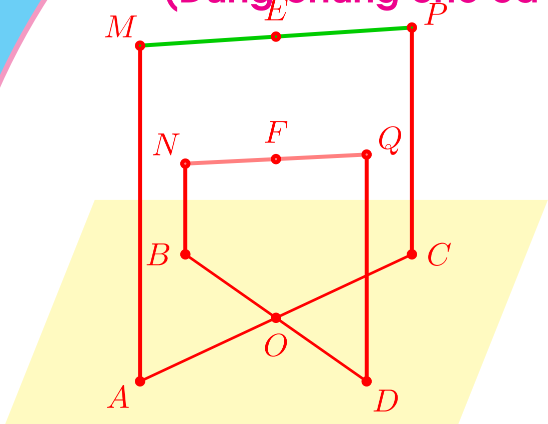
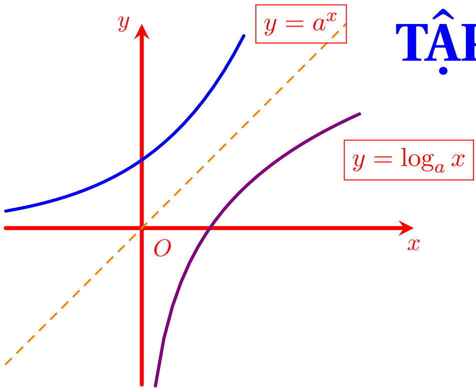
NGÔ ĐỨC TÀI
Zalo: 0889 971 004

TOÁN 11

CHƯƠNG TRÌNH GDPT 2018

(Dùng chung cho cả ba bộ sách)





TẬP 1

ĐỒNG THÁP, THÁNG 7 NĂM 2025

MỤC LỤC

Chương I. Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác 4

- Bài 1. Góc lượng giác 4
- Bài 2. Giá trị lượng giác của một góc lượng giác. 19
- Bài 3. Các công thức lượng giác 32
- Bài 4. Hàm số lượng giác và đồ thị 47
- Bài 5. Phương trình lượng giác cơ bản 62
- Bài 6. Ôn tập chương 1 82

Chương II. Dãy số. Cấp số cộng. Cấp số nhân 110

- Bài 1. Dãy số 110
- Bài 2. Cấp số cộng 125
- Bài 3. Cấp số nhân 139
- Bài 4. Ôn tập chương 2 152

Chương III. Giới hạn. Hàm số liên tục 169

- Bài 1. Giới hạn của dãy số 169
- Bài 2. Giới hạn của hàm số 182
- Bài 3. Hàm số liên tục 196

Bài 4. Ôn tập chương 3 210

Chương IV. Đường thẳng và mặt phẳng. Quan hệ song song trong không gian 223

Bài 1. Điểm, đường thẳng và mặt phẳng trong không gian 223

Bài 2. Hai đường thẳng song song 242

Bài 3. Đường thẳng và mặt phẳng song song 253

Bài 4. Hai mặt phẳng song song 262

Bài 5. Phép chiếu song song 274

Bài 6. Ôn tập chương 4 281

Chương V. Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu ghép nhóm 298

Bài 1. Số trung bình và mốt của mẫu số liệu ghép nhóm 298

Bài 2. Trung vị và tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm 306

Bài 3. Ôn tập chương 5 316

Chương 1

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Mục lục của chương

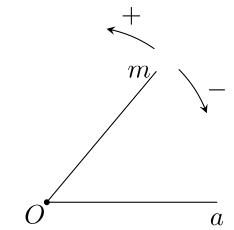
Bài 1. Góc lượng giác 4
Bài 2. Giá trị lượng giác của một góc lượng giác 19
Bài 3. Các công thức lượng giác 32
Bài 4. Hàm số lượng giác và đồ thị 47
Bài 5. Phương trình lượng giác cơ bản 62
Bài 6. Ôn tập chương 1 82

Chuyên đề 1

GÓC LƯỢNG GIÁC

I. GÓC LƯỢNG GIÁC

Khi xét chuyển động quay của một tia Om quanh góc O của nó tính từ vị trí ban đầu Oa theo chiều cố định, người ta quy ước chiều quay ngược ngược chiều kim đồng hồ là chiều dương và chiều quay cùng chiều kim đồng hồ là chiều âm.



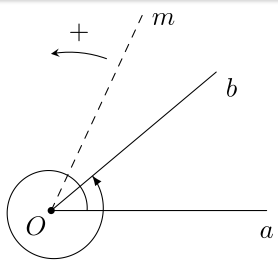
Một vòng quay theo chiều dương tương ứng góc quay 360°, một vòng quay theo chiều âm tương ứng với góc quay -360°. Khi tia Om quay:

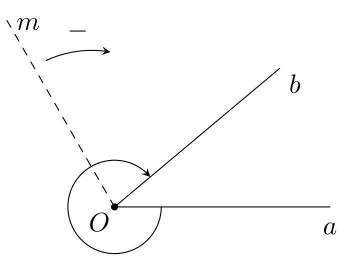
- nửa vòng theo chiều dương, ta nói Om quay góc $\frac{1}{2}.360^\circ = 180^\circ$.
- $\frac{1}{6}$ vòng theo chiều dương, ta nói Om quay góc $\frac{1}{6}.360^\circ = 60^\circ$.
- $\frac{5}{4}$ vòng theo chiều âm, ta nói Om quay góc $\frac{5}{4}.(-360^\circ) = -450^\circ$.

1) Khái niệm góc lượng giác

Cho hai tia Oa, Ob :

- Nếu một tia Om quay quanh gốc O của nó theo một chiều cố định bắt đầu từ vị trí tia Oa và dừng ở vị trí tia Ob thì ta nói tia Om quét một góc lượng giác có tia đầu Oa, tia cuối Ob, kí hiệu $(Oa, Ob) = \alpha$.
- Khi tia Om quay một góc α, ta nói số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) bằng α, kí hiệu sđ$(Oa, Ob) = \alpha$.





LƯU Ý. Với hai tia Oa và Ob cho trước, có vô số góc lượng giác tia đầu Oa và tia cuối Ob. Ta dùng chung kí hiệu (Oa, Ob) cho tất cả các góc lượng giác này.

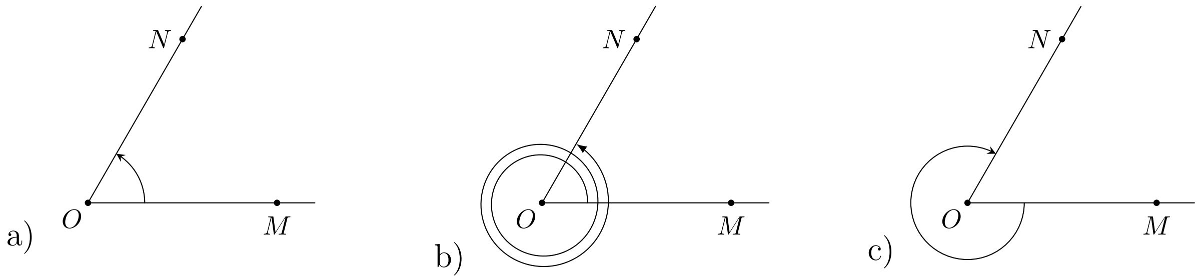
Nhận xét: Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu Oa và tia cuối Ob sai khác nhau một bội nguyên của 360° nên có công thức tổng quát là:

$$\text{sđ}(Oa, Ob) = \alpha^\circ + k360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}),\ \text{thường viết là } (Oa, Ob) = \alpha^\circ + k360^\circ$$

với α° là số đo của một góc lượng giác bất kì có tia đầu Oa và tia cuối Ob.

Ví dụ 1 ★☆☆☆☆

Cho $\widehat{MON} = 60^\circ$. Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên và viết công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (OM, ON).

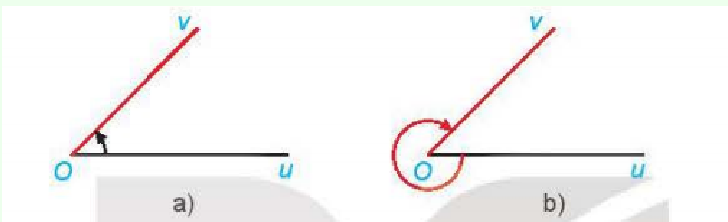


Hướng dẫn giải.

- Số đo góc lượng giác (OM, ON) trong a) là 60°.
- Số đo góc lượng giác (OM, ON) trong Hình b) là $60^\circ + 2.360^\circ = 780^\circ$.
- Số đo góc lượng giác (OM, ON) trong Hình c) là 60° - 360° = -300°.

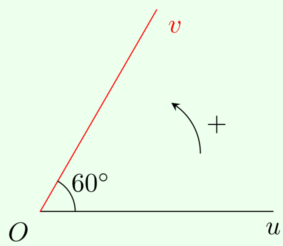
  Công thức tổng quát là $(OM, ON) = 60^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

1 Cho góc hình học $uOv = 45^\circ$. Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên và viết công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (Ou, Ov).



2

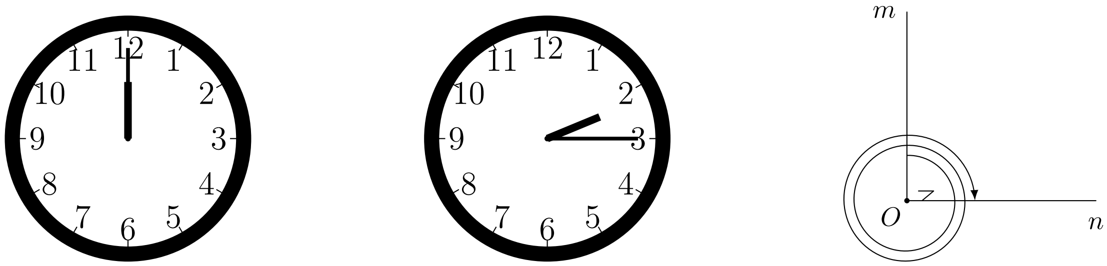
Cho góc hình học uOv có số đo 60°. Xác định số đo của góc lượng giác $(Ou,\ Ov)$ và $(Ov,\ Ou)$.



Ví dụ 2 ★☆☆☆☆

Trong các khoảng thời gian từ 0 giờ đến 2 giờ 15 phút, kim phút quét một góc lượng giác bao nhiêu độ?

Hướng dẫn giải.



Gọi Om, On là các tia biểu diễn cho vị trí của kim phút lần lượt tại 0 giờ và 2 giờ 15 phút. Khi đó kim phút đã quay hết 2 vòng và đi tiếp $\frac{1}{4}$ vòng của đồng hồ.

Mà kim phút chuyển động theo chiều âm nên ta có

$$(Om, On) = \frac{1}{4} \cdot (-360^\circ) + 2 \cdot (-360^\circ) = -810^\circ.$$

Vậy kim phút đã quét hết một góc lượng giác là -810°.

2) Hệ thức Chasles (Sa-lơ)

Với ba tia Oa, Ob, Oc bất kì ta có

$$(Oa, Ob) + (Ob, Oc) = (Oa, Oc) + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

Nhận xét: Từ hệ thức Chasles, với ba tia Oa, Ob, Oc bất kì, ta có

$$(Ob, Oc) = (Oa, Oc) - (Oa, Ob) \pm 360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 3 ★☆☆☆☆

Cho một góc lượng giác (Ox, Ou) có số đo -270° và một góc lượng giác (Ox, Ov) có số đo 135°. Tính số đo của các góc lượng giác (Ou, Ov).

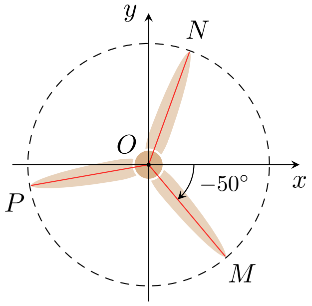
Hướng dẫn giải. Số đo của các góc lượng giác tia đầu Ou, tia cuối Ov là

$$\begin{aligned}(Ou, Ov) &= (Ox, Ov) - (Ox, Ou) - k360^\circ \\ &= 135^\circ - (-270^\circ) - k360^\circ = 405^\circ - k360^\circ \\ &= 45^\circ + (1-k)360^\circ = 45^\circ + m360^\circ \quad (m = 1-k,\ m \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

Vậy các góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $45^\circ + m360^\circ \quad (m \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ 4 ★☆☆☆☆

Trong hình bên, chiếc quạt có ba cánh được phân bố đều nhau. Viết công thức tổng quát số đo của góc lượng giác (Ox, ON) và (Ox, OP).



Hướng dẫn giải. Chiếc quạt có ba cạnh được phân bố đều nhau nên

$$\widehat{MON} = \widehat{NOP} = \widehat{POM} = 120^\circ.$$

- Với ba tia OM, Ox và ON, ta có:

$$\begin{aligned}(Ox, ON) =&(Ox, OM) + (OM, ON) - k_1 360^\circ\\ =&-50^\circ + 120^\circ - k_1 360^\circ = 70^\circ - k_1 360^\circ \quad (k_1 \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

- Với ba tia Ox, ON, OP, ta có:

$$\begin{aligned}(Ox, OP) =&(Ox, ON) + (ON, OP) - k_2 360^\circ\\ =&70^\circ + 120^\circ - k_2 360^\circ = 190^\circ - k_2 360^\circ \quad (k_2 \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

(3) Cho một góc lượng giác Ox, Ou có số đo 240° và một góc lượng giác (Ox, Ov) có số đo -270°. Tính số đo góc lượng giác (Ou, Ov).

II. ĐƠN VỊ RADIAN

1) Đơn vị radian

Trên đường tròn bán kính R tùy ý, góc ở tâm chắn một cung có độ dài đúng bằng R được gọi là một góc có số đo 1 radian (đọc là ra-đi-an, viết tắt là 1 rad).

Ta có công thức chuyển đổi số đo góc từ đơn vị radian sang độ và ngược lại như sau:

- $a^\circ = \dfrac{\pi a}{180}$ rad
- α rad $= \left(\dfrac{180\alpha}{\pi}\right)^\circ$.

Ví dụ 5 ★☆☆☆☆

Đổi số đo các góc sau đây từ đơn vị radian sang đơn vị độ hoặc ngược lại:

a) -30° b) $\dfrac{\pi}{12}$ rad. c) 12 rad.

Hướng dẫn giải.

a) $-30^\circ = -\dfrac{30\pi}{180} = -\dfrac{\pi}{6}$ rad.

b) $\dfrac{\pi}{12}$ rad $= \left(\dfrac{\pi}{12}.\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ = 15^\circ$.

c) 12 rad $= \left(12.\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ = \left(\dfrac{2160}{\pi}\right)^\circ \approx 687,55^\circ$.

LƯU Ý.

a) Khi ghi số đo của một góc theo đơn vị radian, người ta thường bỏ đi chữ rad sau số đo. Ví dụ, $\dfrac{\pi}{2}$ rad được viết là $\dfrac{\pi}{2}$, 2 rad được viết là 2.

b) Với đơn vị radian, công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Oa, Ob) là

$$(Oa, Ob) = \alpha + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

trong đó α là số đo theo radian của một góc lượng giác bất kì có tia đầu Oa và tia cuối Ob. Lưu ý không được viết $\alpha + k360^\circ$ hay $\alpha^\circ + k2\pi$ (vì không cùng đơn vị đo).

Dưới đây là bảng tương ứng giữa số đo bằng độ và số đo bằng radian của các góc đặc biệt trong phạm vi từ 0° đến 180°.

Độ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radian	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{5\pi}{6}$	π

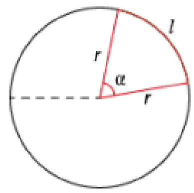
4

a) Đổi từ độ sang radian các số đo sau $360^\circ; -450^\circ$.

b) Đổi từ radian sang độ các số đo sau $3\pi, -\dfrac{11\pi}{5}$.

2) Độ dài cung tròn

Một cung tròn bán kính R và có số đo α rad thì có độ dài $l = \alpha R$.



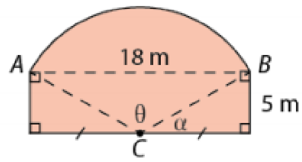
Ví dụ 6 ★☆☆☆☆

Trên một đường tròn có bán kính 7, 2 m. Tìm độ dài của cung có số đo $\dfrac{2\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải. Độ dài của cung $l = \dfrac{2\pi}{3}.7,2 = 4,8\pi$ (m).

Ví dụ 7 ★☆☆☆☆

Một bức tường của một ngôi nhà có dạng như Hình bên, trong đó cung AB là một cung của đường tròn tâm C, bán kính AC. Tính chu vi của bức tường.

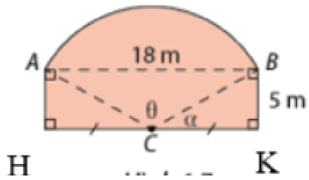


Hướng dẫn giải.

Gọi điểm H, K như trên hình.

Ta có $AB = 18m, HK = 18m, CK = 9m$.

Do đó $R = AC = BC = \sqrt{BK^2 + KC^2} = \sqrt{5^2 + 9^2} = \sqrt{106}$ m.



Xét tam giác BKH vuông tại K có:

$$\tan\alpha = \frac{BK}{KC} = \frac{5}{9} \Rightarrow \alpha \approx 0,507 \quad \text{(rad)}$$

Suy ra $\theta = \pi - 2\alpha = \pi - 2,507 \approx 2,218$ rad.

Cung AB có độ dài là $l = \theta.R = 2,218.\sqrt{106} \approx 21,91$ (m).

Vậy chu vi bức tường là $C = 21,91 + 5 + 5 + 18 = 49,91$ (m).

5

Một máy kéo nông nghiệp với bánh xe sau có đường kính là 184 cm, bánh xe trước có đường kính là 92 cm, xe chuyển động với vận tốc không đổi trên một đoạn đường thẳng. Biết rằng vận tốc của bánh xe sau trong chuyển động này là 80 vòng/phút.

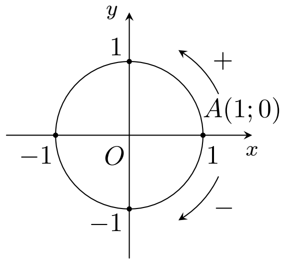
a) Tính quãng đường đi được của máy kéo trong 10 phút.

b) Tính vận tốc của máy kéo (theo đơn vị km/giờ).

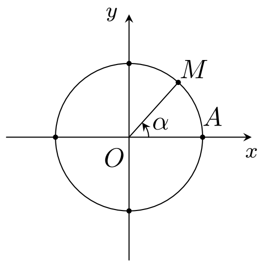
c) Tính vận tốc của bánh xe trước (theo đơn vị vòng/phút).

III. ĐƯỜNG TRÒN LƯỢNG GIÁC

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn tâm O bán kính bằng 1. Trên đường tròn này, chọn điểm $A(1;0)$ làm gốc, chiều dương là chiều ngược chiều kim đồng hồ và chiều âm là chiều cùng chiều kim đồng hồ. Đường tròn cùng với gốc và chiều như trên được gọi là **đường tròn lượng giác**.



Cho số đo góc α bất kì. Trên đường tròn lượng giác, ta xác định được duy nhất một điểm M sao cho số đo góc lượng giác $(OA, OM) = \alpha$. Khi đó M được gọi là điểm biểu diễn của góc có số đo α trên đường tròn lượng giác.



LƯU Ý. Hệ trục tọa độ Oxy chia mặt phẳng tọa độ thành bốn "góc phần tư" kí hiệu lần lượt là I,II,III và IV như hình bên.

Ví dụ 8 ★☆☆☆☆

Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo là:

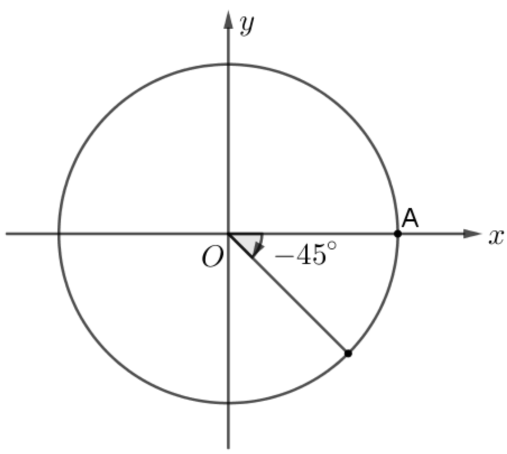
a) $-1485°$

b) $\dfrac{19\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải.

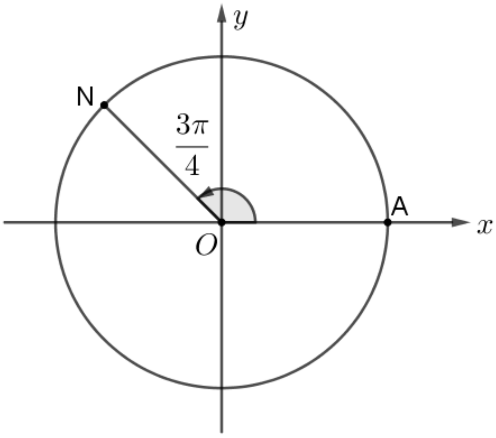
a) Ta có $-1485° = -45° + (-4).360°$.

Biểu diễn góc trên đường tròn lượng giác ta được:



b) Ta có $\dfrac{19\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi$.

Biểu diễn góc trên đường tròn lượng giác ta được:



BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm

Câu 1. Đổi số đo của góc 108° sang đơn vị rađian

Ⓐ $\dfrac{3\pi}{2}$. Ⓑ $\dfrac{\pi}{10}$. Ⓒ $\dfrac{3\pi}{5}$. Ⓓ $\dfrac{\pi}{4}$.

Câu 2. Nếu một cung tròn có số đo là α° thì số đo rađian của nó là

Ⓐ $180\pi\alpha$. Ⓑ $\dfrac{180\pi}{\alpha}$. Ⓒ $\dfrac{\alpha\pi}{180}$. Ⓓ $\dfrac{\pi}{180\alpha}$.

Câu 3. Trên đường tròn cung có số đo 1 rad là

Ⓐ Cung có độ dài bằng nửa đường kính .

Ⓑ Cung có độ dài bằng đường kính .

Ⓒ Cung có độ dài bằng 1 .

Ⓓ Cung có độ dài tương ứng với góc ở tâm 60° .

Câu 4. Góc có số đo $-\dfrac{7\pi}{4}$ thì có số đo là

Ⓐ -315° . Ⓑ -630° . Ⓒ 315° . Ⓓ -135° .

Câu 5. Đổi số đo của góc $\dfrac{\pi}{12}$ sang đơn vị độ

Ⓐ 6° . Ⓑ 15°. Ⓒ 10° . Ⓓ 5° .

Câu 6. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $-\dfrac{\pi}{4}$, góc lượng giác (Ou, Ow) có số đo bằng $\dfrac{3\pi}{4}$. Tìm số đo của các góc lượng giác (Ov, Ow).

Ⓐ $\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ⓑ $k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ⓒ $\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ⓓ $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 7. Tính độ dài l của cung trên đường tròn có số đo $\frac{\pi}{16}$ và bán kính bằng 20cm.

Ⓐ $l = 2,94\text{cm}$. Ⓑ $l = 3,39\text{cm}$.

Ⓒ $l = 1,49\text{cm}$. Ⓓ $l = 3,93\text{cm}$.

Câu 8. Góc lượng giác có số đo α rad thì mọi góc lượng giác cùng tia đầu và tia cuối với nó có số đo dạng nào trong các dạng sau?

Ⓐ $\alpha + k180°$. Ⓑ $\alpha + k360°$. Ⓒ $\alpha + k2\pi$. Ⓓ $\alpha + k\pi$.

Câu 9. Trên đường tròn lượng giác, cho góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{2}$ thì mọi góc lượng giác có cùng tia đầu và tia cuối với góc lượng giác trên đều có số đo dạng:

Ⓐ $\frac{\pi}{2}$. Ⓑ $\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

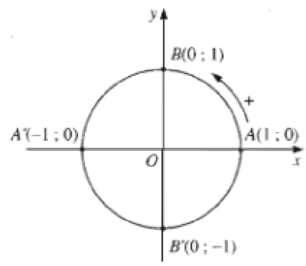
Ⓒ $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ⓓ $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 10. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo theo radian là $\frac{\pi}{3}$. Các góc lượng giác sau đây có cùng tia đầu Ou, hỏi góc nào có tia cuối Ov?

Ⓐ $\frac{2\pi}{3}$. Ⓑ $-\frac{2\pi}{3}$. Ⓒ $\frac{5\pi}{3}$. Ⓓ $-\frac{5\pi}{3}$.

Câu 11. Trên đường tròn lượng giác, số đo của góc lượng giác (OA, OB') là

Ⓐ $-\frac{\pi}{4}$. Ⓑ $-\frac{\pi}{2}$. Ⓒ $\frac{\pi}{4}$. Ⓓ $\frac{\pi}{2}$.



Câu 12. Góc lượng giác (Ox, Ot) có một số đo là $\frac{\pi}{2} + 2017\pi$, số đo tổng quát của góc lượng giác (Ox, Ot) là

Ⓐ $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ⓑ $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ⓒ $\frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ⓓ $\frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 13. Cho góc lượng giác $\alpha = (OA, OB) = \frac{\pi}{5}$. Trong các góc lượng giác sau, góc nào có tia đầu và tia cuối lần lượt trùng với OA, OB?

Ⓐ $\frac{6\pi}{5}$. Ⓑ $-\frac{11\pi}{5}$. Ⓒ $\frac{31\pi}{5}$. Ⓓ $\frac{9\pi}{5}$.

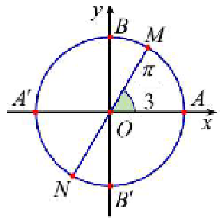
Câu 14. Nếu số đo góc lượng giác $(Os, Ot) = \frac{2006\pi}{5}$ thì số đo góc hình học $\widehat{sOt}$ bằng

Ⓐ $\frac{\pi}{5}$. Ⓑ $\frac{4\pi}{5}$. Ⓒ $\frac{6\pi}{5}$. Ⓓ $\frac{9\pi}{5}$.

Câu 15. Bánh xe đạp của người đi xe đạp quay được 2 vòng trong 5 giây. Hỏi trong 2 giây, bánh xe quay được một góc bao nhiêu độ?

Ⓐ $\frac{5}{8}\pi$. Ⓑ $\frac{8}{5}\pi$. Ⓒ $\frac{5}{3}\pi$. Ⓓ $\frac{3}{5}\pi$.

Câu 16. Trên hình vẽ hai điểm M, N biểu diễn các cung có số đo là:



Ⓐ $\frac{\pi}{3}+k2\pi$. Ⓑ $-\frac{\pi}{3}+k\pi$. Ⓒ $\frac{\pi}{3}+k\pi$. Ⓓ $\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}$.

Câu 17. Khẳng định nào sau đây là đúng khi nói về "đường tròn định hướng"?

Ⓐ Mỗi đường tròn là một đường tròn định hướng.

Ⓑ Mỗi đường tròn đã chọn một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng .

Ⓒ Mỗi đường tròn đã chọn một chiều chuyển động và một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng .

Ⓓ Mỗi đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương và chiều ngược lại được gọi là chiều âm là một đường tròn định hướng.

Câu 18. Quy ước chọn chiều dương của một đường tròn định hướng là:

Ⓐ Luôn cùng chiều quay kim đồng hồ .

Ⓑ Luôn ngược chiều quay kim đồng hồ .

Ⓒ Có thể cùng chiều quay kim đồng hồ cũng có thể là ngược chiều quay kim đồng hồ .

Ⓓ Không cùng chiều quay kim đồng hồ và cũng không ngược chiều quay kim đồng hồ .

Câu 19. Khẳng định nào sau đây là đúng khi nói về "đường tròn lượng giác"?

Ⓐ Mỗi đường tròn là một đường tròn lượng giác .

Ⓑ Mỗi đường tròn có bán kính $R=1$ là một đường tròn lượng giác .

Ⓒ Mỗi đường tròn có bán kính $R=1$, tâm trùng với gốc tọa độ là một đường tròn lượng giác .

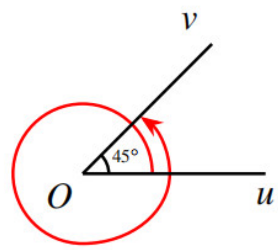
Ⓓ Mỗi đường tròn định hướng có bán kính $R=1$, tâm trùng với gốc tọa độ là một đường tròn lượng giác .

Câu 20. Trên đường tròn lượng giác gốc A, cho điểm M xác định bởi sđ$\overset{\frown}{AM}=\frac{\pi}{3}$. Gọi M_1 là điểm đối xứng của M qua trục Ox. Tìm số đo cung lượng giác $\overset{\frown}{AM_1}$.

Ⓐ $-\frac{5\pi}{3}+k2\pi$. Ⓑ $\frac{\pi}{3}+k2\pi$.

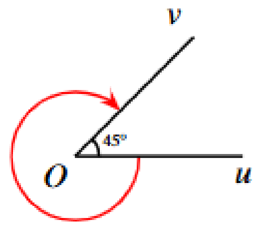
Ⓒ $-\frac{\pi}{3}+k2\pi$. Ⓓ $\frac{\pi}{3}+k\pi$.

Câu 21. Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên.



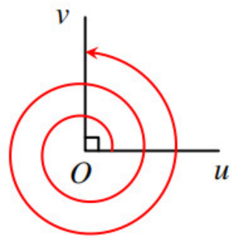
Ⓐ 405° . Ⓑ 385°. Ⓒ -405° . Ⓓ 45° .

Câu 22. Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên.



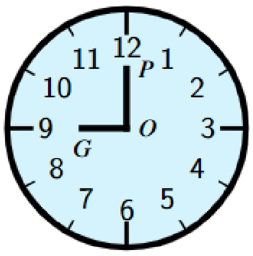
Ⓐ 45° . Ⓑ -315°. Ⓒ 405° . Ⓓ 315° .

Câu 23. Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên.



Ⓐ 450° . Ⓑ -450°. Ⓒ 810° . Ⓓ 90° .

Câu 24. Một chiếc đồng hồ có kim chỉ giờ OG chỉ số 9 và kim phút OP chỉ số 12. Số đo các góc lượng giác (OG, OP)



Ⓐ $-270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. Ⓑ $-90^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Ⓒ $90^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. Ⓓ $270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 25. Trên đường tròn lượng giác gốc A cho các cung có số đo:

(I) $\dfrac{\pi}{4}$ (II) $-\dfrac{7\pi}{4}$ (III) $\dfrac{13\pi}{4}$ (IV) $-\dfrac{71\pi}{4}$

Hỏi các cung nào có điểm cuối trùng nhau?

Ⓐ (I) và (II) . Ⓑ (I), (II) và (III) .

Ⓒ (II),(III) và (IV) . Ⓓ (I), (II) và (IV) .

Câu 26. Một chiếc bánh xe có 72 răng, số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là

Ⓐ 50° . Ⓑ 60° . Ⓒ 70° . Ⓓ 120° .

Câu 27. Sau khoảng thời gian 4 giờ kím giờ sẽ quay được một góc là

Ⓐ $\dfrac{\pi}{3}$. Ⓑ $\dfrac{2\pi}{3}$. Ⓒ $\dfrac{3\pi}{4}$. Ⓓ $\dfrac{\pi}{4}$.

Câu 28. Trong 20 giây bánh xe của xe gắn máy quay được 60 vòng. Tính độ dài quãng đường xe gắn máy đã đi được trong vòng 3 phút, biết rằng bán kính bánh xe gắn máy bằng 6,5 cm (lấy $\pi = 3{,}1416$).

Ⓐ 22043 cm. Ⓑ 22055 cm. Ⓒ 22042 cm. Ⓓ 22054 cm.

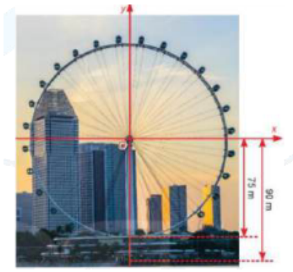
Câu 29. Một bánh xe đạp quay được 25 vòng trong 10 giây. Tính độ dài quãng đường mà người đi xe thực hiện được trong 2,35 phút, biết rằng bán kính bánh xe bằng 340 mm. (Tính theo đơn vị mét, kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm.)

Ⓐ 314,5 m. Ⓑ 753,04 m. Ⓒ 514,8 m. Ⓓ 437,8 m.

Câu 30. Từ một vị trí ban đầu trong không gian, vệ tinh X chuyển động theo quỹ đạo là một đường tròn quanh Trái Đất và luôn cách tâm Trái Đất một khoảng bằng 9200 km. Sau 2 giờ thì vệ tinh X hoàn thành hết một vòng di chuyển. Quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1 giờ là bao nhiêu km?

Ⓐ 28902,65 . Ⓑ 29802,65 . Ⓒ 32102,65 . Ⓓ 28905 .

Câu 31. Một chiếc đu quay có bán kính 75 m, tâm của vòng quay ở độ cao 90 m, thời gian thực hiện mỗi vòng quay của đu quay là 30 phút. Nếu một người vào cabin tại vị trí thấp nhất của vòng quay, thì sau 20 phút quay, người đó ở độ cao bao nhiêu mét?



Ⓐ $127,5$ m. Ⓑ $154,3$ m. Ⓒ $87,7$ m. Ⓓ $57,5$ m.

Câu 32. Trên đường tròn lượng giác gốc A, cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành tam giác đều?

Ⓐ $\frac{k2\pi}{3}$. Ⓑ $k\pi$. Ⓒ $\frac{k\pi}{2}$. Ⓓ $\frac{k\pi}{3}$.

Câu 33. Trên đường tròn lượng giác gốc A, cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành hình vuông?

Ⓐ $\frac{k2\pi}{3}$. Ⓑ $k\pi$. Ⓒ $\frac{k\pi}{2}$. Ⓓ $\frac{k\pi}{3}$.

Câu 34. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ Biểu diễn góc lượng giác 125° trên đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ II .

Ⓑ Biểu diễn góc lượng giác 125° trên đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ III .

Ⓒ Biểu diễn góc lượng giác 125° trên đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ IV .

Ⓓ Biểu diễn góc lượng giác 125° trên đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ I .

2 Tự luận

Bài 1. Đổi số đo các góc sau sang radian hoặc ngược lại:

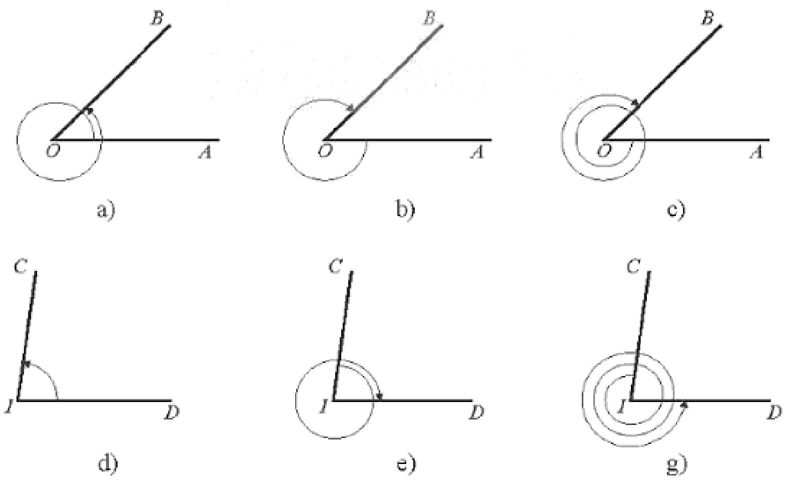
a) 38° c) $\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^\circ$ e) -5

b) -110° d) $\dfrac{\pi}{12}$ f) $\dfrac{13\pi}{9}$.

Bài 2. Biểu diễn số đo các góc sau trên đường tròn lượng giác:

a) $-\dfrac{17\pi}{3}$ b) $\dfrac{13\pi}{4}$ c) -765°. d) $\dfrac{48\pi}{4}$.

Bài 3. Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong mỗi hình dưới đây. Biết trong các Hình a), b), c) có $\widehat{AOB} = \dfrac{\pi}{4}$; trong các hình d), e), g) có $\widehat{CID} = 82^\circ$.



Bài 4. Hãy tìm số đo α của góc lượng giác (Om, On), với $-\pi \leqslant \alpha < \pi$, biết một góc lượng giác cùng tia đầu Om và tia cuối On có số đo là:

a) $\dfrac{36\pi}{5}$. b) $\dfrac{-75\pi}{14}$. c) $\dfrac{39\pi}{8}$ d) 2023π.

Bài 5. Cho một góc lượng giác có số đo là 375°.

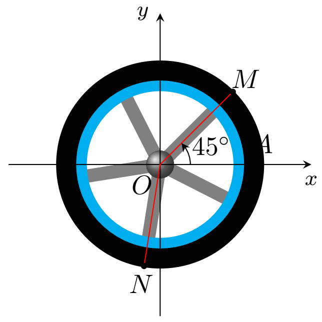
a) Tìm số lớn nhất trong các số đo của góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với góc đó mà có số đo âm;

b) Tìm số nhỏ nhất trong các số đo của góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với góc đó mà có số đo dương.

Bài 6. Viết công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (Om, On) về $\alpha^\circ + k360^\circ, (k \in \mathbb{Z})$, với $0 \leqslant \alpha < 360$, biết một góc lượng giác với tia đầu Om, tia cuối On có số đo:

a) 1935°; b) -450°; c) -1440°; d) $754{,}5^\circ$.

Bài 7. Trong hình bên, mâm bánh xe ô tô được chia thành năm phần bằng nhau. Viết công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Ox, ON).

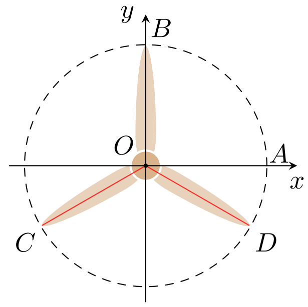


Bài 8. Trên đường tròn lượng giác, hãy biểu diễn các góc lượng giác có số đo có dạng:

a) $\dfrac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ b) $k\dfrac{\pi}{4}\ (k \in \mathbb{Z})$ c) $\dfrac{\pi}{6} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$. d) $\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$

Bài 9. Vị trí các điểm B, C, D trên cánh quạt động cơ máy bay trong Hình bên có thể biểu diễn cho các góc lượng giác nào sau đây?

$$\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3}(k \in \mathbb{Z});\ \frac{-\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}(k \in \mathbb{Z});\ \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3}(k \in \mathbb{Z})$$



Bài 10.

a) Góc lượng giác -245° có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác với góc lượng giác nào sau đây?

$$-605^\circ;\quad -65^\circ;\quad 115^\circ;\quad 205^\circ;\quad 475^\circ$$

b) Góc lượng giác $\dfrac{24\pi}{5}$ có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác với góc lượng giác nào sau đây?

$$\frac{16\pi}{5};\quad \frac{\pi}{5};\quad \frac{14\pi}{5};\quad \frac{29\pi}{5};\quad \frac{53\pi}{10}$$

Bài 11. Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 175 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều dương.

a) Sau 5 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

b) Sau thời gian bao lâu cánh quạt quay được một góc có số đo 42π?

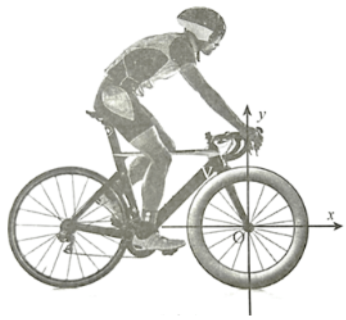
Bài 12. Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A, vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là O của Trái Đất, bán kính 9 000 km. Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2 h.

a) Hãy tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau: 1 h; 3 h; 5 h.

b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200 000 km sau bao nhiêu giờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Bài 13. Một vòng quay Mặt Trời quay mỗi vòng khoảng 15 phút. Tại vị trí quan sát, bạn Linh thấy vòng quay chuyển động theo chiều kim đồng hồ. Khi vòng quay chuyển động được 10 phút, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng bao nhiêu? (Tính theo đơn vị radian).

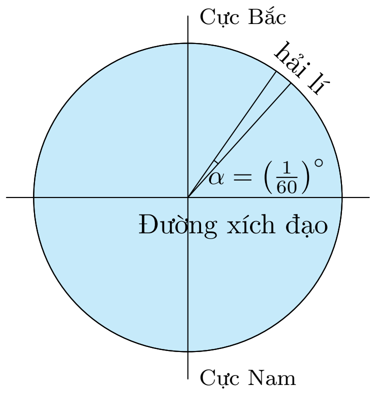
Bài 14. Trong chặng đua nước rút, bánh xe của một vận động viên đua xe đạp quay được 30 vòng trong 8 giây. Chọn chiều quay của bánh xe là chiều dương. Xét van V của bánh xe. Trong chặng đua nước rút, bánh xe của một vận động viên đua xe đạp quay được 30 vòng trong 8 giây



a) Sau 1 phút, van V đó quay được một góc có số đo là bao nhiêu radian?

b) Biết rằng bán kính của bánh xe là 35 cm. Độ dài quãng đường mà vận động viên đua xe đạp đã đi được trong một phút là bao nhiêu mét?

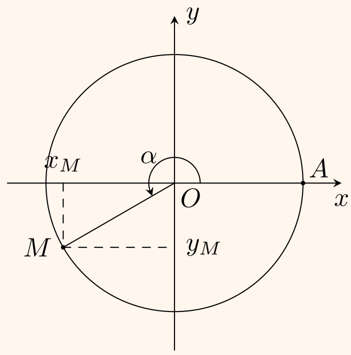
Bài 15. Hải lí là một đơn vị chiều dài hàng hải, được tính bằng độ dài một cung chắn một góc $\alpha = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$. của đường kinh tuyến (Hình bên). Đổi số đo α sang radian và cho biết 1 hải lí bằng khoảng bao nhiêu km, biết bán kính trung bình của Trái Đất là 6 371 km. Làm tròn kết quả hàng phần trăm.



2 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

I. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

Trên đường tròn lượng giác, gọi M là điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo α. Khi đó:

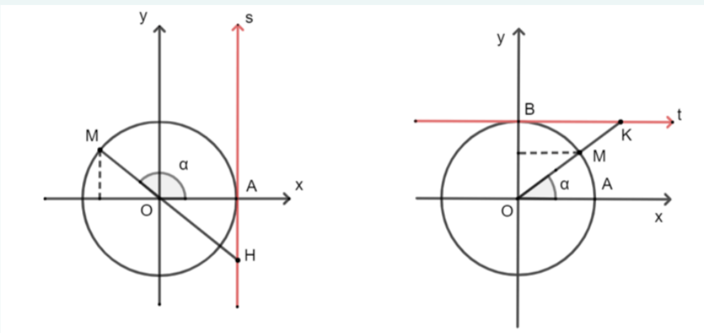


- Tung độ y_M của M gọi là **sin** của α, kí hiệu $\sin\alpha$.
- Tung độ x_M của M gọi là **côsin** của α, kí hiệu $\cos\alpha$.
- Nếu $x_M \neq 0$ tỉ số $\dfrac{y_M}{x_M} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ gọi là **tang** của α, kí hiệu là $\tan\alpha$.
- Nếu $y_M \neq 0$ tỉ số $\dfrac{x_M}{y_M} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ gọi là **côtang** của α, kí hiệu là $\cot\alpha$.
- Các giá trị $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$ được gọi là *các giá trị lượng giác của góc lượng giác α*

LƯU Ý.

a) Ta gọi trục hoành là **trục côsin**, còn trục tung là **trục sin**.

Trục As có gốc ở điểm $A(1;0)$ và song song với trục sin (hình a) gọi là **trục tang**. Nếu đường thẳng OM cắt trục tang thì tung độ của giao điểm đó chính là $\tan\alpha$. Trục Bt có gốc ở điểm $B(0;1)$ và song song với trục côsin (hình b) gọi là **trục côtang**. Nếu đường thẳng OM cắt trục côtang thì hoành độ của giao điểm đó chính là $\cot\alpha$.



b) $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$; và $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1; -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$.

$\tan\alpha$ chỉ xác định với các góc $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$; $\cot\alpha$ chỉ xác định với các góc $\alpha \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

c) Với mọi góc lượng giác α và số nguyên k ta có

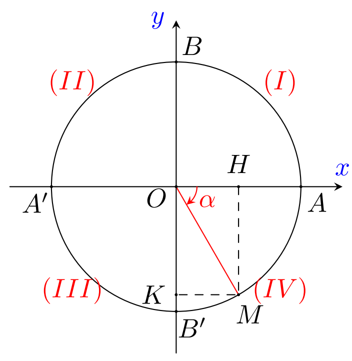
- $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$.
- $\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$
- $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$.
- $\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha$.

Ta có bảng giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt từ 0 đến $\frac{\pi}{2}$ như sau:

Góc α	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$
	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\|\|$
$\cot\alpha$	$\|\|$	$\sqrt{3}$	1	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	0

Dấu của các giá trị lượng giác của một góc lượng giác phụ thuộc vào vị trí điểm biểu diễn M trên đường tròn lượng giác.

	Góc phần tư			
Giá trị lượng giác	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\alpha$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\alpha$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\cot\alpha$	$+$	$-$	$+$	$-$



Cách ghi nhớ: Nhất cả, nhì sin, tam tang, côtang, tứ cos.

Ví dụ 1 ★☆☆☆☆

Tính các giá trị lượng giác của góc lượng giác $\dfrac{13\pi}{6}$.

Hướng dẫn giải.

- $\sin\dfrac{13\pi}{6} = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + 4\pi\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\cos\dfrac{13\pi}{6} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + 4\pi\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.
- $\tan\dfrac{13\pi}{6} = \dfrac{\sin\dfrac{13\pi}{6}}{\cos\dfrac{13\pi}{6}} = \sqrt{3}$ và $\cot\dfrac{13\pi}{6} = \dfrac{\cos\dfrac{13\pi}{6}}{\sin\dfrac{13\pi}{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 2 ★☆☆☆☆

Cho $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ và $\left(\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α.

Lời giải.

Ta có $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Longrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1 - \dfrac{9}{25}} = \pm\dfrac{4}{5}$.

Mặt khác, $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$ tức cung α thuộc góc phần tư thứ 2 nên $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$.

Khi đó $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\dfrac{3}{4}$ và $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} - \dfrac{4}{3}$.

(1) Tính các giá trị lượng giác của góc α, biết $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3}$ và $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

II. HỆ THỨC CƠ BẢN GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

Ta có các hệ thức sau liên hệ giữa các giá trị lượng giác của góc lượng giác α:

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\ \left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$
- $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}\ (\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$
- $\tan\alpha.\cot\alpha = 1\ \left(\alpha \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right)$.

Ví dụ 3 ★☆☆☆☆

Cho $\tan x = \dfrac{3}{4}$ với $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Tính các giá trị lượng giác còn lại.

Lời giải.

$\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{4}{3}$. Ta có $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \Longrightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 x}} = \pm\sqrt{\dfrac{1}{1+\frac{9}{16}}} = \pm\dfrac{4}{5}$.

Mặt khác $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $\cos x > 0$ do đó $\cos x = \dfrac{4}{5}$.

Mà $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x} \Longrightarrow \sin x = \dfrac{\cos x}{\cot x} = \dfrac{3}{5}$.

Ví dụ 4 ★☆☆☆☆

Cho $\tan\beta = 2$. Tính giá trị của biểu thức $T = \dfrac{3\sin\beta + \cos\beta}{\sin\beta - \cos\beta}$.

Lời giải.

Ta có $T = \dfrac{\frac{3\sin\beta}{\cos\beta} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta}}{\frac{\sin\beta}{\cos\beta} - \frac{\cos\beta}{\sin\beta}} = \dfrac{3\tan\beta + \cot\beta}{\tan\beta - \cot\beta} = \dfrac{3\cdot 2 + \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \dfrac{13}{3}$.

Ví dụ 5 ★☆☆☆☆

Cho $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng: $\dfrac{2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 1}{\cos^2\alpha} = 3\tan^2\alpha + 2$.

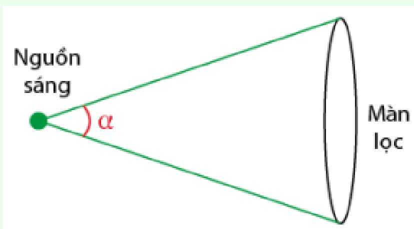
Hướng dẫn giải. Ta có:

$$\begin{aligned}
VT = \frac{2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 1}{\cos^2\alpha} &= \frac{2\tan^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + 1}{\cos^2\alpha} \\
&= 2\tan^2\alpha + 1 + \frac{1}{\cos^2\alpha} = 2\tan^2\alpha + 1 + 1 + \tan^2\alpha \\
&= 3\tan^2\alpha + 2 = VP.
\end{aligned}$$

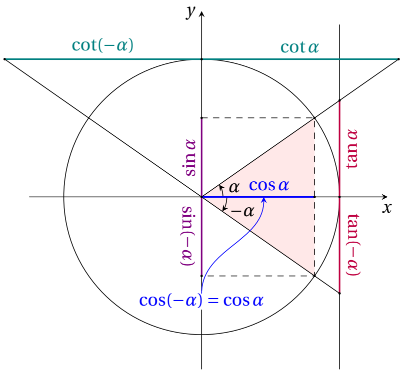
(2) Cho $\cot\alpha = \dfrac{7}{3}$ thỏa $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α.

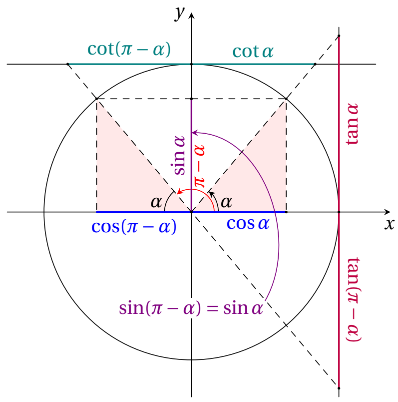
(3)

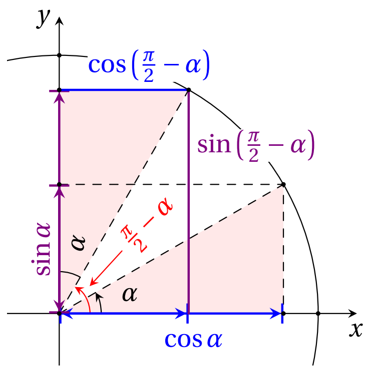
Cường độ ánh sáng I đi xuyên qua một màn lọc ánh sáng được tính bởi công thức: $I = I_m - \dfrac{I_m}{1+\cot^2\alpha}$, trong đó I_m là cường độ ánh sáng đã chiếu lên màn lọc ánh sáng và α là góc như hình vẽ (*nguồn: http://www.vedantu.com/iit-jee/malus-law*). Chứng minh rằng: $I = I_m\cos^2\alpha$.



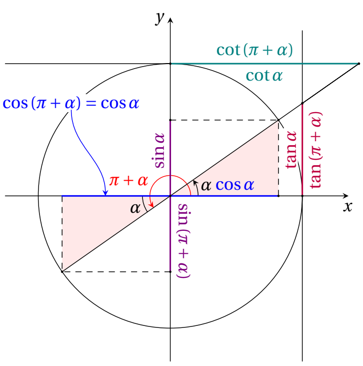
III. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC LƯỢNG GIÁC CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT

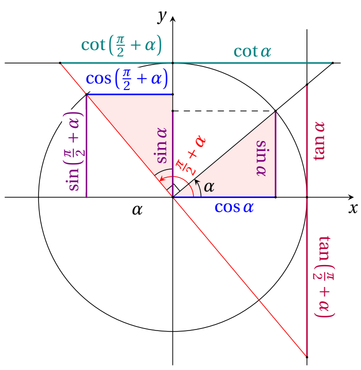






Cung đối nhau	Cung bù nhau	Cung phụ nhau
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$	$\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$	$\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha$





Hơn kém π	Hơn kém $\frac{\pi}{2}$
$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$
$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$
$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$
$\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$	$\cot\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha$

cos đối, sin bù, phụ chéo! khác pi tan, khác pi/2 thì sin!

Ví dụ 6 ★☆☆☆☆

a) Biểu diễn $\cos 638^\circ$ qua giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0° đến 45°.

b) Biểu diễn $\cot \dfrac{19\pi}{5}$ qua giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0 đến $\dfrac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải.

a) $\cos 638^\circ = \cos(2.360^\circ + (-82^\circ)) = \cos(-82^\circ) = \cos 82^\circ = \cos(90^\circ - 8^\circ) = \sin 8^\circ$.

b) $\cot \dfrac{19\pi}{5} = \cot\left(4\pi - \dfrac{\pi}{5}\right) = \cot\left(-\dfrac{\pi}{5}\right) = -\cot\dfrac{\pi}{5}$.

Ví dụ 7 ★☆☆☆☆

Rút gọn biểu thức $A = \cos(\pi - \alpha) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + \tan\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cot(-\alpha)$ (giả thiết các biểu thức điều xác định).

Hướng dẫn giải. Ta có:

$$\begin{aligned}A &= -\cos\alpha + \cos\alpha + \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cot\alpha\\ &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cot\alpha\\ &= \cot\alpha - \cot\alpha = 0.\end{aligned}$$

Ví dụ 8 ★☆☆☆☆

Tính:

a) $A = \sin^2 5^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 15^\circ + \ldots + \sin^2 85^\circ$ (17 số hạng).

b) $B = \cos 5^\circ + \cos 10^\circ + \cos 15^\circ + \ldots + \cos 175^\circ$ (35 số hạng).

Hướng dẫn giải.

a) Vận dụng $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$, ta có:

$$\sin 85^\circ = \cos 5^\circ,\quad \sin 80^\circ = \cos 10^\circ,\quad \sin 75^\circ = \cos 15^\circ, \ldots,\quad \sin 50^\circ = \cos 40^\circ$$

Vậy:

$$\begin{aligned}A =& (\sin^2 5^\circ + \cos^2 5^\circ) + (\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) + \ldots + (\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ) + \sin^2 45^\circ\\ =& \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{8 \text{ số } 1} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}\end{aligned}$$

b) Vận dụng $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, ta có:

$\cos 175° = -\cos 5°$, $\cos 170° = -\cos 10°$, $\cos 165° = -\cos 15°, \ldots,$ $\cos 95° = -\cos 85°$

Vậy:

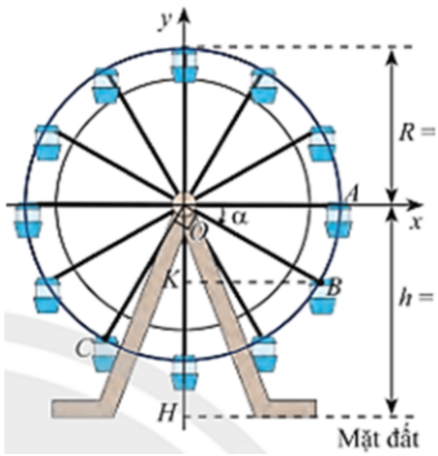
$$\begin{aligned} B =& (\cos 5° + \cos 175°) + (\cos 10° + \cos 170°) + \ldots + (\cos 85° + \cos 95°) + \cos 90° \\ =& 0 + 0 + \ldots + 0 + \cos 90° = 0 \end{aligned}$$

Ví dụ 9 ★☆☆☆☆

Trong hình bên , vị trí cabin mà Bình và Cường ngồi trên vòng quay được đánh dấu bởi điểm B và điểm C:

a) Chứng minh rằng chiều cao từ điểm B đến mặt đất bằng $(13 + 10\sin\alpha)$ mét với α là số đo của một góc lượng giác tia đầu OA, tia cuối OB. Tính độ cao của điểm B so với mặt đất khi $\alpha = -30°$.

b) Khi điểm B cách mặt đất 4m thì điểm C cách mặt đất bao nhiêu mét? Kết quả làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Hướng dẫn giải.

a) Điểm B là điểm biểu diễn cho góc lượng giác có số đo góc là α trên đường tròn lượng giác có bán kính bằng 10 nên tọa độ điểm $B(10\cos\alpha; 10\sin\alpha)$.

Vì tung độ điểm B có giá trị âm nên $OK = -10\sin\alpha$.

Do đó $HK = OH - OK = 13 + \sin\alpha$.

Vì vậy, chiều cao từ điểm B đến mặt đất là: $13 + 10\sin\alpha$ (m).

Với $\alpha = 30°$ suy ra chiều cao từ điểm B đến mặt đất là: 13 + 10 sin.(- 30°) = 8 (mét).

b) Nếu điểm B cách mặt đất 4m thì $13 + 10\sin\alpha = 4 \Rightarrow \sin\alpha = -\dfrac{9}{10}$.

Suy ra $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \left(-\dfrac{9}{10}\right)^2} = -\dfrac{\sqrt{19}}{10}$.

Gọi M là hình chiếu vuông góc C lên OH. Ta có: $\cos\widehat{COH} = \cos\alpha$.

Mà $\cos\widehat{COH} = \dfrac{OM}{OC} \Rightarrow OM = -\dfrac{\sqrt{19}}{10}.OC = -\dfrac{\sqrt{19}}{10}.10 = \sqrt{19}$.

Suy ra $MH = OH - OM = 13 - \sqrt{19} \approx 8,64$ m.

Vậy điểm C cách mặt đất 8,64 m.

④

a) Biểu diễn $\tan 973^\circ$ qua giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0° đến 45°.

b) Biểu diễn $\sin -\dfrac{29\pi}{3}$ qua giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0 đến $\dfrac{\pi}{4}$.

⑤ Chứng minh giá trị biểu thức sau không phụ thuộc vào x

$$\sin^2(x+\pi)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(-x)+\cos(\pi-x).$$

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm

Câu 1. Cho α thuộc góc phần tư thứ nhất của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

Ⓐ $\sin\alpha > 0$. Ⓑ $\cos\alpha < 0$. Ⓒ $\tan\alpha < 0$. Ⓓ $\cot\alpha < 0$.

Câu 2. Cho $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Khẳng định đúng là

Ⓐ $\sin\alpha > 0, \cos\alpha > 0$.
Ⓑ $\sin\alpha > 0, \cos\alpha < 0$.
Ⓒ $\sin\alpha < 0, \cos\alpha > 0$.
Ⓓ $\sin\alpha < 0, \cos\alpha < 0$.

Câu 3. Cho $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Khẳng định nào dưới đây đúng

Ⓐ $\sin(\alpha-\pi) \geqslant 0$.
Ⓑ $\sin(\alpha-\pi) \leq 0$.
Ⓒ $\sin(\alpha-\pi) < 0$.
Ⓓ $\sin(\alpha-\pi) > 0$.

Câu 4. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\sin(180^\circ-\alpha) = -\cos\alpha$.
Ⓑ $\sin(180^\circ-\alpha) = -\sin\alpha$.
Ⓒ $\sin(180^\circ-\alpha) = \cos\alpha$.
Ⓓ $\sin(180^\circ-\alpha) = \sin\alpha$.

Câu 5. Đẳng thức nào dưới đây **sai**?

Ⓐ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$.
Ⓑ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$.
Ⓒ $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \cot x$.
Ⓓ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right) = \cot x$.

Câu 6. Tính giá trị của biểu thức $S = 3-\sin^2 90^\circ + 2\cos^2 60^\circ - 3\tan^2 45^\circ$.

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $-\dfrac{1}{2}$. Ⓒ 1 . Ⓓ 3 .

Câu 7. Đơn giản biểu thức $A = \cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)$ ta được:

Ⓐ $\cos\alpha$. Ⓑ $\sin\alpha$. Ⓒ $-\cos\alpha$. Ⓓ $-\sin\alpha$.

Câu 8. Các đẳng thức nào sau đây đồng thời xảy ra?

Ⓐ $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}; \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Ⓑ $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}; \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Ⓒ $\sin\alpha = \frac{4}{5}; \cos\alpha = -\frac{3}{5}$. Ⓓ $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}; \cos\alpha = \frac{1}{4}$.

Câu 9. Cho $2\pi < x < \frac{5\pi}{2}$. Chọn khẳng định đúng?

Ⓐ $\tan x > 0, \cot x > 0$. Ⓑ $\tan x > 0, \cot x < 0$.

Ⓒ $\tan x < 0, \cot x > 0$. Ⓓ $\tan x < 0, \cot x < 0$.

Câu 10. Cho $3\pi < x < \frac{10\pi}{3}$. Chọn khẳng định đúng?

Ⓐ $\cos x > 0$. Ⓑ $\sin x < 0$. Ⓒ $\tan x < 0$. Ⓓ $\cot x < 0$.

Câu 11. Cho hai góc nhọn α và β phụ nhau. Hệ thức nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\sin\alpha = -\cos\beta$. Ⓑ $\cos\alpha = \sin\beta$.

Ⓒ $\sin\alpha = \cos\beta$. Ⓓ $\cot\alpha = \tan\beta$.

Câu 12. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) > 0$. Ⓑ $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \geqslant 0$.

Ⓒ $\tan(\alpha + \pi) < 0$. Ⓓ $\tan(\alpha + \pi) > 0$.

Câu 13. Tính giá trị của $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right]$.

Ⓐ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ⓒ $-\frac{1}{2}$. Ⓓ $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 14. Biết $\tan\alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\cot\alpha$.

Ⓐ 2 . Ⓑ $-\frac{1}{4}$. Ⓒ $\sqrt{2}$. Ⓓ $-\frac{1}{2}$.

Câu 15. Biết $\tan\alpha = 2$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\sin\alpha$.

Ⓐ $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Ⓑ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Ⓒ $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. Ⓓ $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 16. Biết $\tan\alpha = -3$. Tính $\tan\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right)$.

Ⓐ $-\frac{1}{3}$. Ⓑ 3. Ⓒ -3 . Ⓓ $\frac{1}{3}$.

Câu 17. Cho $\cos\gamma = \frac{4}{5}$ và $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin\gamma$.

Ⓐ $\frac{1}{5}$. Ⓑ $-\frac{1}{5}$. Ⓒ $-\frac{3}{5}$. Ⓓ $\frac{3}{5}$.

Câu 18. Cho $\sin x = \frac{3}{5}$ và $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Giá trị $\cos x$ là:

Ⓐ $-\frac{4}{5}$. Ⓑ $\frac{4}{5}$. Ⓒ $\frac{16}{25}$. Ⓓ $-\frac{16}{25}$.

Câu 19. Đẳng thức nào dưới đây **sai**?

Ⓐ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Ⓑ $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$.

Ⓒ $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}(\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$.

Ⓓ $\tan\alpha + \cot\alpha = 1\left(\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right)$.

Câu 20. Tính giá trị biểu thức $P = \sin^2\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{9\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{6}.\cot\frac{\pi}{6}$.

Ⓐ $P = 2$. Ⓑ $P = 4$. Ⓒ $P = 3$. Ⓓ $P = 1$.

Câu 21. Trên đường tròn đơn vị cho góc α sao cho $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ và $\cos\alpha < 0$. Tính $\tan\alpha$

Ⓐ $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Ⓑ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Ⓒ 1 . Ⓓ $\frac{2}{5}$.

Câu 22. Với mọi số thực α ta có $\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right)$ bằng

Ⓐ $\sin\alpha$. Ⓑ $\cos\alpha$. Ⓒ $-\sin\alpha$. Ⓓ $-\cos\alpha$.

Câu 23. Cho góc α thỏa mãn $\tan\alpha = -\frac{4}{3}$ và $\frac{2017\pi}{2} < \alpha < \frac{2019\pi}{2}$. Tính $\sin\alpha$.

Ⓐ $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$. Ⓑ $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

Ⓒ $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$. Ⓓ $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

Câu 24. Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\sin(A + C) = -\sin B$. Ⓑ $\cos(A + C) = -\cos B$.

Ⓒ $\tan(A + C) = \tan B$. Ⓓ $\cot(A + C) = \tan B$.

Câu 25. Cho góc α thỏa mãn $\cot\alpha = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{3\sin\alpha + 4\cos\alpha}{2\sin\alpha - 5\cos\alpha}$.

Ⓐ $P = -\frac{15}{13}$. Ⓑ $P = \frac{15}{13}$. Ⓒ $P = -13$. Ⓓ $P = 13$.

Câu 26. Biết $\tan x = \frac{1}{2}$. Tính $M = \frac{2\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 4\cos^2 x}{5\cos^2 x - \sin^2 x}$.

Ⓐ $\frac{8}{19}$. Ⓑ $\frac{2}{19}$. Ⓒ $-\frac{2}{19}$. Ⓓ $-\frac{8}{19}$.

Câu 27. Nếu $\tan\alpha + \cot\alpha = 2$ thì $\tan^2\alpha + \cot^2\alpha$ bằng

Ⓐ 1 . Ⓑ 2. Ⓒ 4 . Ⓓ 3 .

Câu 28. Giá trị đúng của biểu thức $\dfrac{\tan 225^\circ - \cot 81^\circ . \cot 69^\circ}{\cot 261^\circ + \tan 201^\circ}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Ⓑ $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Ⓒ $\sqrt{3}$. Ⓓ $-\sqrt{3}$.

Câu 29. Thu gọn biểu thức

$$P = \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi - x) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$

ta được kết quả là:

Ⓐ $-2\cot x$. Ⓑ $2\tan x$. Ⓒ $2\sin x$. Ⓓ $-2\sin x$.

Câu 30. Cho $\cot\alpha = 4\tan\alpha$ và $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$. Khi đó $\sin\alpha$ bằng

Ⓐ $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

2 Tự luận

Bài 1. Các đẳng thức sau có đồng thời xảy ra không?

a) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ và $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$. b) $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ và $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$. c) $\tan\alpha = \dfrac{1}{3}$ và $\cot\alpha = 3$.

Bài 2. Biểu diễn các giá trị lượng giác sau qua các giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0 đến $\dfrac{\pi}{4}$ hoặc từ 0° đến 45° và tính:

a) $\cos\dfrac{31\pi}{6}$.

b) $\sin\dfrac{129\pi}{4}$.

c) $\tan 1020^\circ$.

d) $\sin(-1693^\circ)$.

e) $\cos\dfrac{1000\pi}{3}$.

f) $\cot\left(-\dfrac{53\pi}{10}\right)$.

Bài 3. Cho $\cos\alpha = -\dfrac{5}{13}$. Tính $\sin\left(-\dfrac{15\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(13\pi + \alpha)$.

Bài 4. Tính các giá trị lượng giác của góc α nếu:

a) $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

b) $\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$ và $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

c) $\tan\alpha = \sqrt{3}$ và $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

d) $\cot\alpha = -\dfrac{1}{2}$ và $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.

Bài 5. Biết $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \dfrac{3\sin\alpha}{2\cos\alpha - \tan\alpha}$.

b) $B = \dfrac{\cot^2\alpha - \sin\alpha}{\tan\alpha + 2\cos\alpha}$.

Bài 6. Cho $\sin x + \cos x = m$. Hãy tính các giá trị sau theo m.

a) $\sin x\cos x$. b) $\sin x - \cos x$. c) $\sin^3 x + \cos^3 x$. d) $\sin^4 x + \cos^4 x$.

Bài 7. Cho $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ và $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Tính $S = \sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} + \sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$.

Gợi ý: Tính S^2.

Bài 8. Cho $\tan x = 2$.Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\dfrac{3\sin x - 4\cos x}{5\sin x + 2\cos x}$.

b) $\dfrac{\sin^3 x + 2\cos^3 x}{2\sin x + 3\cos x}$.

c) $\dfrac{\sin^4 x - 3\sin^3 x\cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x + \sin^2 x\cos^2 x + 2\cos^2 x}$.

Bài 9. Cho $\tan\beta + \cot\beta = 2$. Tính giá trị của biểu thức $\tan^3\beta + \cot^3\beta$.

Bài 10. Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

a) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha$;

b $\tan\alpha + \cot\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

Bài 11. Chứng minh các đẳng thức:

a) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

b) $\dfrac{\cos^2\alpha + \tan^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha} = \tan^2\alpha$.

c) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x.\sin^2 x$.

d) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$.

Bài 12. Chứng minh các đẳng thức:

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$.

b) $\dfrac{1 + \cot x}{1 - \cot x} = \dfrac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$

c) $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin^3\alpha} = \dfrac{1 - \cot^4\alpha}{1 - \cot\alpha}$.

d) $\dfrac{\tan^2\alpha + \cos^2\alpha - 1}{\cot^2\alpha + \sin^2\alpha - 1} = \tan^6\alpha$.

e) $4\cos^2 x - 3 = (1 - 2\sin x)(1 + 2\sin x)$.

f) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$.

Bài 13. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin^2 605^\circ + \sin^2 1645^\circ + \cot^2 25^\circ = \dfrac{1}{\cos^2 65^\circ}$.

b) $\dfrac{\sin 530^\circ}{1 + \sin 640^\circ} = \dfrac{1}{\sin 10^\circ + \cot 10^\circ}$.

Bài 14. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $(1 - \sin^2 x)\cot^2 x + 1 - \cot^2 x$.

b) $2\cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + 3\sin^2 x$.

Bài 15. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $M = \cos(\alpha + \pi) + \sin\left(\alpha + \dfrac{5\pi}{2}\right) - \tan\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)\tan(\pi - \alpha)$.

b) $N = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(\beta + \pi) - \sin(2\pi - \alpha)\cos\left(\beta - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

c) $P = \sin\left(x + \dfrac{85\pi}{2}\right) + \cos(2017\pi + x) + \sin^2(33\pi + x) + \sin^2\left(x - \dfrac{5\pi}{2}\right)$.

d) $Q = \left[\tan(\pi - x).\tan\left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right).\dfrac{1}{\cos^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} - \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right).\dfrac{1}{\sin(\pi - x)}\right]\sin^2(2\pi - x)$.

Bài 16. Tính giá trị biểu thức:

a) $\sin 17^\circ\sin 197^\circ + \sin 73^\circ\cos 163^\circ$.

b) $\dfrac{1}{1 - \tan 145^\circ} + \dfrac{1}{1 + \tan 55^\circ}$.

Bài 17. Tính:

a) $A=\cos^2\dfrac{2\pi}{8}+\cos^2\dfrac{3\pi}{8}+\cos^2\dfrac{5\pi}{8}+\cos^2\dfrac{7\pi}{8}$;

b) $B=\sin\dfrac{\pi}{5}+\sin\dfrac{2\pi}{5}+\ldots+\sin\dfrac{9\pi}{5}$ (gồm 9 số hạng);

c) $C=\tan 1^\circ\cdot\tan 2^\circ\cdot\tan 3^\circ\cdot\ldots\cdot\tan 89^\circ$ (gồm 89 thừa số).

Bài 18. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có:

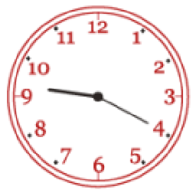
a) $\sin B=\sin(A+C)$;

b) $\cos C=-\cos(A+B+2C)$;

c) $\sin\dfrac{A}{2}=\cos\dfrac{B+C}{2}$;

d) $\tan\dfrac{A+B-2C}{2}=\cot\dfrac{3C}{2}$.

Bài 19. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O trùng với tâm của đồng hồ trong Hình bên, tia Oy chỉ hướng 12 giờ và đầu kim phút của đồng hồ di chuyển trên đường tròn lượng giác tâm O. Từ đó, tìm tọa độ của đầu kim phút khi đồng hồ chỉ chính xác 9 giờ 20 phút.

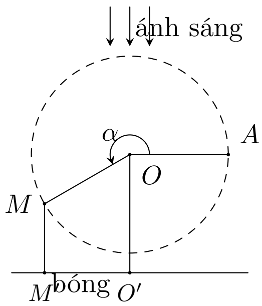


Bài 20. Độ dài của ngày từ lúc Mặt Trời mọc đến lúc Mặt Trời lặn ở một thành phố X trong ngày thứ t của năm được tính xấp xỉ bởi công thức:

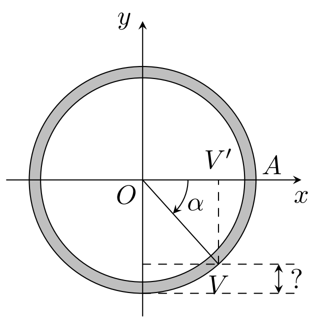
$$d(t)=4\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right]+12,\quad \text{với } t\in\mathbb{Z} \text{ và } 1\leqslant t\leqslant 365$$

Thành phố X vào ngày 31 tháng 1 có bao nhiêu giờ có Mặt Trời chiếu sáng? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Bài 21. Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh trục O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như hình bên. Vị trí ban đầu của thanh là OA. Hỏi độ dài bóng $O'M'$ của OM khi thanh quay được $3\dfrac{1}{10}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là 15 cm? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Bài 22. Khi xe đạp di chuyển, van V của bánh xe quay quanh trục O theo chiều kim đồng hồ với tốc độ góc không đổi là 11 rad/s (hình bên). Ban đầu van nằm ở vị trí A. Hỏi sau một phút di chuyển, khoảng cách từ van đến mặt đất là bao nhiêu, biết bán kính $OA=58$ cm? Giả sử độ dày của lốp xe không đáng kể. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Chuyên đề 3
CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. CÔNG THỨC CỘNG

- $\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$
- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$

sin thì sin cos cos sin

cos thì cos cos sin sin

cos thì đổi dấu hỡi nàng

sin thì giữ dấu xin chàng nhớ cho!

tan tổng thì lấy tổng tan

chia một trừ với tích tan, dễ òm.

Ví dụ 1 ★☆☆☆☆

Tính $\sin\dfrac{\pi}{12}$ và $\tan\dfrac{\pi}{12}$.

Hướng dẫn giải.

- $\sin\dfrac{\pi}{12} = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} - \cos\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
- $\tan\dfrac{\pi}{12} = \tan\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\frac{\pi}{3}.\tan\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}.1} = 2 - \sqrt{3}$.

Ví dụ 2 ★☆☆☆☆

Chứng minh rằng $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Hướng dẫn giải. Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4} - \cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\sin x\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = \sin x - \cos x.\end{aligned}$$

1 Tính

a) $\cos\dfrac{13\pi}{42}\cos\dfrac{\pi}{7}+\sin\dfrac{13\pi}{42}\sin\dfrac{\pi}{7}$. b) $\tan\dfrac{7\pi}{12}$.

2 Chứng minh rằng:

a) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. b) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$.

3 Một dòng điện xoay chiều có cường độ dòng điện i (ampe) tại thời điểm t (giây) được tính bởi công thức: $i=4\cos\dfrac{131\pi}{12}t$. Tính giá trị chính xác của cường độ dòng điện i tại thời điểm $t=1$ giây.

II. CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

Công thức tính các giá trị lượng giác của góc $2a$ qua các giá trị lượng giác của góc a gọi là công thức nhân đôi.

a) $\sin 2a=2\sin a.\cos a$.

b) $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$.

c) $\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.

LƯU Ý. Từ các công thức góc nhân đôi, ta có các công thức sau (gọi là công thức hạ bậc):

a) $\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$. b) $\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}$. c) $\tan^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$.

Ví dụ 3 ★☆☆☆☆

Tính $\cos\dfrac{\pi}{8}$ và $\tan\dfrac{\pi}{8}$.

Hướng dẫn giải.

• Ta có $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{4}=\cos\left(2.\dfrac{\pi}{8}\right)=2\cos^2\dfrac{\pi}{8}-1\Rightarrow\cos^2\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$.

Mà $0<\dfrac{\pi}{8}<\dfrac{\pi}{2}$ nên $\cos\dfrac{\pi}{8}>0$. Vậy $\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

• Ta có $1=\tan\dfrac{\pi}{4}=\tan\left(2.\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$.

Suy ra $1-\tan^2\frac{\pi}{8}=2\tan\frac{\pi}{8}\Rightarrow\tan^2\frac{\pi}{8}+2\tan\frac{\pi}{8}-1=0\Rightarrow\tan\frac{\pi}{8}=-1+\sqrt{2}$ (vì $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$).

Ví dụ 4 ★☆☆☆☆

Cho $\cos x=-\frac{3}{5}$ với $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$. Tính $\sin 2x$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}=\pm\sqrt{1+\frac{3}{5}}=\pm\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

Vì $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ nên $\sin x>0$ do đó $\sin x=\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

Khi đó $\sin 2x=2\sin x\cos x=2\cdot\frac{2\sqrt{10}}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{12\sqrt{10}}{25}$.

Ví dụ 5 ★☆☆☆☆

Cho $\sin a+\cos a=\frac{1}{2}$. Tính:

a) $\sin 2a$;

b) $\cos 4a$.

Hướng dẫn giải.

a) Do $\sin a+\cos a=\frac{1}{2}$ nên $(\sin a+\cos a)^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\sin^2 a+\cos^2 a+2\sin a\cos a=\frac{1}{4}$.

Hay $1+2\sin a\cos a=\frac{1}{4}\Rightarrow 2\sin a\cos a=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$. Suy ra $\sin 2a=2\sin a\cos a=-\frac{3}{4}$.

b) Áp dụng công thức nhân đôi:

$$\cos 4a=\cos(2\cdot 2a)=1-2\sin^2 2a=1-2\left(-\frac{3}{4}\right)^2=1-2\cdot\frac{9}{16}=1-\frac{18}{16}=-\frac{1}{8}.$$

(4) Không dùng máy tính hãy tính $\cos\frac{\pi}{12}$ và $\cos 112,5^\circ$.

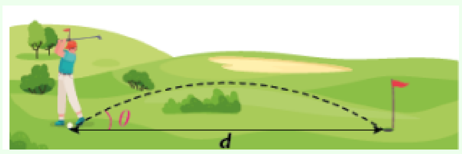
(5)

a) Cho $\cos\alpha=-\frac{1}{4}$ và $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Tính $\sin 2\alpha$ và $\tan 2\alpha$.

b) Cho $\tan\frac{\alpha}{2}=-2$, tính $\tan\alpha$.

(6)

Một quả bóng golf kể từ lúc được đánh đến lúc chạm mặt đất đã di chuyển được một khoảng cách d (m) theo phương nằm ngang.



Biết rằng $d=\frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$, trong đó v_0 (m/s) là vận tốc ban đầu của quả bóng, g là gia tốc trọng trường và θ là góc đánh quả bóng so với phương nằm ngang. Tính giá trị của $\cos 2\theta$ và $\sin\theta$ khi $v_0 = 15\,\mathrm{m/s}$, $d = 12{,}5\,\mathrm{m}$, $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ và $0^\circ < \theta < 45^\circ$.

III. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

- $\cos a.\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$.
- $\sin a.\sin b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$.
- $\sin a.\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a-b) + \sin(a+b)\right]$.

Ví dụ 6

Tính $\sin\dfrac{\pi}{24}\cos\dfrac{5\pi}{24}$ và $\sin\dfrac{7\pi}{8}\sin\dfrac{5\pi}{8}$.

Hướng dẫn giải. Ta có :

$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24} &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{24}-\frac{5\pi}{24}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{24}+\frac{5\pi}{24}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\frac{\pi}{4}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{4}.\end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}\sin\frac{7\pi}{8}\sin\frac{5\pi}{8} &= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{8}-\frac{5\pi}{8}\right)-\cos\left(\frac{7\pi}{8}+\frac{5\pi}{8}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}-\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Ví dụ 7

Cho $\sin 2x = -\dfrac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $T = \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Hướng dẫn giải.

$$\begin{aligned}A &= \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}+x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}-x+\frac{\pi}{4}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(\sin 2x+\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}+1\right) = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

7 Không dùng máy tính, tính giá trị của biểu thức:

a) $\cos 75^\circ \cos 15^\circ$.

b) $\sin \dfrac{5\pi}{12} \cos \dfrac{7\pi}{12}$.

8 Cho $\cos x = \dfrac{2}{3}$. Tính $Q = \cos \dfrac{3x}{2} \cos \dfrac{x}{2}$.

IV. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH

- $\cos a + \cos b = 2\cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$
- $\sin a + \sin b = 2\sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$
- $\cos a - \cos b = -2\sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$
- $\sin a - \sin b = 2\cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$.

cos cộng cos=2cos cos

cos trừ cos=trừ 2 sin sin

sin cộng sin=2sin cos

sin trừ sin=2 cos sin.

Ví dụ 8 ★☆☆☆☆

Tính $\cos \dfrac{7\pi}{12} + \cos \dfrac{\pi}{12}$.

Hướng dẫn giải. Ta có:

$$\begin{aligned}\cos \frac{7\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} &= 2\cos \left(\frac{\frac{7\pi}{12} + \frac{\pi}{12}}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{12}}{2}\right) \\ &= 2\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Ví dụ 9 ★☆☆☆☆

Hiệu điện thế và cường độ dòng điện trong một thiết bị điện lần lượt được cho bởi:

$$u = 40\sin(120\pi t) + 10\sin(360\pi t) \quad (\text{V}); \quad i = 4\sin(120\pi t) + \sin(360\pi t) \quad (\text{A}).$$

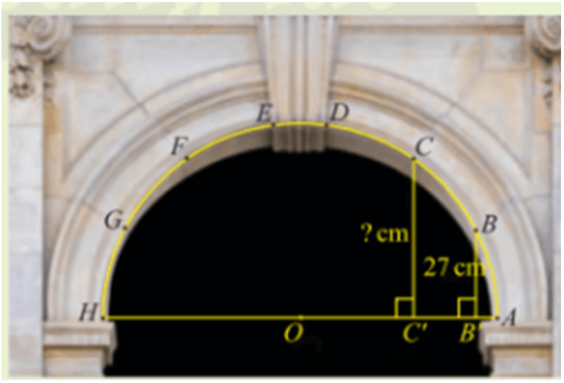
Biết rằng công suất tiêu thụ tức thời của thiết bị đó được tính theo công thức: $P = u \cdot i$ (W). Hãy viết biểu thức biểu thị công suất tiêu thụ tức thời ở dạng không có lũy thừa và tích của các biểu thức lượng giác.

Hướng dẫn giải. Ta có:

$$\begin{aligned} P = u \cdot i &= [40\sin(120\pi t) + 10\sin(360\pi t)] \cdot [4\sin(120\pi t) + \sin(360\pi t)] \\ &= 160\sin^2(120\pi t) + 10\sin^2(360\pi t) + 80\sin(120\pi t)\sin(360\pi t) \\ &= 80[1 - \cos(240\pi t)] + 5[1 - \cos(720\pi t)] + 40[\cos(360\pi t - 120\pi t) - \cos(360\pi t + 120\pi t)] \\ &= 85 - 80\cos(240\pi t) - 5\cos(720\pi t) + 40\cos(240\pi t) - 40\cos(480\pi t) \\ &= 85 - 40\cos(240\pi t) - 5\cos(720\pi t) - 40\cos(480\pi t)(\mathrm{W}). \end{aligned}$$

Ví dụ 10

Trong kiến trúc, các vòm cổng bằng đá thường có hình nửa đường tròn để có thể chịu lực tốt. Trong hình bên, vòm cổng được ghép bởi sáu phiến đá hai bên tạo thành các cung AB, BC, CD, EF, FG, GH bằng nhau và một phiến đá chốt ở đỉnh, cho biết vòm cổng rộng 120 cm và khoảng cách từ B đến đường kính AH là 27 cm. Tính $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$, từ đó tính khoảng cách từ điểm C đến đường kính AH. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Hướng dẫn giải. Ta có: $OA = OB = 120 : 2 = 60$

Xét tam giác OBB' có: $\sin\widehat{BOB'} = \dfrac{BB'}{OB} = \dfrac{27}{60} = \dfrac{9}{20}$.

Ta có: $\widehat{AOC} = 2\widehat{BOB'}$ (Vì số đo cung AC gấp 2 lần số đo cung AB)

Xét tam giác OCC' vuông tại C' có:

$$\sin\widehat{COC'} = \frac{CC'}{OC} \Leftrightarrow CC' = OC \cdot \sin\widehat{COC'} = OC \cdot \sin\left(2\widehat{BOB'}\right)$$

Mà:

$$\sin\left(2\widehat{BOB'}\right) = 2 \cdot \sin\widehat{BOB'} \cdot \cos\widehat{BOB'} = 2 \cdot \frac{9}{20} \cdot \frac{\sqrt{319}}{20} = \frac{9\sqrt{319}}{200}$$

Suy ra $CC' = 60 \cdot \dfrac{9\sqrt{319}}{200} \approx 48{,}2$ cm.

9. Không dùng máy tính, tính giá trị của biểu thức $B = \cos\dfrac{\pi}{9} + \cos\dfrac{5\pi}{9} + \cos\dfrac{11\pi}{9}$.

(10) Khi nhấn một phím trên điện thoại cảm ứng, bàn phím sẽ tạo ra hai âm thuần, kết hợp với nhau để tạo ra âm thanh nhận dạng duy nhất phím. Hình bên cho thấy tần số thấp f_1 và tần số cao f_2 liên quan đến mỗi phím. Nhấn một phím sẽ tạo ra sóng âm $y = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$, ở đó t là biến thời gian (tính bằng giây).

a) Tìm hàm số mô hình hóa âm thanh được tạo ra khi nhấn phím 4.

b) Biến đổi công thức vừa tìm được ở câu a về dạng tích của một hàm số sin và một hàm số côsin.

