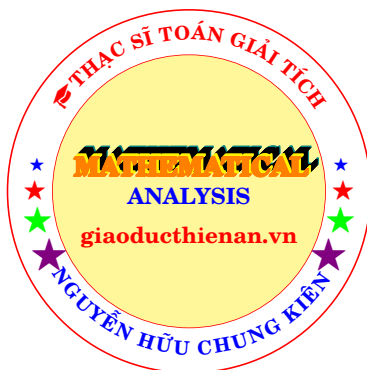


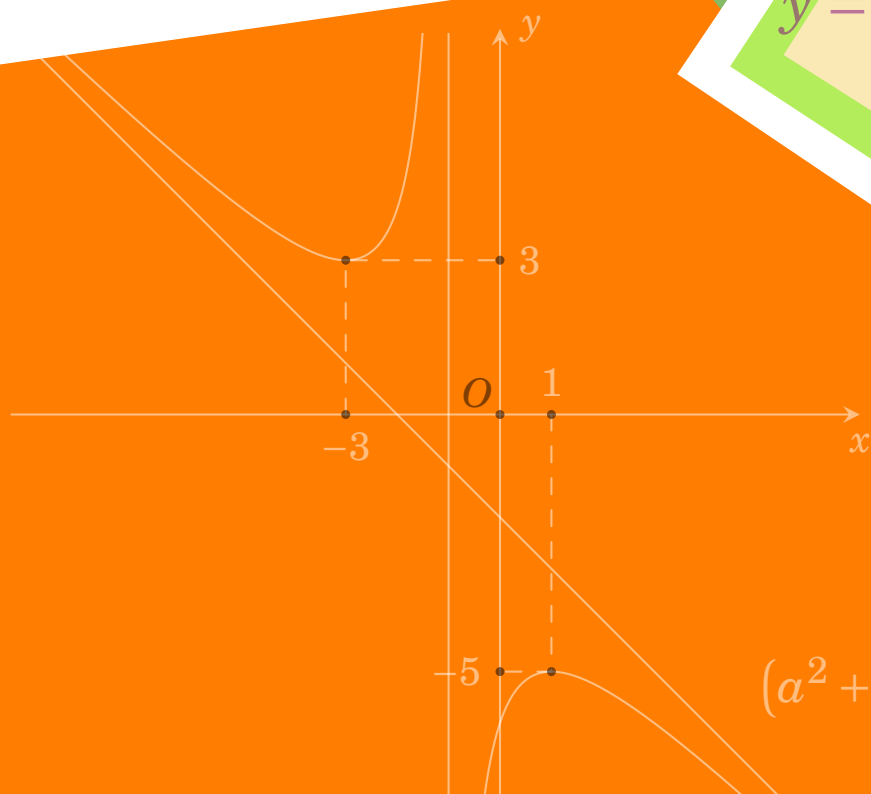


# TÀI LIỆU HỌC TẬP CHUẨN CẤU TRÚC MỚI TOÁN 12

HỌC KÌ 1 – NĂM HỌC 2025 – 2026

- Tóm tắt chi tiết lý thuyết theo bài
- Phân chia dạng toán theo bài
- Bài tập từng bài chuẩn cấu trúc mới của BGD
- Đề ôn tập từng chương

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$$



$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$$



$$(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) \geq (a \cdot c + b \cdot d)^2$$

TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI ĐỊA



# Mục lục

## PHẦN I MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH

|                                                                                                                           |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Chương 1. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ</b>                                                                      | <b>7</b>   |
| <b>Bài 1. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số</b>                                                                        | <b>7</b>   |
| (A) Tóm tắt lý thuyết.....                                                                                                | 7          |
| (B) Các dạng toán thường gặp.....                                                                                         | 8          |
| Dạng 1. Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi công thức.....                                                               | 8          |
| Dạng 2. Xét tính đơn điệu dựa vào bảng biến thiên, đồ thị.....                                                            | 12         |
| Dạng 3. Tìm điều kiện của tham số để hàm số đồng biến, nghịch biến trên một khoảng.....                                   | 20         |
| Dạng 4. Ứng dụng sự biến thiên của hàm số để giải phương trình, bất phương trình.....                                     | 24         |
| Dạng 5. Toán thực tế sử dụng tính đồng biến, nghịch biến.....                                                             | 29         |
| Dạng 6. Tính đơn điệu của hàm hợp.....                                                                                    | 37         |
| <b>Bài 2. Cực trị của hàm số</b>                                                                                          | <b>47</b>  |
| (A) Tóm tắt lý thuyết.....                                                                                                | 47         |
| (B) Các dạng toán thường gặp.....                                                                                         | 48         |
| Dạng 1. Tìm cực trị của hàm số cho bởi công thức.....                                                                     | 48         |
| Dạng 2. Tìm cực trị hàm số dựa vào bảng biến thiên hoặc đồ thị.....                                                       | 53         |
| Dạng 3. Tìm tham số để hàm số đạt cực trị tại một điểm.....                                                               | 61         |
| Dạng 4. Tìm tham số để hàm số bậc ba có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước.....                                         | 65         |
| Dạng 5. Tìm tham số để hàm trùng phương có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước.....                                      | 72         |
| Dạng 6. Tìm điều kiện của tham số để hàm bậc hai trên bậc nhất có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước.....               | 77         |
| Dạng 7. Cực trị một số hàm số khác.....                                                                                   | 83         |
| Dạng 8. Xét tính đơn điệu và cực trị của hàm số khi biết hàm số hoặc bảng biến thiên hoặc đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ..... | 89         |
| Dạng 9. Cực trị của hàm hợp $y = f(u)$ .....                                                                              | 98         |
| Dạng 10. Ứng dụng cực trị trong thực tế.....                                                                              | 118        |
| <b>Bài 3. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số</b>                                                               | <b>126</b> |

|               |                                                                                                                                          |            |
|---------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| (A)           | Tóm tắt lý thuyết.....                                                                                                                   | 126        |
| (B)           | Các dạng toán thường gặp.....                                                                                                            | 126        |
|               | Dạng 1. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn.....                                                                   | 126        |
|               | Dạng 2. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng.....                                                                   | 131        |
|               | Dạng 3. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất dựa vào đồ thị, bảng biến thiên... ..                                                         | 135        |
|               | Dạng 4. Ứng dụng GTLN, GTNN tìm điều kiện của tham số $m$ để phương trình có nghiệm.....                                                 | 143        |
|               | Dạng 5. Ứng dụng GTLN, GTNN tìm điều kiện của tham số $m$ để bất phương trình có nghiệm đúng với mọi $x$ thuộc $(a; b)$ , $[a; b]$ ..... | 149        |
|               | Dạng 6. Ứng dụng GTLN, GTNN để tìm điều kiện bất phương trình có nghiệm trên một khoảng, đoạn.....                                       | 155        |
|               | Dạng 7. Tìm GTLN, GTNN của hàm hợp, giá trị tuyệt đối và một số hàm số khác.....                                                         | 161        |
|               | Dạng 8. Toán thực tế ứng dụng khái niệm GTLN, GTNN của hàm số.....                                                                       | 178        |
| <b>Bài 4.</b> | <b>Đường tiệm cận của đồ thị hàm số.....</b>                                                                                             | <b>191</b> |
| (A)           | Tóm tắt lý thuyết.....                                                                                                                   | 191        |
| (B)           | Các dạng toán thường gặp.....                                                                                                            | 192        |
|               | Dạng 1. Tìm tiệm cận của đồ thị hàm phân thức, hàm căn thức.....                                                                         | 192        |
|               | Dạng 2. Tìm tiệm cận của đồ thị hàm mũ, hàm logarit.....                                                                                 | 197        |
|               | Dạng 3. Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số dựa vào BBT hoặc đồ thị, tiệm cận hàm ẩn.....                                                     | 202        |
|               | Dạng 4. Tiệm cận của đồ thị hàm số chứa tham số.....                                                                                     | 224        |
|               | Dạng 5. Bài toán tiệm cận liên quan đến tính toán tọa độ giao điểm.....                                                                  | 234        |
|               | Dạng 6. Ứng dụng khái niệm tiệm cận vào bài toán thực tế.....                                                                            | 238        |
| <b>Bài 5.</b> | <b>Đồ thị của hàm số.....</b>                                                                                                            | <b>242</b> |
| (A)           | Tóm tắt lý thuyết.....                                                                                                                   | 242        |
| (B)           | Các dạng toán thường gặp.....                                                                                                            | 242        |
|               | Dạng 1. Đồ thị hàm số bậc ba.....                                                                                                        | 242        |
|               | Dạng 2. Đồ thị hàm bậc nhất trên bậc nhất.....                                                                                           | 252        |
|               | Dạng 3. Đồ thị hàm số bậc hai trên bậc nhất.....                                                                                         | 266        |
|               | Dạng 4. Biến đổi đồ thị, đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối.....                                                                   | 271        |
|               | Dạng 5. Tương giao khi đề cho bảng biến thiên hoặc đồ thị.....                                                                           | 288        |
|               | Dạng 6. Tương giao của hai đồ thị (liên quan đến tọa độ giao điểm).....                                                                  | 297        |
|               | Dạng 7. Đồ thị của đạo hàm.....                                                                                                          | 302        |

|                                                         |            |
|---------------------------------------------------------|------------|
| 📁 Dạng 8. Tiếp tuyến của đồ thị.....                    | 317        |
| 📁 Dạng 9. Điểm đặc biệt của đồ thị.....                 | 321        |
| 📁 Dạng 10. Bài toán thực tế ứng dụng đồ thị hàm số..... | 326        |
| <b>Bài 6. Đề ôn tập cuối chương I</b>                   | <b>337</b> |
| (A) Đề ôn tập số 1.....                                 | 337        |
| (B) Đề ôn tập số 2.....                                 | 341        |
| (C) Đề ôn tập số 3.....                                 | 344        |
| (D) Đề ôn tập số 4.....                                 | 350        |
| (E) Đề ôn tập số 5.....                                 | 354        |

## PHẦN II HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG

### Chương 2. VECTƠ VÀ HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN 361

|                                                                                          |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Bài 1. Vectơ và các phép toán trong không gian</b>                                    | <b>361</b> |
| (A) Tóm tắt lý thuyết.....                                                               | 361        |
| (B) Các dạng toán thường gặp.....                                                        | 363        |
| 📁 Dạng 1. Câu hỏi lý thuyết.....                                                         | 363        |
| 📁 Dạng 2. Đẳng thức vectơ.....                                                           | 368        |
| 📁 Dạng 3. Phân tích (biểu diễn) vectơ theo các vectơ cho trước, ba vectơ đồng phẳng..... | 373        |
| 📁 Dạng 4. Góc giữa hai vectơ.....                                                        | 384        |
| 📁 Dạng 5. Tích vô hướng và ứng dụng.....                                                 | 391        |
| <b>Bài 2. Tọa độ của vectơ trong không gian</b>                                          | <b>397</b> |
| (A) Tóm tắt lý thuyết.....                                                               | 397        |
| (B) Các dạng toán thường gặp.....                                                        | 398        |
| 📁 Dạng 1. Tìm tọa độ vectơ trong không gian Oxyz.....                                    | 398        |
| 📁 Dạng 2. Tìm tọa độ hình chiếu của điểm trên trục tọa độ, các mặt phẳng tọa độ.....     | 403        |
| 📁 Dạng 3. Tọa độ các điểm, đỉnh đặc biệt của tam giác, tứ giác, lăng trụ ....            | 409        |
| <b>Bài 3. Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ</b>                                   | <b>417</b> |
| (A) Tóm tắt lý thuyết.....                                                               | 417        |
| (B) Các dạng toán thường gặp.....                                                        | 418        |
| 📁 Dạng 1. Tìm vectơ tổng, hiệu, tích với một số.....                                     | 418        |
| 📁 Dạng 2. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng và áp dụng tính góc, độ dài....             | 422        |

|                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ▢ Dạng 3. Tìm tọa độ các điểm đặc biệt trong tam giác, tứ giác, hình hộp.....             | 426 |
| ▢ Dạng 4. Vận dụng tọa độ của vectơ trong một số bài toán có liên quan đến thực tiễn..... | 437 |

|                                        |            |
|----------------------------------------|------------|
| <b>Bài 4. Đề ôn tập cuối chương II</b> | <b>447</b> |
| (A) Đề ôn tập số 1.....                | 447        |
| (B) Đề ôn tập số 2.....                | 449        |
| (C) Đề ôn tập số 3.....                | 452        |
| (D) Đề ôn tập số 4.....                | 454        |
| (E) Đề ôn tập số 5.....                | 457        |

