7,5=32,5$ đô la.

Số thuê bao tại mức cước này là $100000+30.(1000)=130000$.

Câu 52. Một bài báo trong tạp chí xã hội học phát biểu rằng nếu một chương trình chăm sóc sức khỏe đặc biệt cho người già được khởi xướng, thì t năm sau khi nó được khởi động, n ngàn người già có thể trực tiếp nhận được các phúc lợi, trong đó $n=\dfrac{t^3}{3}-6t^2+32t\ (0 \le t \le 12)$. Với giá trị nào của t thì số người nhận phúc lợi tối đa là bao nhiêu?

Lời giải

Đạo hàm $n'(t)=0$ ta có $n'(t)=t^2-12t+32=0 \Leftrightarrow (t-4)(t-8)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=8. \end{array}\right.$

Vì tập xác định của n là một khoảng đóng $[0;12]$ nên n đạt cực đại tuyệt đối tại $t=0, t=4, t=8$ hoặc $t=12$:

$$n(0)=\frac{0^3}{3}-6\left(0^2\right)+32.0=0;\ n(4)=\frac{4^3}{3}-6\left(4^2\right)+32.4=\frac{160}{3}$$

$$n(8)=\frac{8^3}{3}-6\left(8^2\right)+32.8=\frac{128}{3};\ n(12)=\frac{12^3}{3}-6\left(12^2\right)+32.12=\frac{288}{3}=96$$

Do đó n đạt cực đại khi $t=12$ (năm).

Câu 53. Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 8000 quả bóng tennis. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ. Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí hoạt động là thấp nhất?

Lời giải

Gọi số máy móc công ty sử dụng để sản xuất là $x\left(x\in \mathrm{N},\, x>0\right)$.

Thời gian cần để sản xuất hết 8000 quả bóng là: $\dfrac{8000}{30x}$.

Tổng chi phí để sản xuất là: $P\left(x\right)=200x+\dfrac{8000}{30x}.192=200x+\dfrac{51200}{x}$

Ta có: $P'\left(x\right)=200-\dfrac{51200}{x^2}=0\Leftrightarrow x^2=256\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=16\\x=-16\left(loai\right)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		16		$+\infty$
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$	$+\infty$	$\searrow$	6400	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy công ty nên sử dụng 16 máy để chi phí hoạt động là thấp nhất.

Câu 54. Thể tích V của 1 (kg) nước ở nhiệt độ t (t nằm giữa $0^{\circ}C$ đến $30^{\circ}C$) được cho bởi công thức

$$V=999,87-0,06426t+0,0085043t^2-0,0000679t^3\left(m^3\right).$$

Ở nhiệt độ bao nhiêu độ C thì nước có khối lượng riêng lớn nhất?

Lời giải

Ta có đạo hàm của thể tích:

$$V'\left(t\right)=-0,06424+2.0,0085043t-3\cdot 0,0000679t^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t\approx 79,53138\notin\left(0^{\circ};30^{\circ}\right)\\t\approx 3,9665.\end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên

t	0		$3,9665$		30
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$	$+\infty$	$\searrow$	V_{min}	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, khối lượng riêng lớn nhất của vật khi thể tích nhỏ nhất lúc vật có nhiệt độ xấp xỉ gần bằng $4^{\circ}C$.

Câu 55. Một công ty đánh giá rằng sẽ bán được N lô hàng nếu chi hết số tiền là x (triệu đồng) vào việc quảng cáo. Biết rằng N và x liên hệ với nhau bằng biểu thức $N(x) = -x^2 + 30x + 6, 0 \le x \le 30$. Hãy tìm số lô hàng lớn nhất mà công ti có thể bán sau đợt quảng cáo?

Lời giải

Ta có $N(x) = -x^2 + 30x + 6 \Rightarrow N'(x) = -2x + 30 \Rightarrow N'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 15$.

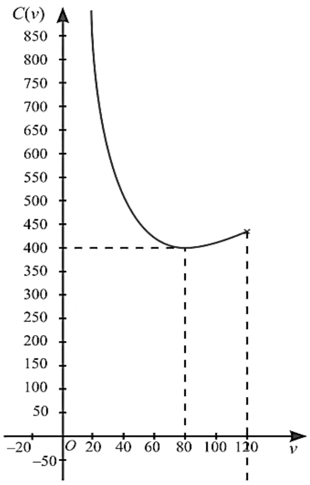
Đồng thời, ta cũng có $\begin{cases} N(0) = 6 \\ N(15) = 231 \Rightarrow \max_{x\in[0;30]} N(x) = 231 \Leftrightarrow x = 15. \\ N(30) = 6 \end{cases}$

Vậy nếu công ti dành 15 triệu cho việc quảng cáo thì công ti sẽ bán được nhiều nhất là 231 lô hàng.