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm

Câu 1. Trong các công thức sau, công thức nào đúng?

(A) $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

(B) $\cos(a-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

(C) $\sin(a+b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

(D) $\cos(a+b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

Câu 2. Công thức nào dưới đây đúng?

(A) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$.

(B) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{1+\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta}$.

(C) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$.

(D) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$.

Câu 3. Biểu thức $\sin x \cos y - \cos x \sin y$ bằng

(A) $\cos(x-y)$.

(B) $\cos(x+y)$.

(C) $\sin(x-y)$.

(D) $\sin(y-x)$.

Câu 4. Cho $\tan\alpha = 2$. Tính giá trị $\tan\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ⓐ $-\dfrac{1}{3}$. Ⓑ 1 . Ⓒ $\dfrac{2}{3}$. Ⓓ $\dfrac{1}{3}$.

Câu 5. Tính $\sin 105°$.

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Ⓑ $-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
Ⓒ $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Ⓓ $-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Câu 6. Rút gọn biểu thức $P=\cos 54°\cos 4°-\cos 36°\cos 86°$, ta được:

Ⓐ $\cos 50°$. Ⓑ $\cos 58°$. Ⓒ $\sin 50°$. Ⓓ $\sin 58°$.

Câu 7. Khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\cos 6a=\cos^2 3a-\sin^2 3a$. Ⓑ $\cos 6a=1-2\sin^2 3a$.
Ⓒ $\cos 6a=1-6\sin^2 a$. Ⓓ $\cos 6a=2\cos^2 3a-1$.

Câu 8. Khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\sin a-\sin b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$.
Ⓑ $\cos(a-b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$.
Ⓒ $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$.
Ⓓ $\cos a\cos b=\dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$.

Câu 9. Chọn đẳng thức đúng trong các đẳng thức sau:

Ⓐ $\sin^4 x+\cos^4 x=\dfrac{3-\cos 4x}{4}$. Ⓑ $\sin^4 x+\cos^4 x=\dfrac{3+\cos 4x}{4}$.
Ⓒ $\sin^4 x+\cos^4 x=\dfrac{3-\cos 4x}{2}$. Ⓓ $\sin^4 x+\cos^4 x=\dfrac{3+\cos 4x}{2}$.

Câu 10. Cho hai góc α và β thỏa mãn $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$, $\cos\beta=\dfrac{3}{5}$ và $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, $\beta\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Tính giá trị của $\cos(\alpha-\beta)$.

Ⓐ $-\dfrac{16}{65}$. Ⓑ $-\dfrac{18}{65}$. Ⓒ $\dfrac{18}{65}$. Ⓓ $\dfrac{16}{65}$.

Câu 11. Cho $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ với $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. Biết giá trị của $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{a\sqrt{5}-b\sqrt{15}}{10}$ với $a,b\in\mathbb{N}$ và phân số $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính $a+b$.

Ⓐ 4 . Ⓑ 10 . Ⓒ 7 . Ⓓ 3 .

Câu 12. Với a là số thực bất kì, biểu thức $A=\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin(\alpha-\pi)$ bằng:

Ⓐ 0 . Ⓑ 1 . Ⓒ $2\sin\alpha$. Ⓓ $2\cos\alpha$.

Câu 13. Cho hai góc a và b với $\tan a=\dfrac{1}{7}$ và $\tan b=\dfrac{3}{4}$. Khi đó, $\tan(a+b)$ bằng

Ⓐ -1 . Ⓑ 1 . Ⓒ $\dfrac{17}{31}$. Ⓓ $-\dfrac{17}{31}$.

Câu 14. Nếu $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ với $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ thì giá trị $\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)$ bằng:

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{6}}{6} - \dfrac{1}{2}$. Ⓑ $\sqrt{6} - 3$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{6}}{6} - 3$. Ⓓ $\sqrt{6} - \dfrac{1}{2}$.

Câu 15. Nếu $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$ thì giá trị của biểu thức $P = (1 - 3\cos 2\alpha)(2 + 3\cos 2\alpha)$ bằng:

Ⓐ $\dfrac{11}{9}$. Ⓑ $\dfrac{12}{9}$. Ⓒ $\dfrac{13}{9}$. Ⓓ $\dfrac{14}{9}$.

Câu 16. Rút gọn biểu thức $\cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) - \cos x$ ta được kết quả là:

Ⓐ $-2\cos x$. Ⓑ 0.
Ⓒ $-\cos x$. Ⓓ $\sin x - \cos x$.

Câu 17. Cho $\cos x = \dfrac{4}{5}, x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$. Giá trị của $\sin 2x$ bằng

Ⓐ $-\dfrac{24}{25}$. Ⓑ $-\dfrac{1}{5}$. Ⓒ $\dfrac{24}{25}$. Ⓓ $\dfrac{1}{5}$.

Câu 18. Cho $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3}$. Giá trị của $\cos 2\alpha$ bằng

Ⓐ $-\dfrac{1}{9}$. Ⓑ $-\dfrac{4}{3}$. Ⓒ $\dfrac{4}{3}$. Ⓓ $-\dfrac{2}{3}$.

Câu 19. Biết $\sin 18^\circ = \dfrac{a + b\sqrt{5}}{c}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}, c \neq 0$ và $\dfrac{a}{c}, \dfrac{b}{c}$ là các phân số tối giản. giá trị của biểu thức $S = a + b + c$ là

Ⓐ $S = 2$. Ⓑ $S = 4$. Ⓒ $S = 3$. Ⓓ $S = 1$.

Câu 20. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\cos 3x + \cos x = 2\cos 2x \cos x$. Ⓑ $\cos 3x - \cos x = 2\sin 2x \sin x$.
Ⓒ $\sin 3x - \sin x = 2\cos 2x \sin x$. Ⓓ $\sin 3x + \sin x = 2\sin 2x \cos x$.

Câu 21. Số khẳng định đúng trong các khẳng định sau là:

1. $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$
2. $\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$
3. $\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$
4. $\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Câu 22. Nếu $\cos a = \dfrac{3}{4}$ thì $\cos^2\dfrac{a}{2}$ bằng:

Ⓐ $\dfrac{23}{16}$. Ⓑ $\dfrac{7}{8}$. Ⓒ $\dfrac{7}{16}$. Ⓓ $\dfrac{23}{8}$.

Câu 23. Nếu $\cos a = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ thì giá trị của biểu thức $A = 4\sin\left(a + \dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(a - \dfrac{\pi}{3}\right)$ bằng

Ⓐ $-\dfrac{11}{9}$. Ⓑ $\dfrac{11}{9}$. Ⓒ $-\dfrac{1}{9}$. Ⓓ $\dfrac{1}{9}$.

Câu 24. Giá trị $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}$ bằng

(A) $-\dfrac{1}{2}$. (B) $\dfrac{1}{4}$. (C) $-\dfrac{1}{4}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Câu 25. Nếu $\cos a=\dfrac{1}{3}, \sin b=-\dfrac{2}{3}$ thì giá trị $\cos(a+b)\cos(a-b)$ bằng:

(A) $-\dfrac{2}{3}$. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $-\dfrac{1}{3}$. (D) $\dfrac{2}{3}$.

Câu 26. Tính giá trị biểu thức $A=\dfrac{\tan 30^\circ+\tan 40^\circ+\tan 50^\circ+\tan 60^\circ}{\cos 20^\circ}$ bằng

(A) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. (B) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$. (C) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$. (D) $\dfrac{8}{\sqrt{3}}$.

Câu 27. Giá trị của biểu thức $P=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{9}+\sin\dfrac{5\pi}{9}}{\cos\dfrac{\pi}{9}+\cos\dfrac{5\pi}{9}}$ bằng:

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (B) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (C) $\sqrt{3}$. (D) $-\sqrt{3}$.

Câu 28. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x}$ ta được kết quả là:

(A) $\tan x$. (B) $\tan 3x$. (C) $\tan 2x$. (D) $\tan 5x$.

Câu 29. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x}{2\cos^2 x+\cos x-1}$.

(A) $\cos x$. (B) $2\cos x-1$. (C) $2\cos x$. (D) $\cos x-1$.

Câu 30. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{1+\sin 4x-\cos 4x}{1+\sin 4x+\cos 4x}$.

(A) $\sin 2x$. (B) $\cos 2x$. (C) $2x\tan 2x$. (D) $\cot 2x$.

2 Tự luận

Bài 1. Không sử dụng máy tính cầm tay, tính các giá trị lượng giác của góc:

a) $\dfrac{5\pi}{12}$ b) $-\dfrac{\pi}{12}$. c) -75°. d) -555°. e) 15°.

Bài 2. Tính $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$ và $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$, biết $\sin\alpha=-\dfrac{5}{13}$ và $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.

Bài 3. Cho $\sin a=\dfrac{2}{3}$ với $\dfrac{\pi}{2}<a<\pi$. Tính:

a) $\cos a, \tan a$ c) $\sin 2a, \cos 2a$.

b) $\sin\left(a+\dfrac{\pi}{4}\right), \cos\left(a-\dfrac{5\pi}{6}\right), \tan\left(a+\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Bài 4.

a) Cho $\cos a=0,2$ với $\pi<\alpha<2\pi$. Tính $\sin\dfrac{a}{2}, \cos\dfrac{a}{2}, \tan\dfrac{a}{2}$.

b) Cho $\tan(a+b)=3, \tan(a-b)=2$. Tính: $\tan 2a, \tan 2b$.

Bài 5.

a) Cho $\sin a = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Tính $\cos 2a, \cos 4a$.

b) Cho $\cos 2a = \dfrac{1}{3}$ với $\dfrac{\pi}{2} < a < \pi$. Tính $\sin a, \cos a, \tan a$.

c) Cho $\tan \dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Tính $\sin a, \cos a, \tan a$.

Bài 6. Tính $\sin 2a, \cos 2a, \tan 2a$, biết:

a) $\sin a = \dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{\pi}{2} < a < \pi$.

b) $\sin a + \cos a = \dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{\pi}{2} < a < \dfrac{3\pi}{4}$.

Bài 7. Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị của các biểu thức:

a) $\sin \dfrac{19\pi}{24} \cos \dfrac{37\pi}{24}$.

b) $\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ$.

c) $\dfrac{\tan \dfrac{\pi}{7} + \tan \dfrac{3\pi}{28}}{1 + \tan \dfrac{6\pi}{7} \tan \dfrac{3\pi}{28}}$.

d) $\dfrac{\sin \dfrac{\pi}{5} \cos \dfrac{\pi}{10} + \sin \dfrac{\pi}{10} \cos \dfrac{\pi}{5}}{\cos \dfrac{2\pi}{15} \cos \dfrac{\pi}{5} - \sin \dfrac{2\pi}{15} \sin \dfrac{\pi}{5}}$.

e) $\sin \dfrac{\pi}{32} \cos \dfrac{\pi}{32} \cos \dfrac{\pi}{6} \cos \dfrac{\pi}{8}$.

f) $\sin \dfrac{\pi}{9} - \sin \dfrac{5\pi}{9} + \sin \dfrac{7\pi}{9}$.

Bài 8. Tính giá trị lượng giác của góc 2α, biết:

a) $\sin \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ và $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

b) $\sin \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{3}{4}$ và $\pi < \alpha < 2\pi$.

Bài 9. Tính giá trị lượng giác của góc α, biết:

a) $\cos 2\alpha = \dfrac{2}{5}$ và $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

b) $\sin 2\alpha = -\dfrac{4}{9}$ và $\dfrac{\pi}{2} < a < \dfrac{3\pi}{4}$.

Bài 10. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{2} \sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) - \cos \alpha$.

b) $(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 - \sin 2\alpha$.

c) $\dfrac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$.

Bài 11. Cho $\cos(a + 2b) = 2 \cos a$. Chứng minh rằng: $\tan(a + b) \tan b = -\dfrac{1}{3}$.

Bài 12. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sin x \cos^5 x - \cos x \sin^5 x$.

b) $\dfrac{\sin 3x \cos 2x + \sin x \cos 6x}{\sin 4x}$.

c) $\dfrac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x}$.

d) $\dfrac{2 \sin(x + y)}{\cos(x + y) + \cos(x - y)} - \tan y$.

Bài 13. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\dfrac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha}$.

b) $\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)}$.

c) $\dfrac{\sin^2 \alpha}{4 - 4 \sin^2 \dfrac{\alpha}{2}}$.

d) $\dfrac{\sin^2 4\alpha - \sin^2 2\alpha}{\cos^2 \alpha - \cos^2 2\alpha}$.

Bài 14. Chứng minh đẳng thức sau:

$$\sin(a+b)\sin(a-b)=\sin^2 a-\sin^2 b=\cos^2 b-\cos^2 a.$$

Bài 15. Chứng minh đẳng thức lượng giác sau:

a) $\sin(60^\circ+a)-\sin(60^\circ-a)=\sin a$.

b) $\sin^4 a+\cos^4 a=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\cos 4a$.

c) $\sin a(2\cos 4a+2\cos 2a+1)=\sin 5a$.

d) $\dfrac{\cos(a-b)}{\cos(a+b)}=\dfrac{1+\tan a\tan b}{1-\tan a\tan b}$.

Bài 16. Chứng minh đẳng thức lượng giác sau:

a) $4\cos x\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)=\cos 3x$.

b) $\dfrac{\sin 2x\cos x}{(1+\cos x)(1+\cos 2x)}=\tan\dfrac{x}{2}$.

c) $\dfrac{\sin x+\sin 2x}{1+\cos x+\cos 2x}=\tan x$.

d) $\sin x(1+2\cos 2x+2\cos 4x+2\cos 6x)=\sin 7x$.

e) $\dfrac{\sin^2 3x}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}=8\cos 2x$.

f) $\cos 3x\sin^3 x+\sin 3x\cos^3 x=\dfrac{3}{4}\sin 4x$.

Bài 17. Chứng minh đẳng thức sau không phụ thuộc vào biến x.

a) $\sin^2 x+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)$.

b) $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Bài 18. Chứng minh đẳng thức sau không phụ thuộc vào biến x.

a) $A=\sin^2 x+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)$.

b) $B=\dfrac{1-\cos 2x+\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x}\cdot\cot x$.

Bài 19. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $\sin A=\sin B\cos C+\sin C\cos B$.

b) $\cos A\cos B-\sin A\sin B=0$.

c) $\cos\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}+\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}=\cos\dfrac{A}{2}$.

d) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$.

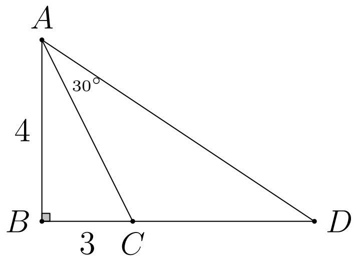
e) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$ (với điều kiện tam giác ABC không vuông).

f) $\tan\dfrac{A}{2}\cdot\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{A}{2}\cdot\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\cdot\tan\dfrac{C}{2}=1$.

Bài 20. Cho $\sin\alpha+\cos\alpha=m$. Tìm m để $\sin 2\alpha=-\dfrac{3}{4}$.

Bài 21. Tam giác ABC là tam giác gì nếu $\sin A = \dfrac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$?

Bài 22. Trong hình bên, tam giác ABC vuông tại B và có hai cạnh góc vuông là $AB = 4$, $BC = 3$. Vẽ điểm D nằm trên tia đối của tia CB thoả mãn $\widehat{CAD} = 30^\circ$. Tính $\tan \widehat{BAD}$, từ đó tính độ dài cạnh CD.



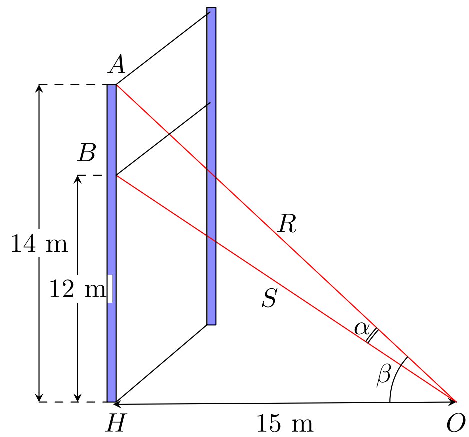
Bài 23. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 75^\circ; \widehat{C} = 45^\circ$ và $a = BC = 12$ cm.

a) Sử dụng công thức $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ và định lí sin, hãy chứng minh diện tích của tam giác ABC cho bởi công thức
$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

b) Sử dụng kết quả ở câu 1 và công thức biến đổi tích thành tổng, hãy tính diện tích S của tam giác ABC.

Bài 24. Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t, A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hoà có phương trình:
$$x_1(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (cm)},$$
$$x_2(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ (cm)}.$$
Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

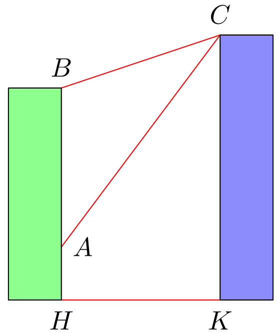
Bài 25. Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14 m. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12 m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15 m.



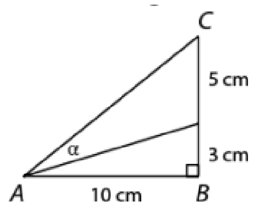
a) Tính $\tan\alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.

b) Tìm góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

Bài 26. Có hai chung cư cao tầng xây cạnh nhau với khoảng cách giữa chúng là $HK = 20$ m. Để đảm bảo an ninh, trên nóc chung cư thứ hai người ta lắp camera ở vị trí C. Gọi A, B lần lượt là vị trí thấp nhất, cao nhất trên chung cư thứ nhất mà camera có thể quan sát được (Hình 19). Hãy tính số đo góc ACB (phạm vi camera có thể quan sát được ở chung cư thứ nhất). Biết rằng chiều cao của chung cư thứ hai là $CK = 32$ m, $AH = 6$ m, $BH = 24$ m (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị độ).



Bài 27. Cho góc α như hình bên. Tính $\tan\alpha$.

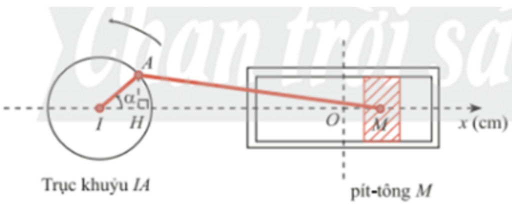


Bài 28. Một vận động viên bắn súng nằm trên mặt đất để ngắm bắn các mục tiêu khác nhau trên một bức tường thẳng đứng. Vận động viên bắn trúng một mục tiêu cách mặt đất 20 m tại một góc ngắm (góc hợp bởi phương bắn và phương ngang). Nếu tăng góc ngắm đó lên hai lần thì vận động viên bắn trúng một mục tiêu cách mặt đất 45 m. Tính khoảng cách từ vận động viên đến bức tường.

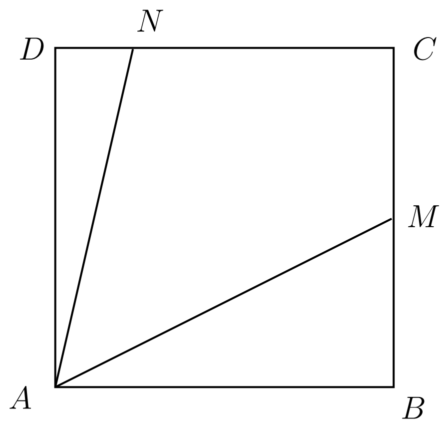
Bài 29. Trong hình bên, pít – tông M của động cơ chuyển động tịnh tiến qua lại dọc theo xi lanh làm quay trục khuỷu IA. Ban đầu I, A, M thẳng hàng. Cho α là góc quay của trục khuỷu, O là vị trí của pít – tông khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ và H là hình chiếu của A lên Ix. Trục khuỷu IA rất ngắn so với độ dài thanh truyền AM nên có thể xem như độ dài MH không đổi và gần bằng MA.

a) Biết $IA = 8$ cm, viết công thức tính tọa độ x_M của điểm M trên trục Ox theo α.

b) Ban đầu $\alpha = 0$. Sau 1 phút chuyển động, $x_M = -3$ cm. Xác định x_M sau 2 phút chuyển động. Làm tròn kết quả đến hà ng phần mười.



Bài 30. Trên một mảnh đất hình vuông $ABCD$, bác An đặt một chiếc đèn pin tại vị trí A chiếu chùm sáng phân kì sang phía góc C. Bác An nhận thấy góc chiếu sáng của đèn pin giới hạn bởi hai tia AM và AN, ở đó các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh BC, CD sao cho $BM = \frac{1}{2}BC, DN = \frac{1}{3}DC$.



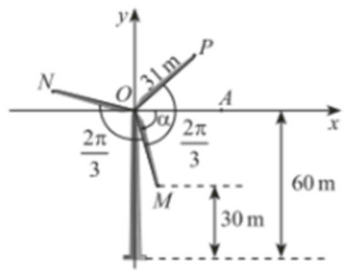
a) Tính $\tan\left(\widehat{BAM} + \widehat{DAN}\right)$.

b) Góc chiếu sáng của đèn pin bằng bao nhiêu độ?

Bài 31. Trong Hình bên, ba điểm M, N, P nằm ở đầu các cánh quạt của tua bin gió. Biết các cánh quạt dài 31m, độ cao của điểm M so với mặt đất là 30m, góc giữa các cánh quạt là $\frac{2\pi}{3}$ và số đo góc (OA, OM) là α.

a) Tính $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$.

b) Tính sin của các góc lượng giác (OA, ON) và (OA, OP) từ đó tính chiều cao của các điểm N và P so với mặt đất (theo đơn vị mét). Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Chuyên đề 4

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ

I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

- Hàm số sin là quy tắc đặc tương ứng mỗi số thực x với số thực $\sin x$, kí hiệu $y = \sin x$.
- Hàm số côsin là quy tắc đặc tương ứng mỗi số thực x với số thực $\cos x$, kí hiệu $y = \cos x$.
- Hàm số tang là hàm số được xác định bởi công thức:
$$y = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{với } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \text{ kí hiệu } y = \tan x.$$
- Hàm số côtang là hàm số được xác định bởi công thức:
$$y = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{với } x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \text{ kí hiệu } y = \cot x.$$

LƯU Ý.

- Tập xác định của hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ là $\mathbb{R}$.
- Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

II. HÀM SỐ CHẴN, HÀM SỐ LẺ, HÀM SỐ TUẦN HOÀN

1) Hàm số chẵn, hàm số lẻ

- Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định là $\mathscr{D}$ được gọi là hàm số chẵn nếu với mọi $x \in \mathscr{D}$ ta có $-x \in \mathscr{D}$ và $f(-x) = f(x)$.
- Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định là $\mathscr{D}$ được gọi là hàm số lẻ nếu với mọi $x \in \mathscr{D}$ ta có $-x \in \mathscr{D}$ và $f(-x) = -f(x)$.

LƯU Ý. Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng. Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

Ví dụ 1 ★☆☆☆☆

Chứng minh rằng hàm số $y=\sin x$ và hàm số $y=\cot x$ là hàm số lẻ.

Hướng dẫn giải.

- Hàm số $y=\sin x$ có tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có $-x\in\mathbb{R}$ và $\sin(-x)=-\sin x$. Do đó hàm số $y=\sin x$ là hàm số lẻ.

- Hàm số $y=\cot x$ có tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.
  Với mọi $x\in\mathscr{D}$, ta có $-x=-\dfrac{\pi}{2}-k=-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\pi\in\mathscr{D}$.
  Mặt khác, $\cot(-x)=-\cot x$ nên hàm số $y=\cot x$ là hàm số lẻ.

Ví dụ 2 ★☆☆☆☆

Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a) $f(x)=|x|$. b) $y=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$. c) $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Hướng dẫn giải.

a) Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Với mọi $x\in\mathscr{D}$ suy ra $-x\in\mathscr{D}$.
Mặt khác, $f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$ nên $f(x)$ là hàm số chẵn.

b) Hàm số $y=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ xác định khi và chỉ khi $x+\dfrac{\pi}{2}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, tức là $x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Suy ra hàm số $y=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ có tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$.
Với mọi $x\in\mathscr{D}$, ta có $-x\neq-k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, cũng có nghĩa là $-x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, hay $-x\in\mathscr{D}$.
Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned}\tan\left(-x+\frac{\pi}{2}\right)&=-\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\tan\left(x-\frac{\pi}{2}+\pi\right)\\&=-\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Do đó hàm số $y=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ là hàm số lẻ.

c) Hàm số $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ có tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Với mọi $x\in\mathscr{D}$ suy ra $-x\in\mathscr{D}$.
Đặt $f(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.
Xét hai giá trị $\dfrac{\pi}{3};-\dfrac{\pi}{3}\in\mathscr{D}$, ta thấy rằng:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0;$$
$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vì $f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\neq f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ và $f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\neq -f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ nên hàm số $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ không phải là hàm chẵn cũng không phải là hàm lẻ

1 Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a) $y = 2x^2 - 6$.   b) $y = x^3 - 3x$.   c) $y = \cos 2x$.   d) $y = \sin^3 x$.

2) Hàm số tuần hoàn

- Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định $\mathscr{D}$ được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại một số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in \mathscr{D}$ ta có $x \pm T \in \mathscr{D}$ và $f(x+T) = f(x)$.
- Số T dương nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn $y = f(x)$.

LƯU Ý. Đồ thị của hàm số tuần hoàn chu kì T được lặp lại trên từng đoạn giá trị của x có độ dài T.

Ví dụ 3 ★☆☆☆☆

Xét tính tuần hoàn của hàm số $y = \cos x$ và hàm số $y = \cot x$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$\cot(x + \pi) = \cot x$ với mọi $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Do đó hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π và hàm số $y = \cot x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì π.

LƯU Ý. Người ta chứng minh được rằng:

a) Các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ là các hàm số tuần hoàn với chu kì 2π.

b) Các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ là các hàm số tuần hoàn với chu kì π.

c) Các hàm số $y = A \sin \omega x$ và $y = A \cos \omega x, (\omega > 0)$ là những hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

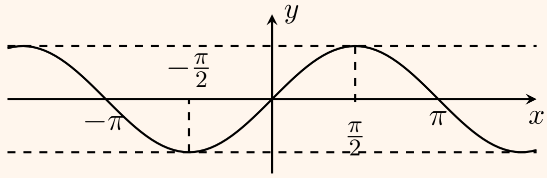
Nhận xét: Để vẽ đồ thị của một hàm số tuần hoàn với chu kì T, ta chỉ cần vẽ đồ thị của hàm số này trên đoạn $[a; a+T]$, sau đó dịch chuyển song song với trục hoành phần đồ thị đã vẽ sang phải và sang trái các đoạn có độ dài lần lượt là T, $2T$, $3T$, ... ta được toàn bộ đồ thị của hàm số.

2 Xét tính tuần hoàn của hàm số $y = \tan 2x$.

III. ĐỒ THỊ CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

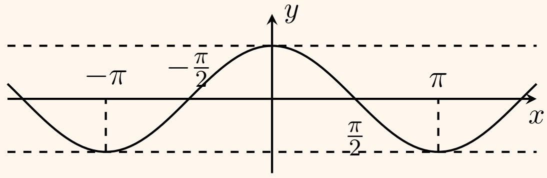
1) Hàm số $y = \sin x$

- Có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $[-1; 1]$;
- Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì 2π;
- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.



2) Hàm số $y = \cos x$

- Có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $[-1; 1]$;
- Là hàm số chẵn và tuần hoàn với chu kì 2π;
- Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$;



Ví dụ 4 ★☆☆☆☆

Cho hàm số $y = \cos x$ với $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.

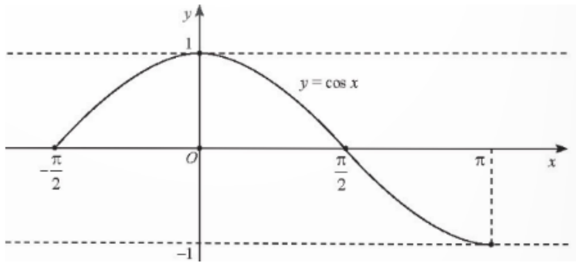
a) Vẽ đồ thị hàm số đã cho.

b) Tại các điểm nào thì giá trị của hàm số lớn nhất.

c) Tìm các giá trị $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4}\right]$ sao cho $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) < 0$.

Hướng dẫn giải.

a) Ta có đồ thị hàm số $y = \cos x$ với $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$ như sau:



b) Tại $x = 0$ thì giá trị hàm số lớn nhất.

c) Do $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4}\right] \Rightarrow x - \dfrac{\pi}{4} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Để $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) < 0$ thì $x - \dfrac{\pi}{4} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$ suy ra $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ví dụ 5 ★☆☆☆☆

Tìm tập giá trị của hàm số $y = -3\cos x$.

Hướng dẫn giải. Vì $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ nên suy ra $-3 \leqslant -3\cos x \leqslant 3$ hay $-3 \leqslant y \leqslant 3$. Vậy tập giá trị của hàm số $y = -3\cos x$ là $[-3; 3]$.

Ví dụ 6 ★☆☆☆☆

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = 5\cos x + 1$.

Hướng dẫn giải. Ta có $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Leftrightarrow -5 \leqslant 5\cos x \leqslant 5 \Leftrightarrow -4 \leqslant 5\cos x + 1 \leqslant 6 \Leftrightarrow -4 \leqslant y \leqslant 6$. Vậy $\min y = -4, \max y = 6$.

3 Tính giá trị của hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ khi $x = \dfrac{3\pi}{2}; x = -\dfrac{11\pi}{4}; x = \dfrac{14\pi}{3}$.

4 Trong Vật lí, ta biết rằng phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t, A là biên độ dao động ($A > 0$), $\omega t + \varphi$ là pha của dao động tại thời điểm t và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Dao động điều hoà này có chu kì $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ (tức là khoảng thời gian để vật thực hiện một dao động toàn phần). Giả sử một vật dao động điều hoà theo phương trình $x(t) = -5\cos(4\pi t)$ (cm).

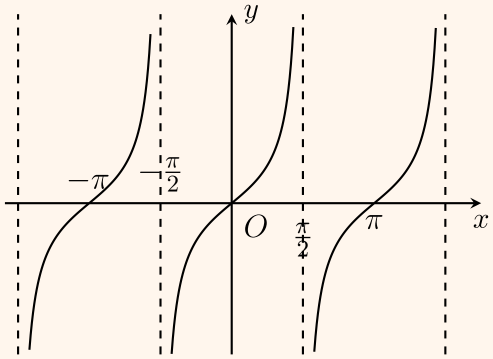
a) Hãy xác định biên độ và pha ban đầu của dao động.

b) Tính pha của dao động tại thời điểm $t = 2$ (giây). Hỏi trong khoảng thời gian 2 giây, vật thực hiện được bao nhiêu dao động toàn phần?

3) Hàm số $y = \tan x$

Hàm số $y = \tan x$:

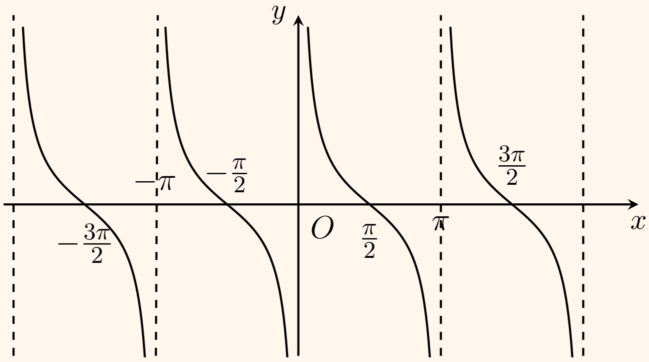
- Có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$;
- Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì π;
- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$;
- Có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ.



4) Hàm số $y = \cot x$

Hàm số $y = \cot x$:

- Có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$;
- Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì π;
- Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$;
- Có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ.



Ví dụ 7 ★☆☆☆☆

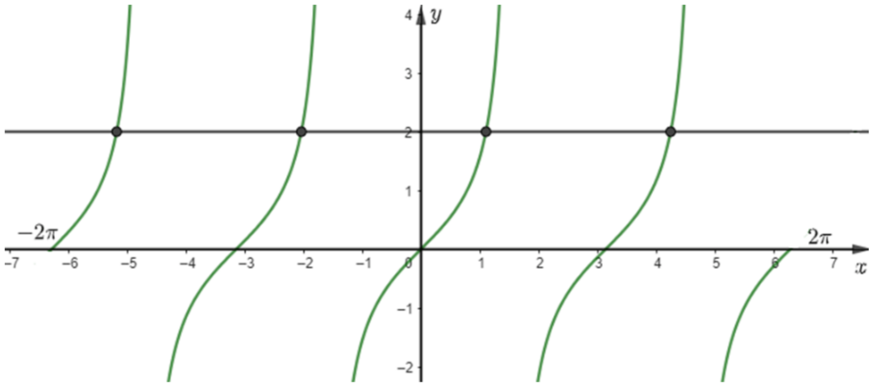
Cho hàm số $y = \cot x$ với $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ và $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số đã cho.

b) Có bao nhiêu giá trị x mà tại đó giá trị của hàm số bằng 2?

Hướng dẫn giải.

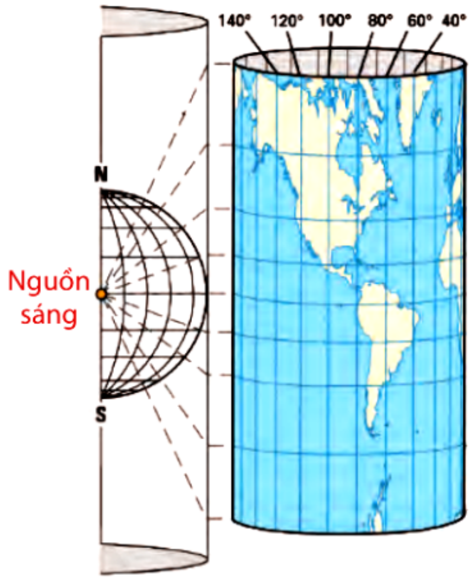
a) Đồ thị hàm số đã cho trên $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ là:



b) Dựa vào sự tương giao hàm số $y = \cot x$ và $y = 2$ có 4 giá trị thỏa mãn.

Ví dụ 8

Trong Địa lí, phép chiếu hình trụ được sử dụng để vẽ một bản đồ phẳng như trong hình vẽ. Trên bản đồ phẳng lấy đường xích đạo làm trục hoành và kinh tuyến 0° làm trục tung. Khi đó tung độ của một điểm có vĩ độ $\varphi^\circ(-90 < \varphi < 90)$ được cho bởi hàm số $y = 20\tan\left(\dfrac{\pi}{180}\varphi\right)$ (cm). Sử dụng đồ thị hàm số tan, hãy cho biết những điểm ở vĩ độ nào nằm cách xích đạo không quá 20 cm trên bản đồ.

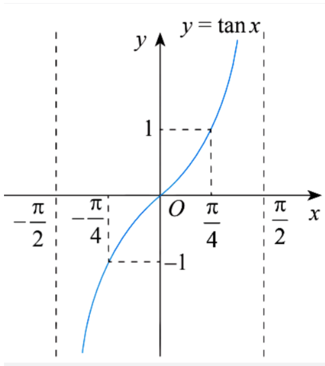


Hướng dẫn giải. Vì điểm nằm cách xích đạo không quá 20 cm trên bản đồ nên ta có: $-20 \leqslant y \leqslant 20$.

Khi đó $-20 \leqslant 20\tan\left(\dfrac{\pi}{180}\varphi\right) \leqslant 20$ hay $-1 \leqslant \tan\left(\dfrac{\pi}{180}\varphi\right) \leqslant 1$.

Ta có: $-90 < \varphi < 90^\circ$ khi và chỉ khi $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{180}\varphi < \dfrac{\pi}{2}$.

Xét đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.



Ta thấy $-1 \leqslant \tan\left(\dfrac{\pi}{180}\varphi\right) \leqslant 1$ khi và chỉ khi $-\dfrac{\pi}{4} \leqslant \dfrac{\pi}{180}\varphi \leqslant \dfrac{\pi}{4}$ hay $-45 \leqslant \varphi \leqslant 45$.
Vậy trên bản đồ, các điểm cách xích đạo không quá 20 cm nằm ở vị độ từ -45° đến 45°.

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm

Câu 1. Tập xác định của hàm số $y = \sin x$ là

Ⓐ $[-1; 1]$. Ⓑ $(-1; 1)$. Ⓒ $(0; +\infty)$. Ⓓ $\mathbb{R}$.

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là

Ⓐ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Ⓑ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
Ⓒ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
Ⓓ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 3. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

Ⓐ Hàm số $y = \tan x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$.
Ⓑ Hàm số $y = \cos x$ có tập giá trị là $[-1; 1]$.
Ⓒ Hàm số $y = \sin x$ có tập giá trị là $[-1; 1]$.
Ⓓ Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y = \sin 2x$ là

Ⓐ $[-2; 2]$. Ⓑ $[-1; 1]$. Ⓒ $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$. Ⓓ $\mathbb{R}$.

Câu 5. Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x$ là

Ⓐ $[-2; 2]$. Ⓑ $[-1; 1]$. Ⓒ $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$. Ⓓ $\mathbb{R}$.

Câu 6. Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là

Ⓐ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Ⓑ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Ⓒ $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.

Ⓓ $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 7. Tập xác định của hàm số $y=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ là

Ⓐ $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Ⓑ $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Ⓒ $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Ⓓ $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 8. Trong các hàm số sau, đâu là hàm số tuần hoàn?

Ⓐ $y=x\sin x$.

Ⓑ $y=\sin x$.

Ⓒ $y=x-\sin x$.

Ⓓ $y=\dfrac{2}{\sin x}$.

Câu 9. Tập giá trị của hàm số $y=\cos x$ là

Ⓐ $T=[-1;1]$.

Ⓑ $T=(-1;1)$.

Ⓒ $T=[0;+\infty)$.

Ⓓ $T=(-\infty;0]$.

Câu 10. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ Hàm số $y=\sin x$ là hàm số chẵn .

Ⓑ Hàm số $y=\cos x$ là hàm số chẵn .

Ⓒ Hàm số $y=\tan x$ là hàm số chẵn .

Ⓓ Hàm số $y=\cot x$ là hàm số chẵn .

Câu 11. Trong các hàm số sau, đâu là hàm số lẻ?

Ⓐ $y=\sin^2 x$.

Ⓑ $y=x\cos 2x$.

Ⓒ $y=x\sin x$.

Ⓓ $y=\cos x$.

Câu 12. Tập xác định của hàm số $y=\sin\sqrt{x}$ là

Ⓐ $\mathbb{R}$.

Ⓑ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ⓒ $(0;+\infty)$.

Ⓓ $[0;+\infty)$.

Câu 13. Trong các hàm số sau, đâu là hàm số lẻ?

Ⓐ $y=\cos x+\sin^2 x$.

Ⓑ $y=\sin x+\cos x$.

Ⓒ $y=-\cos x$.

Ⓓ $y=\sin x\cos 3x$.

Câu 14. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

Ⓐ Hàm số $y=\sin x$ có tuần hoàn với chu kì 2π .

Ⓑ Hàm số $y=\cos x$ có tuần hoàn với chu kì 2π .

Ⓒ Hàm số $y=\tan x$ có tuần hoàn với chu kì 2π .

Ⓓ Hàm số $y=\cot x$ có tuần hoàn với chu kì 2π .

Câu 15. Tính chu kì T của hàm số $y=\sin\left(5x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ⓐ $T=\dfrac{2\pi}{5}$. Ⓑ $T=\dfrac{5\pi}{2}$. Ⓒ $T=\dfrac{\pi}{2}$. Ⓓ $T=\dfrac{\pi}{8}$.

Câu 16. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{\sin x-2}$.

Ⓐ $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
Ⓑ $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.
Ⓒ $=[-1;1]$.
Ⓓ $\mathscr{D}=\varnothing$.

Câu 17. Cho hàm số $y=\sin x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

Ⓐ Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$.
Ⓑ Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{3\pi}{2};-\dfrac{\pi}{2}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.
Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$.
Ⓓ Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Câu 18. Với $x\in\left(\dfrac{31\pi}{4};\dfrac{33\pi}{4}\right)$, mệnh đề nào sau đây là đúng?

Ⓐ Hàm số $y=\cot x$ nghịch biến.
Ⓑ Hàm số $y=\tan x$ nghịch biến.
Ⓒ Hàm số $y=\sin x$ đồng biến.
Ⓓ Hàm số $y=\cos x$ nghịch biến.

Câu 19. Hàm số $y=\sin 2x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

Ⓐ $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$. Ⓑ $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$. Ⓒ $\left(\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$. Ⓓ $\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$.

Câu 20. Tìm tập giá trị T của hàm số $y=5-3\sin x$.

Ⓐ $T=[-1;1]$. Ⓑ $T=[-3;3]$. Ⓒ $T=[2;8]$. Ⓓ $T=[5;8]$.

Câu 21. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

Ⓐ Đồ thị hàm số $y=\left|\sin x\right|$ đối xứng qua gốc tọa độ O.
Ⓑ Đồ thị hàm số $y=\cos x$ đối xứng qua trục Oy .
Ⓒ Đồ thị hàm số $y=\left|\tan x\right|$ đối xứng qua trục Oy .
Ⓓ Đồ thị hàm số $y=\tan x$ đối xứng qua gốc tọa độ O .

Câu 22. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{1+\cos 2x}$ là:

Ⓐ $\varnothing$.
Ⓑ $\mathbb{R}$.
Ⓒ $[-1;+\infty)$.
Ⓓ $\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Câu 23. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\sin x}}$ là:

Ⓐ $\varnothing$.
Ⓑ $\mathbb{R}$.

Ⓒ $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.
Ⓓ $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 24. Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ là:

Ⓐ $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.
Ⓑ $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.
Ⓒ $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.
Ⓓ $\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.

Câu 25. Tập xác định của hàm số $y=\tan x+\dfrac{1}{1+\cot^2 x}$ là:

Ⓐ $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.
Ⓑ $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.
Ⓒ $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.
Ⓓ $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 26. Hàm số nào dưới đây là hàm số lẻ?

Ⓐ $y=-2\cos x$.
Ⓑ $y=-2\sin x$.
Ⓒ $y=\tan x-\cos x$.
Ⓓ $y=-2\sin x+2$.

Câu 27. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

Ⓐ $y=\cos x+5$.
Ⓑ $y=\tan x+\cot x$.
Ⓒ $y=\sin(-x)$.
Ⓓ $y=\sin x-\cos x$.

Câu 28. Hàm số $y=\cos x$ nghịch biến trên khoảng:

Ⓐ $(0;\pi)$.
Ⓑ $(\pi;2\pi)$.
Ⓒ $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.
Ⓓ $(-\pi;0)$.

Câu 29. Hàm số $y=\sin x$ nghịch biến trên khoảng:

Ⓐ $\left(\dfrac{9\pi}{12};\dfrac{11\pi}{12}\right)$.
Ⓑ $\left(\dfrac{11\pi}{12};\dfrac{13\pi}{12}\right)$.
Ⓒ $(10;\pi;11\pi)$.
Ⓓ $(9\pi;10\pi)$.

Câu 30. Số các giá trị $\alpha\in[-\pi;2\pi]$ sao cho $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$ là

Ⓐ 1 .
Ⓑ 2 .
Ⓒ 3 .
Ⓓ 4 .

2 Tự luận

Bài 1. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a) $y=5\sin^2 x+1$.
b) $y=\cos x+\sin x$.
c) $y=\sin 2x+\tan 2x$.
d) $y=\cos x+\sin^2 x$.
e) $y=\sin x\cos 2x$.
f) $y=\sin x+\cos x$.

Bài 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{1}{\cos x}$.
b) $y=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.
c) $y=\cot 3x$.
d) $y=\dfrac{1}{1+\sin x\cos x}$.
e) $y=\sqrt{\cos x-1}$.
f) $y=\dfrac{1}{2-\sin^2 x}$.

g) $y = \sqrt{1 + \sin 3x}$. h) $y = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$. i) $y = \sqrt{\dfrac{1 + \cos 2x}{1 - \sin 2x}}$.

Bài 3. Tìm tập giá trị của các hàm số sau:

a) $y = 5 - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$.

b) $y = |\sin 3x| - 1$.

c) $y = 2\tan x + 3$.

d) $y = \sqrt{1 - \sin x} + 2$.

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = 2 + 3|\cos x|$.

b) $y = 2\sqrt{\sin x} + 1$.

c) $y = \sqrt{1 + \cos 2x} + 3$.

d) $y = \dfrac{1}{4 - \sin x}$.

e) $y = 3\cos^2 x + 4\cos 2x$.

f) $y = \sin x + \cos x$.

Bài 5. Dùng đồ thị hàm số, tìm giá trị của x trên khoảng $\left(-\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ để

a) Hàm số $y = \tan x$ nhận giá trị bằng -1;

b) Hàm số $y = \tan x$ nhận giá trị bằng 0;

c) Hàm số $y = \cot x$ nhận giá trị bằng 1;

d) Hàm số $y = \cot x$ nhận giá trị bằng 0.

Bài 6. Dùng đồ thị hàm số, hãy cho biết:

a) Với mỗi $m \in [-1; 1]$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin\alpha = m$;

b) Với mỗi $m \in [-1; 1]$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in [0; \pi]$ sao cho $\cos\alpha = m$;

c) Với mỗi $m \in \mathbb{R}$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan\alpha = m$;

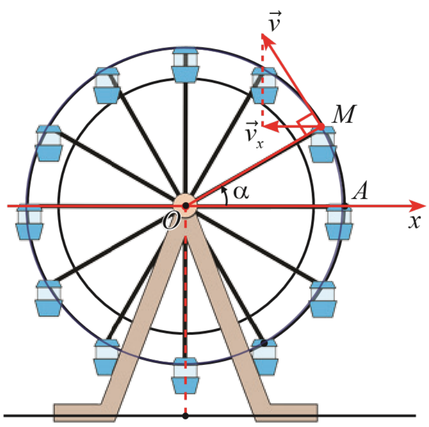
d) Với mỗi $m \in \mathbb{R}$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in (0; \pi)$ sao cho $\cot\alpha = m$.

Bài 7. Giả sử khi một cơn sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t) = 90\cos\left(\dfrac{\pi}{10}t\right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimét trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây.

a) Tìm chu kì của sóng.

b) Tìm chiều cao của sóng, tức là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng.

Bài 8. Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha = (Ox, OM)$ theo hàm số $v_x = 0{,}3\sin\alpha$ (m/s) (Hình vẽ bên).



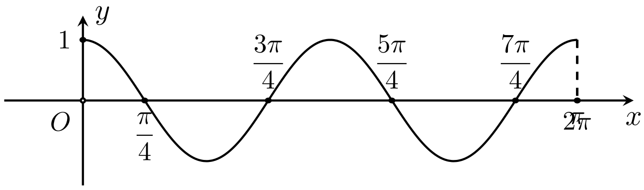
a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x.

b) Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên ($0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$), góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng?

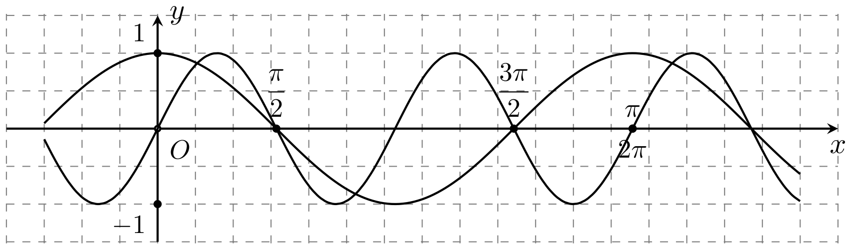
Bài 9. Một dao động điều hoà có phương trình li độ dao động là $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây, A là biên độ dao động và x là li độ dao động đều được tính bằng centimét. Khi đó, chu kì T của dao động là $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Xác định giá trị của li độ khi $t = 0$, $t = \dfrac{T}{4}$, $t = \dfrac{T}{2}$, $t = \dfrac{3T}{4}$, $t = T$ và vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà trên đoạn $[0; 2T]$ trong trường hợp

a) $A = 3$ cm, $\varphi = 0$;　　b) $A = 3$ cm, $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$;　　c) $A = 3$ cm, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Bài 10. Xét hàm số $f(x) = \cos 2x$ trên tập hợp $\mathcal{D} = [0; 2\pi]$ và có đồ thị cho ở hình vẽ. Tìm số giao điểm tối đa của đường thẳng $y = m$ với $m \in \mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $g(x) = |f(x)|$.



Bài 11. Cho các hàm số $y = \sin 2x$ và $y = \cos x$ có đồ thị trong cùng hệ tọa độ như sau

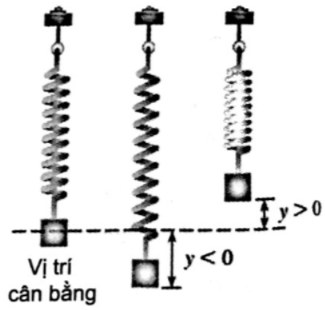


Hỏi hai đồ thị cắt nhau tại bao nhiêu điểm có hoành độ thuộc khoảng $(0; 2018)$?

Bài 12. Một con lắc lò xo dao động đều hòa quanh vị trí cân bằng theo phương trình:

$$y = 25\sin 4\pi t,$$

ở đó y được tính bằng centimét còn thời gian t được tính bằng giây.



a) Tìm chu kì dao động của con lắc lò xo.

b) Tìm tần số dao động của con lắc, tức là số lần dao động trong một giây.

c) Tìm khoảng cách giữa điểm cao nhất và thấp nhất của con lắc.

Bài 13. Một chất điểm dao động điều hoà theo phương trình $s = 3\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)$ với s tính bằng cm và t tính bằng giây. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy xác định ở các thời điểm t nào trong 4 giây đầu thì $s \le -\dfrac{3}{2}$.

Bài 14. Huyết áp là áp lực máu cần thiết tác động lên thành động mạch nhằm đưa máu đi nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Nhờ lực co bóp của tim và sức cản của động mạch mà huyết áp được tạo ra. Giả sử huyết áp của một người thay đổi theo thời gian được cho bởi công thức: $p(t) = 120 + 15\cos 150\pi t$, trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo đơn vị phút.

a) Chứng minh $p(t)$ là một hàm số tuần hoàn.

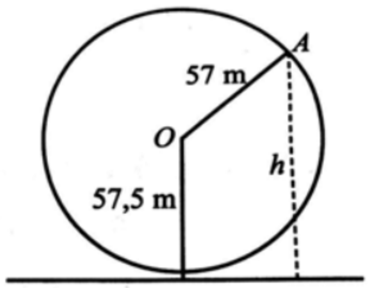
b) Huyết áp cao nhất và huyết áp thấp nhất lần lượt được gọi là huyết áp tâm thu và huyết áp tâm trương. Tìm chỉ số huyết áp của người đó, biết rằng chỉ số huyết áp được viết là huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương.

Bài 15. Giả sử độ sâu $D(t)$ (m) của nước của một cảng biển sau t giờ kể từ nửa đêm được tính bằng công thức: $D(t) = 4\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}\right) + 6$ (m), $0 \leqslant t \leqslant 24$.

a) Tìm độ sâu lớn nhất và độ sâu nhỏ nhất của nước ở cảng này theo công thức trên.

b) Một chiếc thuyền chỉ đi được vào cảng khi độ sâu của nước không nhỏ hơn 5 mét. Hỏi theo công thức trên, chiếc thuyền này có thể vào cảng lúc 8 giờ tối hay không?

Bài 16. Một vòng quay trò chơi có bán kính 57 m, trục quay cách mặt đất 57,5 m, quay đều mỗi vòng hết 15 phút. Khi vòng quay quay đều, khoảng cách h (m) từ một cabin gắn tại điểm A của vòng quay đến mặt đất được tính bởi công thức: $h(t) = 57\sin\left(\dfrac{2\pi}{15}t - \dfrac{\pi}{2}\right) + 57{,}5$ với t là thời gian quay của vòng quay tính bằng phút ($t \geqslant 0$) (hình vẽ).



a) Tính chu kì của hàm số $h(t)$?

b) Khi $t = 0$ (phút) thì khoảng cách từ cabin đến mặt đất bằng bao nhiêu?

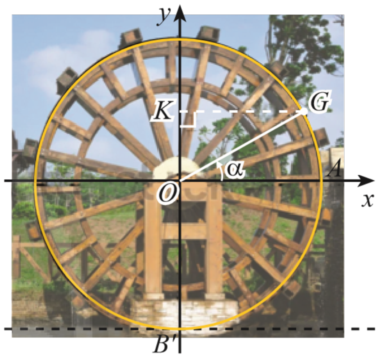
c) Khi quay một vòng lần thứ nhất tính từ thời điểm $t = 0$ (phút), tại thời điểm nào của t thì cabin ở vị trí cao nhất? Ở vị trí đạt được chiều cao là 86 m?

Bài 17. Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một toà chung cư cao 40 m in trên mặt đất, độ dài bóng của toà nhà này được tính bằng công thức $S(t) = 40\left|\cot\dfrac{\pi}{12}t\right|$, ở đó S được tính bằng mét, còn t là số giờ tính từ 6 giờ sáng.

a) Tìm độ dài bóng của toà nhà tại các thời điểm 8 giờ sáng, 12 giờ trưa, 17 giờ 45 phút.

b) Tại thời điểm nào thì độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà?

c) Bóng toà nhà sẽ như thế nào khi thời gian tiến dần đến 6 giờ tối?

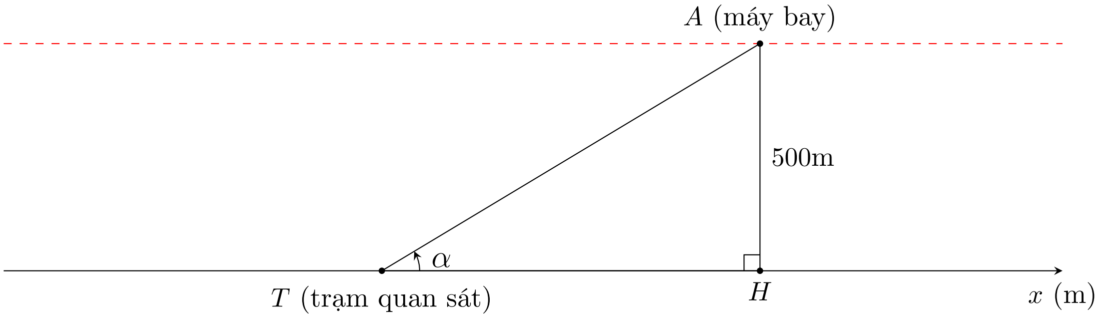


Bài 18. Khoảng cách từ tâm một guồng nước đến mặt nước và bán kính của guồng đều bằng 3 m. Xét gàu G của guồng. Ban đầu gàu G nằm ở vị trí A (Hình vẽ bên).

a) Viết hàm số h biểu diễn chiều cao (tính bằng mét) của gàu G so với mặt nước theo góc $\alpha = (OA, OG)$.

b) Guồng nước quay hết mỗi vòng trong 30 giây. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết ở các thời điểm t nào trong 1 phút đầu, khoảng cách của gàu đến mặt nước bằng 1,5 mét?

Bài 19. Trong hình vẽ bên dưới, một chiếc máy bay A bay ở độ cao 500 m theo một đường thẳng đi ngang qua phía trên trạm quan sát T ở mặt đất. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất là H, α là góc lượng giác (Tx, TA) $(0 < \alpha < \pi)$.



a) Biểu diễn tọa độ x_H của điểm H trên trục Tx theo α.

b) Dựa vào đồ thị hàm số côtang, hãy cho biết với $\dfrac{\pi}{6} < \alpha < \dfrac{2\pi}{3}$ thì x_H nằm trong khoảng nào? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Chuyên đề 5

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

I. PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

Hai phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.

LƯU Ý.

- Để giải phương trình, ta thường biến đổi phương trình đó thành một phương trình tương đương đơn giản hơn. Các phép biến đổi như vậy được gọi là các phép biến đổi tương đương. Ta có một số phép biến đổi tương đương thường sử dụng sau
  - ☆ Cộng hoặc trừ hai vế của phương trình với cùng một số hoặc cùng một biểu thức mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình.
  - ☆ Nhân hoặc chia hai vế của phương trình với cùng một số khác 0 hoặc cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0 mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình.
- Để chỉ sự tương đương của các phương trình, người ta dùng kí hiệu "⇔".

Hai phương trình $x-1=0$ và $x^2-1=0$ có tương đương không?Vì sao?

II. PHƯƠNG TRÌNH $\sin x = m$

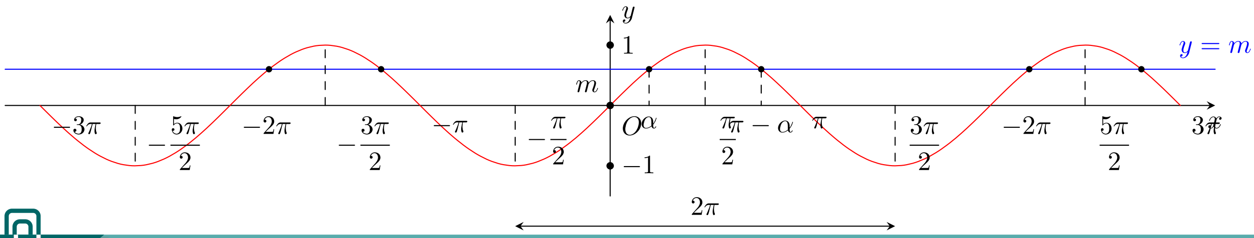
Xét phương trình $\sin x = m$.

- Nếu $|m|>1$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $|m|\le 1$ thì phương trình có nghiệm:

$$x=\alpha+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$$

$$\text{và}\quad x=\pi-\alpha+k2\pi, k\in\mathbb{Z},$$

với α là góc thuộc $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin\alpha = m$.



LƯU Ý.

- Một số trường hợp đặc biệt

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

- $\sin u = \sin v \Leftrightarrow u = v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $u = \pi - v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x = \sin a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = 180^\circ - a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 1 ★☆☆☆☆

Giải các phương trình sau:

a) $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\sin x = -3$.

c) $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

d) $\sin 3x = \sin 2x$.

e) $\sin x = \cos 3x$.

f) $\sin(x + 30^\circ) = \sin(x + 60^\circ)$.

g) $\sin 3x = 0$.

h) $\sin x = \dfrac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải.

a) Vì $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{3}$ nên

$$\sin x = \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Vì $|-3| = 3 > 1$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Vì $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ nên:

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \dfrac{\pi}{3} = \pi - \left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = k2\pi \\ 2x = \dfrac{5\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

d) $\sin 3x = \sin 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = 2x + k2\pi \\ 3x = \pi - 2x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{5} + k\dfrac{2\pi}{5} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

e) $\sin x = \cos 3x \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} - 3x + k2\pi \\ x = \pi - \left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right) + k2\pi \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ -2x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = -\dfrac{\pi}{4} - k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

Vì $\left\{-\dfrac{\pi}{4} - k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{-\dfrac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ nên ta có thể viết như sau:

$$\sin x = \cos 3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

f)

$$\sin(x + 30^\circ) = \sin(x + 60^\circ) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 30^\circ = x + 60^\circ + k360^\circ \\ x + 30^\circ = 180^\circ - (x - 60^\circ) + k360^\circ \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 2x = 210^\circ + k360^\circ \Leftrightarrow x = 105^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$$

g) $\sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

h) Gọi α là góc thỏa mãn $\sin \alpha = \dfrac{3}{4}$.

Khi đó $\sin x = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ 2 ★☆☆☆☆

Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sin x = \cos x$ trên $[0; 2\pi]$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\sin x = \cos x \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ x = \pi - \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $x \in [0; 2\pi]$ nên $0 \leqslant \dfrac{\pi}{4} + k\pi \leqslant 2\pi \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{4} \leqslant k\pi \leqslant \dfrac{7\pi}{4} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{4} \leqslant k \leqslant \dfrac{7}{4}$.

Mặt khác, vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0; 1\}$.

Vậy tất các các nghiệm của phương trình trên đoạn $[0; 2\pi]$ là $x = -\dfrac{\pi}{4}; x = \dfrac{5\pi}{4}$.

Ví dụ 3 ★☆☆☆☆

Giả sử huyết áp của một người A được xác định bởi công thức $p(t) = 115 + 25\sin(160\pi t)$, trong đó $p(t)$ (đơn vị: mmHg) là huyết áp của người đó tại thời điểm t (đơn vị: phút). Xác định tất cả các thời điểm người này có huyết áp thấp nhất theo công thức trên.

Lời giải. Người này có huyết áp thấp nhất khi $\sin(160\pi t) = -1$.

Giải phương trình trên ta được: $160\pi t = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ và $k \geqslant 1$ (do $t \geqslant 0$) hay

$$t = -\frac{1}{320} + \frac{k}{80},\ k \in \mathbb{Z} \text{ và } k \geqslant 1.$$

Vậy người này có huyết áp thấp nhất khi

$$t = -\frac{1}{320} + \frac{k}{80},\ k \in \mathbb{Z} \text{ và } k \geqslant 1.$$

1 Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\sin 2x = -1$.

c) $\sin(x + 30^\circ) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

d) $\sin 2x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

e) $\sin 4x = -\sin(\pi - x)$.

f) $\sin 3x = -\sin 5x$.

2 Số nghiệm của phương trình $\sin 4x = 0$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ là bao nhiêu?

3 Giả sử số lượng N của một loài hưu sau t năm được xác định bởi công thức:

$$N = 30\ 000 + 20\ 000\sin\left(\frac{\pi t}{10}\right).$$

Xác định năm đầu tiên mà số lượng của loài hưu này bằng 50 nghìn con theo công thức trên.

III. PHƯƠNG TRÌNH $\cos x = m$

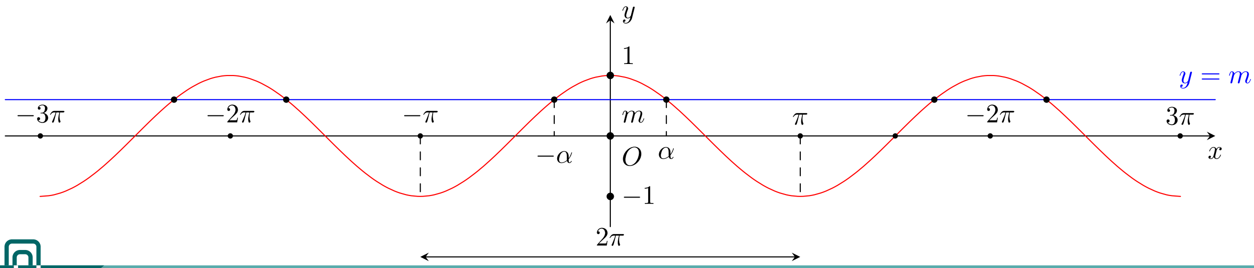
Xét phương trình $\cos x = m$.

- Nếu $|m| > 1$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $|m| \leq 1$ thì phương trình có nghiệm

$$x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{và} \quad x = -\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z},$$

với α là góc thuộc $[0; \pi]$ sao cho $\cos\alpha = m$.



LƯU Ý.

- Một số trường hợp đặc biệt

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

- $\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $u = -v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos x = \cos a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = -a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 4 ★☆☆☆☆

Giải các phương trình sau:

a) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\cos x = 0,1$.

c) $\cos 2x = \cos(45^\circ - x)$.

d) $2\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0$.

Hướng dẫn giải.

a) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\dfrac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Gọi $\alpha \in [0; \pi]$ là góc thoả mãn $\cos\alpha = 0{,}1$. Khi đó,

$$\cos x = 0{,}1 \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

c)

$$\cos 2x = \cos(45^\circ - x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 45^\circ - x + k360^\circ \\ 2x = -(45^\circ - x) + k360^\circ \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = 45^\circ + k360^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 15^\circ + k120^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

d)

$$2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{5\pi}{6}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\\ 2x-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{7\pi}{12}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy $S=\left\{\frac{7\pi}{12}+k\pi;-\frac{\pi}{4}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Ví dụ 5 ★☆☆☆☆

Một vật dao động điều hoà theo phương trình $x=8\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ (sau t tính bằng giây, x tính bằng centimét). Xác định tất cả các thời điểm vật có li độ lớn nhất (kể từ thời điểm ban đầu).

Lời giải. Vật có li độ lớn nhất là 8 cm khi $\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)=1$.

Phương trình trên có các nghiệm là: $\frac{\pi t}{12}=k2\pi,\ k\in\mathbb{N}$ (do $t\geqslant 0$) $\Rightarrow t=24k,\ k\in\mathbb{N}$.

Vậy các thời điểm vật có li độ lớn nhất là: $t=24k,\ k\in\mathbb{N}$.

4 Giải các phương trình sau:

a) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\cos x=3$.

c) $\cos 3x=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

d) $\cos(x-10^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

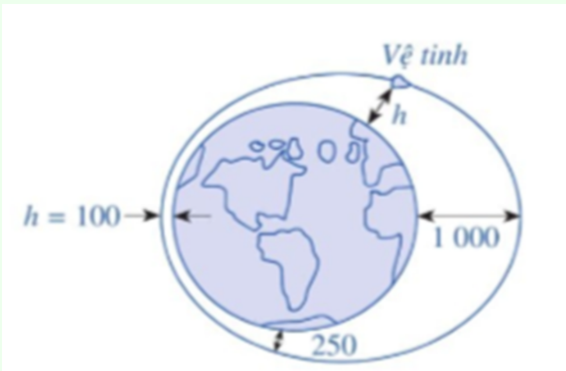
e) $\sin x+\cos 2x=0$.

f) $\sin 2x+2\cos x=0$.

5

Một vệ tinh nhân tạo bay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo là đường elip (Hình bên). Độ cao h (km) của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được xác định bởi công thức

$$h=550+450\cos\frac{\pi}{50}t$$



(*Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2021*), trong đó t là thời gian tính bằng phút kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo. Tại thời điểm t bằng bao nhiêu thì vệ tinh cách mặt đất 1 000 km; 250 km; 100 km?

6 Khi Mặt Trăng quay quanh Trái Đất, mặt đối diện với Trái Đất thường chỉ được Mặt Trời chiếu sáng một phần. Các pha của Mặt Trăng mô tả mức độ phần bề mặt của nó được Mặt Trời chiếu sáng. Khi góc giữa Mặt Trời, Trái Đất và Mặt Trăng là $\alpha (0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 360^\circ)$ thì tỉ lệ F của phần Mặt Trăng được chiếu sáng cho bởi công thức

$$F = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)$$

Xác định góc α tương ứng với các pha sau của Mặt Trăng:

a) $F = 0$ (trăng mới);

b) $F = 0,25$ (trăng lưỡi liềm);

c) $F = 0,5$ (trăng bán nguyệt đầu tháng hoặc trăng bán nguyệt cuối tháng);

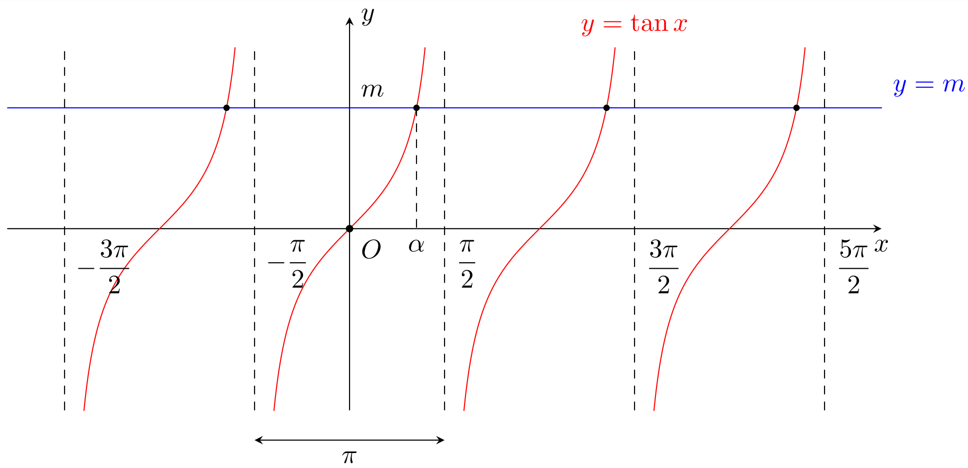
d) $F = 1$ (trăng tròn).

IV. PHƯƠNG TRÌNH $\tan x = m$

Với mọi số thực m, phương trình $\tan x = m$ có nghiệm

$$x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

với α là góc thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan \alpha = m$.



LƯU Ý. $\tan x = \tan a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 6 ★☆☆☆☆

Giải các phương trình sau:

a) $\tan 2x = \dfrac{2025}{2024}$.

b) $3\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$.

c) $\tan(2x+15^\circ) = -1$.

d) $(3\tan x - \sqrt{3})(2\sin x - 1) = 0$.

Hướng dẫn giải.

a) Gọi α thuộc $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ là góc thỏa mãn $\tan\alpha = \dfrac{2025}{2024}$. Khi đó, ta có:

$$\tan 2x = \frac{2025}{2024} \Leftrightarrow \tan 2x = \tan\alpha \Leftrightarrow 2x = \alpha + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{2} + k\frac{\pi}{2} \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

b)

$$\begin{aligned} 3\tan\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} &\Leftrightarrow \tan\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}\\ &\Leftrightarrow \tan\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\ &\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}+k\pi\\ &\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3}+k\pi\\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}\,(k\in\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

c) Ta có: $\tan(2x+15^\circ) = -1 = \tan(-45^\circ) \Leftrightarrow 2x+15^\circ = -45^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = -30^\circ + k90^\circ$.

d) Điều kiện $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Ta có:

$$\left(3\tan x - \sqrt{3}\right)(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}\\ &\sin x = \frac{1}{2}\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&\tan x = \tan\frac{\pi}{6}\\ &\sin x = \sin\frac{\pi}{6}\end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{aligned}&x = \frac{\pi}{6}+k\pi\\ &x = \frac{\pi}{6}+k2\pi\\ &x = \frac{5\pi}{6}+k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z})\end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned}&x = \frac{\pi}{6}+k\pi\\ &x = \frac{5\pi}{6}+k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z})\end{aligned}\right.$$

So với điề kiện, ta có nghiệm của phương trình là:

$$x = \frac{\pi}{6}+k\pi \quad \text{và} \quad x = \frac{5\pi}{6}+k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

7 Giải các phương trình sau:

a) $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

b) $\tan x = -1$.

c) $\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} = 0$.

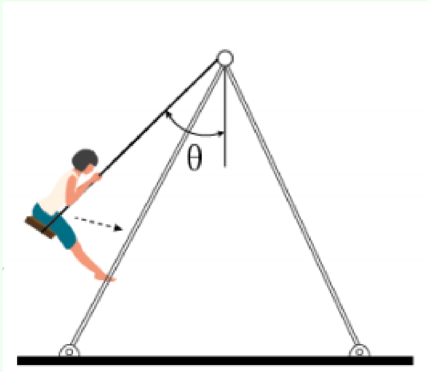
d) $\tan x = \tan 67^\circ$.

e) $\sqrt{3}\tan 2x = -1$.

f) $\tan 3x + \tan 5x = 0$.

8

Một người dẫn em gái của mình đến công viên để chơi xích đu. Lực đẩy theo phương ngang F (N) mà người đó dùng để đẩy em gái trong trò chơi này được xác định bởi công thức $F = mg\tan\theta$, trong đó m (kg) là khối lượng của em gái, g là gia tốc trọng trường và θ là góc tạo bởi xích đu khi bắt đầu được đẩy với phương thẳng đứng *(Hình bên)*. Xác định góc θ khi $F = 400\sqrt{3}$ N, $m = 40$ kg và $g = 10$ m/s^2.

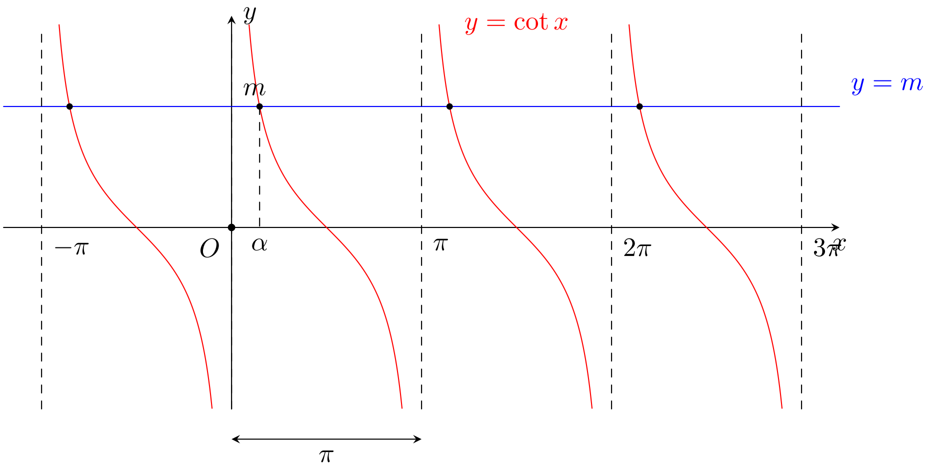


V. PHƯƠNG TRÌNH $\cot x = m$

Với mọi số thực m, phương trình $\cot x = m$ có nghiệm

$$x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

với α là góc thuộc $(0;\pi)$ sao cho $\cot\alpha = m$.



LƯU Ý. $\cot x = \cot a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 7 ★☆☆☆☆

Giải các phương trình sau:

a) $\cot 2x = -\sqrt{3}$.

b) $\sqrt{3}\cot x + 1 = 0$.

c) $\cot(3x + 30^\circ) = \cot 75^\circ$.

Hướng dẫn giải.

a) $\cot 2x = -\sqrt{3} = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

b) $\sqrt{3}\cot x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cot x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c) $\cot(3x + 30^\circ) = \cot 75^\circ \Leftrightarrow 3x + 30^\circ = 75^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 15^\circ + k60^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

9 Giải các phương trình sau:

a) $\cot 2x = -1$. b) $\cot 6x = 4$. c) $\cot(x - 45^\circ) = \sqrt{3}$.

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm

Câu 1. Phương trình nào dưới đây vô nghiệm?

(A) $\sin x = \frac{1}{2}$.
(B) $\tan x = 3$.
(C) $\cos x = 4$.
(D) $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Câu 2. Nghiệm của phương trình $\sin x = -1$ là

(A) $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
(B) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
(C) $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
(D) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 3. Phương trình $2\sin x - 1 = 0$ có tập nghiệm là

(A) $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
(B) $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi; -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
(C) $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
(D) $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 4. Phương trình $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ có nghiệm là

(A) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
(B) $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
(C) $x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k3\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.
(D) $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k3\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 5. Nghiệm của phương trình $2\cos x + 1 = 0$ là

(A) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
(B) $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
(C) $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
(D) $x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 6. Họ nghiệm của phương trình $\cos x = 1$ là

Ⓐ $x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓑ $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓒ $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓓ $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 7. Với $k \in \mathbb{Z}$, phương trình $\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ có tập nghiệm là

Ⓐ $\left\{k2\pi; -\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.
Ⓑ $\left\{k\pi; -\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.
Ⓒ $\left\{k\pi; -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$.
Ⓓ $\left\{k2\pi; -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$.

Câu 8. Với $k \in \mathbb{Z}$, phương trình $2\sin x + 1 = 0$ có tập nghiệm là

Ⓐ $\left\{-\dfrac{\pi}{6} + k2\pi; -\dfrac{7\pi}{6} + k\pi\right\}$.
Ⓑ $\left\{\dfrac{\pi}{6} + k2\pi; \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\right\}$.
Ⓒ $\left\{-\dfrac{\pi}{6} + k2\pi; \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi\right\}$.
Ⓓ $\left\{\dfrac{\pi}{6} + k\pi; -\dfrac{7\pi}{6} + k\pi\right\}$.

Câu 9. Với $k \in \mathbb{Z}$, phương trình $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ có tập nghiệm là

Ⓐ $\left\{\dfrac{\pi}{6} + k2\pi; \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\right\}$.
Ⓑ $\left\{\pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi\right\}$.
Ⓒ $\left\{\dfrac{\pi}{3} + k2\pi; \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\right\}$.
Ⓓ $\left\{\pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\right\}$.

Câu 10. Phương trình $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$ có họ nghiệm là

Ⓐ $-\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓑ $-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓒ $\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓓ $-\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 11. Tập nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1$ là

Ⓐ $\left\{\dfrac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Ⓑ $\left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Ⓒ $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
Ⓓ $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 12. Phương trình nào dưới đây có nghiệm?

Ⓐ $\cos x = 5$.
Ⓑ $\sin x = -5$.
Ⓒ $\cos 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.
Ⓓ $\cos 3x = 2025$.

Câu 13. Phương trình nào dưới đây có nghiệm?

Ⓐ $\cos x = 5$.
Ⓑ $\sin x = -5$.
Ⓒ $\cos 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.
Ⓓ $\cos 3x = 2025$.

Câu 14. Tất cả các nghiệm của phương trình $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{3}$ là

Ⓐ $x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓑ $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓒ $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓓ $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 15. Nghiệm của phương trình $2\cos(x+15^\circ)-1=0$ là

Ⓐ $\left[\begin{array}{l} x=75^\circ+k360^\circ \\ x=135^\circ+k360^\circ \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$

Ⓑ $\left[\begin{array}{l} x=60^\circ+k360^\circ \\ x=-60^\circ+k360^\circ \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$

Ⓒ $\left[\begin{array}{l} x=45^\circ+k360^\circ \\ x=-45^\circ+k360^\circ \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$

Ⓓ $\left[\begin{array}{l} x=75^\circ+k360^\circ \\ x=-45^\circ+k360^\circ \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$

Câu 16. Phương trình $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ có các nghiệm là:

Ⓐ $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$

Ⓑ $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \\ x=-\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$

Ⓒ $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$

Ⓓ $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \\ x=-\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$

Câu 17. Phương trình $\cos x=0$ có nghiệm là:

Ⓐ $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Ⓑ $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Ⓒ $x=k2\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Ⓓ $x=k\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Câu 18. Phương trình $\tan x=-1$ có nghiệm là

Ⓐ $x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Ⓑ $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Ⓒ $x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Ⓓ $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Câu 19. Phương trình $\cot x=0$ có các nghiệm là

Ⓐ $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Ⓑ $x=k\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Ⓒ $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Ⓓ $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Câu 20. Phương trình $\sin x-\cos x=0$ có các nghiệm là

Ⓐ $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Ⓑ $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Ⓒ $x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Ⓓ $x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Câu 21. Số nghiệm của phương trình $\sin x=0,3$ trên khoảng $(0;4\pi)$ là

Ⓐ 2.

Ⓑ 3.

Ⓒ 4.

Ⓓ 6.

Câu 22. Giá trị m để phương trình $\cos x=m$ có nghiệm trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ là:

Ⓐ $0\leqslant m<1$.

Ⓑ $0\leqslant m\leqslant 1$.

Ⓒ $m\geqslant 0$.

Ⓓ $m\leqslant 1$.

Câu 23. Số nghiệm của phương trình $2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=1$ trong khoảng $(0;\pi)$.

Ⓐ 0. Ⓑ 1 . Ⓒ 2 . Ⓓ 3 .

Câu 24. Phương trình $\tan x=\sqrt{3}$ có tập nghiệm là

Ⓐ $\left\{\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Ⓑ $\varnothing$.

Ⓒ $\left\{\dfrac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Ⓓ $\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 25. Phương trình $\cot\dfrac{2x}{3}=\sqrt{3}$ có nghiệm là

Ⓐ $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Ⓑ $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k2\pi}{3}(k\in\mathbb{Z})$.

Ⓒ $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k3\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$.

Ⓓ $x=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{k3\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$.

Câu 26. Tổng các nghiệm của phương trình $2\sin(x+40^\circ)=\sqrt{3}$ trên $(-180^\circ;180^\circ)$ là

Ⓐ 20°. Ⓑ 100° . Ⓒ 80° . Ⓓ 120° .

Câu 27. Số nghiệm thuộc khoảng $(0;2\pi)$ của phương trình $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin 2x=0$ là

Ⓐ 1. Ⓑ 2 . Ⓒ 3 . Ⓓ 4 .

Câu 28. Đồ thị của hàm số $y=\sin x$ và $y=\cos x$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm có hoành độ thuộc đoạn $\left[-2\pi;\dfrac{5\pi}{2}\right]$?

Ⓐ 5. Ⓑ 6 . Ⓒ 4 . Ⓓ 7 .

Câu 29. Tập nghiệm của phương trình $(1-\sqrt{2}\cos x)(2024+\sin^2 x)=0$ là

Ⓐ $\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;-\frac{\pi}{4}+k\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Ⓑ $\left\{\frac{\pi}{4}+k2\pi;-\frac{\pi}{4}+k2\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Ⓒ $\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Ⓓ $\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sin x=m+1$ có nghiệm

Ⓐ $m\geqslant 1$.

Ⓑ $0\leqslant m\leqslant 1$.

Ⓒ $m\leqslant 0$.

Ⓓ $-2\leqslant m\leqslant 0$.

Câu 31. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3\sin 2x-m^2+5=0$ có nghiệm?

Ⓐ 6. Ⓑ 2 . Ⓒ 1 . Ⓓ 7 .

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\cos x-m=0$ vô nghiệm.

Ⓐ $m\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Ⓑ $m\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

Ⓒ $m\in(1;+\infty)$.

Ⓓ $m\in(-\infty;-1)$.

Câu 33. Phương trình $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$ có số nghiệm thuộc khoảng $(0;3\pi)$ là

Ⓐ 2 . Ⓑ 3 . Ⓒ 4 . Ⓓ 5 .

Câu 34. Phương trình $\sqrt{3}\cos x+3\sin x$ có các nghiệm là:

Ⓐ $x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$.
Ⓑ $x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$.
Ⓒ $x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$.
Ⓓ $x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Câu 35. Phương trình $\cos 2x=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ có nghiệm là:

Ⓐ $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$
Ⓑ $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$
Ⓒ $\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$
Ⓓ $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$

Câu 36. Phương trình $\sin 3x=\cos x$ có các nghiệm là:

Ⓐ $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2}\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$
Ⓑ $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{8}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$
Ⓒ $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2}\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$
Ⓓ $\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2}\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$

Câu 37. Tính tổng các nghiệm của phương trình $\cos\left(5x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ trên $[0;\pi]$.

Ⓐ $\dfrac{47\pi}{18}$. Ⓑ $\dfrac{4\pi}{18}$. Ⓒ $\dfrac{45\pi}{18}$. Ⓓ $\dfrac{7\pi}{18}$.

Câu 38. Phương trình $2\sin x+\sqrt{3}=0$ có tổng nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm nhỏ nhất bằng

Ⓐ $\dfrac{4\pi}{3}$. Ⓑ $\dfrac{\pi}{3}$. Ⓒ 2π. Ⓓ π.

Câu 39. Tập nghiệm của phương trình $\sin^2 x-2\sin x+1=0$ là?

Ⓐ $x=-\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.
Ⓑ $x=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi,k\in\in\mathbb{Z}$.
Ⓒ $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.
Ⓓ $x=-\dfrac{3\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Câu 40. Phương trình $\sin 5x-\sin x$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-2018\pi;2018\pi]$?

Ⓐ 20179. Ⓑ 20181. Ⓒ 16144. Ⓓ 16145.

Câu 41. Tìm tất cả các nghiệm phương trình:

$$\sin x \sin\frac{\pi}{3} + \cos 2x \sin\frac{\pi}{4} = \cos x \cos\frac{\pi}{3} + \sin 2x \cos\frac{\pi}{4}$$

Ⓐ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\dfrac{7\pi}{36} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

Ⓑ $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{7\pi}{12} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{36} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

Ⓒ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

Ⓓ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{36} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

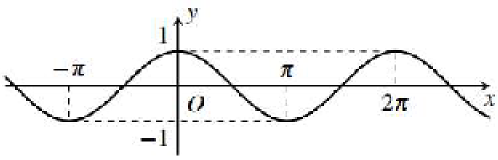
Câu 42. Phương trình $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos x = 0$ có tập nghiệm được biểu diễn bởi bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác?

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 4.

Câu 43. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\cos\left(4x - \dfrac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x$ là

Ⓐ $-\dfrac{35}{36}\pi$. Ⓑ $-\dfrac{11}{36}\pi$. Ⓒ $-\dfrac{11}{12}\pi$. Ⓓ $-\dfrac{1}{12}\pi$.

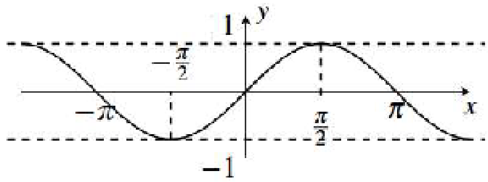
Câu 44. Cho hàm số $y = \cos x$ có đồ thị như hình vẽ.



Nghiệm của phương trình $\cos x = -1$ trong khoảng $(0; 2\pi)$ là

Ⓐ $x = 0$. Ⓑ $x = \pi$. Ⓒ $x = 2\pi$. Ⓓ $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Câu 45. Cho hàm số $y = \sin x$ có đồ thị như hình vẽ.