### PHẦN III THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

#### Chương 3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU GHEP NHÓM **463**

|                                                                              |            |
|------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Bài 1. Khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm</b> | <b>463</b> |
| (A) Tóm tắt lý thuyết.....                                                   | 463        |
| (B) Các dạng toán thường gặp.....                                            | 464        |
| ▢ Dạng 1. Khoảng biến thiên.....                                             | 464        |
| ▢ Dạng 2. Khoảng tứ phân vị trong mẫu số liệu ghép nhóm.....                 | 473        |
| <b>Bài 2. Phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm</b>            | <b>481</b> |
| (A) Tóm tắt lý thuyết.....                                                   | 481        |
| (B) Các dạng toán thường gặp.....                                            | 482        |
| ▢ Dạng 1. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu.....              | 482        |
| ▢ Dạng 2. Giá trị ngoại lệ.....                                              | 493        |
| <b>Bài 3. Đề ôn tập cuối chương III</b>                                      | <b>497</b> |
| (A) Đề ôn tập số 1.....                                                      | 497        |
| (B) Đề ôn tập số 2.....                                                      | 502        |
| (C) Đề ôn tập số 3.....                                                      | 506        |
| (D) Đề ôn tập số 4.....                                                      | 512        |
| (E) Đề ôn tập số 5.....                                                      | 519        |

PHẦN

# MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH

TRUNG TÂM THIÊN AN – 134 THỐNG NHẤT, TÂN THÀNH, TÂN PHÚ, TP HCM

ThS: NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN



12

## CÁC DẠNG BÀI TẬP TOÁN 12

Chương 1

## ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

THẦY KIÊN TOÁN: ————— DẠY THẬT - HỌC THẬT - GIÁ TRỊ THẬT —————

K12 – CHƯƠNG 1

## §1. SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

## A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1

## Nhắc lại về tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

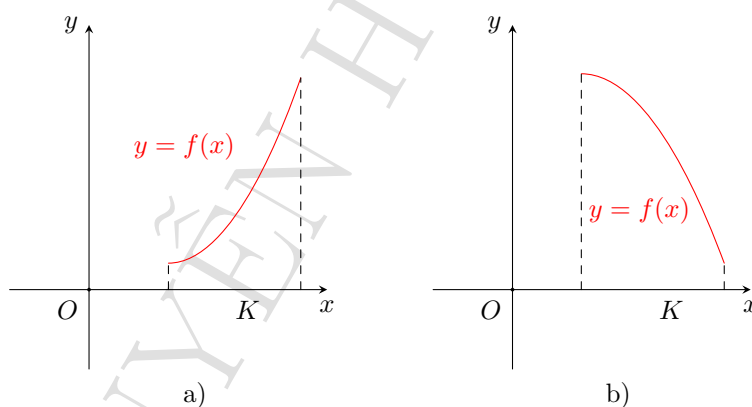
Kí hiệu  $K$  là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng. Giả sử hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $K$ .

Hàm số  $y = f(x)$  gọi là *đồng biến (tăng)* trên  $K$  nếu với mọi  $x_1, x_2$  thuộc  $K$  mà  $x_1 < x_2$  thì  $f(x_1) < f(x_2)$ .

Hàm số  $y = f(x)$  gọi là *nghịch biến (giảm)* trên  $K$  nếu với mọi  $x_1, x_2$  thuộc  $K$  mà  $x_1 < x_2$  thì  $f(x_1) > f(x_2)$ .

Nếu hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên  $K$  thì đồ thị của nó đi lên từ trái sang phải (Hình 1a).

Nếu hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên  $K$  thì đồ thị của nó đi xuống từ trái sang phải (Hình 1b).



Hình 1

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên  $K$  được gọi chung là *đơn điệu* trên  $K$ .

2

## Tính đơn điệu của hàm số

**Định lý 1** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $K$ .

Nếu  $f'(x) > 0$  với mọi  $x$  thuộc  $K$  thì hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên  $K$ .

Nếu  $f'(x) < 0$  với mọi  $x$  thuộc  $K$  thì hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên  $K$ .

**⚡ NHẬN XÉT.** Khi xét tính đơn điệu của hàm số mà chưa cho khoảng  $K$ , ta hiểu xét tính đơn điệu của hàm số đó trên tập xác định của nó.

Từ kết quả trên, để xét tính đơn điệu của hàm số  $y = f(x)$ , ta thực hiện các bước sau:

*Bước 1.* Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số.

**Bước 2.** Tính đạo hàm  $f'(x)$  của hàm số. Tìm các điểm  $x_1; x_2; \dots; x_n$  thuộc  $\mathcal{D}$  mà tại đó đạo hàm  $f'(x)$  bằng 0 hoặc không tồn tại.

**Bước 3.** Sắp xếp các điểm  $x_1; x_2; \dots; x_n$  theo thứ tự tăng dần, xét dấu  $f'(x)$  và lập bảng biến thiên.

**Bước 4.** Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

### Định lý 2

- a) Nếu hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $K$ ,  $f'(x) \geq 0$  với mọi  $x \in K$  và  $f'(x) = 0$  chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến trên  $K$ .
- b) Nếu hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $K$ ,  $f'(x) \leq 0$  với mọi  $x \in K$  và  $f'(x) = 0$  chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số nghịch biến trên  $K$ .

## B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

### DẠNG 1

#### Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi công thức

**Bước 1.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số.

**Bước 2.** Tính đạo hàm  $f'(x)$  của hàm số. Tìm các điểm  $x_1; x_2; \dots; x_n$  thuộc  $\mathcal{D}$  mà tại đó đạo hàm  $f'(x)$  bằng 0 hoặc không tồn tại.

**Bước 3.** Sắp xếp các điểm  $x_1; x_2; \dots; x_n$  theo thứ tự tăng dần, xét dấu  $f'(x)$  và lập bảng biến thiên.

**Bước 4.** Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

### 1 Ví dụ mẫu

**Ví dụ 1 (Mức độ 2).** Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số  $y = -2x^2 + 4x + 3$ .

**Ví dụ 2 (Mức độ 2).** Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ .

**Ví dụ 3 (Mức độ 2).** Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số  $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 5$ .

**Ví dụ 4 (Mức độ 2).** Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số  $y = \frac{x^2 + 4}{x}$ .

**Ví dụ 5 (Mức độ 2).** Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số  $y = -x^4 + 4x^2 - 3$ .

**Ví dụ 6 (Mức độ 2).** Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số  $y = \sqrt{x^2 - 1}$ .

**Ví dụ 7 (Mức độ 2).** Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số  $y = \ln(x + \sqrt{9 + x^2})$ .

**Ví dụ 8 (Mức độ 2).** Chứng minh rằng hàm số  $g(x) = \frac{x}{x-1}$  nghịch biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .

**Ví dụ 9 (Mức độ 2).** Chứng minh rằng hàm số  $f(x) = 3x - \sin x$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

**Ví dụ 10 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{x-1}{x-4}$ . Mỗi khẳng định sau đúng hay sai?

| Phát biểu                                                                                     | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $y' = \frac{-2}{(x-4)^2}$ .                                                                |   |   |
| b) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$ .                                 |   |   |
| c) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm của đồ thị với trục hoành là $x + 3y - 1 = 0$ . |   |   |
| d) Hàm số $y = f(\sin x)$ đồng biến trên khoảng $(\frac{\pi}{2}; \pi)$ .                      |   |   |

**Ví dụ 11 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $y = xe^x$ . Mỗi khẳng định sau đúng hay sai?

| Phát biểu                                         | Đ | S |
|---------------------------------------------------|---|---|
| a) $y' = e^x$ .                                   |   |   |
| b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ . |   |   |
| c) $y + y' = y''$ .                               |   |   |
| d) $y(2^{2023}) < y(2^{2024})$ .                  |   |   |

**Ví dụ 12 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (1 - x)x$ . Hỏi khoảng nghịch biến của hàm số  $y = f(3 - 2x)$  có độ dài lớn nhất bằng bao nhiêu? KQ:

## 2 Bài tập tự luận

**Bài 1.** Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số  $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$ .

**Bài 2.** Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số  $y = x^4 - 6x^2 + 8x + 1$ .

**Bài 3.** Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số  $y = \frac{3 - 2x}{x + 7}$ .

**Bài 4.** Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ .

**Bài 5.** Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số  $y = x + \sqrt{16 - x^2}$ .

## 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .
- B. Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$  và nghịch biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$  và đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .

**Câu 2.** Các khoảng đồng biến của hàm số  $y = x^4 - 8x^2 - 4$  là

- A.  $(-\infty; -2)$  và  $(0; 2)$ .
- B.  $(-2; 0)$  và  $(0; +\infty)$ .
- C.  $(-2; 0)$  và  $(2; +\infty)$ .
- D.  $(-\infty; -2)$  và  $(2; +\infty)$ .

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = \frac{3 - x}{x + 1}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$ .
- B. Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$ .
- D. Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = x + \frac{1}{x}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$ .
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-1; 1)$ .
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-1; +\infty)$ .
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-1; 0)$ .

**Câu 5.** Cho hàm số  $y = x - \ln x$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .
- B. Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$ .

**Câu 6.** Hàm số nào sau đây đồng biến trên  $\mathbb{R}$ ?

- A.  $y = x^3 + x$ . B.  $y = \frac{x-1}{x+2}$ . C.  $y = x^4 + x^2 + 1$ . D.  $y = x^3 + 3x^2 + 1$ .

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = f(x) = \sqrt{3x - x^2}$ . Hàm số đồng biến trên khoảng nào?

- A.  $(0; \frac{3}{2})$ . B.  $(0; 3)$ . C.  $(\frac{3}{2}; 3)$ . D.  $(-\infty; \frac{3}{2})$ .

**Câu 8.** Hàm số nào sau đây đồng biến trên  $\mathbb{R}$ ?

- A.  $y = 2x - \cos 2x - 5$ . B.  $y = \frac{2x-1}{x+1}$ .  
C.  $y = x^2 - 2x$ . D.  $y = \sqrt{x}$ .

**Câu 9.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x), \forall x \in \mathbb{R}$ . Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(1; 2)$ . B.  $(-\infty; -1)$ . C.  $(-1; 1)$ . D.  $(2; +\infty)$ .

**Câu 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2(x^2 - 1), \forall x \in \mathbb{R}$ . Hàm số  $y = 2f(-x)$  đồng biến trên khoảng

- A.  $(2; +\infty)$ . B.  $(-\infty; -1)$ . C.  $(0; 2)$ . D.  $(-1; 1)$ .

#### 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 11.** Cho hàm số  $y = \ln(1+x)$ . Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau

| Phát biểu                                                                                                              | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ .                                                                            |   |   |
| b) Hàm số đồng biến trên tập xác định.                                                                                 |   |   |
| c) Tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ hai cắt hai trục toạ độ tại hai điểm phân biệt. |   |   |
| d) $\frac{1}{y'(0)} + \frac{1}{y'(1)} + \frac{1}{y'(2)} + \dots + \frac{1}{y'(2024)} = 2025 \cdot 2026$ .              |   |   |

**Câu 12.** Cho hàm số  $y = x + \sqrt{4-x^2}$ . Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau

| Phát biểu                                                       | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số có tập xác định là $\mathcal{D} = [-2; 2]$ .          |   |   |
| b) $y' = 1 + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ .                          |   |   |
| c) Khoảng đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$ .                     |   |   |
| d) Phương trình $x + \sqrt{4-x^2} = 3$ có hai nghiệm phân biệt. |   |   |

**Câu 13.** Cho hàm số  $y = \frac{-x^2 + x - 1}{x-1}$ . Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau

| Phát biểu                                                 | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ . |   |   |
| b) $y' = \frac{-x^2 + 2x}{(x-1)^2}$ .                     |   |   |

| Phát biểu                                  | Đ | S |
|--------------------------------------------|---|---|
| c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; 3)$ . |   |   |
| d) $f(-5^{2023}) < f(5^{2024})$ .          |   |   |

**Câu 14.** Cho hàm số  $f(x) = x - e^x$ . Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau

| Phát biểu                                             | Đ | S |
|-------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tập xác định $\mathcal{D} = (0; +\infty)$ .        |   |   |
| b) $f'(x) = 1 - e^x$ .                                |   |   |
| c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ .      |   |   |
| d) Với hai số $a > b > 1$ thì $f(\ln a) < f(\ln b)$ . |   |   |

**Câu 15.** Cho hàm số  $f(x) = x^3 - 3x$ . Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau

| Phát biểu                                                                                    | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm đối nhau.                                          |   |   |
| b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ .                                             |   |   |
| c) Với hai số $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ thì $f(\sin a) < f(\sin b)$ .                      |   |   |
| d) Bất phương trình $\cos^3 x - 3\cos x \geq -2$ có đúng 10 nghiệm $x \in [-10\pi; 10\pi]$ . |   |   |

## 5

## Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 16.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + \frac{3}{4}$ . Số giá trị  $x$  nguyên thuộc khoảng nghịch biến là bao nhiêu?  
KQ:

**Câu 17.** Hàm số  $y = x^4 + 4x^2 + 3$ . Có bao nhiêu giá trị  $x$  nguyên thuộc khoảng đồng biến của hàm số và  $x \in [-10; 10]$ ?  
KQ:

**Câu 18.** Cho hàm số  $y = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x + 2}$ . Tổng tất cả các giá trị  $x$  nguyên âm thuộc các khoảng đồng biến của hàm số bằng bao nhiêu?  
KQ:

**Câu 19.** Cho hàm số  $y = x\sqrt{3-x}$ . Khoảng nghịch biến của hàm số bằng có độ dài lớn nhất bao nhiêu?  
KQ:

**Câu 20.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x-1)(x-2)$ . Biết hàm số  $y = f(x-x^2)$  nghịch biến trên khoảng có dạng  $\left(\frac{a}{b}; +\infty\right)$  với  $\frac{a}{b}$  là tối giản và  $b > 0$ . Giá trị của biểu thức  $a^2 + b^2$  bằng bao nhiêu?  
KQ:

**DẠNG 2**

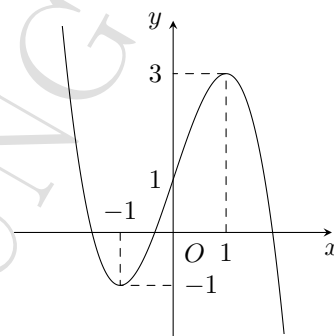
**Xét tính đơn điệu dựa vào bảng biến thiên, đồ thị**

Nếu trên khoảng  $(a; b)$  đồ thị “đi lên” từ trái qua phải thì hàm số đồng biến trên khoảng  $(a; b)$ .  
Nếu trên khoảng  $(a; b)$  đồ thị “đi xuống” từ trái qua phải thì hàm số nghịch biến trên khoảng  $(a; b)$ .