Câu 56. Giả sử chi phí tiền xăng C (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình v (km/h) theo công thức:

$$C(v) = \frac{16000}{v} + \frac{5}{2}v \ (0 < v \le 120)$$

Để biểu diễn trực quan sự thay đổi của $C(v)$ theo v, người ta đã vẽ đồ thị hàm số $C(v)$ như hình bên.



Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình là bao nhiêu để tiết kiệm tiền xăng nhất?

Lời giải

Tập xác định: $D = (0;120]$.

Đạo hàm $C'(v) = -\frac{16000}{v^2} + \frac{5}{2} = \frac{5(v-80)(v+80)}{2v^2} = 0 \Leftrightarrow v = -80$ (loại) hoặc $v = 80$.

Trên khoảng $(0;80), C'(v) < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

Trên khoảng $(80;120), C'(v) > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng này.

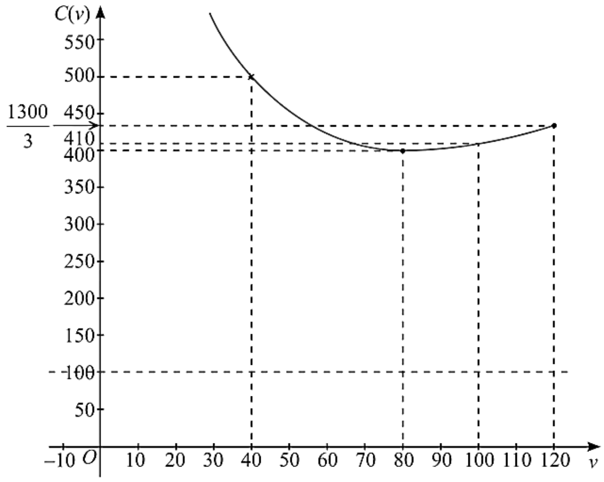
Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $v = 80, C_{CT} = C(80) = 400$.

Giới hạn vô cực và tiệm cận: $\lim_{v\to 0^+} C(v) = \lim_{v\to 0^+}\left(\frac{16000}{v} + \frac{5}{2}v\right) = +\infty$ nên đường thẳng $v = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

v	0		80		120
$C'(v)$		$-$	0	$+$	
$C(v)$	$+\infty$	$\searrow$	400	$\nearrow$	$+\infty$

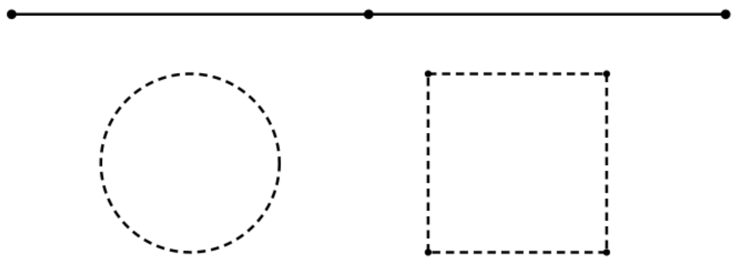
Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $(80;400)$ và đi qua các điểm $(40;500),(100;410)$, $\left(120;\dfrac{1300}{3}\right)$ như hình.



Quan sát đồ thị hàm số, ta nhận thấy hàm số đạt GTNN khi $v = 80$ và GTNN là 400.

Như vậy, để tiết kiệm tiền xăng nhất, tài xế nên chạy xe với tốc độ trung bình là 80 km/h.

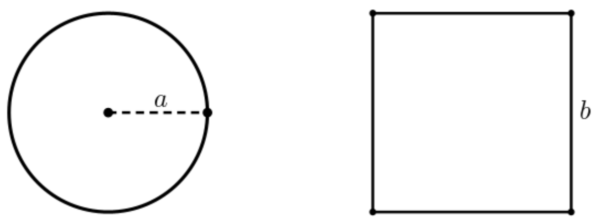
Câu 57. Cắt một đoạn dây dài 30m thành hai đoạn dây, đoạn dây thứ nhất gấp thành một đường tròn có diện tích S_1, đoạn dây thứ hai gấp thành một hình vuông có diện tích S_2 (như hình vẽ dưới)



Khi đó giá trị nhỏ nhất của tổng $T = S_1 + S_2$ là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi độ dài đoạn dây gấp đường tròn là x thì độ dài đoạn dây gấp hình vuông là $30 - x$ (mét)



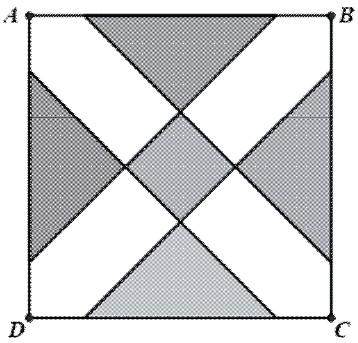
Khi đó $x = 2\pi a \Leftrightarrow a = \dfrac{x}{2\pi} \Rightarrow S_1 = \pi a^2 = \dfrac{x^2}{4\pi}$