Nghiệm của phương trình $\sin x = 1$ trong khoảng $(0; 2\pi)$ là

Ⓐ $x = 0$. Ⓑ $x = \pi$. Ⓒ $x = -\dfrac{\pi}{2}$. Ⓓ $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Câu 46. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3\sin\left(\dfrac{\pi}{180}(t - 80)\right) + 12$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leqslant 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

Ⓐ 170. Ⓑ 171. Ⓒ 172. Ⓓ 173.

2 Tự luận

Bài 1. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin 2x = \dfrac{1}{2}$.

b) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{7}\right) = \sin\dfrac{2\pi}{7}$.

c) $\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

d) $\sin 4x - \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0$.

Bài 2. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\cos 4x = \cos\dfrac{\pi}{12}$.

c) $\cos^2 x = 1$.

Bài 3. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\tan x = \tan 55^\circ$.

b) $\tan\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

c) $\tan\left(\dfrac{x}{2} - 1\right) = \dfrac{1}{3}$.

d) $\cot\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1$.

e) $\cot 3x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

f) $\cot x - 3 = \sqrt{3}(1 - \cot x)$.

Bài 4. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos(2x + 10^\circ) = \sin(50^\circ - x)$.

b) $8\sin^3 x + 1 = 0$.

c) $\sin 2x + \cos 4x = 0$.

d) $\cos 3x = -\cos 7x$.

e) $(\sin x + 3)(\cot x - 1) = 0$.

f) $\tan(x - 30^\circ) - \cot 50^\circ = 0$.

g) $\sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin^2\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

h) $\cos^2\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

i) $\sin x + \cos x = 0$.

j) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$.

Bài 5. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\tan x + \cot x = 0$.

b) $\sin x + \tan x = 0$.

c) $2\sin 2x - \sin 4x = 0$.

d) $\cos^6 x - \sin^6 x = 0$.

e) $\tan 2x \cot x = 1$.

f) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 0$.

g) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$.

h) $\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 2\sin^2 x - 1 = 0$.

Bài 6. Tìm các nghiệm của mỗi phương trình sau trong khoảng $(-\pi; \pi)$.

a) $\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$.

b) $2\cos\left(2x - \dfrac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$.

c) $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{9}\right) = \tan\dfrac{4\pi}{9}$.

Bài 7. Tìm hoành độ giao điểm của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ và $y = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$.

b) $y = \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ và $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Bài 8. Tìm hoành độ giao điểm của đồ thị các hàm số $y = \sin 3x - \cos\left(\dfrac{3\pi}{4} - x\right)$ với trục hoành.

Bài 9. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác $y = \dfrac{\sin x - 2\cos 3x}{\sin x + \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)}$.

Bài 10. Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $v_0 = 500$ m/s hợp với phương ngang một góc α. Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình $y = \dfrac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$, ở đó $g = 9{,}8$ m/s^2 là gia tốc trọng trường.

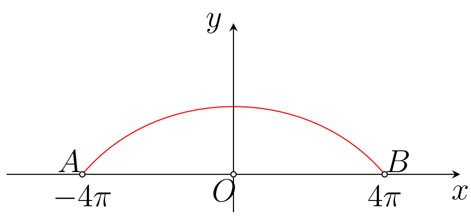
a) Tính theo góc bắn α tầm xa mà quả đạn đạt tới (tức là khoảng cách từ vị trí bắn đến điểm quả đạn chạm đất).

b) Tìm góc bắn α để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo 22000 m.

c) Tìm góc bắn α để quả đạn bay xa nhất.

Bài 11. Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình $x = 2\cos\left(5t - \dfrac{\pi}{6}\right)$. Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

Bài 12. Một cây cầu có dạng cung AB của đồ thị hàm số $y = 4{,}2 \cdot \cos\dfrac{x}{8}$ và được mô tả trong hệ trục tọa độ với đơn vị trục là mét như ở *Hình 38*. Một sà lan chở khối hàng hóa được xếp thành hình hộp chự nhật với độ cao 3 m so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hóa đó phải nhỏ hơn 12,5 m.



Hình 38

Bài 13. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° Bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

$$d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t - 80)\right] + 12 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

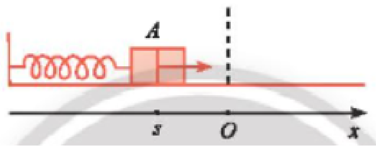
(Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020)

a) Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?

b) Vào ngày nào trong năm thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời?

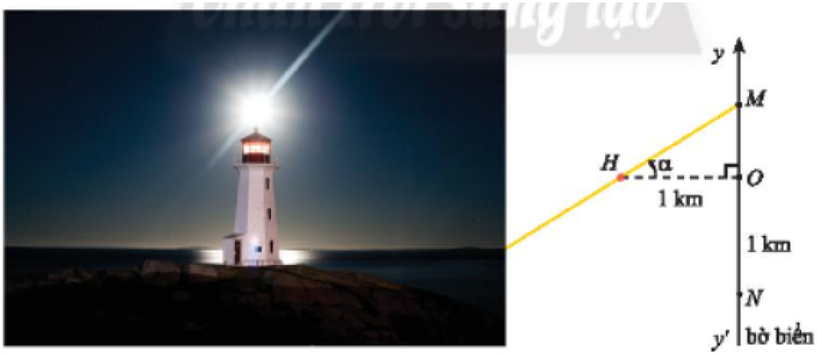
c) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời?

Bài 14. Trong Hình bên, khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O. Tọa độ s (cm) của A trên trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s = 10\sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$. Vào các thời điểm nào thì $s = -5\sqrt{3}$ cm?



Bài 15. Trong Hình 10, ngọn đèn hải đăng H cách bờ biển yy' một khoảng $HO = 1$ km. Đèn xoay ngược chiều kim đồng hồ với tốc độ $\frac{\pi}{10}$ rad/s và chiếu hai luồng ánh sáng về hai phía đối diện nhau. Khi đèn xoay, điểm M mà luồng ánh sáng của hải đăng rọi vào bờ biển chuyển động dọc theo bờ.

(Theo https://www.mnhs.org/splitrock/learn/technology)



a) Ban đầu luồng sáng trùng với đường thẳng HO. Viết hàm số biểu thị tọa độ y_M của điểm M trên trục Oy theo thời gian t.

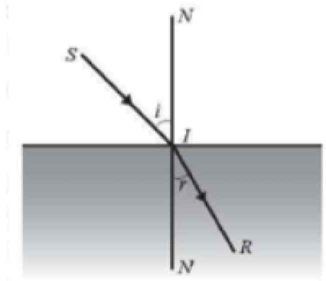
b) Ngôi nhà N nằm trên bờ biển với tọa độ $y_N = -1$ (km). Xác định các thời điểm t mà đèn hải đăng chiếu vào ngôi nhà.

Bài 16. Huyết áp của con người thay đổi liên tục theo thời gian. Giả sử huyết áp tâm trương (huyết áp trong động mạch khi tim nghỉ ngơi giữa hai lần co bóp) của người A trong một ngày được tính bởi công thức $B(t) = 80 + 6\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ trong đó t là số giờ kể từ nửa đêm và $B(t)$ (mmHg) là huyết áp tâm trương.

(a) Tìm huyết áp tâm trương của người này lúc 6 giờ sáng và 12 giờ trưa.

(b) Theo công thức trên, người này có huyết áp tâm trương thấp nhất vào thời điểm nào trong ngày?

Bài 17. Theo Định luật khúc xạ ánh sáng, khi một tia sáng được chiếu tới mặt phân cách giữa hai môi trường trong suốt không đồng chất thì tỉ số $\dfrac{\sin i}{\sin r}$, với i là góc tới và r là góc khúc xạ, là một hằng số phụ thuộc vào chiết suất của hai môi trường. Biết rằng khi góc tới là 45° thì góc khúc xạ bằng 30°. Khi góc tới là 60° thì góc khúc xạ là bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Bài 18. Một quả bóng được ném xiên một góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$) từ mặt đất với tốc độ v_0 (m/s). Khoảng cách theo phương ngang từ vị trí ban đầu của quả bóng đến vị trí bóng chạm đất được tính bởi công thức $d = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{10}$.

(a) Tính khoảng cách d khi bóng được ném đi với tốc độ ban đầu $10\,\text{m/s}$ và góc ném là 30° so với phương ngang.

(b) Nếu tốc độ ban đầu của bóng là $10\,\text{m/s}$ thì cần ném bóng với góc bao nhiêu độ để khoảng cách d là $5\,\text{m}$?

Bài 19. Chiều cao h (m) của một cabin trên vòng quay vào thời điểm t giây sau khi bắt đầu chuyển động được cho bởi công thức $h(t) = 30 + 20 \sin\left(\dfrac{\pi}{25}t + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

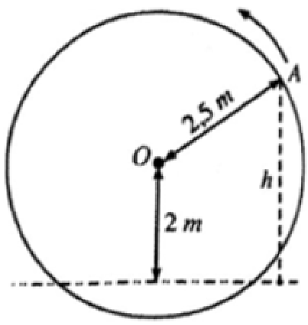
(a) Cabin đạt độ cao tối đa là bao nhiêu?

(b) Sau bao nhiêu giây thì cabin đạt độ cao $40\,\text{m}$ lần đầu tiên?

Bài 20. Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5 m; trục của nó đặt cách mặt nước 2 m (hình bên). Khi guồng quay đều, khoảng cách h (mét) tính từ một chiếc gầu gắn tại điểm A trên guồng đến mặt nước là $h = |y|$ trong đó

$$y = 2 + 2,5 \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4}\right)$$

với x là thời gian quay của guồng ($x \geqslant 0$), tính bằng phút; ta quy ước rằng $y > 0$ khi gầu ở trên mặt nước và $y < 0$ khi gầu ở dưới mặt nước.



Mô phỏng guồng nước

a) Khi nào chiếc gầu ở vị trí cao nhất? Thấp nhất?

b) Chiếc gầu cách mặt nước 2 mét lần đầu tiên khi nào?

Bài 21. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t (ở đây t là số ngày tính từ ngày 1 tháng giêng) của một năm không nhuận được mô hình hóa bởi hàm số

$$L(t) = 12 + 2,83 \sin\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right] \quad \text{với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leqslant 365.$$

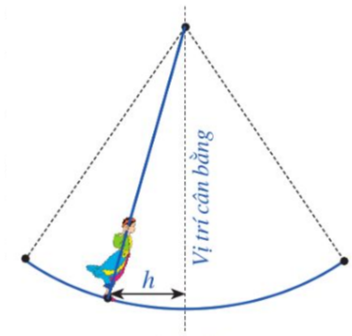
a) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất?

b) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất?

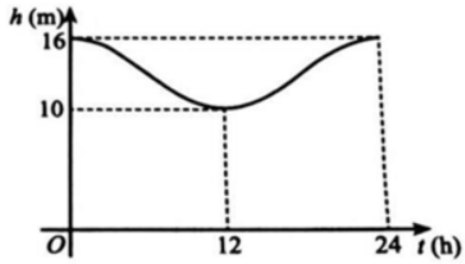
c) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời?

Bài 22. Hội Lim (Bắc Ninh) được tổ chức vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu.

Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (*Hình vẽ*). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h (m) từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian $t\,(s)$ (với $t \geq 0$) với hệ thức $h = |d|$ với $d = 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t - 1)\right]$, trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại (*Nguồn: Đại số và giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2022*). Vào thời điểm t nào thì khoảng cách h là 3 m; 0 m?



Bài 23. Mực nước cao nhất tại một cảng biển là 16 m khi thủy triều lên cao và sau 12 giờ khi thủy triều xuống thấp thì mực nước thấp nhất là 10 m. Đồ thị ở Hình bên mô tả sự thay đổi chiều cao của mực nước tại cảng trong vòng 24 giờ tính từ lúc nửa đêm. Biết chiều cao của mực nước h (m) theo thời gian t (h) với $(0 \leqslant t \leqslant 24)$ được cho bởi công thức



$$h = m + a\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$$

với m, a là các số thực dương cho trước.

a) Tìm m, a.

b) Tìm thời điểm trong ngày khi chiều cao của mực nước là 11,5 m.

Chuyên đề 6

ÔN TẬP CHƯƠNG 1

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Biết $\sin a = -\dfrac{1}{2}$, giá trị của $\sin(\pi - a)$ là

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$.   Ⓑ $-\dfrac{1}{2}$.   Ⓒ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.   Ⓓ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 2. Công thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\cos 2a = 2\cos a$.   Ⓑ $\cos 2a = \cos a - \sin a$.

Ⓒ $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.   Ⓓ $\cos 2a = \cos^2 a + \sin^2 a$.

Câu 3. Phương trình $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{3}$ có nghiệm là

Ⓐ $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.   Ⓑ $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ⓒ $x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.   Ⓓ $x = \dfrac{5\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 4. Rút gọn biểu thức $T = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$ ta được kết quả là

Ⓐ $T = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.   Ⓑ $T = \sin x$.

Ⓒ $T = \sqrt{3}\cos x$.   Ⓓ $T = \sin 2x$.

Câu 5. Góc lượng giác $\dfrac{24\pi}{5}$ có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác với góc lượng giác nào sau đây?

Ⓐ $\dfrac{13\pi}{5}$.   Ⓑ $-\dfrac{16\pi}{5}$.   Ⓒ $-\dfrac{\pi}{5}$.   Ⓓ $\dfrac{29\pi}{5}$.

Câu 6. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số

Ⓐ lẻ và tuần hoàn với chu kì 2π.

Ⓑ chẵn và tuần hoàn với chu kì 2π.

Ⓒ lẻ và tuần hoàn với chu kì π.

Ⓓ chẵn và tuần hoàn với chu kì π.

Câu 7. Công thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\cos(\pi + \alpha) = \cos\alpha$.   Ⓑ $\cos\alpha = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Ⓒ $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$.   Ⓓ $\sin^2 2025\alpha + \cos^2 2025\alpha = 1$.

Câu 8. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

Ⓐ $\sin(a-b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Ⓑ $\sin 2a = 2\sin a \cos a$.

Ⓒ $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$.

Ⓓ $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$.

Câu 9. Góc lượng giác nào tương ứng với chuyển động quay $3\frac{1}{5}$ vòng ngược chiều kim đồng hồ?

Ⓐ $\dfrac{16\pi}{5}$. Ⓑ $\left(\dfrac{16}{5}\right)^\circ$. Ⓒ 1152° . Ⓓ 1152π .

Câu 10. Trong trường hợp nào dưới đây $\cos\alpha = \cos\beta$ và $\sin\alpha = -\sin\beta$?

Ⓐ $\beta = -\alpha$. Ⓑ $\beta = \pi - \alpha$.

Ⓒ $\beta = \pi + \alpha$. Ⓓ $\beta = \dfrac{\pi}{2} + \alpha$.

Câu 11. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\cos 2x = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ là

Ⓐ $-\dfrac{\pi}{9}$. Ⓑ $-\dfrac{5\pi}{3}$. Ⓒ $-\dfrac{7\pi}{9}$. Ⓓ $-\dfrac{13\pi}{9}$.

Câu 12. Số nghiệm của phương trình $\tan x = 3$ trong khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ là

Ⓐ 1 . Ⓑ 2 . Ⓒ 3 . Ⓓ 4 .

Câu 13. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2 - \sin x$ lần lượt là

Ⓐ 3 và 1 . Ⓑ 1 và 3 . Ⓒ 4 và -4 . Ⓓ 4 và 2 .

Câu 14. Cho $\dfrac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi$. Khẳng định nào đúng?

Ⓐ $\cot\alpha > 0$. Ⓑ $\cos\alpha > 0$. Ⓒ $\sin\alpha > 0$. Ⓓ $\tan\alpha > 0$.

Câu 15. Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ là

Ⓐ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. Ⓑ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Ⓒ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ⓓ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 16. Đơn giản biểu thức $P = \dfrac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$.

Ⓐ $P = -1 + 2\tan^2\alpha$. Ⓑ $P = 1 - 2\tan^2\alpha$.

Ⓒ $P = -1 - 2\tan^2\alpha$. Ⓓ $P = 1 + 2\tan^2\alpha$.

Câu 17. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(\pi; 2\pi)$ là

Ⓐ $y = \sin x$. Ⓑ $y = \cos x$. Ⓒ $y = \tan x$. Ⓓ $y = \cot x$.

Câu 18. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng:

Ⓐ $(0; \pi)$.
Ⓑ $\left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$.
Ⓒ $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
Ⓓ $(-\pi; 0)$.

Câu 19. Nghiệm của phương trình $\cot(3x-1) = -\sqrt{3}$ là

Ⓐ $x = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓑ $x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓒ $x = \frac{5\pi}{8} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓓ $x = \frac{1}{3} + \frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 20. Nếu $\tan(a+b) = 3, \tan(a-b) = -3$ thì $\tan 2a$ bằng

Ⓐ 0 .
Ⓑ $\frac{3}{5}$.
Ⓒ 1 .
Ⓓ $-\frac{3}{4}$.

Câu 21. Nếu $\cos a = \frac{1}{4}$ thì $\cos 2a$ bằng:

Ⓐ $\frac{15}{16}$.
Ⓑ $\frac{7}{8}$.
Ⓒ $-\frac{15}{16}$.
Ⓓ $-\frac{7}{8}$.

Câu 22. Nếu $\cos a = \frac{3}{5}$ và $\cos b = -\frac{4}{5}$ thì $\cos(a+b)\cos(a-b)$ bằng:

Ⓐ 0.
Ⓑ 2.
Ⓒ 4.
Ⓓ 5.

Câu 23. Nếu $\sin a = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ thì $\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$ bằng:

Ⓐ $\frac{2}{3}$.
Ⓑ $\frac{1}{3}$.
Ⓒ $-\frac{2}{3}$.
Ⓓ $-\frac{1}{3}$.

Câu 24. Số nghiệm của phương trình $\cos x = 0$ trên đoạn $[0; 10\pi]$ là:

Ⓐ 5.
Ⓑ 9.
Ⓒ 10.
Ⓓ 11.

Câu 25. Số nghiệm của phương trình $\sin x = 0$ trên đoạn $[0; 10\pi]$ là:

Ⓐ 10.
Ⓑ 6.
Ⓒ 5.
Ⓓ 11.

Câu 26. Phương trình $\cot x = -1$ có nghiệm là:

Ⓐ $-\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.
Ⓑ $\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.
Ⓒ $\frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.
Ⓓ $-\frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 27. Số nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ trên đoạn $[0; \pi]$ là:

Ⓐ 4.
Ⓑ 1.
Ⓒ 2.
Ⓓ 3.

Câu 28. Biểu diễn các góc lượng giác $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{25\pi}{3}$, $\delta = \frac{17\pi}{6}$ trên đường tròn lượng giác. Các góc nào có điểm biểu diễn trùng nhau?

Ⓐ β và γ.
Ⓑ $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.
Ⓒ $\beta,\ \gamma,\ \delta$.
Ⓓ α và β.

Câu 29. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là sai?

Ⓐ $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$. Ⓑ $\cos(\pi - \alpha) = \cos\alpha$.

Ⓒ $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$. Ⓓ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$.

Câu 30. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là sai?

Ⓐ $\cos(a - b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$.

Ⓑ $\sin(a - b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$.

Ⓒ $\cos(a + b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$.

Ⓓ $\sin(a + b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$.

Câu 31. Rút gọn biểu thức $M = \cos(a + b)\cos(a - b) - \sin(a + b)\sin(a - b)$, ta được:

Ⓐ $M = \sin 4a$. Ⓑ $M = 1 - 2\cos^2 a$.

Ⓒ $M = 1 - 2\sin^2 a$. Ⓓ $M = \cos 4a$.

Câu 32. Khẳng định nào sau đây là sai?

Ⓐ Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$..

Ⓑ Hàm số $y = \cos x$ có tập giá trị là $[-1; 1]$..

Ⓒ Hàm số $y = \cos x$ là hàm số lẻ..

Ⓓ Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì 2π..

Câu 33. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm tuần hoàn?

Ⓐ $y = \tan x + x$. Ⓑ $y = x^2 + 1$.

Ⓒ $y = \cot x$. Ⓓ $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

Câu 34. Đồ thị của các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm có hoành độ thuộc đoạn $[-2\pi; \dfrac{5\pi}{2}]$?

Ⓐ 5. Ⓑ 6. Ⓒ 4. Ⓓ 7.

Câu 35. Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{\cos x}{\sin x - 1}$ là:

Ⓐ $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Ⓑ $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ⓒ $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ⓓ $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 36. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \tan x$.

Ⓐ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ⓑ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Ⓒ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Ⓓ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 37. Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức

$$h(t) = 29 + 3\sin\frac{\pi}{12}(t-9)$$

với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ. Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là bao nhiêu độ C và vào lúc mấy giờ?

(Theo *https://www.sciencedirect.com/science/ article/abs/pii/0168192385900139*)

Ⓐ 32°C, lúc 15 giờ.
Ⓑ 29°C, lúc 9 giờ.
Ⓒ 26°C, lúc 3 giờ.
Ⓓ 26°C, lúc 0 giờ.

Câu 38. Tập giá trị của hàm số $y = \cos x$ là tập hợp nào sau đây?

Ⓐ $\mathbb{R}$.
Ⓑ $(-\infty; 0]$.
Ⓒ $[0; +\infty]$.
Ⓓ $[-1; 1]$.

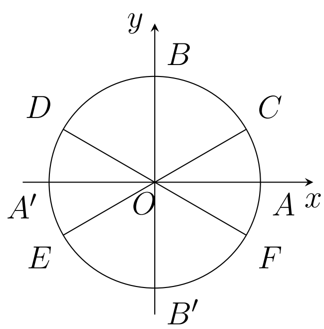
Câu 39. Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x$ là

Ⓐ $[-2; 2]$.
Ⓑ $[0; 2]$.
Ⓒ $[-1; 1]$.
Ⓓ $[0; 1]$.

Câu 40. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn.
Ⓑ Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.
Ⓒ Hàm số $y = \tan x$ là hàm số chẵn.
Ⓓ Hàm số $y = \cot x$ là hàm số chẵn.

Câu 41. Nghiệm của phương trình $\tan x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ được biểu diễn trên đường tròn lượng giác ở hình bên là những điểm nào?



Ⓐ Điểm F, điểm D.
Ⓑ Điểm C, điểm F.
Ⓒ Điểm C, điểm D, điểm E, điểm F.
Ⓓ Điểm E, điểm F.

Câu 42. Đổi số đo góc $\alpha = 105^\circ$ sang radian ta được

Ⓐ $\alpha = \dfrac{5\pi}{8}$.
Ⓑ $\alpha = \dfrac{\pi}{8}$.
Ⓒ $\alpha = \dfrac{7\pi}{12}$.
Ⓓ $\alpha = \dfrac{9\pi}{12}$.

Câu 43. Giá trị $\cot\dfrac{89\pi}{6}$ bằng

Ⓐ $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
Ⓑ $\sqrt{3}$.
Ⓒ $-\sqrt{3}$.
Ⓓ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 44. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

Ⓐ $\sin(180^\circ - a) = -\cos a$.
Ⓑ $\sin(180^\circ - a) = -\sin a$.
Ⓒ $\sin(180^\circ - a) = \sin a$.
Ⓓ $\sin(180^\circ - a) = \cos a$.

Câu 45. Biết $\sin x = \dfrac{1}{2}$. Giá trị của $\cos^2 x$ bằng:

Ⓐ $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$.
Ⓑ $\cos^2 x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Ⓒ $\cos^2 x = \dfrac{1}{4}$.
Ⓓ $\cos^2 x = \dfrac{3}{4}$.

Câu 46. Biết $\cot x = \dfrac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $\dfrac{4\sin x + 5\cos x}{2\sin x - 3\cos x}$ bằng:

Ⓐ $\dfrac{1}{17}$.
Ⓑ $\dfrac{5}{9}$.
Ⓒ 13.
Ⓓ $\dfrac{2}{9}$.

Câu 47. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **sai**?

Ⓐ $\cos u + \cos v = 2\cos\left(\dfrac{u+v}{2}\right)\cos\left(\dfrac{u-v}{2}\right)$.
Ⓑ $\cos u - \cos v = 2\sin\left(\dfrac{u+v}{2}\right)\sin\left(\dfrac{v-u}{2}\right)$.
Ⓒ $\sin u + \sin v = 2\sin\left(\dfrac{u+v}{2}\right)\cos\left(\dfrac{u-v}{2}\right)$.
Ⓓ $\sin u - \sin v = 2\cos\left(\dfrac{u+v}{2}\right)\sin\left(\dfrac{u-v}{2}\right)$.

Câu 48. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **sai**?

Ⓐ $\sin 2a = 2\sin a\cos a$.
Ⓑ $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.
Ⓒ $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$.
Ⓓ $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1+\tan^2 a}$.

Câu 49. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1-\cos x}$ là:

Ⓐ $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Ⓑ $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Ⓒ $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Ⓓ $\mathbb{R}$.

Câu 50. Khẳng định nào sau đây sai?

Ⓐ Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Ⓑ Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên các khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + k\pi\right)$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$.
Ⓒ Tập giá trị của hàm số $y = \tan x$ là $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.
Ⓓ Hàm số $y = \tan x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì π.

Câu 51. Hàm số nào dưới đây có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng?

Ⓐ $y = \cos x$.
Ⓑ $y = \sin^3 x$.
Ⓒ $y = \sin x$.
Ⓓ $y = \tan x$.

Câu 52. Giá trị của biểu thức $A = (2\sin x - \cos x)^2 + (2\cos x + \sin x)^2$ bằng

Ⓐ 5 . Ⓑ 4. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

Câu 53. Mệnh đề nào sau đây sai?

Ⓐ Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kì 2π.

Ⓑ Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì 2π.

Ⓒ Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì 2π.

Ⓓ Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì π.

Câu 54. Mệnh đề nào sau đây sai?

Ⓐ Hàm số $y = \sin x \cos 2x$ là hàm số tuần hoàn.

Ⓑ Hàm số $y = \sin x \cos 2x$ là hàm số lẻ.

Ⓒ Hàm số $y = x \sin x$ là hàm số tuần hoàn.

Ⓓ Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn.

Câu 55. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Ⓑ $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Ⓒ $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Ⓓ $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 56. Số nghiệm của phương trình $2\cos x = \sqrt{3}$ trên đoạn $\left[0; \dfrac{5\pi}{2}\right]$ là:

Ⓐ 1. Ⓑ 4. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

Câu 57. Điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác của góc lượng giác có số đo $-830°$ thuộc góc phần tư thứ mấy?

Ⓐ Góc phần tư thứ I. Ⓑ Góc phần tư thứ II.

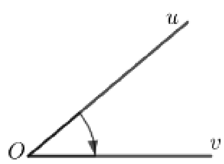
Ⓒ Góc phần tư thứ III. Ⓓ Góc phần tư thứ IV.

Câu 58. Tất cả các nghiệm của phương trình $\cot(x - 15°) - \sqrt{3} = 0$ là

Ⓐ $x = 75° + k180°, k \in \mathbb{Z}$. Ⓑ $x = 45° + k180°, k \in \mathbb{Z}$.

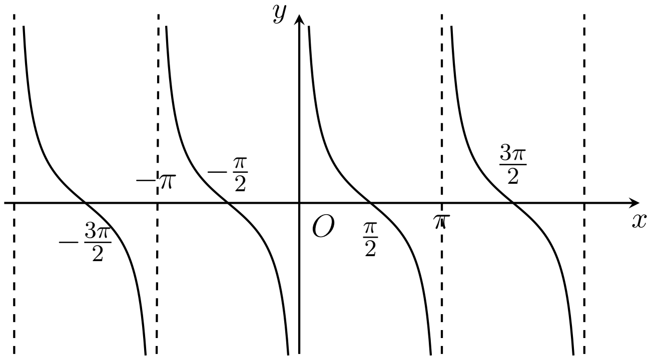
Ⓒ $x = 75° + k360°, k \in \mathbb{Z}$. Ⓓ $x = 45° + k360°, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 59. Cho góc hình học $\widehat{uOv} = 40°$. Số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) như hình vẽ bên dưới bằng



Ⓐ $-40°$. Ⓑ $-140°$. Ⓒ $140°$. Ⓓ $40°$.

Câu 60. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



Ⓐ $y = \cot x$. Ⓑ $y = \cos x$. Ⓒ $y = \sin x$. Ⓓ $y = \tan x$.

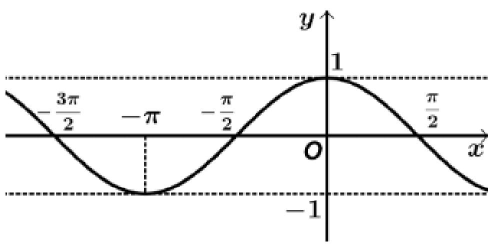
Câu 61. Phương trình $\cos x = \cos \alpha^\circ$ có nghiệm là

Ⓐ $x = \alpha^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. Ⓑ $x = \alpha^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓒ $x = \pm\alpha^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. Ⓓ $x = \pm\alpha^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 62. Hàm số $y = \dfrac{\sin 2x}{\cot x - \sqrt{3}}$ có tập xác định là

Ⓐ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi,\ \dfrac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Ⓑ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Ⓒ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Ⓓ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 63. Từ đồ thị của hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ tròng hình vẽ, suy ra hàm số $y = \cos x$ nhận giá trị dương khi

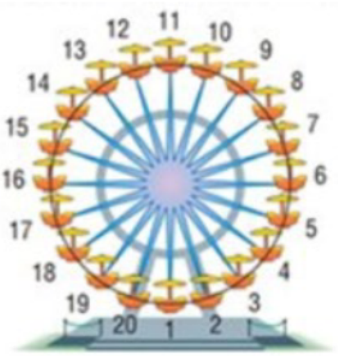


Ⓐ $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Ⓑ $x \in \left(-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.
Ⓒ $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Ⓓ $x \in (-\pi; 0)$.

Câu 64. Rút gọn biểu thức $\sin(a - 19^\circ)\cos(a + 11^\circ) - \sin(a + 11^\circ)\cos(a - 19^\circ)$ ta được

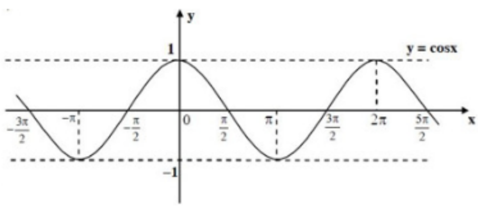
Ⓐ $\sin 2a$. Ⓑ $\cos 2a$. Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 65. Một trò chơi đu quay bánh xe có 20 ô xe chở khách(xem hình vẽ),khoảng cách từ tâm đu quay đến ô xe bằng 50 m. Các ô xe được thiết kế cân đối và đều nhau trên đường tròn, vòng quay ngược kim đồng hồ. Hỏi ô xe số 2 di chuyển đến vị trí ô xe số 8 thì đã di chuyển được quãng đường (đơn vị mét) gần nhất với số nào sau đây ?



Ⓐ 102 m . Ⓑ 92, 45 m . Ⓒ 96,5 m . Ⓓ 94, 25 .

Câu 66. Cho đồ thị hàm số $y = \cos x$ ó đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



Ⓐ $(0; \pi)$.

Ⓑ $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ⓒ $(\pi; 2\pi)$.

Ⓓ $\left(-\dfrac{3\pi}{2}; -\pi\right)$.

Câu 67. Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức $h = 3\cos\left(\dfrac{\pi t}{8} + \dfrac{\pi}{4}\right) + 12$. Để tìm thời điểm mực nước trong kênh lớn nhất ta giải phương trình nào trong các phương trình sau đây:

Ⓐ $\cos\left(\dfrac{\pi t}{8} + \dfrac{\pi}{4}\right) = 12$.

Ⓑ $\cos\left(\dfrac{\pi t}{8} + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

Ⓒ $\cos\left(\dfrac{\pi t}{8} + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1$.

Ⓓ $\cos\left(\dfrac{\pi t}{8} + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

Câu 68. Khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a$.

Ⓑ $\cos 6a = 1 - 2\sin^2 3a$.

Ⓒ $\cos 6a = 1 - 6\sin^2 a$.

Ⓓ $\cos 6a = 2\cos^2 3a - 1$.

Câu 69. Cho một góc lượng giác có số đo $120°$. Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc lượng giác đã cho là

Ⓐ $120° + k360°$.
Ⓑ $120° + k180°$.
Ⓒ $120° + k2\pi$.
Ⓓ $180° + k\pi$.

Câu 70. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

Ⓐ $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$.
Ⓑ $1 \text{ rad} = 180°$.
Ⓒ $1 \text{ rad} = 60°$.
Ⓓ $1 \text{ rad} = 1°$.

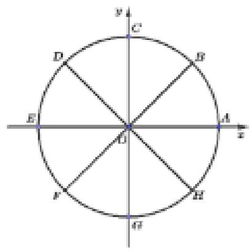
Câu 71. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

Ⓐ $120° = \frac{2\pi}{9}$.
Ⓑ $250° = \frac{25\pi}{18}$.
Ⓒ $135° = \frac{3\pi}{4}$.
Ⓓ $300° = \frac{5\pi}{3}$.

Câu 72. Nếu $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ thì $\sin 2x$ bằng

Ⓐ $\frac{3}{4}$.
Ⓑ $\frac{3}{8}$.
Ⓒ $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Ⓓ $-\frac{8}{9}$.

Câu 73. Cho lục giác đều $ABCDEFGH$ nội tiếp trong đường tròn lượng giác. Khẳng định nào đúng?

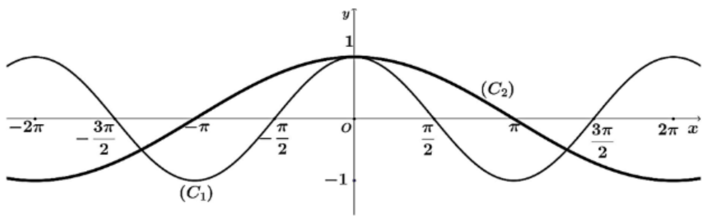


Ⓐ $(OB, OC) = \frac{\pi}{8} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓑ $(OB, OC) = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓒ $(OB, OC) = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓓ $(OB, OC) = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 74. Cho một góc lượng giác (Ou, Ox) có số đo $\frac{11\pi}{4}$ và một góc lượng giác (Ox, Ov) có số đo $\frac{3\pi}{4}$. Viết công thức tổng quát của góc lượng giác (Ou, Ov).

Ⓐ $(Ou, Ov) = \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓑ $(Ou, Ov) = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓒ $(Ou, Ov) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓓ $(Ou, Ov) = -\frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 75. Hình vẽ sau biểu diễn hình dạng đồ thị (C_1) của hàm số $f(x) = \cos x$ và đồ thị (C_2) của hàm số $g(x) = \cos ax$. Tìm chu kì của hàm số $g(x)$.



Ⓐ 3π .
Ⓑ π .
Ⓒ 2π .
Ⓓ 4π .

Câu 76. Cho biết $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$. Tính $\cot\alpha$.

Ⓐ $\cot\alpha = 2$. Ⓑ $\cot\alpha = \dfrac{1}{4}$. Ⓒ $\cot\alpha = -\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\cot\alpha = \sqrt{2}$.

Câu 77. Chiều cao $h(t)$ của một cabin trên vòng quay vào thời điểm t giây sau khi bắt đầu chuyển động được cho bởi công thức $h(t) = 30 + 20\sin\left(\dfrac{\pi}{25}t + \dfrac{\pi}{3}\right)$. Tại các thời điểm nào thì cabin đạt độ cao 40m?

Ⓐ $\left[\begin{array}{ll} t = -\dfrac{5}{6} + 20k & (k \in \mathbb{Z}, k \geqslant 1) \\ t = \dfrac{25}{3} + 50k & (k \in \mathbb{Z}, k \geqslant 0) \end{array}\right.$.

Ⓑ $\left[\begin{array}{ll} t = -\dfrac{25}{6} + 50k & (k \in \mathbb{Z}, k \geqslant 1) \\ t = \dfrac{25}{2} + 50k & (k \in \mathbb{Z}, k \geqslant 0) \end{array}\right.$.

Ⓒ $\left[\begin{array}{ll} t = -\dfrac{15}{6} + 20k & (k \in \mathbb{Z}, k \geqslant 1) \\ t = \dfrac{25}{3} + 50k & (k \in \mathbb{Z}, k \geqslant 0) \end{array}\right.$.

Ⓓ $\left[\begin{array}{ll} t = -\dfrac{35}{6} + 20k & (k \in \mathbb{Z}) \\ t = \dfrac{25}{3} + 30k & \end{array}\right.$.

Câu 78. Tập xác định của hàm số $y = \tan 2x$ là:

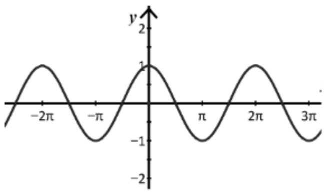
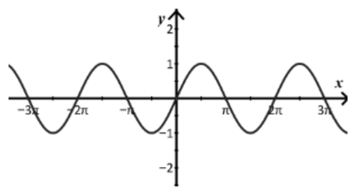
Ⓐ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ⓑ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

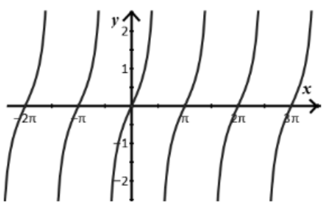
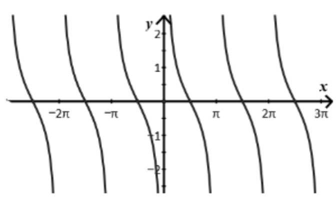
Ⓒ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ⓓ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 79. Rút gọn biểu thức $y = \dfrac{1 - 2\sin^2 x}{2\sin x\cos x}$ ta được kết quả là:

Ⓐ $\cot 2x$. Ⓑ $\tan 2x$. Ⓒ $\cos 2x$. Ⓓ $\cot x$.

Câu 80. Đồ thị của hàm số $y = \sin x$ là hình nào dưới đây?

Ⓐ . Ⓑ .

Ⓒ . Ⓓ .

2 Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=\tan 2x-1$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
A Giá trị của hàm số tại $x=\dfrac{\pi}{8}$ bằng 0 .		
B Hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn .		
C Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\lvert k\in\mathbb{Z}\right\}$ và tập giá trị là $T=\mathbb{R}$.		
D Hàm số $f(x)$ là hàm số tuần hoàn .		

Câu 2. Cho phương trình lượng giác: $2\sin x=\sqrt{2}\quad(*)$.

Phát biểu	Đ	S
A Phương trình tương đương với phương trình $(*)$ là $\sin x=\sin\dfrac{\pi}{4}$.		
B Phương trình $(*)$ có nghiệm là $x=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi; x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.		
C Phương trình $(*)$ có nghiệm dương nhỏ nhất bằng $\dfrac{\pi}{4}$.		
D Số nghiệm của phương trình $(*)$ trong khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ là hai nghiệm .		

Câu 3. Cho góc lượng giác $\alpha=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S	Phát biểu	Đ	S
A $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$.			**C** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.		
B $\tan\alpha=-\sqrt{3}$.			**D** $\cot\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.		

Câu 4. Cho phương trình lượng giác: $\sin x=-\dfrac{1}{2}\quad(*)$.

Phát biểu	Đ	S
A Phương trình tương đương với phương trình $(*)$ là $\sin x=\sin\dfrac{\pi}{6}$.		
B Phương trình $(*)$ có nghiệm là $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi; x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.		
C Phương trình $(*)$ có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\dfrac{\pi}{3}$.		
D Số nghiệm của phương trình $(*)$ trong khoảng $(-\pi;\pi)$ là ba nghiệm .		

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=\tan x+2$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
A Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.		
B Hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ .		
C Hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 1 .		
D $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=3$.		

Câu 6. Cho phương trình $\cos\left(4x-\dfrac{3\pi}{8}\right)=-1$.

Phát biểu	Đ	S
A $x=\dfrac{11\pi}{32}$ là một nghiệm của phương trình đã cho .		
B Tất cả nghiệm của phương trình đã cho được biểu diễn bởi 4 điểm trên đường tròn lượng giác .		
C Tổng nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $\dfrac{\pi}{4}$.		
D Phương trình đã cho có đúng 33 nghiệm trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{19\pi}{2}\right)$.		

Câu 7. Cho α,β là hai góc thoả mãn $\alpha,\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ và $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$, $\cos\beta=-\dfrac{2}{3}$.

Phát biểu	Đ	S
A $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.		
B $\tan(\alpha-\beta)<\dfrac{1}{2}$.		

Phát biểu	Đ	S
C $\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{2+2\sqrt{10}}{9}$.		
D $\dfrac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\dfrac{1}{64}$.		

Câu 8. Số lượng (đơn vị: nghìn con) của một loài bướm ở một khu bảo tồn thiên nhiên được biểu diễn theo hàm số $P(t)=3+2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}t\right)$, $0\leqslant t\leqslant 12$, với t tính theo tuần kể từ khi các nhà khoa học ước tính số lượng.

Phát biểu	Đ	S
A Số lượng bướm ban đầu là 5 nghìn con .		
B Số lượng bướm nhỏ nhất là 3 nghìn con .		
C Số lượng bướm luôn dao động từ 1 nghìn con đến 5 nghìn con .		
D Số lượng bướm lần đầu tiên chạm mức 4 nghìn con khi $t=5$ tuần .		

Câu 9. Cho phương trình $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=m+1 \quad (*)$

Phát biểu	Đ	S
A Điều kiện có nghiệm của phương trình (*) là $-1 \leqslant m \leqslant 1$.		
B Tổng các giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm là -3 .		
C Phương trình $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$ có nghiệm $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.		
D Nghiệm dương bé nhất của phương trình $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$ là $\dfrac{\pi}{3}$.		

Câu 10. Biết $\cos x=-\dfrac{5}{13}$ với $180^\circ<x<270^\circ$, khi đó:

Phát biểu	Đ	S	Phát biểu	Đ	S
A $\tan x=\dfrac{12}{5}$.			**C** $\sin x<0$.		
B $\cot x=\dfrac{5}{12}$.			**D** $\sin x-\cos x=-\dfrac{12}{13}$.		

Câu 11. Cho $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ và $\alpha\in(90^\circ;180^\circ)$.

Phát biểu	Đ	S
A $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$.		
B $\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha=2$.		
C $\dfrac{\sin 3\alpha-\sin\alpha}{2\cos^2\alpha-1}=3\sin\alpha$.		
D Biểu thức $E=\dfrac{\cot\alpha-2\tan\alpha}{\tan\alpha+3\tan(90^\circ-\alpha)}=\dfrac{-a}{b}$, với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a,b\in\mathbb{N}^*$. Khi đó $a+b=55$.		

Câu 12. Cho phương trình $\dfrac{\cos 3x}{1+\sin 3x}=0$. Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Phát biểu	Đ	S
A Điều kiện xác định của phương trình là: $1+\sin 3x\neq 0$.		
B Với điều kiện phương trình có nghĩa: $\dfrac{\cos 3x}{1+\sin 3x}=0 \Leftrightarrow \cos 3x=0$.		
C Phương trình có một nghiệm $x=\dfrac{5\pi}{6}$.		
D Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình có dạng $\dfrac{a\pi}{b}$, $a,b\in\mathbb{N}$; $(a;b)=1$. Khi đó $a^2+2b=12$.		

Câu 13. Biết $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ và $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, khi đó:

Phát biểu	Đ	S
A $\cos x < 0$ và $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.		
B $\sin(\pi - x) = -\sin x$.		
C $\sin 2x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.		
D Giá trị của biểu thức $A = \sin\left(\dfrac{5\pi}{2} - x\right) + \cos(13\pi + x) - 3\tan(x - 5\pi) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.		

Câu 14. Cho hàm số $y = \sin x$.

Phát biểu	Đ	S
A Chu kì tuần hoàn của hàm số là $\mathscr{T} = 2\pi$.		
B Tập nghiệm của phương trình $\sin x = \dfrac{1}{2}$ là $S = \left\{\dfrac{\pi}{4} + k2\pi; \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.		
C Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.		
D Tập giá trị của hàm số là $T = [-2; 2]$.		

Câu 15. Cho hàm số $y = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

Phát biểu	Đ	S
A Tập xác định của hàm số đã cho là $[-1; 1]$.		
B Hàm số đã cho là hàm số lẻ.		
C Hàm số đã cho là hàm tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.		
D Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên $\left[-\dfrac{\pi}{8}; \dfrac{3\pi}{8}\right]$ bằng 1.		

Câu 16. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

Phát biểu	Đ	S
A $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.		
B $\sin 31^\circ \cos 12^\circ + \cos 12^\circ + \sin 31^\circ = \sin 19^\circ$.		
C Cho $\cos x = \dfrac{4}{5}, x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$. Giá trị của $\sin 2x$ là $-\dfrac{24}{25}$.		

D Cho $\dfrac{\sin^4 a}{a}+\dfrac{\cos^4 a}{a}=\dfrac{1}{a+b}$. Giá trị của biểu thức $Q=\dfrac{\sin^8 a}{a^3}+\dfrac{\cos^8 a}{a^3}=\dfrac{1}{a^3+b^3}$.		

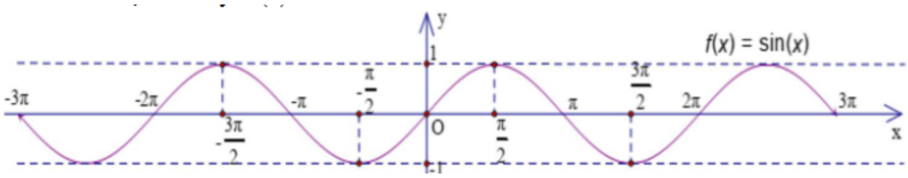
Câu 17. Xét hàm số $f(x)=\tan x$.

Phát biểu	Đ	S
A Đồ thị hàm số $f(x)$ nhận trục tung làm trục đối xứng .		
B Hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kì π .		
C Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$.		
D Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$.		

Câu 18. Mỗi mệnh đề sau đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
A Hàm số $y=x+\cos x$ là hàm số chẵn .		
B Hàm số $y=3\sin x$ có tập giá trị là $T=[-3;3]$.		
C Hàm số $y=\dfrac{\tan x+2}{\sin x}$ có tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.		
D Hàm số $y=-2\cos^2 x+\sin x+1$ có GTNN là $-\dfrac{9}{8}$ và GTLN là 2 .		

Câu 19. Cho đồ thị hàm số $y=\sin x$ như hình vẽ



Phát biểu	Đ	S
A $f\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right)=-1$.		
B Hàm số $y=\sin x$ là hàm số lẻ trên đoạn $[-3\pi;\pi]$.		
C Hàm số $y=\sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$.		
D Trên đoạn $[-3\pi;3\pi]$ phương trình $\sin x=-\dfrac{1}{3}$ có 6 nghiệm phân biệt .		

Câu 20. Cho $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$ với $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Phát biểu	Đ	S	Phát biểu	Đ	S
A $1 - 2\sin^2\alpha = -\dfrac{1}{9}$.			**C** $\sin 2\alpha = -\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$.		
B $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.			**D** $\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{5} - 2\sqrt{3}}{6}$.		

Câu 21. Một người đi xe đạp với vận tốc không đổi, biết rằng bánh xe đạp quay được 12 vòng trong 6 giây, đường kính của bánh xe đạp là 860 (mm).

Phát biểu	Đ	S
A Trong 1 giây bánh xe quay được 2 vòng .		
B Góc mà bánh xe quay được 1 giây là 792° .		
C Trong 60 giây bánh xe quay được số vòng là 120 vòng .		
D Quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút là 103 200 (mm) .		

Câu 22. Xét tính đúng sai các khẳng định sau:

Phát biểu	Đ	S
A Với mọi số thực α thỏa mãn $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Khi đó: $\cos\alpha > 0$.		
B Biết $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Khi đó $\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{5 + 12\sqrt{3}}{26}$.		
C Với mọi số thực α, ta có $\cos\left(\dfrac{9\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$.		
D Cho góc α thỏa mãn $\tan\alpha = \dfrac{1}{3}$. Ta tính được $\cos 2\alpha = \dfrac{4}{5}$.		

Câu 23. Cho biểu thức $P = \dfrac{\sin x + 2\sin 2x + \sin 3x}{\cos x + 1}$.

Phát biểu	Đ	S
A Rút gọn P ta được $P = \sin 2x$.		
B Tại $x = \dfrac{\pi}{4}$ thì $P = 2$.		
C Điều kiện xác định của biểu thức P là $x \neq -\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.		
D Tồn tại 3 giá trị của $x \in [0; 2\pi]$ để $P = 0$.		

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{3}\tan 2x$.

Phát biểu	Đ	S
A Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.		
B Hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn .		
C Phương trình $f(x) = 3$ có nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.		
D Trên đường tròn lượng giác có 4 điểm biểu diễn nghiệm của phương trình $f(x) = 3$.		

Câu 25. Cho $\tan x = \frac{5}{12}$ và $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

Phát biểu	Đ	S
A $\cos x = \frac{12}{13}$.		
B $\cos 2x = \frac{119}{169}$.		
C $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{7}{17}$.		
D Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao 3m. Từ vị trí quan sát A cao 1m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc α. Biết chiều cao của toà nhà là 19m, khoảng cách từ vị trí quan sát A đến toà nhà là 5m. Khi đó $\tan\alpha = \frac{7}{17}$.		

Câu 26. Cho hàm số $f(x) = \cos^2 x - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 3$.

Phát biểu	Đ	S
A Giá trị $f(0) = 4; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.		
B $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.		
C $f(x) = \cos 2x + 3$.		
D Tập giá trị của hàm số đã cho là $T = [2; 4]$.		

Câu 27. Cho các hàm số lượng giác $f(x) = 2\cot x$ và $g(x) = \cos 2x$.

Phát biểu	Đ	S
A Hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $\mathscr{T} = \pi$.		
B Tập xác định của hàm số $g(x)$ là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.		

C Hàm số $g(x)$ có đồ thị đối xứng qua trục Oy .		
D Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.		

Câu 28. Cho hai hàm số $f(x) = \dfrac{3}{2} + 3\cos x$ và $g(x) = \sin x + \cos x$.

Phát biểu	Đ	S
A Hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = \pi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.		
B Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ bằng $\dfrac{9}{2}$.		
C Hàm số $g(x)$ là hàm số lẻ .		
D Có 4 giá trị $x \in [0; 2\pi]$ sao cho $f(x) = 3g(x)$.		

Câu 29. Độ sâu h (m) của mực nước ở một cảng biển vào thời điểm t (giờ) sau khi thuỷ triều lên lần đầu tiên trong ngày được tính xấp xỉ bởi công thức $h(t) = 0,6\cos(0,5\pi t) + 3$.

Phát biểu	Đ	S
A Độ sâu của nước vào thời điểm $t = 2$ là 3 m .		
B Độ sâu lớn nhất của nước là 3,6 m .		
C Chu kì của hàm số $h(t)$ là 4π .		
D Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu 3,3 m đề có thể di chuyển ra vào cảng an toàn thì cần di chuyển trong khoảng thời gian từ 0 giờ đến 2 giờ. .		

Câu 30. Cho phương trình $\sin 2x + \cos 3x = 0$.

Phát biểu	Đ	S
A $x = \dfrac{3\pi}{10}$ là một nghiệm của phương trình .		
B Phương trình tương đương với $\sin 2x = \cos(-3x)$.		
C Phương trình tương đương với $\sin 2x = \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.		
D Tổng các nghiệm của phương trình trong $[-3\pi; 3\pi]$ bằng 0 .		

Câu 31. Cho phương trình lượng giác $\sin\left(5x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Phát biểu	Đ	S

A Phương trình đã cho tương đương với $\sin\left(5x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}-2x\right)$.		
B Nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{\pi}{14}+k\dfrac{2\pi}{7}; x=-\dfrac{\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3}$ $(k\in\mathbb{Z})$.		
C Trên $[0;\pi]$ phương trình có 4 nghiệm.		
D Tổng các nghiệm của phương trình trên $[0;\pi]$ bằng $\dfrac{49\pi}{18}$.		

3 Tự luận

Bài 1. Cho $\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$, $\sin\alpha>0$; $\sin\beta=\dfrac{3}{5}$, $\beta\in\left(\dfrac{9\pi}{2};5\pi\right)$.
Hãy tính: $\cos2\alpha$, $\sin2\alpha$, $\cos2\beta$, $\sin2\beta$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$.

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\dfrac{\sin(45^\circ+\alpha)-\cos(45^\circ+\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ+\alpha)}$

b) $\dfrac{\sin2\alpha+\sin\alpha}{1+\cos2\alpha+\cos\alpha}$

c) $\dfrac{1+\cos\alpha-\sin\alpha}{1-\cos\alpha-\sin\alpha}$

d) $\dfrac{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha}$

Bài 3. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

a) $A=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$

b) $B=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)$

c) $C=\sin^2x+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)$

d) $D=\dfrac{1-\cos2x+\sin2x}{1+\cos2x+\sin2x}\cdot\cot x$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $\sin x\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

b) $\sin x+\sin2x=0$.

c) $\cot3x=\tan\dfrac{2\pi}{7}$.

d) $\tan3x\tan x=1$.

e) $\sin5x+\cos5x=0$.

f) $\cos3x-\cos5x=\sin x$.

g) $2\cos^2x+\cos2x=2$.

h) $\sin^4x+\cos^4x=\dfrac{1}{2}\sin^22x$.

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y=\sin x-\cos x$.

b) $y=\sin x+\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$.

c) $y=\sin^4x+\cos^4x$.

d) $y=\cos2x+2\cos x-1$.

Bài 6. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \cos \dfrac{2x}{x-1}$.

b) $y = \dfrac{1}{\cos x - \cos 3x}$.

c) $y = \dfrac{1}{\cos x + \sin 2x}$.

d) $y = \tan x + \cot x$.

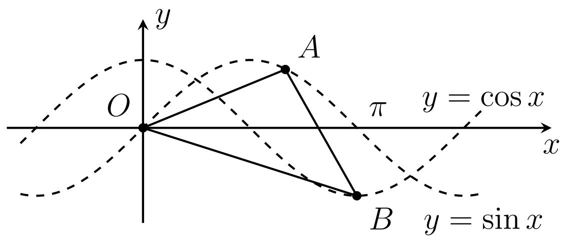
Bài 7. Tìm các giá trị của m để phương trình $(\sin x - 1)(2\cos^2 x - (2m+1)\cos x + m) = 0$ có đúng 4 nghiệm thực thuộc đoạn $[0; 2\pi]$.

Bài 8. Cho phương trình $\cos 3x = 2m^2 - 3m + 1 \quad (*)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm?

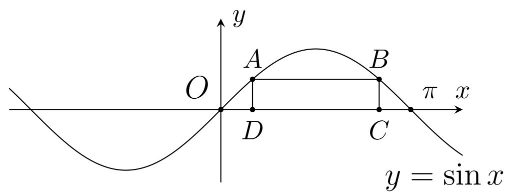
Bài 9. Tổng các nghiệm của phương trình $\sin x - \cos 2x = 0$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ có dạng $-\dfrac{a\pi}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}^+$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b$.

Bài 10. Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều, độ sâu L (tính theo đơn vị mét) của mực nước trong kênh theo thời gian t (giờ) được cho bởi công thức: $L = 3\sin\left(\dfrac{\pi t}{4} + \dfrac{\pi}{3}\right) + 14$. Thời gian ngắn nhất để mực nước của kênh cao nhất là $t = \dfrac{a}{b}$ (giờ) với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $P = ab$.

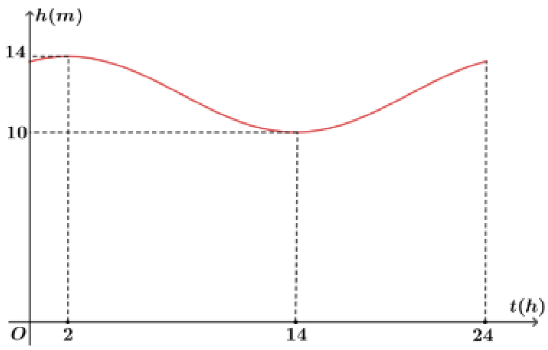
Bài 11. Giả sử A, B là các điểm lần lượt nằm trên các đồ thị hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ sao cho tam giác OAB nhận điểm $G\left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$ làm trọng tâm. Tính diện tích S của tam giác OAB, biết $x_A \in [0; 2\pi]$.



Bài 12. Cho hai điểm A, B thuộc đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; \pi]$, các điểm C, D thuộc trục Ox thỏa mãn $ABCD$ là hình chữ nhật và $CD = \dfrac{2\pi}{3}$. Tính độ dài đoạn BC.



Bài 13. Sự thay đổi chiều cao của mực nước tại một cảng biển trong vòng 24 giờ tính từ lúc nửa đêm được mô tả bằng đồ thị dưới đây.



Biết chiều cao của mực nước h (m) theo thời gian t (h) với $0 \leqslant t \leqslant 24$ được cho bởi công thức $h(t) = a + b\cos\left(\dfrac{\pi}{12}t - \dfrac{\pi}{6}\right)$ với a, b là các số thực dương cho trước. Tìm thời điểm trong ngày khi chiều cao của mực nước là 11 m.

Bài 14. Cho phương trình $\cot x + \sin x\left(1 + \tan x \tan \dfrac{x}{2}\right) = 4$ (*). Gọi S là tổng các nghiệm của phương trình (*) trên đoạn $[0; \pi]$, khi đó $\dfrac{4S}{\pi}$ bằng bao nhiêu?

Bài 15. Cho hai góc α và β thỏa mãn $\sin(\alpha + \beta) = \dfrac{1}{3}$ và $\tan\alpha = 2\tan\beta$. Tính $\sin(\alpha - \beta)$, kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

Bài 16 (THPT Hà Huy Giáp - Cần Thơ). Để dệt nên một tấm vải thổ cẩm truyền thống của người phụ nữ dân tộc Thái phải trải qua nhiều công đoạn. Trong đó có công đoạn quay tơ kéo sợi. Trung bình một người quay được 5 vòng trong 36 giây. Chọn chiều quay của vòng kéo sợi là chiều dương. Biết rằng bán kính của vòng quay là 10 cm và tốc độ quy mỗi vòng bằng nhau. Chiều dài sợi dây mà người đó làm được trong 5 phút là bao nhiêu mét? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài 17. Một cái đồng hồ treo tường có đường kính bằng 60 cm, ta xem vành ngoài chiếc đồng hồ là một đường tròn với các điểm A, B, C lần lượt tương ứng với vị trí các số 2,9,4. Độ dài cung nhỏ AB bằng bao nhiêu centimét (làm tròn đến hàng phần mười).

Bài 18 (THPT Việt Nam - Ba Lan). Tổng các nghiệm của phương trình $\dfrac{\cos 3x}{\sqrt{3}\tan x + 1}$ trên đoạn $[-50\pi; 100\pi]$ là $m\pi$. Giá trị của m bằng bao nhiêu?

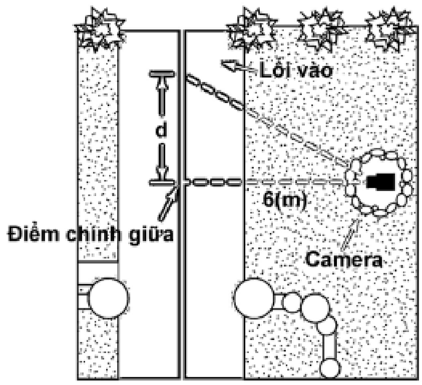
Bài 19 (THPT Việt Nam - Ba Lan). Cho $\sin a + \cos a = \dfrac{1}{3}$ với $-\dfrac{\pi}{2} < a < 0$. Biết $A = \sin a - \cos a = -\dfrac{\sqrt{m}}{n}$ (n là số nguyên tố). Tính $m + n$.

Bài 20 (THPT Việt Nam - Ba Lan). Tính tổng các giá trị của m để phương trình $(2\cos x - 1)(\sin 2x - m) = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc $\left(-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

Bài 21 (THPT Nguyễn Thị Minh Khai). Biết rằng tổng các nghiệm của phương trình lượng giác: $\sin 2x + \cos 2x - \sin x + 3\cos x - 1 = 0$ trên đoạn $[0; 6\pi]$ là $\dfrac{a\pi}{b}$, với $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Hãy tính $a + b$.

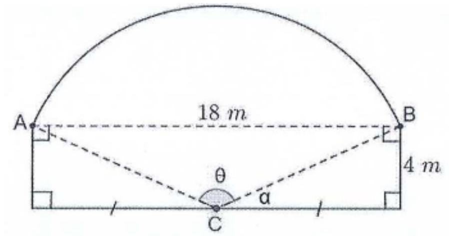
Bài 22. Hai sóng âm có phương trình lần lượt là $f_1(t) = C\sin\omega t$ và $f_2(t) = C\sin(\omega t + \alpha)$. Hai sóng này giao thoa với nhau tạo nên một âm kết hợp có phương trình $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$. Khi $C = 30, \alpha = \dfrac{\pi}{3}$ thì phương trình của sóng âm kết hợp là $f(t) = k\sin(\omega t + \varphi)$, trong đó k là biên độ dao động, φ là pha ban đầu. Biên độ dao động của sóng âm kết hợp có dạng $k = a\sqrt{b}$. Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + b^2$.

Bài 23 (THPT Nguyễn Văn Trỗi - Khánh Hòa). Một camera an ninh giám sát lối vào một tòa nhà. Giả sử vẽ một đường thẳng ở trung tâm của lối vào, camera được đặt bên tay phải và cách đường thẳng 6 (m) như hình vẽ. Tại thời điểm $t = 0$ (s), camera hướng về điểm chính giữa. Gọi d (tính bằng mét) là khoảng cách từ điểm chính giữa đến điểm camera đang quét dọc lối đi ở giây thứ t thì khoảng cách này được mô phỏng bởi công thức $d = 6\tan\left(\dfrac{\pi}{30}t\right)$. Xét $-15 \leqslant t \leqslant 15$ tìm vị trí camera quét sau 5 giây. Điều gì xảy ra khi $t = 15$?

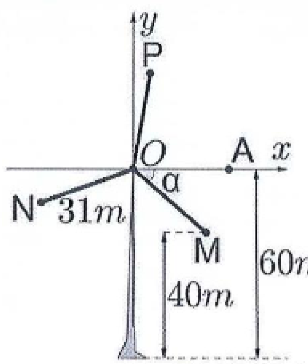


Bài 24 (THPT Dĩ An). Một vận động viên bắn súng nằm trên mặt đất để ngắm bắn các mục tiêu khác nhau trên một bức tường thẳng đứng. Vận động viên bắn trúng một mục tiêu cách mặt đất $14\,\text{m}$ tại một góc ngắm (góc hợp bởi phương bắn và phương ngang). Nếu tăng góc ngắm đó lên hai lần thì vận động viên bắn trúng một mục tiêu cách mặt đất $29\,\text{m}$. Tính khoảng cách từ vận động viên đến bức tường theo đơn vị mét.

Bài 25 (THPT Dĩ An). Một bức tường của một ngôi nhà có dạng như Hình bên, trong đó cung AB là một cung của đường tròn tâm C, bán kính AC. Tính diện tích của bức tường theo đơn vị mét vuông (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Bài 26 (THPT Dĩ An). Trong Hình bên, ba điểm M, N, P nằm ở đầu các cánh quạt của tua bin gió. Biết các cánh quạt dài $31\,\text{m}$, độ cao của điểm M so với mặt đất là $40\,\text{m}$, góc giữa các cánh quạt là $\dfrac{2\pi}{3}$ và số đo góc lượng giác $(\widehat{OA, OM})$ là α. Tính chiều cao của điểm P so với mặt đất (theo đơn vị mét). Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Bài 27. Độ sâu $h(\text{ m})$ của mực nước ở một cảng biển vào thời điểm t (giờ) sau khi thuỷ triều lên lần đầu tiên trong ngày được tính xấp xỉ bởi công thức $h(t) = 0{,}8\cos 0{,}5t + 4$.

a) Độ sâu của nước vào thời điểm $t = 2$ là bao nhiêu mét?

b) Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu 3,6 m để có thể di chuyển ra vào cảng an toàn. Dựa vào đồ thị của hàm số côsin, hãy cho biết trong vòng 12 tiếng sau khi thuỷ triều lên lần đầu tiên, ở những thời điểm t nào tàu có thể hạ thuỷ. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Bài 28. Cho vận tốc v (cm/s) của một con lắc đơn theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức $v = -3\sin\left(1{,}5t + \dfrac{\pi}{3}\right)$.
Xác định các thời điểm t mà tại đó:

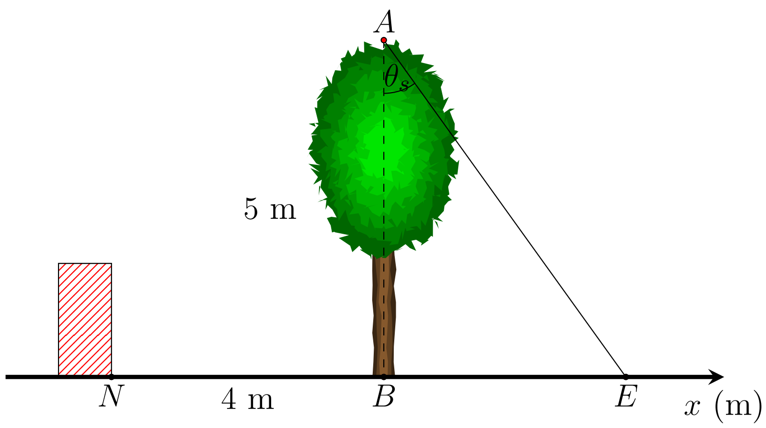
a) Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất;

b) Vận tốc con lắc bằng 1,5 cm/s.

Bài 29. Trong hình vẽ, cây xanh AB nằm trên đường xích đạo được trồng vuông góc với mặt đất và có chiều cao 5 m. Bóng của cây là BE. Vào ngày xuân phân và hạ phân, điểm E di chuyển trên đường thẳng Bx. Góc thiên đỉnh $\theta_s = (AB, AE)$ phụ thuộc vào vị trí của Mặt Trời và thay đổi theo thời gian trong ngày theo công thức

$$\theta_s(t) = \frac{\pi}{12}(t - 12)\,\text{rad}$$

với t là thời gian trong ngày (theo đơn vị giờ, $6 < t < 18$).

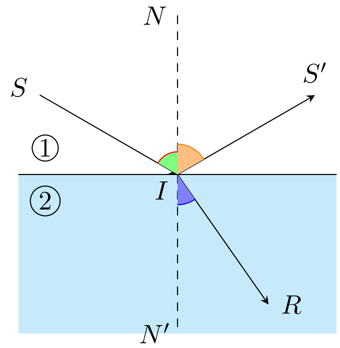


a) Viết hàm số biểu diễn toạ độ của điểm E trên trục Bx theo t.

b) Dựa vào đồ thị hàm số tang, hãy xác định các thời điểm mà tại đó bóng cây phủ qua vị trí tường rào N biết N nằm trên trục Bx với toạ độ là $x_N = -4$ (m). Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Bài 30. Khi một tia sáng truyền từ không khí vào mặt nước thì một phần tia sáng bị phản xạ trên bề mặt, phần còn lại bị khúc xạ như hình bên. Góc tới i liên hệ với góc khúc xạ r bởi Định luật khúc xạ ánh sáng

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}.$$



Ở đây, n_1 và n_2 tương ứng với chiết suất của môi trường 1 (không khí) và môi trường 2 (nước). Cho biết góc tới $i = 50°$, hãy tính góc khúc xạ, biết rằng chiết suất của không khí bằng 1 còn chiết suất của nước là 1,33.

Bài 31. Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu được gọi tương ứng là huyết áp tâm thu và tâm trương. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là huyết áp tâm thu/ huyết áp tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử huyết áp của một người nào đó được mô hình hóa bởi hàm số

$$p(t) = 115 + 25\sin(160\pi t)$$

trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimet thủy ngân) và thời gian t tính theo phút.

a) Tìm chu kì của hàm số $p(t)$.

b) Tìm số nhịp tim mỗi phút.

c) Tìm số chỉ huyết áp. So sánh huyết áp của người này với huyết áp bình thường.

Bài 32. Giả sử số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí trong một tháng tại một thành phố công nghiệp được xác định bởi công thức

$$P(t) = 38 + 12\sin\left[\frac{2\pi}{7}\left(t - \frac{37}{12}\right)\right],$$

trong đó t là số ngày kể từ ngày thứ Bảy của tuần đầu tiên.

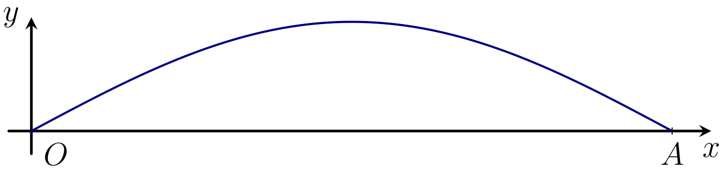
a) Tính số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí vào các ngày thứ Hai và thứ Năm của tuần thứ hai.

b) Ngày nào trong tháng mà số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí bằng 50 mg?

Bài 33. Hằng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thuỷ triều. Độ sâu h (m) của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày ($0 \leq t < 24$) cho bởi công thức $h = 3\cos\left(\dfrac{\pi t}{6} + 1\right) + 12$ (*Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2021*). Tìm t để độ sâu của mực nước là:

a) 15 m; b) 9 m; c) 10,5 m.

Bài 34. Một cây cầu có dạng cung OA của đồ thị hàm số $y = 4{,}8 \cdot \sin\dfrac{x}{9}$ và được mô tả trong hệ trục toạ độ với đơn vị trục là mét như ở hình bên.



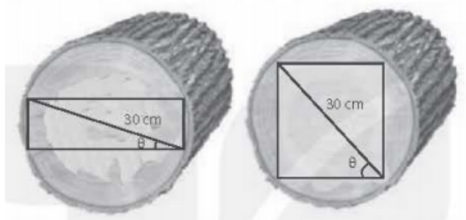
a) Giả sử chiều rộng của con sông là độ dài đoạn thẳng OA. Tìm chiều rộng đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

b) Một sà lan chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao 3,6 m so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn 13,1 m.

c) Một sà lan khác cũng chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với chiều rộng của khối hàng hoá đó là 9 m sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều cao của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn 4,3 m.

Bài 35. Một thanh xà gỗ hình hộp chữ nhật được cắt ra từ một khối gỗ hình trụ có đường kính 30 cm.

a) Chứng minh rằng diện tích mặt cắt của thanh xà gỗ được tính bởi công thức: $S(\theta) = 450\sin 2\theta$ (cm^2), trong đó góc θ được chỉ ra trong hình vẽ.



b) Tìm góc θ để diện tích mặt cắt của thanh xà gỗ là lớn nhất.

Bài 36. Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu gọi là huyết áp tâm thu và tâm trương, tương ứng. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là tâm thu/tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường.

Giả sử một người nào đó có nhịp tim là 70 lần trên phút và huyết áp của người đó được mô hình hoá bởi hàm số

$$P(t) = 100 + 20\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)$$

trong đó $P(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo giây.

a) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 100 mmHg.

b) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 120 mmHg.

Chương 2

DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG. CẤP SỐ NHÂN

Mục lục của chương

Bài 1. Dãy số 110
Bài 2. Cấp số cộng 125
Bài 3. Cấp số nhân 139
Bài 4. Ôn tập chương 2 152

Chuyên đề 1 DÃY SỐ

I. DÃY SỐ LÀ GÌ?

1) Khái niệm dãy số

Hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (hay gọi tắt là dãy số), nghĩa là

$$u : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u_n = u(n).$$

Dãy số trên được kí hiệu là (u_n).

Dạng khai triển của dãy số (u_n) là: $u_1; u_2; \ldots; u_n; \ldots$

LƯU Ý.

a) $u_1 = u(1)$ gọi là số hạng đầu, $u_n = u(n)$ gọi là số hạng thứ $\boldsymbol{n}$ (hay số hạng tổng quát) của dãy số.

b) Nếu $u_n = C$ với mọi n, ta nói (u_n) là dãy số không đổi.

2) Dãy số hữu hạn

Hàm số u xác định trên tập hợp $M = \{1; 2; 3; \ldots; m\}$ thì được gọi là một dãy số hữu hạn. Dạng khai triển của dãy số này là $u_1, u_2, \ldots, u_m$, trong đó u_1 là số hạng đầu và u_m là số hạng cuối.

Ví dụ 1 ★☆☆☆☆

Cho dãy số

$$v : \{1; 2; 3; 4; 5\} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto v(n) = 2n.$$

Hãy tính $v(1), v(2), v(3), v(4), v(5)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $v(1) = 2.1 = 2; v(2) = 2.2 = 4; v(3) = 2.3 = 6;$ $v(4) = 2.4 = 8; v(5) = 2.5 = 10.$

Ví dụ 2

Cho dãy số

$$u : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u_n = n^3.$$

a) Hãy cho biết dãy số trên là hữu hạn hay vô hạn.

b) Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho.

Hướng dẫn giải.

a) Dãy số trên là dãy số vô hạn.

b) Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là: $u_1 = 1^3 = 1, u_2 = 2^3 = 8,$ $u_3 = 3^3 = 27, u_4 = 4^3 = 64, u_5 = 5^3 = 125.$

Ví dụ 3

Cho 5 hình tròn theo thứ tự có bán kính 1; 2; 3; 4; 5.

a) Viết dãy số chỉ diện tích của 5 hình tròn này.

b) Tìm số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số trên.

Hướng dẫn giải.

a) Dãy số chỉ diện tích của 5 hình tròn này là:

$$v : \{1; 2; 3; 4; 5\} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto v(n) = \pi n^2.$$

b) Số hạng đầu của dãy số là: $v(1) = \pi.1^2 = \pi$.

Số hạng cuối của dãy số là: $v(5) = \pi.5^2 = 25\pi$.

1 Cho (p_n) là dãy số, trong đó p_n là số nguyên tố thứ n. Xác định p_2, p_5 và p_9.

2

a) Xét dãy số gồm tất cả các số tự nhiên chia cho 5 dư 1 theo thứ tự tăng dần. Xác định số hạng tổng quát của dãy số.

b) Viết dãy số hữu hạn gồm năm số hạng đầu của dãy số trong câu a. Xác định số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số hữu hạn này.

II. CÁCH XÁC ĐỊNH DÃY SỐ

Thông thường một dãy số có thể được cho bằng các cách sau:

- **Cách 1:** Liệt kê các số hạng (với các dãy số hữu hạn).
- **Cách 2:** Cho công thức của số hạng tổng quát u_n.
- **Cách 3:** Cho hệ thức truy hồi, nghĩa là
  - Cho số hạng thứ nhất u_1 (hoặc một vài số hạng đầu tiên);
  - Cho một công thức tính u_n theo u_{n-1} (hoặc theo vài số hạng đứng ngay trước nó).
- **Cách 4:** Cho bằng cách mô tả.

Ví dụ 4 ★☆☆☆☆

Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3n^2 - 1$.

a) Hãy viết bảy số hạng đầu của dãy số.

b) Số 2 699 có là một số hạng của dãy số (u_n) hay không?

Hướng dẫn giải.

a) Bảy số hạng đầu của dãy số là $u_1 = 3 \cdot 1^2 - 1 = 2$, $u_2 = 3 \cdot 2^2 - 1 = 11$, $u_3 = 26$, $u_4 = 47$, $u_5 = 74$, $u_6 = 107$ và $u_7 = 146$.

b) Nếu 2 699 là số hạng thứ n của dãy số thì số nguyên dương n thoả mãn $2\,699 = 3n^2 - 1$.

Giải phương trình này, ta được $n = 30$. Vậy 2 699 là số hạng thứ 30 của dãy số.

Ví dụ 5 ★☆☆☆☆

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n \quad (n \geqslant 1) \end{cases}$

a) Tính u_2, u_3, u_4.

b) Dự đoán công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

Hướng dẫn giải.

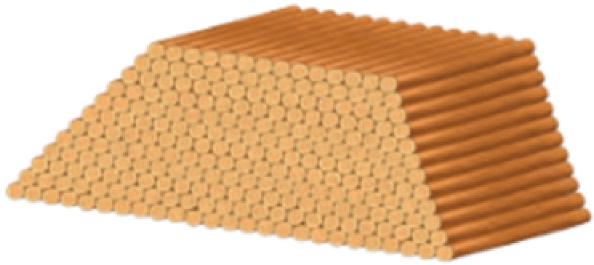
a) Ta có $u_2 = 2u_1 = 2.3 = 6; u_3 = 2u_2 = 2.6 = 12; u_4 = 2.12 = 24$.

b) Ta có $u_2 = 2^1.3 = 6; u_3 = 2^2.3 = 12; u_4 = 2^3.3 = 24$.

Dự đoán $u_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

Ví dụ 6 ★☆☆☆☆

Một chồng cột gỗ được xếp thành các lớp, hai lớp liên tiếp hơn kém nhau 1 cột gỗ (Hình vẽ). Gọi u_n là số cột gỗ nằm ở lớp thứ n tính từ trên xuống và cho biết lớp trên cùng có 14 cột gỗ. Hãy xác định dãy số (u_n) bằng hai cách:



a) Viết công thức số hạng tổng quát u_n.

b) Viết hệ thức truy hồi.

Hướng dẫn giải.

a) Ta có: $u_1 = 14$ khi đó:

$$u_2 = 14 + 1 = 15; u_3 = 15 + 1 = 14 + 2.1; u_4 = 14 + 3.1$$

Khi đó công thức tổng quát của dãy số (u_n) là $u_n = 14 + (n-1).1 = 14n - 14$.

b) Hệ thức truy hồi $\begin{cases} u_1 = 14 \\ u_{n-1} = u_n + 1 \quad (n \geqslant 2) \end{cases}$.

Ví dụ 7 ★☆☆☆☆

Bác Hưng để 10 triệu đồng trong tài khoản ngân hàng. Vào cuối mỗi năm, ngân hàng trả lãi 3% vào tài khoản của bác ấy, nhưng sau đó sẽ tính phí duy trì tài khoản hằng năm là 120 nghìn đồng.

a) Gọi A_0 là số tiền bác Hưng đã gửi. Viết công thức tính lần lượt A_1, A_2, A_3. Từ đó dự đoán hệ thức truy hồi cho số dư A_n (tính theo đơn vị đồng) trong tài khoản của bác Hưng vào cuối năm thứ n.

b) Tìm số dư trong tài khoản của bác Hưng sau 4 năm.

Hướng dẫn giải.

a) Vào cuối năm thứ nhất, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_1 = A_0(1 + 3\%) - 120\,000 = 1{,}03A_0 - 120\,000 \text{ (đồng)}.$$

Vào cuối năm thứ hai, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_2 = A_1(1 + 3\%) - 120\,000 = 1{,}03A_1 - 120\,000 \text{ (đồng)}.$$

Vào cuối năm thứ ba, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_3 = A_2(1+3\%) - 120\,000 = 1{,}03A_2 - 120\,000 \text{ (đồng)}.$$

Tương tự, vào cuối năm thứ n ($n \geqslant 1$), số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_n = 1{,}03A_{n-1} - 120\,000 \text{ (đồng)}.$$

b) Ta tính lần lượt A_1, A_2, A_3, A_4 với $A_0 = 10\ 000\ 000$:

$$A_1 = 10\,180\,000;\ A_2 = 10\,365\,400;$$

$$A_3 = 10\,556\,362;\ A_4 = 10\,753\,053.$$

Như vậy, số dư trong tài khoản của bác Hưng sau 4 năm là $10\,753\,053$ đồng.

3

a) Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n^2+3n+7}{n+1}$. Viết 5 số hạng đầu tiên của dãy số.

b) Viết năm số hạng đầu của dãy số Fibonacci (F_n) cho bởi hệ thức truy hồi

$$\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geqslant 3) \end{cases}.$$

4 Cho dãy số (u_n) có năm số hạng đầu tiên lần lượt là $-1; 1; -1; 1; -1$. Hãy dự đoán công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

5 Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo hình thức lãi kép như sau: Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là $0,5\%$ một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

a) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng, sau 3 tháng.

b) Dự đoán công thức của P_n.

III. DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM

Cho dãy số (u_n).

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 8 ★☆☆☆☆

Xét tính tăng, giảm của các dãy số sau:

a) (u_n) với $u_n = 3n - 2$.

b) (v_n) với $v_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$.

c) (x_n) với $x_n = \dfrac{n+2}{4^n}$.

d) (t_n) với $t_n = (-1)^n \cdot n^2$.

Hướng dẫn giải.

a) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $u_{n+1} = 3(n+1) - 2 = 3n + 1$.

Xét: $u_{n+1} - u_n = (3n+1) - (3n-2) = 3 > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) là một dãy số tăng.

b) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $v_{n+1} = \dfrac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} = \dfrac{2n+1}{n+2}$. Xét hiệu:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2n+1}{n+2} - \frac{2n-1}{n+1} = \frac{2n^2+3n+1-2n^2+3n-2}{(n+2)(n+1)} = \frac{3}{(n+2)(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra $v_{n+1} > v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy dãy số (v_n) là dãy số tăng.

c) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $x_{n+1} = \dfrac{(n+1)+2}{4^{n+1}} = \dfrac{n+3}{4 \cdot 4^n}$. Xét hiệu:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{n+3}{4\cdot 4^n} - \frac{n+2}{4^n} = \frac{n+3-4(n+2)}{4\cdot 4^n} \\ &= \frac{n+3-4n-8}{4\cdot 4^n} = \frac{-3n-5}{4\cdot 4^n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Suy ra $x_{n+1} < x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy dãy số (x_n) là dãy số giảm.

d) Ta có $t_1 = (-1)^1.1^2 = -1; t_2 = (-1)^2.2^2 = 4; t_3 = (-1)^3.3^2 = -9$.

Suy ra $t_1 < t_2; t_2 > t_3$. Vậy (t_n) là dãy số không tăng, không giảm.

6 Xét tính tăng, giảm của mỗi dãy số (u_n) biết:

a) $u_n = \dfrac{n-3}{n+2}$.

b) $u_n = \dfrac{3^n}{2^n \cdot n!}$.

c) $u_n = (-1)^n \cdot (2^n + 1)$.

IV. DÃY SỐ BỊ CHẶN

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, nghĩa là tồn tại các số M và m sao cho $m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 9

Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a) (a_n) với $a_n = \cos\dfrac{\pi}{n}$.

b) (b_n) với $b_n = \dfrac{n}{n+1}$.

c) (c_n) với $c_n = \dfrac{1}{n^2+n}$.

d) (d_n) với $d_n = 2n - 1$.

Hướng dẫn giải.

a) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $-1 \leqslant \cos\dfrac{\pi}{n} \leqslant 1$. Do đó (a_n) là dãy số bị chặn.

b) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow b_n < 1 \quad (1)$$

Vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên $b_n = \dfrac{n}{n+1} > 0 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra (b_n) là dãy số bị chặn.

c) Vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên $c_n = \dfrac{1}{n^2+n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra (c_n) bị chặn dưới.

Mặt khác, do $n^2 + n \geqslant 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $c_n \leqslant \dfrac{1}{2}$. Suy ra (c_n) bị chặn trên.

Do đó (c_n) bị chặn.

d) Ta có: $d_n = 2n - 1 \geqslant -1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó, dãy số (d_n) bị chặn dưới.

Dãy số (d_n) không bị chặn trên vì không có số M nào thỏa mãn:

$$d_n = 2n - 1 \leqslant M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số (d_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên nên không bị chặn.

7) Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2+4}$ là bị chặn.

8) Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1-n}{n+1}$.

9) Anh Thanh vừa được tuyển dụng vào một công ty công nghệ, được cam kết lương năm đầu sẽ là 200 triệu đồng và lương mỗi năm tiếp theo sẽ được tăng thêm 25 triệu đồng. Gọi s_n (triệu đồng) là lương vào năm thứ n mà anh Thanh làm việc cho công ty đó. Khi đó ta có:

$$s_1 = 200, s_n = s_{n-1} + 25 \quad \text{với } n \geqslant 2.$$

a) Tính lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty.

b) Chứng minh (s_n) là dãy số tăng. Giải thích ý nghĩa thực tế của kết quả này.

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm

Câu 1. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = -\frac{n}{n+1}$. Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho lần lượt là số nào dưới đây?

Ⓐ $-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; -\frac{5}{6}$. Ⓑ $-\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; -\frac{4}{5}; -\frac{5}{6}; -\frac{6}{7}$.

Ⓒ $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{5}{6}$. Ⓓ $\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}$.

Câu 2. Cho dãy số (u_n) biết $u_1 = 2$ và $u_n = \frac{u_{n-1}+1}{2}$ với mọi $n \geqslant 2$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số lần lượt là:

Ⓐ $2; 1; \frac{3}{2}$. Ⓑ $2; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}$. Ⓒ $2; \frac{3}{2}; \frac{5}{4}$. Ⓓ $2; \frac{3}{2}; 2$.

Câu 3. Cho dãy số (u_n), biết $\begin{cases} u_n = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy là

Ⓐ $-1; 2; 5$. Ⓑ $1; 4; 7$. Ⓒ $4; 7; 10$. Ⓓ $-1; 3; 7$.