**1 Ví dụ mẫu**

**Ví dụ 13 (Mức độ 1).**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , có đồ thị như hình bên. Tìm khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số?



**Ví dụ 14 (Mức độ 1).** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình dưới đây

|      |           |                |     |           |   |
|------|-----------|----------------|-----|-----------|---|
| $x$  | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | $3$ | $+\infty$ |   |
| $y'$ |           | +              | +   | 0         | - |
| $y$  | $-\infty$ | $+\infty$      | $4$ | $-\infty$ |   |

Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số?

**Ví dụ 15 (Mức độ 1).** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau.

|      |           |      |      |           |     |     |           |
|------|-----------|------|------|-----------|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-3$ | $4$  | $+\infty$ |     |     |           |
| $y'$ |           | $-$  | $0$  | $+$       | $0$ | $-$ |           |
| $y$  | $+\infty$ |      | $-1$ |           | $2$ |     | $-\infty$ |

Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

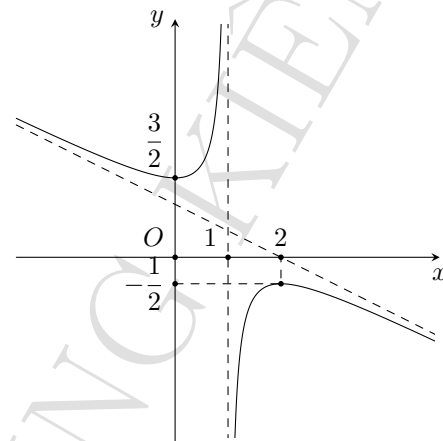
**Ví dụ 16 (Mức độ 2).** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình dưới đây

|      |           |      |           |     |           |     |
|------|-----------|------|-----------|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $0$  | $2$       | $4$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$       | $-$ | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ | $6$ | $+\infty$ |     |

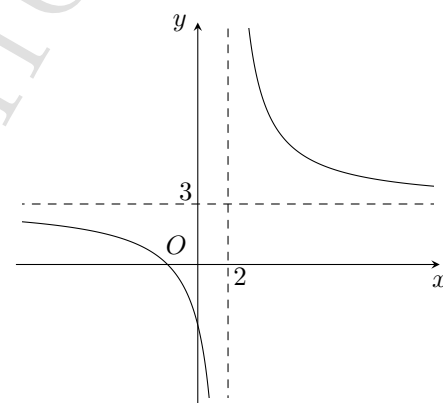
Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

**Ví dụ 17 (Mức độ 2).**

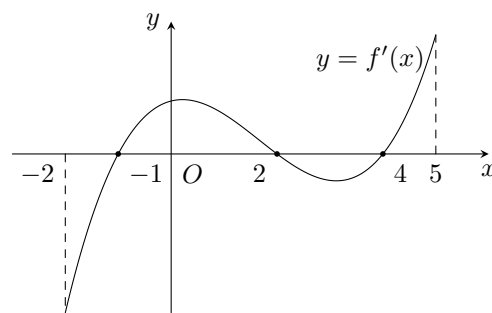
Tìm khoảng đồng biến nghịch biến của hàm số  $y = \frac{-x^2 + 3x - 3}{2(x - 1)}$  có đồ thị như hình vẽ bên?

**Ví dụ 18 (Mức độ 2).**

Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ , với  $a, b, c, d$  là các số thực. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

**Ví dụ 19 (Mức độ 2).**

Đạo hàm  $f'(x)$  của hàm số  $y = f(x)$  trên khoảng  $(-2; 5)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Xét tính đơn điệu của hàm số  $y = f(x)$  trên khoảng  $(-2; 5)$ .



**Ví dụ 20 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x)$ , có bảng xét dấu  $f'(x)$  như sau

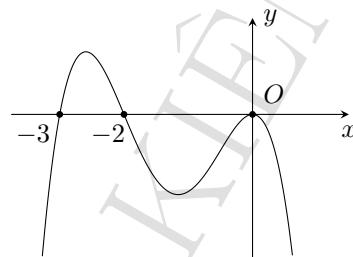
|         |           |      |      |     |           |
|---------|-----------|------|------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-3$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$  | $0$ | $-$       |

| Phát biểu                                                        | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm.                        |   |   |
| b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ .                |   |   |
| c) Hàm số $f(3 - 2x)$ có đạo hàm là $y' = f'(3 - 2x)$ .          |   |   |
| d) Hàm số $y = f(3 - 2x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$ . |   |   |



**Ví dụ 21 (Mức độ 3).**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  là đường cong như hình vẽ bên. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau



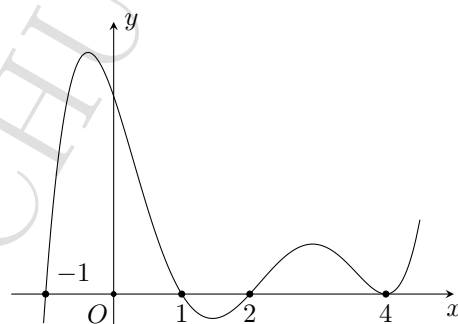
| Phát biểu                                                              | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm.                              |   |   |
| b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ .               |   |   |
| c) Hàm số $f(x - 1)$ đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$ .                |   |   |
| d) Khoảng nghịch biến của hàm số $y = f(1 - \ln x)$ chứa 34 số nguyên. |   |   |

**Ví dụ 22 (Mức độ 3).**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị  $y = f'(x)$  như hình bên. Biết hàm

số  $g(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^{f(5-2x)}$  nghịch biến trên khoảng có dạng  $\left(-\frac{a}{b}; c\right)$ ,

$a, b, c$  là các số nguyên dương. Tổng  $a + b + c$  bằng bao nhiêu?



KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**2 Bài tập tự luận**

**Bài 6.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ.

|      |           |   |   |           |
|------|-----------|---|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 1 | 2 | $+\infty$ |
| $y'$ | +         | 0 | - | +         |
| $y$  | $-\infty$ | 3 | 0 | $+\infty$ |

Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số?

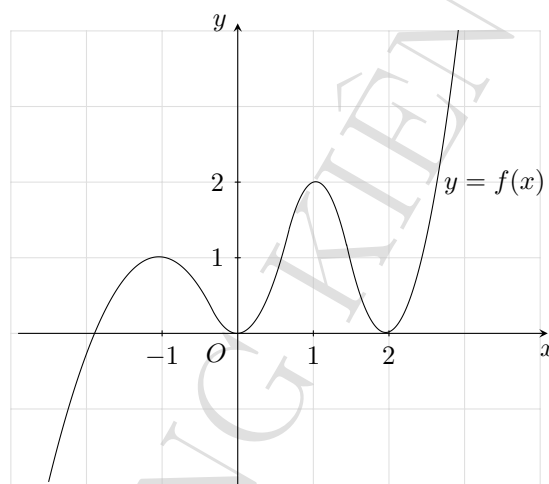
**Bài 7.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

|      |           |    |   |           |
|------|-----------|----|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 0  | 1 | $+\infty$ |
| $y'$ | -         | +  | 0 | -         |
| $y$  | $+\infty$ | -1 | 2 | $-\infty$ |

**Bài 8.**

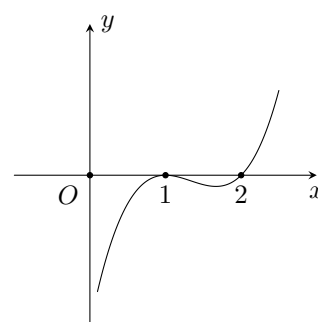


Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  có đồ thị như hình bên. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến hàm số.



### Bài 9.

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  có đồ thị của hàm số  $f'(x)$  như hình vẽ. Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số  $y = f(x)$ ?



**Bài 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ.

|         |           |      |      |     |           |
|---------|-----------|------|------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $0$  | $2$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$ | $-$       |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $3$  | $-1$ | $3$ | $-\infty$ |

Tìm khoảng đồng biến của hàm số  $y = f(x^2 - 2)$ ?

## 3

### Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 21.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau.

|      |           |      |     |           |     |
|------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-3$ | $4$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$       | $-$ |
| $y$  | $+\infty$ | $-1$ | $2$ | $-\infty$ |     |

Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A.** Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -4)$ .
- B.** Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-2; 2)$ .
- C.** Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-4; 1)$ .
- D.** Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(5; +\infty)$ .

**Câu 22.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên dưới

|      |           |   |           |   |    |   |           |
|------|-----------|---|-----------|---|----|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ |   | 0         |   | 1  |   | $+\infty$ |
| $y'$ |           | - |           | - | 0  | + |           |
| $y$  | $+\infty$ |   | $+\infty$ |   | -2 |   | $+\infty$ |

Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$ . **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; 1)$ .  
**C.** Hàm số đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ . **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-2; +\infty)$ .

**Câu 23.** Cho hàm số có bảng biến thiên như hình dưới đây

|      |           |   |    |   |   |   |   |   |           |
|------|-----------|---|----|---|---|---|---|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ |   | -2 |   | 0 |   | 2 |   | $+\infty$ |
| $y'$ |           | + | 0  | - |   | - | 0 | + |           |
| $y$  |           |   |    |   |   |   |   |   |           |

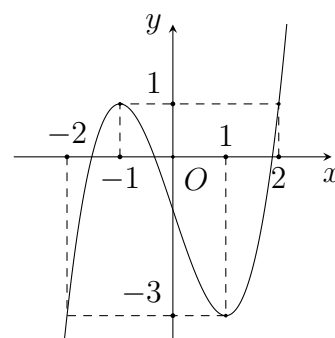
Khẳng định nào sau đây là đúng

- A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$ . **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-2; 2)$ .  
**C.** Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-2; +\infty)$ . **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-2; 0)$ .

**Câu 24.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

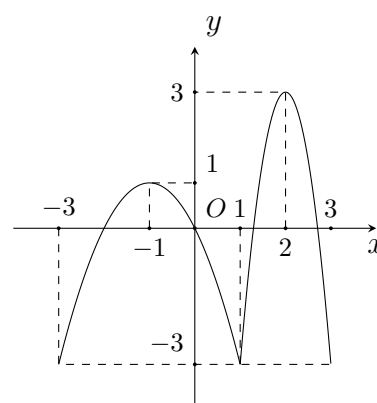
- A.**  $(0; 2)$ . **B.**  $(1; +\infty)$ . **C.**  $(-\infty; 1)$ . **D.**  $(-2; 1)$ .



**Câu 25.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

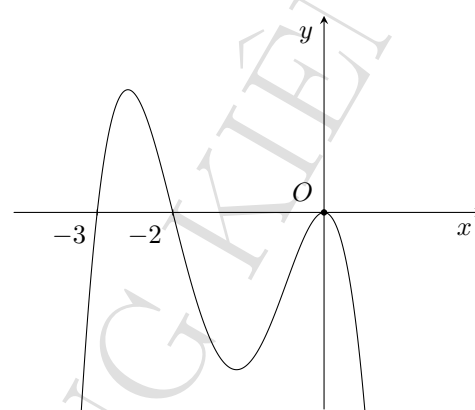
- A.**  $(-3; -1)$ . **B.**  $(2; 3)$ . **C.**  $(-2; 0)$ . **D.**  $(0; 2)$ .