Mặt khác: $30-x=4b\Rightarrow b=\dfrac{30-x}{4}\Rightarrow S^2=b^2=\left(\dfrac{30-x}{4}\right)^2$

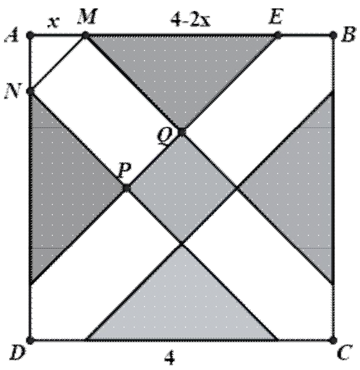
Khi đó $S_1+S_2=\dfrac{x^2}{4\pi}+\left(\dfrac{30-x}{4}\right)^2\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{(\pi+4)x^2-60\pi x+900\pi}{16\pi}$

Dễ dàng tính được $(S_1+S_2)_{\min}=\min f(x)=f\left(\dfrac{30\pi}{\pi+4}\right)\approx 31,51(\mathrm{m}^2)$.

Câu 58. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4, chính giữa có một hình vuông đồng tâm với $ABCD$. Biết rằng bốn tam giác là bốn tam giác cân. Hỏi tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ nhất bằng bao nhiêu?



Lời giải



Đặt $AM=x$ $(0<x<4)\Rightarrow ME=4-2x$.

$2MQ^2=(4-2x)^2\Leftrightarrow MQ^2=2(2-x)^2\Leftrightarrow MQ=\sqrt{2(2-x)}$

Gọi S tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ.

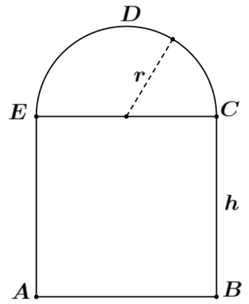
$S=4.\dfrac{MQ^2}{2}+PQ^2=2MQ^2+MN^2=(4-2x)^2+\left(x\sqrt{2}\right)^2=6x^2-16x+16=0\Leftrightarrow x=\dfrac{4}{3}$

Bảng biến thiên

x	0		$4/3$		4
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$		$\searrow$	$\dfrac{16}{3}$	$\nearrow$	

Vậy $S_{\min}=\dfrac{16}{3}$

Câu 59. Bác thợ hàn dùng một thanh kim loại dài 4 m để uốn thành khung cửa sổ có dạng như hình vẽ. Gọi r là bán kính của nửa đường tròn. Tìm r để diện tích tạo thành đạt giá trị lớn nhất.



Lời giải

Ta có $2\left(h+r\right)+\pi r=4\ \Rightarrow h=\dfrac{4-2r-\pi r}{2}$.

Diện tích của khung cửa là $S=\dfrac{1}{2}\pi r^2+2rh\ =\dfrac{1}{2}\pi r^2+2r\left(\dfrac{4-2r-\pi r}{2}\right)\ =-\dfrac{\pi+4}{2}.r^2+4r$.

Ta có $h=\dfrac{4-2r-\pi r}{2}>0\Leftrightarrow 0<r<\dfrac{4}{\pi+2}$.

Xét hàm số $S\left(r\right)=-\dfrac{\pi+4}{2}.r^2+4r$ trên $\left(0;\dfrac{4}{\pi+2}\right)$ có $S'\left(r\right)=-\left(\pi+4\right)r+4=0\ \Leftrightarrow r=\dfrac{4}{\pi+4}$

Bảng biến thiên

x	0		$4/(\pi+4)$		$4/(\pi+2)$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{8}{\pi+4}$	$\searrow$	

Vậy $S\left(r\right)$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow r=\dfrac{4}{\pi+4}$.

Câu 60. Một cửa hàng nhận làm những chiếc xô bằng nhôm hình trụ không có nắp để chứa nước. Gọi $x\left(\text{cm}\right)$ là bán kính đáy của chiếc xô và $S\left(x\right)=\pi x^2+\dfrac{20000}{x}\left(\text{cm}^2\right)$ là diện tích toàn phần của chiếc xô, khi đó x bằng bao nhiêu để cửa hàng tốn ít nguyên vật liệu nhất (kết quả làm tròn tới hàng phần mười)?

Lời giải

Ta có: $S\left(x\right)=\pi x^2+\dfrac{20000}{x}$

Đạo hàm $S'\left(x\right)=2\pi x-\dfrac{20000}{x^2}=\dfrac{2\pi x^3-20000}{x^2}$.

Giải phương trình $S'(x)=0 \Leftrightarrow 2\pi x^3-20000=0 \Leftrightarrow x^3=\dfrac{10000}{\pi} \Leftrightarrow x=10.\sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}}$

Bảng biến thiên:

x	0		$10.\sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}}$		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$		$\searrow$	$2039,4$	$\nearrow$	

Ta thấy diện tích toàn phần chiếc xô nhỏ nhất khi bán kính đáy xô là $x=10\sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}}\approx 14,7(\text{cm})$.