Câu 4. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{2n^2-1}{n^2+2}$. Số hạng u_{10} là

Ⓐ $\frac{19}{12}$. Ⓑ $\frac{33}{34}$. Ⓒ $\frac{199}{102}$. Ⓓ $\frac{3}{4}$.

Câu 5. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{(-1)^n \cdot 2n}{n}$. Tìm số hạng u_3.

Ⓐ $-\frac{8}{3}$. Ⓑ $\frac{8}{3}$. Ⓒ 2. Ⓓ -2.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{n+1}{2n+1}$. Số $\frac{8}{15}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

Ⓐ 8. Ⓑ 6. Ⓒ 5. Ⓓ 7.

Câu 7. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{n+1}{3n-2}$. Số $\frac{8}{19}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

Ⓐ 8. Ⓑ 6. Ⓒ 9. Ⓓ 7.

Câu 8. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = 2^n$. Tìm số hạng u_{n+1}.

Ⓐ $u_{n+1} = 2^n \cdot 2$. Ⓑ $u_{n+1} = 2^n + 1$.

Ⓒ $u_{n+1} = 2(n+1)$. Ⓓ $u_{n+1} = 2^n + 2$.

Câu 9. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^n \cdot 2n$. Mệnh đề nào đúng?

Ⓐ $u_1 = -2$. Ⓑ $u_2 = 4$. Ⓒ $u_3 = -6$. Ⓓ $u_4 = -8$.

Câu 10. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = 3^n$. Tìm số hạng u_{2n-1}.

Ⓐ $u_{2n-1} = 3^2 \cdot 3^n - 1$.
Ⓑ $u_{2n-1} = 3^n \cdot 3^n - 1$.
Ⓒ $u_{2n-1} = 3^{2n-1}$.
Ⓓ $u_{2n-1} = 3^{2(n-1)}$.

Câu 11. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = 5^n$. Tìm số hạng u_{n-1}.

Ⓐ $u_{n-1} = 5^{n-1}$.
Ⓑ $u_{n-1} = 5^n$.
Ⓒ $u_{n-1} = 5 \cdot 5^{n+1}$.
Ⓓ $u_{n-1} = 5 \cdot 5^{n-1}$.

Câu 12. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}$. Tìm số hạng u_{n+1}.

Ⓐ $u_{n+1} = \left(\dfrac{n+1}{n+1}\right)^{2(n+1)+3}$.
Ⓑ $u_{n+1} = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2(n-1)+3}$.
Ⓒ $u_{n+1} = \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{2n+3}$.
Ⓓ $u_{n+1} = \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$.

Câu 13. Dãy số có các số hạng cho bởi: $0; \dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{4}{5}; \ldots$ có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

Ⓐ $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.
Ⓑ $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.
Ⓒ $u_n = \dfrac{n-1}{n}$.
Ⓓ $u_n = \dfrac{n^2-n}{n+1}$.

Câu 14. Dãy số có các số hạng đầu là: $-1; 1; -1; 1; -1; \ldots$ có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

Ⓐ $u_n = 1$.
Ⓑ $u_n = -1$.
Ⓒ $u_n = (-1)^n$.
Ⓓ $u_n = (-1)^{n+1}$.

Câu 15. Cho dãy số (u_n), biết $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

Ⓐ $u_n = n^{n-1}$.
Ⓑ $u_n = 2^n$.
Ⓒ $u_n = 2^{n+1}$.
Ⓓ $u_n = 2$.

Câu 16. Cho dãy số (u_n), biết $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

Ⓐ $u_n = \dfrac{1}{2} + 2(n-1)$.
Ⓑ $u_n = \dfrac{1}{2} - 2(n-1)$.
Ⓒ $u_n = \dfrac{1}{2} - 2n$.
Ⓓ $u_n = \dfrac{1}{2} + 2n$.

Câu 17. Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n = 2n - 1 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

Ⓐ $u_n = 2 + (n-1)^2$.
Ⓑ $u_n = 2 + n^2$.
Ⓒ $u_n = 2 + (n+1)^2$.
Ⓓ $u_n = 2 - (n-1)^2$.

Câu 18. Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

Ⓐ $u_n = 1 + \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Ⓑ $u_n = 1 + \dfrac{n(n-1)(2n+2)}{6}$.
Ⓒ $u_n = 1 + \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$.
Ⓓ $u_n = 1 + \dfrac{n(n+1)(2n-2)}{6}$.

Câu 19. Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

Ⓐ $u_n = \dfrac{-n+1}{n}$.
Ⓑ $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.
Ⓒ $u_n = \dfrac{-n+1}{n}$.
Ⓓ $u_n = \dfrac{-n}{n+1}$.

Câu 20. Cho dãy số (a_n) được xác định $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n, n \geqslant 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

Ⓐ $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \dfrac{93}{16}$.
Ⓑ $a_{10} = \dfrac{3}{512}$.
Ⓒ $a_{n+1} + a_n = \dfrac{9}{2^n}$.
Ⓓ $a_n = \dfrac{3}{2^{n-1}}$.

Câu 21. Cho các dãy số sau. Dãy số nào là dãy số tăng?

Ⓐ 1;1;1;1;1;1;....
Ⓑ $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$
Ⓒ 1;3;5;7;9;....
Ⓓ $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; 1; \frac{1}{16}; \dots$

Câu 22. Dãy số nào là dãy số tăng?

Ⓐ $u_n = \dfrac{1}{2^n}$.
Ⓑ $u_n = \dfrac{1}{n}$.
Ⓒ $u_n = \dfrac{n+5}{3n+1}$.
Ⓓ $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$.

Câu 23. Dãy số nào là dãy số tăng?

Ⓐ $u_n = \dfrac{2}{3^n}$.
Ⓑ $u_n = \dfrac{3}{n}$.
Ⓒ $u_n = 2^n$.
Ⓓ $u_n = (-2)^n$.

Câu 24. Dãy số nào là dãy số giảm?

Ⓐ $u_n = \dfrac{1}{2^n}$.
Ⓑ $u_n = \dfrac{3n-1}{n+1}$.
Ⓒ $u_n = n^2$.
Ⓓ $u_n = \sqrt{n+2}$.

Câu 25. Dãy số nào là dãy số giảm?

Ⓐ $u_n = \sin x$.
Ⓑ $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$.
Ⓒ $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.
Ⓓ $u_n = (-1)^n \cdot (2^n + 1)$.

Câu 26. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ Dãy số $u_n = \dfrac{1}{n} - 2$ là dãy tăng.
Ⓑ Dãy số $u_n = (-1)^n(2^n + 1)$ là dãy giảm.
Ⓒ Dãy số $u_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ là dãy giảm.
Ⓓ Dãy số $u_n = 2n + \cos\dfrac{1}{n}$ là dãy tăng.

Câu 27. Trong các dãy số (u_n) xác định như sau, dãy số giảm là?

Ⓐ $u_n = \dfrac{3n-1}{n+1}$.
Ⓑ $u_n = n^3$.
Ⓒ $u_n = \dfrac{1}{3^{n+1}}$.
Ⓓ $u_n = \sqrt{n}$.

Câu 28. Trong các dãy số sau, dãy số nào bị chặn?

Ⓐ $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$.
Ⓑ $u_n = 2n + \sin n$.
Ⓒ $u_n = n^2$.
Ⓓ $u_n = n^3 - 1$.

Câu 29. Trong các dãy số sau, dãy số nào bị chặn?

Ⓐ $u_n = \sqrt{n^2+1}$.
Ⓑ $u_n = 2^n + 1$.
Ⓒ $u_n = n + \dfrac{1}{n}$.
Ⓓ $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Câu 30. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \cos n$. Dãy số (u_n) là:

Ⓐ Dãy số tăng .
Ⓑ Dãy số giảm .
Ⓒ Dãy số bị chặn .
Ⓓ Dãy số bị chặn dưới, không bị chặn trên .

2 Tự luận

Bài 1. Viết bốn số hạng đầu của dãy số (u_n) cho bởi $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 3 \\ u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} \quad (n \geqslant 3) \end{cases}$.

Bài 2. Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) cho bởi công thức tổng quát:

a) $u_n = \dfrac{n\sqrt{n}}{n+1}$.

b) $u_n = 3 \cdot 2^n$.

c) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Bài 3. Dự đoán công thức tổng quát của (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$.

Bài 4. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n+1}{2n-1}$. Số $\dfrac{8}{15}$ là số hạng bao nhiêu của dãy số?

Bài 5. Tìm u_2, u_3 và dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n của dãy số:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \quad (n \geq 1). \end{cases}$$

Bài 6. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$. Tìm u_1, u_2, u_3 và dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n.

Bài 7. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 2$ và $u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}^2}$ với mọi $n \geqslant 2$. Viết năm số hạng đầu của dãy và dự đoán công thức tổng quát của (u_n).

Bài 8. Viết số hạng tổng quát của dãy số số tăng gồm tất cả các số nguyên dương mà mỗi số hạng của nó:

a) Đều chia hết cho 3;

b) Khi chia cho 4 dư 1.

Bài 9. $\sqrt{5}$ là số thập phân vô hạn không tuần hoàn. Một dãy số (u_n) được xác định như sau: "u_n là số gần đúng của $\sqrt{5}$ bằng cách giữ lại phần nguyên và $2n$ chữ số thập phân sau dấu phẩy ". Hãy viết ba số hạng đầu tiên của dãy số (u_n).

Bài 10. Xét tính tăng, giảm của mỗi dãy (u_n) biết:

a) $u_n = \dfrac{n-3}{n+2}$.

c) $u_n = (-1)^n \cdot (2^n + 1)$.

e) $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n^2}$.

b) $u_n = \dfrac{3^n}{2^n \cdot n!}$.

d) $u_n = n - \sqrt{n^2 - 1}$.

f) $u_n = \dfrac{3^n - 1}{2^n}$.

Bài 11. Xét tính tăng, giảm của dãy số (y_n) với $y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Bài 12. Cho dãy số thực dương (u_n). Chứng minh rằng dãy số (u_n) là dãy số tăng khi và chỉ khi $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 13. Xét tính bị chặn của các dãy số sau

a) (a_n) với $a_n = \sin^2 \dfrac{n\pi}{3} + \cos \dfrac{n\pi}{4}$;

c) (s_n) với $s_n = \sin n + \cos n$.

b) (u_n) với $u_n = \dfrac{6n-4}{n+2}$.

d) (r_n) với $r_n = (-1)^n$.

Bài 14. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$. Chứng minh (u_n) là dãy số tăng và bị chặn.

Bài 15. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{na+2}{n+1}$. Tìm giá trị của a để

a) (u_n) là dãy số tăng;

b) (u_n) là dãy số giảm.

Bài 16. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát sau:

a) $u_n = \dfrac{2n-13}{3n-2}$.

b) $u_n = \dfrac{n^2+3n+1}{n+1}$.

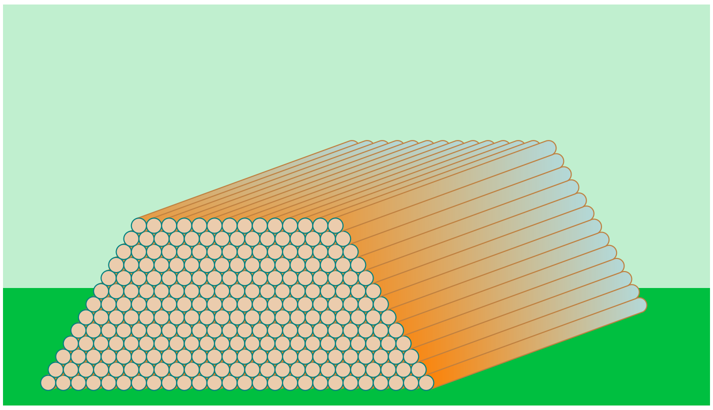
c) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+n+n^2}}$.

d) $u_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$.

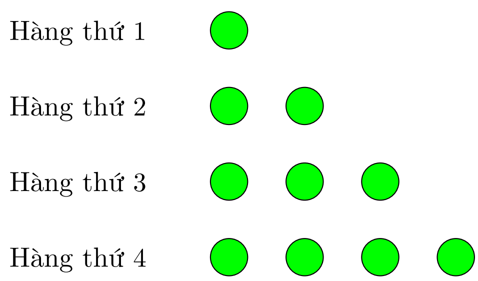
Bài 17. Một chồng cột gỗ được xếp thành các lớp, hai lớp liên tiếp hơn kém nhau 1 cột gỗ.

a) Gọi $u_1 = 25$ là số cột gỗ có ở hàng dưới cùng của chồng cột gỗ, u_n là số cột gỗ có ở hàng thứ n tính từ dưới lên trên. Xét tính tăng, giảm của dãy số này.

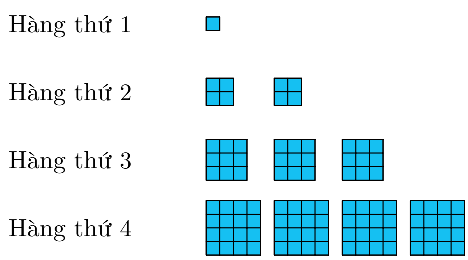
b) Gọi $v_1 = 14$ là số cột gỗ có ở hàng trên cùng của chồng cột gỗ, v_n là số cột gỗ có ở hàng thứ n tính từ trên xuống dưới. Xét tính tăng, giảm của dãy số này.



Bài 18. Gọi u_n là số hình tròn ở hàng thứ n trong hình bên. Dự đoán công thức của số hạng tổng quát cho dãy số (u_n).



Bài 19. Gọi v_n là tổng diện tích của các hình tô màu ở hàng thứ n trong hình bên (mỗi ô vuông nhỏ là một đơn vị diện tích). Dự đoán công thức của số hạng tổng quát cho dãy số (v_n).



Bài 20. Người ta nuôi cấy 5 con vi khuẩn Ecoli trong môi trường nhân tạo. Cứ 30 phút thì vi khuẩn ecoli sẽ nhân đôi 1 lần.

a) Tính số lượng vi khuẩn thu được sau $1, 2, 3$ lần nhân đôi.

b) Dự đoán công thức tính số lượng vi khuẩn sau n giờ.

Bài 21. Ông An gửi tiết kiệm 100 triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6% một năm theo hình thức tính lãi kép. Số tiền (triệu đồng) của ông An thu được sau n tháng được cho bởi công thức

$$A_n = 100\left(1 + \frac{0{,}06}{12}\right)^n.$$

a) Tìm số tiền ông An nhận được sau tháng thứ nhất, sau tháng thứ hai.

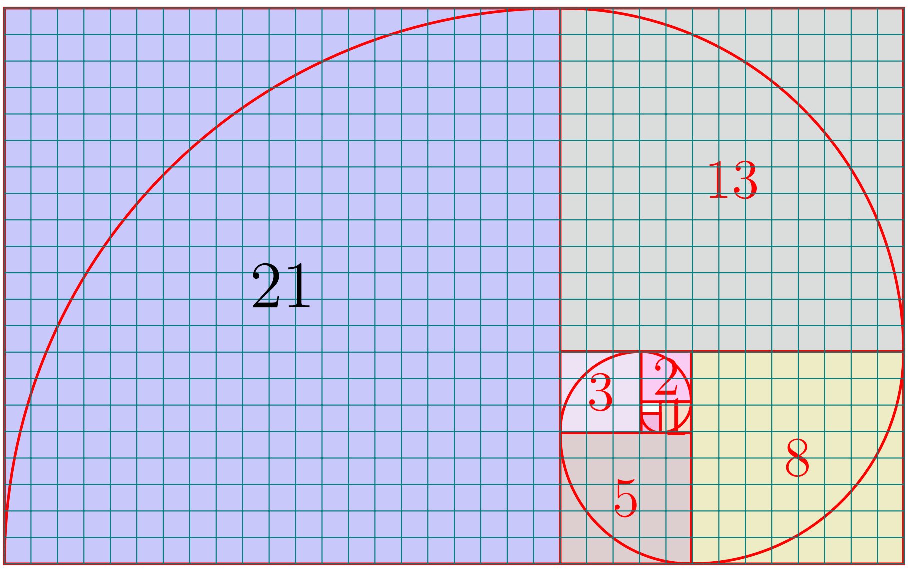
b) Tìm số tiền ông An nhận được sau 1 năm.

Bài 22. Chị Hương vay trả góp một khoản tiền 100 triệu đồng và đồng ý trả dần 2 triệu đồng mỗi tháng với lãi suất $0,8\%$ số tiền còn lại của mỗi tháng. Gọi A_n, $(n \in \mathbb{N})$ là số tiền còn nợ (triệu đồng) của chị Hương sau n tháng.

a) Tìm A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 để tính số tiền còn nợ của chị Hương sau 6 tháng.

b) Dự đoán hệ thức truy hồi đối với dãy số (A_n).

Bài 23. Trên lưới ô vuông, mỗi ô cạnh 1 đơn vị, người ta vẽ 8 hình vuông và tô màu khác nhau như Hình vẽ . Tìm dãy số biểu diễn độ dài cạnh của 8 hình vuông đó từ nhỏ đến lớn. Có nhận xét gì về dãy số trên?



Bài 24. Giá của một chiếc máy photocopy lúc mới mua là 50 triệu đồng. Biết rằng giá trị của nó sau mỗi năm sử dụng chỉ còn 75% giá trị trong năm liền trước đó. Tính giá trị còn lại của chiếc máy photocopy đó sau mỗi năm, trong khoảng thời gian 5 năm kể từ khi mua.

Bài 25. Nếu tỉ lệ lạm phát là 3,5% mỗi năm và giá trung bình của một căn hộ chung cư mới tại thời điểm hiện tại là 2,5 tỉ đồng thì giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau n năm nữa được cho bởi công thức

$$A_n = 2{,}5 \cdot (1{,}035)^n \quad \text{(tỉ đồng)}.$$

Tìm giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau 5 năm nữa.

Bài 26. Bác An gửi tiết kiệm có kì hạn 3 tháng, với lãi suất 3% mỗi năm. Số tiền (triệu đồng) cả vốn lẫn lãi mà bác An nhận được sau n quý (mỗi quý là 3 tháng) sẽ là

$$A_n = 200\left(1 + \frac{0{,}03}{4}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Viết ba số hạng đầu của dãy số.

b) Tìm số tiền bác An nhận được sau 2 năm.

Bài 27. Vi khuẩn *E. Coli* sinh sản thông qua một quá trình gọi là quá trình phân đôi. Vi khuẩn *E. Coli* phân chia làm đôi cứ sau 20 phút. Giả sử tốc độ phân chia này được duy trì trong 12 giờ kể từ khi vi khuẩn ban đầu xâm nhập vào cơ thể. Hỏi sau 12 giờ sẽ có bao nhiêu vi khuẩn *E. Coli* trong cơ thể?

Giả sử có một nguồn dinh dưỡng vô hạn để vi khuẩn *E. Coli* duy trì tốc độ phân chia như cũ trong 48 giờ kể từ khi vi khuẩn ban đầu xâm nhập vào cơ thể. Hỏi sau 48 giờ sẽ có bao nhiêu vi khuẩn *E. Coli* trong cơ thể?

Bài 28. Một công ty dược phẩm đang thử nghiệm một loại thuốc mới. Một thí nghiệm bắt đầu với $1{,}0 \times 10^9$ vi khuẩn. Một liều thuốc được sử dụng sau mỗi bốn giờ có thể tiêu diệt $4{,}0 \times 10^8$ vi khuẩn. Giữa các liều thuốc, số lượng vi khuẩn tăng lên 25%.

a) Viết hệ thức truy hồi cho số lượng vi khuẩn sống trước mỗi lần sử dụng thuốc.

b) Tìm số vi khuẩn còn sống trước lần sử dụng thuốc thứ năm.

Chuyên đề 2 CẤP SỐ CỘNG

I. CẤP SỐ CỘNG

Cấp số cộng là một dãy số (vô hạn hoặc hữu hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số d không đổi, nghĩa là:

$$u_{n+1} = u_n + d \quad \text{với} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Số d được gọi là ***công sai*** của cấp số cộng.

Nhận xét: Nếu (u_n) là cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \quad (k \geq 2).$$

LƯU Ý. • Để chứng minh (u_n) là cấp số cộng, hãy chứng minh hiệu hai số hạng liên tiếp $u_n - u_{n-1}$ không đổi.

• Nếu (u_n) là cấp số cộng với công sai d thì với số tự nhiên $n \geqslant 2$, ta có: $d = u_n - u_{n-1}$.

Ví dụ 1 ★☆☆☆☆

Chứng minh mỗi dãy số sau là cấp số cộng. Xác định công sai của mỗi cấp số cộng đó.

a) $3; 7; 11; 15; 19; 23$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = 9n - 9$.

c) Dãy số (v_n) với $v_n = an + b$, trong đó a và b là các hằng số.

Hướng dẫn giải.

a) Dãy số 3; 7; 11; 15; 19; 23 là cấp số cộng với công sai $d = 4$.

b) Ta có: $u_1 = 9.1 - 9 = 0, u_{n+1} = 9(n+1) - 9 = u_n + 9, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số (u_n) là cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 0$ và công sai $d = -3$.

c) Ta có: $v_1 = a.1 + b = a + b, v_{n+1} = a(n+1) + b = an + b + a = v_n + a, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số (v_n) là cấp số cộng với số hạng đầu $v_1 = a + b$ và công sai là $d = a$.

Ví dụ 2 ★☆☆☆☆

Số đo ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Tìm số đo ba góc đó.

Hướng dẫn giải. Giả sử tam giác vuông thỏa mãn điều kiện bài toán là tam giác ABC vuông tại A.

Đặt $\widehat{B}=\alpha, \widehat{C}=\beta, \widehat{A}=90^\circ \quad (\alpha<\beta<90^\circ)$.

Vì $\alpha, \beta, 90^\circ$ lập thành cấp số cộng nên $\beta=\dfrac{\alpha+90^\circ}{2} \quad (*)$. Mặt khác, ta có

$$\alpha+\beta+90^\circ=180^\circ \Leftrightarrow \alpha+\beta=90^\circ \quad (**)$$

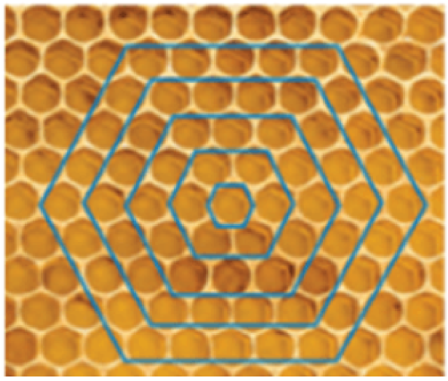
Thay (*) vào (**) ta được

$$\alpha+\frac{\alpha+90^\circ}{2}=90^\circ \Leftrightarrow 3\alpha=90^\circ \Leftrightarrow \alpha=30^\circ \Rightarrow \beta=60^\circ.$$

Vậy số đo ba góc của tam giác vuông đó lần lượt là $30^\circ; 60^\circ; 90^\circ$.

Ví dụ 3 ★☆☆☆☆

Mặt cắt của một tổ ong có hình lưới tạo bởi các ô hình lục giác đều. Từ một ô đầu tiên, bước thứ nhất, các ong thợ tạo ra vòng 1 gồm 6 ô lục giác; bước thứ hai, các ong thợ sẽ tạo ra vòng 2 có 12 ô bao quanh vòng 1; bước thứ ba, các ong thợ sẽ tạo ra 18 ô bao quang vòng 2, cứ thế tiếp tục (Hình bên). Số ô trên các vòng theo thứ tự có tạo thành cấp số cộng không? Nếu có, tìm công sai của cấp số cộng này.



Hướng dẫn giải. Dãy số chỉ số ô trên các vòng là: $u_1=6; u_2=12; u_3=18$.

Ta thấy $u_{n+1}=u_n+6$.

Vậy ô trên các vòng theo thứ tự tạo thành cấp số cộng có công sai $d=6$.

1. Chứng tỏ rằng dãy số (u_n) với $u_n=4-n$ là một cấp số cộng. Tìm số hạng đầu và công sai của nó.

2. Tìm x sao cho $x+3, 2x+1$ và $5x+2$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng.

II. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA CẤP SỐ CỘNG

Nếu một cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức:

$$u_n=u_1+(n-1)d, \ n\geq 2.$$

Ví dụ 4 ★☆☆☆☆

Tìm số hạng tổng quát của các cấp số cộng sau:

a) Cấp số cộng (a_n) có $a_1 = 5$ và $d = -5$;

b) Cấp số cộng (b_n) có $b_1 = 2$ và $b_{10} = 20$.

Hướng dẫn giải.

a) Ta có $a_n = a_1 + (n-1)d = 5 + (n-1).(-5) = -5n + 10$.

Vậy số hạng tổng quát của cấp số cộng là $u_n = -5n + 10$.

b) Số hạng tổng quát là: $b_n = b1 + (n-1)d$.

Ta có $b_{10} = b_1 + 9d \Leftrightarrow 20 = 2 + 9.d \Leftrightarrow d = 2$.

Số hạng tổng quát $b_n = 2 + (n-1).2 = 2n$.

Ví dụ 5 ★☆☆☆☆

Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng (c_n) có $c_4 = 80$ và $c_6 = 40$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $c_4 = c_1 + 3d = 80$ và $c_6 = c1 + 5d = 40$. Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} c_1 + 3d = 80 \\ c_1 + 5d = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 140 \\ d = -20 \end{cases}.$$

Khi đó số hạng tổng quát của cấp số cộng trên là:

$$c_n = 140 + (n-1).(-20) = -20n + 160.$$

Vậy số hạng tổng quát của cấp số cộng (c_n) là: $c_n = -20n + 160$.

Ví dụ 6 ★☆☆☆☆

Theo số liệu của Tổng cục Thống kê, dân số của Việt Nam vào năm 2018 là 96 triệu người. Nếu thực hiện tốt kế hoạch hoá gia đình thì bình quân mỗi năm, dân số nước ta tăng 1 triệu người. Giả sử chương trình kế hoạch hoá gia đình được duy trì tốt và ổn định trong nhiều năm, hãy tính dân số của nước ta vào năm 2030.

Hướng dẫn giải. Theo giả thiết, ta có mức tăng dân số hằng năm ổn định 1 triệu người. Do vậy, tính từ năm 2018 thì dân số hằng năm lập thành cấp số cộng với công sai $d = 1$ triệu (người).

Dân số năm 2018 là $u_1 = 96$ triệu, dân số năm 2030 là số hạng thứ 13 của cấp số cộng nên:

$$u_{13} = u_1 + 12d = 96\,\text{triệu} + 12\,\text{triệu} = 108\,\text{triệu (người)}.$$

(3) Số hạng thứ 10 của một cấp số cộng (u_n) bằng 48 và số hạng thứ 18 bằng 88. Tìm số hạng thứ 100 của cấp số cộng đó.

(4)

Một thửa ruộng bậc thang có thửa thấp nhất (bậc thứ nhất) nằm ở độ cao 950 m so với mực nước biển, độ chênh lệch giữa thửa trên và thửa dưới trung bình là 1,5 m. Hỏi thửa ruộng ở bậc thứ 12 cao bao nhiêu mét so với mực nước biển?

(5) Kiến vàng là loài kiến có lợi trong nông học, sinh học. Nó giúp nhà nông ngăn ngừa côn trùng, giảm sử dụng các loại thuốc trừ sâu. Ở đồng bằng sông Cửu Long, nhà nông thường tách đàn kiến sang cây trồng khác để bảo vệ cây. Giả sử một đàn kiến vàng có 4 000 con vào đầu tháng 6 năm 2018, mỗi tháng đàn kiến tăng thêm 900 con. Một nhà nông muốn tách đàn khi đàn kiến đạt khoảng 20 000 con. Đến thời điểm nào người đó có thể tách đàn?

III. TỔNG CỦA n SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA CẤP SỐ CỘNG

Giả sử (u_n) là một cấp số cộng có công sai d. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, khi đó

$$S_n = \frac{n\,(u_1 + u_n)}{2} \quad \text{hay} \quad S_n = \frac{n\,[2u_1 + (n-1)d]}{2}.$$

Ví dụ 7 ★☆☆☆☆

a) Tính tổng 50 số tự nhiên chẵn đầu tiên.

b) Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 + u_{28} = 100$. Tính tổng 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

c) Cho cấp số cộng (v_n) có $S_6 = 18$ và $S_{10} = 110$. Tính S_{20}.

Hướng dẫn giải.

a) 50 số tự nhiên chẵn lập thành một cấp số cộng, có $u_1 = 0$, công sai $d = 2$.

Khi đó tổng của 50 số này là: $S_{50} = \dfrac{50(0+50)}{2} = 1250$.

b) Ta có: $u_3 + u_{28} = u_1 + 2d + u_1 + 27d = 2u_1 + 29d = 100$.

Tổng của 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó là:

$$S_{30} = \frac{30(u_1 + u_{30})}{2} = \frac{30(u_1 + u_1 + 29d)}{2} = \frac{30(2u_1 + 29d)}{2} = \frac{30 \cdot 100}{2} = 1500.$$

c) Ta có: $S_6 = \dfrac{6(u_1 + u_6)}{2} = \dfrac{6(u_1 + u_1 + 5d)}{2} = \dfrac{6(2u_1 + 5d)}{2} = 18 \Leftrightarrow 2u_1 + 5d = 6$.

Tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó là:

$$S_{10} = \frac{10(u_1 + u_{10})}{2} = \frac{10(u_1 + u_1 + 9d)}{2} = \frac{10(2u_1 + 9d)}{2} = 110 \Leftrightarrow 2u_1 + 9d = 22.$$

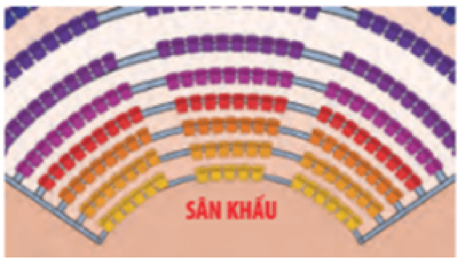
Khi đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2u_1 + 5d = 6 \\ 2u_1 + 9d = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -7 \\ d = 4 \end{cases}$.

Tổng 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là:

$$S_{20} = \frac{20(u_1 + u_{20})}{2} = \frac{20(u_1 + u_1 + 19d)}{2} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = \frac{20(2.(-7) + 19.4)}{2} = 620.$$

Ví dụ 8 ★☆☆☆☆

Một rạp hát có 20 hàng ghế xếp theo hình quạt. Hàng thứ nhất có 17 ghế, hàng thứ hai có 20 ghế, hàng thứ ba có 23 ghế,... cứ thế tiếp tục cho đến hàng cuối cùng (Hình vẽ).



a) Tính số ghế có ở hàng cuối cùng.

b) Tính tổng các số ghế có trong rạp.

Hướng dẫn giải.

a) Số ghế của mỗi hàng lập thành một cấp số cộng, có số hạng đầu là $u_1 = 17$, công sai $d = 3$.

Khi đó số hạng tổng quát của cấp số cộng là: $u_n = u_1 + (n-1)d = 17 + (n-1).3$.

Số ghế có ở hàng cuối cùng (hàng số 20) là: $u_{20} = 17 + (20-1).3 = 74$.

b) Tổng số ghế có trong rạp là tổng của 20 số hạng đầu trong cấp số cộng và bằng:

$$S_{20} = \frac{20(u_1 + u_{20})}{2} = \frac{20(17 + 74)}{2} = 910.$$

Vậy tổng số ghế trong rạp là 910 ghế.

6. Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_5 + 3u_3 - u_2 = -21$ và $3u_7 - 2u_4 = -34$. Tính $S = u_4 + u_5 + \ldots + u_{30}$.

(7) Một hội trường lớn có 35 ghế ở hàng đầu tiên, 37 ghế ở hàng thứ hai, 39 ghế ở hàng thứ ba và cứ tiếp tục theo quy luật như vậy. Có tất cả 27 hàng ghế. Hỏi hội trường đó có bao nhiêu ghế?

(8) Anh Nam được nhận vào làm việc ở một công ty về công nghệ với mức lương khởi điểm là 100 triệu đồng một năm. Công ty sẽ tăng thêm lương cho anh Nam mỗi năm là 20 triệu đồng. Tính tổng số tiền lương mà anh Nam nhận được sau 10 năm làm việc cho công ty đó.

(9) Một công ty X cho người lao động trẻ, có trình độ kĩ thuật cao được tự chọn phương án khi kí hợp đồng lao động có thời hạn 10 năm với công ty. Có hai phương án để chọn:

- Phương án 1: Năm đầu tiên nhận lương 100 triệu đồng, mỗi năm tiếp theo tăng thêm 12 triệu đồng.
- Phương án 2: Quý đầu tiên nhận 30 triệu đồng, mỗi quý tiếp theo sẽ tăng thêm 2,5 triệu đồng.

Giả sử anh An quyết định kí hợp đồng để làm việc cho công ty X trong 10 năm. Anh nên chọn phương án nào để tổng tiền lương nhận được trong 10 năm lớn hơn?

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm

Câu 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

(A) $1; -2; -4; -6; -8$.
(B) $1; -3; -6; -9; -12$.
(C) $1; -3; -7; -11; -15$.
(D) $1; -3; -5; -7; -9$.

Câu 2. Trong các dãy số sau, dãy số nào **không phải** cấp số cộng?

(A) $\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}; \frac{9}{2}$.
(B) $1; 1; 1; 1; 1$.
(C) $1 - 8; -6; -4; -2; 0$.
(D) $3; 1; -1; -2; -4$.

Câu 3. Trong các dãy số sau đây dãy nào là cấp số cộng

Ⓐ $u_n = 3^n$. Ⓑ $u_n = (-3)^{n+1}$.
Ⓒ $u_n = 3n + 1$. Ⓓ $u_n = 2^{n+1}$.

Câu 4. Trong các dãy số có công thức tổng quát sau, dãy số nào là cấp số cộng?

Ⓐ $u_n = 2021^n$. Ⓑ $u_n = 2n + 2021$.
Ⓒ $u_n = \dfrac{2}{n + 2021}$. Ⓓ $u_n = n^2 - 2$.

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2, u_2 = 7$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

Ⓐ 5 . Ⓑ $\dfrac{2}{7}$. Ⓒ -5 . Ⓓ $\dfrac{7}{2}$.

Câu 6. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 9$ và công sai $d = 2$. Giá trị của u_2 bằng

Ⓐ 11. Ⓑ $\dfrac{9}{2}$. Ⓒ 18. Ⓓ 7.

Câu 7. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 8$ và công sai $d = 3$. Giá trị của u_2 bằng

Ⓐ $\dfrac{8}{3}$. Ⓑ 24. Ⓒ 5. Ⓓ 11.

Câu 8. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2022$ và công sai $d = 7$. Giá trị của u_6 bằng

Ⓐ 2043. Ⓑ 2064. Ⓒ 2050. Ⓓ 2057.

Câu 9. Tìm công sai d của cấp số cộng (u_n), $n \in \mathbb{N}^*$ có $u_1 = 1;\ u_4 = 13$.

Ⓐ $d = 3$. Ⓑ $d = \dfrac{1}{4}$. Ⓒ $d = 4$. Ⓓ $d = \dfrac{1}{3}$.

Câu 10. Cho cấp số cộng có $u_3 = 2$, $d = -2$. Số hạng thứ hai của cấp số cộng là

Ⓐ $u_2 = 4$. Ⓑ $u_2 = 0$. Ⓒ $u_2 = -4$. Ⓓ $u_2 = 3$.

Câu 11. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_{17} = 33$ và $u_{33} = 65$ thì công sai bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 2.5. Ⓓ 11.

Câu 12. Một cấp số cộng gồm 5 số hạng. Hiệu số hạng đầu và số hạng cuối bằng 20. Tìm công sai d của cấp số cộng đã cho.

Ⓐ $d = 5$. Ⓑ $d = 4$. Ⓒ $d = -4$. Ⓓ $d = -5$.

Câu 13. Cho cấp số cộng u_n có các số hạng đầu lần lượt là $5; 9; 13; 17; \ldots$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng?

Ⓐ $u_n = 4n + 1$. Ⓑ $u_n = 5n - 1$.
Ⓒ $u_n = 5n + 1$. Ⓓ $u_n = 4n - 1$.

Câu 14. Viết ba số xen giữa 2 và 22 để ta được một cấp số cộng có 5 số hạng. Ba số hạng đó lần lượt là

Ⓐ $7; 12; 17$. Ⓑ $6; 10; 14$. Ⓒ $8; 13; 18$. Ⓓ $6; 12; 18$.

Câu 15. Cho (u_n) là cấp số cộng có số hạng đầu bằng 2, công sai bằng 5. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó bằng?

Ⓐ -410. Ⓑ -205. Ⓒ 245. Ⓓ -230.

Câu 16. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_5 + u_7 = 19$. Giá trị $u_2 + u_{10}$ bằng

Ⓐ 38. Ⓑ 29. Ⓒ 12. Ⓓ 19.

Câu 17. Cho (u_n) là cấp số cộng có $S_n = n^2 + 4n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Số hạng đầu u_1 và công sai của cấp số cộng đó là

Ⓐ $u_1 = 3, d = 2$. Ⓑ $u_1 = 5, d = 2$.
Ⓒ $u_1 = 8, d = -2$. Ⓓ $u_1 = -5, d = 2$.

Câu 18. Cho dãy số (u_n) à một cấp số cộng có $u_1 = 3$ và công sai $d = 4$. Biết tổng n số hạng đầu của dãy số (u_n) là $S_n = 253$. Tìm n.

Ⓐ 9. Ⓑ 11. Ⓒ 12. Ⓓ 10.

Câu 19. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 5$ và tổng 40 số hạng đầu là 3320. Công sai cấp số cộng đó bằng

Ⓐ -4. Ⓑ 8. Ⓒ -8. Ⓓ 4.

Câu 20. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_3 + u_{13} = 80$. Tổng 15 số hạng đầu của cấp số cộng đó bằng

Ⓐ 800. Ⓑ 600. Ⓒ 570. Ⓓ 630.

Câu 21. Cho cấp số cộng $1; 4; 7; \cdot$. Số hạng thứ 100 của cấp số cộng là

Ⓐ 297. Ⓑ 301. Ⓒ 295. Ⓓ 298.

Câu 22. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 5$ và công sai $d = -3$. Biết rằng -289 là một số hạng của cấp số cộng trên. Hỏi đó là số hạng bao nhiêu?

Ⓐ 98. Ⓑ 99. Ⓒ 100. Ⓓ 101.

Câu 23. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_n = 3 - 2n$. Tính S_{60}.

Ⓐ -6960. Ⓑ -117. Ⓒ -3840. Ⓓ -116.

Câu 24. Lan đang tiết kiệm để mua laptop. Trong tuần đầu tiên, cô ta để dành 200 đô la, và trong mỗi tuần tiếp theo, cô ta đã thêm 16 đô la vào tài khoản tiết kiệm của mình. Chiếc laptop Lan cần mua có giá 1000 đô la. Hỏi vào tuần thứ bao nhiêu thì cô ấy có đủ tiền để mua chiếc laptop đó?

Ⓐ 49. Ⓑ 50. Ⓒ 51. Ⓓ 52.

Câu 25. Người ta trồng 820 cây theo một hình tam giác như sau: Hàng thứ nhất trồng 1 cây, kể từ hàng thứ hai trở đi số cây trồng mỗi hàng nhiều hơn1 cây so với hàng liền trước nó. Hỏi có tất cả bao nhiêu hàng cây?

Ⓐ 42. Ⓑ 40. Ⓒ 41. Ⓓ 39.

Câu 26. Trong sân vận động có tất cả 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 15 ghế, các dãy liền sau nhiều hơn dãy trước 4 ghế, hỏi sân vận động đó có tất cả bao nhiêu ghế?

Ⓐ 2250. Ⓑ 1740. Ⓒ 4380. Ⓓ 2190.

Câu 27. Một tam giác vuông có chu vi bằng 3 và độ dài các cạnh lập thành một cấp số cộng. Độ dài các cạnh của tam giác đó là:

Ⓐ $\frac{1}{3}; 1; \frac{5}{3}$. Ⓑ $\frac{1}{4}; 1; \frac{7}{3}$. Ⓒ $\frac{3}{4}; 1; \frac{5}{4}$. Ⓓ $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}$.

2 Tự luận

Bài 1. Xác định công sai, số hạng thứ 5, số hạng tổng quát và số hạng thứ 100 của mỗi cấp số cộng sau:

a) $4, 9, 14, 19, \ldots;$ b) $1, -1-3, -5, \ldots.$

Bài 2. Viết năm số hạng đầu của mỗi dãy số (u_n) sau và xét xem nó có phải là cấp số cộng không. Nếu dãy số đó là cấp số cộng, hãy tìm công sai d và viết số hạng tổng quát của nó dưới dạng $u_n = u_1 + (n-1)d$.

a) $u_n = 3 + 5n;$

b) $u_n = 6n - 4;$

c) $u_1 = 2, u_n = u_{n-1} + n;$

d) $u_1 = 2, u_{n-1} + 3.$

Bài 3. Cho (u_n) là cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 4$ và công sai $d = -10$. Viết công thức số hạng tổng quát u_n.

Bài 4. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -3$ và công sai $d = 2$.

a) Tìm u_{12}.

b) Số 195 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng đó?

Bài 5. Trong các dãy số sau đây, dã số nào là cấp số cộng? Tìm số hạng đầu và công sai của nó.

a) $u_n = 3 - 4n$; b) $u_n = \frac{n}{2} - 4$; c) $u_n = 5^n$; d) $u_n = \frac{9-5n}{3}$.

Bài 6. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -3$, công sai $d = 5$.

a) Viết công thức của số hạng tổng quát u_n.

b) Số 492 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng trên?

c) Số 300 có là số hạng nào của cấp số cộng trên không?

Bài 7. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_1 + u_2 + u_3 = -1$.

a) Tìm công sai d và viết công thức của số hạng tổng quát u_n.

b) Số -67 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng trên?

c) Số 7 có phải là một số hạng của cấp số cộng trên không?

Bài 8. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát: $u_n = 7n - 3$.

a) Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n).

b) Tìm u_{2012}.

c) Tính tổng của 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n).

d) Số 1208 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng (u_n)?

Bài 9. Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_1 = 5$ và $d = 3$.

a) Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n).

b) Tìm u_{99}.

c) Số 1502 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng (u_n)?

d) Cho biết $S_n = 34275$. Tìm n.

Bài 10. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n), biết:

a) $\begin{cases} u_3 - u_1 = 20 \\ u_2 + u_5 = 54 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_2 + u_3 = 0 \\ u_2 + u_5 = 80 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_5 - u_2 = 3 \\ u_8 \cdot u_3 = 24 \end{cases}$

Bài 11. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n), biết:

a) $\begin{cases} u_4 = 10 \\ u_7 = 19 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$ c) $\begin{cases} S_{10} = 165 \\ S_{20} = 630 \end{cases}$

Bài 12. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n), biết:

a) $\begin{cases} u_1 + u_6 = 18 \\ u_3 + u_7 = 22 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_9 - u_4 = 15 \\ u_3 \cdot u_8 = 184 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_6 = 8 \\ u_2^2 + u_4^2 = 16 \end{cases}$

Bài 13. Cho ba số $\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{c+a}, \dfrac{1}{a+b}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng ba số a^2, b^2, c^2 theo thứ tự cũng lập thành một cấp số cộng.

Bài 14. Tìm x để ba số $10-3x, 2x^2+3, 7-4x$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

Bài 15. Cho (u_n) là cấp số cộng có $u_2 + u_4 = 22, u_1 \cdot u_5 = 21$ và công sai $d > 0$.

a) Tính u_{100}, S_{100}. b) Tính tổng $u_1 + u_5 + u_9 + \ldots + u_{101}$.

Bài 16. Cho (u_n) là cấp số cộng có $u_1 + u_5 + u_9 + u_{13} + u_{17} + u_{21} = 234$.

a) Tính $u_2 + u_8 + u_{14} + u_{20}$. b) Tìm u_1, d biết $u_{10} = 37$.

Bài 17. Một cấp số cộng có số hạng thứ 5 bằng 18 và số hạng thứ 12 bằng 32. Tìm số hạng thứ 50 của cấp số cộng này.

Bài 18. Một cấp số cộng có số hạng đầu bằng 5 và công sai bằng 2. Hỏi phải lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng này để có tổng bằng 2700?

Bài 19. Phải lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng có số hạng đầu là 78 và công sai là -4 để được tổng là 702?

Bài 20. Giải phương trình $1 + 8 + 15 + 22 + \cdots + x = 7944$.

Bài 21. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và tổng 100 số hạng đầu bằng 10 000. Tính tổng $S = \dfrac{1}{u_1u_2} + \dfrac{1}{u_2u_3} + \cdots + \dfrac{1}{u_{99}u_{100}}$.

Bài 22. Tìm 5 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng , biết tổng của chúng bằng 40 và tổng bình phương của chúng bằng 480.

Bài 23. Cho dãy số (u_n), biết $u_1 = -2, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1-u_n}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Đặt $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Chứng minh rằng dãy số (v_n) là một cấp số cộng. Tìm số hạng đầu, công sai của cấp số cộng đó.

b) Tìm công thức của v_n, u_n tính theo n.

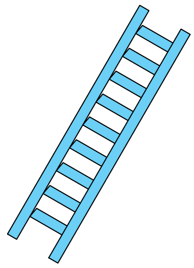
c) Tính tổng $S = \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_3} + \cdots + \dfrac{1}{u_{20}}$.

Bài 24. Giá của một chiếc xe ô tô lúc mới mua là 680 triệu đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá của chiếc ô tô giảm 55 triệu đồng. Tính giá của chiếc xe sau 5 năm sử dụng.

Bài 25. Một kiến trúc sư thiết kế một hội trường với 15 ghế ngồi ở hàng thứ nhất, 18 ghế ngồi ở hàng thứ hai, 21 ghế ngồi ở hàng thứ ba, và cứ như vậy (số ghế ở hàng sau nhiều hơn 3 ghế so với số ghế ở hàng liền trước nó). Nếu muốn hội trường đó có sức chứa ít nhất 870 ghế ngồi thì kiến trúc sư đó phải thiết kế tối thiểu bao nhiêu hàng ghế?

Bài 26. Vào năm 2020, dân số của một thành phố là khoảng $1,2$ triệu người. Giả sử mỗi năm, dân số của thành phố này tăng thêm khoảng 30 nghìn người. Hãy ước tính dân số của thành phố này vào năm 2030.

Bài 27. Một người muốn mua một thanh gỗ đủ để cắt ra làm các thanh ngang của một cái thang. Biết rằng chiều dài các thanh ngang của cái thang đó (từ bậc dưới cùng) lần lượt là 45 cm, 43 cm, 41 cm, ..., 31 cm.



a) Cái thang đó có bao nhiêu bậc?

b) Tính chiều dài thanh gỗ mà người đó cần mua, giả sử chiều dài các mối nối (phần gỗ bị cắt thành mùn cưa) là không đáng kể.

Bài 28. Khi một vận động viên nhảy dù nhảy xa khỏi máy bay, giả sử quãng đường người ấy rơi tự do (tính theo feet) trong mỗi giây liên tiếp theo thứ tự trước khi bung dù lần lượt là: 16; 48; 80; 112; 144;... (các quãng đường này tạo thành cấp số cộng).

a) Tính công sai của cấp số cộng trên.

b) Tính tổng chiều dài quãng đường rơi tự do của người đó trong 10 giây đầu tiên.

Bài 29. Chiều cao (đơn vị: centimét) của một đứa trẻ n tuổi phát triển bình thường được cho bởi công thức $x_n = 75 + 5 \cdot (n - 1)$. (Nguồn: https://bibabo.vn).

a) Một đứa trẻ phát triển bình thường có chiều cao năm 3 tuổi là bao nhiêu centimét?

b) Dãy số (x_n) có là một cấp số cộng không? Trung bình một năm. chiều cao mỗi đứa trẻ phát triển bình thường tăng lên bao nhiêu centimét?

Bài 30. Ở một loài thực vật lưỡng bội, tính trạng chiều cao cây do hai gene không alen là A và B cùng quy định theo kiểu tương tác cộng gộp. Trong kiểu gene nếu cứ thêm một alen trội A hay B thì chiều cao cây tăng thêm 5 cm. Khi trưởng thành, cây thấp nhất của loài này với kiểu gene $aabb$ có chiều cao 100 cm. Hỏi cây cao nhất với kiểu gene $AABB$ có chiều cao bao nhiêu?

Bài 31. Khi kí kết hợp đồng với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau

☞ *Phương án 1*: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu.

☞ *Phương án 2*: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu.

Nếu là người được tuyển dụng vào doanh nghiệp, em sẽ chọn phương án nào khi

a) Kí hợp đồng lao động 3 năm?

b) Kí hợp đồng lao động 10 năm?

Bài 32. Bác Tư vào làm cho một công ty với hợp đồng về tiền lương mỗi năm như sau:

➤ Năm thứ nhất: 240 triệu;

➤ Từ năm thứ hai trở đi: Mỗi năm tăng thêm 12 triệu.

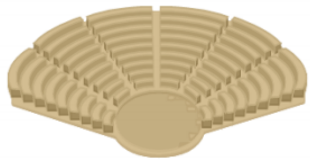
Tính số tiền lương một năm của bác Tư vào năm thứ 11.

Bài 33. Một rạp hát có 20 hàng ghế. Hàng thứ nhất có 20 ghế, số ghế ở các hàng sau đều hơn số ghế hàng ngay trước đó một ghế. Cho biết rạp hát đã bán hết vé với giá mỗi vé là 60 nghìn đồng. Tính tổng số tiền vé thu được của rạp hát.

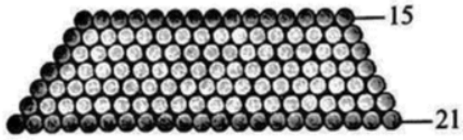
Bài 34. Chuông đồng hồ ở một toà tháp đánh số tiếng đúng bằng số giờ và cứ mỗi 30 phút không phải là giờ đúng thì đánh 1 tiếng chuông. Hỏi bắt đầu từ lúc 1 giờ đêm đến 12 giờ trưa, chuông đồng hồ đó đã đánh tất cả bao nhiêu tiếng?

Bài 35. Trên Mặt Trăng, khi một vật được thả rơi tự do, ở giây đầu tiên nó đi được một đoạn dài 80,772 cm. Mỗi giây sau nó đi được một đoạn nhiều hơn đoạn đường đi trong giây ngay trước đó 161,554 cm. Tìm độ dài của đoạn đường đã đi được trong 10 giây của một vật rơi tự do trên Mặt Trăng.

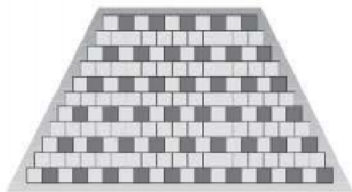
Bài 36. Nhà hát bậc dốc hình tròn đã được xây dựng từ thời La Mã. Các dãy chỗ ngồi được xếp theo hình cung tròn mà số chỗ ngồi tăng dần từ trong ra ngoài. Một nhà hát như thế có số chỗ ngồi ở các dãy tính từ trong ra ngoài lập thành cấp số cộng $12, 16, 20, \ldots$ Số chỗ ngồi của dãy cuối cùng là 72. Tính tổng số chỗ ngồi trong nhà hát.



Bài 37. Các khúc gỗ được xếp như Hình bên. Lượt thứ nhất có 21 khúc, lượt thứ hai có 20 khúc, $\ldots$, lượt trên cùng có 15 khúc. Tính tổng số khúc gỗ đã được xếp.



Bài 38. Một bức tường trang trí có dạng hình thang, rộng 2,4 m ở đáy và rộng 1,2 m ở đỉnh (hình vẽ bên). Các viên gạch hình vuông có kích thước 10 cm $\times$ 10 cm phải được đặt sao cho mỗi hàng ở phía trên chứa ít hơn một viên so với hàng ở ngay phía dưới nó. Hỏi sẽ cần bao nhiêu viên gạch hình vuông như vậy để ốp hết bức tường đó?



Bài 39. Có bao nhiêu hàng ghế trong một góc khán đài của một sân vận động, biết rằng góc khán đài đó có 2 040 chỗ ngồi, hàng ghế đầu tiên có 10 chỗ ngồi và mỗi hàng ghế sau có thêm 4 chỗ ngồi so với hàng ghế ngay trước nó?

Bài 40. Một cầu thang bằng gạch có tổng cộng 30 bậc. Bậc dưới cùng cần 100 viên gạch. Mỗi bậc tiếp theo cần ít hơn hai viên gạch so với bậc ngay trước nó.

a) Cần bao nhiêu viên gạch cho bậc trên cùng?

b) Cần bao nhiêu viên gạch để xây cầu thang?

Bài 41. Nếu anh Nam nhận được lời mời làm việc cho một công ty nước ngoài với mức lương khởi điểm là 35 000 đô la mỗi năm và được tăng thêm 1 400 đô la lương mỗi năm, thì sẽ mất bao nhiêu năm làm việc để tổng lương mà anh Nam nhận được là 319 200 đô la?

Chuyên đề 3

CẤP SỐ NHÂN

I. CẤP SỐ NHÂN

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số q không đổi, nghĩa là

$$u_{n+1} = u_n \cdot q \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Số q được gọi là ***công bội*** của cấp số nhân.

LƯU Ý. • Dãy số (u_n) là cấp số nhân thì $u_n^2 = u_{n-1} \cdot u_{n+1}$ với $n \geq 2$.

• Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội q và $u_n \neq 0$ với mọi $n \geqslant 1$ thì với số tự nhiên $n \geqslant 2$ ta có $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = q$.

Ví dụ 1 ★☆☆☆☆

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{3^{n-1}}$. Chứng minh rằng dãy số này là một cấp số nhân. Xác định số hạng đầu và công bội của nó.

Hướng dẫn giải. Với mọi $n \geqslant 2$, ta có:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{\frac{1}{3^{n-1}}}{\frac{1}{3^{n-2}}} = \frac{3^{n-2}}{3^{n-1}} = \frac{1}{3}$$

tức là $u_n = \dfrac{1}{3} \cdot u_{n-1}$ với mọi $n \geqslant 2$.

Vậy (u_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = \dfrac{1}{3^0} = 1$ và công bội $q = \dfrac{1}{3}$.

Để chứng minh dãy số (u_n) gồm các số khác 0 là một cấp số nhân, hãy chứng minh tỉ số $\dfrac{u_n}{u_{n-1}}$ không đổi.

Ví dụ 2 ★☆☆☆☆

Cho ba số tự nhiên m, n, p theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh ba số $2^m, 2^n, 2^p$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

Hướng dẫn giải. Ba số tự nhiên m, n, p theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên ta có

$$2n = m + p \Leftrightarrow 2^{2n} = 2^{m+p} \Rightarrow (2^n)^2 = 2^m.2^p$$

Vậy ba số $2^m, 2^n, 2^p$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

Ví dụ 3 ★☆☆☆☆

Một quốc gia có dân số năm 2011 là P triệu người. Trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm dân số tăng $a\%$. Chứng minh rằng dân số các năm từ năm 2011 đến năm 2021 của quốc gia đó tạp thành cấp số nhân. Tìm công bội của cấp số nhân này.

Hướng dẫn giải. Giả sử dân số của quốc gia đó từ năm 2011 đến năm 2021 là dãy số (u_n) với $u_1 = P$. Ta có:

$$\begin{aligned}
u_1 =& P\\
u_2 =& u_1 + u_1 \cdot \frac{a}{100} = u_1\left(1 + \frac{a}{100}\right)\\
u_3 =& u_2 + u_2 \cdot \frac{a}{100} = u_2\left(1 + \frac{a}{100}\right)\\
u_4 =& u_3 + u_3 \cdot \frac{a}{100} = u_3\left(1 + \frac{a}{100}\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_{11} =& u_{10} + u_{10}\left(1 + \frac{a}{100}\right)
\end{aligned}$$

Vậy dân số các năm từ năm 2011 đến năm 2021 của quốc gia đó tạo thành cấp số nhân với công bội $q = 1 + \dfrac{a}{100}$.

Ví dụ 4 ★☆☆☆☆

Tần số của ba phím liên tiếp Sol, La, Si trên một cây đàn organ tạo thành cấp số nhân. Biết tần số của hai phím Sol và Si lần lượt là 415 Hz và 466 Hz *(theo: https://vi.wikipedia.org/wiki/Đô_(nốt nhạc))*. Tính tần số của phím La (làm tròn đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn giải. Vì tần số của ba phím liên tiếp Sol, La, Si tạo thành một cấp số nhân nên ta có tần số của phím La bằng: $\sqrt{415.466} \approx 440$.

1. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = -6, u_2 = -2$.
   a) Tìm công bội q.
   b) Viết năm số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.

2

Tìm x để $x-1, x$ và $x+2$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

3 Chứng tỏ rằng dãy số (u_n) với $u_n = 3 \cdot 4^n$ là cấp số nhân. Tìm số hạng đầu và công bội của nó.

II. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA CẤP SỐ NHÂN

Nếu một cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, n \geq 2.$$

Ví dụ 5 ★☆☆☆☆

Viết công thức số hạng tổng quát u_n theo số hạng đầu u_1 và công bội q của các cấp số nhân sau:

a) $5; 10; 20; 40; 80; \ldots$

b) $1; \dfrac{1}{10}; \dfrac{1}{100}; \dfrac{1}{1000}; \dfrac{1}{10\,000}$.

Hướng dẫn giải.

a) Cấp số nhân $5; 10; 20; 40; 80; \ldots$ có số hạng đầu $u_1 = 5$ và công bội $q = 2$.

Khi đó công thức số hạng tổng quát:

$$u_n = u_1.q^{n-1} = 5.2^{n-1}, \quad n \geqslant 2$$

b) Cấp số nhân $1; \dfrac{1}{10}; \dfrac{1}{100}; \dfrac{1}{1000}; \dfrac{1}{10\,000}$ có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = \dfrac{1}{10}$.

Khi đó công thức số hạng tổng quát:

$$u_n = u_1.q^{n-1} = \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{1}{10^{n-1}}, \quad n \geqslant 2$$

Ví dụ 6 ★☆☆☆☆

Cho một cấp số nhân gồm các số hạng dương. Biết số hạng thứ 10 bằng 1 536 và số hạng thứ 12 bằng 6 144. Tìm số hạng thứ 20 của cấp số nhân đó.

Hướng dẫn giải. Giả sử u_1 là số hạng đầu và q là công bội của cấp số nhân đã cho.

Ta có:

$$\begin{cases} u_{10} = u_1 \cdot q^9 = 1\,536 & (1) \\ u_{12} = u_1 \cdot q^{11} = 6\,144 & (2) \end{cases}$$

Lấy $\dfrac{(1)}{(2)}$ suy ra $q^2 = 4$, tức là $q = 2$ hoặc $q = -2$.

Với $q = 2$, ta tính được $u_1 = 3$.

Với $q = -2$ ta tính được $u_1 = -3$ (trường hợp này loại vì $u_1 > 0$ theo giả thiết).

Do đó $u_1 = 3$ và $q = 2$.

Vậy số hạng thứ 20 của cấp số nhân đã cho là $u_{20} = u_1 \cdot q^{19} = 3 \cdot 2^{19} = 1\,572\,864$.

Ví dụ 7 ★☆☆☆☆

Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày, nghĩa là sau 138 ngày, khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa (theo https://vi.wikipedia.org/wiki/Poloni-210). Tính khối lượng còn lại của 20 gam poloni 210 sau:

a) 690 ngày;

b) 7 314 ngày (khoảng 20 năm).

Hướng dẫn giải. Khối lượng nguyên tố poloni 210 lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 20$ gam và công bội $q = \dfrac{1}{2}$ nên có số hạng tổng quát là $u_n = 20 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

a) Ta có: $690 = 138.5$ nên $n = 5$, khi đó: $u_5 = 20\left(\dfrac{1}{4}\right)^4 = 1,25$.

b) Ta có: $7\ 314 = 138.53$ nên $n = 53$, khi đó: $u_{53} = 20\left(\dfrac{1}{4}\right)^{52} = 4,4.10^{-15}$.

4

a) Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 5$ và công bội $q = -2$. Tìm số hạng thứ sáu.

b) Xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân biết $\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases}$.

5 Một nước có dân số 25 triệu người vào đầu năm 2001. Nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm ổn định là 0,5%, tính dân số của nước đó vào đầu năm 2040.

6 Trong một lọ nuôi cấy vi khuẩn, ban đầu có 5 000 con vi khuẩn và số lượng vi khuẩn tăng lên thêm 8% mỗi giờ. Hỏi sau 5 giờ thì số lượng vi khuẩn là bao nhiêu?

III. TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA CẤP SỐ NHÂN

Giả sử (u_n) là một cấp số nhân có công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, khi đó

$$S_n = \frac{u_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q}.$$

LƯU Ý. Khi $q = 1$ thì $S_n = n \cdot u_1$.

Ví dụ 8 ★☆☆☆☆

Tính tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) trong các trường hợp sau:

a) $u_1 = 10^5; q = 0,1; n = 5$;

b) $u_1 = 10; u_2 = -20; n = 5$.

Hướng dẫn giải.

a) (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 10^5$ và công bội $q = 0,1$.

Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) là: $S_5 = \dfrac{10^5\left[1 - (0,1)^5\right]}{1 - 0,5} = 111110$.

b) Ta có $q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{-20}{10} = -2$.

Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) là: $S_5 = \dfrac{10\left[1 - (-2)^5\right]}{1 + 2} = 110$.

Ví dụ 9 ★☆☆☆☆

Tính tổng: $S = 10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^{20}$.

Hướng dẫn giải. Nhận thấy S là tổng 20 số hạng đầu của một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 10$ và công bội $q = 10$. Vậy $S = \dfrac{10(1 - 10^{20})}{1 - 10} = \dfrac{10^{21} - 10}{9}$.

Ví dụ 10 ★☆☆☆☆

Người ta thiết kế một tòa tháp có 9 tầng, tầng thứ nhất có diện tích 1 000 m^2, mỗi tầng tiếp theo có diện tích bằng $\dfrac{2}{3}$ tầng trước đó. Tính tổng diện tích các tầng của tháp (làm tròn đến hàng đơn vị của m^2).

Hướng dẫn giải. Diện tích các tầng của tháp lập thành cấp số nhân với $u_1 = 1000$ và $q = \dfrac{2}{3}$. Khi đó, tổng diện tích các tầng của tháp là

$$S_9 = \frac{1000\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^9\right]}{1 - \frac{2}{3}} \approx 2922\ \mathrm{m}^2.$$

Ví dụ 11 ★☆☆☆☆

Ban đầu, một quả lắc đồng hồ dao động theo một cung tròn dài 46 cm (hình bên). Sau mỗi lần lắc liên tiếp, độ dài của cung tròn bằng 0,98 độ dài cung tròn ở ngay lần trước đó.

a) Độ dài của cung tròn ở lần thứ 10 là bao nhiêu?

b) Sau 15 lần dao động, quả lắc sẽ đi được quãng đường tổng cộng là bao nhiêu?

(*Kết quả tính theo centimet và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai.*)

Hướng dẫn giải. Gọi u_n là độ dài cung tròn ở lần thứ n khi con lắc dao động. Độ lần một, quả lắc đồng hồ dao động theo một cung tròn dài 46 cm, sau mỗi lần dao động liên tiếp, độ dài cung tròn bằng 0,98 độ dài cung tròn ở ngay lần trước đó nên dãy số (u_n) lập thành cấp số nhân có $u_1 = 46$ và công bội $q = 0{,}98$.

a) Độ dài của cung tròn ở lần thứ 10 là $u_{10} = u_1.q^9 = 46 \cdot 0{,}98^9 \approx 38{,}35\,(\text{cm})$.

b) Sau 15 lần dao động, quả lắc sẽ đi được quãng đường tổng cộng là

$$S = u_1 \cdot \frac{1-q^{15}}{1-q} = 46 \cdot \frac{1-0{,}98^{15}}{1-0{,}98} \approx 546{,}85\,(\text{cm}).$$

Ví dụ 12 ★☆☆☆☆

Giả sử anh Tuấn kí hợp đồng lao động trong 10 năm với điều khoản về tiền lương như sau: Năm thứ nhất, tiền lương của anh Tuấn là 60 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương của anh Tuấn được tăng lên 8%. Tính tổng số tiền lương anh Tuấn lĩnh được trong 10 năm đi làm (đơn vị: triệu đồng, làm tròn đến hàng phần nghìn).

Hướng dẫn giải. Gọi u_n là số tiền lương (triệu đồng) anh Tuấn được lĩnh ở năm làm việc thứ n. Ta có: $u_1 = 60$;

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-1} \cdot 0{,}08 = u_{n-1}(1+0{,}08) = u_{n-1} \cdot 1{,}08$$

Do đó, (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 60$, công bội $q = 1{,}08$.

Áp dụng công thức tính tổng S_n ta có tổng số tiền lương anh Tuấn lĩnh được trong 10 năm đi làm là:

$$S_{10} = \frac{60(1-1{,}08^{10})}{1-1{,}08} \approx 869{,}194\,(\text{triệu đồng}).$$

7 Cho cấp số nhân (u_n) có các số hạng đều không âm và thỏa mãn $u_2 = 6$ và $u_4 = 24$. Tính tổng 12 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.

8 Mỗi năm, một nhân viên văn phòng mua một đôi giày mới. Giá của một đôi giày người đó mua ở năm đầu tiên là 500 000 đồng. Những năm tiếp theo, giá một đôi giày cùng loại tăng 20% so với giá của năm trước đó. Tính tổng số tiền người đó đã mua giày trong 10 năm.

9 Một nhà máy tuyển thêm công nhân vào làm việc trong thời hạn ba năm và đưa ra hai phương án lựa chọn về lương như sau:

- Phương án 1: Lương tháng khởi điểm là 5 triệu đồng và sau mỗi quý, lương tháng sẽ tăng thêm 500 nghìn đồng.
- Phương án 2: Lương tháng khởi điểm là 5 triệu đồng và sau mỗi quý, lương tháng sẽ tăng thêm 5%.

Với phương án nào thì tổng lương nhận được sau ba năm làm việc của người công nhân sẽ lớn hơn?

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm

Câu 1. Dãy số nào dưới đây **không phải** cấp số nhân?

(A) $1; -3; 9; -27; 54$.
(B) $1; 2; 4; 8; 16$.
(C) $1; -1; 1; -1; 1$.
(D) $1; -2; 4; -8; 16$.

Câu 2. Dãy số nào dưới đây là một cấp số nhân?

(A) $1; 2; 3; 4; 5$.
(B) $1; 3; 6; 9; 12$.
(C) $2; 4; 6; 8; 10$.
(D) $2; 2; 2; 2; 2$.

Câu 3. Chọn cấp số nhân trong các dãy số sau:

(A) $1; 0,2; 0,04; 0,00008 \cdots$.
(B) $2; 22; 222; 2222; \cdots$.
(C) $x; 2x; 3x; 4x; \cdots$.
(D) $1; -x^2; x^4; -x^6; \cdots$.

Câu 4. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy nào là cấp số nhân?

Ⓐ $u_n = n^2 + n + 1$.
Ⓑ $u_n = (n+2) \cdot 3^n$.
Ⓒ $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{6}{u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.
Ⓓ $u_n = (-4)^{2n+1}$.

Câu 5. Dãy số $u_n = 3 + 3^n$ là một cấp số nhân với:

Ⓐ Công bội là 3 và số hạng đầu là 1 .
Ⓑ Công bội là 4 và số hạng đầu là 2 .
Ⓒ Công bội là 2 và số hạng đầu là 1 .
Ⓓ Công bội là 2 và số hạng đầu là 2 .

Câu 6. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là cấp số nhân?

Ⓐ $u_n = 5^n$.
Ⓑ $u_n = 1 + 5n$.
Ⓒ $u_n = 5^n + 1$.
Ⓓ $u_n = 5 + n^2$.

Câu 7. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

Ⓐ Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số nhân .
Ⓑ Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số cộng .
Ⓒ Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số tăng .
Ⓓ Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số dương .

Câu 8. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $u_2 = 9$. Công bội của cấp số nhân bằng

Ⓐ -6 .
Ⓑ 3 .
Ⓒ $\dfrac{1}{3}$.
Ⓓ 6 .

Câu 9. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Giá trị của u_2 bằng

Ⓐ 8 .
Ⓑ 9 .
Ⓒ $\dfrac{3}{2}$.
Ⓓ 6 .

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị của x để ba số $2x - 1, x, 2x + 1$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

Ⓐ $x = \pm\dfrac{1}{3}$.
Ⓑ $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
Ⓒ $x = \pm\sqrt{3}$.
Ⓓ $x = \pm 3$.

Câu 11. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_4 = 9$ và $u_5 = 81$. Công bội cấp số nhân đó bằng

Ⓐ 3 .
Ⓑ 72 .
Ⓒ 18 .
Ⓓ 9 .

Câu 12. Tìm công bội q của cấp số nhân (u_n) có $u_1 = \dfrac{1}{2}$ và $u_6 = 16$.

Ⓐ $q = \dfrac{1}{2}$.
Ⓑ $q = -2$.
Ⓒ $q = 2$.
Ⓓ $q = -\dfrac{1}{2}$.

Câu 13. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$ và công bội $q = -2$. Giá trị u_5 bằng

Ⓐ -32 . Ⓑ -16 . Ⓒ -6 . Ⓓ 32 .

Câu 14. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_5 = 2$ và $u_9 = 6$. Tính u_{21}.

Ⓐ 18 . Ⓑ 54 . Ⓒ 162 . Ⓓ 486 .

Câu 15. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 1, q = 2$. Hỏi 1024 là số hạng thứ mấy?

Ⓐ 11 . Ⓑ 9 . Ⓒ 8 . Ⓓ 10 .

Câu 16. Cho dãy số $4; 12; 36; 108; 324; \cdots$. Số hạng thứ 10 của dãy số đó là

Ⓐ 73872 . Ⓑ 77832 . Ⓒ 72873 . Ⓓ 78732 .

Câu 17. Viết bốn số hạng xen giữa các số 1 và -243 để được một cấp số nhân có 6 số hạng. Bốn số hạng đó lần lượt là:

Ⓐ $-3; -9; -27; -81$. Ⓑ $3; -9; 27; -81$.

Ⓒ $3; 9; 27; 81$. Ⓓ $-3; 9; -27; 81$.

Câu 18. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_2 \cdot u_6 = 64$. Giá trị $u_3 \cdot u_5$ là

Ⓐ -8 . Ⓑ -64 . Ⓒ 64 . Ⓓ 8 .

Câu 19. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $q = -2$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó bằng

Ⓐ $S_{10} = -511$. Ⓑ $S_{10} = 1023$.

Ⓒ $S_{10} = 1025$. Ⓓ $S_{10} = -1025$.

Câu 20. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = \dfrac{1}{3}$ và $u_8 = 729$. Tổng 8 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó bằng

Ⓐ $\dfrac{1-3^8}{2}$. Ⓑ $\dfrac{3^8-1}{6}$. Ⓒ $\dfrac{3^8-1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{1-3^8}{6}$.

Câu 21. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_3 = 12, u_5 = 48$ có công bội âm. Tổng 7 số hạng đầu tiên cấp số nhân đó bằng

Ⓐ 129 . Ⓑ -129 . Ⓒ 128 . Ⓓ -128 .

Câu 22. Ba số lập thành một cấp số nhân. Nếu số hạng thứ hai cộng thêm 2 ta được một cấp số cộng. Sau đó cộng thêm 9 với số hạng thứ ba ta lại được một cấp số nhân. Tính tổng ba số đó

Ⓐ $\dfrac{16}{25}$. Ⓑ $\dfrac{52}{25}$. Ⓒ $\dfrac{4}{25}$. Ⓓ $-\dfrac{64}{25}$.

Câu 23. Tổng $S = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{2018}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{3^{2019}-1}{2}$.   Ⓑ $\dfrac{3^{2018}-1}{2}$.

Ⓒ $\dfrac{3^{2020}-1}{2}$.   Ⓓ $-\dfrac{3^{2018}-1}{2}$.

Câu 24. Người ta thiết kế một cái tháp 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp. Tính diện tích mặt trên cùng

Ⓐ $8\ \mathrm{m}^2$.   Ⓑ $6\ \mathrm{m}^2$.   Ⓒ $10\ \mathrm{m}^2$.   Ⓓ $12\ \mathrm{m}^2$.

Câu 25. Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 1. Gọi C_2 là hình vuông có các đỉnh là trung điểm của các cạnh hình vuông C_1; C_3 hình vuông có các đỉnh là trung điểm của các cạnh hình vuông C_2;... cứ tiếp tục quá trình như trên, ta được dãy các hình vuông $C_1; C_2; C_3; \ldots; C_n; \ldots$. Diện tích của hình vuông C_{2023} là

Ⓐ $\dfrac{1}{2^{2022}}$.   Ⓑ $\dfrac{1}{2^{2023}}$.   Ⓒ $\dfrac{1}{2^{1011}}$.   Ⓓ $\dfrac{1}{2^{1012}}$.

Câu 26. Bạn A thả quả bóng cao su từ độ cao 10 m theo phương thẳng đứng. Mỗi khi chạm đất nó lại nảy lên theo phương thẳng đứng có độ cao bằng $\dfrac{3}{4}$ độ cao trước đó. Tính tổng quãng đường bóng đi được đến khi bóng dừng hẳn.

Ⓐ $40m$.   Ⓑ $70m$.   Ⓒ $50m$.   Ⓓ $80m$.

Câu 27. Một loại vi khuẩn sau mỗi phút số lượng tăng gấp đôi biết rằng sau 5 phút người ta đếm được có 64000 con hỏi sau bao nhiêu phút thì có được 2048000 con?

Ⓐ 10.   Ⓑ 11.   Ⓒ 26.   Ⓓ 50.

2 Tự luận

Bài 1. Xác định công bội, số hạng thứ 5, số hạng tổng quát và số hạng thứ 100 của mỗi cấp số nhân sau:

a) $1, 4, 16, \ldots$;   b) $2, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{8}, \ldots$

Bài 2. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân?

a) $u_n = 3(-2)^n$;

b) $u_n = (-1)^{n+1} \cdot 7^n$;

c) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3. \end{cases}$

Bài 3. Ba số $\dfrac{2}{b-a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{2}{b-c}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng ba số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

Bài 4. Cho cấp số nhân (u_n) với số hạng đầu $u_1 = -5$, công bội $q = 2$.

a) Tìm u_9.

b) Số -320 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số nhân trên?

c) Số 160 có phải là một số hạng của cấp số nhân trên không?

Bài 5. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$, $u_3 = \dfrac{27}{4}$.

a) Tìm công bội q và viết năm số hạng đầu của cấp số nhân trên.

b) Tính tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân trên.

Bài 6.

a) Số đo bốn góc của một tứ giác lập thành cấp số nhân. Tìm số đo của bốn góc đó biết rằng số đo của góc lớn nhất gấp 8 lần số đo của góc nhỏ nhất.

b) Viết sáu số xen giữa các số -2 và 256 để được cấp số nhân có tám số hạng. Nếu viết tiếp thì số hạng thứ 15 là bao nhiêu?

Bài 7. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n), biết:

a) $\begin{cases} u_5 - u_1 = 15 \\ u_4 - u_2 = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351 \end{cases}$

Bài 8. Tính các tổng sau:

a) $S_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{3^n}$; b) $S_n = 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ chữ số } 9}$.

Bài 9. Cho một cấp số nhân có tất cả các số hạng đều dương. Số hạng thứ tư của cấp số nhân là 125 và số hạng thứ 10 là $\dfrac{125}{64}$. Tìm số hạng thứ 14 của cấp số nhân này.

Bài 10. Ba số phân biệt tạo thành một cấp số nhân có tổng bằng 78; đồng thời chúng là số hạng thứ nhất, thứ ba và thứ chín của một cấp số cộng. Tìm ba số đó.

Bài 11. Một công ty xây dựng mua một chiếc máy ủi với giá 3 tỉ đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá trị của chiếc máy ủi này lại giảm 20% so với giá trị của nó trong năm liền trước đó. Tìm giá trị còn lại của chiếc máy ủi đó sau 5 năm sử dụng.

Bài 12. Một tỉnh có 2 triệu dân vào năm 2020 với tỉ lệ tăng dân số là 1 %/năm. Gọi u_n là số dân của tỉnh đó sau n năm. Giả sử tỉ lệ tăng dân số là không đổi.

a) Viết công thức tính số dân của tỉnh đó sau n năm kể từ năm 2020.

b) Tính số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020.

Bài 13. Một loại thuốc được dùng mỗi ngày một lần. Lúc đầu nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân tăng nhanh, nhưng mỗi liều kế tiếp có tác dụng ít hơn liều trước đó. Lượng thuốc trong máu ở ngày thứ nhất là 50 mg, và mỗi ngày sau đó giảm chỉ còn một nửa so với ngày kề trước đó. Tính tổng lượng thuốc (tính bằng mg) trong máu của bệnh nhân sau khi dùng thuốc 10 ngày liên tiếp.

Bài 14. Một du khách vào chuồng đua ngựa đặt cược, lần đầu tiên đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi tiền đặt lần trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khách đó thắng hay thua bao nhiêu?

Bài 15. Một gia đình mua một chiếc ô tô giá 800 triệu đồng. Trung bình sau mỗi năm sử dụng, giá trị còn lại của ô tô giảm đi 4% (so với năm trước đó).

a) Viết công thức tính giá trị của ô tô sau 1 năm, 2 năm sử dụng.

b) Viết công thức tính giá trị của ô tô sau n năm sử dụng.

c) Sau 10 năm, giá trị của ô tô ước tính còn bao nhiêu triệu đồng?

Bài 16. Một tảng băng khối lượng 1 tấn đang tan chảy. Cứ mỗi giờ, tảng băng mất đi $\dfrac{1}{5}$ khối lượng của nó. Tính khối lượng còn lại của tảng băng sau 6 giờ.

Bài 17. Iodine -131 là một đồng vị phóng xạ được sử dụng trong chẩn đoán y tế. Chu kì bán rã của nó là tám ngày. Nghĩa là sau tám ngày, khối lượng của nó chỉ còn một nửa. Tính khối lượng còn lại của 160 mg Iodine -131 sau 64 ngày. Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị (mg).

Bài 18. Một tỉnh B có dân số 1 500 000 người vào năm 2014. Giả sử tỉ lệ tăng dân số không đổi là 1,25%/năm. Tính dân số của tỉnh đó vào năm 2025. Làm tròn kết quả đến hàng chục.

Bài 19. Vào tháng 4/2022, giá thuê một căn hộ là 4 triệu đồng/tháng. Sau mỗi quý thì giá thuê tăng thêm 5%/tháng so với giá của quý trước đó. Tính giá thuê căn hộ đó vào tháng 01/2025.

Bài 20. Giả sử một thành phố có dân số năm 2022 là khoảng 2,1 triệu người và tốc độ gia tăng dân số trung bình mỗi năm là 0,75%.

a) Dự đoán dân số của thành phố đó vào năm 2032;

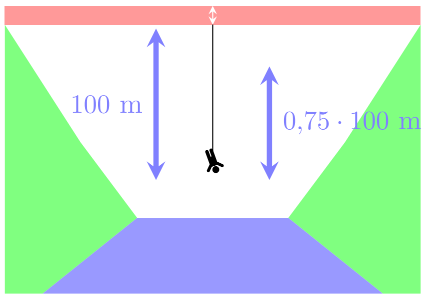
b) Nếu tốc độ gia tăng dân số vẫn giữ nguyên như trên thì ước tính vào năm nào dân số của thành phố đó sẽ tăng gấp đôi so với năm 2022?

Bài 21. Các bệnh truyền nhiễm có thể lây lan rất nhanh. Giả sử có năm người bị bệnh trong tuần đầu tiên của một đợt dịch, và mỗi người bị bệnh sẽ lây bệnh cho bốn người vào cuối tuần tiếp theo. Tính đến hết tuần thứ 10 của đợt dịch, có bao nhiêu người đã bị lây bởi căn bệnh này?

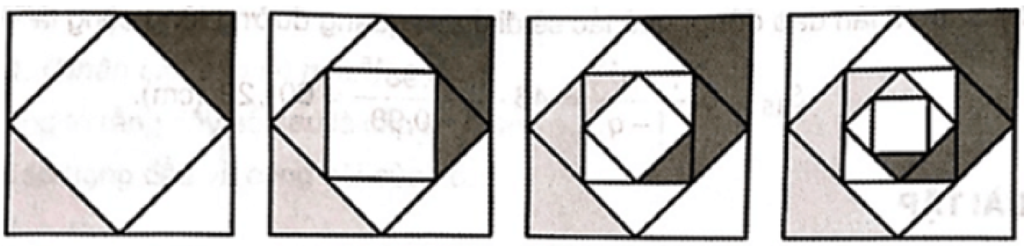
Bài 22. Nếu một kĩ sư được một công ty thuê với mức lương hằng năm là 180 triệu đồng và nhận được mức tăng lương hằng năm là 5%, thì mức lương của người kĩ sư đó là bao nhiêu khi bắt đầu năm thứ sáu làm việc cho công ty?

Bài 23. Để tích luỹ tiền cho việc học đại học của con gái, cô Hoa quyết định hằng tháng bỏ ra 500 nghìn đồng vào tài khoản tiết kiệm, được trả lãi 0,5% cộng dồn hằng tháng. Cô bắt đầu chương trình tích luỹ này khi con gái cô tròn 3 tuổi. Cô ấy sẽ tích luỹ được bao nhiêu tiền vào thời điểm gửi khoản tiền thứ 180? Lúc này con gái cô Hoa bao nhiêu tuổi?

Bài 24. Một người nhảy bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây đai an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây dài 100 m. Sau mỗi lần rơi xuống, nhờ sự đàn hồi của dây, người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 75% so với lần rơi trước đó và lại bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên. Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần kéo lên và lại rơi xuống.



Bài 25. Các cạnh của hình vuông ban đầu có chiều dài 16 cm. Một hình vuông mới được hình thành bằng cách nối các điểm giữa của các cạnh của hình vuông ban đầu và hai trong số các hình tam giác kết quả được tô màu. Nếu quá trình này được lặp lại năm lần nữa, hãy xác định tổng diện tích của vùng được tô màu.



Chuyên đề 4

ÔN TẬP CHƯƠNG 2

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{1}{n}$. Khẳng định nào đúng?

Ⓐ Dãy số (u_n) có $u_6 = \dfrac{1}{6}$.

Ⓑ Dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Ⓒ Dãy số (u_n) là dãy số không tăng không giảm.

Ⓓ Dãy số (u_n) là dãy số giảm.

Câu 2. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn?

Ⓐ $u_n = \dfrac{1}{9^n}$. Ⓑ $u_n = 9^n$.

Ⓒ $u_n = \sqrt{9n+1}$. Ⓓ $u_n = n^9$.

Câu 3. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào tăng?

Ⓐ $u_n = \dfrac{1}{2^n}$. Ⓑ $u_n = \dfrac{1}{n}$.

Ⓒ $u_n = \dfrac{n+5}{3n+1}$. Ⓓ $u_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$.

Câu 4. Cho cấp số cộng (u_n), $u_1 = 3$ và $u_2 = -1$. Tìm số hạng thứ ba của cấp số cộng.

Ⓐ $u_3 = 4$. Ⓑ $u_3 = 2$. Ⓒ $u_3 = -5$. Ⓓ $u_3 = -7$.

Câu 5. Cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$, công sai $d = 5$. Số hạng thứ tư của cấp số cộng đó là

Ⓐ $u_4 = 23$. Ⓑ $u_4 = 18$. Ⓒ $u_4 = 8$. Ⓓ $u_4 = 14$.

Câu 6. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$, $u_{14} = 18$. Tổng của 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó là

Ⓐ $S_{16} = 24$. Ⓑ $S_{16} = 26$. Ⓒ $S_{16} = 25$. Ⓓ $S_{16} = 20$.

Câu 7. Một cấp số nhân có sáu số hạng, số hạng đầu là 2 và số hạng thứ sáu bằng 486. Gọi q là công bội của cấp số nhân đó. Giá trị của q là

Ⓐ $q = 2$. Ⓑ $q = 3$. Ⓒ $q = 6$. Ⓓ $q = 4$.

Câu 8. Cho cấp số cộng: $-2; -5; -8; -11; -14; \ldots$. Công sai d và tổng 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó lần lượt là

Ⓐ $d = 3; S_{20} = 510$.
Ⓑ $d = 3; S_{20} = -610$.
Ⓒ $d = -3; S_{20} = 610$.
Ⓓ $d = -3; S_{20} = -610$.

Câu 9. Một cấp số nhân có bốn số hạng, số hạng đầu là 3 và số hạng thứ tư là 192. Gọi S là tổng các số hạng của cấp số nhân đó. Giá trị của S là

Ⓐ 390.
Ⓑ 255.
Ⓒ 256.
Ⓓ -256.

Câu 10. Trong các dãy số (u_n) được cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là cấp số nhân?