**Câu 26.**

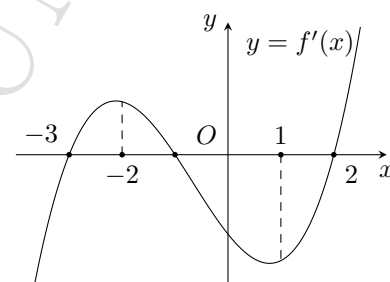
Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x)$ . Biết rằng  $f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .
- B. Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(-3; -2)$ .
- C. Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 3)$ .
- D. Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-2; 0)$ .

**Câu 27.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề sai?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; 1)$ .
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(1; 2)$ .
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-2; -1)$ .
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-1; 2)$ .



**Câu 28.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới.

|         |           |     |      |     |      |     |     |     |     |     |     |     |           |
|---------|-----------|-----|------|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |     | $-3$ |     | $-2$ |     | $0$ |     | $1$ |     | $3$ |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$ | $0$  | $+$ | $0$  | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |           |

Hàm số  $y = f(1 - 2x)$  đồng biến trên khoảng

- A.  $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ .
- B.  $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$ .
- C.  $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$ .
- D.  $\left(0; \frac{3}{2}\right)$ .

**Câu 29.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu  $f'(x)$  như sau

|         |           |      |     |           |     |     |
|---------|-----------|------|-----|-----------|-----|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $2$ | $+\infty$ |     |     |
| $f'(x)$ |           | $-$  | $0$ | $+$       | $0$ | $-$ |

Hàm số  $g(x) = f(x^2 - 2)$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(1; 2)$ .
- B.  $(-\infty; -1)$ .
- C.  $(-1; 0)$ .
- D.  $(0; 1)$ .

**Câu 30.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới.

|         |           |     |      |     |      |     |     |     |     |     |     |     |           |
|---------|-----------|-----|------|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |     | $-3$ |     | $-2$ |     | $0$ |     | $1$ |     | $3$ |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$ | $0$  | $+$ | $0$  | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |           |

Hàm số  $y = f(3^x)$  đồng biến trên khoảng

- A.  $(-3; -2)$ .
- B.  $(1; 3)$ .
- C.  $\left(-\frac{2}{3}; -1\right)$ .
- D.  $(0; 1)$ .

#### 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 31.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ , có bảng biến thiên như hình sau

|      |           |      |      |           |     |
|------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $1$  | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $2$  | $-1$ | $+\infty$ |     |

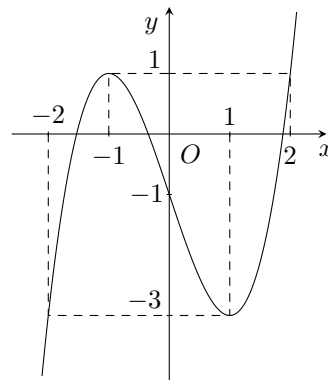
Xét tính đúng sai của mỗi khẳng định sau

| Phát biểu                                          | Đ | S |
|----------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ .  |   |   |
| b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$ . |   |   |
| c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ .  |   |   |
| d) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ . |   |   |

**Câu 32.**

Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình bên. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai?

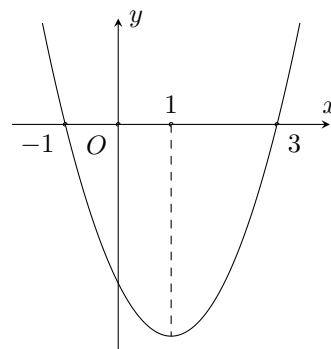
| Phát biểu                                  | Đ | S |
|--------------------------------------------|---|---|
| a) $d = -1$ .                              |   |   |
| b) $a < 0$ .                               |   |   |
| c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$ . |   |   |
| d) $y'(2) < 0$ .                           |   |   |



**Câu 33.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị  $f'(x)$  là parabol như hình vẽ bên. Xét tính đúng sai của mỗi khẳng định sau

| Phát biểu                                     | Đ | S |
|-----------------------------------------------|---|---|
| a) $f'(-1) = 0$ .                             |   |   |
| b) Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ .     |   |   |
| c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$ . |   |   |
| d) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ .  |   |   |



**Câu 34.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng xét dấu  $f'(x)$  như sau

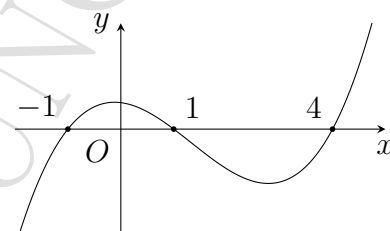
|         |           |      |      |     |           |
|---------|-----------|------|------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-3$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$  | $0$ | $-$       |

Xét tính đúng sai của mỗi khẳng định sau

| Phát biểu                                                | Đ | S |
|----------------------------------------------------------|---|---|
| a) Phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm.                |   |   |
| b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$ .       |   |   |
| c) Hàm số $f(3 - 2x)$ có đạo hàm là $y' = f'(3 - 2x)$ .  |   |   |
| d) Hàm số $f(3 - 2x)$ nghịch biến trên khoảng $(2; 3)$ . |   |   |

### Câu 35.

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên.  
Xét tính đúng sai của mỗi khẳng định sau



| Phát biểu                                                                          | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm.                                          |   |   |
| b) Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ hàm số $y = f(x)$ tại $x = 0$ có giá trị dương. |   |   |
| c) Hàm số $y = g(x) = f(x^2)$ có đạo hàm $y' = f'(2x)$ .                           |   |   |
| d) Hàm số $y = g(x) = f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$ .                  |   |   |

## 5

### Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 36.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu đạo hàm  $f'(x)$  như sau

|         |           |      |      |     |     |           |
|---------|-----------|------|------|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $-1$ | $2$ | $4$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | +    | 0    | -   | 0   | +         |

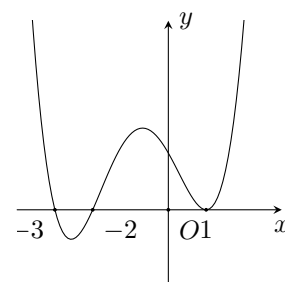
Hàm số  $g(x) = f(x - 1) + 2024$  nghịch biến trên khoảng có độ dài lớn nhất là bao nhiêu?

KQ:

### Câu 37.

Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  là hàm số  $f'(x)$ . Biết đồ thị của hàm số  $f'(x)$  được cho như hình vẽ. Khoảng đồng biến của hàm số chứa bao nhiêu giá trị  $x$  nguyên thuộc khoảng  $(-2024; -2)$ .

KQ:



**Câu 38.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu  $f'(x)$  như sau

|         |           |      |     |           |     |
|---------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $2$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$       | $-$ |

Tổng các giá trị  $x$  nguyên thuộc các khoảng đồng biến của hàm  $g(x) = f(x^2 - 2)$  số bằng bao nhiêu?

KQ: 

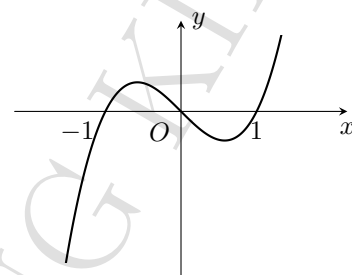
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 39.**

Cho hàm số  $y = f(x)$ , hàm số  $y = f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình vẽ. Biết hàm số  $g(x) = f(f'(x))$  nghịch biến trên khoảng có dạng  $(-\infty; m)$ . Tổng ba số nguyên âm đầu tiên thuộc khoảng nghịch biến của hàm số bằng bao nhiêu?

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

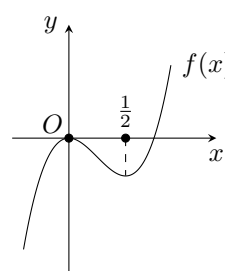


**Câu 40.**

Cho hàm số  $f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Xét  $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ , biết hàm số  $f(\sin x)$  nghịch biến trên khoảng  $(a; b)$ . Khi đó giá trị lớn nhất của  $|a - b|$  bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|



**DẠNG 3**

**Tìm điều kiện của tham số để hàm số đồng biến, nghịch biến trên một khoảng**

**Định lý 3** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên khoảng  $K$ .

- a) Nếu  $f'(x) > 0$  với mọi  $x \in K$  thì hàm số  $f(x)$  đồng biến trên khoảng  $K$ .
- b) Nếu  $f'(x) < 0$  với mọi  $x \in K$  thì hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $K$ .

**Định lý 4** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $K$ . Nếu  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ) với mọi  $x$  thuộc  $K$  và  $f'(x) = 0$  chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số  $f(x)$  đồng biến (nghịch biến) trên  $K$ .

**!** Cho tam thức bậc hai  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , với  $a \neq 0$  và  $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$ .

- a) Nếu  $a > 0$  thì  $f(x) \geq 0$ , với mọi  $x$  thuộc  $\mathbb{R}$ .
- b) Nếu  $a < 0$  thì  $f(x) \leq 0$ , với mọi  $x$  thuộc  $\mathbb{R}$ .

**!** Đối với các bài toán tìm tham số để hàm số đơn điệu trên một khoảng  $(a; b)$  (đoạn, nửa khoảng), chúng ta thường sử dụng phương pháp cô lập tham số và sử dụng bảng biến thiên để đi đến kết luận.

**1 Ví dụ mẫu**

**Ví dụ 23 (Mức độ 1).** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = 2^{mx}$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

**Ví dụ 24 (Mức độ 1).** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{mx}$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

**Ví dụ 25 (Mức độ 2).** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x^2 - m}{x}$  đồng biến trên từng khoảng xác định.

**Ví dụ 26 (Mức độ 2).** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

**Ví dụ 27 (Mức độ 2).** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{mx - 4}{m - 2x}$  nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó?

**Ví dụ 28 (Mức độ 2).** Cho hàm số  $y = \frac{x - m^2}{-x + 4m}$  ( $m$  là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định?

**Ví dụ 29 (Mức độ 2).** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x + 2}{x + 5m}$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -10)$ ?

**Ví dụ 30 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 3$ , với  $m$  là tham số. Mỗi kết quả dưới đây đúng hay sai?

| Phát biểu                                                                            | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ .                                   |   |   |
| b) $f'(x) = x^2 + 2mx + 4$ .                                                         |   |   |
| c) Khi $m = 1$ , hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ .                                |   |   |
| d) Có 5 giá trị nguyên dương của tham số $m$ để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ . |   |   |

**Ví dụ 31 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = -x^3 - 6x^2 + (4m - 9)x + 4$ , với  $m$  là tham số. Mỗi kết quả dưới đây đúng hay sai?

| Phát biểu                                                                     | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $f'(x) = -3x^2 - 12x + 4m - 9$ .                                           |   |   |
| b) Khi $m = 0$ , hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; -1)$ .                    |   |   |
| c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $m > 0$ .                           |   |   |
| d) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ khi $m \leq -\frac{3}{4}$ . |   |   |

**Ví dụ 32 (Mức độ 3).** Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của tham số  $m$  để hàm số

$$y = \frac{x^2 - 2mx + 2m^2 - 2}{x - m}$$

đồng biến trên  $(1; +\infty)$ ?

KQ:

**Ví dụ 33 (Mức độ 3).** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m < 10$  để hàm số

$$y = -\frac{1}{3}x^3 + (m - 1)x^2 + (m + 3)x + 4$$

đồng biến trên  $(0; 3)$ ?

KQ:

## 2

### Bài tập tự luận

**Bài 11 (Mức độ 2).** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{a}{x + 1}$  nghịch biến trên  $(1; +\infty)$ .



**Bài 12 (Mức độ 2).** Tìm các giá trị của tham số  $a$  để hàm số  $y = -x^3 + ax$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

**Bài 13 (Mức độ 2).** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x^5}{5} + \frac{mx^4}{2} + \frac{x^3}{3} + m - 1$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

**Bài 14 (Mức độ 2).** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{mx + m - 7}{5x - m + 3}$  đồng biến trên mọi khoảng của tập xác định.

**Bài 15 (Mức độ 3).** Tìm  $a$  để hàm số  $y = \frac{x^2 - 2ax + 4a^2}{x - 2a}$  đồng biến trên  $(2; +\infty)$ .

### 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 41 (Mức độ 1).** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = 5^{mx}$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

- A.  $m > 0$ . B.  $m \geq 0$ . C.  $m < 0$ . D.  $m \leq 0$ .

**Câu 42 (Mức độ 1).** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = (5 - m^2)x^2$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.

**Câu 43 (Mức độ 1).** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số  $y = (8 - m^2) \log x$  đồng biến trên tập xác định của nó?

- A. 5. B. 7. C. 9. D. Vô số.

**Câu 44 (Mức độ 2).** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 3(m + 2)x + 3m - 1$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

- A.  $m \geq -1$ . B.  $m > -1$ . C.  $m \leq -1$ . D.  $m < -1$ .

**Câu 45 (Mức độ 2).** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $a$  để hàm số  $y = \frac{x + a}{ax + 20}$  đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

- A. 11. B. 7. C. 9. D. Vô số.

**Câu 46 (Mức độ 2).** Tìm tất cả các giá trị tham số  $m$  để hàm số  $y = e^{mx^2+1}$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .

- A.  $m > 0$ . B.  $m > 1$ . C.  $m < 0$ . D.  $m < -1$ .

**Câu 47 (Mức độ 2).** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{mx - m + 10}{x + 9m}$  nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó?

- A. 2. B. 9. C. 10. D. Vô số.

**Câu 48 (Đề Chính thức, 2018, Mức độ 3).**

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x + 6}{x + 5m}$  nghịch biến trên khoảng  $(10; +\infty)$ ?

- A. 3. B. Vô số. C. 4. D. 5.

**Câu 49 (Mức độ 3).** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{16 - m^2}{(x + 1)^2}$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$ ?

- A. 7. B. 9. C. Vô số. D. 11.

**Câu 50 (Mức độ 3).** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) - mx + 3$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ .



A.  $m \geq \frac{1}{4}$ .

B.  $m < \frac{1}{4}$ .

C.  $m \leq \frac{1}{4}$ .

D.  $m > \frac{1}{4}$ .

#### 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 51 (Mức độ 1).** Cho hàm số  $y = x^3 - 2x^2 + mx + 1$ , với  $m$  là tham số. Mỗi kết quả dưới đây đúng hay sai?

| Phát biểu                                                         | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đạo hàm $y' = 3x^2 - 4x + m$ .                                 |   |   |
| b) Khi $m = -5$ , hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ .            |   |   |
| c) Khi $m = 0$ , hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$ .        |   |   |
| d) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m \geq 1$ . |   |   |

**Câu 52 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $y = -mx^3 + x^2 - 3x + m - 2$ , với  $m$  là tham số. Mỗi kết quả dưới đây đúng hay sai?

| Phát biểu                                                                                    | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đạo hàm $y' = -3mx^2 + 2x - 3$ .                                                          |   |   |
| b) Không tồn tại giá trị nguyên âm của tham số $m$ để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ . |   |   |
| c) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m > 0$ .                             |   |   |
| d) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 0)$ khi và chỉ khi $m \geq -\frac{1}{3}$ .           |   |   |

**Câu 53 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $y = \frac{mx + 4}{x + m}$  với  $m$  là tham số. Mỗi kết quả dưới đây đúng hay sai?

| Phát biểu                                                                | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số xác định với mọi $x \neq m$ .                                  |   |   |
| b) Đạo hàm $y' = \frac{m^2 - 4}{(x + m)^2}$ .                            |   |   |
| c) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định khi $-2 \leq m \leq 2$ . |   |   |
| d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ khi $m > 2$ .             |   |   |

**Câu 54 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $y = \frac{x - m^2}{x - 3m + 2}$ , với  $m$  là tham số. Mỗi kết quả dưới đây đúng hay sai?

| Phát biểu                                                                          | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số xác định với $x \neq -3m + 2$ .                                          |   |   |
| b) Đạo hàm $y' = \frac{m^2 - 3m + 2}{(x - 3m + 2)^2}$ , với mọi $x \neq 3m - 2$ .  |   |   |
| c) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $1 \leq m \leq 2$ . |   |   |
| d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ khi và chỉ khi $m > 2$ .            |   |   |

**Câu 55 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x^2 - m}{x - 1}$ . Mỗi kết quả dưới đây đúng hay sai?

| Phát biểu                                                                  | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số xác định với mọi $x \neq 0$ .                                    |   |   |
| b) Đạo hàm của hàm số $f(x)$ là $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + m}{(x - 1)^2}$ . |   |   |
| c) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $m > 1$ .     |   |   |
| d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi $m \geq 1$ . |   |   |

## 5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 56 (Mức độ 2).** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - 4mx + 1$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ ?  
 KQ:

**Câu 57 (Mức độ 3).** Biết rằng tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số  $y = \frac{mx + 4}{x + m}$  nghịch biến trên  $(-\infty; 1)$  là khoảng  $(a; b]$ , với  $a < b$ . Tính  $b - a$ .  
 KQ:

**Câu 58 (Mức độ 3).** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in [-10; 10]$  để hàm số  $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 4mx + 1$  đồng biến trên khoảng  $(0; 3)$ ?  
 KQ:

**Câu 59 (Mức độ 4).** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $a$  trên đoạn  $[-100; 100]$  để hàm số  $f(x) = \frac{(a + 1) \ln x - 6}{\ln x - 3a}$  nghịch biến trên khoảng  $(1; e)$ ?  
 KQ:

**Câu 60 (Mức độ 4).** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  trên khoảng  $(-100; 100)$  sao cho hàm số  $y = \frac{-e^x + 3}{e^x + m}$  nghịch biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ ?  
 KQ:

## DẠNG 4 Ứng dụng sự biến thiên của hàm số để giải phương trình, bất phương trình

**Định lý 5** Nếu  $y = f(x)$  luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) và liên tục trên  $\mathcal{D}$  thì số nghiệm trên  $\mathcal{D}$  của phương trình  $f(x) = a$  không nhiều hơn một và với mọi  $u, v \in \mathcal{D}$ , ta có

$$f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v.$$

**Định lý 6** Nếu hàm số  $f(x)$  và  $g(x)$  đơn điệu ngược chiều và liên tục trên  $\mathcal{D}$  thì số nghiệm trên  $\mathcal{D}$  của phương trình  $f(x) = g(x)$  không nhiều hơn một.

**Định lý 7** Nếu  $f(x)$  luôn đồng biến trên  $\mathcal{D}$  thì  $f(x) > f(a) \Leftrightarrow x > a$  và nếu  $f(x)$  luôn nghịch biến trên  $\mathcal{D}$  thì  $f(x) > f(a) \Leftrightarrow x < a$ , với  $a, x \in \mathcal{D}$ .

**Định lý 8** Nếu  $f(x)$  có đạo hàm cấp  $k$  và liên tục trên  $\mathcal{D}$ , đồng thời  $f^{(k)}(x) = 0$  có đúng  $m$  nghiệm phân biệt thì phương trình  $f(x) = 0$  có không quá  $m + k$  nghiệm trên  $\mathcal{D}$ .

## 1 Ví dụ mẫu

**Ví dụ 34 (Mức độ 1).** Dùng phương pháp hàm số, giải phương trình  $2^{x^2 - x} = 2^{x - 1}$ .

**Ví dụ 35 (Mức độ 1).** Dùng phương pháp hàm số, giải phương trình  $\log_3(x^2 + 1) = \log_3(3 - x)$ .

**Ví dụ 36 (Mức độ 2).** Giải phương trình  $3^x - 3^{x^2-2x} = x^2 - 3x$ .

**Ví dụ 37 (Mức độ 2).** Giải bất phương trình  $5^x - 5^{2x+1} > x + 1$ .

**Ví dụ 38 (Mức độ 2).** Giải phương trình  $\log_2 \frac{(x+1)^2}{2x} + x^2 + 1 = 0$ .

**Ví dụ 39 (Mức độ 2).** Giải phương trình  $x + \log(x-3) = 4$ .

**Ví dụ 40 (Mức độ 2).** Giải phương trình  $\log_3(x+1) + \log_2 x = 2$ .

**Ví dụ 41 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = \log_5 x$ . Mỗi kết quả dưới đây đúng hay sai?

| Phát biểu                                                                        | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số xác định khi $x > 0$ .                                                 |   |   |
| b) Đạo hàm của hàm số $f(x)$ là $f'(x) = \frac{1}{x}$ .                          |   |   |
| c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ .                                 |   |   |
| d) Bất phương trình $f(x^2 + 100x) < f(8x + 800)$ có đúng 8 nghiệm nguyên dương. |   |   |

**Ví dụ 42 (Mức độ 3).** Cho hai hàm số  $f(x) = \log_5 x$  và  $g(x) = \log_7(x+2)$ . Mỗi kết quả dưới đây đúng hay sai?

| Phát biểu                                                           | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tập xác định của hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là $(0; +\infty)$ . |   |   |
| b) Hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ .          |   |   |
| c) Phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm duy nhất.                   |   |   |
| d) Bất phương trình $f(x) < g(x)$ có đúng 5 nghiệm nguyên.          |   |   |

**Ví dụ 43 (Mức độ 3).** Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình  $\log_3 \frac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5} = x^2 + 3x + 2$ .

KQ:

## 2 Bài tập tự luận

**Bài 16 (Mức độ 2).** Giải phương trình  $5^x - 5^{2x+1} = x + 1$ .

**Bài 17 (Mức độ 2).** Giải phương trình  $3^x - 3^{x^2-2x} > x^2 - 3x$ .

**Bài 18 (Mức độ 2).** Giải bất phương trình  $\log x > \log(2x-1) + x - 1$ .

**Bài 19 (Mức độ 2).** Giải phương trình  $\log_2 \frac{(x+1)^2}{2x} + x^2 + 1 > 0$ .

**Bài 20 (Mức độ 3).** Giải bất phương trình  $\log_2(2^x + 1) + \log_3(4^x + 2) \leq 2$ .

## 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 61 (Mức độ 1).** Phương trình  $\log(3x+1) + 3x + 1 = \log(2x+4) + 2x + 4$  có nghiệm là

- A.  $x = 3$ . B.  $x = -3$ . C.  $x = 0$ . D.  $x = 4$ .

**Câu 62 (Mức độ 1).** Tập nghiệm của bất phương trình  $3^x + x > 3^{2x-1} + 2x - 1$  là

- A.  $(-\infty; 1)$ . B.  $(-\infty; 2)$ . C.  $(0; +\infty)$ . D.  $(0; 1)$ .

**Câu 63 (Mức độ 1).** Tập nghiệm của bất phương trình  $\log x + x > \log(2x - 5) + 2x - 5$  là

- A.  $(0; 5)$ . B.  $(-\infty; 5)$ . C.  $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$ . D.  $\left(\frac{5}{2}; 5\right)$ .

**Câu 64 (Mức độ 2).** Tìm tập nghiệm của bất phương trình  $\ln(2x + 1) + 2x + 1 > \ln x + x$ .

- A.  $(0; +\infty)$ . B.  $(-1; +\infty)$ . C.  $(0; 1)$ . D.  $(1; +\infty)$ .

**Câu 65 (Mức độ 2).** Bất phương trình  $7^x - 7^{x^2-2x} > x^2 - 3x$  có bao nhiêu nghiệm nguyên?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

**Câu 66 (Mức độ 2).** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có bảng biến thiên sau

|         |           |      |      |           |
|---------|-----------|------|------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 0    | 4    | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+\infty$ | $-5$ | $-1$ | $-3$      |

Bất phương trình  $f(7x) > f(5x + 157)$  có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

- A. 54. B. 79. C. 53. D. 78.

**Câu 67 (Mức độ 2).** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên sau

|        |           |      |      |           |
|--------|-----------|------|------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | 0    | 4    | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $-5$ | $-1$ | 0         |

Bất phương trình  $f(8x) < f(3x - 185)$  có bao nhiêu nghiệm nguyên âm?

- A. 39. B. 38. C. 37. D. 36.

**Câu 68 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có bảng biến thiên sau

|         |           |      |   |           |
|---------|-----------|------|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 0    | 4 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+\infty$ | $-3$ | 0 | $-\infty$ |

Bất phương trình  $f(\ln 7x) > f(\ln(5x + 157))$  có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

- A. 27. B. 79. C. 28. D. 78.

**Câu 69 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có bảng biến thiên sau

|         |           |   |   |           |
|---------|-----------|---|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 0 | 3 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-\infty$ | 5 | 1 | $+\infty$ |

Có bao nhiêu cặp số nguyên dương  $(x; y)$  thỏa mãn  $f(x^2 - 2x + y^2 + 1) < f(2y + 8)$ ?

- A. 10. B. 9. C. 12. D. 15.

**Câu 70 (Mức độ 4).** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương  $(x; y)$  thỏa mãn  $y \leq 1000$  và

$$\log \frac{x+1}{3y+1} \leq 9y^2 - x^2 + 6y - 2x?$$

- A. 1501100. B. 1501300. C. 1501400. D. 1501500.