Ⓐ $u_n = 7 - 3n$.
Ⓑ $u_n = 7 \cdot 3^n$.
Ⓒ $u_n = \dfrac{7}{3n}$.
Ⓓ $u_n = 7 - 3^n$.

Câu 11. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n}{3^n - 1}$. Ba số hạng đầu của dãy số (u_n) lần lượt là

Ⓐ $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{3}{27}$.
Ⓑ $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{3}{26}$.
Ⓒ $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{3}{25}$.
Ⓓ $\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{28}$.

Câu 12. Cho dãy số: $\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3^2}; \dfrac{1}{3^3}; \dfrac{1}{3^4}; \dfrac{1}{3^5}; \ldots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là

Ⓐ $u_n = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3^{n+1}}$.
Ⓑ $u_n = \dfrac{1}{3^{n+1}}$.
Ⓒ $u_n = \dfrac{1}{3^n}$.
Ⓓ $u_n = \dfrac{1}{3^{n-1}}$.

Câu 13. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$. Phát biểu nào sau đây đúng?

Ⓐ Dãy số tăng và bị chặn.
Ⓑ Dãy số giảm và bị chặn.
Ⓒ Dãy số giảm và bị chặn dưới.
Ⓓ Dãy số giảm và bị chặn trên.

Câu 14. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1, công sai d. Khi đó, với $n \geq 2$ ta có

Ⓐ $u_n = u_1 + d$.
Ⓑ $u_n = u_1 + (n+1)d$.
Ⓒ $u_n = u_1 - (n-1)d$.
Ⓓ $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Câu 15. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và $u_2 = -1$. Khi đó

Ⓐ $u_3 = 4$.
Ⓑ $u_3 = 2$.
Ⓒ $u_3 = -5$.
Ⓓ $u_3 = 7$.

Câu 16. Một tam giác có số đo các góc lập thành cấp số nhân có công bội $q = 2$. Số đo các góc của tam giác đó lần lượt là

Ⓐ $\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}$.
Ⓑ $\dfrac{\pi}{5}; \dfrac{2\pi}{5}; \dfrac{4\pi}{5}$.
Ⓒ $\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{2\pi}{6}; \dfrac{4\pi}{6}$.
Ⓓ $\dfrac{\pi}{7}; \dfrac{2\pi}{7}; \dfrac{4\pi}{7}$.

Câu 17. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -1$ và công sai $d = 3$. Khi đó S_5 bằng

Ⓐ 11. Ⓑ 50. Ⓒ 10. Ⓓ 25.

Câu 18. Có bao nhiêu số x để $2x - 1$; x; $2x + 1$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân?

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Câu 19. Cho các dãy số sau. Dãy số nào là dãy số tăng?

Ⓐ $1; 1; 1; 1; 1; 1; \ldots$. Ⓑ $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \ldots$.

Ⓒ $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \ldots$. Ⓓ $1; 3; 5; 7; 9; \ldots$.

Câu 20. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n}$. Tìm số hạng u_3.

Ⓐ $u_3 = -\frac{8}{3}$. Ⓑ $u_3 = 2$. Ⓒ $u_3 = -2$. Ⓓ $u_3 = \frac{8}{3}$.

Câu 21. Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

Ⓐ $u_n = 2^n$. Ⓑ $u_n = 2^{n+1}$. Ⓒ $u_n = 2$. Ⓓ $u_n = n^{n-1}$.

Câu 22. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{2n+5}{5n-4}$. Số $\frac{7}{12}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

Ⓐ 9 . Ⓑ 6 . Ⓒ 10. Ⓓ 8 .

Câu 23. Trên một bàn cờ có nhiều ô vuông, người ta đặt 7 hạt dẻ vào ô đầu tiên, sau đó đặt tiếp vào ô thứ hai số hạt nhiều hơn ô thứ nhất là 5, tiếp tục đặt vào ô thứ ba số hạt nhiều hơn ô thứ hai là 5,... và cứ thế tiếp tục đến ô thứ n. Biết rằng đặt hết số ô trên bàn cờ người ta phải sử dụng 25450 hạt. Hỏi bàn cờ đó có bao nhiêu ô vuông?

Ⓐ 100. Ⓑ 102. Ⓒ 98. Ⓓ 104.

Câu 24. Nếu các số $5 + m; 7 + 2m; 17 + m$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì m bằng bao nhiêu?

Ⓐ $m = 3$. Ⓑ $m = 2$. Ⓒ $m = 4$. Ⓓ $m = 5$.

Câu 25. Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

Ⓐ $u_n = 7 - 3^n$. Ⓑ $u_n = 7 - 3n$.

Ⓒ $u_n = 7 \cdot 3^n$. Ⓓ $u_n = \frac{7}{3n}$.

Câu 26. Cho các số $-4;\ 1;\ 6;\ x$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tìm x.

Ⓐ $x = 10$. Ⓑ $x = 12$. Ⓒ $x = 11$. Ⓓ $x = 7$.

Câu 27. Một chiếc đồng hồ đánh chuông, kể từ thời điểm 0 (giờ) thì sau mỗi giờ thì số tiếng chuông được đánh đúng bằng số giờ mà đồng hồ chỉ tại thời điểm đánh chuông. Hỏi một ngày đồng hồ đó đánh bao nhiêu tiếng chuông?

Ⓐ 78. Ⓑ 156. Ⓒ 300. Ⓓ 48.

Câu 28. Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước đến để khoan giếng nước. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80.000 đồng, kể từ mét khoan thứ 2 giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5.000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50 m mới có nước. Vậy hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

Ⓐ 10.125.000 đồng. Ⓑ 4.000.000 đồng.
Ⓒ 4.245.000 đồng. Ⓓ 5.2500.000 đồng.

Câu 29. Một cấp số cộng có 8 số hạng. Số hạng đầu là 5, số hạng thứ tám là 40. Khi đó công sai d của cấp số cộng đó là bao nhiêu?

Ⓐ $d = 6$. Ⓑ $d = 4$. Ⓒ $d = 5$. Ⓓ $d = 7$.

Câu 30. Cho cấp số cộng (u_n), biết: $u_n = -1, u_{n+1} = 8$. Khẳng định nào đúng?

Ⓐ $d = -9$. Ⓑ $d = -7$. Ⓒ $d = 9$. Ⓓ $d = 7$.

Câu 31. Người ta trồng 3003 cây theo một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây, ... Hỏi có tất cả bao nhiêu hàng cây?

Ⓐ 75. Ⓑ 73. Ⓒ 77. Ⓓ 79.

Câu 32. Cho các số $-4;\ 1;\ 6;\ x$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tìm x.

Ⓐ $x = 10$. Ⓑ $x = 12$. Ⓒ $x = 11$. Ⓓ $x = 7$.

Câu 33. Dãy số nào sau đây **không** phải là cấp số cộng?

Ⓐ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{2\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}; \dfrac{4\sqrt{3}}{3}; \dfrac{5}{\sqrt{3}}$. Ⓑ $15\sqrt{2}; 12\sqrt{2}; 9\sqrt{2}; 6\sqrt{2}$.
Ⓒ $\dfrac{4}{5}; 1; \dfrac{7}{5}; \dfrac{9}{5}; \dfrac{11}{5}$. Ⓓ $-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{3}; 0; \dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}; 1; \dfrac{4}{3}$.

Câu 34. Một rạp hát có 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 25 ghế. Mỗi dãy sau có hơn dãy trước 3 ghế. Hỏi rạp hát có tất cả bao nhiêu ghế?

Ⓐ 1635. Ⓑ 2055. Ⓒ 1792. Ⓓ 3125.

Câu 35. Cho dãy số $\frac{1}{2}; 0; -\frac{1}{2}; -1; -\frac{3}{2}; \ldots$ là cấp số cộng với:

Ⓐ Số hạng đầu tiên là $\frac{1}{2}$, công sai là $-\frac{1}{2}$.

Ⓑ Số hạng đầu tiên là 0, công sai là $\frac{1}{2}$.

Ⓒ Số hạng đầu tiên là 0, công sai là $-\frac{1}{2}$.

Ⓓ Số hạng đầu tiên là $\frac{1}{2}$, công sai là $\frac{1}{2}$.

Câu 36. Ba góc của một tam giác vuông tạo thành cấp số cộng. Hai góc nhọn của tam giác có số đo (độ) là:

Ⓐ 45° và 45°. Ⓑ 20° và 45°. Ⓒ 30° và 60°. Ⓓ 20° và 70°.

Câu 37. Tính tổng $S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 + \cdots + (2n-1) - 2n$ với $n \geqslant 1$ và $n \in \mathbb{N}$.

Ⓐ $S = 0$. Ⓑ $S = -1$. Ⓒ $S = n$. Ⓓ $S = -n$.

Câu 38. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1$ và $q = -\frac{1}{10}$. Số $\frac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

Ⓐ Số hạng thứ 104.

Ⓑ Không là số hạng của cấp số đã cho.

Ⓒ Số hạng thứ 105.

Ⓓ Số hạng thứ 103.

Câu 39. Tính tổng $T = 15 + 20 + 25 + \cdots + 7515$.

Ⓐ $T = 5651625$. Ⓑ $T = 5651265$.

Ⓒ $T = 5651526$. Ⓓ $T = 5651256$.

Câu 40. Một tam giác vuông có chu vi bằng 3 và độ dài các cạnh lập thành một cấp số cộng. Độ dài các cạnh của tam giác đó là

Ⓐ $\frac{3}{4}; 1; \frac{5}{4}$. Ⓑ $\frac{1}{4}; 1; \frac{7}{4}$. Ⓒ $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}$. Ⓓ $\frac{1}{3}; 1; \frac{5}{3}$.

Câu 41. Tính tổng 100 số hạng đầu tiên, tính từ 1.

Ⓐ 10 000 . Ⓑ 10 100 . Ⓒ 20 000 . Ⓓ 20 200 .

Câu 42. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -2$ và $q = -5$. Viết bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

Ⓐ $-2; -10; -50; -250$. Ⓑ $-2; 10; -50; 250$.

Ⓒ $-2; 10; 50; -250$. Ⓓ $-2; 10; 50; 250$.

Câu 43. Một cấp số nhân có hai số hạng liên tiếp là 16 và 36. Số hạng tiếp theo là

Ⓐ 81. Ⓑ 64. Ⓒ 720. Ⓓ 56.

2 Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho dãy số (u_n), biết $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $n \geqslant 1$. Khi đó:

Phát biểu	Đ	S
A Năm số hạng đầu tiên của dãy số lần lượt là $-1; 2; 5; 8; 11$.		
B Số hạng thứ tám của dãy là 19 .		
C Công thức số hạng tổng quát của dãy số là: $u_n = 2n - 3$.		
D 104 là số hạng thứ 36 của dãy số đã cho .		

Câu 2. Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_1 + u_5 = 51; u_2 + u_6 = 102$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
A Số hạng đàu $u_1 = 3$.		
B Số hạng $u_4 = 48$.		
C Số 12 288 là số hạng thứ 12 của cấp số nhân (u_n) .		
D Tổng tám số hạng đầu của cấp số nhân là 765 .		

Câu 3. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 15 \\ u_1 + u_6 = 27 \end{cases}$

Phát biểu	Đ	S
A Công sai cấp số cộng bằng -2 .		
B Số hạng đầu $u_1 = 21$.		
C Số hạng $u_{11} = -9$.		
D Số -6048 là số hạng thứ 2024 .		

Câu 4. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = -2, d = -5$.

Phát biểu	Đ	S

A $u_2 = -7$.		
B Tổng của 100 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) là -24950 .		
C Số -902 là số hạng thứ 180 của dãy số (u_n) .		
D Dãy số (u_n) là một dãy số tăng .		

Câu 5. Cho dãy số (a_n) xác định bởi hệ thức truy hồi $a_1 = 2, a_{n+1} = -2a_n$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Phát biểu	Đ	S
A (a_n) là một cấp số nhân với $\begin{cases} a_1 = 2 \\ q = -2 \end{cases}$.		
B Số hạng thứ 8 của dãy bằng 256 .		
C Số -2048 là một số hạng của dãy .		
D $S_{10} = -682$.		

Câu 6. Cho dãy số (u_n) với $u_3 = 3^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Phát biểu	Đ	S
A $u_4 < 100$.		
B $\dfrac{u_1 + u_9}{2} = u_5$.		
C Dãy số tăng và bị chặn .		
D $1 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2024} = \dfrac{u_{2024} - 1}{2}$.		

Câu 7. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội dương và các số hạng thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 9 \\ u_3 = 36 \end{cases}$.

Phát biểu	Đ	S
A $q = 3$.		
B Công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân: $u_n = 9 \cdot 2^{n-1}$.		
C Số 576 là số hạng thứ 6 của cấp số nhân .		
D Tổng của 9 số hạng đầu tiên bằng 4599 .		

Câu 8. Cho cấp số nhân có hai số hạng đầu tiên là các số dương, tích của số hạng đầu và số hạng thứ ba bằng 1, tích của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng $\frac{1}{16}$. Khi đó:

Phát biểu	Đ	S
A Công bội q của cấp số nhân đã cho là số dương .		
B Số hạng đầu của cấp số nhân đã cho là $u_1 = 2$.		
C Số hạng thứ 10 của cấp số nhân là $u_{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^9$.		
D Tổng của 10 số hạng đầu của cấp số nhân bằng $\frac{1023}{256}$.		

Câu 9. Cho dãy số (u_n) với $u_2 = 2 + \frac{5}{5^n}$. Khi đó:

Phát biểu	Đ	S
A $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{5^n}$.		
B Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn .		
C Dãy số (u_n) là dãy số giảm .		
D $\frac{255}{12}$ là số hạng thứ 5 của dãy số .		

Câu 10. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = \frac{3}{2}$ và công sai $d = \frac{1}{2}$.

Phát biểu	Đ	S
A Công thức số hạng tổng quát $u_n = 1 + \frac{n}{3}$.		
B $\frac{15}{4}$ là một số hạng của cấp số cộng đã cho .		
C 5 là số hạng thứ 8 của cấp số cộng đã cho .		
D Tổng 100 số hạng đầu của cấp số cộng (u_n) bằng 2620 .		

Câu 11. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2n + 1$. Khi đó:

Phát biểu	Đ	S
A Dạng khai triển của dãy số là 3;5;7;9;11;... .		
B Số hạng đầu $u_1 = 2$.		
C Dãy số đã cho là một cấp số cộng .		
D Tổng của 24 số hạng đầu là $S_{24} = 650$.		

Câu 12. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4$. Biết tổng 20 số hạng đầu tiên bằng 460.

Phát biểu	Đ	S	Phát biểu	Đ	S
A $d = 2$.			**C** $S_{10} = 120$.		
B $u_4 = 8$.			**D** $u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 = 60$.		

Câu 13. Một rạp hát có 20 hàng ghế. Hàng thứ nhất có 20 ghế, số ghế ở các hàng sau đều hơn số ghế của hàng ngay trước đó một ghế. Cho biết rạp hát đã bán hết vé với giá mỗi vé là 60.000 đồng.

Phát biểu	Đ	S
A Số ghế ở mỗi hàng ghế trong rạp hát tạo thành một cấp số cộng với $u_1 = 20, d = 1$.		
B Hàng thứ 15 có 35 ghế .		
C Tổng số ghế trong rạp hát là 600 (ghế) .		
D Tổng số tiền vé thu được của rạp là 35.400.000 đồng. Biết rằng mỗi người một vé chỉ ngồi được một ghế .		

Câu 14. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 5$ và $u_2 = 9$. Khi đó:

Phát biểu	Đ	S
A Công sai của cấp số cộng $d = 6$.		
B Số hạng thứ 85 là 341 .		
C Số hạng thứ 10 là 42 .		
D Tổng 85 số hạng đầu của cấp số cộng là $S_{85} = 14\,705$.		

Câu 15. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$.

Phát biểu	Đ	S
A $u_2 = \dfrac{5}{4}; u_3 = \dfrac{7}{5}$.		
B Số $\dfrac{167}{84}$ là số hạng thứ 252 của dãy số (u_n) .		
C $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.		

D Dãy (u_n) là dãy số bị chặn .		

Câu 16. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = u_{n-1} + 3 \quad (n \geqslant 2, n \in \mathbb{N}). \end{cases}$

Phát biểu	Đ	S
A $u_2 = 5$; $u_6 = 16$.		
B $u_{n+1} - u_n = 3 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.		
C Dãy số (u_n) đã cho là một cấp số cộng.		
D Dãy số (u_n) đã cho có số hạng tổng quát là $u_n = 3n - 1 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.		

Câu 17. Cho cấp số cộng có $u_1 = -2$ và công sai $d = 4$.

Phát biểu	Đ	S
A Dãy số trên có công thức truy hồi là $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = u_n - 4 \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$.		
B Số hạng tổng quát của cấp số cộng đã cho là $u_n = 4n - 4$.		
C Tổng 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho là 19600 .		
D $s_n = n\left(\dfrac{u_n + 6}{4} - 2\right)$ (với s_n là tổng n số hạng đầu, u_n là số hạng tổng quát).		

Câu 18. Trong một hội chợ đón Xuân, một gian hàng sữa muốn xếp 900 hộp sữa theo quy luật là hàng trên cùng có 1 hộp sữa, mỗi hàng ngay phía dưới lần lượt được xếp nhiều hơn 2 hộp so với hàng trên nó.

Phát biểu	Đ	S
A Số hộp sữa ở các hàng lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 2$.		
B Hàng thứ 10 có 20 hộp sữa .		
C 23 hộp là số hộp sữa ở hàng thứ 12 .		
D Cần 30 hàng để xếp hết tất cả số hộp sữa lên gian hàng .		

Câu 19. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_5 - u_2 = 256 \\ u_6 - u_3 = 468 \end{cases}$.

Phát biểu	Đ	S
A Số hạng đầu của cấp số nhân bằng 3 .		
B Số hạng thứ 5 của cấp số nhân bằng 160 .		
C Tổng của 12 số hạng đầu tiên bằng 531440 .		
D Số 39366 là số hạng thứ 10 của cấp số nhân .		

Câu 20. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 3u_{n-1} \end{cases}$

Phát biểu	Đ	S
A Ba số hạng đầu của dãy là $3; 9; 26$.		
B Dãy (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 3$.		
C Số hạng thứ 10 của dãy là $u_{10} = 59\ 049$.		
D Tổng 11 số hạng đầu của dãy trên là 88 572 .		

3 Tự luận

Bài 1. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của mỗi dãy số (u_n) sau, biết số hạng tổng quát:

a) $u_n = \dfrac{n^2}{n+1}$; b) $u_n = \dfrac{2}{n^5}$; c) $u_n = (-1)^n.n^2$.

Bài 2. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) biết:

a) $\begin{cases} 5u_1 + 10u_5 = 0 \\ S_4 = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$.

Bài 3. Tìm số hạng đầu u_1 và cộng bội q của cấp số nhân (u_n) biết:

a) $\begin{cases} u_5 = 96 \\ u_6 = 192 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_4 + u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases}$.

Bài 4. Chu vi của một đa giác là 213 cm, số đo các cạnh của nó lập thành cấp số cộng với công sai $d = 7$ cm và cạnh lớn nhất bằng 53 cm. Tính số cạnh của đa giác đó.

Bài 5. Tứ giác $ABCD$ có số đo bốn góc A, B, C, D theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Biết số đo góc C gấp 5 lần góc A. Tính số đo các góc của tứ giác $ABCD$ theo đơn vị độ.

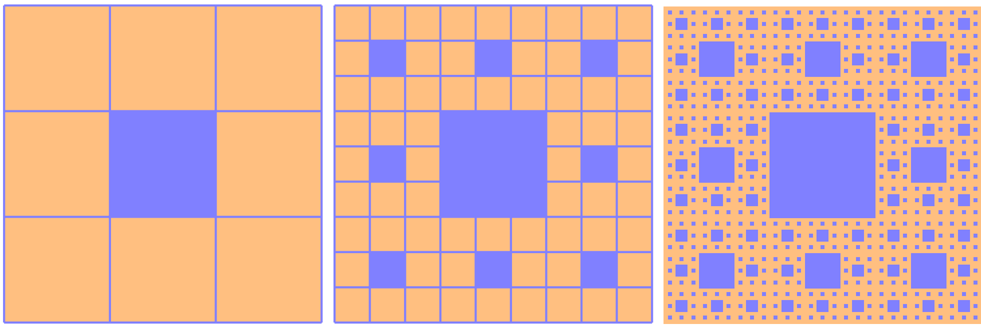
Bài 6. Tìm ba số, biết theo thứ tự đó chúng lập thành cấp số cộng và có tổng bằng 21, và nếu lần lượt cộng thêm các số 2; 3; 9 vào ba số đó thì được ba số lập thành một cấp số nhân.

Bài 7. Mặt sàn tầng một (tầng trệt) của một ngôi nhà cao hơn mặt sân $0,5$ m. Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai gồm 25 bậc, mỗi bậc cao 16 cm.

a) Viết công thức để tìm độ cao của bậc cầu thang thứ n so với mặt sân.

b) Tính độ cao của sân tầng hai so với mặt sân.

Bài 8. Một hình vuông màu vàng có cạnh 1 đơn vị dài được chia thành chín hình vuông nhỏ hơn và hình vuông ở chính giữa được tô màu xanh như Hình vẽ. Mỗi hình vuông màu vàng nhỏ hơn lại được chia thành chín hình vuông con, và mỗi hình vuông con ở chính giữa lại được tô màu xanh. Nếu quá trình này được tiếp tục lặp lại năm lần, thì tổng diện tích các hình vuông được tô màu xanh là bao nhiêu?



Bài 9. Giả sử quần thể động vật này ở thời điểm ban đầu có 110000 cá thể, quần thể này có tỉ lệ sinh là 12%/năm, xuất cư 2%/năm, tử vong 8%/năm. Dự đoán số cá thể của quần thể đó sau 2 năm.

Bài 10. Một cây đàn organ có tần số âm thanh các phím liên tiếp tạo thành một cấp số nhân. Cho biết tần số phím La trung là 400 Hz và tần số của phím La cao cao hơn 12 phím là 800 Hz (nguồn: https://vi.wikipedia.org/wikiOrgan). Tìm công bội của cấp số nhân nói trên (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

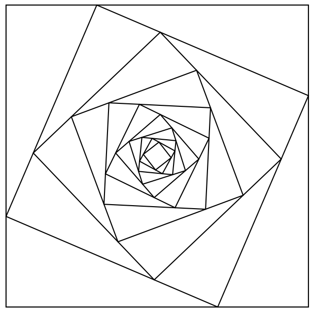
Bài 11. Dân số Việt Nam năm 2020 là khoảng 97,6 triệu người (theo Niên giám thống kê năm 2020). Nếu trung bình mỗi năm tăng 1,14% thì ước tính dân số Việt Nam năm 2040 là khoảng bao nhiêu người (làm tròn kết quả đến hàng trăm nghìn)?

Bài 12. Một khay nước có nhiệt độ 23° được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước giảm 20%. Tính nhiệt độ của khay nước đó sau 6 giờ (đơn vị độ C).

Bài 13. Người ta trồng cây theo các hàng ngang với quy luật: ở hàng thứ nhất có 1 cây, ở hàng thứ hai có 2 cây, ở hàng thứ ba có 3 cây, ... ở hàng thứ n có n cây. Biết rằng người ta trồng hết 4950 cây. Hỏi số hàng cây được trồng theo cách trên là bao nhiêu?

Bài 14. Một cái tháp có 11 tầng. Diện tích của mặt sàn tầng 2 bằng nửa diện tích của mặt đáy tháp và diện tích của mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt sàn mỗi tầng ngay bên dưới. Biết mặt đáy tháp có diện tích là $12288m^2$. Tính diện tích của mặt sàn tầng trên cùng của tháp theo đơn vị mét vuông.

Bài 15. Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 4. Người ta chia mỗi cạnh hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 (*Hình 4*). Từ hình vuông C_2 lại làm tiếp tục như trên để có hình vuông C_3. Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, \ldots$ Gọi a_n là độ dài cạnh hình vuông C_n. Chứng Tài rằng dãy số (a_n) là cấp số nhân.



Hình 4

Bài 16. Ông An vay ngân hàng 1 tỉ đồng với lãi suất 12%/năm. Ông đã trả nợ theo cách: Bắt đầu từ tháng thứ nhất sau khi vay, cuối tháng ông trả ngân hàng số tiền là a (đồng) và đã trả hết nợ sau đúng 2 năm kể từ ngày vay. Hỏi số tiền mỗi tháng mà ông An phải trả là bao nhiêu đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?

Bài 17. Một kỹ sư ra trường làm việc tại một công ty A với mức lương tháng khởi điểm là 7 triệu đồng và cứ sau mỗi hai quý liên tiếp, lương tháng sẽ tăng thêm 7%. Tiền lương của anh kỹ sư chỉ để dành mua xe ô tô. Hỏi sau hai năm thì anh kỹ sư mua được ô tô với giá 500 triệu đồng được không, biết rằng anh kỹ sư được gia đình hỗ trợ 30% giá trị chiếc xe (tiền lương được làm tròn đến hàng triệu đồng, biết 1 quý bằng 3 tháng).

Bài 18. Trực khuẩn E. Coli là loại vi khuẩn sinh sống trong đường tiêu hoá của người. Nó có lợi ích như ngăn chặn sự tấn công của vi khuẩn vào đường tiêu hóa, kích thích hệ miễn dịch của cơ thể và một số lợi ích khác, nhưng cũng là tác nhân gây bệnh tiêu chảy. Nó sinh sản theo hình thức phân bào. Trong điều kiện thích hợp thì cứ 20 phút, số tế bào E. Coli tăng gấp đôi. Nếu ban đầu có 1000 tế bào E. Coli, trong điều kiện thích hợp thị sau 5 giờ số tế bào E. Coli là bao nhiêu?

Bài 19. Anh Nam là một cầu thủ bóng đá chuyên nghiệp. Anh vừa kí hợp đồng 5 năm với một câu lạc bộ với mức lương năm khởi điểm là 300 triệu đồng. Chủ tịch câu lạc bộ đưa ra cho anh Nam ba phương án về lương như sau:

- *Phương án 1:* Mỗi năm ngoài mức lương cố định như trên, sẽ được thưởng thêm 50 triệu đồng.
- *Phương án 2:* Mỗi năm lương sẽ tăng thêm 10% so với lương năm trước đó, bắt đầu kể từ năm thứ hai.
- *Phương án 3:* Mỗi năm lương sẽ tăng thêm 30 triệu so với lương năm trước đó, bắt đầu kể từ năm thứ hai.

Em hãy tính giúp anh Nam xem với phương án lương nào thì tổng lương sau 5 năm của anh Nam là lớn nhất?

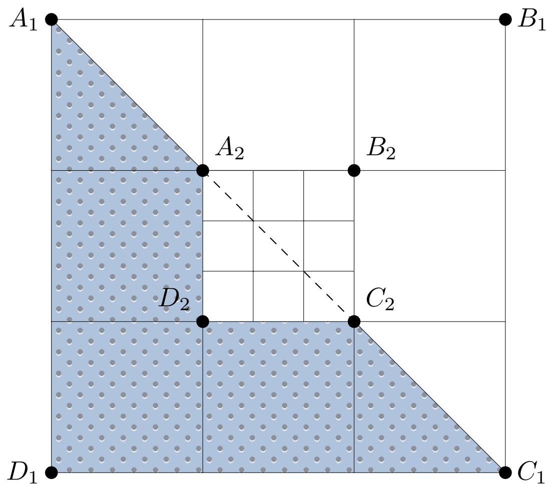
Bài 20. Với hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ như hình vẽ bên, cách tô màu như hình được gọi là cách tô màu "đẹp". Một nhà thiết kế tiến hành tô màu cho một hình vuông như hình bên, theo quy trình sau:

Bước 1: Tô màu "đẹp"cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$.

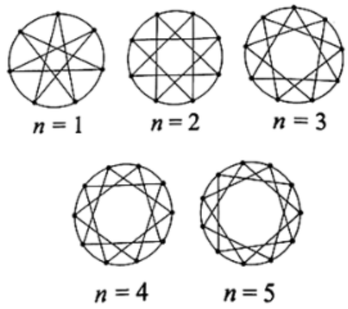
Bước 2: Tô màu "đẹp"cho hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ là hình vuông ở chính giữa khi chia hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ thành 9 phần bằng nhau như hình vẽ.

Bước 3: Tô màu "đẹp" cho hình vuông $A_3B_3C_3D_3$ là hình vuông ở chính giữa khi chia hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ thành 9 phần bằng nhau. Cứ tiếp tục như vậy.

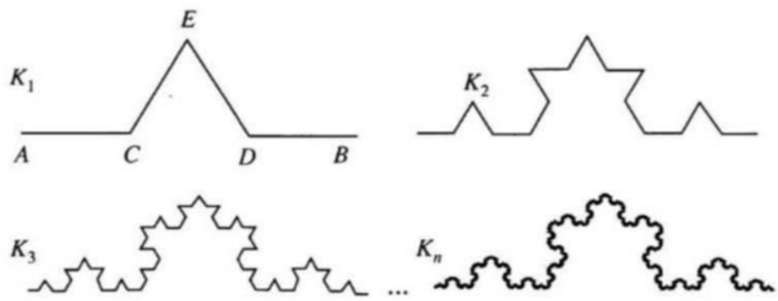
Hỏi cần ít nhất mấy bước để tổng diện tích phần được tô màu chiếm nhiều hơn $49,99\%$.



Bài 21. Với mỗi số nguyên dương n, lấy $n+6$ điểm cách đều nhau trên đường tròn. Nối mỗi điểm với điểm cách nó hai điểm trên đường tròn đó để tạo thành các ngôi sao như Hình vẽ. Gọi u_n là số đo góc ở đỉnh tính theo đơn vị độ của mỗi ngôi sao thì ta được dãy số (u_n). Tính u_{12}.



Bài 22. Đường Von Kốc (von Koch) là một hình được xây dựng bằng phương pháp lặp như sau: Từ đoạn thẳng AB ban đầu ta chia nó thành ba phần bằng nhau $AC = CD = DB$, dựng tam giác đều CED rồi bỏ đi khoảng CD ta được đường gấp khúc $ACEDB$ kí hiệu là K_1. Lặp lại quy tắc đó cho các đoạn AC, CE, ED, DB ta được đường gấp khúc K_2 (hình vẽ Tài họa). Tiếp tục quá trình này ta được các đường gấp khúc $K_3, K_4, \ldots$ Biết đoạn thẳng AB có độ dài 2 mét. Tính độ dài đường gấp khúc K_{10} (đơn vị: mét, làm tròn đến hàng phần chục).



Bài 23. Năm 2018 anh Tài tốt nghiệp trường Đại Học Bách Khoa Hà Nội. Vừa ra trường anh Tài đã được nhận vào làm việc tại một công ty Điện Tử ở Hà Nội. Tháng đầu tiên đi làm, anh Tài được công ty trả lương 5 triệu đồng, nhờ chăm chỉ làm việc và hoàn thành tốt các công việc được giao nên cứ mỗi tháng sau công ty đó lại tăng 5% lương so với tháng trước. Mỗi khi lĩnh lương anh Tài đều cất đi phần lương tăng so với tháng trước để tiết kiệm, phần lương còn lại anh Tài dùng cho chi phí sinh hoạt. Hỏi sau 5 năm (tính từ thời điểm bắt đầu làm việc tại công ty) thì anh Tài tiết kiệm được bao nhiêu triệu đồng (kết quả làm tròn đến chữ số hàng đơn vị)?

Bài 24. Trong một buổi sinh hoạt trải nghiệm của học sinh trường THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, học sinh được tham gia trò chơi mang tên: ĐI TÌM TỪ KHÓA và trò chơi sẽ kết thúc khi có học sinh nói đúng từ khoá. Học sinh sẽ trả lời từ khoá sau mỗi gợi ý của Ban tổ chức.

Quy tắc của trò chơi:

- Học sinh nào trả lời đúng đáp án sau gợi ý thứ nhất sẽ được nhận nửa số kẹo Ban tổ chức đang có.
- Nếu học sinh trả lời đúng đáp án sau gợi ý thứ hai thì số kẹo nhận được sẽ bị giảm một nửa.

Tiếp tục quy luật đó: mỗi lần thêm một gợi ý, số kẹo nhận được sẽ bị giảm một nửa. Sau mỗi lượt gợi ý, nếu không có học sinh nào nói đúng từ khoá thì sẽ chuyển số kẹo ở lượt đó cho câu lạc bộ CKTU-CKT Union. Biết rằng trong buổi sinh hoạt này, học sinh trả lời đúng đáp án sau 6 gợi ý và Ban tổ chức chỉ còn lại 1 cái kẹo sau khi kết thúc trò chơi. Hỏi câu lạc bộ CKTU-CKT Union nhận được từ Ban tổ chức bao nhiêu cái kẹo?

Chương 3

GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Mục lục của chương

Bài 1. Giới hạn của dãy số 169
Bài 2. Giới hạn của hàm số 182
Bài 3. Hàm số liên tục 196
Bài 4. Ôn tập chương 3 210

Chuyên đề 1

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

I. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

1) Giới hạn 0 của dãy số

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ nhỏ hơn một số dương bất kì cho trước, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$. Ta còn viết $\lim u_n = 0$.

Một số giới hạn cơ bản:

- $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$, với k nguyên dương bất kì.
- $\lim q^n = 0$, với q là số thực thoả mãn $|q| < 1$.
- Nếu $\left|u_n\right| \leqslant v_n$ với mọi $n \geqslant 1$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

Ví dụ 1 ★☆☆☆☆

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{1}{n^2}$.

b) $\lim \left(-\dfrac{3}{4}\right)^n$.

Hướng dẫn giải.

a) Ta có $\lim \dfrac{1}{n^2} = 0$.

b) Vì $\left|-\dfrac{3}{4}\right| < 1$ nên $\lim \left(-\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$.

2) Giới hạn hữu hạn của dãy số

Ta nói dãy số (u_n) **có giới hạn hữu hạn** là số a (hay u_n dần tới a) khi n dần tới dương vô cực, nếu $\lim (u_n - a) = 0$. Khi đó, ta viết $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ hay $\lim u_n = a$ hay $u_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

LƯU Ý. Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim u_n = \lim c = c$.

Ví dụ 2 ★☆☆☆☆

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \left[2+\left(\dfrac{2}{3}^n\right)\right]$.

b) $\lim \left(\dfrac{1-4n}{n}\right)$.

Hướng dẫn giải.

a) Đặt $u_n = 2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ ta có $u_n - 2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Suy ra $\lim(u_n-2) = \lim\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Vì $\left|\dfrac{2}{3}\right| < 1$ nên $= \lim\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ hay $\lim(u_n-2)=0$ hay $\lim u_n = 2$.

Vậy $\lim\left[2+\left(\dfrac{2}{3}^n\right)\right] = 2$.

b) Đặt $v_n = \dfrac{1-4n}{n} = \dfrac{1}{n} - 4$ hay $v_n + 4 = \dfrac{1}{n}$.

Suy ra $\lim(v_n+4) = \lim\dfrac{1}{n}$ mà $\lim\dfrac{1}{n} = 0$, suy ra $\lim(v_n+4)=0$ hay $\lim v_n = -4$.

Vậy $\lim\left(\dfrac{1-4n}{n}\right) = -4$.

1. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{3\cdot 2^n - 1}{2^n}$. Chứng minh rằng $\lim u_n = 3$.

II. CÁC PHÉP TOÁN VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

Cho $\lim u_n = a$, $\lim v_n = b$ và c là hằng số. Khi đó

- $\lim(u_n+v_n) = a+b$.
- $\lim(u_n-v_n) = a-b$.
- $\lim(c\cdot u_n) = c\cdot a$.
- $\lim(u_n\cdot v_n) = a\cdot b$.
- $\lim\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$ $(b\neq 0)$.
- Nếu $u_n \geqslant 0, \forall n\in\mathbb{N}^*$ thì $a\geqslant 0$ và $\lim\sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

Ví dụ 3 ★☆☆☆☆

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\dfrac{n^2-2n+1}{2-3n^2}$.

b) $\lim\dfrac{2n^2+n-3}{n^3+5}$.

c) $\lim\dfrac{\sqrt{9n^2+1}}{n}$.

d) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$.

e) $\lim\left(\dfrac{1+3^n}{3\cdot 3^n+2^n}\right)$.

f) $\lim\dfrac{1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+\cdots+2^n}{5\cdot 2^n+1}$.

Hướng dẫn giải.

a) $\lim \dfrac{n^2-2n+1}{2-3n^2} = \underbrace{\lim \dfrac{1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{2}{n^2}-3}}_{\text{chia cả tử và mẫu cho } n^2} = \dfrac{\lim 1 - \lim \dfrac{2}{n} + \lim \dfrac{1}{n^2}}{\lim \dfrac{2}{n^2} - 3} = \dfrac{1-0+0}{0-3} = -\dfrac{1}{3}.$

b) $\lim \dfrac{2n^2+n-3}{n^3+5} = \underbrace{\lim \dfrac{\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{3}{n^3}}{1+\dfrac{5}{n^3}}}_{\text{chia cả tử và mẫu cho } n^3} = \dfrac{\lim \dfrac{2}{n} + \lim \dfrac{1}{n^2} - \lim \dfrac{3}{n^3}}{\lim 1 + \lim \frac{5}{n^3}} = \dfrac{0+0-0}{1+0} = 0.$

c) Ta có $\dfrac{\sqrt{9n^2+1}}{n} = \dfrac{\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2}} = \sqrt{\dfrac{9n^2+1}{n^2}} = \sqrt{9+\dfrac{1}{n^2}}.$

Từ đó:

$$\lim \dfrac{\sqrt{9n^2+1}}{n} = \lim \sqrt{9+\dfrac{1}{n^2}} = \sqrt{\lim\left(9+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \sqrt{\lim 9 + \lim \dfrac{1}{n^2}} = \sqrt{9+0} = 3.$$

d)

$$\begin{aligned}
\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right) &= \lim \dfrac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim \dfrac{(n^2+2n)-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n}\\
&= \lim \dfrac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim \dfrac{2n}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1\right)} = \lim \dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1}\\
&= \dfrac{\lim 2}{\lim\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1\right)} = \dfrac{2}{\sqrt{\lim 1 + \lim \dfrac{2}{n}} + \lim 1} = \dfrac{2}{\sqrt{1+0}+1} = 1.
\end{aligned}$$

e) $\lim\left(\dfrac{1+3^n}{3\cdot 3^n+2^n}\right) = \lim\left[\dfrac{\dfrac{1}{3^n}+1}{3+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}\right] = \dfrac{\lim \frac{1}{3^n} + \lim 1}{\lim 3 + \lim\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \dfrac{1}{3}.$

f) Xét cấp số nhân $1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots, 2^n$ có số hạng đầu tiên $u_1 = 1$, công bội $q = 2$ và có số hạng tổng quát $u_n = 2^n \Leftrightarrow u_1 \cdot q^{m-1} = 2^n \Leftrightarrow 2^{m-1} = 2^n \Leftrightarrow m = n+1$.

Tổng các số hạng của cấp số nhân trên là $S_n = u_1 \cdot \dfrac{q^n-1}{q-1} = \dfrac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1}-1.$

Suy ra $\lim \dfrac{2^{n+1}-1}{5\cdot 2^n+1} = \lim \dfrac{2\cdot 2^n-1}{5\cdot 2^n+1} = \lim \dfrac{2-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{5+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n} = \dfrac{2-0}{5+0} = \dfrac{2}{5}.$

2 Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{6-7n^2}{2n^3+9}$. b) $\lim \dfrac{\sqrt{2n^2+1}}{n+1}$. c) $\lim \dfrac{5^n+2\cdot 6^n}{6^n+4^n}$.

③ Một quả bóng cao su được thả từ độ cao 5 m xuống mặt sàn. Sau mỗi lần chạm sàn, quả bóng nảy lên độ cao bằng $\frac{2}{3}$ độ cao trước đó. Giả sử rằng quả bóng luôn chuyển động vuông góc với mặt sàn và quá trình này tiếp diễn vô hạn lần. Giả sử u_n là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng sau lần nảy lên thứ n. Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn là 0.

III. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q thoả mãn $|q| < 1$ được gọi là **cấp số nhân lùi vô hạn**.

Cấp số nhân lùi vô hạn này có tổng là $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \dfrac{u_1}{1-q}$.

Ví dụ 4 ★☆☆☆☆

Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $S = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \ldots$

Hướng dẫn giải. Tổng trên là tổng cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1$ và $q = \frac{1}{3}$ nên

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 5 ★☆☆☆☆

Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn $2,(12) = 2{,}121212\ldots$ thành phân số.

Hướng dẫn giải. Ta có: $2,(12) = 2 + 0,(12)$.

Mà

$$\begin{aligned} 0,(12) &= 0{,}121212\ldots \\ &= 0{,}12 + 0{,}0012 + 0{,}000012 + 0{,}00000012 + \ldots \\ &= 0,12 + +0,12 \cdot \frac{1}{100^2} + 0,12 \cdot \frac{1}{100^2} + 0,12 \cdot \frac{1}{100^4} + \cdots \end{aligned}$$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu bằng 0,12 và công bội bằng $\frac{1}{100}$.

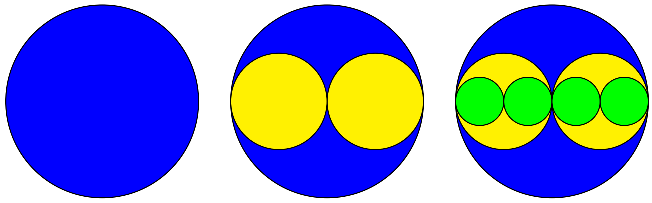
$$\text{Tổng này bằng } 0{,}12 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{12}{100} \cdot \frac{1}{\frac{99}{100}} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

Vậy $2,(12) = 2 + \frac{4}{33} = \frac{70}{33}$.

Ví dụ 6 ★☆☆☆☆

Từ tờ giấy, cắt một hình tròn bán kính R (cm) như Hình a.

Tiếp theo, cắt hai hình tròn bán kính $\frac{R}{2}$ rồi chồng lên hình tròn đầu tiên như Hình b. Tiếp theo, cắt bốn hình tròn bán kính $\frac{R}{4}$ rồi chồng lên các hình trước như Hình c. Cứ thế tiếp tục mãi. Tính tổng diện tích của các hình tròn.



$a)$ $b)$ $c)$

Hướng dẫn giải. Diện tích của các hình tròn trong các lần cắt là

- Lần thứ 1: $S_1 = \pi R^2$.
- Lần thứ 2: $S_2 = 2 \cdot \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{2}$.
- Lần thứ 3: $S_2 = 4 \cdot \pi \left(\frac{R}{4}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{2^2}$.
- Lần thứ n: $S_n = \frac{\pi R^2}{2^{n-1}}$.

Do đó diện tích các hình tròn lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $S_1 = \pi R^2$ và công bội $q = \frac{1}{2}$ nên tổng diện tích các hình tròn là $S_1 + S_2 + \cdots = \frac{\pi R^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2\pi R^2$.

(4) Tính tổng $S = 2 + \frac{2}{7} + \frac{2}{49} + \cdots + \frac{2}{7^{n-1}} + \cdots$.

(5) Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,(3)$ dưới dạng phân số.

IV. GIỚI HẠN TẠI VÔ CỰC

- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu u_n lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.
- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu $\lim(-u_n) = +\infty$, kí hiệu $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.

LƯU Ý. Ta có các kết quả sau:

a) $\lim u_n = +\infty$ khi và chỉ khi $\lim(-u_n) = -\infty$.

b) Nếu $\lim u_n = +\infty$ hoặc $\lim u_n = -\infty$ thì $\lim \dfrac{1}{u_n} = 0$.

c) Nếu $\lim u_n = 0$ và $u_n > 0$ với mọi n thì $\lim \dfrac{1}{u_n} = +\infty$.

Nhận xét:

a) $\lim n^k = +\infty$ $(k \in \mathbb{N},\ k \geq 1)$.

b) $\lim q^n = +\infty$ $(q > 1)$.

Ví dụ 7

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim(n^2 + 3n - 5)$.

b) $\lim \dfrac{n^2+7}{1-2n}$.

c) $\lim(3^n - 2^n)$.

Hướng dẫn giải.

a) $n^2 + 3n - 5 = n^2\left(1 + \dfrac{3}{n} - \dfrac{5}{n^2}\right)$.

Ta có $\lim n^2 = +\infty$ và $\lim\left(1 + \dfrac{3}{n} - \dfrac{5}{n^2}\right) = \lim 1 + \lim \dfrac{3}{n} - \lim \dfrac{5}{n^2} = 1 + 0 - 0 = 1$.

Suy ra $\lim(n^2 + 3n - 5) = \lim\left[n^2\left(1 + \dfrac{3}{n} - \dfrac{5}{n^2}\right)\right] = +\infty$.

b) $$\frac{n^2+7}{1-2n} = \frac{n^2\left(1+\dfrac{7}{n^2}\right)}{n\left(\dfrac{1}{n}-2\right)} = \frac{n\left(1+\dfrac{7}{n^2}\right)}{\dfrac{1}{n}-2}$$

Ta có $\lim n = +\infty$ và $\lim\left(\dfrac{1+\dfrac{7}{n^2}}{\dfrac{1}{n}-2}\right) = \dfrac{\lim 1 + \lim \dfrac{7}{n^2}}{\lim \dfrac{1}{n} - \lim 2} = \dfrac{1+0}{0-2} = -\dfrac{1}{2}$

Suy ra $\lim \dfrac{n^2+7}{1-2n} = \lim\left(n \cdot \dfrac{1+\dfrac{7}{n^2}}{\dfrac{1}{n}-2}\right) = -\infty$

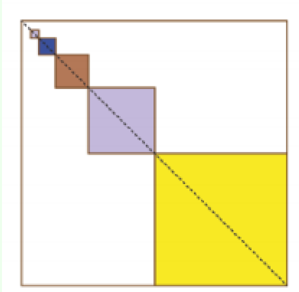
c) $3^n - 2^n = 3^n\left(1 - \dfrac{2^n}{3^n}\right) = 3^n\left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$

Ta có $\lim 3^n = +\infty$ và $\lim\left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right) = 1 - \lim\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 1 - 0 = 1$

Suy ra $\lim(3^n - 2^n) = \lim\left[3^n\left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)\right] = +\infty$.

(6) Một nhà thầu nhận được hợp đồng sơn màu trang trí một bức tường hình vuông màu trắng kích thước 4m × 4m của một trường mẫu giáo. Hai điều kiện của hợp đồng như sau:

a) Các hình vuông cần sơn màu như hình vẽ. Hình vuông lớn nhất có diện tích bằng một phần tư diện tích bức tường được sơn màu tùy ý khác màu trắng. Mỗi hình vuông tiếp theo có diện tích bằng một phần tư diện tích hình vuông trước nó, được sơn màu khác với hình vuông trước đó và màu trắng;



b) Một phần ba bức tường phải được sơn màu.

Sau khi xem các điều kiện của hợp đồng thì nhà thầu từ chối vì cho rằng không thể thực hiện theo yêu cầu của nhà trường. Hãy giải thích lí do vì sao họ từ chối hợp đồng.

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm

Câu 1. Phát biểu nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\lim \dfrac{1}{2^n} = 0$.

Ⓑ $\lim \left(\dfrac{3}{2}\right)^n = 0$.

Ⓒ $\lim \dfrac{1}{(\sqrt{2})^n} = 0$.

Ⓓ $\lim \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$.

Câu 2. Cho $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$. Phát biểu nào dưới đây **sai**?

Ⓐ $\lim(u_n + v_n) = a + b$.

Ⓑ $\lim(u_n - v_n) = a - b$.

Ⓒ $\lim(u_n \cdot v_n) = ab$.

Ⓓ $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a-b}{b}$.

Câu 3. Nếu $\lim u_n = C$ và $\lim v_n = +\infty$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n}$ bằng

Ⓐ 0 .

Ⓑ 1 .

Ⓒ $+\infty$.

Ⓓ $-\infty$.

Câu 4. Giá trị của giới hạn $\lim \dfrac{-3}{4n^2 - 2n + 1}$ là

Ⓐ 0 .

Ⓑ $-\dfrac{3}{4}$.

Ⓒ -1 .

Ⓓ $-\infty$.

Câu 5. Giá trị của giới hạn $\lim \dfrac{2n^3-3n^2+n+5}{n^3-n^2+7}$ là

Ⓐ -3 . Ⓑ 2 . Ⓒ 1 . Ⓓ 0 .

Câu 6. $\lim(5n-n^2+1)$ bằng

Ⓐ 5 . Ⓑ $-\infty$. Ⓒ -1 . Ⓓ $+\infty$.

Câu 7. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

Ⓐ Nếu $\lim u_n=+\infty$ và $\lim v_n=C, C>0$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n}=+\infty$.

Ⓑ Nếu $\lim u_n=-\infty$ và $\lim v_n=C, C<0$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n}=+\infty$.

Ⓒ Nếu $\lim u_n=+\infty$ và $\lim v_n=C, C<0$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n}=0$.

Ⓓ Nếu $\lim u_n=-\infty$ và $\lim v_n=C, C>0$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n}=-\infty$.

Câu 8. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

Ⓐ Nếu $\lim u_n=a$ và thì $\lim\sqrt{u_n}=\sqrt{a}$.

Ⓑ Nếu $\lim u_n=a$ thì $a\geqslant 0$ và $\lim\sqrt{u_n}=\sqrt{a}$.

Ⓒ Nếu $\lim u_n=a$ thì $a\geqslant 0$.

Ⓓ Nếu $u_n\geqslant 0$ với mọi n và $\lim u_n=a$ thì $a\geqslant 0$ và $\lim\sqrt{u_n}=\sqrt{a}$.

Câu 9. Giá trị của giới hạn $\lim \dfrac{n\sqrt{n}+1}{n^2+2}$ bằng

Ⓐ 2 . Ⓑ 1 . Ⓒ 0 . Ⓓ $\dfrac{3}{2}$.

Câu 10. Giá trị của giới hạn $\lim\left(n-\sqrt[3]{8n^3+3n+2}\right)$ bằng

Ⓐ -1 . Ⓑ $+\infty$. Ⓒ 0 . Ⓓ $-\infty$.

Câu 11. $\lim \dfrac{4\cdot 3^n+7^{n+1}}{2\cdot 5^n+7^n}$ bằng

Ⓐ 1 . Ⓑ 7 . Ⓒ $\dfrac{3}{5}$. Ⓓ $\dfrac{7}{5}$.

Câu 12. $\lim \dfrac{2}{2n+3}$ bằng

Ⓐ 0 . Ⓑ 1 . Ⓒ $\dfrac{3}{2}$. Ⓓ $+\infty$.

Câu 13. Giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{n(n+1)}{2n^2+n+3}$ bằng

Ⓐ 3 . Ⓑ 1 . Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $+\infty$.

Câu 14. Giới hạn $\lim \dfrac{2n^2+n+5}{2n+1}$ bằng

Ⓐ 0 . Ⓑ 1 . Ⓒ $-\infty$. Ⓓ $+\infty$.

Câu 15. Giới hạn $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+2}+n}{n}$ bằng

Ⓐ 2 . Ⓑ 3 . Ⓒ 5 . Ⓓ $+\infty$.

Câu 16. Giới hạn $\lim \dfrac{\sqrt[3]{8n^3+n^2-1}+4n+3}{3n-7}$ bằng

Ⓐ 2 . Ⓑ $\dfrac{2}{3}$. Ⓒ $\dfrac{4}{3}$. Ⓓ 4 .

Câu 17. Tính $\lim \dfrac{\sqrt{n^2-4}-\sqrt[3]{8n^3+n^2}}{n}$.

Ⓐ -2 . Ⓑ -1 . Ⓒ $-\infty$. Ⓓ 0 .

Câu 18. Giới hạn $L=\lim \dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$ bằng

Ⓐ $L=0$. Ⓑ $L=\dfrac{1}{3}$. Ⓒ $L=+\infty$. Ⓓ $L=\dfrac{1}{6}$.

Câu 19. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

Ⓐ $\lim q^n=0 \quad (|q|>1)$. Ⓑ $\lim \dfrac{1}{n^k}=0 \quad (k\in\mathbb{N}^*)$.

Ⓒ $\lim C=C \quad (C\in\mathbb{R})$. Ⓓ $\lim \dfrac{1}{n^{2025}}=0$.

Câu 20. Cho dãy (u_n) có $\lim u_n=3$ dãy (v_n) có $\lim v_n=5$. Khi đó $\lim(u_n\cdot v_n)$ bằng

Ⓐ 15 . Ⓑ 8 . Ⓒ 5 . Ⓓ 3 .

Câu 21. Cho dãy (x_n) có $\lim x_n=-3$ dãy (y_n) có $\lim y_n=2$. Khi đó $\lim(x_n-y_n)$ bằng

Ⓐ -5 . Ⓑ -1 . Ⓒ 5 . Ⓓ 1 .

Câu 22. Cho $\lim u_n=3$. Khẳng định nào đúng?

Ⓐ $\lim \dfrac{3u_n-1}{u_n+1}=3$. Ⓑ $\lim \dfrac{3u_n-1}{u_n+1}=2$.

Ⓒ $\lim \dfrac{3u_n-1}{u_n+1}=-1$. Ⓓ $\lim \dfrac{3u_n-1}{u_n+1}=1$.

Câu 23. Cho cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1=4$ và công bội $q=\dfrac{1}{2}$. Tổng cấp số nhân đó bằng

Ⓐ $S=8$. Ⓑ $S=4$. Ⓒ $S=\dfrac{1}{4}$. Ⓓ $S=\dfrac{1}{8}$.

Câu 24. Tính tổng $S=9+3+1+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{3^{n-1}}+\cdots$

Ⓐ $S=16$. Ⓑ $S=14$. Ⓒ $S=\dfrac{27}{2}$. Ⓓ $S=15$.

Câu 25. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,353535\ldots$ được biểu diễn phân số tối giản dạng $\dfrac{a}{b}$. Tính ab.

Ⓐ 1409 . Ⓑ 3465 . Ⓒ 3645 . Ⓓ 3546 .

2 Tự luận

Bài 1. Cho hai dãy số $(u_n), (v_n)$ với $u_n = 3 + \dfrac{1}{n}; v_n = 5 - \dfrac{2}{n^2}$. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim u_n, \lim v_n$.

b) $\lim (u_n + v_n)$, $\lim (u_n - v_n)$, $\lim (u_n \cdot v_n)$, $\lim \dfrac{u_n}{v_n}$.

Bài 2. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{-2n+1}{n}$.

b) $\lim \dfrac{\sqrt{16n^2-2}}{n}$.

c) $\lim \dfrac{4}{2n+1}$.

d) $\lim \dfrac{n^2-2n+3}{2n^2}$.

Bài 3. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{5n+1}{2n}$;

b) $\lim \dfrac{6n^2+8n+1}{5n^2+3}$;

c) $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+5n+3}}{6n+2}$;

d) $\lim \left(2 - \dfrac{1}{3^n}\right)$;

e) $\lim \dfrac{3^n+2^n}{4\cdot 3^n}$;

f) $\lim \dfrac{2+\dfrac{1}{n}}{3^n}$.

Bài 4. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{4n+1}{\sqrt{n^2+3n}+n}$.

b) $\lim \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

c) $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$.

Bài 5. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

b) $\lim \dfrac{3^n}{4^n-1}$.

c) $\lim \dfrac{n^3-5n+1}{3n^2-4n+2}$.

d) $\lim \dfrac{4^{n+1}}{3^n+4^n}$.

Bài 6. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \left(\sqrt{n^2+2n}-n-2\right)$.

b) $\lim \left(2+n^2-\sqrt{n^4+1}\right)$.

c) $\lim \left(\sqrt{n^2-n+2}+n\right)$.

d) $\lim \left(3n-\sqrt{4n^2+1}\right)$.

Bài 7. Cho $u_n = \dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$ với a, b là các số thực thỏa mãn $|a| < 1, |b| < 1$. Tính $\lim u_n$.

Bài 8. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{2n^2-n+9}$.

b) $\lim \dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n^2+2n}$.

c) $\lim \dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n(n+1)(n+2)}$.

d) $\lim \dfrac{2+4+\cdots+2^n}{3.2^n+1}$.

e) $\lim \left[\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$

f) $\lim \left[\dfrac{1}{1.4}+\dfrac{1}{4.7}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right]$

Bài 9. Cho dãy số u_n với $u_n = \dfrac{\cos n}{n^2}$. Tính $\lim u_n$.

Bài 10. Tính tổng của các cấp số nhân lùi vô hạn sau

a) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\cdots$.

b) $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n+\cdots$.

c) $0,2+0,02+0,002+\ldots$

d) $2+\frac{2^2}{3}+\frac{2^3}{3^2}+\cdots+\frac{2^n}{3^{n-1}}+\cdots$

Bài 11. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số

a) $0,444\ldots$

b) $1,4545\ldots$

c) $3,102102,\ldots$

Bài 12. Một bệnh nhân hàng ngày phải uống một viên thuốc 150 mg. Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%. Tính lượng thuốc có trong cơ thể sau khi uống viên thuốc của ngày thứ 5 . Ước tính lượng thuốc trong cơ thể nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài.

Bài 13. Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T=24000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người (T được gọi là *chu kì bán rã*).

(*Nguồn: Đại số và giải tích 11, NXB GD Việt Nam, 2021*)

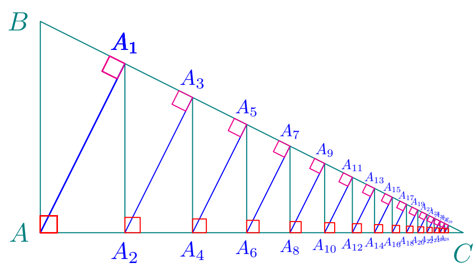
Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì thứ n.

a) Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n).

b) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn là 0.

c) Từ kết quả câu b, chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g.

Bài 14. Cho tam giác vuông ABC vuông tại A, có $AB=h$ và góc B bằng α (Hình vẽ bên). Từ A kẻ $AA_1 \perp BC$, từ A_1 kẻ $A_1A_2 \perp AC$, sau đó lại kẻ $A_2A_3 \perp BC$. Tiếp tục quá trình trên, ta được đường gấp khúc vô hạn $AA_1A_2A_3\ldots$ Tính độ dài đường gấp khúc này theo h và α.



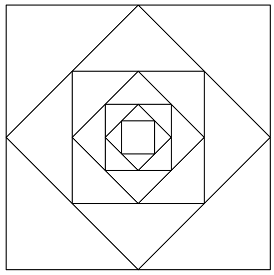
Bài 15. Một khinh khí cầu bay cao 200m ở phút đầu tiên sau khi được thả. Mỗi phút tiếp theo, nó bay cao thêm độ cao bằng một nửa độ cao bay được ở phút trước đó. Khinh khí cầu có thể đạt độ cao 400 m hay không?

Bài 16. Người ta thả một viên bi lăn trong một khe thẳng trên mặt phẳng. Viên bi lăn chậm dần. Giây đầu tiên nó đi được 2 mét. Mỗi giây tiếp theo nó đi được một đoạn bằng $\frac{3}{4}$ đoạn đường đi được trước nó.

a) Tính đoạn đường viên bi đi được trong 5 giây đầu tiên.

b) Giả sử chuyển động của viên bi không bao giờ chấm dứt, viên bi có thể cách xa vị trí ban đầu 8 mét hay không?

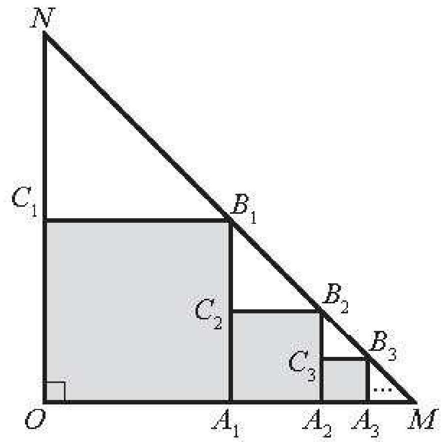
Bài 17. Từ hình vuông đầu tiên có cạnh bằng 1 (đơn vị độ dài), nối các trung điểm của bốn cạnh để có hình vuông thứ hai. Tiếp tục nối các trung điểm của bốn cạnh của hình vuông thứ hai để được hình vuông thứ ba. Cứ tiếp tục làm như thế, nhận được một dãy hình vuông.



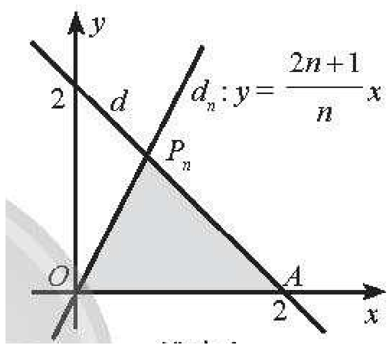
a) Kí hiệu a_n là diện tích của hình vuông thứ n và S_n là tổng diện tích của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính a_n, S_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ và tìm $\lim S_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng diện tích của các hình vuông).

b) Kí hiệu p_n là chu vi của hình vuông thứ n và Q_n là tổng chu vi của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính p_n và Q_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ và tìm $\lim Q_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng chu vi của các hình vuông).

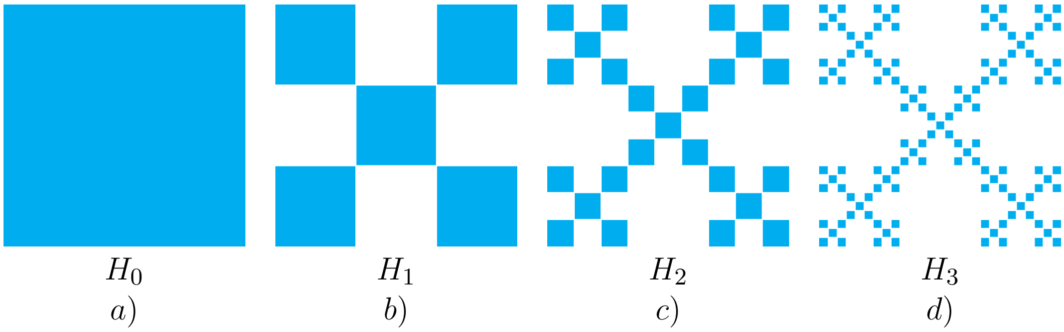
Bài 18. Cho tam giác OMN vuông cân tại O, $OM = ON = 1$. Trong tam giác OMN, vẽ hình vuông $OA_1B_1C_1$ sao cho các đỉnh A_1, B_1, C_1 lần lượt nằm trên các cạnh OM, MN, ON. Trong tam giác A_1MB_1, vẽ hình vuông $A_1A_2B_2C_2$ sao cho các đỉnh A_2, B_2, C_2 lần lượt nằm trên các cạnh A_1M, MB_1, A_1B_1. Tiếp tục quá trình đó, ta được một dãy các hình vuông (Hình vẽ). Tính tổng diện tích các hình vuông này.



Bài 19. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, đường thẳng $d : x + y = 2$ cắt trục hoành tại điểm A và cắt đường thẳng $d' : y = \dfrac{2n+1}{n}x$ tại điểm P_n $(n \in \mathbb{N}^*)$. Kí hiệu S_n là diện tích của tam giác OAP_n. Tìm $\lim S_n$.



Bài 20. Xét quá trình tạo ra hình có chu vi vô cực và diện tích bằng 0 như sau:
Bắt đầu bằng một hình vuông H_0 cạnh bằng 1 đơn vị độ dài (xem Hình a). Chia hình vuông H_0 thành chín hình vuông bằng nhau, bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_1 (xem Hình b). Tiếp theo, chia mỗi hình vuông của H_1 thành chín hình vuông, rồi bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_2 (xem Hình c). Tiếp tục quá trình này, ta nhận được một dãy hình H_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.



Ta có: H_1 có 5 hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\dfrac{1}{3}$;

H_2 có $5 \cdot 5 = 5^2$ hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3^2}; \ldots$.

Từ đó, nhận được H_n có 5^n hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\dfrac{1}{3^n}$.

a) Tính diện tích S_n của H_n và tính $\lim S_n$.

b) Tính chu vi p_n của H_n và tính $\lim p_n$.

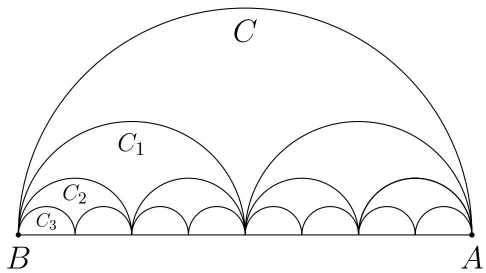
(Quá trình trên tạo nên một hình, gọi là một fractal, được coi là có diện tích $\lim S_n$ và chu vi $\lim p_n$).

Bài 21. Gọi C là nữa đường tròn đường kính $AB = 2R$.
C_1 là đường gồm hai nửa đường tròn đường kính $\dfrac{AB}{2}$,
C_2 là đường gồm bốn nửa đường tròn đường kính $\dfrac{AB}{4}, \cdots$
C_n là đường gồm 2^n nửa đường tròn đường kính $\dfrac{AB}{2^n}, \cdots$

Gọi p_n là độ dài của C_n, S_n là diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_n và đoạn thẳng AB.

a) Tính p_n, S_n.

b) Tính giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n).



Chuyên đề 2

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

I. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Giả sử $(a;b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$, có thể trừ điểm x_0. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in (a;b)$, $x_n \neq x_0$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ hay $f(x)\to L$ khi $x \to x_0$.

Nhận xét:

a) $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

b) $\lim\limits_{x\to x_0} c = x$ (c là hằng số).

Ví dụ 1 ★☆☆☆☆

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-x)$.

b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$.

Hướng dẫn giải.

a) Đặt $f(x)=2x^2-x$.

Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Giả sử (x_n) là dãy bất kì, thỏa mãn $x_n\in\mathbb{R}$ với mọi n và $x_n\to 3$ khi $n\to+\infty$. Ta có

$$\lim f(x_n) = \lim(2x_n^2-x_n) = 2\lim x_n^2 - \lim x_n = 2.3^2-3=15.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-x)=15$.

b) Đặt $g(x)=2x^2-x$.

Hàm số $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Giả sử (v_n) là dãy bất kì, thỏa mãn $v_n\neq -1$ với mọi n và $v_n\to -1$ khi $n\to+\infty$.

Ta có:

$$\lim g(v_n) = \lim\frac{v_n^2+2v_n+1}{v_n+1} = \lim\frac{(v+1)^2}{v+1} = \lim(v+1) = \lim v + \lim 1 = -1+1=0.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}=0$.

(1) Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$. Tính $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

II. CÁC PHÉP TOÁN VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ

a) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$ thì

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=L+M;$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=L-M;$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=L\cdot M;$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M}\text{, nếu } M\neq 0.$$

b) Nếu $f(x)\geqslant 0$ với mọi $x\in(a;b)\setminus\{x_0\}$ và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ thì $L\geqslant 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$.

Nhận xét:

a) $\lim\limits_{x\to x_0} x^k=x_0^k, k$ là số nguyên dương.

b) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[cf(x)\right]=c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ($c\in\mathbb{R}$ và tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\in\mathbb{R}$).

Ví dụ 2 ★☆☆☆☆

Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+5x-2)$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

c) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{5x^2+x+4}$.

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$.

Hướng dẫn giải.

a) $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+5x-2)=\lim\limits_{x\to -2}x^2+\lim\limits_{x\to -2}5x-\lim\limits_{x\to -2}2=(-2)^2+5.(-2)-2=-8$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}1=1+1=2$.

c) Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}(5x^2+x+4)=\lim\limits_{x\to 2}5x^2+\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}4=5\cdot 2^2+2+4=26$.
Suy ra $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{5x^2+x+4}=\sqrt{26}$.

d)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}{x(\sqrt{x+9}+3)}\quad\text{(nhân cả tử và mẫu cho }\sqrt{x+9}+3\text{)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+9)-3^2}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}=\frac{1}{6}.$$

2 Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+4x-12}{x-2}$.

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+x^2+x+1}{x+1}$.

c) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{5x^2+x+4}$.

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

III. GIỚI HẠN MỘT PHÍA

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b)$. Ta nói số L là giới hạn bên phải của $f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì thoả mãn $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$.
- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;x_0)$. Ta nói số L là giới hạn bên trái của $f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì thoả mãn a $<x_n<x_0$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$.

LƯU Ý.

a) Ta thừa nhận các tính chất sau:

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$.
- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ thì không tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

b) Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm sô ở mục II vẫn đúng khi ta thay $x\to x_0$ bằng $x\to x_0^+$ hoặc $x\to x_0^-$.

Ví dụ 3 ★☆☆☆☆

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}1-2x & \text{khi } x\leqslant -1\\ x^2+2 & \text{khi } x>-1\end{cases}$.

Tính các giới hạn $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ (nếu có).

Hướng dẫn giải. • Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, $x_n>-1$ và $x_n\to -1$. Khi đó $f(x_n)=x_n^2+2$ nên $\lim f(x_n)=\lim(x_n^2+2)=\lim x^2+\lim 2=(-1)^2+2=3$.

Vậy $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=3$.

• Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, $x_n<-1$ và $x_n\to -1$. Khi đó $f(x_n)=1-2x_n$ nên $\lim f(x_n)=\lim(1-2x_n)=1-2.(-1)=3$.

Vậy $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=3$. Vì $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=3$ nên $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=3$.

IV. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi $x\to+\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n>$ a và $x_n\to+\infty$, ta có $f(x_n)\to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to+\infty$.
- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty;b)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi $x\to-\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n<b$ và $x_n\to-\infty$, ta có $f(x_n)\to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to-\infty$.

LƯU Ý.

a) Với c là hằng số, k là số nguyên dương ta có

$$\lim_{x\to\pm\infty} C=C \quad \text{và} \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{C}{x^k}=0.$$

b) Các quy tắc tính giới hạn hữu hạn tại một điểm cũng đúng cho giới hạn hữu hạn tại vô cực.

Ví dụ 4 ★☆☆☆☆

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-3x^2}{x^2+2x}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x+1}$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Hướng dẫn giải.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-3x^2}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x^2}-3}{1+\frac{2}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-3\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\dfrac{0-3}{1+0}=-3.$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x}}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{0}{1+0}=0.$

c)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}&=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\right)\\&=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\\&=-\sqrt{1+0}=-1.\end{aligned}$$

Ghi nhớ: $a\sqrt{b}=\begin{cases}\sqrt{a^2b} & \text{nếu } a\geqslant 0\\ -\sqrt{a^2b} & \text{nếu } a<0\end{cases}.$

Ví dụ 5 ★☆☆☆☆

Một cái hồ đang chứa 200 m^3 nước mặn với nồng độ muối 10 kg/m^3. Người ta ngọt hóa nước hồ bằng cách bơm nước ngọt vào hồ với tốc độ 2 m^3/phút.

a) Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút từ khi bắt đầu bơm.

b) Tìm giới hạn $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)$ và giải thích ý nghĩa.

Hướng dẫn giải.

a) Trong 200 m^3 nước có nồng độ muối là 10 kg/m^3.

Do đó trong 200 m^3 nước có $10 \cdot 200 = 2000$ kg muối.

Mỗi phút người ta bơm nước ngọt vào hồ 2 m^3 thì sau t phút có $200 + 2t$ (m^3).

Khi đó nồng độ muối trong bể là: $C(t) = \dfrac{2000}{200+t}$ kg/m^3.

b) $$\lim_{t\to+\infty} C(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{2000}{200+t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{2000}{t}}{\frac{200}{t}+1} = \frac{\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{2000}{t}}{\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{200}{t}+1\right)} = 0.$$

Ý nghĩa: Khi t càng lớn thì nồng độ muối càng dần về 0, tức là đến một lúc nào đó nồng độ muối trong hồ không đáng kể, nước trong hồ gần như là nước ngọt.

3 Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-2x^2+1}{4x^3-x}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x+1}$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x+5}$.

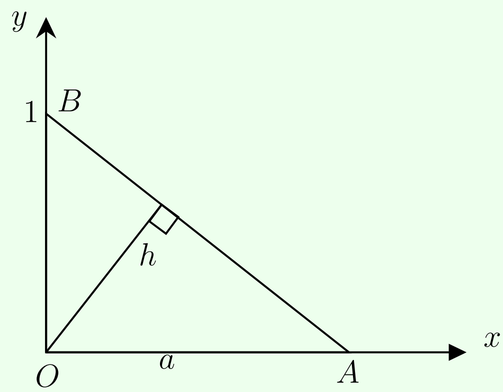
4

Cho tam giác vuông OAB với $A = (a; 0)$ và $B = (0; 1)$ như Hình vẽ. Đường cao OH có độ dài là h.

a) Tính h theo a.

b) Khi điểm A dịch chuyển về O, điểm H thay đổi thế nào? Tại sao?

c) Khi A dịch chuyển ra vô cực theo chiều dương của trục Ox, điểm H thay đổi thế nào? Tại sao?



V. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

1) Khái niệm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

- Ta nói hàm số $y = f(x)$ *có giới hạn bên phải* là $+\infty$ khi $x \to x_0$ về bên phải nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \to x_0$, thì $f(x_n) \to +\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ hay $f(x) \to +\infty$ khi $x \to x_0^+$.
- Ta nói hàm số $y = f(x)$ *có giới hạn bên phải* là $-\infty$ khi $x \to x_0$ về bên phải nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \to x_0$, thì $f(x_n) \to -\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ hay $f(x) \to -\infty$ khi $x \to x_0^+$.

LƯU Ý.

a) Các giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ được định nghĩa tương tự như trên.

b) Ta có các giới hạn thường dùng sau:

- $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{1}{x-a} = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to a^+-} \dfrac{1}{x-a} = -\infty$ $\quad (a \in \mathbb{R})$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = +\infty$ với k là số chẵn;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = -\infty$ với k là số lẻ.

2) Một số quy tắc tính giới hạn vô cực

LƯU Ý. Chú ý các quy tắc tính giới hạn hữu hạn không còn đúng cho giới hạn vô cực.

Ta có một số quy tắc tính giới hạn của tích và thương hai hàm số khi một trong hai hàm số đó có giới hạn vô cực.

- Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x) \cdot g(x)$.

Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ (hoặc $-\infty$). Khi đó $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x)$ được tính theo quy tắc cho trong bảng sau:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$
$L>0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L<0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

◇ Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tuỳ ý	0
$L>0$	0	$+$	$+\infty$
	0	$-$	$-\infty$
$L<0$	0	$+$	$-\infty$
	0	$-$	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp $x\to x_0^+$, $x\to x_0^-$.

Ví dụ 6 ★☆☆☆☆

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x}{x-3}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-1)$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x-1\right)$.

Hướng dẫn giải.

a) Ta có: $\lim\limits_{x\to 3^-}2x=6$; $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{x-3}=-\infty$

Do đó $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\left[2x\cdot\dfrac{1}{x-3}\right]=-\infty$.

b) Ta có: $3x-1=x\left(3-\dfrac{1}{x}\right)$

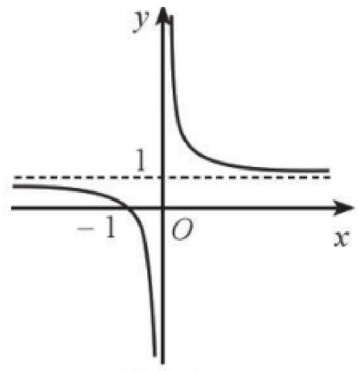
Suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(3-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$.

c)

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x^2+1}+x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1+\dfrac{1}{x}}=-1.$$

Ví dụ 7 ★☆☆☆☆

Quan sát đồ thị hàm số ở hình bên và tính các giới hạn sau $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$.



Hướng dẫn giải. Từ đồ thị hàm số ta có

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=1,\ \lim_{x\to0^-} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty.$$

Ví dụ 8 ★☆☆☆☆

Biết $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1$. Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-1\right)g(x)$.

Hướng dẫn giải. Ta có

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2-1)g(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)g(x)$$

(do $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)g(x)=1>0$)

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}(x^2-1)g(x)=+\infty.$$

Ví dụ 9 ★☆☆☆☆

Cho hàm số

$$f(x)=\begin{cases} x+m & \text{nếu } x<0,\\ x^2-1 & \text{nếu } x\geqslant 0,\end{cases}$$

với m là tham số.

Biết hàm số $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi $x\to0$. Tìm m.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x^2-1)=-1$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x+m)=m$.
Theo đề bài, để tồn tại giới hạn hữu hạn khi $x\to0$. thì

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^-} \iff m=-1.$$

Ví dụ 10 ★☆☆☆☆

Tìm giá trị của các tham số a và b biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=4$.

Hướng dẫn giải. Do $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ nên để tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=4,$$

trước hết ta phải có $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax+b)=0$, hay $1+a+b=0\Rightarrow b=-a-1$.

Khi đó,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax-a-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+a(x-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)+a(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1+a)(x-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}(x+1+a)=1+1+a=2+a.\end{aligned}$$

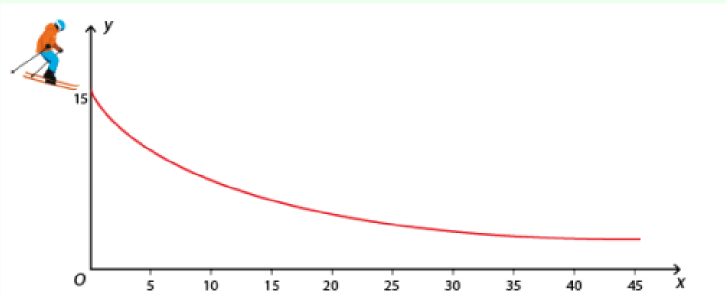
Suy ra $2+a=4\Rightarrow a=2\Rightarrow b=-3$. Vậy $a=2$, $b=-3$.

5 Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x-1}{x-2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x}}$.

6 Trong một cuộc thi các môn thể thao trên tuyết, người ta muốn thiết kế một đường trượt bằng bang cho nội dung đổ dốc tốc độ đường dài.



Vận động viên sẽ xuất phát từ vị trí $(0;15)$ cao 15 m so với mặt đất (trục Ox). Đường trượt phải thỏa mãn yêu cầu là càng ra xa thì càng gần mặt đất để tiết kiệm lượng tuyết nhân tạo. Một nhà thiết kế đề nghị sử dụng đường cong là đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{150}{x+10}$ với $x\geqslant 0$. Hãy kiểm tra xem hàm số $y=f(x)$ có thỏa mãn các điều kiện dưới đây hay không:

a) Có đồ thị đi qua điểm $(0;15)$.

b) Giảm trên $[0;+\infty)$.

c) Càng ra xa (x càng lớn), đồ thị càng gần trục Ox với khoảng cách nhỏ tùy ý.

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm

Câu 1. Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$. Phát biểu nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=L+M$.

Ⓑ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]=L-M$.

Ⓒ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=L\cdot M$.

Ⓓ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. Phát biểu nào đúng?

Ⓐ Nếu với dãy (x_n) bất kì, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$, ta có $f(x_n)\to L$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$.

Ⓑ Nếu với dãy (x_n) bất kì, $x_n<a$ và $x_n\to+\infty$, ta có $f(x_n)\to L$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$.

Ⓒ Nếu với dãy (x_n) bất kì, $x_n>a$, ta có $f(x_n)\to L$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$.

Ⓓ Nếu với dãy (x_n) bất kì, $x_n>a$ và $x_n\to L$, ta có $f(x_n)\to+\infty$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$.

Câu 3. Với c,k là các hằng số và k nguyên dương thì

Ⓐ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{c}{x^k}=0$.

Ⓑ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{c}{x^k}=+\infty$.

Ⓒ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{c}{x^k}=-\infty$.

Ⓓ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{c}{x^k}=\pm\infty$.

Câu 4. Phát biểu nào sau đây là đúng?

Ⓐ Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$.

Ⓑ Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ thì $L\geqslant 0$.

Ⓒ Nếu $f(x)\geqslant 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ thì $L\geqslant 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$.

Ⓓ Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ thì $L\geqslant 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. Phát biểu nào đúng?

Ⓐ Nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$, ta có $f(x_n)\to L$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$.

Ⓑ Nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n<a$ và $x_n\to+\infty$, ta có $f(x_n)\to L$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$.

Ⓒ Nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n>a$, ta có $f(x_n)\to L$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$.

Ⓓ Nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n>a$ và $x_n\to L$, ta có $f(x_n)\to+\infty$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$.

Câu 6. Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x+3}$.

Ⓐ $L=-\infty$. Ⓑ $L=0$. Ⓒ $L=+\infty$. Ⓓ $L=1$.

Câu 7. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2020}{2x - 1}$.

Ⓐ $L = -\infty$. Ⓑ $L = 0$. Ⓒ $L = +\infty$. Ⓓ $L = 2019$.

Câu 8. Cho $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -2$. Tính $\lim\limits_{x\to 3} \left[f(x) + 4x - 1\right]$.

Ⓐ 6 . Ⓑ 5 . Ⓒ 11 . Ⓓ 9 .

Câu 9. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

Ⓐ $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$. Ⓑ $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Ⓒ $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$. Ⓓ $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Câu 10. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng $-\infty$?

Ⓐ $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-3x + 4}{x - 2}$. Ⓑ $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-3x + 4}{x - 2}$.

Ⓒ $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-3x + 4}{x - 2}$. Ⓓ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-3x + 4}{x - 2}$.

Câu 11. Trong các giới hạn dưới đây, giới hạn nào là $+\infty$?

Ⓐ $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{2x - 1}{4 - x}$. Ⓑ $\lim\limits_{x\to +\infty} (-x^3 + 2x + 3)$.

Ⓒ $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}$. Ⓓ $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{2x - 1}{4 - x}$.

Câu 12. $\lim\limits_{x\to (-1)^+} \dfrac{\sqrt{3x^2 + 1} - x}{x + 1}$ bằng?

Ⓐ 1 . Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $\dfrac{3}{2}$. Ⓓ $-\dfrac{3}{2}$.

Câu 13. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x + 1}{x - 1}$ bằng

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ 1 . Ⓓ 0 .

Câu 14. Tìm $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1 - 2x}{x - 1}$

Ⓐ $-\infty$. Ⓑ -2 . Ⓒ 0 . Ⓓ $+\infty$.

Câu 15. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty} (2x^3 - x^2 + 1)$

Ⓐ $-\infty$. Ⓑ 2 . Ⓒ 0 . Ⓓ $+\infty$.

Câu 16. Tính $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 12x + 35}{25 - 5x}$.

Ⓐ $-\infty$. Ⓑ $-\dfrac{2}{5}$. Ⓒ $\dfrac{2}{5}$. Ⓓ $+\infty$.

Câu 17. Tính $L = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x - 1}$.

Ⓐ $L = -5$. Ⓑ $L = 0$. Ⓒ $L = -3$. Ⓓ $L = 5$.

Câu 18. Tính $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{2x^2+x}+x\right)$.

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ -1 . Ⓒ $-\infty$. Ⓓ 0 .

Câu 19. Tính $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x+3}$.

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ -1 . Ⓒ $-\infty$. Ⓓ 1 .

Câu 20. Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{|10-2x|}{x^2-6x+5}$.

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ 0 . Ⓒ $-\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}$.

2 Tự luận

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 2}(x^2-7x+4)$.

b) $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{10-2x^2}$.

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9}$.

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{1-x}$.

e) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$.

f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3-\sqrt{x+8}}{x-1}$.

Bài 2. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{khi } x<1 \\ x & \text{khi } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Tính các giới hạn $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ (nếu có).

Bài 3. Cho hàm số $H(t)=\begin{cases} 0 & \text{nếu } t<0 \\ 1 & \text{nếu } t \geqslant 0 \end{cases}$ (hàm Heaviside, thường được dùng để mô tả việc chuyển trạng thái tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t=0$). Tính $\lim\limits_{t \to 0^+} H(t)$ và $\lim\limits_{t \to 0^-} H(t)$.

Bài 4. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x+3}{2x}$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x+3}{3x^2+2x+5}$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3+2x^2-1)$.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2-2x}}$.

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x-\sqrt{x^2+2x}\right)$.

Bài 5. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{1}{x+1}$.

b) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2}{2x-4}$.

c) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x}{3-x}$.

Bài 6. Mỗi giới hạn sau có tồn tại hay không? Nếu có hãy tính giới hạn đó.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{|x|}$.

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-2x}{|x-2|}$.

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{|x-2|}$.

Bài 7. Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to +\infty} (1-x)(1-x^2)(1-x^3)$.

Bài 8. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x & \text{nếu } x>1 \\ 2 & \text{nếu } x=1 \\ 1 & \text{nếu } x<1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x\to 1$ không? Tại sao?

Bài 9. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+ax & \text{nếu } x>3 \\ 3x^2+1 & \text{nếu } x\leqslant 3 \end{cases}$. Tìm a để hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x\to 3$.

Bài 10. Tìm các giá trị a,b biết rằng

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{ax+b}{x-2}=5$.   b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-ax+1}{x^2-3x+2}=b$.   c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=3$.

Bài 11. Cho hàm số $g(x)=\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-1}-2m$ với m là tham số. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$, tìm giá trị m.

Bài 12. Cho hàm số $g(x)=\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-1}-2m$ với m là tham số. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$, tìm giá trị m.