#### 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 71 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x - 1$ . Mỗi kết quả dưới đây đúng hay sai?

| Phát biểu                                                                         | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đạo hàm của hàm số $f(x)$ là $f'(x) = x^2 - 2x + 4$ .                          |   |   |
| b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ .                     |   |   |
| c) Phương trình $f(x^3 - 5x) - f(2x^2 - 6) = 0$ có đúng 3 nghiệm dương phân biệt. |   |   |
| d) Bất phương trình $f(2x^2 - 100) < f(x + 5)$ có đúng 14 nghiệm dương phân biệt. |   |   |

**Câu 72 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có bảng biến thiên sau

|         |           |      |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-3$ | $1$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+\infty$ | $-3$ | $0$ | $-\infty$ |

Mỗi kết quả dưới đây đúng hay sai?

| Phát biểu                                                                         | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $f'(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$ .                               |   |   |
| b) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$ .                              |   |   |
| c) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$ .                              |   |   |
| d) Có đúng 11 cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $f(x^2 + y^2) > f(15 + 2x)$ . |   |   |

**Câu 73 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$ . Mỗi kết quả dưới đây đúng hay sai?

| Phát biểu                                                                  | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đạo hàm của hàm số $f(x)$ là $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$ . |   |   |
| b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$ .                              |   |   |
| c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; -1)$ .                               |   |   |
| d) Bất phương trình $f(x^2 - 4x + 7) < f(2024)$ có 89 nghiệm nguyên dương. |   |   |

**Câu 74 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ . Mỗi kết quả dưới đây đúng hay sai?

| Phát biểu                                                                      | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số xác định khi $x \neq -1$ .                                           |   |   |
| b) Đạo hàm của hàm số là $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ .                         |   |   |
| c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .                       |   |   |
| d) Bất phương trình $f(2^{2x-3}) < f(4^{-x+7})$ có đúng 4 nghiệm nguyên dương. |   |   |

**Câu 75 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có bảng biến thiên sau

|         |           |   |   |           |
|---------|-----------|---|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 0 | 2 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+\infty$ |   | 6 | $-\infty$ |
|         |           | 1 |   |           |

Mỗi kết quả dưới đây đúng hay sai?

| Phát biểu                                                                                 | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $f'(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ .                                        |   |   |
| b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ .                                   |   |   |
| c) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$ .                                 |   |   |
| d) Bất phương trình $f(2^{1-x^2}) > f\left(\frac{1}{256}\right)$ có 5 đúng nghiệm nguyên. |   |   |

## 5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 76 (Mức độ 2).** Cho hàm số  $y = f(x) = x^7 + 4x^3 + x$ . Biết rằng bất phương trình  $f(3^{x^2-x}) < f(3^{2-x})$  có tập nghiệm là khoảng  $(a; b)$ , hãy tính giá trị của  $b - a$ , làm tròn đến hàng phần trăm.

KQ:

**Câu 77 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có bảng biến thiên sau

|         |           |   |   |           |
|---------|-----------|---|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 0 | 3 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-\infty$ | 5 | 1 | $+\infty$ |

Tập nghiệm của bất phương trình  $f(\log(x^2 + 2x + 3)) < f(\log(x^2 + 8x + 28))$  là  $(a; +\infty)$ . Hãy làm tròn số  $a$  đến hàng phần trăm.

KQ:

**Câu 78 (Mức độ 3).** Có bao nhiêu cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn  $0 \leq x \leq 2020$  và  $\log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y$ ?

KQ:

**Câu 79 (Đề Tham khảo 2021, Mức độ 4).**

Có bao nhiêu số nguyên  $a$  ( $a \geq 2$ ) sao cho tồn tại số thực  $x$  thỏa mãn  $(a^{\log x} + 2)^{\log a} = x - 2$ ?

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 80 (Mức độ 4).** Có bao nhiêu số nguyên dương  $y > 4$  sao cho tồn tại số thực  $x \in (1; 6)$  thỏa mãn  $4(x - 1)e^x = y(e^x + xy - 2x^2 - 3)$ ?

KQ: 

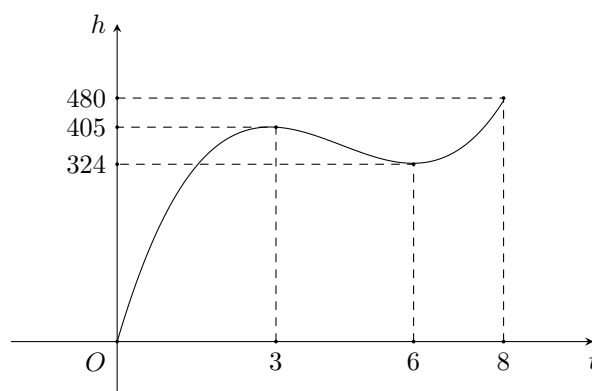
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**DẠNG 5****Toán thực tế sử dụng tính đồng biến, nghịch biến****Phương pháp giải:**

- 1) Chọn một hoặc một số chữ cái  $x, a, b, \dots$  gọi là biến để biểu thị những đại lượng chưa biết và viết biểu thức biểu thị đại lượng, kí hiệu  $P$ , cần tìm sự thay đổi theo các biến đó.
- 2) Viết lại biểu thức  $P$  thành biểu thức chứa một biến, chẳng hạn là  $x$ , bằng cách biểu thị các biến khác theo biến  $x$  nhờ các dữ kiện đề bài đã cho. Từ đó, ta nhận được hàm số xác định bởi công thức  $P = f(x)$ .
- 3) Xác định tập hợp  $\mathcal{D}$  gồm các giá trị mà biến  $x$  có thể nhận.
- 4) Xét tính đồng biến nghịch biến dựa trên bảng xét dấu hoặc bảng biến thiên của hàm số.
- 5) Kết luận.

**1****Ví dụ mẫu****Ví dụ 44 (Mức độ 1).**

Trong 8 phút kể từ khi xuất phát, độ cao  $h$  (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm  $t$  phút được cho bởi công thức  $h(t) = 6t^3 - 81t^2 + 324t$ . Đồ thị của hàm số  $h(t)$  được biểu diễn trong hình bên. Trong các khoảng thời gian nào khinh khí cầu tăng dần độ cao, giảm dần độ cao? Độ cao của khinh khí cầu vào các thời điểm 3 phút và 6 phút sau khi xuất phát có gì đặc biệt?



**Ví dụ 45 (Mức độ 1).** Một chất điểm chuyển động theo phương trình  $S = -t^3 + 9t^2 + t + 10$  trong đó  $t$  tính bằng (s) và  $S$  tính bằng (m). Xác định khoảng thời gian mà vận tốc của chất điểm tăng.

**Ví dụ 46 (Mức độ 2).** Thể tích  $V$  của 1 kg nước (tính bằng  $\text{cm}^3$ ) ở nhiệt độ  $T$  (đơn vị:  $^\circ\text{C}$ ) khi  $T$  thay đổi từ  $0^\circ\text{C}$  đến  $30^\circ\text{C}$  được cho xấp xỉ bởi công thức:  $V = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000769T^3$ .

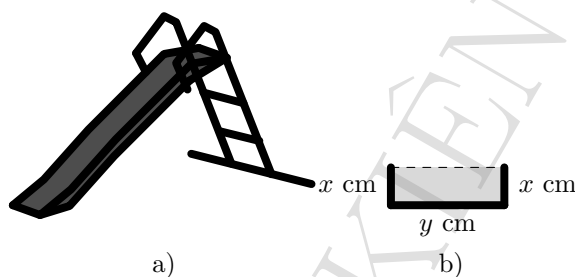
(Nguồn: James Stewart, J. (2015). Calculus. Cengage Learning 8th edition, p.284)

Tìm nhiệt độ  $T_0 \in (0; 30)$  để kể từ nhiệt độ  $T_0$  trở lên thì thể tích  $V$  tăng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

**Ví dụ 47 (Mức độ 2).**



Máng trượt của một cầu trượt cho trẻ em (Hình a) được uốn từ một tấm kim loại có bề rộng 80 cm, mặt cắt được mô tả ở Hình b. Nhà thiết kế khuyến cáo, diện tích mặt cắt càng lớn thì càng đảm bảo an toàn cho trẻ em.



- Gọi  $S$  là diện tích mặt cắt. Tìm điều kiện của  $x$  và viết công thức tính  $S$  theo  $x$ .
- Diện tích mặt cắt sẽ tăng hay giảm khi chúng ta tăng giá trị của  $x$  từ 0 cm đến 10 cm?

**Ví dụ 48 (Mức độ 2).**

Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm  $t = 0$  (s) cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm  $t = 126$  (s), cho bởi công thức

$$v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,$$

(Nguồn: J. Stewart, Calculus, Seventh Edition, Brooks/Cole, CENGAGE Learning 2012).

Với  $v$  được tính bằng ft/s, 1 feet = 0,3048 m. Hỏi gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian nào tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi?

**Ví dụ 49 (Mức độ 2).** Một công ty tiến hành khai thác 17 giếng dầu trong khu vực được chỉ định. Trung bình mỗi giếng dầu chiết xuất được 245 thùng dầu mỗi ngày. Công ty có thể khai thác nhiều hơn 17 giếng dầu nhưng cứ khai thác thêm một giếng thì lượng dầu mỗi giếng chiết xuất được hằng ngày sẽ giảm 9 thùng. Để giám đốc công ty có thể quyết định số giếng cần thêm cho phù hợp với tài chính, hãy chỉ ra số giếng công ty có thể khai thác thêm để sản lượng dầu chiết xuất tăng lên.

**Ví dụ 50 (Mức độ 2).** Kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam trong các năm từ 2010 đến 2017 có thể được tính xấp xỉ bằng công thức  $f(x) = 0,01x^3 - 0,04x^2 + 0,25x + 0,44$  (tỉ USD) với  $x$  là số năm tính từ 2010 đến 2017 ( $0 \leq x \leq 7$ ).

(Theo: <https://infographics.vn/interactive-xuat-khau-rau-qua-du-bao-bung-no-dat-4-ty-usd-trong-nam-2023/116220.vna>)

- Tính đạo hàm của hàm số  $y = f(x)$ .
- Chứng minh rằng kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.

**Ví dụ 51 (Mức độ 3).** Thể tích nước của một bể bơi sau  $t$  phút bơm tính theo công thức  $V(t) = \frac{1}{100} \left( 30t^3 - \frac{t^4}{4} \right)$ , với ( $0 \leq t \leq 90$ ). Lưu lượng nước máy bơm tại thời điểm  $t$  được tính bởi  $v(t) = V'(t)$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

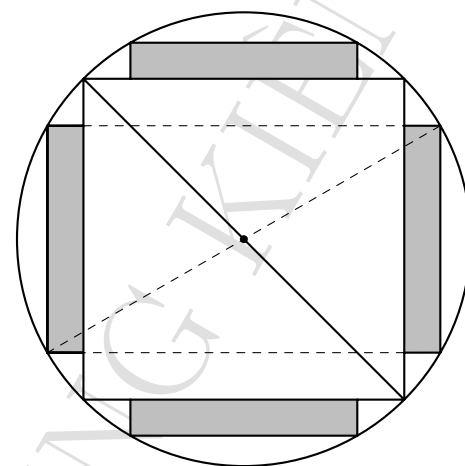
| Phát biểu                                                                                                            | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Thể tích nước của bể bơi sau 2 phút là 2,63 đơn vị thể tích.                                                      |   |   |
| b) Lưu lượng nước máy bơm tại thời điểm $t$ là $v(t) = \frac{9t^2}{10} - \frac{t^3}{100}$ , với $0 \leq t \leq 90$ . |   |   |
| c) Lưu lượng nước máy bơm tại thời điểm $t = 10$ là 80.                                                              |   |   |
| d) Lưu lượng nước máy bơm tăng dần từ phút 0 đến phút thứ 75.                                                        |   |   |



**Ví dụ 52 (Mức độ 3).**

Từ một khúc gỗ tròn hình trụ có đường kính bằng 40 cm, cần xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và bốn miếng phụ được tô màu xám như hình vẽ dưới đây. Tìm chiều rộng  $x$  của miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất. (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm). KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|



**Ví dụ 53 (Mức độ 3).** Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá thêm 20 ngàn đồng thì có thêm 2 phòng trống. Gọi  $x$  là giá phòng khách sạn cần đặt ra,  $x > 400$  (đơn vị: ngàn đồng). Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

| Phát biểu                                                                                                | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Giá chênh lệch sau khi tăng là $x - 400$ .                                                            |   |   |
| b) Số phòng cho thuê giảm đi là $\frac{x - 400}{20}$ .                                                   |   |   |
| c) Tổng doanh thu trong ngày là $f(x) = -\frac{x^2}{10} + 90x$ .                                         |   |   |
| d) Khi giá phòng tăng từ 400 ngàn đồng đến 500 ngàn đồng thì doanh thu trong ngày của khách sạn sẽ tăng. |   |   |

**2****Bài tập tự luận**

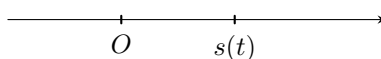
**Bài 21 (Mức độ 2).** Định luật Moore được xây dựng bởi Gordon Moore - một trong những sáng lập viên của tập đoàn sản xuất chip máy tính nổi tiếng Intel. Định luật ban đầu được phát biểu như sau “Số lượng transistor trên mỗi đơn vị inch vuông sẽ tăng lên gấp đôi sau mỗi 24 tháng.” (1 inch vuông xấp xỉ  $6,45 \text{ cm}^2$ ). Phương trình sau đây mô tả định luật Moore  $n_i = n_0 \cdot 2^{\frac{y_i - y_0}{2}}$ , trong đó  $n_0$  là số lượng transistor trên một đơn vị diện tích ban đầu,  $y_0$  là năm ứng với  $n_0$ ,  $n_i$  là số lượng transistor tại năm  $y_i$  đang xét.

(Nguồn: <https://scipython.com/book/chapter-3-simple-plotting-with-pylab/examples/moores-law/>)

Nhận xét về tính đơn điệu của hàm số mô tả định luật Moore.

**Bài 22 (Mức độ 2).** Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục  $Ox$ . Toạ độ của chất điểm tại thời điểm  $t$  được xác định bởi hàm số  $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$  với  $t \geq 0$ . Khi đó  $x'(t)$  là vận tốc của chất điểm tại thời điểm  $t$ , kí hiệu  $v(t)$ . Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

**Bài 23 (Mức độ 2).** Xét một chất điểm chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải (Hình vẽ). Giả sử vị trí  $s(t)$  (mét) của chất điểm trên trục số đã chọn tại thời điểm  $t$  (giây) được cho bởi công thức  $s(t) = t^3 - 9t^2 + 15t$ ,  $t \geq 0$ . Hỏi trong khoảng thời gian nào thì chất điểm chuyển động sang phải, trong khoảng thời gian nào thì chất điểm chuyển động sang trái?



**Bài 24 (Mức độ 2).** Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ độ cao 2 m với vận tốc ban đầu là 24,5 m/s. Trong Vật lí, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí thì độ cao  $h$  (mét) của vật sau  $t$  (giây) được cho bởi công thức  $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$ . Hỏi tại từ thời điểm  $t = 3$  (giây) đến  $t = 4$  (giây), thì độ cao của vật tăng hay giảm?

**Bài 25 (Mức độ 3).** Giả sử dân số của một thị trấn sau  $t$  năm kể từ năm 2000 được mô tả bởi hàm số  $N(t) = \frac{25t+10}{t+5}, t \geq 0$ , trong đó  $N(t)$  được tính bằng nghìn người. Tính đạo hàm  $N'(t)$  và  $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$ .

Từ đó giải thích tại sao dân số của thị trấn đó luôn tăng nhưng sẽ không vượt quá một ngưỡng nào đó.

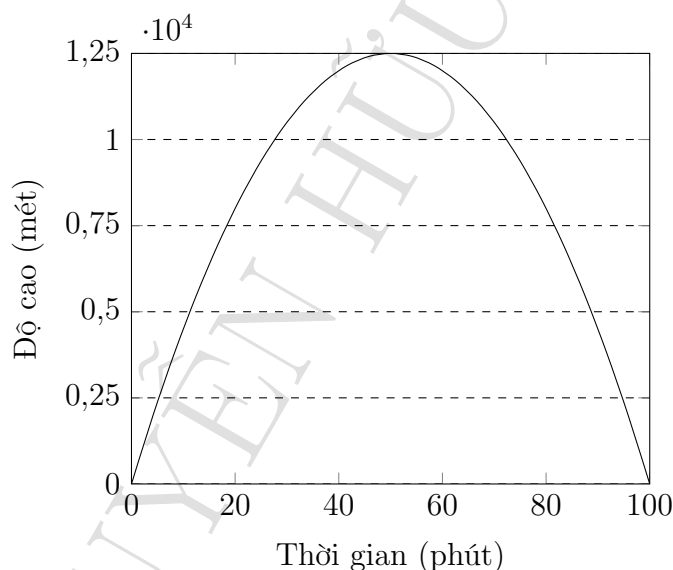
### 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 81 (Mức độ 1).** Một công ty sản xuất và bán một loại sản phẩm với lợi nhuận biểu diễn bởi hàm số  $P(x) = 100x - x^2$  (với  $x$  là số lượng sản phẩm). Hàm số này

- A. đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .
- B. nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .
- C. đồng biến trên  $(0; 50)$  và nghịch biến trên  $(50; +\infty)$ .
- D. nghịch biến trên  $(0; 50)$  và đồng biến trên  $(50; +\infty)$ .

**Câu 82 (Mức độ 1).** Đồ thị dưới mô tả sự thay đổi độ cao của một máy bay. Độ cao của máy bay giảm trong khoảng thời gian nào?

Sự thay đổi độ cao của máy bay theo thời gian



- A.  $(0; 50)$ .
- B.  $(50; 100)$ .
- C.  $(0; 100)$ .
- D.  $(40; 60)$ .

**Câu 83 (Mức độ 1).** Một công ty bất động sản đang muốn tăng doanh thu bằng cách tăng giá thuê căn hộ mỗi tháng lên  $x$  (đồng/tháng) ( $x \geq 0$ ). Doanh thu hàng tháng của công ty là một hàm số  $T(x)$  có bảng biến thiên như sau

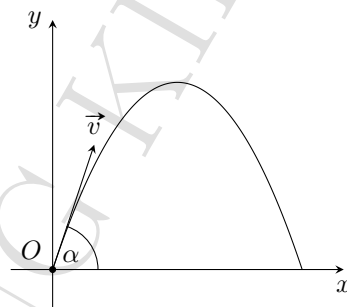
|         |   |         |           |
|---------|---|---------|-----------|
| $x$     | 0 | 250 000 | $+\infty$ |
| $T'(x)$ |   | +       | 0         |
| $T(x)$  |   |         | -         |
|         | 0 | $T_0$   | 0         |

Số tiền tăng thêm trong khoảng nào thì doanh thu hàng tháng của công ty sẽ tăng.

- A.**  $(0; 250\,000)$ . **B.**  $(-\infty; 250\,000)$ . **C.**  $(250\,000; 1\,000\,000)$ . **D.**  $(250\,000; +\infty)$ .

**Câu 84 (Mức độ 2).**

Một vật được ném từ mặt đất lên trời xiên góc  $\alpha$  so với phương nằm ngang với vận tốc ban đầu  $v_0 = 9\text{ m/s}$  (Hình vẽ). Khi đó quỹ đạo chuyển động của vật tuân theo phương trình  $y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$ , ở đó  $x$  (mét) là khoảng cách vật bay được theo phương ngang từ điểm ném,  $y$  (mét) là độ cao so với mặt đất của vật trong quá trình bay,  $g$  là gia tốc trọng trường (theo *Vật lý đại cương, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2016*). Khi góc  $\alpha = 60^\circ$ , thì  $y$  đồng biến trên khoảng nào? (giả sử gia tốc trọng trường là  $g = 9,8\text{ m/s}^2$ ).



- A.**  $(0; 3,58)$ . **B.**  $(3,58; 5)$ . **C.**  $(0; 4)$ . **D.**  $(0; +\infty)$ .

**Câu 85 (Mức độ 2).** Giả sử chiều cao ( $h$ ) của một loại cây trồng theo thời gian ( $t$ ) được biểu diễn bởi hàm số  $h(t) = 3t^2 + 2t + 1$ , trong đó  $h$  được đo bằng mét, và  $t$  được đo bằng năm. Hàm số  $h(t)$  có đơn điệu không?

- A.** Không. **B.** Có, và hàm số đồng biến.  
**C.** Có, và hàm số nghịch biến. **D.** Không thể xác định.

**Câu 86 (Mức độ 2).** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ  $t$  là  $f(t) = 45t^2 - t^3$  (kết quả khảo sát được trong 8 tháng vừa qua). Xem  $f'(t)$  là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm  $t$ .

- A.** Từ ngày đầu tiên đến ngày thứ 10 tốc độ truyền bệnh tăng dần.  
**B.** Từ ngày thứ 10 đến ngày thứ 20 tốc độ truyền bệnh giảm dần.  
**C.** Từ ngày thứ 15 đến ngày thứ 20 tốc độ truyền bệnh tăng dần.  
**D.** Từ ngày thứ 15 đến ngày thứ 20 tốc độ truyền bệnh tăng dần rồi giảm dần kể từ ngày thứ 21.

**Câu 87 (Mức độ 2).** Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình  $S = t^3 - 3t^2 + 4t$ , trong đó  $t$  tính bằng giây ( $s$ ) và  $S$  được tính bằng mét ( $m$ ). Gia tốc của chất điểm từ thời điểm  $t = 1$  đến thời điểm  $t = 2$  giây thay đổi như thế nào?

- A.** Gia tốc tăng rồi giảm. **B.** Gia tốc giảm.  
**C.** Gia tốc tăng. **D.** Gia tốc không thay đổi.

**Câu 88 (Mức độ 3).** Nhân dịp Ngày Quốc tế phụ nữ 8 - 3, câu lạc bộ mỹ thuật của An muốn tổ chức kinh doanh thiệp chúc mừng ngày 8 - 3 để gây quỹ sinh hoạt cho câu lạc bộ. Mỗi tấm thiệp mua về với giá 8 nghìn đồng. Các bạn trong câu lạc bộ sẽ sáng tác thêm nội dung của thiệp (vẽ thêm hình ảnh người, hoa cỏ, lời chúc ...) và sau đó bán lại. Với mức giá bán 20 nghìn đồng cho 1 tấm thiệp, câu lạc bộ có thể bán được 500 chiếc. Cứ với mỗi 1 nghìn đồng giảm giá, số lượng hàng bán ra tăng thêm 50 chiếc. Phát biểu nào sau đây là **đúng**?

- A.** Khi giá giảm từ 1 nghìn đồng đến 20 nghìn đồng thì lợi nhuận của câu lạc bộ sẽ giảm.  
**B.** Khi giá giảm từ 5 nghìn đồng đến 20 nghìn đồng thì lợi nhuận của câu lạc bộ không đổi.  
**C.** Khi giá giảm từ 1 nghìn đồng đến 20 nghìn đồng thì lợi nhuận của câu lạc bộ sẽ tăng.  
**D.** Khi giá giảm từ 5 nghìn đồng đến 20 nghìn đồng thì lợi nhuận của câu lạc bộ sẽ tăng.

**Câu 89 (Mức độ 3).** Một xe khách tuyến có sức chứa tối đa là 60 hành khách. Nếu chuyển xe chở  $x$  hành khách thì giá cho mỗi hành khách là  $50\,000 \left(3 - \frac{x}{40}\right)^2$  (đồng). Doanh thu của xe tăng dần khi số hành khách  $x$  nằm trong khoảng

- A.**  $(10; 40)$ . **B.**  $(20; 50)$ . **C.**  $(40; 60)$ . **D.**  $(0; 60)$ .

**Câu 90 (Mức độ 3).** Một công ty dự kiến chi 1 tỉ đồng sản xuất các thùng đựng sơn hình trụ với dung tích 5 lít. Giá sản xuất mặt xung quanh là 100 nghìn đồng/m<sup>2</sup>, giá sản xuất mặt đáy là 120 nghìn đồng/m<sup>2</sup>. Giả sử chi phí cho các mối nối không đáng kể. Phát biểu nào sau đây là **đúng**?

- A. Chi phí sản xuất một thùng sơn là một hàm nghịch biến đối với bán kính thùng sơn.  
 B. Chi phí sản xuất một thùng sơn là một hàm đồng biến đối với bán kính thùng sơn.  
 C. Chi phí sản xuất thùng sơn theo bán kính  $r$  là một hàm nghịch biến trên khoảng  $\left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{480\pi}}\right)$ .  
 D. Chi phí sản xuất thùng sơn theo bán kính  $r$  là một hàm đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{480\pi}}\right)$ .