Bài 13. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+x^2}-2}{x^2}$.   b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}$.   c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt[3]{7x+1}}{x-1}$.

Bài 14. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2025$. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)}{x+1}$.

Bài 15. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-16}{x-2}=12$. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{5f(x)-16}-4}{x^2+2x+8}$.

Bài 16. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên biến đổi theo một hàm số thời gian (tính theo ngày) là $g(t)=45t^2-t^3$ (người). Tốc độ trung bình gia tăng người bệnh giữa hai thời điểm t_1,t_2 là $V_{\text{tb}}=\dfrac{g(t_2)-g(t_1)}{t_2-t_1}$. Tính $\lim\limits_{t\to 10}\dfrac{g(t)-g(10)}{t-10}$, cho biết ý nghĩa kết quả tìm được.

Bài 17. Trong hồ có chứa 6 000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút.

a) Chứng tỏ rằng nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là $C(t)=\dfrac{30t}{400+t}$ (gam/lít).

b) Nồng độ muối như thế nào nếu $t\to+\infty$?

Bài 18. Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t) = \dfrac{50t}{t+4}$ $(t \geqslant 0)$ bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

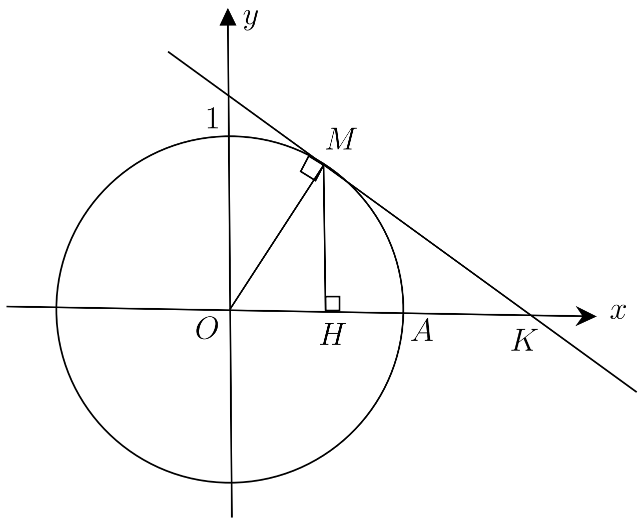
Bài 19. Số lượng xe ô tô vào một đường hầm cho bởi công thức $f(v) = \dfrac{290,4v}{0,36v^2 + 13,2v + 264}$, trong đó v(m/s) là vận tốc trung bình của các xe khi đi vào đường hầm. Tính $\lim\limits_{v \to 20} f(v)$ và cho biết ý nghĩa (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bài 20. Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số: $C(x) = 50\,000 + 105x$.

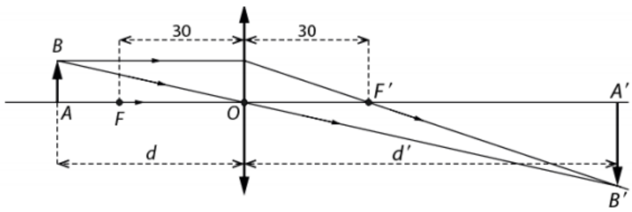
a) Tính chi phí trung bình $\overline{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm.

b) Tính $\lim\limits_{x \to +\infty} \overline{C}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Bài 21. Cho điểm $M(t, \sqrt{1-t^2}), 0 < t < 1$ nằm trên đường tròn đơn vị $(C) : x^2 + y^2 = 1$, điểm $A(1;0)$ là một giao điểm của (C) với trục hoành. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên trục hoành, K là giao điểm của tiếp tuyến của (C) tại M với trục hoành. Khi điểm M dần đến điểm A thì tỉ số $\dfrac{HK}{HA}$ dần đến giá trị nào?



Bài 22. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự $f = 30$ cm. Trong Vật lí, ta biết rằng nếu đặt vật thật AB cách quang tâm của thấu kính một khoảng d (cm) > 30 (cm) thì được ảnh thật $A'B'$ của thấu kính cách quang tâm một khoảng $d'(cm)$ (Hình vẽ). Ngược lại, nếu $0 < d < 30$, ta có ảnh ảo. Công thức của thấu kính là $\dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{d'} = 30$



a) Từ công thức của thấu kính, hãy tìm biểu thức xác định hàm số $d' = h(d)$.

b) Tính các giới hạn $\lim\limits_{d \to 30^+} h(d)$, $\lim\limits_{d \to 30^-} h(d)$, $\lim\limits_{d \to +\infty} h(d)$. Sử dụng các kết quả này để giải thích ý nghĩa đã biết trong Vật lí.

Chuyên đề

3 HÀM SỐ LIÊN TỤC

I. HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} = f(x_0)$.

Nhận xét: Để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì phải có cả ba điều sau:

1. Hàm số xác định tại x_0.
2. Tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

LƯU Ý. Khi hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại điểm x_0 thì ta nói $f(x)$ gián đoạn tại điểm x_0 và x_0 được gọi là điểm gián đoạn của hàm số $f(x)$.

Ví dụ 1 ★☆☆☆☆

Xét tính liên tục của các hàm số:

a) $f(x) = 1 - x^2$ tại điểm $x_0 = 3$.

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 2 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x > 1 \\ -x & \text{khi } x \leqslant 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

Hướng dẫn giải.

a) Ta có $f(3) = -8$ và $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (1 - x^2) = 1 - 3^3 = -8$.

Vì $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$ nên hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 3$.

b) Ta có $f(1) = 2$ và $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x+1) = 1+1 = 2$.

Vì $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 2$ nên hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

c) Ta có: $f(1) = -1$;

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 + 1) = 1^2 + 1 = 2$ và $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (-x) = -1$.

Vì $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

Vậy hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$.

Ví dụ 2 ★☆☆☆☆

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{nếu } x\leqslant 1\\ mx+1 & \text{nếu } x>1\end{cases}$ với m là tham số. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x_0=1$.

Hướng dẫn giải. Ta có $f(1)=3$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(mx+1)=m.1+1=m+1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+2)=1^2+2=3$.

Để hàm số liên tục tại $x_0=1$ thì $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\Rightarrow m+1=3\Rightarrow m=2$.

1 Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x)=\sqrt{x-1}$ tại điểm $x_0=2$.

b) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-6}{x+2} & \text{nếu } x\neq -2\\ -6 & \text{nếu } x=-2\end{cases}$ tại điểm $x_0=-2$.

c) $s(x)=\begin{cases} -x & \text{nếu } x<0\\ 0 & \text{nếu } x=0\\ x^2 & \text{nếu } x>0\end{cases}$ tại điểm $x_0=0$.

2 Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{nếu } x<2\\ -x+a & \text{nếu } x\geqslant 2\end{cases}$ với a là tham số. Tìm a để hàm số liên tục tại điểm $x_0=2$.

II. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG, TRÊN MỘT ĐOẠN

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$.

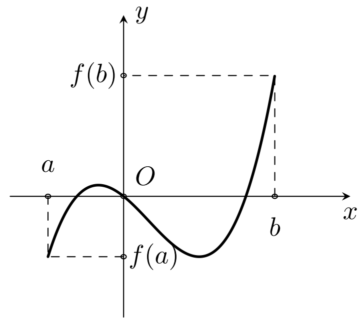
  Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng $(a;b)$ nếu $f(x)$ liên tục tại mọi điểm trong khoảng ấy.

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên đoạn $[a;b]$.

  Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu $f(x)$ liên tục tại trên khoảng $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

Nhận xét:

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ là một đường liền, có điểm đầu, điểm cuối như hình vẽ bên. Nếu hai điểm này nằm về hai phía so với trục hoành thì đường liền nói trên luôn cắt trục hoành tại ít nhất một điểm. Điều này có thể được phát biểu dưới dạng như sau:



Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì luôn tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Ví dụ 3 ★☆☆☆☆

Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}$ trên $[1; 2]$.

Hướng dẫn giải. Với mọi $x \in (1; 2)$ ta có:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left(\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}\right) = \sqrt{\lim_{x \to x_0} (x-1)} + \sqrt{\lim_{x \to x_0} (2-x)}$$
$$= \sqrt{x_0 - 1} + \sqrt{2 - x_0} = f(x_0).$$

Do đó $f(x)$ liên tục tại mọi điểm $x_0 \in [1; 2]$.

Ta lại có $\lim\limits_{x \to 1^+} = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}\right) = \sqrt{\lim\limits_{x \to 1^+} (x-1)} + \sqrt{\lim\limits_{x \to 1^+} (2-x)} = 1 = f(1)$.

$\lim\limits_{x \to 2^-} = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}\right) = \sqrt{\lim\limits_{x \to 2^-} (x-1)} + \sqrt{\lim\limits_{x \to 2^-} (2-x)} = 1 = f(2)$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1; 2]$.

Ví dụ 4 ★☆☆☆☆

Tại một xưởng sản xuất bột đá thạch anh, giá bán (tính theo nghìn đồng) của x (kg) bột đá thạch anh được tính theo công thức sau:

$$P(x) = \begin{cases} 4,5x & \text{khi } 0 < x \leqslant 400 \\ 4x + k & \text{khi } x > 400 \end{cases} \quad (k \text{ là một hằng số}).$$

a) Với $k = 0$, xét tính liên tục của hàm số $P(x)$ trên $(0; +\infty)$.

b) Với giá trị nào của k thì hàm số $P(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$?

Hướng dẫn giải.

a) Với $k = 0$, hàm số có dạng $P(x) = \begin{cases} 4{,}5x & \text{khi } 0 < x \leq 400 \\ 4x & \text{khi } x > 400 \end{cases}$.

◇ Với mọi $x_0 \in (0;400)$, ta có:

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = \lim_{x\to x_0} (4{,}5x) = 4{,}5 \lim_{x\to x_0} x = 4{,}5x_0 = P(x_0)$$

Vậy hàm số $y = P(x)$ liên tục tại mọi điểm $x_0 \in (0;400)$.

◇ Với mọi $x_0 \in (400;+\infty)$, ta có:

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = \lim_{x\to x_0} (4x) = 4 \lim_{x\to x_0} x = 4x_0 = P(x_0)$$

Vậy hàm số $y = P(x)$ liên tục tại mọi điểm $x_0 \in (400;+\infty)$.

◇ $f(400) = 4{,}5 \cdot 400 = 1800$

$$\lim_{x\to 400^+} P(x) = \lim_{x\to 400^+} (4x) = 4 \cdot \lim_{x\to 400^+} x = 4 \cdot 400 = 1600$$

$$\lim_{x\to 400^-} P(x) = \lim_{x\to 400^-} (4{,}5x) = 4{,}5 \cdot \lim_{x\to 400^-} x = 4{,}5 \cdot 400 = 1800$$

Vì $\lim\limits_{x\to 400^-} P(x) \neq \lim\limits_{x\to 400^+} P(x)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 400} P(x)$.

Vậy hàm số không liên tục tại điểm $x_0 = 400$.

Vậy hàm số $y = f(x)$ không liên tục trên $(0;+\infty)$.

b) Xét hàm số $P(x) = \begin{cases} 4{,}5x & \text{khi } 0 < x \leq 400 \\ 4x + k & \text{khi } x > 400 \end{cases}$ (k là một hằng số).

Hàm số liên tục trên các khoảng $(0;400)$ và $(400;+\infty)$. Ta có:

$$f(400) = 4{,}5 \cdot 400 = 1800$$

$$\lim_{x\to 400^+} P(x) = \lim_{x\to 400^+} (4x+k) = 4 \cdot \lim_{x\to 400^+} x + \lim_{x\to 400^+} k = 4 \cdot 400 + k = 1600 + k$$

$$\lim_{x\to 400^-} P(x) = \lim_{x\to 400^-} (4{,}5x) = 4{,}5 \cdot \lim_{x\to 400^-} x = 4{,}5 \cdot 400 = 1800$$

Để hàm số $y = P(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thì hàm số $y = P(x)$ phải liên tục tại điểm $x_0 = 400$. Suy ra:

$$\lim_{x\to 400^+} P(x) = \lim_{x\to 400^-} P(x) = f(400) \Leftrightarrow 1600 + k = 1800 \Leftrightarrow k = 200$$

Vậy $k = 200$ thì hàm số $P(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$.

3 Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ trên $(1;+\infty)$.

4 Hàm số $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{khi } x < 2 \\ -x & \text{khi } x \geqslant 2 \end{cases}$ có liên tục trên $\mathbb{R}$ hay không?

III. TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ SƠ CẤP

- Hàm số đa thức $P(x)$, các hàm số lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, hàm số căn thức $y = \sqrt{P(x)}$, các hàm số lượng giác $y = \tan x$, $y = \cot x$ liên tục trên các khoảng của tập xác định của chúng.

  Trong đó, $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức.

Nhận xét: Hàm số thuộc những loại trên được gọi chung là **hàm số sơ cấp**. Khi nói xét tính liên tục của một hàm số mà không nói gì thêm thì ta xét tính liên tục của hàm số đó trên những khoảng của tập xác định của chúng.

Ví dụ 5

Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $f(x)$ là hàm căn thức có tập xác định là $\mathscr{D} = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ nên nó liên tục trên các khoảng $(-\infty; -2]$ và $[2; +\infty)$.

Ví dụ 6

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ a & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tìm a để hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải. • Với $x \neq 0$ thì hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x}$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

• Với $x = 0$, ta có

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 2x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x-2)}{x} = \lim_{x \to 0} (x - 2) = -2$$

Ta có $f(0) = a$. Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x_0 = 0$, do đó $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ hay $a = -2$.

Ví dụ 7

Chứng minh rằng phương trình:

a) $x^3 + 3x - 1 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(0; 1)$.

b) $x = \cos x$ có nghiệm trong khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Hướng dẫn giải.

a) Xét hàm số $f(x) = x^3 + 3x - 1$. Hàm số này liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do $f(0) \cdot f(-1) = (-1) \cdot 3 = -3 < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ hay $x^3 + 3x - 1 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(0; 1)$.

b) Xét hàm số $f(x) = x - \cos x$. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0$; $\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$.

Suy ra $f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$. Do đó, phương trình $f(x) = x - \cos x = 0$ hay $x = \cos x$ có nghiệm trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Ví dụ 8 ★☆☆☆☆

Một hãng taxi đưa ra giá cước $T(x)$ (đồng) khi đi quãng đường x (km) cho loại xe 4 chỗ như sau:

$$T(x) = \begin{cases} 10\ 000 & \text{khi } 0 < x \leqslant 0,7 \\ 10\ 000 + (x - 0,7) \cdot 14\ 000 & \text{khi } 0,7 < x \leqslant 20 \\ 280\ 200 + (x - 20) \cdot 12\ 000 & \text{khi } x > 20 \end{cases} \cdot$$

Xét tính liên tục của hàm số $T(x)$.

Hướng dẫn giải. • Hàm số $T(x)$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$.

• Hàm số $T(x)$ xác định trên từng khoảng $(0; 0{,}7)$, $(0{,}7; 20)$ và $(20; +\infty)$ nên hàm số liên tục trên các khoảng đó.

Ta có: $T(0{,}7) = 10000$.

$$\lim_{x \to 0{,}7^+} T(x) = \lim_{x \to 0{,}7^+} (10000 + (x - 0{,}7) \cdot 14000) = 10000 + (0{,}7 - 0{,}7) \cdot 14000 = 10000$$

$$\lim_{x \to 0{,}7^-} T(x) = \lim_{x \to 0{,}7^-} 10000 = 10000$$

Vì $\lim\limits_{x \to 0{,}7^-} T(x) = \lim\limits_{x \to 0{,}7^+} T(x) = 10000$ nên $\lim\limits_{x \to 0{,}7} T(x) = 10000 = T(0{,}7)$.

Vậy hàm số $T(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 0{,}7$.

Ta có: $T(20) = 10000 + (20 - 0{,}7) \cdot 14000 = 280200$.

$$\lim_{x \to 20^+} T(x) = \lim_{x \to 20^+} (280200 + (x - 20) \cdot 12000) = 280200 + (20 - 20) \cdot 12000 = 280200$$

$$\lim_{x \to 20^-} T(x) = \lim_{x \to 20^-} (10000 + (x - 0{,}7) \cdot 14000) = 10000 + (20 - 0{,}7) \cdot 14000 = 280200$$

Vì $\lim\limits_{x \to 20^-} T(x) = \lim\limits_{x \to 20^+} T(x) = 280200$ nên $\lim\limits_{x \to 20} T(x) = 280200 = T(20)$.

Vậy hàm số $T(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 20$.

Vậy hàm số $T(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$.

(5) Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \dfrac{x+2}{x-8}$.

(6) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{nếu } x \leqslant 0 \\ ax+b & \text{nếu } 0 < x < 2 \\ 4-x & \text{nếu } 2 \leqslant x \end{cases}$, trong đó a, b là hai số thực. Tìm a và b để hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(7) Chứng minh rằng phương trình $4x^3 - 8x^2 + 1 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-1; 2)$.

IV. TỔNG, HIỆU TÍCH, THƯƠNG CỦA HÀM SỐ LIÊN TỤC

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

- Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0.
- Hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

Ví dụ 9 ★☆☆☆☆

Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $y = f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2 - 2x - 3}$

b) $y = g(x) = \sqrt{3x+6} + \dfrac{2\sin x}{\sqrt{3-x}}$

a) Ta có $x^2 - 2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ và $x \neq 3$.

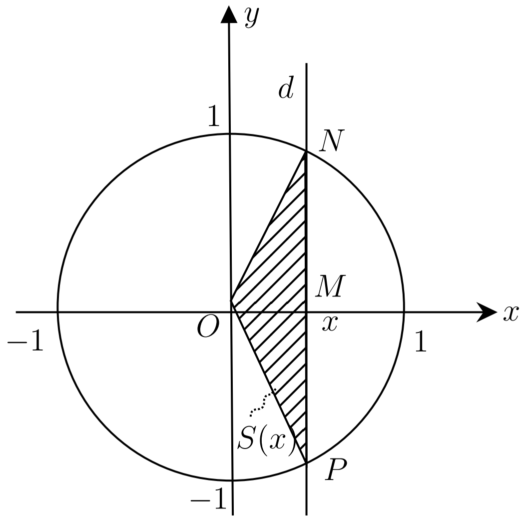
$y = f(x)$ là hàm số phân thức có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$ nên nó liên tục trên các khoảng của tập xác định là $(-\infty; -1)$, $(-1; 3)$ và $(3; +\infty)$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} 3x + 6 \geqslant 0 \\ 3 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leqslant x < 3.$

Hàm số $y = g(x)$ có tập xác định là $D = [-2; 3)$. Hàm số lượng giác $y = 2\sin x$ và hàm số căn thức $y = \sqrt{3x+6}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$ đều liên tục trên $[-2; 3)$ nên hàm số $y = g(x)$ liên tục trên $[-2; 3)$.

Ví dụ 10 ★☆☆☆☆

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) tâm O, bán kính bằng 1. Một đường thẳng d thay đổi, luôn vuông góc với trục hoành, cắt trục hoành tại điểm M có hoành độ $x(-1 < x < 1)$ và cắt đường tròn (C) tại các điểm N và P (xem hình vẽ).



a) Viết biểu thức $S(x)$ biểu thị diện tích của tam giác ONP.

b) Hàm số $y = S(x)$ có liên tục trên $(-1; 1)$ không? Giải thích.

c) Tính các giới hạn $\lim\limits_{x \to 1^-} S(x)$ và $\lim\limits_{x \to 1^+} S(x)$.

Hướng dẫn giải.

a) Ta có: $(C): x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

Độ dài OM chính là giá trị tuyệt đối của hoành độ của điểm M. Vậy $OM = |x|$.

Độ dài MN chính là giá trị tuyệt đối của tung độ của điểm N.

Vậy $MN = |\sqrt{1 - x^2}| = \sqrt{1 - x^2}$.

$$S(x) = S_{ONP} = \frac{1}{2} \cdot NP \cdot OM = MN \cdot OM = \sqrt{1 - x^2} \cdot |x|.$$

b) Xét hàm số $S(x) = \sqrt{1 - x^2} \cdot |x| = \begin{cases} x\sqrt{1 - x^2} & \text{khi } 0 \le x \le 1 \\ -x\sqrt{1 - x^2} & \text{khi } -1 \le x < 0 \end{cases}$.

Điều kiện xác định: $1 - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$.

Hàm số $S(x)$ có tập xác định là $[-1; 1]$. Vậy hàm số $S(x)$ xác định trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(0; 1)$ nên liên tục trên các khoảng đó.

Ta có: $S(0) = 0 \cdot \sqrt{1 - 0^2} = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} S(x) = \lim_{x \to 0^+} x\sqrt{1 - x^2} = 0 \cdot \sqrt{1 - 0^2} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} S(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x\sqrt{1 - x^2}) = -0 \cdot \sqrt{1 - 0^2} = 0$$

Vì $\lim\limits_{x\to 0^-} S(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} S(x) = 0 = S(0)$.

Vậy hàm số $S(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 0$.

Vậy hàm số $S(x)$ liên tục trên $(-1;1)$.

c) $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(x\sqrt{1-x^2}\right) = 1\cdot\sqrt{1-1^2} = 0$.

$$\lim_{x\to -1^+} S(x) = \lim_{x\to -1^+} (-x\sqrt{1-x^2}) = -1\cdot\sqrt{1-(-1)^2} = 0$$

(8) Xét tính liên tục của hàm số:

a) $y = f(x) = \sqrt{x^2+1} + 3 - x$.

b) $y = g(x) = \dfrac{x^2-1}{x}\cdot\cos x$.

c) $y = h(x) = x + \tan x$.

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm

Câu 1. Phát biểu nào sau đây đúng?

(A) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x = a$ khi và chỉ chi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

(B) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x = a$ khi và chỉ chi $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

(C) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x = a$ khi và chỉ chi $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

(D) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x = a$ khi và chỉ chi $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục tại $x = 2$ và thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$. Khi đó, phải gán thêm giá trị $f(2)$ bằng bao nhiêu?

(A) -4 . (B) -1 . (C) 1 . (D) 4 .

Câu 3. Hàm số nào dưới đây liên tục trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

(A) $y = x + \dfrac{1}{x}$.

(B) $y = \sqrt{2-x}$.

(C) $y = \dfrac{2x+1}{x-7}$.

(D) $y = x + 7$.

Câu 4. Hàm số $f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{4-x}$ liên tục trên

(A) $(3;10)$. (B) $[-3;4]$. (C) $[-3;+\infty)$. (D) $(-\infty;4]$.

Câu 5. Hàm số nào dưới đây **không** liên tục trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = |x|$.

(B) $y = \dfrac{x}{x-1}$.

(C) $y = \sin x$.

(D) $y = \dfrac{x}{|x|+1}$.

Câu 6. Hàm số nào dưới đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

(A) $f(x) = \sqrt{x-5}$.
(B) $g(x) = \dfrac{x+5}{x^2+4}$.
(C) $h(x) = \cot x + 3$.
(D) $k(x) = \dfrac{x^2+3}{2-x}$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2-3x+2}$. Khi đó, hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng nào dưới đây?

(A) $(1;2)$.
(B) $(-\infty;2)$.
(C) $(1;+\infty)$.
(D) $(1;3)$.

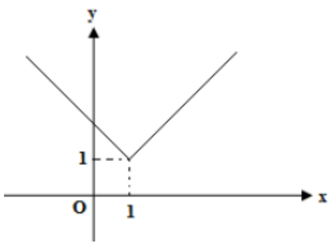
Câu 8. Cho hàm số $y = \dfrac{x-3}{x^2-1}$. Mệnh đề nào đúng?

(A) Hàm số không liên tục tại các điểm $x = \pm 1$.
(B) Hàm số liên tục tại mọi $x \in \mathbb{R}$.
(C) Hàm số liên tục tại các điểm $x = 1$.
(D) Hàm số liên tục tại các điểm $x = -1$.

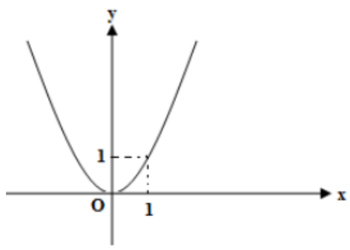
Câu 9. Hàm số $y = \dfrac{1}{x^2-4}$ gián đoạn tại điểm nào dưới đây?

(A) $x = 1$.
(B) $x = 0$.
(C) $x = 2$.
(D) $x = -1$.

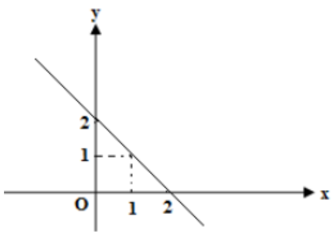
Câu 10. Hình nào trong các hình dưới đây là đồ thị của hàm số không liên tục tại $x = 1$?

(A) 

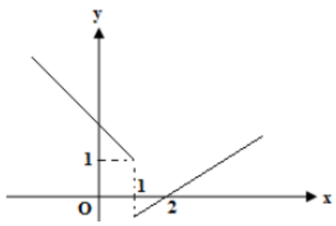
.

(B) 

.

(C) 

.

(D) 

.

Câu 11. Hàm số nào dưới đây liên tục trên khoảng $(0;5)$?

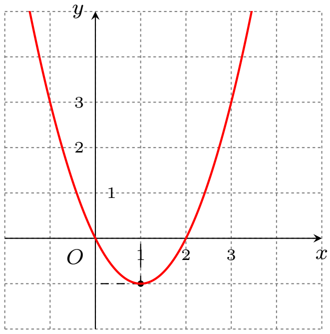
(A) $y = \dfrac{3x-2}{x-3}$.
(B) $y = \dfrac{x+1}{x+2}$.
(C) $y = \dfrac{5x+1}{x-4}$.
(D) $y = \dfrac{1}{x^2-1}$.

Câu 12. Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm $x = 2$?

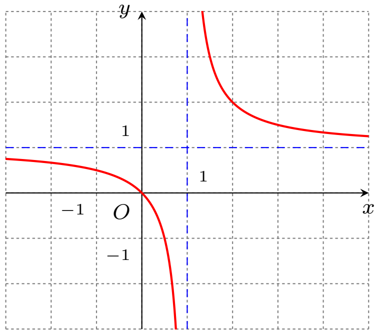
(A) $y = \dfrac{1}{x-2}$.
(B) $y = \sin x$.
(C) $y = x^4$.
(D) $y = \tan x$.

2 Tự luận

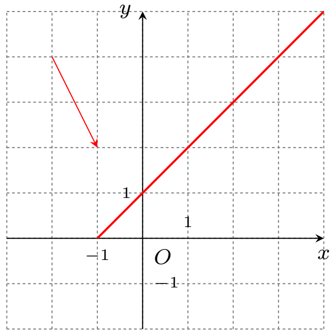
Bài 1. Trong các hàm số có đồ thị ở *Hình a, b, c* hàm số nào liên tục trên tập xác định của hàm số đó? Giải thích.



a) Đồ thị hàm số $f(x) = x^2 - 2x$



b) Đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$

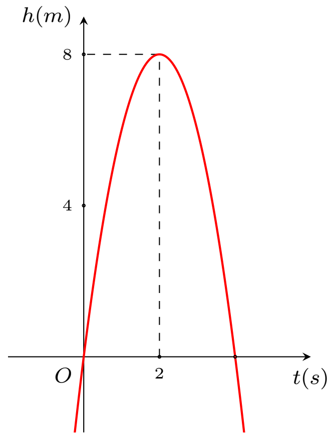


c) Đồ thị hàm số $h(x) = \begin{cases} -2x \text{ nếu } x < -1 \\ x+1 \text{ nếu } x \geq 1 \end{cases}$

Bài 2. Hình bên cạnh biểu thị độ cao h (m) của một quả bóng được đá lên thời gian t (s), trong đó $h(t) = -2t^2 + 8t$.

a) Chứng tỏ hàm số $h(t)$ liên tục trên tập xác định.

b) Dựa và đồ thì hãy xác định $\lim\limits_{t \to 2} \left(-2t^2 + 8t\right)$.



Bài 3. Xét tính liên tục của hàm số:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \geqslant 0 \\ 1 - x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ tại điểm $x = 0$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{khi } x \geqslant 1 \\ x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ tại điểm $x = 1$.

Bài 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ a & \text{khi } x = -2 \end{cases}$.

Tìm a để hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 5. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & \text{nếu } x\neq 4\\ 2a+1 & \text{nếu } x=4.\end{cases}$

a) Với $a=0$, xét lính liên tục của hàm số tại $x=4$.

b) Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục tại $x=4$.

c) Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục trên tập xác định của nó?

Bài 6. Xét tính liên tục của các hàm số sau

a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$.

b) $g(x)=\sqrt{9-x^2}$.

c) $h(x)=\cos x+\tan x$.

d) $k(x)=x^2+\sin x$.

e) $l(x)=x^4-x^2+\dfrac{6}{x-1}$.

f) $m(x)=\dfrac{2x}{x-3}+\dfrac{x-1}{x+4}$.

Bài 7. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ a+5 & \text{khi } x=2\end{cases}$. Tìm a để hàm số $y=f(x)$ liên tục tại $x=2$.

Bài 8. Cho hai hàm số $f(x)=\begin{cases} 2-x & \text{khi } x<1\\ x^2+x & \text{khi } x\geq 1\end{cases}$ và $g(x)=\begin{cases} 2x-x^2 & \text{khi } x<1\\ -x^2+a & \text{khi } x\geq 1\end{cases}$

Tìm giá trị của tham số a sao cho hàm số $h(x)=f(x)+g(x)$ liên tục tại $x=1$.

Bài 9. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{khi } |x|<2\\ x(2-x) & \text{khi } |x|\geq 2\end{cases}$

Tìm giá trị của các tham số a và b sao cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 10. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases} 3 & \text{nếu } x\leqslant 1\\ ax+b & \text{nếu } 1<x<2\\ 5 & \text{nếu } x\geqslant 2\end{cases}$ Tìm giá trị của các tham số a và b sao cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 11. Chứng minh rằng phương trình:

a) $x^3+2x-1=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(-1;1)$.

b) $\sqrt{x^2+x}+x^2=1$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

Bài 12. Một bãi đậu xe ô-tô đưa ra giá $C(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau: $C(x)=\begin{cases} 60.000 & \text{khi } 0<x\leqslant 2\\ 100.000 & \text{khi } 2<x\leqslant 4\\ 200.000 & \text{khi } 4<x\leqslant 24\end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số $C(x)$.

Bài 13. Lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một đơn vị khối lượng ở khoảng cách r tính từ tâm của nó là $F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{khi } 0 < r \leqslant R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{khi } r \geqslant R \end{cases}$, trong đó M là khối lượng, R là bán kính của Trái Đất, G là hằng số hấp dẫn. Hàm số $F(r)$ có liên tục trên $(0; +\infty)$ không?

Bài 14. Một bảng giá cước taxi được cho như sau:

Giá mở cửa ($0,5$ km đầu)	Giá cước các km tiếp theo đến 30 km	Giá cước từ km thứ 31
10 000 đồng	13 500 đồng	11 000 đồng

a) Viết công thức hàm số mô tả số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển.

b) Xét tính liên tục của hàm số ở câu a.

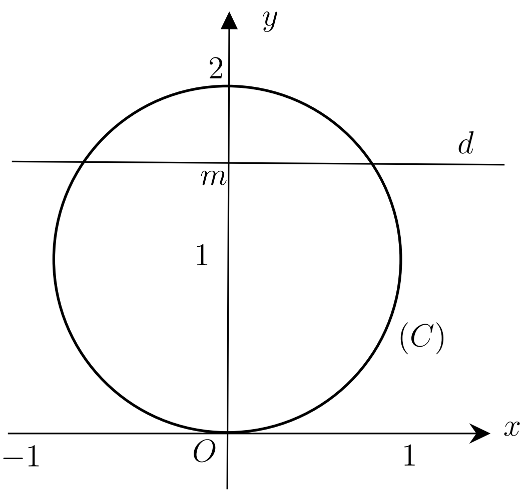
Bài 15. Theo quyết định số 2019/QĐ-BĐVN ngày 01/11/2018 của Tổng công ty Bưu điện Việt Nam, giá cước dịch vụ Bưu chính phổ cập đối với dịch vụ thư cơ bản và bưu thiếp trong nước có khối lượng đến 250 g như trong bảng sau:

Khối lượng đến 250 g	**Mức cước (đồng)**
Đến 20 g	4 000
Trên 20 g đến 100 g	6 000
Trên 100 g đến 250 g	8 000

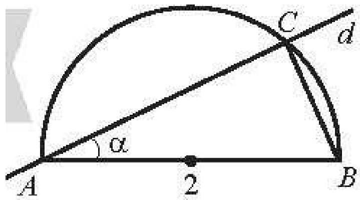
a) Hãy biểu diễn số tiền phải trả khi sử dụng dịch vụ thư cơ bản và bưu thiếp theo khối lượng của thư cơ bản và bưu thiếp.

b) Hàm số trên có liên tục trên tập xác định hay không?

Bài 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + (y-1)^2 = 1$. Với mỗi số thực m, gọi $Q(m)$ là số giao điểm của đường thẳng $d: y = mx$ với đường tròn (C). Viết công thức xác định hàm số $y = Q(m)$. Hàm số này không liên tục tại các điểm nào?



Bài 17. Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2$. Đường thẳng d thay đổi luôn đi qua điểm A, cắt nửa đường tròn tại C và tạo với đường thẳng AB góc có số đo $\widehat{CAB} = \alpha \quad \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$. Kí hiệu diện tích tam giác ABC là $S(\alpha)$ (phụ thuộc vào α). Xét tính liên tục của hàm số $S(\alpha)$ trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ và tính các giới hạn $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} S(\alpha)$ và $\lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} S(\alpha)$.

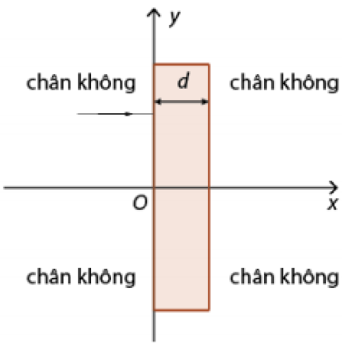


Bài 18. Trong Vật lí, tỉ số giữa tốc độ c của ánh sáng trong chân không và tốc độ v của ánh sáng trong một môi trường được gọi là chiết suất của môi trường đó. Chiết suất của một môi trường đồng nhất là không đổi. Ngày nay, với công nghệ nano, người ta tạo ra được các bản thuỷ tinh mà chiết suất của nó thay đổi theo một phương nào đó.

Xét sự truyền của ánh sáng vào bản thuỷ tinh dọc theo trục Ox như Hình dưới. Biết chiết suất của bản thuỷ tinh này thay đổi theo hoành độ x cho bởi:

$$n(x) = \frac{a}{a - x} \quad \text{với } 0 \leq x \leq d$$

trong đó a là một hằng số có giá trị lớn hơn bề dày d của bản thuỷ tinh.



a) Chứng minh rằng tốc độ của ánh sáng cho bởi:

$$v(x) = \begin{cases} c & \text{nếu } x < 0 \\ c\left(1 - \dfrac{x}{a}\right) & \text{nếu } 0 \leq x \leq d \\ c & \text{nếu } x > d \end{cases}$$

b) Xét tính liên tục của hàm số $y = v(x)$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Chuyên đề 4 ÔN TẬP CHƯƠNG 3

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Ⓑ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ với k nguyên dương.

Ⓒ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Ⓓ Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim c = c$.

Câu 2. $\lim \dfrac{n+3}{n^2}$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 là:

Ⓐ $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Ⓑ $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Ⓒ $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

Ⓓ $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Câu 4. Cho $\lim u_n = 3, \lim v_n = +\infty$. Khi đó $\lim \dfrac{v_n}{u_n}$ bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 0. Ⓒ $+\infty$. Ⓓ $-\infty$.

Câu 5. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) với $u_n = 1 - \dfrac{2}{n}, v_n = 4 + \dfrac{2}{n+2}$. Tính $\lim \left(u_n + \sqrt{v_n}\right)$.

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 5. Ⓓ 2.

Câu 6. Khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\lim \left(-\dfrac{2025}{2026}\right)^n = 0$.

Ⓑ $\lim \left(\sqrt{3}\right)^n = +\infty$.

Ⓒ $\lim \left(\dfrac{5}{3}\right)^n = 0$.

Ⓓ $\lim \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$.

Câu 7. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{4x-4}{x-2}$ bằng

Ⓐ 4. Ⓑ -4. Ⓒ $-\infty$. Ⓓ $+\infty$.

Câu 8. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2-x+x^2}{x}$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ $-\infty$. Ⓓ $+\infty$.

Câu 9. Cho các giới hạn: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 3$. Tính $M = \lim\limits_{x\to x_0} [3f(x) - 4g(x)]$.

Ⓐ $M = 5$. Ⓑ $M = 2$. Ⓒ $M = -6$. Ⓓ $M = 3$.

Câu 10. Giá trị của $\lim\limits_{x\to -2} \left(x^3 - x^2 + 1\right)$ bằng

Ⓐ -11. Ⓑ 12. Ⓒ 5. Ⓓ 0.

Câu 11. Giá trị của $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+5} - x\right)$ là

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ 1. Ⓓ 0.

Câu 12. Biểu diễn dưới dạng phân số của số $1,(7)$ là

Ⓐ $\dfrac{7}{9}$. Ⓑ $\dfrac{10}{9}$. Ⓒ $\dfrac{10}{3}$. Ⓓ $\dfrac{16}{9}$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu điều kiện nào sau đây xảy ra?

Ⓐ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = f(b)$.

Ⓑ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

Ⓒ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = b$.

Ⓓ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = b$.

Câu 14. Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục tại điểm $x = 0$?

Ⓐ $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x}$. Ⓑ $y = x^3 - 2x^2 - x + 1$.

Ⓒ $y = \cot x$. Ⓓ $y = \sqrt{2x^2 - 1}$.

Câu 15. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

Ⓐ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(a; b)$.

Ⓑ Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(a; b)$ thì hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$.

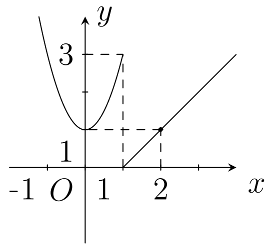
Ⓒ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có đúng một nghiệm trên $(a; b)$.

Ⓓ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm trên $[a; b]$.

Câu 16. Hàm số nào sau đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y = \cos\dfrac{3}{x}$. Ⓑ $y = \cot 3x$. Ⓒ $y = \dfrac{1-x}{x^2+4}$. Ⓓ $y = \sqrt{x+2}$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị dưới đây, trên khoảng $(-2;3)$ hàm số gián đoạn tại điểm nào?



Ⓐ $x = 0$. Ⓑ $x = 1$. Ⓒ $x = 2$. Ⓓ $x = 3$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{, khi } x > 1 \\ 2x+1 & \text{, khi } x \leqslant 1 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng.

Ⓐ Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 1$.

Ⓑ Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 1$ vì $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$.

Ⓒ Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 1$ vì không tồn tại $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

Ⓓ Hàm số $f(x)$ không xác định tại $x = 1$.

Câu 19. Hàm số nào sau đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y = \cos\dfrac{3}{x}$. Ⓑ $y = \cot 3x$. Ⓒ $y = \dfrac{1-x}{x^2+4}$. Ⓓ $y = \sqrt{x+2}$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-5x+6}$. Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng nào?

Ⓐ $(2;3)$. Ⓑ $(-3;3)$. Ⓒ $(-3;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;3)$.

Câu 21. Cho hàm số $y = \dfrac{x+4}{x-3}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

Ⓐ Hàm số liên tục tại $x = 3$.

Ⓑ Hàm số liên tục trên $(-\infty;+\infty)$.

Ⓒ Hàm số liên tục tại $x = 2$ và $x = 3$.

Ⓓ Hàm số liên tục trên $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-x^2}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ n & \text{khi } x = 1 \\ mx+1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Biết hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$. Giá trị của m, n là

Ⓐ $n = 1$, $m = 0$. Ⓑ $n = 0$, $m = 1$.

Ⓒ $n = m = 1$. Ⓓ $n = -1$, $m = 0$.

Câu 23. Tính $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4x+1}{5x-1}$.

Ⓐ 0. Ⓑ $\dfrac{4}{5}$. Ⓒ $\dfrac{5}{4}$. Ⓓ -1.

Câu 24. Tính $\lim \dfrac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}$.

Ⓐ $\frac{1}{2}$. Ⓑ $\frac{1}{5}$. Ⓒ $-\dfrac{3}{2}$. Ⓓ 0.

Câu 25. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0 ?

Ⓐ $(\sqrt{2})^n$. Ⓑ $(-1,101)^n$. Ⓒ $(0,919)^n$. Ⓓ $(1,001)^n$.

Câu 26. Tính $\lim(\sqrt{4n^2+2n}-2n)$.

Ⓐ 0. Ⓑ $\dfrac{1}{4}$. Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ 1.

Câu 27. Tính $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$.

Ⓐ 0. Ⓑ $+\infty$. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

Câu 28. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

Ⓐ $\lim \dfrac{2^n+3}{1-2^n}$. Ⓑ $\lim \dfrac{(2n+1)(n-3)^2}{n-2n^3}$.

Ⓒ $\lim \dfrac{1-n^3}{n^2+2n}$. Ⓓ $\lim \dfrac{2^n+1}{3.2^n-3^n}$.

Câu 29. Tính $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$.

Ⓐ $-\dfrac{1}{3}$. Ⓑ $\dfrac{1}{3}$. Ⓒ 1. Ⓓ -1.

Câu 30. Tính tổng $S=-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{9}-\dfrac{2}{27}+\cdots+(-1)^n\dfrac{2}{3^n}+\cdots$.

Ⓐ $S=\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $S=-\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $S=-3$. Ⓓ $S=3$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=3$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-3$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\lim\limits_{x\to 1}=3$. Ⓑ $\lim\limits_{x\to 1}=0$.

Ⓒ $\lim\limits_{x\to 1}=-3$. Ⓓ Không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1}$.

Câu 32. Cho $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|}$. Khi đó, giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ là

Ⓐ 0. Ⓑ -1.

Ⓒ 1. Ⓓ Không tồn tại.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=m+1$. Biết giới hạn của $f(x)$ khi $x\to 1$ tồn tại. Giá trị của m là

Ⓐ $m=1$. Ⓑ $m=-1$.

Ⓒ $m=3$. Ⓓ Không tồn tại m.

Câu 34. Biết hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+a & \text{nếu } x\le 1 \\ 2x+b & \text{nếu } x>1 \end{cases}$ có giới hạn khi $x\to 1$. Giá trị của $a-b$ bằng

Ⓐ -1. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

Câu 35. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ là

Ⓐ $+\infty$.
Ⓑ Không tồn tại.
Ⓒ 2.
Ⓓ 0.

Câu 36. Giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-x}{x}$ là

Ⓐ $+\infty$.
Ⓑ 0.
Ⓒ -2.
Ⓓ Không tồn tại.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{nếu } -1<x\le 1 \\ 1-x & \text{nếu } x\le -1 \text{ hoặc } x>1 \end{cases}$. Mệnh đề đúng là

Ⓐ Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$.
Ⓑ Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-1;1)$.
Ⓒ Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-1;1]$.
Ⓓ Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+3x+2}{x+1} & \text{nếu } x\ne 1 \\ m & \text{nếu } x=-1 \end{cases}$ với m là tham số. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi

Ⓐ $m=0$. Ⓑ $m=3$. Ⓒ $m=-1$. Ⓓ $m=1$.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x(x-1)}{\sqrt{x-1}}$. Hàm số này liên tục trên

Ⓐ $(1;+\infty)$. Ⓑ $(-\infty;1)$. Ⓒ $[1;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;1]$.

Câu 40. Cho phương trình $x^7+x^5=1$. Mệnh đề đúng là

Ⓐ Phương trình có nghiệm âm .
Ⓑ Phương trình có nghiệm trong khoảng $(0;1)$.
Ⓒ Phương trình có nghiệm trong khoảng $(1;2)$.
Ⓓ Phương trình vô nghiệm .

2 Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x^3+27} & \text{nếu } x \neq -3 \\ a - \dfrac{11}{9} & \text{nếu } x = -3 \end{cases}$

Phát biểu	Đ	S
A Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.		
B $f(-3) = a - \dfrac{11}{9}$.		
C $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^3+27}$.		
D Có 23 giá trị nguyên của $a \in (0;25)$ để hàm số gián đoạn tại $x = -3$.		

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 + 2m & \text{khi } x < 2 \\ \sqrt{x+7} & \text{khi } x \geqslant 2 \end{cases}$, m là tham số.

Phát biểu	Đ	S
A Khi $m = -1$ thì $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$.		
B $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 5$.		
C $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3$.		
D Tồn tại $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ khi $m = -3$.		

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-4}$.

Phát biểu	Đ	S
A Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(3;+\infty)$.		
B Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = -2$.		
C Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x = 2$.		
D Nếu $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$; $\dfrac{a}{b}$ tối giản thì $a^2 + b^2 = 25$.		

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+ax+b}{x^2-4} & \text{khi } x < -2 \\ x + 1 & \text{khi } x \geqslant 2 \end{cases}$, a, b là tham số.

Phát biểu	Đ	S
A $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -1$.		
B $f(-2) = 1$.		
C Khi hàm số có giới hạn tại $x = 2$ thì $3a - 12b = 12$.		
D Khi $a = 2, b = 0$, hàm số không liên tục tại $x = -2$.		

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a - 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ $(a \in \mathbb{R})$.

Phát biểu	Đ	S
A Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$.		
B Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$.		
C Với $a = 3$ thì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.		
D $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$.		

Câu 6. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
A Hàm số $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x + 2}$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.		
B $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{4x + 1}{x - 2} = -\infty$.		
C $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(2x + 1)(4 - 5x)}{-x^2 + 7x + 8} = 10$.		
D Hàm số $f(x) = \tan 2x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.		

Câu 7. Xét tính đúng, sai các mệnh đề sau:

Phát biểu	Đ	S
A Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim(u_n v_n) = +\infty$.		
B Nếu $\lim u_n = a > 0$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$.		
C Nếu $\lim u_n = a \neq 0$ và $\lim v_n = +\infty$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.		
D $\lim q^n = 0, \lvert q \rvert < 1$.		

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{|x|} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

Phát biểu	Đ	S
A Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$.		
B Hàm số có giới hạn tại $x = 1$.		
C $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$.		
D Hàm số có giới hạn tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.		

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4} & \text{khi } x \leqslant 2 \\ \dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \end{cases}$

Phát biểu	Đ	S
A $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \dfrac{1}{2}$.		
B $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{1}{4}$.		
C $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \dfrac{3}{4}$.		
D Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2$.		

Câu 10. Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$ và $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = -\infty$.

Phát biểu	Đ	S
A $\lim\limits_{x \to 2} \left[f(x) - g(x)\right] = -\infty$.		
B $\lim\limits_{x \to 2} \left[f(x)g(x)\right] = -\infty$.		

Phát biểu	Đ	S
C $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.		
D $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{f(x)+1}-2}{f(x)-3} = 1$.		

Câu 11. Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số $C(x) = 600 + 500x$.

Phát biểu	Đ	S
A Chi phí để sản xuất 1 sản phẩm là 1100 đồng .		
B Chi phí để sản xuất 10 sản phẩm là 560 000 đồng .		

C Công ty sản xuất 20 sản phẩm thì chi phí trung bình của mỗi sản phẩm là 530 000 đồng .		
D Nếu công ty sản xuất được số sản phẩm tăng lên rất nhiều thì chi phí trung bình của mỗi sản phẩm giảm dần về mức 500 000 đồng .		

Câu 12. Trong hồ có chứa 10 mét khối nước ngọt (có nồng độ muối xem như bằng 0). Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 40 gam/lít vào hồ với tốc độ 20 lít/phút. Biết rằng, nồng độ muối trong dung dịch được tính bằng công thức $C = \dfrac{m}{V}$.

Phát biểu	Đ	S
A Sau thời gian t (phút), lượng nước biển được bơm vào hồ là $20t$ (lít). .		
B Khối lượng muối bơm vào hồ sau thời gian t (phút) là $m(t) = 40t$ (gam) .		
C Nồng độ muối trong hồ sau thời gian t (phút) là $C(t) = \dfrac{800t}{10000 + 20t}$.		
D Khi thời gian t (phút) càng lớn, nồng độ muối trong hồ sẽ càng cao nhưng không vượt quá 400 (gam/lít) .		

Câu 13. Cho các hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{khi } x \neq 3 \\ 7 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ và $g(x) = \dfrac{2}{x+1}$.

Phát biểu	Đ	S
A Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 3$.		
B $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 7$.		
C Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 3$.		
D Hàm số $y = f(x) + g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 3$.		

3 Tự luận

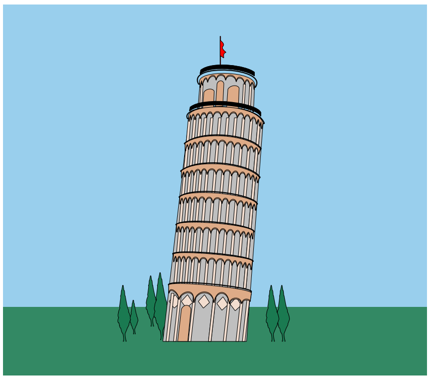
Bài 1. Tính $\lim\limits_{x \to -\infty} (1-x)(1-2x)\ldots(1-2018x)$.

Bài 2. Tìm a là số thực thỏa mãn $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2+1}{x^2+2x+3} + a^2 + 3a \right) = 0$.

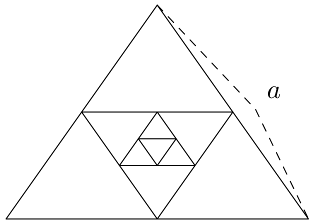
Bài 3. Cho giới hạn $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt[3]{ax^3+4x^2+1} + \sqrt{x^2+bx+1} - 2x - 4 \right) = 3$ với a, b là các số thực. Tính $S = 2a + 54b$.

Bài 4. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{1-x}}{x}$. Phải bổ sung thêm giá trị $f(0)$ bằng bao nhiêu để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

Bài 5. Từ độ cao $55,8$ m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất hình bên dưới. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\dfrac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính $\lim S_n$.



Bài 6. Cho tam giác đều có cạnh bằng a, gọi là tam giác H_1. Nối các trung điểm của H_1 để tạo thành tam giác H_2. Tiếp theo, nối các trung điểm của H_2 để tạo thành tam giác H_3 (Hình bên). Cứ tiếp tục như vậy, nhận được dãy tam giác $H_1, H_2, H_3, \ldots$ Tính tổng chu vi và tổng diện tích các tam giác của dãy.

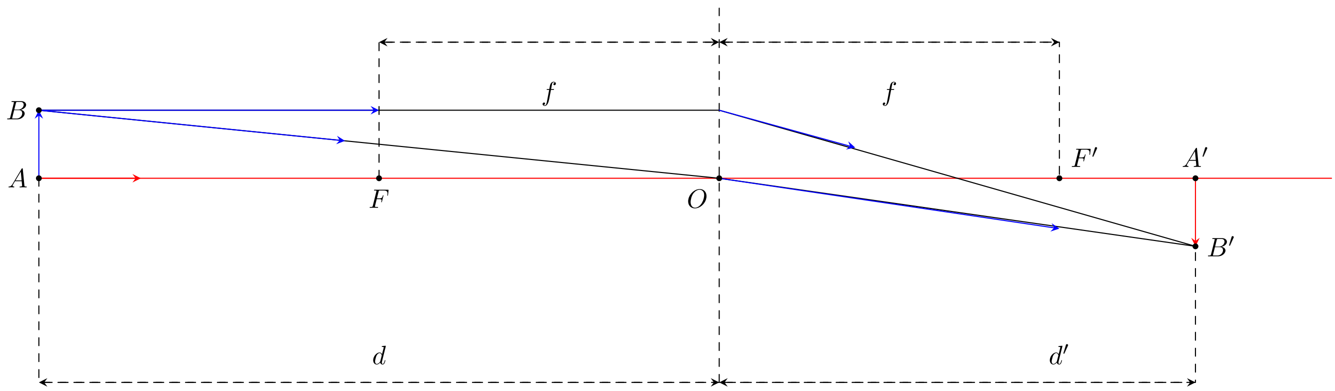


Bài 7. Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC, tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1, \ldots$, tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n, \ldots$ Gọi $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ và $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \ldots, A_nB_nC_n, \ldots$.

a) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n).

b) Tìm các tổng $p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots$ và $S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots$.

Bài 8. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là f. Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ một vật thật AB và từ ảnh $A'B'$ của nó tới quang tâm O của thấu kính như hình vẽ bên dưới. Công thức thấu kính là $\dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{d} = \dfrac{1}{f}$.



a) Tìm biểu thức xác định hàm số $d' = \varphi(d)$.

b) Tìm $\lim\limits_{d\to f^+}\varphi(d)$, $\lim\limits_{d\to f^-}\varphi(d)$ và $\lim\limits_{d\to f}\varphi(d)$. Giải thích ý nghĩa của các kết quả tìm được.

Bài 9. Trong một phòng thí nghiệm, nhiệt độ trong tủ sấy được điều khiển tăng từ 10°C, mỗi phút tăng 2°C trong 60 phút, sau đó giảm mỗi phút 3°C trong 40 phút. Hàm số biểu thị nhiệt độ (tính theo °C) trong tủ theo thời gian t (tính theo phút) có dạng

$$T(t) = \begin{cases} 10 + 2t \text{ khi } 0 \le t \le 60 \\ k - 3t \text{ khi } 60 < t \le 100 \end{cases} \quad (k \text{ là hằng số}).$$

Biết rằng, $T(t)$ là hàm liên tục trên tập xác định. Tìm giá trị của k.

Bài 10. Một điểm dịch vụ trông giữ xe ô tô thu phí 30 nghìn đồng trong giờ đầu tiên và thu thêm 20 nghìn đồng cho mỗi giờ tiếp theo.

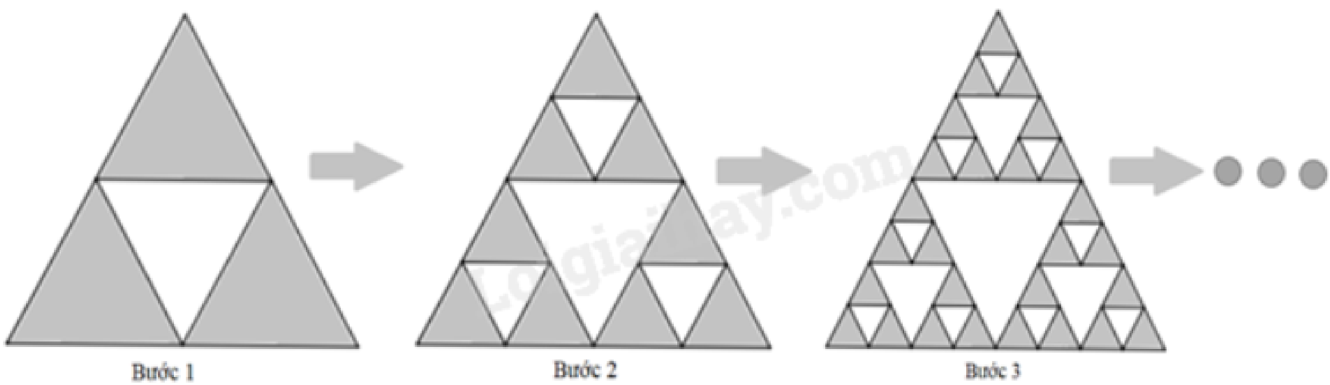
a) Viết hàm số $f(x)$ mô tả số tiền phí theo thời gian trông giữ.

b) Xét tính liên tục của hàm số này.

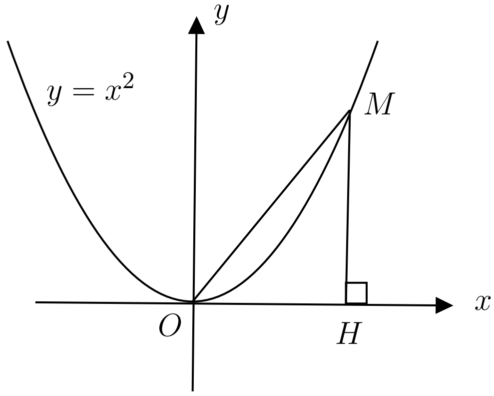
Bài 11. Từ một tam giác đều có diện tích bằng 1, ta thực hiện lần lượt các bước sau:

- Bước 1: Nối trung điểm các cạnh của tam giác đã cho, chia tam giác này thành 4 tam giác nhỏ và bỏ đi tam giác ở giữa (bỏ đi 1 tam giác có diện tích $\frac{1}{4}$).
- Bước 2: Làm tương tự như Bước 1 với mỗi tam giác trong 3 tam giác còn lại (bỏ đi 3 tam giác, mỗi tam giác có diện tích $\frac{1}{4^2}$).

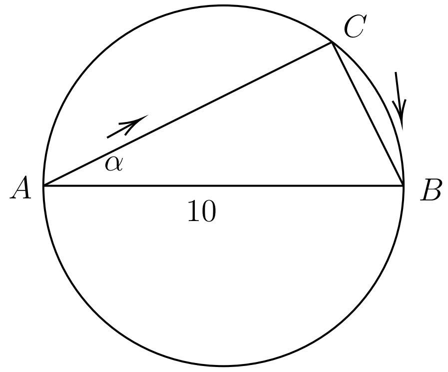
Cứ tiếp tục quá trình như vậy (ở bước thứ n, bỏ đi 3^{n-1} tam giác, mỗi tam giác diện tích $\frac{1}{4^n}$). Tính tổng diện tích các tam giác đã bỏ đi.



Bài 12. Cho M thay đổi trên parabol $y = x^2$; H là hình chiếu vuông góc của M trên trục hoành. Gọi x là hoành độ của điểm M. Tìm $\lim\limits_{x \to +\infty} (OM - MH)$.



Bài 13. Tại một bể bơi có dạng hình tròn có đường kính $AB = 10$ m, một người xuất phát từ A bơi thẳng theo dây cung AC tạo với đường kính AB một góc α $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ rồi chạy bộ theo cung nhỏ CB đến điểm B (Hình vẽ). Gọi $S(\alpha)$ là quãng đường người đó đã di chuyển.

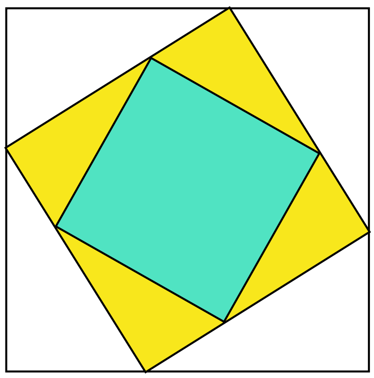


a) Viết công thức tính $S(\alpha)$ theo α $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) Xét tính liên tục của hàm số $y = S(\alpha)$ trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

c) Tính các giới hạn $\lim\limits_{x \to 0^+} S(\alpha)$ và $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} S(\alpha)$.

Bài 14. Cho hình vuông H_1 có cạnh bằng a. Chia mỗi cạnh của hình vuông này thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông H_2. Lặp lại cách làm như trên với hình vuông H_2 để được hình vuông H_3.



Tiếp tục quá trình trên ta nhận được dãy hình vuông $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n, \ldots$ Gọi s_n là diện tích của hình vuông H_n.

a) Tính s_n.

b) Tính tổng $s_1 + s_2 + \cdots + s_n + \cdots$

Chương 4

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

Mục lục của chương

Bài 1. Điểm, đường thẳng và mặt phẳng trong không gian 223
Bài 2. Hai đường thẳng song song 242
Bài 3. Đường thẳng và mặt phẳng song song 253
Bài 4. Hai mặt phẳng song song 262
Bài 5. Phép chiếu song song 274
Bài 6. Ôn tập chương 4 281

Chuyên đề 1

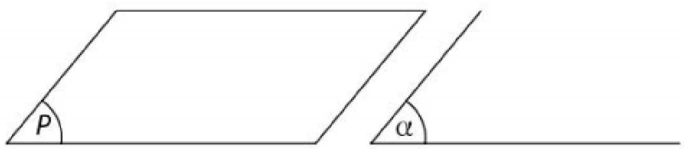
ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

I. MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

1) Khái niệm mở đầu

Mặt bảng, mặt bàn, mặt hồ nước yên lặng cho ta hình ảnh một phần của một mặt phẳng. Mặt phẳng không có bề dày và không có giới hạn.

- Để biểu diễn mặt phẳng, ta thường dùng hình bình hành hay một miền góc và ghi tên của mặt phẳng vào một góc của hình biểu diễn.
- Để kí hiệu mặt phẳng, ta dùng chữ cái in hoa hoặc chữ cái Hy Lạp trong dấu ngoặc để kí hiệu mặt phẳng.



LƯU Ý. Mặt phẳng (P) còn được viết tắt là mp (P) hoặc (P).

2) Điểm thuộc mặt phẳng

Cho hai điểm A, B và mặt phẳng (P).

- Nếu điểm A thuộc mặt phẳng (P) thì ta nói A nằm trên (P) hay (P) chứa A, hay (P) đi qua A và kí hiệu là $A \in (P)$.
- Nếu điểm B không thuộc mặt phẳng (P) thì ta nói B nằm ngoài (P) hay (P) không chứa B và kí hiệu là $B \notin (P)$.

3) Biểu diễn các hình không gian lên một mặt phẳng

Để biểu diễn một hình trong không gian lên một mặt phẳng (tờ giấy, mặt bảng, ...), ta thường dựa vào các quy tắc sau:

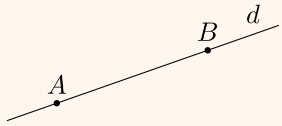
- Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.

- Giữ nguyên tính liên thuộc (thuộc hay không thuộc) giữa điểm với đường thẳng hoặc với đoạn thẳng.
- Giữ nguyên tính song song, tính cắt nhau giữa các đường thẳng.
- Biểu diễn đường nhìn thấy bằng nét vẽ liền và biểu diễn đường bị che khuất bằng nét vẽ đứt đoạn.

II. CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN CỦA HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

1) Tính chất 1

Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.



LƯU Ý. Đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt A, B được kí hiệu là AB. Ta cũng nói đường thẳng AB xác định bởi hai điểm A, B.

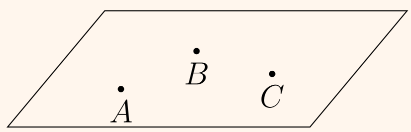
Ví dụ 1 ★☆☆☆☆

Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua hai trong bốn điểm đã cho?

Hướng dẫn giải. Do qua hai điểm phân biệt chỉ có một đường thẳng nên qua bốn điểm phân biệt không thẳng hàng A, B, C, D, ta xác định được sáu đường thẳng là AB, AC, AD, BC, BD và CD.

2) Tính chất 2

Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.



LƯU Ý. Mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng được kí hiệu là mặt phẳng (ABC).

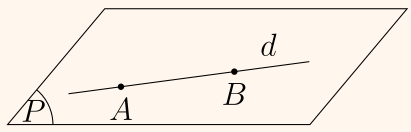
Ví dụ 2 ★☆☆☆☆

Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua ba đỉnh của tam giác MNP?

Hướng dẫn giải. Ba đỉnh của tam giác MNP không thẳng hàng nên chỉ có một mặt phẳng đi qua ba đỉnh của tam giác MNP.

3) Tính chất 3

Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.



Lưu ý. Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) thường được kí hiệu là $d \subset (P)$ hoặc $(P) \supset d$.

Ví dụ 3 ★☆☆☆☆

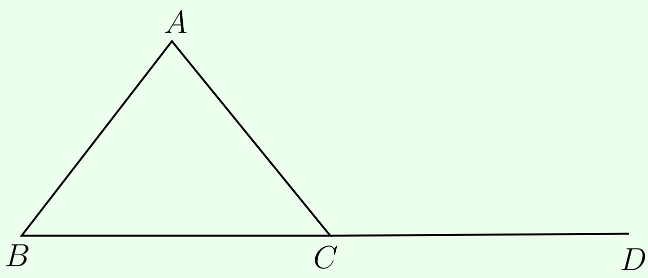
Cho mặt phẳng (Q) đi qua bốn đỉnh của tứ giác $ABCD$. Các điểm nằm trên các đường chéo của tứ giác $ABCD$ có thuộc (Q) không? Giải thích.

Hướng dẫn giải.

- Áp dụng tính chất 2, ta có mặt phẳng (Q) là mặt phẳng duy nhất đi qua bốn điểm A, B, C, D.
- Áp dụng tính chất 3, ta có mọi điểm nằm trên các đường chéo AC, BD đều thuộc mặt phẳng (Q).

1

Cho tam giác ABC . Gọi D là điểm nằm trên đường thẳng chứa cạnh BC sao cho $BD = 2BC$. Điểm D có thuộc mặt phẳng (ABC) không?Đường thẳng AD có nằm trong mặt phẳng (ABC) không?



4) Tính chất 4

Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.

LƯU Ý. Nếu có nhiều điểm cùng thuộc một mặt phẳng thì ta nói những điểm đó đồng phẳng, còn nếu không có mặt phẳng nào chứa các điểm đó thì ta nói chúng không đồng phẳng.

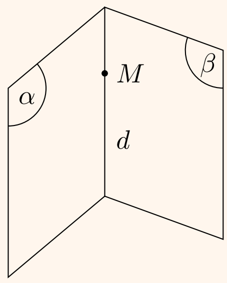
Ví dụ 4 ★☆☆☆☆

Cho tam giác MNP và điểm O không thuộc mặt phẳng chứa ba điểm M, N, P. Tìm các mặt phẳng phân biệt được xác định từ bốn điểm M, N, P, O.

Hướng dẫn giải. Bốn điểm M, N, P, O là bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng trong không gian (tồn tại theo tính chất 4). Ta xác định được bốn mặt phẳng phân biệt là: $(MNP), (MNO), (MPO), (NPO)$.

5) Tính chất 5

Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.



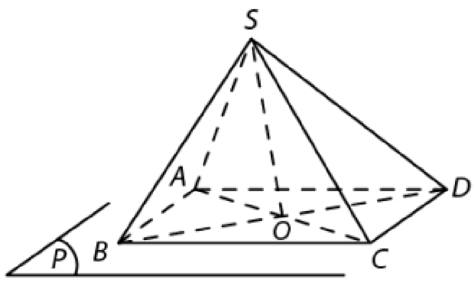
LƯU Ý. Đường thẳng d chung của hai mặt phẳng (P) và (Q) được gọi là giao tuyến của (P) và (Q), kí hiệu $d = (P) \cap (Q)$.

Ví dụ 5 ★☆☆☆☆

Trong mặt phẳng (P), cho hình bình hành $ABCD$. Lấy một điểm S nằm ngoài mặt phẳng (P). Hãy xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

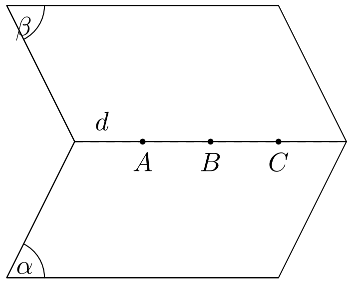
Hướng dẫn giải. Rõ ràng S là một điểm chung của (SAC) và (SBD).
Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD của hình bình hành $ABCD$. Ta có O thuộc AC và $AC \subset (SAC)$ nên O thuộc (SAC).

Tương tự O thuộc BD và $BD \subset (SBD)$ nên O thuộc (SBD). Suy ra, O cũng là một điểm chung của (SAC) và (SBD).
Vậy, giao tuyến của (SAC) và (SBD) là đường thẳng SO, hay $SO = (SAC) \cap (SBD)$.



Ví dụ 6 ★☆☆☆☆

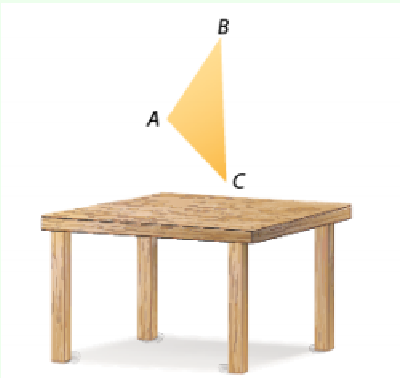
Cho A, B, C là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β). Chứng minh rằng A, B, C thẳng hàng.



Hướng dẫn giải. Ta có A, B, C là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) nên A, B, C cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) (theo tính chất 5) . Vậy A, B, C thẳng hàng.

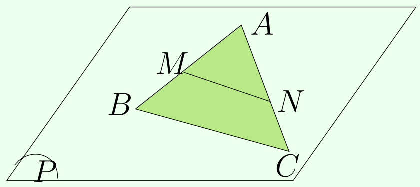
2

Bạn Nam cầm một miếng bìa hình tam giác với 3 đỉnh là A, B, C (Hình 4.23) đưa lên không quá cao so với mặt bàn và khẳng định rằng: "Nếu ta đặt các thanh thước dài dọc theo các cạnh AB, BC, CA để các thanh thước này chạm vào mặt bàn lần lượt tại các vị trí đánh dấu là điểm D, E, F thì ba điểm này thẳng hàng". Bạn Mai không đồng ý và khẳng định: "D, E, F không thẳng hàng được vì A, B, C không thẳng hàng ". Hãy cho biết ai đúng, ai sai? Vì sao?



3

Trong mặt phẳng (P), cho tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AC. Tính tỉ số $\dfrac{MN}{BC}$.



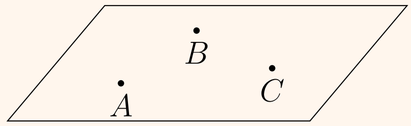
6) Tính chất 6

Trong mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.

III. CÁCH XÁC ĐỊNH MẶT PHẲNG

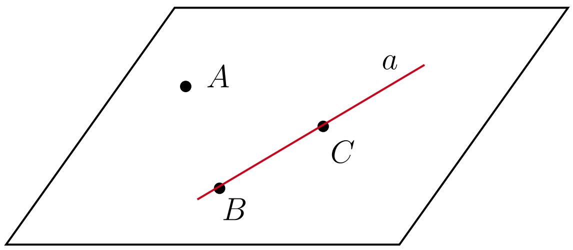
Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa ba điểm không thẳng hàng.

Mặt phẳng xác định bởi ba điểm A, B, C không thẳng hàng kí hiệu là mp (ABC) hay (ABC).



Ví dụ 7 ★☆☆☆☆

Cho đường thẳng a và điểm A không nằm trên đường thẳng a. Trên a lấy hai điểm B, C phân biệt. Đường thẳng a có nằm trong (ABC) không?Giải thích.

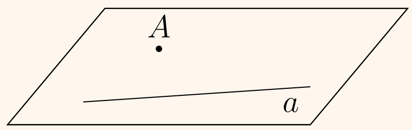


Hướng dẫn giải. Áp dụng tính chất 2, ta có duy nhất một mặt phẳng đi qua ba điểm phân biệt A, B, C là mặt phẳng (ABC).

Áp dụng tính chất 3, ta có đường thẳng a có hai điểm phân biệt B, C nằm trong (ABC) nên mọi điểm của đường thẳng a nằm trong (ABC). Do đó đường thẳng a nằm trong (ABC).

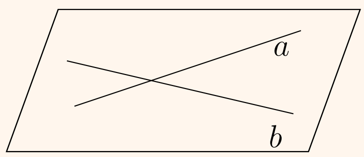
Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó.

Mặt phẳng xác định bởi điểm A và đường thẳng a không qua điểm A kí hiệu là mp(A, a) hay (A, a).



Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

Mặt phẳng xác định bởi điểm hai đường thẳng a, b cắt nhau kí hiệu là mp(a, b).



Ví dụ 8

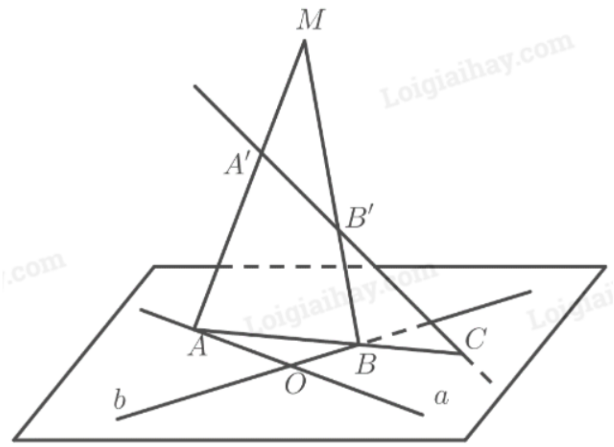
Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại O và điểm M không thuộc mặt phẳng (a, b).

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (M, a) và (M, b).

b) Lấy A, B lần lượt là hai điểm trên a, b và khác với điểm O. Tìm giao tuyến của (MAB) và mp (a, b).

c) Lấy điểm A' trên đoạn MA và điểm B' trên đoạn MB sao cho đường thẳng $A'B'$ cắt mp (a, b) tại C. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Hướng dẫn giải.



a) Ta có:

$$\begin{cases} M \in (M, a) \\ M \in (M, b) \end{cases} \Rightarrow M \in (M, a) \cap (M, b)$$

$$\begin{cases} O \in a \subset (M, a) \\ O \in b \subset (M, b) \end{cases} \Rightarrow O \in (M, a) \cap (M, b)$$

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (M, a) và (M, b) là đường thẳng MO.

b) Ta có:

$$\begin{cases} A \in (MAB) \\ A \in a \subset (a, b) \end{cases} \Rightarrow A \in (MAB) \cap (a, b)$$

$$\begin{cases} B \in (MAB) \\ B \in b \subset (a, b) \end{cases} \Rightarrow B \in (MAB) \cap (a, b)$$

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (MAB) và (a, b) là đường thẳng AB (1).

c) Ta có:

$$\begin{cases} A' \in MA \subset (MAB) \\ B' \in MB \subset (MAB) \end{cases} \Rightarrow A'B' \subset (MAB)$$

Vì $C \in A'B' \subset (MAB)$ và $C \in mp(a, b)$ nên điểm C nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (MAB) và (a, b) (2).

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm A, B, C thẳng hàng.

4 Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau và hai điểm M, N không nằm trong mặt phẳng (a, b). Biết rằng đường thẳng MN và mặt phẳng (a, b) luôn có một điểm chung. Một mặt phẳng (α) thay đổi luôn luôn chứa MN và (α) có điểm chung với hai đường thẳng a, b lần lượt là A, B. Chứng minh rằng dường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định khi (α) thay đổi.

5

Giải thích tại sao ghế bốn chân có thể bị khập khiễng còn ghế ba chân thì không.

6

Trong xây dựng, người ta thường dùng máy quét tia laser để kẻ các đường thẳng trên tường hoặc sàn nhà. Tìm giao tuyến của mặt phẳng tạo bởi các tia laser OA và OB của các mặt tường trong hình bên.

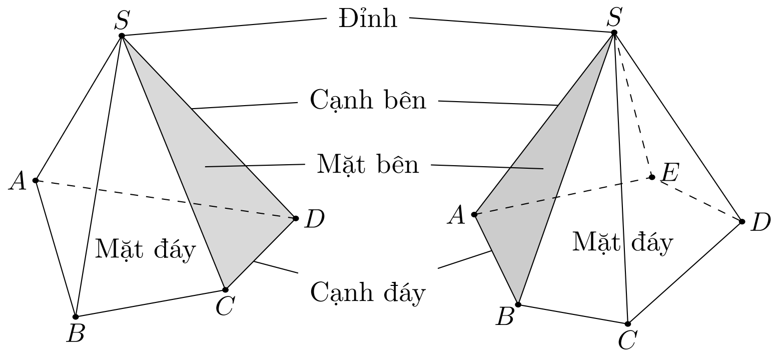
IV. HÌNH CHÓP VÀ TỨ DIỆN

1) Hình chóp

Cho đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_n$ nằm trong mặt phẳng (α) và điểm S không thuộc (α). Nối S với các đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \ldots, SA_nA_1$. Hình tạo bởi n tam giác đó và đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ được gọi là hình chóp, kí hiệu $S.A_1A_2\ldots A_n$.

Trong hình chóp $S.A_1A_2\ldots A_n$, ta gọi:

- Điểm S là **đỉnh**;
- Các tam giác SA_1A_2, SA_2A_3,..., SA_nA_1 là các **mặt bên**;
- Đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ là **mặt đáy**;
- Các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, \ldots, SA_n$ là các **cạnh bên**;
- Các cạnh của đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ là các **cạnh đáy**.

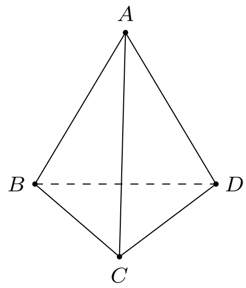


Ta gọi hình chóp có đáy tam giác, tứ giác, ngũ giác,... lần lượt là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác, ...

2) Hình tứ diện

Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình tạo bởi bốn tam giác ABC, ACD, ADB và BCD được gọi là hình tứ diện (hay tứ diện), kí hiệu $ABCD$.

Trong tứ diện $ABCD$, ta gọi:



- Các điểm A, B, C, D là các **đỉnh**.
- Các đoạn thẳng AB, AC, AD, BC, CD, BD là các **cạnh** của tứ diện.
- Hai cạnh không đi qua một đỉnh là **hai cạnh đối diện**.
- Các tam giác ABC, ACD, ADB, BCD là các **mặt** của tứ diện.
- Đỉnh không thuộc một mặt của tứ diện là **đỉnh đối diện** với mặt đó.

LƯU Ý.

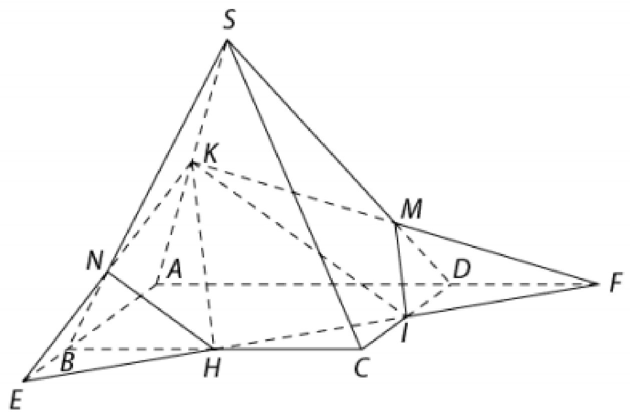
a) Hình tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều được gọi là hình tứ diện đều.

b) Một tứ diện có thể xem như là một hình chóp tam giác với đỉnh là một đỉnh tuỳ ý của tứ diện và đáy là mặt của tứ diện không chứa đỉnh đó.

Ví dụ 9

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của BC, CD, SA. Tìm giao điểm của mặt phẳng (HIK) với các cạnh của hình chóp và giao tuyến của mặt phẳng (HIK) với các mặt của hình chóp.

Hướng dẫn giải.



Đường thẳng HI cắt đường thẳng AB và AD lần lượt tại E, F.

Gọi N là giao điểm của KE và SB, M là giao điểm của KF và SD.

Ta có giao điểm của (HIK) với các cạnh SB, SA, SD lần lượt là N, K, M. Từ đó suy ra:

$$(HIK) \cap (ABCD) = IH; (HIK) \cap (SBC) = HN;$$

$$(HIK) \cap (SAB) = NK; (HIK) \cap (SAD) = KM; (HIK) \cap (SCD) = MI.$$

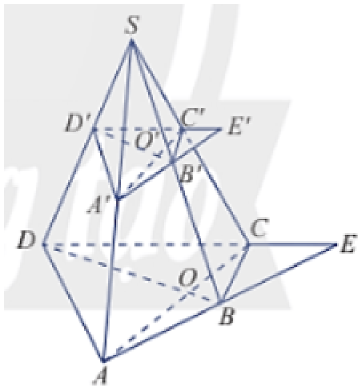
LƯU Ý. Việc tìm giao tuyến của mặt phẳng (HIK) trong ví dụ 9 với các mặt của hình chóp được gọi là tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (HKI). Ta tìm các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau của mặt phẳng (HIK) với các mặt của hình chóp cho đến khi khép kín thành một đa giác phẳng. Đa giác đó là thiết diện cần tìm và các đoạn giao tuyến chính là các cạnh của thiết diện. Thiết diện ở ví dụ 9 là ngũ giác $IHNKM$.

Ví dụ 10 ★☆☆☆☆

Cho hình chóp $S.ABCD$. Trên các cạnh bên của hình chóp lấy lần lượt các điểm A', B', C', D'. Cho biết AC cắt BD tại O, $A'C'$ cắt $B'D'$ tại O', AB cắt CD tại E và $A'B'$ cắt $D'C'$ tại E' (Hình vẽ). Chứng minh rằng:

a) S, O', O thẳng hàng;

b) S, E', E thẳng hàng



Hướng dẫn giải.

a) Ta có:

$$\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$$

$$\begin{cases} O' \in A'C' \subset (SAC) \\ O' \in B'D' \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O' \in (SAC) \cap (SBD)$$

Mà $S \in (SAC) \cap (SBD)$.

Do đó, S, O, O' cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Vậy S, O', O thẳng hàng.

b) Ta có:

$$\begin{cases} E \in AB \subset (SAB) \\ E \in CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow E \in (SAB) \cap (SCD)$$

$$\begin{cases} E' \in A'B' \subset (SAB) \\ E' \in C'D' \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow E' \in (SAB) \cap (SCD)$$

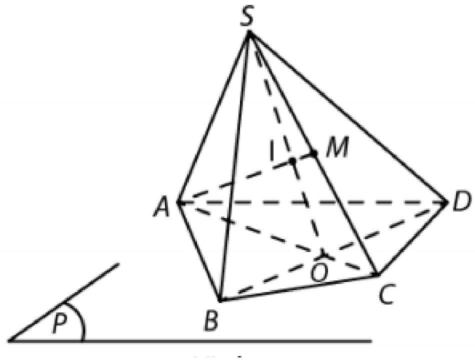
Mà $S \in (SAB) \cap (SCD)$.

Do đó, S, E, E' cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Vậy ba điểm S, E, E' thẳng hàng.

Ví dụ 11 ★☆☆☆☆

Trong mặt phẳng (P), cho tứ giác $ABCD$, lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (P). Gọi M là trung điểm của SC. Tìm giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD).



Hướng dẫn giải.

- Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi O là giao điểm của AC và BD.
- Trong mặt phẳng (SAC), ta có đường thẳng AM và SO cắt nhau tại một điểm, gọi điểm đó là I.

Ta có: $\begin{cases} I \in SO \\ SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SBD)$ và hiển nhiên $I \in AM$.

Vậy I là giao điểm của AM và (SBD).

LƯU Ý.

- Để tìm giao điểm của một đường thẳng và một mặt phẳng, ta có thể đưa về việc tìm giao điểm của đường thẳng đó với một đường thẳng nằm trong mặt phẳng đã cho.
- Nếu I là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α) thì ta còn kí hiệu là $I = d \cap (\alpha)$ hoặc $d \cap (\alpha) = I$.

7 Cho hình chóp $S.ABCD$ với hai đường thẳng AB và CD cắt nhau. Gọi M là một điểm thuộc SA (khác S và A). Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (MCD).

8 Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình thang có đáy lớn AB. Gọi M là trung điểm của SD. Hãy xác định giao điểm của các cặp mặt phẳng (SAD) và (SBC); (MBC) và (SAD).

9 Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình thang có đáy lớn AB. Gọi M là trung điểm của SD. Hãy xác định giao điểm của các cặp mặt phẳng (SAD) và (SBC); (MBC) và (SAD).

10 Cho tứ diện $SABC$. Gọi H, K lần lượt là hai điểm trên hai cạnh SA và $SC(H \neq S, A; K \neq S, C)$ sao cho HK không song song với AC. Gọi I là trung điểm của BC.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng HK và mặt phẳng (ABC).

b) Tìm giao tuyến của các mặt phẳng (SAI) và (ABK); (SAI) và (BCH).

11 Trong mặt phẳng (Q), cho hình thang $ABCD$, đáy lớn AD. Lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (Q). Gọi M là trung điểm của SB. Tìm giao điểm của đường thẳng AM và mặt phẳng (SCD).

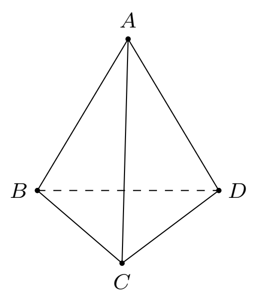
BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm

Câu 1. Trong không gian, qua ba điểm không thẳng hàng xác định được bao nhiêu mặt phẳng?

(A) 1 . (B) 2 . (C) 3 . (D) Vô số .

Câu 2. Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng (tham khảo hình vẽ). Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ các điểm đã cho?



(A) 4 . (B) 2 . (C) 3 . (D) 6 .

Câu 3. Một hình chóp có đáy là ngũ giác có số mặt và số cạnh là

(A) 6 mặt, 5 cạnh . (B) 6 mặt, 10 cạnh.

(C) 5 mặt, 5 cạnh . (D) 5 mặt, 10 cạnh .

Câu 4. Trong hình học không gian, cho mặt phẳng (P). Khẳng định nào đúng?

(A) Điểm luôn phải thuộc mặt phẳng (P) .
(B) Điểm luôn không thuộc mặt phẳng (P) .
(C) Điểm vừa thuộc, đồng thời vừa không thuộc mặt phẳng (P) .
(D) Điểm có thể thuộc mặt phẳng (P), có thể không thuộc mặt phẳng (P) .

Câu 5. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A) Qua 2 điểm phân biệt có duy nhất một mặt phẳng .
(B) Qua 3 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng .
(C) Qua 3 điểm không thẳng hàng có duy nhất một mặt phẳng .
(D) Qua 4 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng .

Câu 6. Cho hai đường thẳng a, b cắt nhau và không đi qua điểm A. Xác định được nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng bởi a, b và A?

(A) 1 . (B) 2 . (C) 3 . (D) 4 .

Câu 7. Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trên một mặt phẳng. Trên AB, AD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho MN cắt BD tại I. Điểm I **không** thuộc mặt phẳng nào sau đây?

(A) (CMN) . (B) (BCD) . (C) (ABD) . (D) (ACD) .

Câu 8. Trong không gian, mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

(A) Có duy nhất một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt .
(B) Tồn tại duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau .
(C) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua ba điểm phân biệt .
(D) Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng .

Câu 9. Trong không gian, mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

(A) Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất .
(B) Nếu ba điểm phân biệt M, N, P cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì chúng thẳng hàng .
(C) Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn có vô số điểm chung khác nữa .
(D) Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất .

Câu 10. Cho mặt phẳng (P) và ba điểm A, B, C phân biệt không thẳng hàng và không thuộc mặt phẳng (P). Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của AB, BC, CA với (P). Khẳng định nào đúng?

Ⓐ $\triangle MNP = \triangle ABC$.

Ⓑ M, N, P thẳng hàng .

Ⓒ 4 điểm M, N, P, C không đồng phẳng .

Ⓓ 4 điểm A, B, C, M không đồng phẳng .

2 Tự luận

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi Olà giao điểm của AC và BD. Lấy M, N lần lượt thuộc các cạnh SA, SC.

a) Chứng minh đường thẳng MN nằm trong mặt phẳng (SAC).

b) Chứng minh O là điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC.

a) Tìm giao điểm I của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD). Chứng minh $IA = 2IM$.

b) Tìm giao điểm E của đường thẳng SD và mặt phẳng (ABM).

c) Gọi N là một điểm tùy ý trên cạnh AB. Tìm giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD).

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$ và E là một điểm nằm trong tam giác BCD. Gọi F là một điểm nằm giữa A và E. Xác định giao điểm của đường thẳng BF và mặt phẳng (ACD).

Bài 4. Cho tam giác ABC và điểm S không thuộc mặt phẳng (ABC). Lấy D, E là các điểm lần lượt thuộc các cạnh SA, SB và D, E khác S.

a) Đường thẳng DE có nằm trong mặt phẳng (SAB) không?

b) Giả sử DE cắt AB tại F. Chứng minh rằng F là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (CDE).

Bài 5. Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng phân biệt a, b nằm trong (P). Một đường thẳng c cắt hai đường thẳng a và b tại hai điểm phân biệt. Chứng minh rằng đường thẳng c nằm trong mặt phẳng (P).

Bài 6. Có tồn tại hay không một hình chóp có số cạnh (gồm cả cạnh bên và cạnh đáy) của nó là số lẻ? Vì sao?

Bài 7. Tại các nhà hàng, khách sạn, nhân viên phục vụ bàn thường xuyên phải bưng bê nhiều khay, đĩa đồ ăn khác nhau. Một trong những nguyên tắc nhân viên cần nhớ là khay phải được bưng bằng ít nhất 3 ngón tay. Hãy giải thích tại sao.

Bài 8. Trong mặt phẳng (P), cho hình bình hành $ABCD$. Lấy S nằm ngoài mặt phẳng (P). Lấy M, N lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh SA, SC.

a) Chứng minh rằng đường thẳng MN nằm trong mặt phẳng (SAC).

b) Giả sử MN và AC cắt nhau tại I, chứng minh I là điểm chung của hai mặt phẳng (BMN) và (ABC), từ đó suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (BMN) và (ABC).

Bài 9. Cho bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABN) và (MCD).

b) Gọi I và K lần lượt là điểm trên đoạn thẳng AC và AD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MCD) và (BIK).

Bài 10. Trong mặt phẳng (P), cho tứ giác $ABCD$. Gọi S là điểm không thuộc mặt phẳng (P). Lấy M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SA, SC.

a) Xác định giao điểm K của đường thẳng SD và mặt phẳng (BMN).

b) Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng MK và AD, Q là giao điểm của hai đường thẳng NK và CD. Chứng minh rằng ba điểm P, Q, B thẳng hàng.

Bài 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SCD.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBG) và (SAC).

b) Tìm giao điểm của đường thẳng BG và mặt phẳng (SAC).

Bài 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của AC và BD; M và N lần lượt là trung điểm của SB và SD; P thuộc đoạn SC và không là trung điểm của SC.

a) Tìm giao điểm E của đường thẳng SO và mặt phẳng (MNP).

b) Tìm giao điểm Q của đường thẳng SA và mặt phẳng (MNP).

c) Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của QM và AB, QP và AC, QN và AD. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Bài 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F, G lần lượt là ba điểm trên ba cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I $(I \neq C)$, EG cắt AD tại H $(H \neq D)$.

a) Tìm giao tuyến của các mặt phẳng (EFG) và (BCD), (EFG) và (ACD).

b) Chứng minh ba đường thẳng CD, IG, HF cùng đi qua một điểm.

Bài 14. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ và lấy một điểm E thuộc cạnh SA của hình chóp (E khác S, A). Trong mặt phẳng $(ABCD)$ vẽ một đường thẳng d cắt các cạnh CB, CD lần lượt tại M, N và cắt các tia AB, AD lần lượt tại P, Q.

a) Xác định giao điểm của mp(E, d) với các cạnh SB, SD của hình chóp.

b) Xác định giao tuyến của mp(E, d) với các mặt của hình chóp.

Bài 15. Cho hình tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AC, BC, BD lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $AM = CM$, $BN = CN$, $BP = 2DP$.

a) Xác định giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP).

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (MNP).

Bài 16. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho $AE = \dfrac{1}{2}BE$ và $AF = 2CF$. Gọi O là một điểm nằm trong tam giác BCD.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (OEF) và (ABD).

b) Xác định giao điểm (nếu có) của đường thẳng AD và mặt phẳng (OEF).

Bài 17. Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AB, AC, AD. Gọi O là một điểm nằm trong tam giác BCD.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (ABO) và (ACD).

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (ABO) và (MNP).

c) Xác định giao điểm của đường thẳng AO và mặt phẳng (MNP).

Bài 18. Cho hình tứ diện $SABC$ và các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các cạnh SA, SB, SC. Giả sử hai đường thẳng $B'C'$ và BC cắt nhau tại D, hai đường thẳng $C'A'$ và CA cắt nhau tại E và hai đường thẳng $A'B'$ và AB cắt nhau tại F. Chứng minh rằng ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Bài 19. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi I là trung điểm của AD, J là điểm đối xứng với D qua C, K là điểm đối xứng với D qua B. Xác định thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng (IJK) và tính diện tích của thiết diện này.

Bài 20. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến d và một điểm O nằm ngoài cả hai mặt phẳng $(P),(Q)$. Gọi A,B là hai điểm phân biệt thuộc mặt phẳng (P) sao cho AB cắt d tại C. Gọi D,E lần lượt là giao điểm của các đường thẳng OA,OB với mặt phẳng (Q). Chứng minh rằng ba điểm C,D,E thẳng hàng.

Bài 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SB, G là trọng tâm tam giác SAD.

a) Tìm giao điểm I của GM với $(ABCD)$. Chứng minh $IC = 2ID$.

b) Tìm giao điểm J của (OMG) với AD. Đặt $JA = k \cdot JD$. Tìm k.

c) Tìm giao điểm K của (OMG) với SA. Đặt $KA = p \cdot KS$. Tìm p.

d) Tìm thiết diện tạo bởi (OMG) với hình chóp $S.ABCD$.

Bài 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi K là trọng tâm của tam giác SAC và I, J lần lượt là trung điểm của CD và SD.

a) Tìm giao điểm H của đường thẳng IK với mặt phẳng (SAB).

b) Xác định thiết diện tạo bởi mặt phẳng (IJK) với hình chóp.

Bài 23. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ không là hình thang, điểm P nằm trong tam giác SAB và điểm M thuộc cạnh SD sao cho $MD = 2MS$.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (PCD).

b) Tìm giao điểm của SC với mặt phẳng (ABM).

c) Gọi N là trung điểm của AD. Tìm thiết diện tạo bởi (MNP) và hình chóp.

Bài 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Trên các cạnh SB,SD ta lần lượt lấy các điểm M và N thỏa $SB = 3SM$ và $3SN = 2SD$.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (SCD).

b) Tìm thiết diện của mặt phẳng (AMN) và hình chóp $S.ABCD$.

c) Gọi K là giao điểm của IN và CD. Tính tỉ số $\dfrac{KC}{KD}$.

Bài 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA,SC. Gọi (P) là mặt phẳng qua M,N và B.

a) Tìm giao tuyến của (P) với các mặt phẳng $(SAB),(SBC),(SCD),(SAD)$.

b) Tìm $E = DA \cap (P), F = DC \cap (P)$.

c) Chứng tỏ rằng E,F,B thẳng hàng.

Bài 26. Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm cạnh CD. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA.

a) Chứng minh rằng các điểm M, N thuộc mặt phẳng (ABI).

b) Gọi G là giao điểm của AM và BN. Chứng minh rằng: $\dfrac{GM}{GA} = \dfrac{GN}{GB} = \dfrac{1}{3}$.

c) Gọi P, Q lần lượt là trọng tâm các tam giác DAB, ABC. Chứng minh rằng các đường thẳng CP, DQ cùng đi qua điểm G và $\dfrac{GP}{GC} = \dfrac{GQ}{GD} = \dfrac{1}{3}$.

Bài 27. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và K là trung điểm của AB và CD. Gọi J là một điểm trên đoạn AD sao cho $AD = 3JD$.

a) Tìm giao điểm F của IJ và (BCD).

b) Tìm giao điểm E của (IJK) và đường thẳng BC. Tính tỉ số: $\dfrac{EB}{EC}$.

c) Chứng minh ba đường thẳng AC, KJ, IE đồng quy tại điểm H. Tính $\dfrac{HC}{HA}$.

d) Chứng minh $EJ // HF$ và đường thẳng IK đi qua trung điểm của đoạn HF.

e) Gọi O là trung điểm IK và G là trọng tâm của tam giác BCD. Chứng minh ba điểm A, O, G thẳng hàng. Tính tỉ số: $\dfrac{OA}{OG}$.

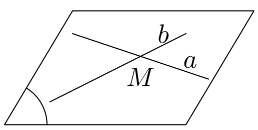
Chuyên đề 2

HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

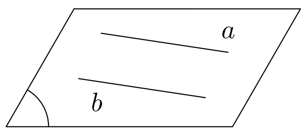
I. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian.

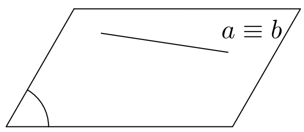
- Nếu a và b cùng nằm trong một mặt phẳng thì ta nói a và b đồng phẳng. Khi đócó ba trường hợp sau xảy ra:
  - ☆ Nếu a và b có hai điểm chung thì ta nói a trùng b, kí hiệu $a \equiv b$.
  - ☆ Nếu a và b có một điểm chung duy nhất M thì ta nói a và b cắt nhau tại M, kí hiệu $a \cap b = M$.
  - ☆ Nếu a và b không có điểm chung thì ta nói a và b song song với nhau, kí hiệu $a // b$.
- Nếu a và b không cùng nằm trong bất kì mặt phẳng nào thì ta nói a và b chéo nhau. Khi đó, ta cũng nói a chéo với b, hoặc b chéo với a.



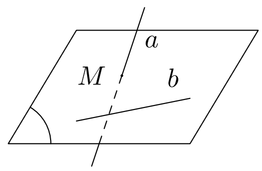
$a \cap b = \{M\}$
a cắt b tại M



$a//b$
a song song với b



$a \equiv b$
a trùng với b



a và b chéo nhau

Hai đường thẳng được gọi là song song nếu chúng cùng nằm trên một mặt phẳng và không có điểm chung.

LƯU Ý.

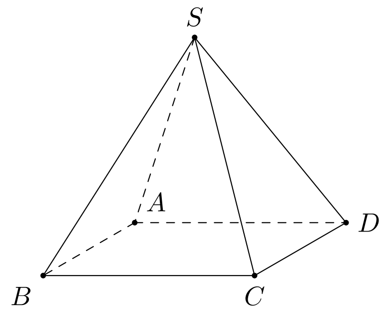
a) Hai đường thẳng được gọi là chéo nhau nếu chúng không đồng phẳng.

b) Cho hai đường thẳng song song a và b. Có duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó, kí hiệu mp(a, b).

Ví dụ 1

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây:

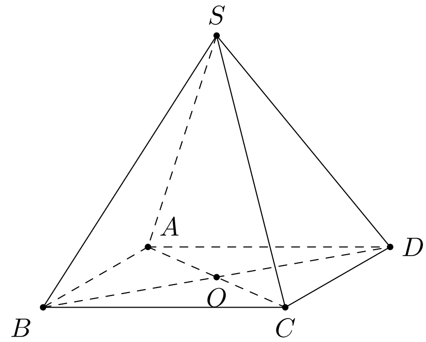


a) AB và CD; b) SA và SC; c) SA và BC.

Lời giải.

a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, ta có $ABCD$ là hình bình hành nên $AB//CD$.

b) Trong mặt phẳng (SAC), ta có SA cắt SC tại điểm S.



c) Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.

Giả sử SA và BC cùng nằm trong một mặt phẳng (P), suy ra đường thẳng AC nằm trong (P), suy ra (P) chứa điểm O. Tương tự, ta cũng có OB nằm trong (P), suy ra (P) chứa điểm D. Suy ra (P) chứa cả năm đỉnh của hình chóp $S.ABCD$. Điều này vô lý.

Vậy hai đường thẳng SA và BC không nằm trong cùng bất kỳ mặt phẳng nào, suy ra SA chéo với BC.

1 Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD. Chứng minh đường thẳng MN song song với đường thẳng BD và đường thẳng AB chéo với đường thẳng CD. Hãy chỉ ra thêm một cặp đường thẳng chéo nhau khác của tứ diện này.

II. TÍNH CHẤT CƠ BẢN VỀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

1) Định lý 1

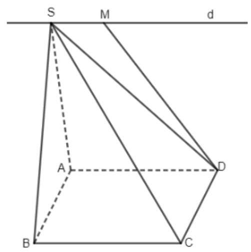
Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có đúng một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

Ví dụ 2 ★☆☆☆☆

Cho hình chóp $S.ABCD$. Vẽ hình thang $ADMS$ có hai đáy là AD và MS. Gọi d là đường thẳng trong không gian đi qua S và song song với AD. Chứng minh đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (SAD).

Hướng dẫn giải.

$ADMS$ là hình thang có hai đáy AD và MS nên $AD // MS$.
Theo đề bài, lại có $d // AD$. Do đó $d \equiv MS$ (theo định lý 1).
Lại có $SM \subset (ADMS)$ nên $d \subset (ADMS) \Rightarrow d \subset (SAD)$.

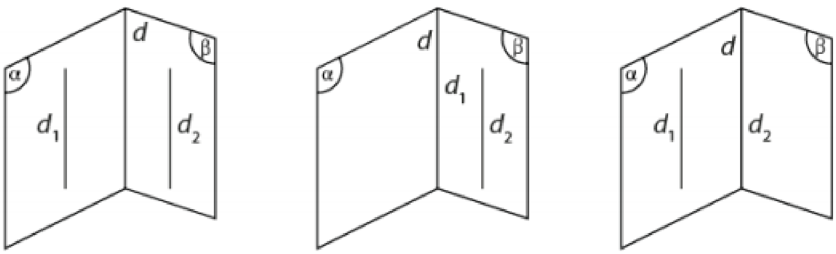


2) Định lý 2

Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

Hệ quả

Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

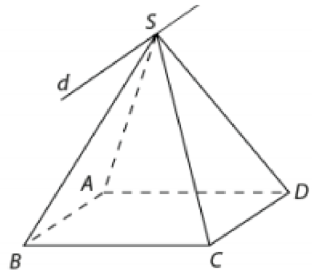


Ví dụ 3 ★☆☆☆☆

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Xác định giao tuyến các mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Hướng dẫn giải.

Các mặt phẳng (SAB) và (SCD) có điểm chung là S và lần lượt chứa hai đường thẳng song song là AB và CD nên giao tuyến của chúng là đường thẳng d đi qua S và song song với AB, CD.



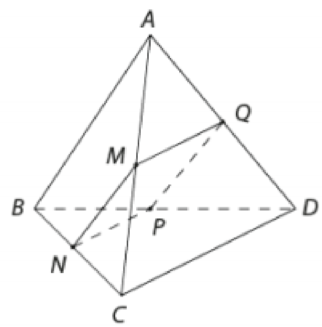
Ví dụ 4 ★☆☆☆☆

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của AC, BC và BD. Gọi Q là giao điểm của AD và mặt phẳng (MNP). Xét vị trí tương đối của ba đường thẳng MQ, NP, CD.

Hướng dẫn giải.

Ta có:

$$MQ = (MNP) \cap (ACD);$$
$$NP = (MNP) \cap (BCD);$$
$$CD = (ACD) \cap (BCD).$$



Theo Định lí 2, ta có MQ, NP, CD hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.

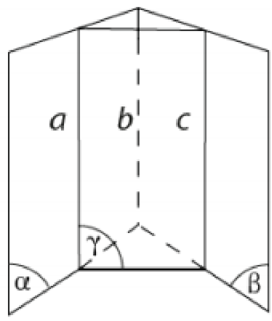
Mặt khác, $NP // CD$ (NP là đường trung bình của tam giác BCD) nên ta có MQ, NP, CD đôi một song song nhau.

(2) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB//CD)$. Gọi M là một điểm thuộc đoạn SA (M khác S và A). Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (MCD).

(3) Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và AC. (P) là mặt phẳng chứa IJ và cắt SB, SC lần lượt tại K, L. Chứng minh rằng $IJLK$ là hình thang. Nếu K là trung điểm của SB thì tứ giác $IJLK$ là hình gì?

3) Định lý 3

Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

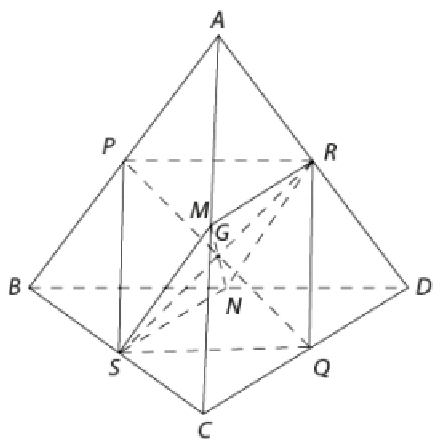


🔔 **LƯU Ý**. Khi hai đường thẳng phân biệt a, b cùng song song với đường thẳng c thì ta có thể kí hiệu $a//b//c$ và gọi là ba đường thẳng song song.

Ví dụ 5 ★☆☆☆☆

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R và S lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AC, BD, AB, CD, AD và BC. Chứng minh rằng các đoạn thẳng MN, PQ, RS đồng quy tại trung điểm của mỗi đoạn.

Hướng dẫn giải.



Ta có: PR là đường trung bình của tam giác ABD, suy ra $PR//BD$ và $PR = \frac{1}{2}BD$ (1).

QS là đường trung bình của tam giác BCD, suy ra $QS//BD$ và $QS = \frac{1}{2}BD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $PR//QS$ và $PR = QS$, suy ra $PRQS$ là hình bình hành và do đó hai đường thẳng PQ và RS cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đường.

Tương tự, $MRNS$ là hình bình hành nên RS cắt MN tại trung điểm G.

Vậy ba đường thẳng MN, PQ, RS đồng quy tại G.

Ví dụ 6 ★☆☆☆☆

Cho tứ diện $ABCD$ có I và J lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và BD. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua I, J và cắt hai cạnh AC và AD lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh $IJNM$ là một hình thang.

b) Tìm vị trí của điểm M để $IJNM$ là hình bình hành.

Hướng dẫn giải.

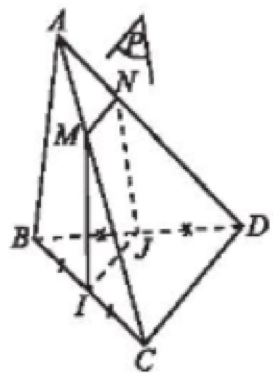
a) Ta có: I là trung điểm của BC, J là trung điểm của BD.

$\Rightarrow IJ$ là đường trung bình của tam giác BCD nên

$$\Rightarrow IJ // CD, \quad IJ = \frac{1}{2}CD$$

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} IJ = (BCD) \cap (P) \\ MN = (ACD) \cap (P) \\ CD = (ACD) \cap (BCD) \end{array}\right. \Rightarrow IJ // CD$$



Do đó theo định lí 2 về giao tuyến của ba mặt phẳng ta có: $IJ // MN // CD \Rightarrow IJNM$ là hình thang.

b) Để $IJNM$ là hình bình hành thì $IJ = MN$.

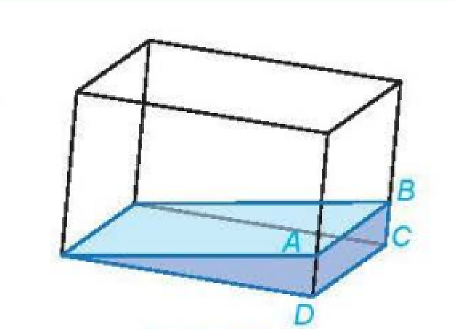
Mà $IJ = \frac{1}{2}CD$ nên $MN = \frac{1}{2}CD$.

Khi đó MN là đường trung bình của tam giác $ACD \Rightarrow M$ trung điểm của AC.

(4) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AD, SD, SB. Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình bình hành.

(5)

Một bể kính chứa nước có đáy là hình chữ nhật được đặt nghiêng như Hình bên. Giải thích tại sao đường mép nước AB song song với cạnh CD của bể nước.



BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

Ⓐ Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau .

Ⓑ Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung .

Ⓒ Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau và không song song thì chéo nhau .

Ⓓ Hai đường thẳng phân biệt không chéo nhau thì hoặc cắt nhau hoặc song song .

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Ⓐ Hai đường thẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác .

Ⓑ Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không điểm chung .

Ⓒ Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng .

Ⓓ Hai đường thẳng chéo nhau khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng .

Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ AB và CD cắt nhau .

Ⓑ AB và CD chéo nhau .

Ⓒ AB và CD song song .

Ⓓ Tồn tại mặt phẳng chứa AB và CD .

Câu 4. Cho ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau từng đôi một theo ba giao tuyến d_1, d_2, d_3, biết $d_1 // d_2$. Khẳng định nào đúng?

Ⓐ d_1, d_3 chéo nhau .

Ⓑ d_1, d_3 cắt nhau .

Ⓒ d_1, d_3 trùng nhau .

Ⓓ d_1, d_3 song song với nhau .

Câu 5. Hai đường thẳng chéo nhau khi và chỉ khi:

Ⓐ Hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.

Ⓑ Hai đường thẳng không có điểm chung.

Ⓒ Hai đường thẳng không cùng nằm trong một mặt phẳng nào.

Ⓓ Hai đường thẳng cùng chéo nhau với đường thẳng thứ ba.

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (CMN) và (BCD) là đường thẳng song song với đường thẳng

Ⓐ BD. Ⓑ CD. Ⓒ BC. Ⓓ AB.

Câu 7. Cho ba đường thẳng a, b, c. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Ⓐ Nếu a và b cùng song song với c thì a song song với b.

Ⓑ Nếu a và b cùng chéo nhau với c thì a và b chéo nhau.

Ⓒ Nếu a song song với b, b và c chéo nhau thì a và c chéo nhau hoặc cắt nhau.

Ⓓ Nếu a và b cắt nhau, b và c cắt nhau thì a và c cắt nhau.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC). Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ Đường thẳng d đi qua S và song song với AB .

Ⓑ Đường thẳng d đi qua S và song song với DC.

Ⓒ Đường thẳng d đi qua S và song song với BC.

Ⓓ Đường thẳng d đi qua S và song song với BD.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào song song với MN?

Ⓐ AB. Ⓑ AD. Ⓒ BD. Ⓓ AC.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào **không** song song với NP?

Ⓐ MQ. Ⓑ BD. Ⓒ AD. Ⓓ BC.

2 Tự luận

Bài 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng AD và P, Q là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng BC.
Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng MQ và NP; cũng như vị trí tương đối của hai đường thẳng MP và NQ.

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB//CD)$. Gọi $M,\ N,\ P,\ Q$ lần lượt là trung điểm của các cạnh bên $SA,\ SB,\ SC,\ SD$. Chứng minh rằng tứ giác $MNCD$ là hình thang.

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng đường thẳng G_1G_2 song song với đường thẳng CD.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi I là trung điểm của SD. Hai mặt phẳng (IAC) và (SBC) cắt nhau theo giao tuyến Cx. Chứng minh rằng $Cx // SB$.

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, AB, SD. Xác định giao tuyến của mỗi cặp mặt phẳng sau: (SAD) và (SBC); (MNP) và $(ABCD)$.

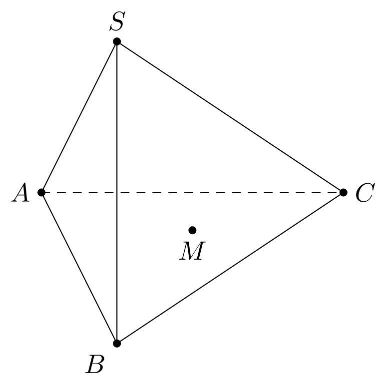
Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AB là đáy lớn và $AB = 2CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và SB. Chứng minh rằng đường thẳng NC song song với đường thẳng MD.

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB//CD)$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SD.

a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MAB) và (SCD).

b) Gọi N là giao điểm của đường thẳng SC và mặt phẳng (MAB). Chứng minh rằng MN là đường trung bình của tam giác SCD.

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABC$ và điểm M thuộc miền trong tam giác ABC. Qua M, vẽ đường thẳng d song song với SA, cắt (SBC) tại N. Trên hình vẽ, hãy chỉ rõ vị trí của điểm N và xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (CMN).



Bài 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SCD) và (SAB).

b) Lấy một điểm M trên đoạn SA (M khác S và A), mặt phẳng (BCM) cắt SD tại N. Tứ giác $CBMN$ là hình gì?

Bài 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, AC và BD cắt nhau tại O. Gọi I là trung điểm của SO. Mặt phẳng (ICD) cắt SA, SB lần lượt tại M, N.

a) Hãy nói cách xác định hai điểm M và N. Cho $AB = a$. Tính MN theo a.

b) Trong mặt phẳng $(CDMN)$, gọi K là giao điểm của CN và DM. Chứng minh $SK // BC // AD$.

Bài 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi M là một điểm di động trên cạnh SC.

(a) Tìm giao điểm N của SD và mặt phẳng (ABM).

(b) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng BM và AN. Chứng minh rằng I nằm trên một đường thẳng cố định khi M di động trên cạnh SC.

Bài 12. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và G là trung điểm của đoạn MN.

(a) Tìm giao điểm A' của đường thẳng AG và mặt phẳng (BCD).

(b) Qua M, kẻ đường thẳng Mx song song với AA' và Mx cắt (BCD) tại M'. Chứng minh B, M', A' thẳng hàng và $BM' = M'A' = A'N$.

Bài 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SAD. Lấy I là trung điểm của đoạn BC.

(a) Chứng minh $MN // BD$.

(b) Gọi L, H lần lượt là giao điểm của SB, SD với mặt phẳng (MNI). Chứng minh rằng $LH // BD$.

Bài 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là một điểm bất kì thuộc cạnh SC.

a) Xác định các giao tuyến của mặt phẳng (MAB) với các mặt của hình chóp.

b) Xác định các giao tuyến của mặt phẳng (MAD) với các mặt của hình chóp.

Bài 15. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (ANP) và (CMQ).

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (ANP) và (ABD).

c) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (CMQ) và (BCD).

d) Chứng minh rằng các giao tuyến tìm được ở trên đôi một song song với nhau.

Bài 16. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD. Trên cạnh AC lấy điểm K. Gọi M là giao điểm của BK và AI, N là giao điểm của DK và AJ. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với đường thẳng BD.

Bài 17. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi G, H lần lượt là giao điểm của hai đường chéo của hai hình bình hành đó. Chứng minh rằng ba đường thẳng GH, CE, DF đôi một song song.

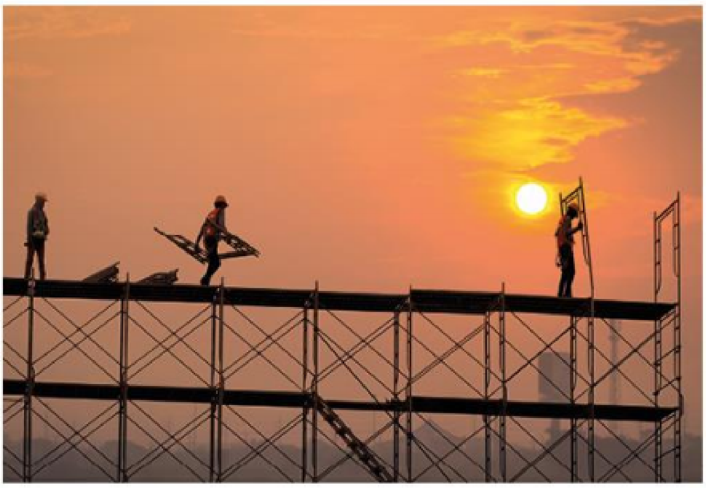
Bài 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA; I, J, K, L lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SM, SN, SP, SQ.

a) Chứng minh rằng I, J, K, L đồng phẳng và tứ giác $IJKL$ là hình bình hành.

b) Chứng minh rằng $IK // BC$.

c) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng $(IJKL)$ và (SBC).

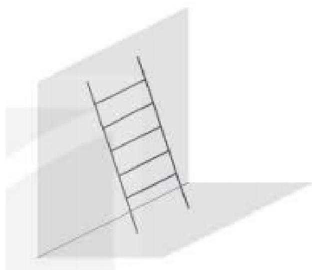
Bài 19. Giàn giáo là thiết bị chuyên dụng được sử dụng tại hầu hết các công trình xây dựng (Hình a). Có nhiều loại giàn giáo khác nhau, trong đó phổ biến nhất là loại giàn giáo khung (giàn giáo H) (Hình b). Hãy chỉ ra một số hình ảnh của những đường thẳng song song, chéo nhau và cắt nhau trên một giàn giáo khung.



a) Giàn giáo trong công trình

b) Giàn giáo khung (giàn giáo H)

Bài 20. Một chiếc thang được đặt sao cho hai đầu của chân thang dựa vào tường, hai đầu còn lại nằm trên sàn nhà (hình vẽ). Biết rằng chiếc thang có dạng hình chữ nhật, hãy giải thích vì sao hai đầu của chân thang nằm trên sàn nhà lại cách đều chân tường.



Chuyên đề 3

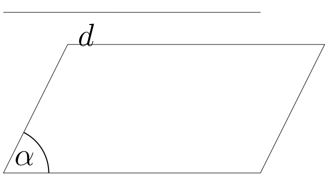
ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

I. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

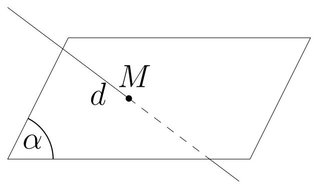
Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α). Nếu d và mặt phẳng α không có điểm chung thì ta nói d song song với (α) hay (α) song song d. Kí hiệu là $d//(\alpha)$ hay $(\alpha)//d$.

Ngoài ra

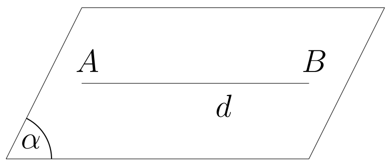
- Nếu d và (α) có một điểm chung duy nhất M thì ta nói d và (α) cắt nhau tại điểm M và kí hiệu $d \cap (\alpha) = \{M\}$ hay $d \cap (\alpha) = M$.
- Nếu d và (α) có nhiều hơn một điểm chung thì ta nói d nằm trong (α) hay (α) chứa d và kí hiệu $d \subset (\alpha)$ hay $(\alpha) \supset d$.



$d//(\alpha)$



$d \cap (\alpha) = M$

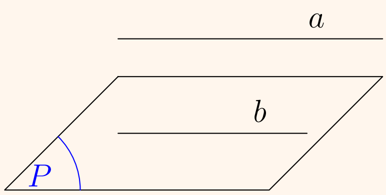


$d \subset (\alpha)$

II. ĐIỀU KIỆN ĐỂ MỘT ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MỘT MẶT PHẲNG

Định lý 1

Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng b nào đó nằm trong (P) thì a song song với (P).

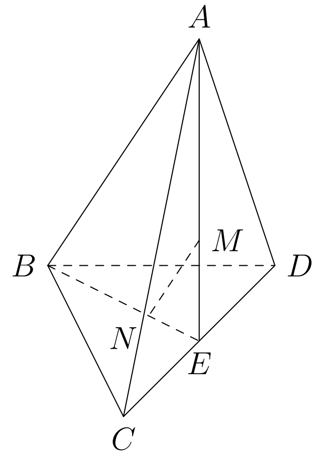


Ví dụ 1 ★☆☆☆☆

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD. Chứng minh rằng MN song song với các mặt phẳng (ABC) và (ABD).

Lời giải. Gọi E là trung điểm của CD.

Ta có: M và N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD. Khi đó,
$$\frac{EM}{EA}=\frac{EN}{EB}=\frac{2}{3}.$$



Áp dụng định lý Thales vào $\triangle ABE$, ta nhận được $MN//AB$.

Ta có
$$\begin{cases} MN//AB \\ AB\subset(ABC) \\ MN\notin(ABC)\end{cases}\Rightarrow (MN)//(ABC).$$

Tương tự
$$\begin{cases} MN//AB \\ AB\subset(ABD) \\ MN\notin(ABD)\end{cases}\Rightarrow (MN)//(ABD).$$

Ví dụ 2 ★☆☆☆☆

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD.

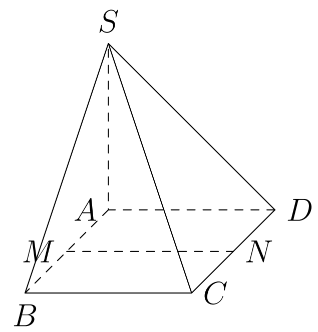
a) Chứng minh $MN//(SBC)$ và $MN//(SAD)$.

b) Gọi E là trung điểm của SA. Chứng minh $SB//(MNE)$ và $SC//(MNE)$.

Lời giải.

a) Chứng minh $MN//(SBC)$ và $MN//(SAD)$.

Vì M, N là trung điểm AB, CD nên $MN//BC//AD$. Khi đó,

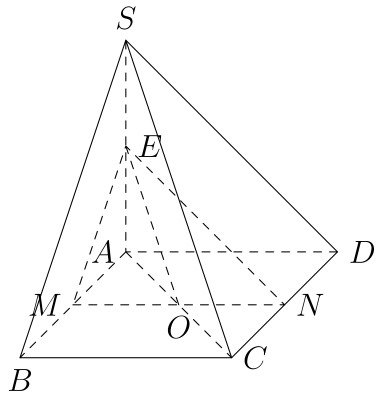


◇ $$\begin{cases} MN//BC \\ BC\subset(SBC) \\ MN\notin(SBC)\end{cases}\Rightarrow MN//(SBC).$$

◇ $$\begin{cases} MN//AD \\ AD\subset(SAD) \\ MN\notin(SAD)\end{cases}\Rightarrow MN//(SAD).$$

b) Gọi E là trung điểm của SA. Chứng minh $SB//(MNE)$ và $SC//(MNE)$.

Vì M, E là trung điểm AB, SA nên $ME//SB$. Khi đó,



$$\begin{cases} ME//SB \\ ME \subset (MNE) \\ SB \notin (MNE) \end{cases} \Rightarrow SB//(MNE).$$

Gọi $O = MN \cap AC$. Khi đó, O là trung điểm AC.

Ta có $EO \subset (MNE)$ và $EO//SC$. Khi đó

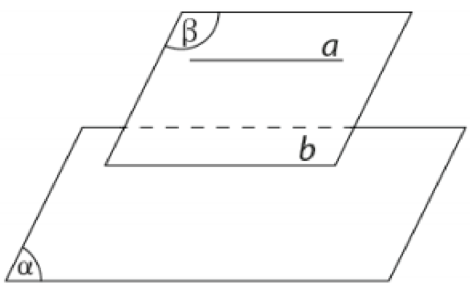
$$\begin{cases} EO//SC \\ EO \subset (MNE) \\ SC \notin (MNE) \end{cases} \Rightarrow SC//(MNE).$$

1 Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, AD. Các đường thẳng MN, NP, MP có song song với mặt phẳng (BCD) không? Vì sao?

III. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

1) Định lý 2

Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Nếu mặt phẳng (Q) chứa a, cắt (P) theo giao tuyến b thì a song song với b.

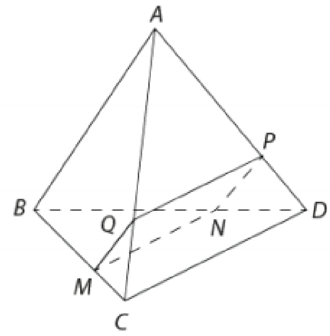


Ví dụ 3 ★☆☆☆☆

Cho tứ diện $ABCD$. Lấy M thuộc đoạn thẳng BC sao cho $BM = 2MC$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với các đường thẳng AB và CD. Xác định giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt phẳng $(ABC), (ACD), (BCD), (ABD)$.

Hướng dẫn giải.

Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với AB nên (α) cắt mặt phẳng (ABC) (chứa AB) theo giao tuyến d đi qua M và song song với AB. Gọi Q là giao điểm của d với AC.



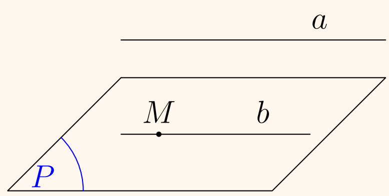
Tương tự, (α) song song với CD nên (α) cắt (ACD) và (BCD) (là các mặt phẳng chứa CD) theo các giao tuyến QP và MN cùng song song với CD ($P \in AD$, $N \in BD$).

Vậy $(\alpha) \cap (ABD) = NP$.

2 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy I là điểm thuộc cạnh BC (I khác B và C). Gọi (α) là mặt phẳng qua I và song song với các đường thẳng AB và SD. Tìm giao điểm của các đường thẳng AD, SA, SB với (α).

2) Hệ quả 1

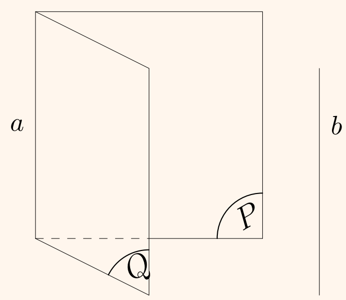
Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Nếu qua điểm M thuộc (P) ta vẽ đường thẳng b song song với a thì b phải nằm trong (P).



3) Hệ quả 2

Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó. Nghĩa là

$$\begin{cases} d//(P) \\ d//(Q) \\ (P) \cap (Q) = a \end{cases} \Rightarrow d//a$$



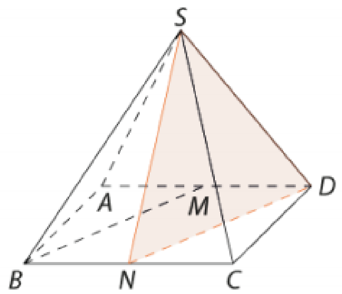
4) Định lý 3

Cho trước hai đường thẳng chéo nhau, có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

Ví dụ 4 ★☆☆☆☆

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của đoạn AD. Xác định mặt phẳng chứa SD và song song với BM.

Hướng dẫn giải.



Gọi N là trung điểm của BC, ta có $MD // BN$ và $MD = BN = \frac{1}{2}BC$ nên $MBND$ là hình bình hành.

Suy ra $BM // ND$, mà $ND \subset (SDN)$ nên $BM // (SDN)$.

Vậy (SDN) là mặt phẳng chứa SD và song song với BM.

3 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$, AD song song BC và $AD = 2BC$. Xác định mặt phẳng chứa SB và song song với CD.

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm

Câu 1. Trong không gian, cho đường thẳng a và mặt phẳng (P). Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P)?

Ⓐ 1 . Ⓑ 2 . Ⓒ 3 . Ⓓ 4 .

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$. Vị trí tương đối giữa đường thẳng BC và (BCD) là

Ⓐ $BC // (BCD)$. Ⓑ $BC \subset (BCD)$.

Ⓒ $BC \cap (BCD) = A$. Ⓓ $BC \cap (BCD) = D$.

Câu 3. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng a và cắt (P) theo giao tuyến b. Vị trí tương đối giữa a và b là:

Ⓐ Cắt nhau. Ⓑ Trùng nhau.
Ⓒ Song song. Ⓓ Chéo nhau.

Câu 4. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Khẳng định nào **sai**?

Ⓐ Nếu có mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng a và cắt (P) theo giao tuyến b thì b song song với a.
Ⓑ Trong mặt phẳng (P) có vô số đường thẳng chéo nhau với a.
Ⓒ Đường thẳng a không có điểm chung với mặt phẳng (P).
Ⓓ Trong mặt phẳng (P) có duy nhất một đường thẳng song song với a.

Câu 5. Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và song song với b?

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ Vô số.

Câu 6. Cho hai mặt phẳng $(\alpha);(\beta)$ cắt nhau và cùng song song với đường thẳng d. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ Giao tuyến của $(\alpha);(\beta)$ trùng với d .
Ⓑ Giao tuyến của $(\alpha);(\beta)$ song song hoặc trùng với d .
Ⓒ Giao tuyến của $(\alpha);(\beta)$ cắt d .
Ⓓ Giao tuyến của $(\alpha);(\beta)$ song song với d .

Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$. Cho các mệnh đề sau:

(a) $AD \subset (ABC)$.

(b) $AD \cap (ABC) = C$.

(c) $AB \subset (ABC)$.

(d) $AC // (ABD)$.

Trong các mệnh đề đã cho, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

Ⓐ 1 . Ⓑ 2 . Ⓒ 3 . Ⓓ 4 .

Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACD, điểm M nằm trên cạnh AB sao cho $AM = 2MB$. Đường thẳng MG song song với mặt phẳng nào sau đây?

Ⓐ (ACD). Ⓑ (ABD). Ⓒ (BCD). Ⓓ (ABC).

2 Tự luận

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm hai đường chéo. Gọi M là trung điểm của cạnh SC.

a) Chứng minh rằng đường thẳng OM song song với hai mặt phẳng (SAD) và (SBD).

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMD) và (SAD).

Bài 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, điểm I nằm trên cạnh BC sao cho $BI = 2IC$. Chứng minh rằng đường thẳng IG song song với mặt phẳng (ACD).

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với giao tuyến d của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

Bài 4. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không nằm trong cùng một mặt phẳng. Gọi O và O' lần lượt là tâm của $ABCD$ và $ABEF$.

a) Chứng minh đường thẳng OO' song song với các mặt phẳng $(CDEF)$, (ADF) và (BCE).

b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AF và BE. Chứng minh $MN // (CDEF)$.

c) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMN) và $(ABCD)$.

Bài 5. Cho hai tam giác ABC và ABD không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AD.

a) Đường thẳng AM có song song với mặt phẳng (BCD) hay không? Hãy giải thích tại sao.

b) Đường thẳng MN có song song với mặt phẳng (BCD) hay không? Hãy giải thích tại sao.

Bài 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh BC, CD. Chứng minh rằng đường thẳng BD song song với mặt phẳng (AMN).

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $(AB // CD)$. Gọi E là một điểm nằm giữa S và A. Gọi (P) là mặt phẳng qua E và song song với hai đường thẳng AB, AD. Xác định giao tuyến của (P) và các mặt bên của hình chóp. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD, P là trung điểm của SA. Chứng minh:

a) MN song song với các mặt phẳng (SBC) và (SAD);

b) SB song song với mặt phẳng (MNP);

c) SC song song với mặt phẳng (MNP);

d) Gọi G_1 và G_2 theo thứ tự là trọng tâm của hai tam giác ABC và SBC. Chứng minh G_1G_2 song song với mặt phẳng (SAD).

Bài 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và một điểm M di động trên cạnh AD. Một mặt phẳng (α) qua M, song song với CD và SA, cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q.

a) $MNPQ$ là hình gì?

b) Gọi $I = MQ \cap NP$. Chứng minh rằng điểm I luôn luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M di động trên AD.

Bài 10. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc cạnh AB. Gọi (α) là mặt phẳng qua M, song song với hai đường thẳng BC và AD. Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (α) với các cạnh AC, CD và DB.

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.

b) Trong trường hợp nào thì $MNPQ$ là hình thoi?

Bài 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy điểm M trên cạnh AD sao cho $AD = 3AM$. Gọi G, N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và ABC.

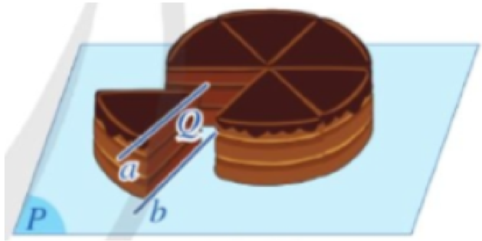
a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

b) Chứng minh rằng MN song song với mặt phẳng (SCD) và NG song song với mặt phẳng (SAC).

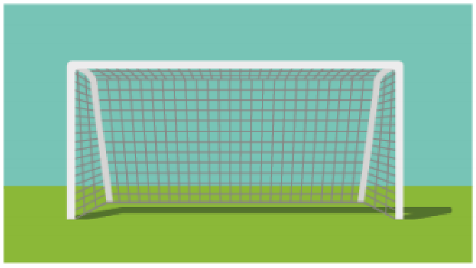
Bài 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một tứ giác lồi. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Mặt phẳng (α) đi qua O, song song với AB và SC. Xác định giao điểm của mặt phẳng (α) với các đường thẳng SA, AD, BC.

Bài 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB. Gọi M là trung điểm của CD, (P) là mặt phẳng qua M song song với SA và BC. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (P). Thiết diện đó hình gì?

Bài 14. Trong Hình bên, khi cắt bánh sinh nhật, mặt cắt và mặt khay đựng bánh lần lượt gợi nên hình ảnh hai mặt phẳng (Q) và (P); mép trên và mép dưới của lát cắt lần lượt gợi nên hình ảnh hai đường thẳng a và b, trong đó $a // (P)$. Cho biết hai đường thẳng a và b có song song với nhau hay không.



Bài 15. Trong giờ học bóng đá, khi hai bạn Nam và Mai lại gần khung thành thủ môn, bạn Nam khẳng định thanh ngang trên cùng của khung thành và bóng của nó là hình ảnh của hai đường thẳng song song. Bạn Mai cho rằng hai đường thẳng này chưa chắc song song vì còn phụ thuộc vào ảnh hưởng của ánh sáng Mặt Trời nữa. Hãy cho biết ai đúng, ai sai. Vì sao? Biết rằng, Mặt Trời cách xa Trái Đất nên các tia sáng có thể xem là những đường thẳng song song.

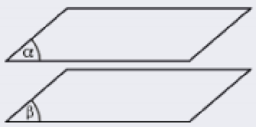
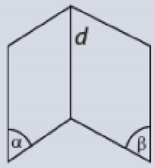
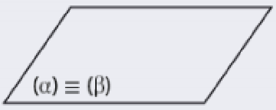


Chuyên đề 4

HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

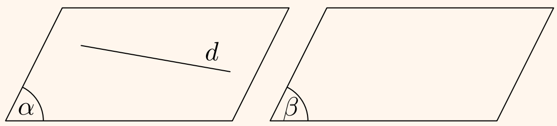
I. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Cho hai mặt phẳng (α) và (β), có thể xảy ra một trong ba trường hợp sau:

Hình minh hoạ	Số điểm chung	Vị trí tương đối	Kí hiệu
	Không có điểm chung	(α) song song với (β) hay (β) song song với (α)	(α) // (β) hay (β) // (α)
	Có vô số điểm chung thẳng hàng	(α) cắt (β) theo giao tuyến *d*	(α) ∩ (β) = *d*
	Có ít nhất 3 điểm chung không thẳng hàng	(α) trùng với (β)	(α) ≡ (β)

Hai mặt phẳng (α) và (β) được gọi là **song song** với nhau nếu chúng không có điểm chung.

Kí hiệu $(\alpha)//(\beta)$ hay $(\beta)//(\alpha)$

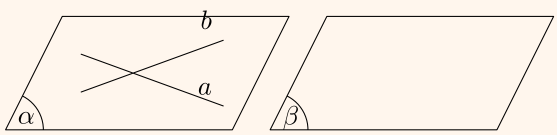


II. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Định lý 1

Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau và hai đường thẳng này song song với mặt phẳng (β) thì (α) và (β) song song với nhau. Tức là

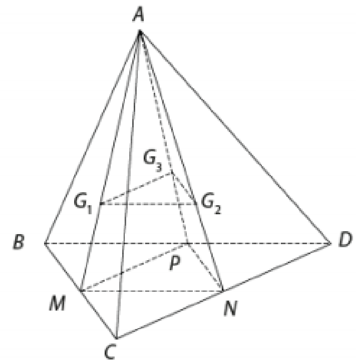
$$\begin{cases} a, b \subset (\alpha) \\ a, b // (\beta) \\ a, b \text{ cắt nhau} \end{cases} \Rightarrow (\alpha)//(\beta).$$



Ví dụ 1 ★☆☆☆☆

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ABD. Chứng minh mặt phẳng $(G_1G_2G_3)$ song song với mặt phẳng (BCD).

Hướng dẫn giải.



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, DB.

Ta có: $M \in AG_1$ và $\dfrac{AG_1}{AM} = \dfrac{2}{3}$; $N \in AG_2$ và $\dfrac{AG_2}{AN} = \dfrac{2}{3}$; $P \in AG_3$ và $\dfrac{AG_3}{AP} = \dfrac{2}{3}$. Do đó $\dfrac{AG_1}{AM} = \dfrac{AG_2}{AN}$, suy ra $G_1G_2 // MN$.
Vì $MN \subset (BCD)$ nên $G_1G_2 // (BCD)$. Tương tự, $\dfrac{AG_1}{AM} = \dfrac{AG_3}{AP}$, suy ra $G_1G_3 // MP$.
Vì $MP \subset (BCD)$ nên $G_1G_3 // (BCD)$. Vậy $(G_1G_2G_3) // (BCD)$.

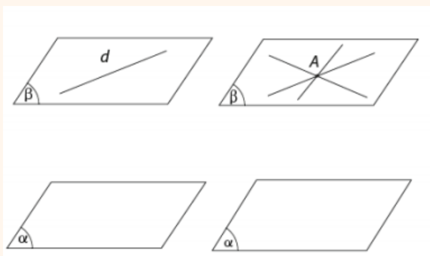
1 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC. Chứng minh rằng mặt phẳng (MNP) song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

III. TÍNH CHẤT CỦA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

1) Định lý 2

Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

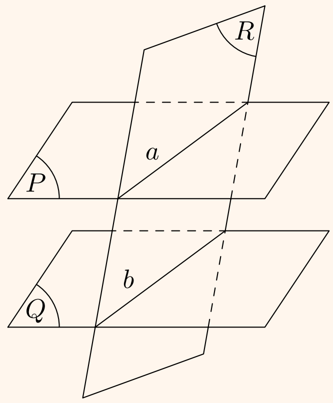
2) Hệ quả



- Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α).
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.
- Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α). Mọi đường thẳng đi qua A song song với (α) đều nằm trong (β) đi qua A và song song với (α).

3) Định lý 2

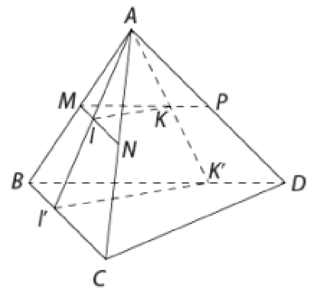
Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.



Ví dụ 2 ★☆☆☆☆

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn AB, AC, AD. Lấy I, K là hai điểm bất kỳ lần lượt trên MN, MP. Hai đường thẳng AI, AK lần lượt cắt BC, BD tại I', K'. Chứng minh rằng $IK // I'K'$.

Hướng dẫn giải.



Ta có $MN//BC$ (đường trung bình của tam giác ABC), mà $BC \subset (BCD)$ nên $MN \subset (BCD)$.

Tương tự, ta có $MP // BD$ (đường trung bình tam giác ABD), nên $MP \subset (BCD)$.

Từ đó suy ra $(MNP)//(BCD)$.

Mặt khác, mặt phẳng (AIK) cắt hai mặt phẳng (MNP) và (BCD) lần lượt theo hai giao tuyến là IK và $I'K'$, nên ta có $IK // I'K'$.

2) Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm của hai đường chéo, tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng (α) di động song song với mặt phẳng (SBD) và cắt đoạn thẳng AC. Chứng minh rằng các giao tuyến của (α) với hình chóp tạo thành một tam giác đều.

3) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ với đáy lớn $AD = 2BC$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AD và SD.

a) Chứng minh rằng $(SAB)//(CIK)$.

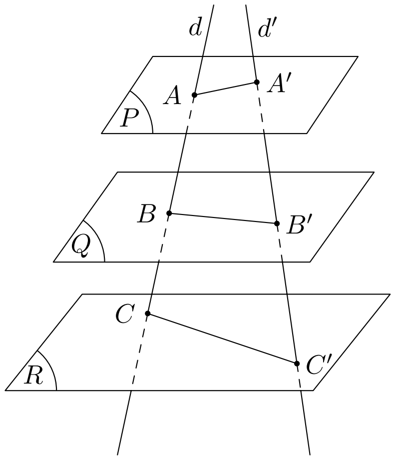
b) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD. Lấy M là điểm bất kỳ trên đoạn CD, đường thẳng OM cắt CI, AB lần lượt tại N, P và SM cắt CK tại Q. Chứng minh rằng $SP // NQ$.

IV. ĐỊNH LÝ THALÈS TRONG KHÔNG GIAN

1) Định lý (Định lý Thalès).

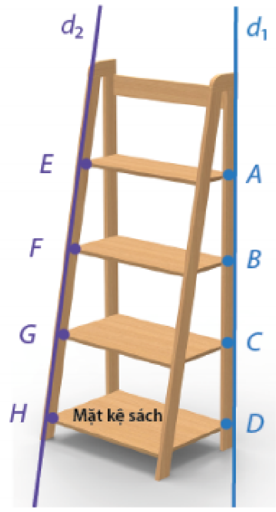
Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến phân biệt bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Trong hình vẽ bên, ta có $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$.



Ví dụ 3 ★☆☆☆☆

Hình bên là kệ sách gỗ có bốn mặt kệ, với thanh gỗ đứng (xem như đường thẳng d_1) và thanh gỗ xiên (xem như đường thẳng d_2). Giả sử các mặt kệ xuất hiện ở các vị trí A, B, C, D, E, F, G, H. Biết rằng $EF = 32\,\text{cm}$ và các điểm A, B, C, D cách đều nhau. Các mặt kệ đặt song song với mặt đất. Tính độ dài HE.



Hướng dẫn giải. Các mặt kệ sách đặt song song với mặt đất nên là hình ảnh của các mặt phẳng song song nhau, ta kí hiệu các mặt phẳng từ đáy kệ sách lên trên lần lượt là $(P_1), (P_2), (P_3), (P_4)$. Áp dụng định lí Thalès cho ba mặt phẳng $(P_1), (P_2), (P_3)$ với hai cát tuyến d_1, d_2 ta có: $\frac{FG}{BC} = \frac{GH}{CD} \Rightarrow \frac{FG}{GH} = \frac{BC}{CD}$.

Mà $BC = CD$ nên $\dfrac{FG}{GH} = 1 \Rightarrow FG = GH$.

Tương tự, áp dụng định lí Thalès cho ba mặt phẳng $(P_2), (P_3), (P_4)$ với hai cát tuyến d_1, d_2, ta có $EF = FG$. Từ đó suy ra $GH = FG = EF = 32\,\text{cm}$.

Vậy $HE = EF + FG + GH = 96\,\text{cm}$.

④ Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 9$, $SB = 12$, $SC = 15$. Trên cạnh SA lấy các điểm M, N sao cho $SM = 4$, $MN = 3$, $NA = 2$. Vẽ hai mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC), lần lượt đi qua M, N, cắt SB theo thứ tự tại M', N' và cắt SC theo thứ tự tại M'', N''. Tính độ dài các đoạn thẳng SM', $M'N'$, $M''N''$, $N''C$.

⑤

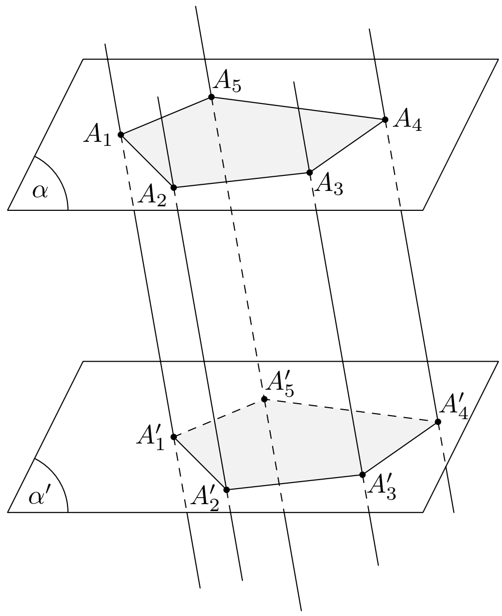
Các kệ trong ngăn mát của tủ lạnh có thể xem là hình ảnh của các mặt phẳng (Hình vẽ). Thông tin từ nhà sản xuất là các kệ này được lắp song song với nhau. Bề mặt bên trái và bên phải của tủ lạnh có các giá đỡ bên dưới các kệ. Nếu các giá đỡ ở mặt bên trái cách đều nhau một khoảng 15 cm thì các giá đỡ ở mặt bên phải cách nhau bao nhiêu? Vì sao?

V. HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP

1) Hình lăng trụ

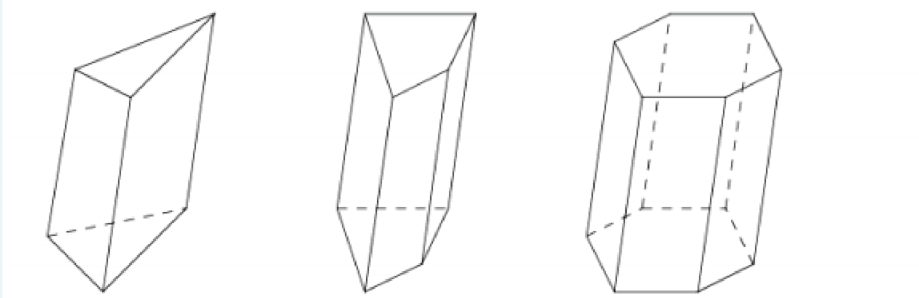
Cho hai mặt phẳng song song (α) và (α'). Trên (α) cho đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_n$. Qua các đỉnh A_1, A_2, $\ldots$, A_n vẽ các đường thẳng đôi một song song và cắt mặt phẳng (α') tại A'_1, A'_2, $\ldots$, A'_n. Hình gồm hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$, $A'_1A'_2\ldots A'_n$ và các tứ giác $A_1A'_1A_2A'_2$, $A_2A'_2A_3A'_3$, $\ldots$, $A_nA'_nA_1A'_1$ được gọi là **hình lăng trụ** và kí hiệu là $A_1A_2\ldots A_n.A'_1A'_2\ldots A'_n$.

Trong hình lăng trụ $A_1A_2\ldots A_n.A'_1A'_2\ldots A'_n$, ta gọi:



- Các điểm A_1, A_2, $\ldots$, A_n và A'_1, A'_2, $\ldots$, A'_n được gọi là các *đỉnh*, các đoạn thẳng $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, $\ldots$, $A_nA'_n$ được gọi là các *cạnh bên*, các đoạn thẳng A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, A_nA_1 và $A'_1A'_2$, $A'_2A'_3$, $\ldots$, $A'_nA'_1$ được gọi là các *cạnh đáy* của hình lăng trụ.
- Hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$, $A'_1A'_2\ldots A'_n$ được gọi là *mặt đáy* của hình lăng trụ.
- Các tứ giác $A_1A'_1A_2A'_2$, $A_2A'_2A_3A'_3$, $\ldots$, $A_nA'_nA_1A'_1$ được gọi là các **mặt bên** của hình lăng trụ.

LƯU Ý. Tên của hình lăng trụ được gọi dựa theo tên của đa giác đáy.



ình lăng trụ tam giác Hình lăng trụ tứ giác Hình lăng trụ lục giác

Ví dụ 4 ★☆☆☆☆

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, M' lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC và $A'B'$.

a) Chứng minh $(MNM')//(BCC'B')$.

b) Tìm giao điểm N' của $A'C'$ và (MNM'). Tứ giác $MNN'M'$ là hình gì?

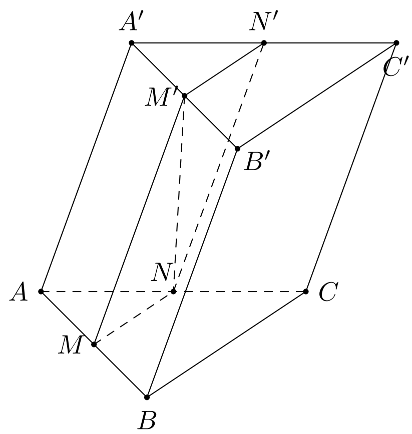
Lời giải.

a) Chứng minh $(MNM')//(BCC'B')$.

Ta có $\begin{cases} MM'//BB' \text{ (tính chất đường trung bình hình bình hành } AA'B'B) \\ MN//BC \text{ (tính chất đường trung bình tam giác } ABC) \\ MM', MN \subset (MNM') \\ BB', BC \subset (BB'C'C) \\ MN \cap MM' = M \end{cases}$

$\Rightarrow (MNM')//(BCC'B')$.

b) Tìm giao điểm N' của $A'C'$ và (MNM'). Tứ giác $MNN'M'$ là hình gì?



Ta có $\begin{cases} (MNM')//(BCC'B') \\ (A'B'C') \cap (BCC'B') = B'C' \\ M' \in (A'B'C') \cap (MNM') \end{cases}$

Suy ra $(A'B'C') \cap (MNM') = x'M'x // B'C'$.

Trong $(A'B'C')$, gọi $N' = A'C' \cap x'M'x \Rightarrow \begin{cases} N' \in A'C' \\ N' \in x'M'x \subset (MNM') \end{cases} \Rightarrow N' = A'C' \cap (MNM')$.

Suy ra $M'N'$ là đường trung bình tam giác $A'B'C' \Rightarrow M'N' = \dfrac{1}{2}B'C'$.

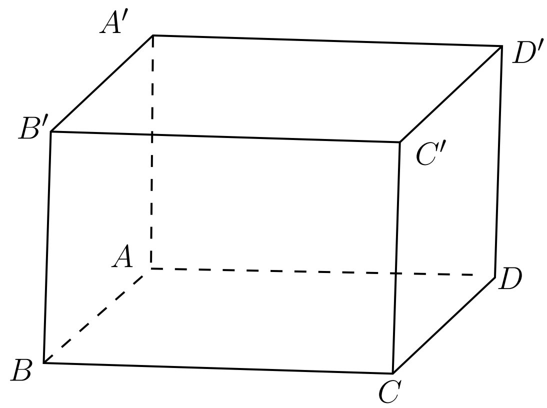
Mà MN là đường trung bình tam giác ABC nên $MN//BC$ và $MN = \dfrac{1}{2}BC$.

Lại do $BC//B'C'$ và $BC = B'C'$ nên $MN//M'N'$ và $MN = M'N'$.

Vậy tứ giác $MNN'M'$ là hình bình hành.

2) Hình hộp

Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.



- Hình hộp có sáu mặt (bốn mặt bên và hai mặt đáy) đều là những hình bình hành. Mỗi mặt có một mặt song song với nó, hai mặt như thế gọi là **hai mặt đối diện**.
- Hình hộp có tám đỉnh, hai đỉnh của hình hộp gọi là **hai đỉnh đối diện** nếu chúng không cùng nằm trên một mặt nào. Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là **đường chéo** của hình hộp.

Ví dụ 5 ★☆☆☆☆

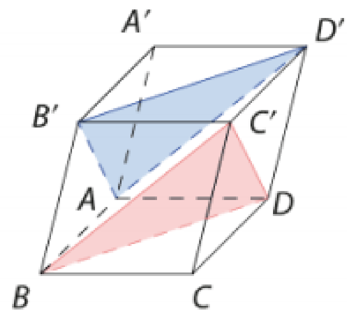
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(C'BD)$ song song với nhau.

Hướng dẫn giải.

$ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên ta có $BB' // DD'$ (cùng song song CC') và $BB' = DD'$ (cùng bằng CC').

Suy ra $BDD'B'$ là hình bình hành, do đó $BD // B'D'$.

Mặt khác, $B'D' \subset (AB'D')$, suy ra $BD // (AB'D')$ (1).



Chứng minh tương tự, ta có $AD // B'C'$ và $AD = B'C'$, nên $ADC'B'$ là hình bình hành.

Từ đó, ta có $DC' // AB'$, mà $AB' \subset (AB'D')$ nên $DC' // (AB'D')$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(C'BD) // (AB'D')$.

(6) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng bốn đường chéo của hình hộp cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm

Câu 1. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và song song với (P)?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) Vô số.

Câu 2. Cho mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q). Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Mọi đường thẳng nằm trong (P) đều song song với mọi đường thẳng nằm trong (Q).

(B) (P) song song với mọi đường thẳng nằm trong (Q).

(C) Nếu mặt phẳng (R) song song với mặt phẳng (P) thì mặt phẳng (R) song song với mặt phẳng (Q).

(D) Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q) thì đường thẳng a song song với mặt phẳng (P).

Câu 3. Hai mặt phẳng được gọi là song song với nhau nếu

(A) chúng không có điểm chung .

(B) chúng có một đường thẳng chung .

Ⓒ chúng có đúng một điểm chung .

Ⓓ chúng có ít nhất một điểm chung .

Câu 4. Mệnh đề nào đúng?

Ⓐ Nếu $(P)//(Q)$ và $a \subset (P), b \subset (Q)$ thì $a//b$.

Ⓑ Nếu $a//(P)$ và $b//(Q)$ thì $a//b$.

Ⓒ Nếu $(P)//(Q)$ và $a \subset (P)$ thì $a//(Q)$.

Ⓓ Nếu $a//b$ và $a \subset (P), b \subset (Q)$ thì $(P)//(Q)$.

Câu 5. Mệnh đề nào đúng?

Ⓐ Hình hộp là hình tứ diện .

Ⓑ Hình tứ diện là hình hộp .

Ⓒ Hình lập phương là hình hộp .

Ⓓ Hình hộp là hình lập phương .

Câu 6. Mệnh đề nào sau đây là sai?

Ⓐ Qua một điểm bất kỳ có một và chỉ một mặt phẳng song song với một mặt phẳng cho trước.

Ⓑ Hai mặt phẳng được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

Ⓒ Ba mặt phẳng phân biệt đôi một song song với nhau chắn trên hai cát tuyến bất kỳ những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Ⓓ Hai mặt phẳng song song cắt mặt phẳng thứ ba theo hai giao tuyến song song với nhau.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, SA. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $(SBN)//(DAP)$. Ⓑ $(SBC)//(MPD)$.

Ⓒ $(SBN)//(PMD)$. Ⓓ $(SDN)//(MAP)$.

Câu 8. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $(ADF)//(BCE)$. Ⓑ $AD//(BEF)$.

Ⓒ $(ABC)//(DEF)$. Ⓓ $EC//(ABD)$.

Câu 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào **sai**?

Ⓐ $(ABCD)//(A'B'C'D')$. Ⓑ $(ABB'A')//(DCC'D')$.

Ⓒ $(ACC'A')//(ABD)$.

Ⓓ $(A'B'C')//(ABD)$.

Câu 10. Cho a, b là hai đường thẳng phân biệt cắt ba mặt phẳng song song $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại các điểm A, B, C và A', B', C'. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

Ⓐ $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'}$.

Ⓑ $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'A'}{CA}$.

Ⓒ $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$.

Ⓓ $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$.

2 Tự luận

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ với đáy lớn là AD, $AD = 2BC$. Gọi I, K, L lần lượt là trung điểm của các đoạn AD, SA, SD. Chứng minh rằng $(SAB)//(ILC)$ và $(SCD)//(BIK)$.

Bài 2. Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành $ABCD$. Ta dựng các nửa đường thẳng song song với nhau và nằm về một phía đối với mặt phẳng (P), lần lượt đi qua các điểm A, B, C, D. Một mặt phẳng (Q) cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại các điểm A', B', C', D'. Chứng minh rằng:

$$AA' + CC' = BB' + DD'.$$

Bài 3. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', BB', CC'. Chứng minh rằng mặt phẳng $(MNP)//(ABC)$.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, tâm là O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn SA và SD.

a) Chứng minh rằng $(OMN)//(SBC)$.

b) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và ON. Chứng minh rằng $PQ//(SBC)$.

Bài 5. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB và CD. Qua các điểm A, D lần lượt vẽ các đường thẳng m, n song song với nhau và không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh rằng mp(B, m) và mp(C, n) song song với nhau.

Bài 6. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại M', N'.

a) Chứng minh $(CBE)//(ADF)$.

b) Chứng minh $(DEF)//(MNN'M')$.

Bài 7. Cho ba mặt phẳng (P), (Q), (R) đôi một song song. Hai đường thẳng d, d' cắt ba mặt phẳng lần lượt tại A, B, C và A', B', C'. Biết rằng $AB = 2$ cm, $BC = 6$ cm và $A'B' = 3$ cm, tính $B'C'$.

Bài 8. Cho hình tứ diện $SABC$. Trên cạnh SA lấy các điểm A_1, A_2 sao cho $AA_1 = A_1A_2 = A_2S$. Gọi (P), (Q) là hai mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) và lần lượt đi qua A_1, A_2. Mặt phẳng (P) cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại B_1, C_1. Mặt phẳng (Q) cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại B_2, C_2. Chứng minh $BB_1 = B_1B_2 = B_2S$ và $CC_1 = C_1C_2 = C_2S$.

Bài 9. Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng song song với mặt phẳng $(A'B'C'D')$ cắt các cạnh bên của hình lăng trụ lần lượt tại A", B", C", D". Hỏi hình tạo bởi các điểm A, B, C, D, A", B", C", D" là hình gì?

Bài 10. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và $A'B'C'$.

a) Chứng minh rằng tứ giác $AGG'A'$ là hình bình hành.

b) Chứng minh rằng $AGC.A'G'C'$ là hình lăng trụ.

Bài 11. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh $AD, BC, B'C', A'D'$ lần lượt tại các điểm E, F, G, H. Chứng minh rằng tứ giác $EFGH$ là hình bình hành.

Bài 12. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, $B'C'$.

a) Tìm giao điểm của mặt phẳng $(AB'C')$ với đường thẳng $A'M$.

b) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BA'C')$.

c) Tìm giao điểm G của đường thẳng d với mặt phẳng $(AM'M)$. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác $AB'C'$.

Bài 13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng:

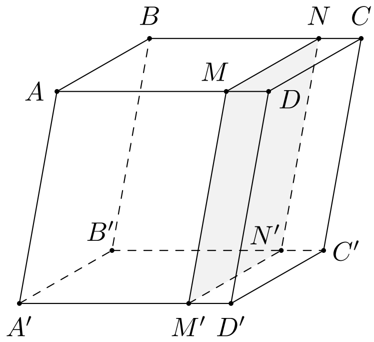
a) Hai mặt phẳng (BDA') và $(B'D'C)$ song song với nhau.

b) Đường chéo AC' đi qua các trọng tâm G_1 và G_2 của hai tam giác BDA' và $B'D'C$.

c) G_1 và G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

Bài 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. (P) là mặt phẳng đi qua MN và song song với mặt phẳng (SAD). Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P).

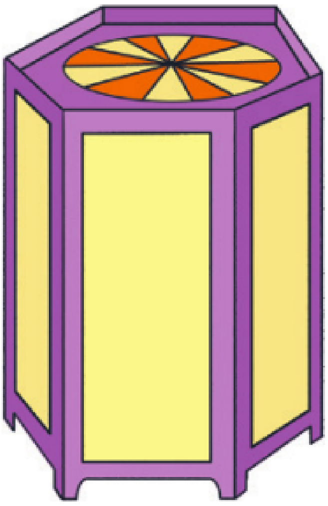
Bài 15. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng song song với mặt bên $(ABB'A')$ của hình hộp và cắt các cạnh AD, BC, $A'D'$, $B'C'$ lần lượt tại M, N, M', N'. Chứng minh rằng $ABNM.A'B'N'M'$ là hình hộp.

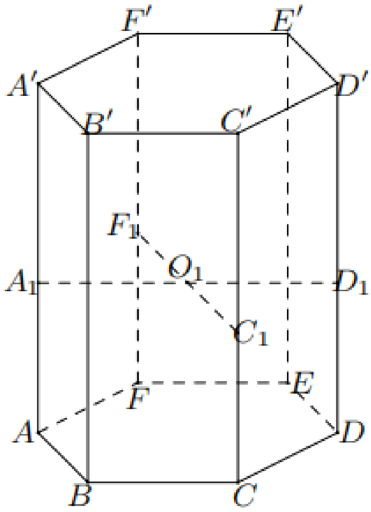


Bài 16. Để làm một khung lồng đèn kéo quân hình lăng trụ lục giác $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$, Bình gắn hai thanh tre A_1D_1, F_1C_1 song song với mặt phẳng đáy và cắt nhau tại O_1.

a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (A_1D_1, F_1C_1) với các mặt bên của lăng trụ.

b) Cho biết $A'A_1 = 6AA_1$ và $AA' = 70$ cm. Tính CC_1 và C_1C'.





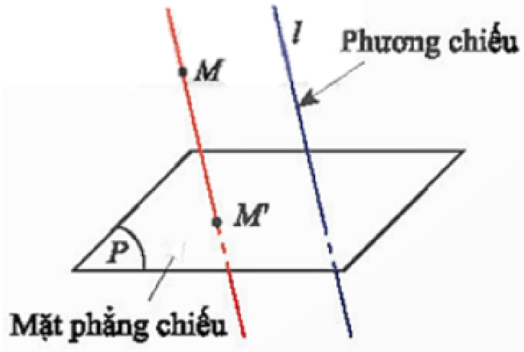
Bài 17. Sau khi gắn kệ treo tường bằng gỗ (Hình 4.87), bạn Nam chuẩn bị đặt đồ trang trí lên nhưng lại lo lắng kệ bị nghiêng, các đồ đạc sẽ bị rơi vỡ. Bạn Bình đề xuất với bạn Nam: "Chỉ cần dùng một viên bi đặt lên vài vị trí trên kệ, nếu viên bi đứng yên thì yên tâm, nếu viên bi lăn xuống thì phải chỉnh lại kệ". Xem mặt kệ và mặt đất lần lượt là hình ảnh của mặt phẳng (P) và (Q). Với cách làm của bạn Bình, nếu viên bi lăn xuống đất thì (P) và (Q) có song song với nhau không? Vì sao?

Chuyên đề 5

PHÉP CHIẾU SONG SONG

I. KHÁI NIỆM PHÉP CHIẾU SONG SONG

Trong không gian, cho một mặt phẳng (P) và đường thẳng l cắt (P). Với mỗi điểm M trong không gian, vẽ một đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với l. Đường thẳng này cắt (P) tại M'. Phép cho tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' trong (P) được gọi là **phép chiếu song song lên mặt phẳng** (P) **theo phương** l.



- Mặt phẳng (P) được gọi là **mặt phẳng chiếu** và đường thẳng l được gọi là **phương chiếu** của phép chiếu song song;
- Phép chiếu song song theo phương l còn được gọi tắt là **phép chiếu theo phương** l;
- Điểm M' gọi là **ảnh của điểm** M theo phép chiếu theo phương l.
- Cho hình $\mathcal{H}$ trong không gian. Ta gọi tập hợp $\mathcal{H}'$ các ảnh M' của tất cả những điểm M thuộc $\mathcal{H}$ qua phép chiếu song song theo phương l là **hình chiếu song song** của $\mathcal{H}$ lên mặt phẳng (P).

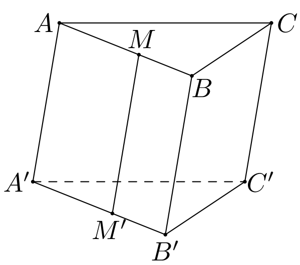
Ví dụ 1 ★☆☆☆☆

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$.

a) Xác định hình chiếu của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương CC'.

b) Gọi M là một điểm thuộc đoạn thẳng AB. Xác định hình chiếu của M trên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương CC'.

Lời giải.



a) Vì $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ nên $AA'//BB'//CC'$. Vì A' thuộc mặt phẳng $(A'B'C')$

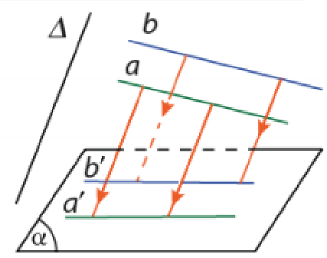
nên A' là hình chiếu của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương CC'.

b) Trong mặt phẳng $(ABB'A')$ vẽ $MM' // AA'$ với M' thuộc $A'B'$ thì $MM' // CC'$. Vì M' thuộc mặt phẳng $(A'B'C')$ nên M' là hình chiếu của M trên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương CC'.

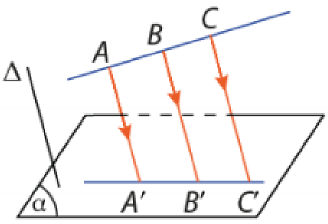
1 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Tìm hình chiếu song song của điểm O trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ theo phương AA'.

II. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÉP CHIẾU SONG SONG

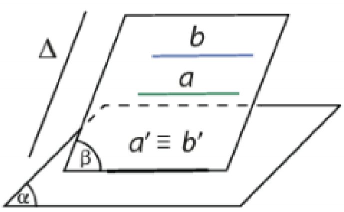
- Phép chiếu song song biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự 3 điểm đó.
- Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, tia thành tia, đoạn thẳng thành đoạn thẳng, biến tia thành tia.
- Phép chiếu song song biến 2 đường thẳng song song thành 2 đường thẳng song song hoặc trùng nhau.
- Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng cùng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.



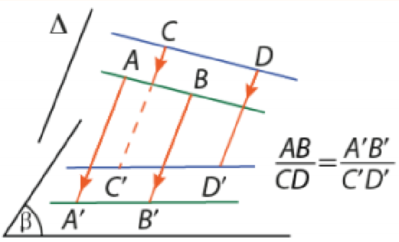
Hình 4.91



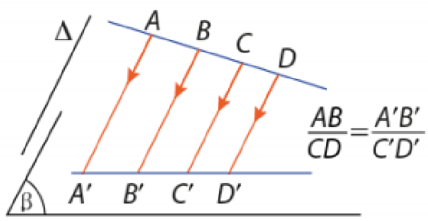
Hình 4.92



Hình 4.93



Hình 4.94



Hình 4.95

Ví dụ 2 ★☆☆☆☆

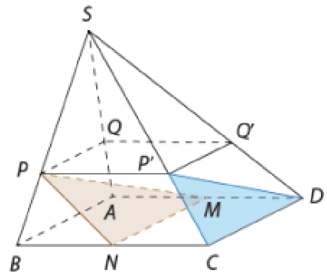
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AD, BC. Lấy P, Q lần lượt là hai điểm trên cạnh SB, SA sao cho $\dfrac{SP}{SB} = \dfrac{SQ}{SA} = \dfrac{2}{3}$.

a) Tìm ảnh của các đoạn thẳng MN, PQ và tam giác MNP qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (SCD) theo phương AD.

b) Hãy nhận xét về vị trí tương đối của ảnh hai đường thẳng MN, PQ qua phép chiếu trên.

Hướng dẫn giải.

a) Ảnh của M và N qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (SCD) theo phương AD lần lượt là C và D nên ảnh của MN qua phép chiếu này là đoạn thẳng CD.



Trong (SAD), vẽ $QQ' \mathbin{//} AD$ $(Q' \in SD)$; trong (SBC), vẽ PP' song song với BC $(P' \in SC)$.

Do đó ảnh của P, Q qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (SCD) theo phương AD lần lượt là P', Q'. Vậy ảnh của PQ là đoạn thẳng $P'Q'$, và ảnh của tam giác MNP là tam giác DCP'.

b) Ta có:

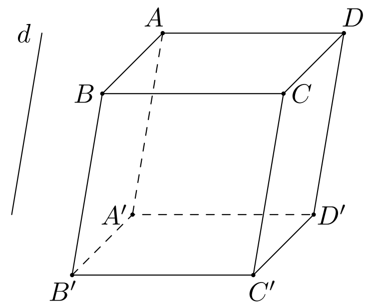
$$\frac{SP'}{SC} = \frac{SP}{SB} = \frac{2}{3}, \quad \frac{SQ'}{SD} = \frac{SQ}{SA} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SP'}{SC} = \frac{SQ'}{SD} \Rightarrow P'Q' \mathbin{//} CD.$$

Ví dụ 3 ★☆☆☆☆

Cho hình bình hành $ABCD$ và gọi $A'B'C'D'$ là hình chiếu của $ABCD$ trên mặt phẳng (P) theo phương d. Chứng minh rằng tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên AB song song với CD, do đó hình chiếu của AB là $A'B'$ song song với hình chiếu của CD là $C'D'$. Tương tự $A'D'$ song song với $B'C'$.



Tứ giác $A'B'C'D'$ có $A'B' \mathbin{//} C'D'$ và $A'D' \mathbin{//} B'C'$ nên nó là hình bình hành.

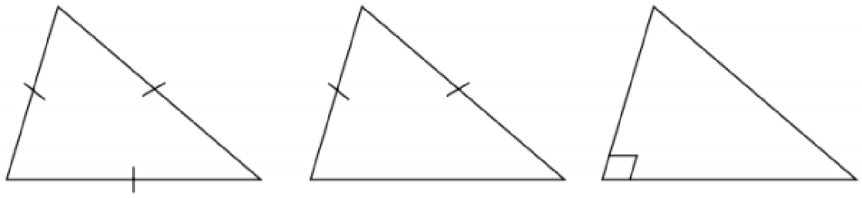
(2) Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC. Một phép chiếu song song biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$, biến M thành M'. Chứng minh rằng $A'M'$ là đường trung tuyến của tam giác $A'B'C'$.

III. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN

Hình biểu diễn của một hình $\mathcal{H}$ trong không gian là hình chiếu song song của hình $\mathcal{H}$ trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

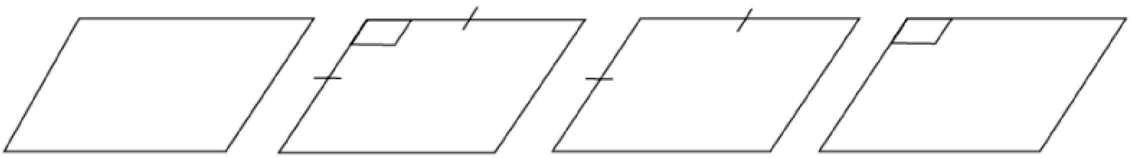
a) **Tam giác:**

Một tam giác bất kì bao giờ cũng có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác có dạng tuỳ ý cho trước (có thể là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông,...)

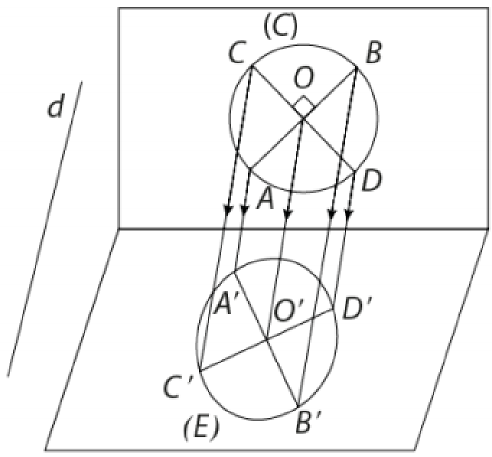


b) **Hình bình hành:**

Một hình bình hành bất kì bao giờ cũng có thể xem là hình biểu diễn của một hình bình hành tuỳ ý cho trước (có thể là hình bình hành, hình vuông, hình chữ nhật...)



c) **Hình thang:** Một hình thang bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình thang tuỳ ý cho trước, miễn là tỉ số độ dài hai đáy của hình biểu diễn phải bằng tỉ số độ dài hai đáy của hình thang ban đầu.



d) **Hình tròn:** Vì hình chiếu song song của một hình tròn là một hình elip hoặc một hình tròn, hoặc đặc biệt có thể là một đoạn thẳng nên người ta thường dùng hình elip để biểu diễn cho hình tròn.

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm

Câu 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hình chiếu của tam giác $A'B'C'$ theo phương BB' lên mặt phẳng (ABC) là hình nào?

Ⓐ ADC. Ⓑ ADB. Ⓒ BCD. Ⓓ ABC .

Câu 2. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ Hình chiếu song song của một hình chóp cụt có thể là một hình tam giác.
Ⓑ Hình chiếu song song của một hình chóp cụt có thể là một đoạn thẳng.
Ⓒ Hình chiếu song song của một hình chóp cụt có thể là một hình chóp cụt.
Ⓓ Hình chiếu song song của một hình chóp cụt có thể là một điểm.

Câu 3. Qua phép chiếu song song, tính chất nào **không được** bảo toàn?

Ⓐ Chéo nhau. Ⓑ Đồng quy.
Ⓒ Thẳng hàng. Ⓓ Song song.

Câu 4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Ⓐ Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.
Ⓑ Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau thì song song.
Ⓒ Hình chiếu song song của hai một hình vuông là một hình vuông.
Ⓓ Hình chiếu song song của một lục giác đều là một lục giác đều.

Câu 5. Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P), hai đường thẳng a và b có hình chiếu là hai đường thẳng song song a' và b'. Khi đó:

Ⓐ a và b phải song song với nhau.
Ⓑ a và b phải cắt nhau.
Ⓒ a và b có thể chéo nhau hoặc song song với nhau.
Ⓓ a và b không thể song song.

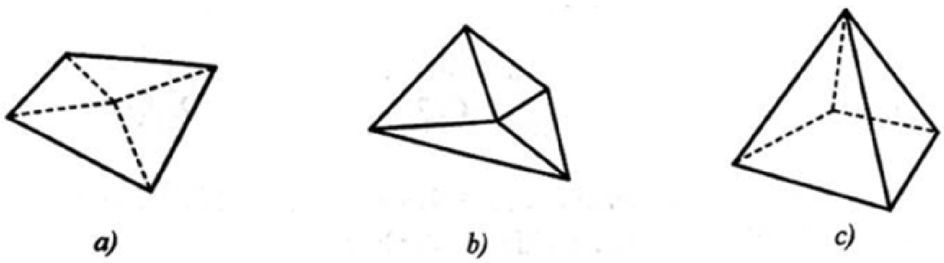
Câu 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hình chiếu song song của điểm B' trên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương chiếu $A'D$ là:

Ⓐ Điểm B. Ⓑ Điểm D. Ⓒ Điểm C. Ⓓ Điểm A.

Câu 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hình chiếu song song của đoạn thẳng $A'B$ trên mặt phẳng $(CDD'C')$ theo phương chiếu BC là:

Ⓐ Đoạn thẳng $D'C$.
Ⓑ Đoạn thẳng $A'D'$.
Ⓒ Đoạn thẳng AB'.
Ⓓ Đoạn thẳng $A'B$.

Câu 8. Trong các Hình 44a, b, c, có bao nhiêu hình có thể là hình biểu diễn cho hình chóp tứ giác?



Hình 44

Ⓐ 3.
Ⓑ 2.
Ⓒ 1.
Ⓓ 0.

2 Tự luận

Bài 1. Những mệnh đề nào trong các mệnh đề sau đây là đúng?

a) Phép chiếu song song biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

b) Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng cắt nhau.

c) Phép chiếu song song biến tam giác đều thành tam giác cân.

d) Phép chiếu song song biến hình vuông thành hình bình hành.

Bài 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu của nó.

b) Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu của nó.

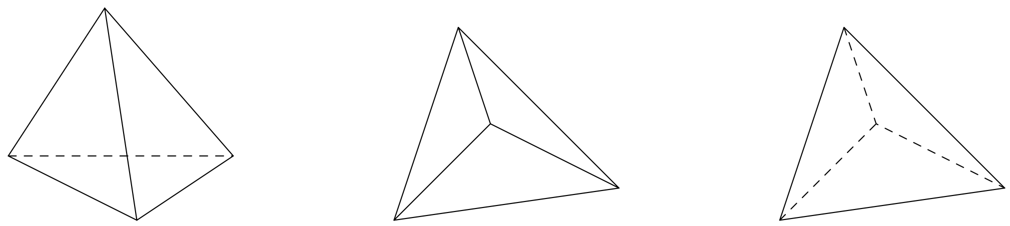
c) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.

d) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau.

Bài 3. Nếu tam giác $A'B'C'$ là hình chiếu của tam giác ABC qua một phép chiếu song song thì tam giác ABC có phải là hình chiếu của tam giác $A'B'C'$ qua một phép chiếu song song hay không? Hãy giải thích.

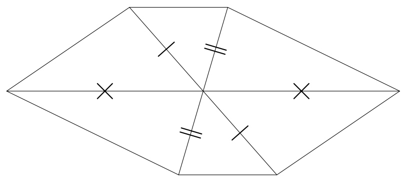
Bài 4. Phép chiếu song song biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng phép chiếu đó biến trọng tâm của tam giác ABC thành trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.

Bài 5. Trong các Hình $a), b), c)$, hình nào là hình biểu diễn cho hình tứ diện?



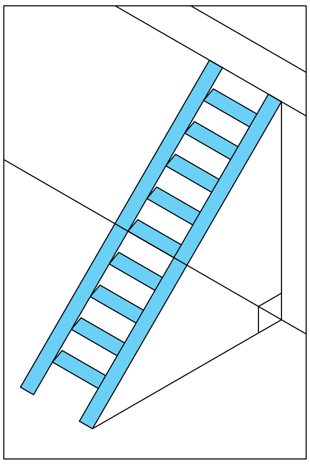
$a)$ $b)$ $c)$

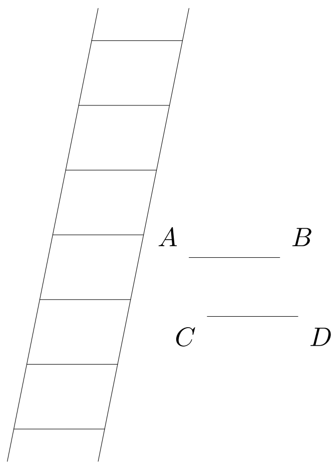
Bài 6. Hình bên có thể là hình biểu diễn của một hình lục giác đều hay không? Vì sao?



Bài 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định ảnh của tam giác $A'C'D'$ qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương $A'B$.

Bài 8. Trong hình bên dưới, AB và CD là bóng của hai thanh chắn của một chiếc thang dưới ánh mặt trời. Hãy giải thích tại sao AB song song với CD.





Chuyên đề 6

ÔN TẬP CHƯƠNG 4

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng a và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường thẳng b. Vị trí tương đối của hai đường thẳng a và b là

Ⓐ chéo nhau. Ⓑ cắt nhau. Ⓒ song song. Ⓓ trùng nhau.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh SD. Đường thẳng SB song song với mặt phẳng

Ⓐ (CDM). Ⓑ (ACM). Ⓒ (ADM). Ⓓ (ACD).

Câu 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng

Ⓐ $(ABCD)$. Ⓑ $(BCC'B')$. Ⓒ (BDA'). Ⓓ (BDC').

Câu 4. Cho ba mặt phẳng (P), (Q), (R) đôi một song song với nhau. Đường thẳng a cắt các mặt phẳng (P), (Q), (R) lần lượt tại A, B, C sao cho $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{2}{3}$ và đường thẳng b cắt các mặt phẳng (P), (Q), (R) lần lượt tại A', B',C'. Tỉ số $\dfrac{A'B'}{B'C'}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{2}{3}$. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $\dfrac{3}{2}$. Ⓓ $\dfrac{2}{5}$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SD, K là giao điểm của mặt phẳng (AMN) và đường thẳng SC. Tỉ số $\dfrac{SK}{SC}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $\dfrac{1}{3}$. Ⓒ $\dfrac{1}{4}$. Ⓓ $\dfrac{2}{3}$.

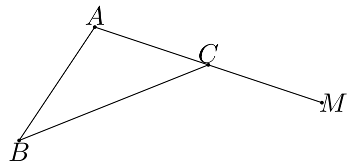
Câu 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, $B'C'$. Hình chiếu của $\triangle B'DM$ qua phép chiếu song song trên $(A'B'C'D')$ theo phương AA' là

Ⓐ $\triangle B'A'M'$. Ⓑ $\triangle C'D'M'$. Ⓒ $\triangle DMM'$. Ⓓ $\triangle B'D'M'$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD. Đường thẳng nào **không song song** với IJ?

Ⓐ EF. Ⓑ CD. Ⓒ AD. Ⓓ AB.

Câu 8. Cho tam giác ABC. Lấy điểm M trên cạnh AC kéo dài (Hình bên). Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?



Ⓐ $M \in (ABC)$.
Ⓑ $C \in (ABM)$.
Ⓒ $A \in (MBC)$.
Ⓓ $B \in (ACM)$.

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$ với I và J lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ Bốn điểm I, J, B, C đồng phẳng.
Ⓑ Bốn điểm I, J, A, C đồng phẳng.
Ⓒ Bốn điểm I, J, B, D đồng phẳng.
Ⓓ Bốn điểm I, J, C, D đồng phẳng.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AC cắt BD tại M, AB cắt CD tại N. Trong các đường thẳng sau đây, đường nào là giao tuyến của (SAC) và (SBD)?

Ⓐ SM.
Ⓑ SN.
Ⓒ SB.
Ⓓ SC.

Câu 11. Cho hình bình hành $ABCD$ và một điểm S không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là một đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

Ⓐ AB.
Ⓑ AC.
Ⓒ BC.
Ⓓ SA.

Câu 12. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. M là điểm trên SA sao cho $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và CD, cắt hình chóp theo một tứ giác có diện tích là

Ⓐ $\dfrac{400}{9}$.
Ⓑ $\dfrac{200}{3}$.
Ⓒ $\dfrac{40}{9}$.
Ⓓ $\dfrac{200}{9}$.

Câu 13. Quan hệ song song trong không gian có tính chất nào trong các tính chất sau?

Ⓐ Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (P) đều song song với (Q).
Ⓑ Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (P) đều song song với mọi đường thằng nằm trong (Q).
Ⓒ Nếu hai đường thẳng song song với nhau lần lượt nằm trong hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau.
Ⓓ Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước đó.

Câu 14. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AA', $A'C'$, BC. Ta có

Ⓐ $(MNP)//(BCA)$.
Ⓑ $(MNQ)//(A'B'C')$.
Ⓒ $(NQP)//(CAB)$.
Ⓓ $(MPQ)//(ABA')$.

Câu 15. Trong không gian, hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi

Ⓐ Hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.
Ⓑ Hai đường thẳng không có điểm chung.
Ⓒ Hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng.
Ⓓ Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba.

Câu 16. Trong không gian, đường thẳng song song với mặt phẳng khi và chỉ khi

Ⓐ Đường thẳng đó song song với một đường thẳng thuộc mặt phẳng.
Ⓑ Đường thẳng và mặt phẳng không có điểm chung.
Ⓒ Đường thẳng đó không có điểm chung với một đường thẳng thuộc mặt phẳng.
Ⓓ Đường thẳng đó không có điểm chung với hai đường thẳng thuộc mặt phẳng.

Câu 17. Trong không gian, hai mặt phẳng song song với nhau khi và chỉ khi

Ⓐ Có một mặt phẳng chứa hai đường thẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng còn lại.
Ⓑ Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng.
Ⓒ Hai mặt phẳng cùng song song với mặt phẳng thứ ba.
Ⓓ Hai mặt phẳng không có điểm chung.

Câu 18. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và (α). Giả sử $a//b, b//(\alpha)$. Khi đó

Ⓐ $a//(\alpha)$.
Ⓑ $a \subset (\alpha)$.
Ⓒ a cắt (α).
Ⓓ $a//(\alpha)$ hoặc $a \subset (\alpha)$.

Câu 19. Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α). Giả sử $b \not\subset (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ Nếu $b//(\alpha)$ thì $b//a$.
Ⓑ Nếu b cắt (α) thì b cắt a.
Ⓒ Nếu $b//a$ thì $b//(\alpha)$.
Ⓓ Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt cả a và b. .

Câu 20. Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối của a và (P)?

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 4.

Câu 21. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Khẳng định nào sau đây **sai**?

Ⓐ Có duy nhất một mặt phẳng song song với a và b.

Ⓑ Có duy nhất một mặt phẳng qua a và song song với b.

Ⓒ Có duy nhất một mặt phẳng qua điểm M, song song với a và b (với M là điểm cho trước).

Ⓓ Có vô số đường thẳng song song với a và cắt b.

Câu 22. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Ⓐ Hai mặt phẳng không cắt nhau thì song song.

Ⓑ Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì cắt nhau.

Ⓒ Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

Ⓓ Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có vô số mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

Câu 23. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

Ⓐ IJ song song với CD. Ⓑ IJ song song với AB.

Ⓒ IJ chéo CD. Ⓓ IJ cắt AB.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD\,(AB//CD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

Ⓐ Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên.

Ⓑ Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO (O là giao điểm của AC và BD).

Ⓒ Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI (I là giao điểm của AD và BC).

Ⓓ Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là đường trung bình của $ABCD$.

Câu 25. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, I' lần lượt là trung điểm của AB, $A'B'$. Qua phép chiếu song song phương AI', mặt phẳng chiếu $(A'B'C')$ biến I thành?

Ⓐ A'. Ⓑ B'. Ⓒ C'. Ⓓ I'.

Câu 26. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Giao tuyến của mặt phẳng (ACD) và (GAB) là

Ⓐ AM (M là trung điểm của AB).

Ⓑ AN (N là trung điểm của CD).

Ⓒ AH (H là hình chiếu của B trên CD).

Ⓓ AK (K là hình chiếu của C trên BD).

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD không song song với BC. Gọi M, N, P, Q, R, T lần lượt là trung điểm AC, BD, BC, CD, SA, SD. Cặp đường thẳng nào sau đây song song với nhau?

Ⓐ MP và RT.
Ⓑ MQ và RT.
Ⓒ MN và RT.
Ⓓ PQ và RT.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC và G là trọng tâm của tam giác SAB. Giao tuyến của (SAB) và (IJG) là

Ⓐ SC.

Ⓑ đường thẳng qua S và song song với AB.

Ⓒ đường thẳng qua G và song song với DC.

Ⓓ đường thẳng qua G và cắt BC.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, I theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ (NOM) cắt (OPM).
Ⓑ $(MON)//(SBC)$.
Ⓒ $(PON) \cap (MNP) = NP$.
Ⓓ $(NMP)//(SBD)$.

Câu 30. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J và K lần lượt là trung điểm của AC, BC và BD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (IKJ) là đường thẳng

Ⓐ KD.
Ⓑ KI.
Ⓒ qua K và song song với AB.
Ⓓ Không có.

Câu 31. Cho hai đường thẳng phân biệt a và b trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa a và b?

Ⓐ 1.
Ⓑ 2.
Ⓒ 3.
Ⓓ 4.

Câu 32. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, qua phép chiếu song song phương CC', mặt phẳng chiếu $(A'B'C')$ biến M thành M'. Trong đó M là trung điểm của BC. Chọn mệnh đề **đúng**?

Ⓐ M' là trung điểm của $A'B'$.
Ⓑ M' là trung điểm của $B'C'$.
Ⓒ M' là trung điểm của $A'C'$.
Ⓓ Cả ba đáp án trên đều sai.

Câu 33. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

Ⓐ Nếu 3 điểm A, B, C là 3 điểm chung của 2 mặt phẳng (P) và (Q) thì A, B, C thẳng hàng.
Ⓑ Nếu A, B, C thẳng hàng và (P), (Q) có điểm chung là A thì B, C cũng là 2 điểm chung của (P) và (Q).
Ⓒ Nếu 3 điểm A, B, C là điểm chung của 2 mặt phẳng (P) và (Q) phân biệt thì A, B, C không thẳng hàng.
Ⓓ Nếu A, B, C thẳng hàng và A, B là 2 điểm chung của (P) và (Q) phân biệt thì C cũng là điểm chung của (P) và (Q).

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có M, N, P lần lượt là các điểm thuộc các cạnh SA, SB, SC. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Biết Q là giao điểm của SD với mặt phẳng (MNP). Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ SO, MP, NQ đồng quy.
Ⓑ M, N, Q thẳng hàng.
Ⓒ N, P, Q thẳng hàng.
Ⓓ SO, SD, NQ đồng quy.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABC$ có M, N, P lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCA. Gọi (α) là mặt phẳng qua S và song song với (ABC). Biết Q là giao điểm giữa AN và (α). Tỉ số $\dfrac{QN}{QA}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{3}$.
Ⓑ $\dfrac{2}{3}$.
Ⓒ $\dfrac{3}{2}$.
Ⓓ 3.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có M, N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và SBC. Gọi Δ là giao tuyến giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AMN). Khẳng định nào sau đây là **sai**?

Ⓐ $\Delta // MN$.
Ⓑ Δ đi qua hai điểm A và C.
Ⓒ Δ cắt SB.
Ⓓ Bốn điểm A, M, N, C đồng phẳng.

Câu 37. Cho chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB//CD$. Giả sử $AC \cap BD = O$ và $AD \cap BC = I$. Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là

Ⓐ SO. Ⓑ SB. Ⓒ SI. Ⓓ SA.

Câu 38. Cho chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SD, AB, ON. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

Ⓐ $(MON)//(SBC)$. Ⓑ $(MOP)//(SBC)$.
Ⓒ $MN//(ABCD)$. Ⓓ $(MON)//(ABC)$.

Câu 39. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Có bao nhiêu cạnh của hình lập phương chéo nhau với đường chéo AC' của hình lập phương?

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 6. Ⓓ 4.

Câu 40. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không thuộc cùng một mặt phẳng, có cạnh chung AB. Kết quả nào sau đây **đúng**?

Ⓐ $BC//(AEF)$. Ⓑ $FD//(BEF)$.
Ⓒ $(CEF)//(ABD)$. Ⓓ $(AFD)//(BCE)$.

Câu 41. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $(A'BD)//(CB'D')$. Ⓑ $(AB'D')//(A'BD)$.
Ⓒ $B'D'//(BCD)$. Ⓓ $(DA'C')//(B'AC)$.

Câu 42. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

Ⓐ Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể song song với nhau.
Ⓑ Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể cắt nhau.
Ⓒ Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể trùng nhau.
Ⓓ Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu song song của nó.

Câu 43. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

Ⓐ Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau.
Ⓑ Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau thì cắt nhau.
Ⓒ Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.
Ⓓ Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể cắt nhau, trùng nhau, song song với nhau.

Câu 44. Hình chóp có 18 cạnh (bao gồm cả cạnh đáy và cạnh bên) có bao nhiêu mặt?

Ⓐ 9. Ⓑ 10. Ⓒ 18. Ⓓ 19 .

Câu 45. Chọn khẳng định **sai**?

Ⓐ Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì sẽ cắt mặt phẳng còn lại.

Ⓑ Nếu hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia.

Ⓒ Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau.

Ⓓ Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì mặt phẳng (R) đã cắt (P) đều phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song với nhau.

Câu 46. Chọn khẳng định **sai**?

Ⓐ Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì sẽ cắt mặt phẳng còn lại.

Ⓑ Nếu hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia.

Ⓒ Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau.

Ⓓ Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì mặt phẳng (R) đã cắt (P) đều phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song với nhau.

Câu 47. Số đường chéo của một hình hộp là

Ⓐ 4 . Ⓑ 24 . Ⓒ 2 . Ⓓ 28.

Câu 48. Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng thuộc một mặt phẳng. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

Ⓐ Bốn điểm A, B, C, D đã cho đôi một khác nhau.

Ⓑ Không có ba điểm nào trong bốn điểm A, B, C, D là thẳng hàng.

Ⓒ Hai đường thẳng AC và BD song song với nhau.

Ⓓ Hai đường thẳng AC và BD không có điểm chung.

Câu 49. Cho (P) và điểm A nằm ngoài (P). Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ Qua A có vô số mặt phẳng song song với (P).

Ⓑ Qua A có đúng một mặt phẳng song song với (P).

Ⓒ Qua A không có mặt phẳng song song với (P).

Ⓓ Qua A có đúng hai mặt phẳng song song với (P).

Câu 50. Cho tứ diện $ABCD$. Một mặt phẳng cắt các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ diện lần lượt tại M, N, P, Q. Khi đó

Ⓐ MN, AC, PQ đồng quy.

Ⓑ MN, AC, PQ đôi một song song.

Ⓒ MN, AC, PQ đôi một chéo nhau.

Ⓓ MN, AC, PQ đôi một song song hoặc chéo nhau.

2 Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
A Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.		
B Hai đường thẳng song song xác định một mặt phẳng.		
C Hai đường thẳng được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung.		
D Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.		

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và BC. Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của $\triangle SAB$ và $\triangle SBC$.

Phát biểu	Đ	S
A $AC//(SIJ)$.		
B IJ cắt SB .		
C $HK//IJ$.		
D Giao tuyến của (BHK) và (ABC) là đường thẳng đi qua B và song song với AC .		

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC. Mặt phẳng (MNP) cắt SD tại Q

Phát biểu	Đ	S	Phát biểu	Đ	S
A $NQ = a$.			**C** $(MNP)//(ABCD)$.		
B $(MNO)//(SCD)$.			**D** $S_{MNPQ} = a^2$.		

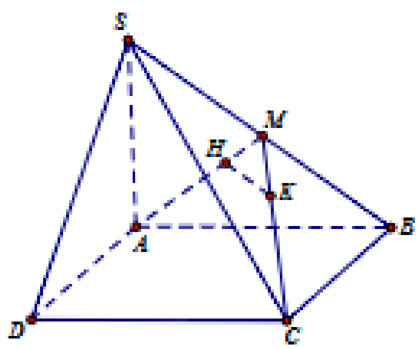
Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Gọi E là trung điểm DC và M là trung điểm BC. Trên cạnh SA lấy điểm N sao cho $AN = \frac{2}{3}SA$.

Phát biểu	Đ	S
A AG cắt mặt phẳng .		
B Đường thẳng ME cắt mặt phẳng (NBD) .		
C $(NGD)//(SME)$.		
D Gọi I là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (SME). Khi đó SI cắt mặt phẳng (NOB) .		

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SD.

Phát biểu	Đ	S
A $(OMN)//(SBC)$.		
B Mặt phẳng (OMN) đi qua trung điểm của cạnh AB .		
C Giao tuyến của (OMN) và mặt phẳng $(ABCD)$ là đường thẳng đi qua O và song song với đường thẳng AB .		
D Điểm C thuộc mặt phẳng (OMN) .		

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm đoạn SB, H và K lần lượt là trọng tâm tam giác SAB và SBC (tham khảo hình vẽ dưới đây).



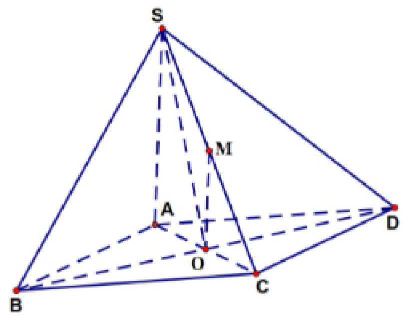
Phát biểu	Đ	S
A $AB//CD$.		
B SC và AB cắt nhau.		

Phát biểu	Đ	S
C $HK//(ABCD)$.		
D $(HK)//(SAC)$.		

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SD, CD.

Phát biểu	Đ	S
A $BD//(MNP)$.		
B $MN//BD$.		
C $NP//(SAB)$.		
D Mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp theo thiết diện là một hình bình hành .		

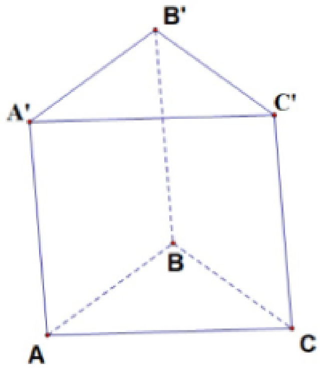
Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, tâm là O. Gọi M là trung điểm của SC.



Phát biểu	Đ	S
A SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).		
B Giao điểm của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD) thuộc cạnh SO.		
C Đường thẳng MO cắt mặt phẳng (SAD).		
D Ba mặt phẳng (SAB), (SAC) và (MOB) đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt và ba giao tuyến này đồng quy.		

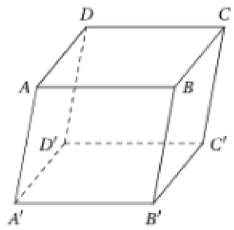
Câu 9. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của

$A'B'$ và AB, và I là tâm của hình bình hành $BCC'B'$.



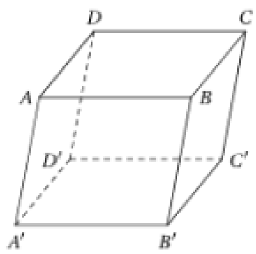
Phát biểu	Đ	S
A Đường thẳng MN cắt đường thẳng $B'C'$.		
B Giao tuyến của hai mặt phẳng (MNI) và $(BCC'B')$ song song với BB'.		
C $(MNI)//(ACC'A')$.		
D Đường thẳng MI cắt mặt phẳng (ABC) tại điểm K. Khi đó, $NK = AC$.		

Câu 10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, khẳng định nào sau đây là đúng?



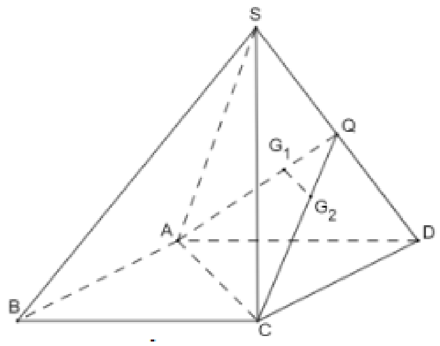
Phát biểu	Đ	S
A $(DCB')//(AAB')$.		
B $DC//AB$.		
C Giao tuyến của mặt phẳng (BBD') và $(A'B'C'D')$ là đường thẳng $B'B$.		
D $(DC)//(ABB'A')$.		

Câu 11. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, khẳng định nào sau đây là đúng?



Phát biểu	Đ	S
A $(DCB')//(AAB')$.		
B $DC//AB$.		
C Giao tuyến của mặt phẳng $(BB'D')$ và $(A'B'C'D')$ là đường thẳng $B'B$.		
D $(DC)//(ABB'A')$.		

Câu 12. Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAD và SCD. Xét tính đúng – sai của các mệnh đề sau:



Phát biểu	Đ	S
A Đường thẳng G_1G_2 và AC có một điểm chung.		
B Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ là đường thẳng AB.		
C Đường thẳng G_1G_2 song song với mặt phẳng $(ABCD)$.		
D Mặt phẳng chứa đường thẳng G_1G_2 và song song với mặt phẳng $(ABCD)$ cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, E, F. Khi đó, tứ giác $MNEF$ là hình bình hành.		

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, trong đó một đáy là AD. Gọi M là trọng tâm tam giác SAD, N thuộc cạnh AC sao cho $NA = \frac{1}{2}NC$.

A ___ $AD//BC$.

B ___ $(DMN)//(SCB)$.

C ___ Có duy nhất một mặt phẳng chứa SB và song song với AD.

D ___ $MN//(SCB)$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AD//BC$ và $AD = 2 \cdot BC$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD.

(A) ___ Hai đường thẳng SA và BC chéo nhau.

(B) ___ Giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (SCD) là giao điểm của hai đường thẳng AB và SC.

(C) ___ Hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có đúng một điểm chung.

(D) ___ Đường thẳng CG song song với mặt phẳng (SAB).

3 Tự luận

Bài 1. Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM = 3AM$. Mặt phẳng (P) đi qua M song song với hai đường thẳng AD và BC.

a) Xác định giao điểm K của mặt phẳng (P) với đường thẳng CD.

b) Tính tỉ số $\dfrac{KC}{CD}$.

Bài 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và AA'.

a) Xác định giao điểm của mặt phẳng (MNP) và đường thẳng $B'C$.

b) Gọi K là giao điểm của của mặt phẳng (MNP) với đường thẳng $B'C$. Tính tỉ số $\dfrac{KB'}{KC}$.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAD, SCD.

a) Chứng minh $GK//(ABCD)$.

b) Mặt phẳng chứa đường thẳng GK và song song với mặt phẳng $(ABCD)$ cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, E, F. Chứng minh rằng tứ giác $MNEF$ là hình bình hành.

Bài 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AD, $A'B'$. Chứng minh rằng

a) $BD//B'D'$, $(A'BD)//(CB'D')$ và $MN//(BDD'B')$

b) Đường thẳng AC' đi qua trọng tâm G của tam giác $A'BD$.

Bài 5. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BD. Điểm P thuộc cạnh AC sao cho $PA = 2PC$.

a) Xác định giao điểm E của đường thẳng MP với mặt phẳng (BCD).

b) Xác định giao điểm Q của đường thẳng CD với mặt phẳng (MNP).

c) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (ACD) với mặt phẳng (MNP).

d) Gọi I là giao điểm của MQ và NP, G là trọng tâm của tam giác ABD. Chứng minh C, I, G thẳng hàng.

Bài 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, $C'D'$.

a) Chứng minh rằng $(A'DN)//(B'CM)$.

b) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của đường thẳng $D'B$ với các mặt phẳng $(A'DN)$, $(B'CM)$. Chứng minh rằng $D'E = BF = \dfrac{1}{2}EF$.

Bài 7. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Lấy M, M' lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BC, $B'C'$; lấy các điểm G, G', K lần lượt thuộc các đoạn AM, $A'M'$, $A'B$ sao cho $\dfrac{AG}{AM} = \dfrac{A'G'}{A'M'} = \dfrac{A'K}{A'B} = \dfrac{2}{3}$.

a) Chứng minh rằng $C'M//(A'BM')$.

b) Chứng minh rằng $G'K//(BCC'B')$.

c) Chứng minh rằng $(GG'K)//(BCC'B')$.

d) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua K và song song với mặt phẳng (ABC). Mặt phẳng (α) cắt cạnh CC' tại điểm I. Tính $\dfrac{IC}{IC'}$.

Bài 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và $A'B'$ và O là một điểm thuộc miền trong của mặt bên $CC'D'D$. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (OMN) với các mặt của hình hộp.

Bài 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình thoi cạnh a, tam giác SAD đều, M là điểm trên cạnh AB, (α) là mặt phẳng qua M và $(\alpha)//(SAD)$ cắt CD, SC, SB lần lượt tại N, P, Q.

a) Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình thang cân.

b) Đặt $AM = x$, tính diện tích $MNPQ$ theo a và x.

Bài 10. Cho mặt phẳng (α) và hai đường thẳng chéo nhau a, b cắt (α) tại A và B. Gọi d là đường thẳng thay đổi luôn luôn song song với (α) và cắt a tại M, cắt b tại N. Qua điểm N dựng đường thẳng song song với a cắt (α) tại điểm C.

a) Tứ giác $MNCA$ là hình gì?

b) Chứng minh rằng điểm C luôn luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

c) Xác định vị trí của đường thẳng d để độ dài MN nhỏ nhất.

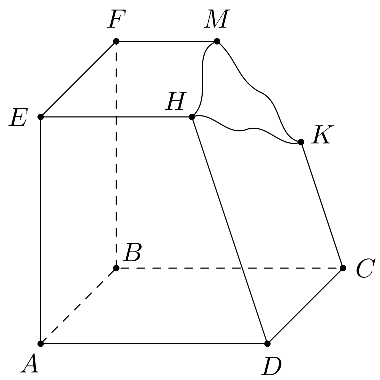
Bài 11. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc các đường chéo AC và BF sao cho $MC = 2MA$; $NF = 2NB$. Qua M, N kẻ các đường thẳng song song với AB, cắt các cạnh AD, AF lần lượt tại M_1, N_1. Chứng minh rằng

a) $MN // DE$;

b) $M_1N_1 // (DEF)$;

c) $(MNN_1M_1) // (DEF)$.

Bài 12. Một khối gỗ có các mặt đều là một phần của mặt phẳng với $(ABCD) // (EFMH)$, $CK // DH$. Khối gỗ bị hỏng một góc (hình bên). Bác thợ mộc muốn làm đẹp khối gỗ bằng cách cắt khối gỗ theo mặt phẳng (R) đi qua K và song song với mặt phẳng $(ABCD)$.



a) Hãy giúp bác thợ mộc xác định giao tuyến của mặt phẳng (R) với các mặt của khối gỗ để cắt được chính xác.

b) Gọi I, J lần lượt là giao điểm DH, BF với mặt phẳng (R). Biết $BF = 60$ cm, $DH = 75$ cm, $CK = 40$ cm. Tính FJ.

Chương 5

CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Mục lục của chương

Bài 1. Số trung bình và mốt của mẫu số liệu ghép nhóm 298
Bài 2. Trung vị và tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm 306
Bài 3. Ôn tập chương 5 316

Chuyên đề 1

SỐ TRUNG BÌNH VÀ MỐT CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

I. SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Mẫu số liệu ghép nhóm thường được trình bày dưới dạng bảng thống kê có dạng như sau:

Bảng 1: Bảng tần số ghép nhóm

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	$\ldots$	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	$\ldots$	n_k

LƯU Ý.

— Bảng trên gồm k nhóm $[u_j; u_{j+1})$ với $1 \leq j \leq k$, mỗi nhóm gồm một số giá trị được ghép theo một tiêu chí xác định.

— Cỡ mẫu $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

— Giá trị chính giữa mỗi nhóm được dùng làm giá trị đại diện cho nhóm ấy. Ví dụ nhóm $[u_1; u_2)$ có giá trị đại diện là $\dfrac{1}{2}(u_1 + u_2)$.

— Hiệu $u_{j+1} - u_j$ được gọi là độ dài của nhóm $[u_j; u_{j+1})$.

Một số quy tắc ghép nhóm của mẫu số liệu

Mỗi mẫu số liệu có thể được ghép nhóm theo nhiều cách khác nhau nhưng thường tuân theo một số quy tắc sau:

- Sử dụng từ $k = 5$ đến $k = 20$ nhóm. Cỡ mẫu càng lớn thì cần càng nhiều nhóm số liệu. Các nhóm có cùng độ dài bằng L thoả mãn $R < k \cdot L$, trong đó R là khoảng biến thiên, k là số nhóm.

- Giá trị nhỏ nhất của mẫu thuộc vào nhóm $[u_1; u_2)$ và càng gần u_1 càng tốt. Giá trị lớn nhất của mẫu thuộc nhóm $[u_k; u_{k+1})$ và càng gần u_{k+1} càng tốt.

LƯU Ý.

— Các đầu mút của các nhóm có thể không là giá trị của mẫu số liệu.

— Ta hay gặp các bảng số liệu ghép nhóm là số nguyên, chẳng hạn như bảng thống kê số lỗi chính tả trong bài kiểm tra giữa học kì 1 môn Ngữ Văn của học sinh khối 11 như sau:

Số lỗi	$[1;2]$	$[3;4]$	$[5;6]$	$[7;8]$	$[9;10]$
Số bài	122	75	14	5	2

Bảng số liệu này không có dạng như Bảng 1. Để thuận lợi cho việc tính các số đặc trưng cho bảng số liệu này, người ta hiệu chỉnh về dạng như Bảng 1 bằng cách thêm và bớt 0,5 đơn vị vào đầu mút bên phải và bên trái của mỗi nhóm số liệu như sau:

Số lỗi	$[0{,}5;2{,}5)$	$[2{,}5;4{,}5)$	$[4{,}5;6{,}5)$	$[6{,}5;8{,}5)$	$[8{,}5;10{,}5)$
Số bài	122	75	14	5	2

Ví dụ 1 ★☆☆☆☆

Cân nặng (kg) của 35 người trưởng thành tại một khu dân cư được cho như sau:

43 51 47 62 48 40 50 62 53 56 40 48 56 53 50 42 55

52 48 46 45 54 52 50 47 44 54 55 60 63 58 55 60 58 53.

Chuyển mẫu số liệu trên thành dạng ghép nhóm, các nhóm có độ dài bằng nhau, trong đó có nhóm $[40;45)$ và xác định giá trị đại diện cho mỗi nhóm.

Lời giải. Vì các nhóm có độ dài bằng nhau, trong đó có nhóm $[40;45)$ nên độ dài mỗi nhóm là 5. Ta có mẫu số liệu ghép nhóm

Cân nặng (kg)	$[40;45)$	$[45;50)$	$[50;55)$	$[55;60)$	$[60;65)$
Giá trị đại diện	$42,5$	$47,5$	$52,5$	$57,5$	$62,5$
Số người	5	7	11	7	5

II. SỐ TRUNG BÌNH

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu $\overline{x}$, được tính như sau

$$\overline{x} = \frac{n_1c_1 + n_2c_2 + \cdots + n_kc_k}{n},$$

trong đó $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Ví dụ 2 ★☆☆☆☆

Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả cam ở mỗi lô hàng A và B được cho ở bảng sau:

Cân nặng (g)	$[150; 155)$	$[155; 160)$	$[160; 165)$	$[165; 170)$	$[170; 175)$
Số quả cam ở lô hàng A	2	6	12	4	1
Số quả cam ở lô hàng B	1	3	7	10	4

a) Hãy ước lượng cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng A và lô hàng B.

b) Nếu so sánh theo số trung bình thì cam ở lô hàng nào nặng hơn?

Lời giải. Ta có bảng thống kê số lượng cam theo giá trị đại diện:

Cân nặng đại diện (g)	152,5	157,5	162,5	167,5	172,5
Số quả cam ở lô hàng A	2	6	12	4	1
Số quả cam ở lô hàng B	1	3	7	10	4

a) Cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng A xấp xỉ bằng

$$(2 \cdot 152{,}5 + 6 \cdot 157{,}5 + 12 \cdot 162{,}5 + 4 \cdot 167{,}5 + 1 \cdot 172{,}5) : 25 = 161{,}7 \text{ (g)}.$$

Cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng B xấp xỉ bằng

$$(1 \cdot 152{,}5 + 3 \cdot 157{,}5 + 7 \cdot 162{,}5 + 10 \cdot 167{,}5 + 4 \cdot 172{,}5) : 25 = 165{,}1 \text{ (g)}.$$

b) Nếu so sánh theo số trung bình thì cam ở lô hàng B nặng hơn cam ở lô hàng A.

1 Một thư viện thống kê số lượng sách được mượn mỗi ngày trong ba tháng ở bảng sau:

Số sách	$[16; 20]$	$[21; 25]$	$[26; 30]$	$[31; 35]$	$[36; 40]$	$[41; 45]$	$[46; 50]$
Số ngày	3	6	15	27	22	14	5

Hãy ước lượng số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

LƯU Ý. Ý nghĩa của số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm: Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho số trung bình của mẫu số liệu gốc. Nó thường dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.

III. MỐT

Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là nhóm có tần số lớn nhất.

Giả sử nhóm chứa mốt là $[u_m; u_{m+1})$, khi đó mốt của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là M_0, được xác định bởi công thức

$$M_0 = u_m + \frac{n_m - n_{m-1}}{(n_m - n_{m-1}) + (n_m - n_{m+1})} \cdot (u_{m+1} - u_m).$$

LƯU Ý. Nếu không có nhóm kề trước của nhóm chứa mốt thì $u_{m-1} = 0$. Nếu không có nhóm kề sau của nhóm chứa mốt thì $n_{m+1} = 0$.

Ví dụ 3 ★☆☆☆☆

Một công ty xây dựng khảo sát khách hàng xem họ có nhu cầu mua nhà ở mức giá nào. Kết quả khảo sát được ghi lại ở bảng sau

Mức giá (triệu đồng/m^2)	$[10;14)$	$[14;18)$	$[18;22)$	$[22;26)$	$[26;30)$
Số khách hàng	54	78	120	45	12

a) Tìm mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Công ty nên xây nhà ở mức giá nào để nhiều người có nhu cầu mua nhất?

Lời giải.

a) Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu trên là nhóm $[18;22)$.

Do đó mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_0 = 18 + \frac{120 - 78}{(120 - 78) + (120 - 45)} \cdot 4 = \frac{758}{39} \approx 19{,}4.$$

b) Dựa vào kết quả trên ta có thể dự đoán rằng nếu công ty xây nhà ở mức giá 19,4 triệu đồng/m^2 thì sẽ có nhiều người có nhu cầu mua nhất.

Ví dụ 4 ★☆☆☆☆

Số cuộc gọi điện thoại một người thực hiện mỗi ngày trong 30 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên được thống kê trong bảng sau:

Số cuộc gọi	$[3;5]$	$[6;8]$	$[9;11]$	$[12;14]$	$[15;17]$
Số ngày	5	13	7	3	2

a) Tìm mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Hãy dự đoán xem khả năng người đó thực hiện bao nhiêu cuộc gọi mỗi ngày là cao nhất.

Lời giải. Do số cuộc gọi là số nguyên nên ta hiệu chỉnh lại như sau:

Số cuộc gọi	$[2{,}5; 5{,}5)$	$[5{,}5; 8{,}5)$	$[8{,}5; 11{,}5)$	$[11{,}5; 14{,}5)$	$[14{,}5; 17{,}5)$
Số ngày	5	13	7	3	2

a) Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu trên là nhóm $[5{,}5; 8{,}5)$.

Do đó mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_0 = 5{,}5 + \frac{13-5}{(13-5)+(13-7)} \cdot 3 = \frac{101}{14} \approx 7{,}2.$$

b) Dựa vào kết quả trên ta có thể dự đoán rằng khả năng người đó thực hiện 7 cuộc gọi mỗi ngày là cao nhất.

LƯU Ý. ***Ý nghĩa của mốt của mẫu số liệu ghép nhóm***

— Mốt của mẫu số liệu không ghép nhóm là giá trị có khả năng xuất hiện cao nhất khi lấy mẫu. Mốt của mẫu số liệu sau khi ghép nhóm M_0 xấp xỉ với mốt của mẫu số liệu không ghép nhóm. Các giá trị nằm xung quanh M_0 thường có khả năng xuất hiện cao hơn các giá trị khác.

— Một mẫu số liệu ghép nhóm có thể có nhiều nhóm chứa mốt và nhiều mốt.

(2) Bảng số liệu ghép nhóm sau cho biết chiều cao (cm) của 50 học sinh lớp 11A.

Khoảng chiều cao (cm)	$[145; 150)$	$[150; 155)$	$[155; 160)$	$[160; 165)$	$[165; 170)$
Số học sinh	7	14	10	10	9

Tính mốt của mẫu số liệu ghép nhóm này. Có thể kết luận gì từ giá trị tính được?

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm

Câu 1. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về tuổi thọ của một loại bóng đèn mới như sau:

Tuổi thọ (năm)	[2;3,5)	[3,5;5)	[5;6,5)	[6,5;8)
Số bóng đèn	8	22	35	15

Nhóm có tần số lớn nhất là

Ⓐ [2;3,5). Ⓑ [3,5;5). Ⓒ [5;6,5). Ⓓ [6,5;8).

Độ dài mỗi nhóm bằng

Ⓐ 8 . Ⓑ 1,5 . Ⓒ 15 . Ⓓ 15 .

Tần số của nhóm $[3,5;5)$ là bao nhiêu?

Ⓐ 8 . Ⓑ 22 . Ⓒ 15 . Ⓓ 35 .

Giá trị đại diện của nhóm $[3,5;5)$ là bao nhiêu?

Ⓐ 2,75 . Ⓑ 4,25 . Ⓒ 5,75 . Ⓓ 7,25 .

Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu là

Ⓐ [2;3,5). Ⓑ [3,5;5). Ⓒ [5;6,5). Ⓓ [6,5;8).

Câu 2. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về tuổi thọ của một loại bóng đèn mới như sau:

Tuổi thọ	[2;3,5)	[3,5;5)	[5;6,5)	[6,5;8)
Số bóng đèn	8	22	35	15

Số trung bình của mẫu số liệu là

Ⓐ 5,0. Ⓑ 5,75. Ⓒ 6,5. Ⓓ 5,32.

Câu 3. Cho bảng số liệu ghép nhóm về cân nặng của 29 học sinh lớp 11D như sau:

Cân nặng (kg)	[40,5; 45)	[45; 50)	[50; 55)	[55; 60)	[60,5; 65)	[65,5; 70,5)
Số học sinh	3	5	10	6	3	2

Số trung bình của mẫu số liệu là

Ⓐ 42. Ⓑ 50,5. Ⓒ 55. Ⓓ 51,81.

2 Tự luận

Bài 1. Anh Văn ghi lại cự li 30 lần ném lao của mình ở bảng sau (đơn vị: mét):

72,1	72,9	70,2	70,9	72,2	71,5	72,5	69,3	72,3	69,7
72,3	71,5	71,2	69,8	72,3	71,1	69,5	72,2	71,9	73,1
71,6	71,3	72,2	71,8	70,8	72,2	72,2	72,9	72,7	70,7

Tổng hợp lại kết quả ném của anh Văn vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Cự li (m)	$[69{,}2; 70)$	$[70; 70{,}8)$	$[70{,}8; 71{,}6)$	$[71{,}6; 72{,}4)$	$[72{,}4; 73{,}2)$
Số lần	?	?	?	?	?

Bài 2. Số sản phẩm một công nhân làm được trong một ngày được cho như sau:

18 25 39 12 54 27 46 25 19 8 36 22

20 19 17 44 5 18 23 28 25 34 46 27 16

Hãy chuyển mẫu số liệu sang dạng ghép nhóm với sáu nhóm có độ dài bằng nhau.

Bài 3. Quãng đường (km) từ nhà đến nơi làm việc của 40 công nhân một nhà máy được ghi lại như sau:

5 3 10 20 25 11 13 7 12 31 19 10 12 17 18 11 32 17 16 2

7 9 7 8 3 5 12 15 18 3 12 14 2 9 6 15 15 7 6 12

a) Ghép nhóm dãy số liệu trên thành các khoảng có độ rộng bằng nhau, khoảng đầu tiên là $[0; 5)$. Tìm giá trị đại diện cho mỗi nhóm.

b) Tính số trung bình của mẫu số liệu không ghép nhóm và mẫu số liệu ghép nhóm. Giá trị nào chính xác hơn?

c) Xác định nhóm chứa mốt của mẫu số liệu ghép nhóm thu được.

Bài 4. Tuổi thọ (năm) của 50 bình ắc quy ô tô được cho như sau:

Tuổi thọ (năm)	$[2; 2{,}5)$	$[2{,}5; 3)$	$[3; 3{,}5)$	$[3{,}5; 4)$	$[4; 4{,}5)$	$[4{,}5; 5)$
Tần số	4	9	14	11	7	5

a) Xác định mốt và giải thích ý nghĩa.

b) Tính tuổi thọ trung bình của 50 bình ắc quy ô tô này.

Bài 5. Anh Văn ghi lại cự li 30 lần ném lao của mình ở bảng sau (đơn vị: mét):

72,1	72,9	70,2	70,9	72,2	71,5	72,5	69,3	72,3	69,7
72,3	71,5	71,2	69,8	72,3	71,1	69,5	72,2	71,9	73,1
71,6	71,3	72,2	71,8	70,8	72,2	72,2	72,9	72,7	70,7

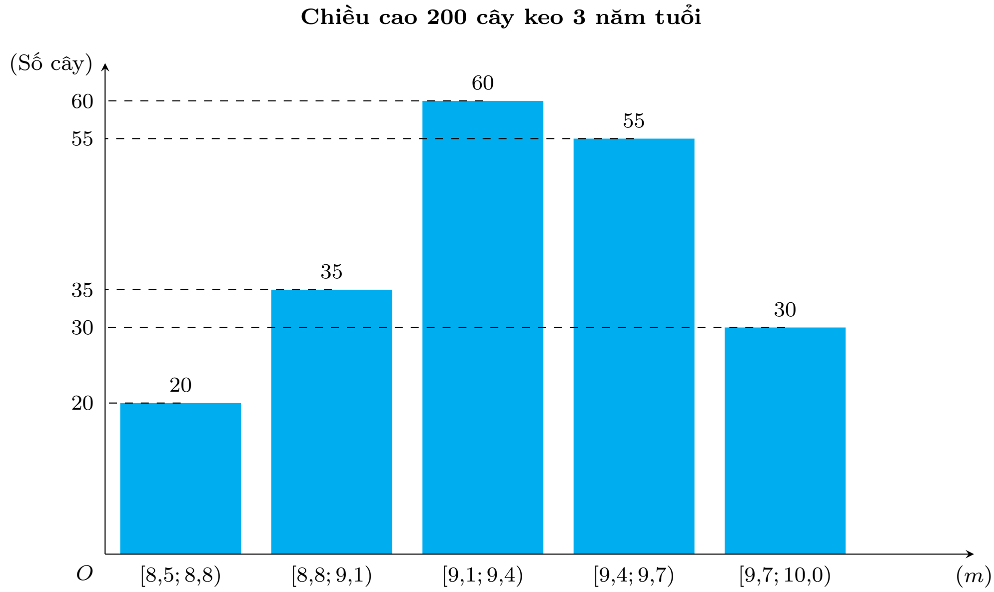
a) Tổng hợp lại kết quả ném của anh Văn vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Cự li (m)	[69,2; 70)	[70; 70,8)	[70,8; 71,6)	[71,6; 72,4)	[72,4; 73,2)
Số lần	?	?	?	?	?

b) Hãy ước lượng cự li trung bình mỗi lần ném từ bảng tần số ghép nhóm trên.

c) Khả năng anh Văn ném được khoảng bao nhiêu mét là cao nhất?

Bài 6. Kết quả đo chiều cao của 200 cây keo 3 năm tuổi ở một nông trường được biểu diễn ở biểu đồ dưới đây.



Hãy ước lượng số trung bình và mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Chuyên đề 2

TRUNG VỊ VÀ TỨ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

I. TRUNG VỊ

Công thức xác định trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

- Gọi n là cỡ mẫu.
- Giả sử nhóm $[u_m; u_{m+1})$ chứa trung vị;
- n_m là tần số của nhóm chứa trung vị;
- $C = n_1 + n_2 + \cdots + n_{m-1}$.

Khi đó

$$M_e = u_m + \frac{\frac{n}{2} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m).$$

Ý nghĩa của trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

Từ dữ liệu ghép nhóm nói chung không thể xác định chính xác trung vị của mẫu số liệu gốc. Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho mẫu số liệu gốc và có thể lấy làm giá trị đại diện cho mẫu số liệu.

Ví dụ 1 ★☆☆☆☆

Trong tuần lễ bảo vệ môi trường, các học sinh khối 11 tiến hành thu nhặt vỏ chai nhựa để tái chế. Nhà trường thống kê kết quả thu nhặt vỏ chai của học sinh khối 11 ở bảng sau:

Số vỏ chai nhựa	$[11; 15]$	$[16; 29]$	$[21; 25]$	$[26; 30]$	$[31; 35]$
Số học sinh	53	82	48	39	18

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Lời giải. Do số vỏ chai là số nguyên nên ta hiệu chỉnh lại như sau:

Số vỏ chai nhựa	$[10{,}5; 15{,}5)$	$[15{,}5; 20{,}5)$	$[20{,}5; 25{,}5)$	$[25{,}5; 30{,}5)$	$[30{,}5; 35{,}5)$
Số học sinh	53	82	48	39	18

Số học sinh tham gia thu nhặt vỏ chai nhựa là

$$n = 53 + 82 + 48 + 39 + 18 = 240.$$

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{240}$ lần lượt là số vỏ chai 240 học sinh khối 11 thu nhặt được xếp theo thứ tự không giảm.

Do $x_1, \ldots, x_{53} \in [10{,}5; 15{,}5)$; $x_{54}, \ldots, x_{135} \in [15{,}5; 20{,}5)$ nên trung vị của mẫu số liệu $x_1; x_2; \ldots; x_{240}$ là $\frac{1}{2}(x_{120} + x_{121}) \in [15{,}5; 20{,}5)$.

Ta xác định được $n = 240$; $p = 2$; $a_2 = 15{,}5$; $m_2 = 82$; $m_1 = 53$; $a_3 - a_2 = 20{,}5 - 15{,}5 = 5$.

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_e = 15{,}5 + \frac{\frac{240}{2} - 53}{82} \cdot 5 = \frac{803}{41} \approx 19{,}59.$$

Ví dụ 2 ★☆☆☆☆

Trong một hội thao, thời gian chạy 200 m của một nhóm các vận động viên được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian (giây)	$[21; 21{,}5)$	$[21{,}5; 22)$	$[22; 22{,}5)$	$[22{,}5; 23)$	$[23; 23{,}5)$
Số vận động viên	5	12	32	45	30

Dựa vào bảng số liệu trên, ban tổ chức muốn chọn ra khoảng 50% số vận động viên chạy nhanh nhất để tiếp tục thi vòng 2. Ban tổ chức nên chọn các vận động viên có thời gian chạy không quá bao nhiêu giây?

Lời giải. Số vận động viên tham gia là

$$n = 5 + 12 + 32 + 45 + 30 = 124.$$

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{124}$ lần lượt là thời gian chạy 200 m của 124 vận động viên được xếp theo thứ tự không giảm.

Do $x_1, \ldots, x_5 \in [21; 21{,}5)$, $x_6, \ldots, x_{17} \in [21{,}5; 22)$, $x_{18}, \ldots, x_{49} \in [22; 22{,}5)$, $x_{50}, \ldots, x_{94} \in [22{,}5; 23)$ nên trung vị của mẫu số liệu $x_1; x_2; \ldots; x_{124}$ là

$$\frac{1}{2} \cdot (x_{62} + x_{63}) \in [22{,}5; 23).$$

Ta xác định được $n = 124$; $p = 4$; $a_4 = 22{,}5$; $m_4 = 45$; $m_1 + m_2 + m_3 = 5 + 12 + 32 = 49$; $a_5 - a_4 = 23 - 22{,}5 = 0{,}5$.

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là $M_e = 22{,}5 + \dfrac{\frac{124}{2} - 49}{45} \cdot 0{,}5 = \dfrac{1019}{45} \approx 22{,}64$.

Vậy ban tổ chức nên chọn các vận động viên có thời gian chạy không quá 22,64 (giây) để tiếp tục thi vòng hai.

1 Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả bơ ở một lô hàng cho trong bảng sau:

Cân nặng (g)	$[150; 155)$	$[155; 160)$	$[160; 165)$	$[165; 170)$	$[170; 175)$
Số quả bơ	1	7	12	3	2

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

II. TỨ PHÂN VỊ

Công thức xác định tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_2, cũng hính là trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

Để tìm tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_1, ta thực hiện như sau:

- Giả sử nhóm $[u_m; u_{m+1})$ chứa tứ phân vị thứ nhất;
- n_m là tần số của nhóm tứ phân vị thứ nhất;
- $C = n_1 + n_2 + \cdots + n_{m-1}$.

Khi đó

$$Q_1 = u_m + \frac{\frac{n}{4} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m).$$

Tương tự, để tìm tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_3, ta thực hiện như sau:

- Giả sử nhóm $[u_j; u_{j+1})$ chứa tứ phân vị thứ ba;
- n_j là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ ba;
- $C = n_1 + n_2 + \cdots + n_{j-1}$.

Khi đó

$$Q_3 = u_j + \frac{\frac{3n}{4} - C}{n_j} \cdot (u_{j+1} - u_j).$$

LƯU Ý. Nếu tứ phân vị thứ k là $\frac{1}{2}(x_m + x_{m+1})$, trong đó x_m và x_{m+1} thuộc hai nhóm liên tiếp, ví dụ như $x_m \in [u_{j-1}; u_j)$ và $x_{m+1} \in [u_j; u_{j+1})$ thì ta lấy $Q_k = u_j$.

Ý nghĩa của tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

— Ba điểm tứ phân vị chia mẫu số liệu đã sắp xếp theo thứ tự không giảm thành bốn phần đều nhau.

— Giống như với trung vị, nói chung không thể xác định chính xác các điểm tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

— Bộ ba tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và được sử dụng làm giá trị đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.

— Tứ phân bị thứ nhất và thứ ba đo xu thế trung tâm của nửa dưới (các dữ liệu nhỏ hơn Q_2) và nửa trên (các dữ liệu lớn hơn Q_2) của mẫu số liệu.

Ví dụ 3 ★☆☆☆☆

Một người thống kê lại thời gian thực hiện các cuộc gọi điện thoại của người đó trong một tuần ở bảng sau:

Thời gian (đơn vị: giây)	$[0;60)$	$[60;120)$	$[120;180)$	$[180;240)$	$[240;300)$	$[300;360)$
Số cuộc gọi	8	10	7	5	2	1

Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Lời giải. Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{33}$ là mẫu số liệu được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có $x_1, \ldots, x_8 \in [0;60)$; $x_9, \ldots, x_{18} \in [60;120)$, $x_{19}, \ldots, x_{25} \in [120;180)$; $x_{26}, \ldots, x_{30} \in [180;240)$; $x_{31}, x_{32} \in [240;300)$; $x_{33} \in [300;360)$.

Tứ phân vị thứ nhất của dãy số liệu $x_1; x_2; \ldots; x_{33}$ là $x_9 \in [60;120)$ nên tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 60 + \frac{\frac{33}{4} - 8}{10} \cdot (120 - 60) = \frac{123}{2} \approx 61{,}5.$$

Tứ phân vị thứ hai của dãy số liệu $x_1; x_2; \ldots; x_{33}$ là $x_{17} \in [60;120)$ nên tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_2 = 60 + \frac{\frac{33}{2} - 8}{10} \cdot (120 - 60) = 111.$$

Tứ phân vị thứ ba của dãy số liệu $x_1; x_2; \ldots; x_{33}$ là $x_{25} \in [120;180)$ nên tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 120 + \frac{\frac{33 \cdot 3}{4} - (8+10)}{7} \cdot (180 - 120) = \frac{1245}{7} \approx 177{,}857.$$

Ví dụ 4 ★☆☆☆☆

Một hãng xe ô tô thống kê lại số lần gặp sự cố về động cơ của 100 chiếc xe cùng loại sau 2 năm sử dụng đầu tiên ở bảng sau:

Số lần gặp sự cố	$[1;2]$	$[3;4]$	$[5;6]$	$[7;8]$	$[9;10]$
Số xe	17	33	25	20	5

a) Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Một người cho rằng có trên 25% xe của hãng gặp không ít hơn 4 sự cố về đồng cơ trong 2 năm sử dụng đầu tiên. Nhận định trên có hợp lí không?

Lời giải.

a) Do số lần gặp sự cố là số nguyên nên ta hiệu chỉnh lại như sau:

Số lần gặp sự cố	$[0{,}5;2{,}5)$	$[2{,}5;4{,}5)$	$[4{,}5;6{,}5)$	$[6{,}5;8{,}5)$	$[8{,}5;10{,}5)$
Số xe	17	33	25	20	5

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{100}$ là mẫu số liệu được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có $x_1, \ldots, x_{17} \in [0{,}5;2{,}5)$; $x_{18}, \ldots, x_{50} \in [2{,}5;4{,}5)$; $x_{51}, \ldots, x_{75} \in [4{,}5;6{,}5)$; $x_{76}, \ldots, x_{95} \in [6{,}5;8{,}5)$; $x_{96}, \ldots, x_{100} \in [8{,}5;10{,}5)$.

Tứ phân vị thứ hai của dãy số liệu $x_1; x_2; \ldots; x_{100}$ là $\frac{1}{2}(x_{50} + x_{51})$. Do $x_{50} \in [2{,}5;4{,}5)$ và $x_{51} \in [4{,}5;6{,}5)$ nên tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_2 = 4{,}5$.

Tứ phân vị thứ nhất của dãy số liệu $x_1; x_2; \ldots; x_{100}$ là $\frac{1}{2}(x_{25} + x_{26})$. Do x_{25} và x_{26} thuộc nhóm $[2{,}5;4{,}5)$ nên tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 2{,}5 + \frac{\frac{1 \cdot 100}{4} - 17}{33} \cdot (4{,}5 - 2{,}5) = \frac{197}{66} \approx 2{,}98.$$

Tứ phân vị thứ ba của dãy số liệu $x_1; x_2; \ldots; x_{100}$ là $\frac{1}{2}(x_{75} + x_{76})$. Do $x_{75} \in [4{,}5;6{,}5)$ và $x_{76} \in [6{,}5;8{,}5)$ nên tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3 = 6{,}5$.

b) Do tứ phân vị thứ nhất $Q_1 \approx 2{,}98$ nên nhận định trên là hợp lý.

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm

Câu 1. Cho một mẫu số liệu gồm 9 số đã được sắp xếp tăng dần. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

Ⓐ Số trung vị trong mẫu số liệu đã cho là số thứ 4.
Ⓑ Số trung vị là trong mẫu số liệu đã cho là số thứ 6.
Ⓒ Số trung vị trong mẫu số liệu đã cho là số thứ 5.
Ⓓ Số trung vị trong mẫu số liệu đã cho là số thứ 9.

Câu 2. Bạn Danh cân lần lượt 50 quả vải thiều Thanh Hà được lựa chọn ngẫu nhiên từ vườn nhà mình và được kết quả như sau:

Cân nặng (đơn vị: gam)	8	19	20	21	22
Số quả	1	10	19	17	3

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu trên

Ⓐ 19. Ⓑ 19,5. Ⓒ 20. Ⓓ 21.

Câu 3. Tiền lương hàng tháng của 7 nhân viên trong một công ty du lịch lần lượt là: 6.5, 8.4, 6.9, 7.2, 2.5, 6.7, 3.0 (đơn vị: triệu đồng). Số liệu nào sau đây là đại diện cho tiền lương hàng tháng của 7 nhân viên?

Ⓐ 6.7 triệu đồng. Ⓑ 7 triệu đồng.
Ⓒ 5.9 triệu đồng. Ⓓ 6 triệu đồng.

Câu 4. Giá xăng E5RON 92 (đồng/lít) trong 6 tháng đầu năm ở nước ta năm 2022 sau 16 lần điều chỉnh như sau:

23876	24360	25322	26286	26834	29824	29192	28153
27317	27992	28434	29980	30657	31578	32375	32870

Tìm số trung vị trong mẫu số liệu thống kê trên

Ⓐ 29294,5. Ⓑ 28294,5. Ⓒ 28293,5. Ⓓ 29293,5.

Câu 5. Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu $5; 13; 5; 7; 10; 2; 3$ là

Ⓐ 10. Ⓑ 5. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

2 Tự luận

Bài 1. Điểm thi môn Toán (thang điểm 100, điểm được làm tròn đến 1) của 60 thí sinh được cho trong bảng sau:

Điểm	0 – 9	10 – 19	20 – 29	30 – 39	40 – 49
Số thí sinh	1	2	4	6	15
Điểm	50 – 59	60 – 69	70 – 79	80 – 89	90 – 99
Số thí sinh	12	10	6	3	1

a) Hiệu chỉnh để thu được mẫu số liệu ghép nhóm dạng Bảng 1.

b) Tìm các tứ phân vị và giải thích ý nghĩa của chúng.

Bài 2. Phỏng vấn một số học sinh lớp 11 về thời gian (giờ) ngủ của một buổi tối, thu được bảng số liệu ở bên.

Thời gian	Số học sinh nam	Số học sinh nữ
$[4;5)$	6	4
$[5;6)$	10	8
$[6;7)$	13	10
$[7;8)$	9	11
$[8;9)$	7	8

a) So sánh thời gian ngủ trung bình của các bạn học sinh nam và nữ.

b) Hãy cho biết 75% học sinh khối 11 ngủ ít nhất bao nhiêu giờ?

Bài 3. Mẫu số liệu dưới đây ghi lại tốc độ của 40 ô tô khi đi qua một trạm đo tốc độ (đơn vị: km/h):

48,5 43 50 55 45 60 53 55,5 44 65

51 62,5 41 44,5 57 57 68 49 46,5 53,5

61 49,5 54 62 59 56 47 50 60 61

49,5 52,5 57 47 60 55 45 47,5 48 61,5

a) Lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên có sáu nhóm ứng với sáu nửa khoảng:

$$[40;45), [45;50), [50;55), [55;60), [60;65), [65;70).$$

b) Xác định số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

c) Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

Bài 4. Mẫu số liệu sau ghi lại cân nặng của 30 bạn học sinh (đơn vị: kilôgam):

17 40 39 40,5 42 51 41,5 39 41 30

40 42 40,5 39,5 41 40,5 37 39,5 40 41

38,5 39,5 40 41 39 40,5 40 38,5 39,5 41,5

a) Lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên có 8 nhóm ứng với tám nửa khoảng:

$$[15;20), [20;25), [25;30), [30;35), [35;40), [40;45), [45;50), [50;55).$$

b) Xác định số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

c) Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

Bài 5. Bảng bên cho ta bảng tần số ghép nhóm số liệu thống kê chiều cao của 40 mẫu cây ở một vườn thực vật (đơn vị: centimét).

a) Xác định số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

Nhóm	**Tần số**
$[30;40)$	4
$[40;50)$	10
$[50;60)$	14
$[60;70)$	6
$[70;80)$	4
$[80;90)$	2
	$n=40$

Bài 6. Lương tháng của một số nhân viên văn phòng được ghi lại như sau (đơn vị: triệu đồng):

12,5	9,6	11,7	12,7	10,0	10,0	12,2	9,8	10,9	6,7	13,6	9,2
13,1	6,5	10,7	8,9	11,2	13,2	8,3	11,1	11,9	8,4	6,7	13,8

a) Tìm tứ phân vị của dãy số liệu trên.

b) Tổng hợp lại dãy số liệu trên dựa vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Lương tháng (triệu đồng)	$[6;8)$	$[8;10)$	$[10;12)$	$[12;14)$
Số nhân viên	?	?	?	?

c) Hãy ước lượng tứ phân vị của số liệu ở bảng tần số ghép nhóm trên.

Bài 7. Số điểm một cầu thủ bóng rổ ghi được trong 20 trận đấu được cho ở bảng sau:

25	23	21	13	8	14	15	18	22	11
24	12	14	14	18	6	8	25	10	11

a) Tìm tứ phân vị của dãy số liệu trên.

b) Tổng hợp lại dãy số liệu trên vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Điểm số	$[6;10]$	$[11;15]$	$[16;20]$	$[21;25]$
Số trận	?	?	?	?

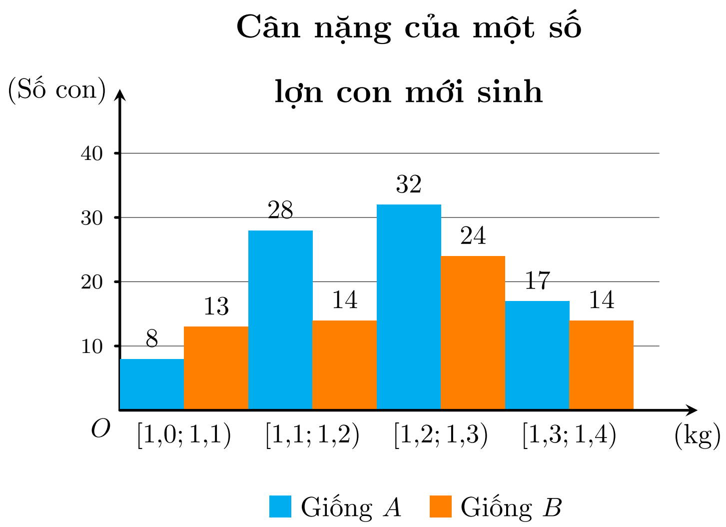
c) Hãy ước lượng tứ phân vị của số liệu từ bảng tần số ghép nhóm trên.

Bài 8. Kiểm tra điện lượng của một số viên pin tiểu do một hãng sản xuất thu được kết quả như sau:

Điện lượng (nghìn mAh)	$[0{,}9;0{,}95)$	$[0{,}95;1{,}0)$	$[1{,}0;1{,}05)$	$[1{,}05;1{,}1)$	$[1{,}1;1{,}15)$
Số viên pin	10	20	35	15	5

Hãy ước lượng số trung bình, mốt và tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Bài 9. Cân nặng của một số lợn con mới sinh thuộc hai giống A và B được cho ở biểu đồ dưới đây (đơn vị: kg).



1. Hãy so sánh cân nặng của lợn con mới sinh giống A và giống B theo số trung bình và trung vị.

2. Hãy ước lượng tứ phân vị thứ nhất và thứ ba của cân nặng lợn con mới sinh giống A và của cân nặng lợn con mới sinh giống B.

3 ÔN TẬP CHƯƠNG 5

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Khảo sát thời gian tập thể dục trong ngày của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

Thời gian (phút)	$[0;20)$	$[20;40)$	$[40;60)$	$[60;80)$	$[80;100)$
Số học sinh	5	9	12	10	6

Hãy trả lời các câu hỏi sau (từ **câu 1** đến **câu 5**):

Câu 1. Giá trị đại diện của nhóm $[20;40)$ là

Ⓐ 10. Ⓑ 20. Ⓒ 30. Ⓓ 40.

Câu 2. Mẫu số liệu ghép nhóm này có số mốt là

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Câu 3. Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu này là

Ⓐ $[20;40)$. Ⓑ $[40;60)$. Ⓒ $[60;80)$. Ⓓ $[80;100)$.

Câu 4. Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là

Ⓐ $[0;20)$. Ⓑ $[20;40)$. Ⓒ $[40;60)$. Ⓓ $[60;80)$.

Câu 5. Nhóm chứa trung vị là

Ⓐ $[0;20)$. Ⓑ $[20;40)$. Ⓒ $[40;60)$. Ⓓ $[60;80)$.

Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng):

Doanh thu	$[5;7)$	$[7;9)$	$[9;11)$	$[11;13)$	$[13;15)$
Số ngày	2	7	7	3	1

Hãy trả lời các câu hỏi sau (từ **câu 6** đến **câu 10**):

Câu 6. Số trung bình của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

Ⓐ $[7;9)$. Ⓑ $[9;11)$. Ⓒ $[11;13)$. Ⓓ $[13;15)$.

Câu 7. Trung vị của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

Ⓐ $[7;9)$. Ⓑ $[9;11)$. Ⓒ $[11;13)$. Ⓓ $[13;15)$.

Câu 8. Mốt của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

Ⓐ $[7;9)$. Ⓑ $[9;11)$. Ⓒ $[11;13)$. Ⓓ $[13;15)$.

Câu 9. Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu trên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau

Ⓐ 7. Ⓑ 7,6. Ⓒ 8. Ⓓ 8,6.

Câu 10. Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu trên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau

Ⓐ 10. Ⓑ 11. Ⓒ 12. Ⓓ 13.

Người ta tiến hành phỏng vấn 40 người về một mẫu áo sơ mi mới. Người điều tra yêu cầu cho điểm mẫu áo đó theo thang điểm là 100. Kết quả được trình bày trong *Bảng dưới.*

Nhóm	[50;60)	[60;70)	[70;80)	[80;90)	[90;100)
Tần số	4	5	23	6	2

Hãy trả lời các câu hỏi sau (từ **câu 11** đến **câu 13**):

Câu 11. Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên gần nhất với giá trị:

Ⓐ 74. Ⓑ 75. Ⓒ 76. Ⓓ 77.

Câu 12. Tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hàng đơn vị là)

Ⓐ $Q_1 \approx 71; Q_2 \approx 76; Q_3 \approx 78$. Ⓑ $Q_1 \approx 71; Q_2 \approx 75; Q_3 \approx 78$.
Ⓒ $Q_1 \approx 70; Q_2 \approx 76; Q_3 \approx 79$. Ⓓ $Q_1 \approx 70; Q_2 \approx 75; Q_3 \approx 79$.

Câu 13. Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến kết quả hàng đơn vị) là:

Ⓐ 73. Ⓑ 74. Ⓒ 75. Ⓓ 76.

Câu 14. Dưới đây là một mẫu số liệu cho ở dạng bảng tần số ghép nhóm:

Nhóm ghép	[0; 50)	[50; 100)	[100; 150)	[150; 200)	[200; 250)
Tần số	6	8	7	6	2

Trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là:

Ⓐ $\bar{x} \approx 112{,}8$. Ⓑ $\bar{x} \approx 107{,}8$. Ⓒ $\bar{x} \approx 102{,}5$. Ⓓ $\bar{x} \approx 85{,}5$.

Câu 15. Dưới đây là một mẫu số liệu cho ở dạng bảng tần số ghép nhóm:

Nhóm ghép	Tần số	Nhóm ghép	Tần số
[62,5; 67,5)	4	[82,5; 87,5)	22
[67,5; 72,5)	7	[87,5; 92,5)	5
[72,5; 77,5)	10	[92,5; 97,5)	10
[77,5; 82,5)	26	[97,5; 102,5)	16

Trung vị M_e của mẫu số liệu là một số thoả mãn điều kiện:

Ⓐ $77{,}5 \leq M_e < 82{,}5$.
Ⓑ $82{,}5 \leq M_e < 87{,}5$.
Ⓒ $87{,}5 \leq M_e < 92{,}5$.
Ⓓ $92{,}5 \leq M_e < 97{,}5$.

Câu 16. Xét mẫu số liệu về lợi nhuận hàng ngày của một cửa hàng trong quãng thời gian 60 ngày:

Lợi nhuận (triệu đồng)	Tần số	Tần số tích luỹ
[5; 10)	5	5
[10; 15)	8	13
[15; 20)	20	33
[20; 25)	18	51
[25; 30)	9	60

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ Q_3 thuộc nhóm [20; 25).
Ⓑ Nhóm chứa trung vị là nhóm [15; 20).
Ⓒ Q_1, trung vị đều thuộc nhóm [10; 15).
Ⓓ Q_1, Q_2 đều thuộc nhóm [15; 20).

Câu 17. Để khảo sát kết quả thi tuyển sinh môn Toán trong kì thi tuyển sinh đại học năm vừa qua của trường A, người điều tra chọn một mẫu gồm 100 học sinh tham gia kì thi tuyển sinh đó. Điểm môn Toán (thang điểm 10) của các học sinh này được cho ở bảng phân bố tần số sau đây. Mốt của bảng số liệu là

Điểm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2	$N = 100$

Ⓐ 7. Ⓑ 6. Ⓒ 100. Ⓓ 10.

2 Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Điểm thi giữa học kì I môn Toán của tất cả các học sinh lớp 11B được cho bởi mẫu số liệu ghép nhóm sau đây:

Điểm	[3;4)	[4;5)	[5;6)	[6;7)	[7;8)	[8;9)	[9;10)
Số học sinh	2	2	7	11	14	5	3

Phát biểu	Đ	S
A Cỡ mẫu bằng 44.		
B Giá trị đại diện của nhóm $[8;9)$ là 8.		
C Điểm trung bình của học sinh lớp này bằng $6,90$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).		
D Mốt của mẫu số liệu trên bằng $7,25$.		

Câu 2. Một cuộc khảo sát được thực hiện để điều tra số giờ sử dụng điện thoại và tivi của 40 học sinh lớp 11A trong một tuần. Thu được kết quả như sau:

Thời gian (giờ)	$[0;2)$	$[2;4)$	$[4;6)$	$[6;8)$
Số học sinh	6	18	12	4

Phát biểu	Đ	S
A Nhóm chứa mốt là nhóm $[2;4)$.		
B Số giờ trung bình sử dụng điện thoại và tivi của học sinh là $3,7$ giờ.		
C Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm này là $M_e = 18$.		
D Số học sinh sử dụng điện thoại và tivi hàng tuần khoảng $3,75$ (giờ) là nhiều nhất.		

Câu 3. Bảng thống kê sau cho biết điểm chuẩn của các trường công lập thuộc thành phố Hà Nội trong kì thi tuyển sinh vào 10 năm 2024:

Điểm	$[15;20)$	$[20;25)$	$[25;30)$	$[30;35)$	$[35;40)$	$[40;45)$
Số trường	2	10	28	27	38	12

Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau (Kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm):

Phát biểu	Đ	S
A Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng $33,25$.		
B Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng $36,49$.		
C Số trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng $33,43$.		
D Ngưỡng điểm để đưa ra danh sách 29 trường có điểm chuẩn cao nhất năm 2024 là $37,00$.		

Câu 4. Người ta đo đường kính của các cây gỗ được trồng sau 15 năm (đơn vị: centimét), họ thu được bảng số liệu sau:

Đường kính (cm)	$[20;30)$	$[30;40)$	$[40;50)$	$[50;60)$	$[60;70)$
Số cây	4	13	26	14	5

Các mệnh đề sau đúng hay sai? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Phát biểu	Đ	S
A Cỡ mẫu số liệu là $n = 62$.		
B Giá trị trung bình của mẫu số liệu là $\bar{x} = 45,48$.		
C Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là $Q_3 \approx 52,05$.		
D Nhóm $[40;50)$ chứa mốt của mẫu số liệu và $M_0 = 46,52$.		

Câu 5. Cô Lan tìm hiểu hàm lượng đạm (protein) trong một số loại thực phẩm phổ biến (trong đó có thịt bò) và thống kê dữ liệu trong bảng sau:

Hàm lượng đạm (g/100gam)	$[0;6)$	$[6;12)$	$[12;18)$	$[18;24)$	$[24;30)$	$[30;36)$
Số loại thực phẩm	9	5	3	4	6	3

Biết trong 100g thịt bò có khoảng 26,0 g protein.

Phát biểu	Đ	S
A Có tất cả 30 loại thực phẩm được cô Lan tìm hiểu và thống kê trong bảng.		
B Hàm lượng protein trung bình của các loại thực phẩm trên là $15,4$ g/100gam.		
C Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu trên là $24,25$ g/100gam.		

D Thịt bò thuộc nhóm 25% thực phẩm giàu protein nhất trong các loại thực phẩm cô Lan đã tìm hiểu.		

Câu 6. Một thư viện đã ghi lại số giờ các sinh viên mượn sách đọc tại thư viện trong một tháng và thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (giờ)	$[1;5)$	$[5;9)$	$[9;13)$	$[13;17)$	$[17;21)$	$[21;25)$
Số sinh viên	10	14	31	2	5	23

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
A Thời gian mượn sách đọc tại thư viện trung bình của sinh viên trong mẫu số liệu ghép nhóm trên là $13,21$ giờ.		
B Cỡ mẫu của mẫu số liệu ghép nhóm trên là 85.		
C Độ dài của mỗi nhóm trong mẫu số liệu ghép nhóm trên là 3.		
D Thời gian sinh viên mượn sách đọc tại thư viện trong mẫu số liệu ghép nhóm trên nhiều nhất là $9,48$ giờ.		

Câu 7. Thống kê điểm giữa kì I môn Toán của 82 học sinh khối 11 tại một trường THPT được bảng số liệu ghép nhóm sau:

Điểm	$[6;5;7)$	$[7;7,5)$	$[7,5;8)$	$[8;8,5)$	$[8,5;9)$	$[9;9,5)$	$[9,5;10)$
Số học sinh	8	10	16	24	13	7	4

Phát biểu	Đ	S
A Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu trên là $Q_1 = 7,8$.		
B Trung vị của mẫu số liệu trên thuộc nhóm $[8;5;9)$.		
C Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu trên là nhóm $[8;8,5)$.		
D Điểm trung bình giữa kì I môn Toán của 82 học sinh trên nằm trong khoảng $(8;8,5)$.		

Câu 8. Khi đo chiều cao của một số học sinh lớp 10 tại một trường THPT ta được kết quả qua bảng ghép nhóm sau:

Chiều cao (cm)	$[150;152)$	$[152;154)$	$[154;156)$	$[156;158)$	$[158;160)$	$[160;162)$
Số học sinh	5	18	40	26	8	3

Phát biểu	Đ	S
(A) Độ dài mỗi nhóm của mẫu số liệu bằng 6.		
(B) Mẫu số liệu có 6 nhóm.		
(C) Chiều cao trung bình của các học sinh được khảo sát đạt xấp xỉ $155,5$ cm.		
(D) Số học sinh được khảo sát có chiều cao xấp xỉ $155,2$ cm là nhiều nhất.		

3 Tự luận

Bài 1. Cơ cấu dân số Việt Nam năm 2020 theo độ tuổi được cho trong bảng sau

Độ tuổi	Dưới 5 tuổi	5 – 14	15 – 24	25 – 64	Trên 65
Số người (triệu)	7,89	14,68	13,32	53,78	7,66

Chọn 80 là giá trị đại diện cho nhóm trên 65 tuổi. Tính tuổi trung bình của người Việt Nam năm 2020.

Bài 2. Người ta ghi lại tuổi thọ của một số con ong cho kết quả như sau

Tuổi thọ (ngày)	$[0;20)$	$[20;40)$	$[40;60)$	$[60;80)$	$[80;100)$
Số lượng	5	12	23	31	29

Tìm mốt của mẫu số liệu. Giải thích ý nghĩa của giá trị nhận được.

Bài 3. Để kiểm tra thời gian sử dụng pin của một chiếc điện thoại mới, chị An thống kê thời gian sử dụng điện thoại của mình từ lúc sạc đầy pin cho đến khi hết pin ở bảng sau:

Thời gian sử dụng (giờ)	$[7;9)$	$[9;11)$	$[11;13)$	$[13,15)$	$[15;17)$
Số lần	2	5	7	6	3

a) Hãy ước lượng thời gian sử dụng trung bình từ lúc chị An sạc đầy pin điện thoại cho tới khi hết pin.

b) Chị An cho rằng có khoảng 25% số lần sạc điện thoại chỉ dùng được 10 giờ. Nhận định của chị An có hợp lí không?

Bài 4. Một bảng xếp hạng đã tính điểm chuẩn hoá cho chỉ số nghiên cứu của một số trường đại học ở Việt Nam và thu được kết quả như sau

Điểm	Dưới 20	$[20; 30)$	$[30; 40)$	$[40; 60)$	$[60; 80)$	$[80; 100)$
Số lượng	4	19	6	2	3	1

Xác định điểm ngưỡng để đưa ra danh sách 25% trường đại học có chỉ số nghiên cứu tốt nhất Việt Nam

Bài 5. Thống kê điểm trung bình môn Toán của một số học sinh lớp 11cho ở bảng sau:

Khoảng điểm	$[6{,}5; 7)$	$[7; 7{,}5)$	$[7{,}5; 8)$	$[8; 8{,}5)$	$[8{,}5; 9)$	$[9; 9{,}5)$	$[9{,}5; 10)$
Tần số	8	10	16	24	13	7	4

Hãy ước lượng số trung bình, tứ phân vị và mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Bài 6. Bảng sau thống kê số ca nhiễm mới SARS-CoV-2 mỗi ngày trong tháng 12/2021 tại Việt Nam.

Ngày	Số ca	Ngày	Số ca	Ngày	Số ca	Ngày	Số ca
1	15 139	9	15 965	17	15 685	25	16 046
2	14 295	10	15 474	18	16 363	26	15 667
3	14 254	11	16 830	19	16 586	27	15 310
4	14 598	12	15 264	20	15 420	28	14 866
5	14 927	13	16 035	21	16 806	29	14 299
6	15 215	14	15 871	22	17 044	30	20 454
7	14 433	15	16 192	23	16 860	31	17 004
8	15 223	16	15 720	24	16 633		

a) Xác định số trung bình và tứ phân vị của mẫu số liệu trên. Mẫu số liệu có bao nhiêu có bao nhiêu giá trị ngoại lệ?

b) Hoàn thiện bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Số ca (nghìn)	$[14; 15{,}5)$	$[15{,}5; 17)$	$[17; 18{,}5)$	$[18{,}5; 20)$	$[20; 21{,}5)$
Số ngày	?	?	?	?	?

c) Hãy ước lượng số trung bình và tứ phân vị của mẫu số liệu ở bảng trên.

Bài 7. Tổng số lượng mưa trong tháng 8 đo được tại một trạm quan trắc đặt tại Vũng Tàu từ năm 2002 đến năm 2020 được ghi lại như dưới đây (đơn vị: mm)

121,8	158,3	334,9	200,9	165,6	161,5	194,3	220,7	189,8	243,2
165,9	165,9	134	173	169,	189,	254	168	255	

(*Nguồn*: Tổng cục Thống kê)

a) Xác định số trung bình, tứ phân vị và mốt của mẫu số liệu trên.

b) Hoàn thiện bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Tổng lượng mưa trong tháng 8 (mm)	$[120;175)$	$[175;230)$	$[230;285)$	$[285;340)$
Số năm	?	?	?	?

c) Hãy ước lượng số trung bình, tứ phân vị và mốt của mẫu số liệu ở bảng tần số ghép nhóm trên.

Bài 8. Mẫu số liệu dưới đây ghi lại độ dài quãng đường di chuyển trong một tuần (đơn vị: kilômét) của 40 chiếc ô tô:

100	105	115	116	130	135	138	132	135	120
125	128	120	124	140	140	146	145	142	142
145	148	150	150	159	155	151	156	155	151
154	152	153	160	162	175	176	165	188	198

a) Lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy với năm nhóm ứng với năm nửa khoảng:

$$[100;120), [120;140), [140;160), [160;180), [180;200).$$

b) Xác định số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

c) Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?