#### 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 91 (Mức độ 3).** Giả sử doanh số (tính bằng sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong một năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số  $f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}}$ ,  $t \geq 0$ , trong đó thời gian  $t$  được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Gọi  $g(t) = f'(t)$  là hàm tốc độ bán hàng. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

| Phát biểu                                                                                          | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Doanh số của sản phẩm mới trong năm thứ hai là $\frac{5000}{1 + 5e^2}$ .                        |   |   |
| b) Hàm tốc độ bán hàng là $g(t) = f'(t) = \frac{25000e^{-t}}{(1 + 5e^{-t})^2}$ , $t \geq 0$ .      |   |   |
| c) Đạo hàm của hàm tốc độ bán hàng là $g'(t) = \frac{25000e^{-t}(5e^{-t} - 1)}{(1 + 5e^{-t})^3}$ . |   |   |
| d) Tốc độ bán hàng tăng dần trong 3 năm đầu tiên sau đó sẽ giảm dần trong những năm tiếp theo.     |   |   |

**Câu 92 (Mức độ 3).** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức  $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$ , trong đó  $x$  là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân ( $x$  được tính bằng miligam). Mỗi kết quả dưới đây **đúng** hay **sai**?

| Phát biểu                                                                                                        | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Khi liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân là 30 mg thì độ giảm huyết áp của bệnh nhân bằng 0.              |   |   |
| b) Đạo hàm của độ giảm huyết áp theo liều lượng thuốc tiêm cho bệnh nhân là một tam thức bậc hai theo biến $x$ . |   |   |
| c) Nghiệm của đạo hàm độ giảm huyết áp theo liều lượng là 0 và 30.                                               |   |   |
| d) Độ giảm huyết áp sẽ giảm khi liều lượng thuốc tăng 0 đến 20 mg.                                               |   |   |

**Câu 93 (Mức độ 3).** Trong 25 ngày đầu tiên sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh (kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân thứ nhất) đến ngày thứ  $t$  là  $f(t) = 45t^2 - t^3$  với  $t \in \{0; 1; 2; \dots; 25\}$ . Mỗi kết quả dưới đây **đúng** hay **sai**?

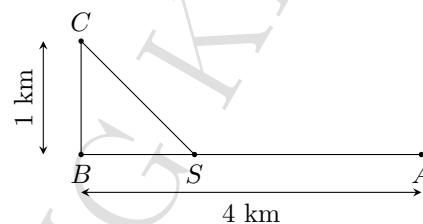
| Phát biểu                                                                   | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Số người nhiễm bệnh đến ngày thứ 25 là 12 500.                           |   |   |
| b) Tốc độ truyền bệnh (người/ngày) theo thời gian là $f'(t) = 90t + 3t^2$ . |   |   |
| c) Tốc độ truyền bệnh vào ngày thứ 10 là 600 người/ngày.                    |   |   |

| Phát biểu                                                                               | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| d) Tốc độ truyền bệnh tăng dần cho đến ngày thứ 15 sau đó giảm dần cho đến ngày thứ 25. |   |   |

**Câu 94 (Mức độ 3).**

Người ta thiết kế một đường dây tải điện nối từ trạm biến áp ở vị trí  $A$  đến trạm biến áp ở vị trí  $C$ . Do điều kiện thực tế nên phương án thiết kế được đưa ra như sau

- ☑ Chọn điểm  $B$  sao cho  $\widehat{ABC} = 90^\circ$ .
- ☑ Chọn một vị trí là điểm  $S$  nằm giữa  $A$  và  $B$  để mắc đường dây tải điện đi từ  $A$  đến  $S$ , rồi từ  $S$  đến  $C$  như hình vẽ.



Biết rằng  $AB = 4$  km,  $BC = 1$  km, chi phí lắp đặt mỗi kilomet dây điện trên quãng đường  $AS$ ,  $SC$  lần lượt là 30 triệu đồng và 50 triệu đồng. Gọi độ dài đoạn thẳng  $AS = x$  (km) ( $0 < x < 4$ ). Hàm  $T(x)$  là hàm tổng chi phí mắc đường dây tải điện  $ASC$ . Mỗi kết quả dưới đây **đúng** hay **sai**?

| Phát biểu                                                                                         | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Độ dài đoạn $SC = \sqrt{1 - (4 - x)^2}$ .                                                      |   |   |
| b) Tổng chi phí mắc đường dây tải điện $ASC$ là $T(x) = 30x + 50\sqrt{1 + (4 - x)^2}$ triệu đồng. |   |   |
| c) Nghiệm của phương trình $T'(x) = 0$ là $x = \frac{13}{2}$ .                                    |   |   |
| d) Chi phí tăng dần khi đoạn đường $AS$ tăng dần từ $\frac{13}{2}$ km đến 4 km.                   |   |   |

**Câu 95 (Mức độ 3).** Một nhà máy cần sản xuất một bể nước không nắp bằng tôn có dạng hình hộp chữ nhật với đáy có chiều dài gấp hai lần chiều rộng và thể tích là  $\frac{4}{3} \text{ m}^3$ . Gọi chiều rộng của bể nước là  $x$  (m) ( $x > 0$ ). Mỗi kết quả dưới đây **đúng** hay **sai**?

| Phát biểu                                                                                          | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Chiều dài đáy bể nước là $2x$ (m).                                                              |   |   |
| b) Chiều cao của bể nước là $\frac{2}{3x^2}$ (m).                                                  |   |   |
| c) Diện tích tôn cần sử dụng để sản xuất bể nước là $S(x) = 2x^2 - \frac{4}{x}$ (m <sup>2</sup> ). |   |   |
| d) Khi chiều rộng tăng từ 0 đến 1 m thì số tôn cần sử dụng tăng dần.                               |   |   |

**5****Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn**

**Câu 96 (Mức độ 2).** Chi phí sản xuất  $x$  sản phẩm mỗi tháng của một công ty cho bởi hàm  $\bar{C}(x)$  có bảng biến thiên như sau

|                    |   |      |           |
|--------------------|---|------|-----------|
| $x$                | 0 | 1000 | $+\infty$ |
| $\overline{C}'(x)$ | - | 0    | +         |
| $\overline{C}(x)$  |   | 60   | $+\infty$ |

Hỏi khi số sản phẩm mỗi tháng vượt qua giá trị bao nhiêu thì chi phí sản xuất bắt đầu tăng.

KQ:

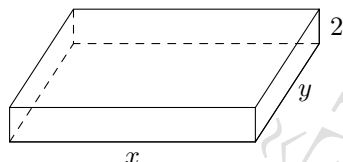
**Câu 97 (Mức độ 3).** Một nhà máy sản xuất xe đạp cho thị trường châu Âu theo đơn giá 120 euro. Chi phí mỗi ngày của nhà máy được cho bởi hàm số  $K(x) = 0,02x^3 - 3x^2 + 172x + 2400$ , trong đó  $x$  là số lượng xe đạp sản xuất được trong ngày hôm đó. Mỗi ngày có thể sản xuất tối đa 130 xe đạp. Giả sử số xe đạp sản xuất được trong mỗi ngày đều được bán hết vào cuối ngày đó. Gọi  $G(x)$  là hàm số biểu diễn lợi nhuận hàng ngày của nhà máy. Lợi nhuận hàng ngày là hàm đồng biến theo  $x$  khi  $x \in (a; b)$ , trong đó  $a$  và  $b$  là các giá trị nguyên dương.  $a + b$  lớn nhất bằng nhiêu?

KQ:

**Câu 98 (Mức độ 3).** Người ta muốn xây một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật, thể tích  $1800 \text{ m}^3$  và chiều sâu 2 m (Hình vẽ). Biết rằng chi phí xây mỗi đơn vị diện tích của đáy bể gấp hai lần so với thành bể. Gọi  $x$  và  $y$  là kích thước bể như hình vẽ. Khảo sát mối quan hệ giữa chi phí xây dựng bể  $f(x)$  và kích thước  $x$  ta thu được bảng biến thiên như sau. Tính  $2a$ .

KQ:

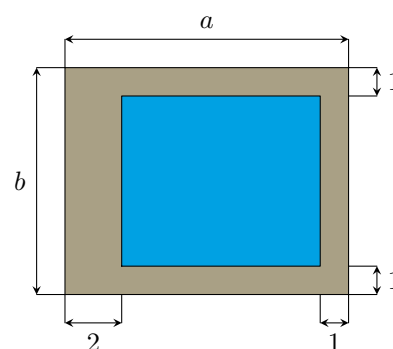
|         |   |        |           |
|---------|---|--------|-----------|
| $x$     | 0 | $a$    | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | - | 0      | +         |
| $f(x)$  |   | $f(b)$ | $+\infty$ |



**Câu 99 (Mức độ 4).**

Người ta muốn thiết kế một lồng nuôi cá có bề mặt hình chữ nhật bao gồm phần mặt nước có diện tích bằng  $54 \text{ m}^2$  và phần đường đi xung quanh với kích thước (đơn vị: m) như hình vẽ. Khi kích thước  $a$  thay đổi trong khoảng  $(3; +\infty)$  thì giá trị hàm số mô tả diện tích lối đi theo kích thước  $a$  sẽ giảm đến giá trị  $S_0$  rồi tăng lên. Xác định giá trị  $S_0$ .

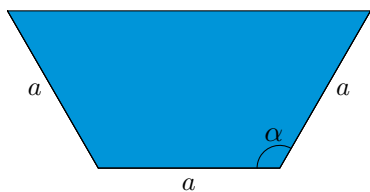
KQ:



**Câu 100 (Mức độ 4).** Mặt cắt ngang của một máng dẫn nước là một hình thang cân có độ dài đáy bé bằng độ dài cạnh bên và bằng  $a$  (cm) không đổi (Hình vẽ). Gọi  $\alpha$  là một góc của hình thang cân tạo bởi đáy bé và cạnh bên  $\left(\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi\right)$ . Hàm số  $S(\alpha)$  mô tả diện tích mặt cắt ngang theo góc  $\alpha$  có bảng biến thiên như hình vẽ. Tính  $a \cdot b$ . (Làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ:





|              |   |     |       |
|--------------|---|-----|-------|
| $\alpha$     | 0 | $a$ | $\pi$ |
| $S'(\alpha)$ |   | +   | 0     |
| $S(\alpha)$  | 0 | $b$ | 1     |

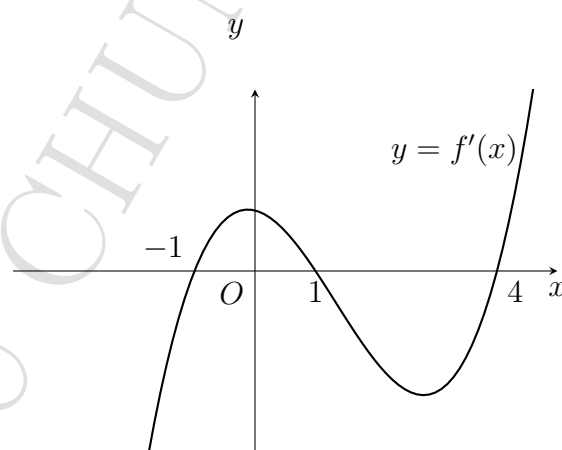
**DẠNG 6****Tính đơn điệu của hàm hợp**

$$y' = [f(u)]' = u' \cdot f'(u).$$

**Câu 101.**

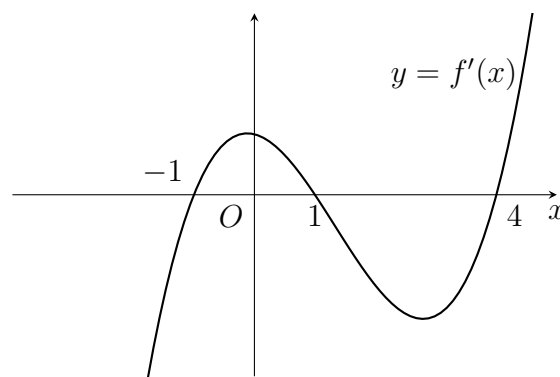
Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình bên. Hàm số  $y = g(x) = f(2-x)$  đồng biến trên khoảng nào sau đây

- A.**  $(1; 3)$ . **B.**  $(2; +\infty)$ .  
**C.**  $(-2; 1)$ . **D.**  $(-\infty; -2)$ .

**Câu 102.**

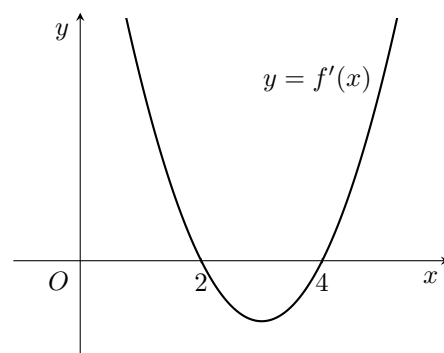
Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Hàm số  $y = f(x^2)$  có bao nhiêu khoảng nghịch biến.

- A.** 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

**Câu 103.**

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số  $y = f(1+x^2)$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.**  $(\sqrt{3}; +\infty)$ . **B.**  $(-\sqrt{3}; -1)$ .  
**C.**  $(1; \sqrt{3})$ . **D.**  $(0; 1)$ .



**Câu 104.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2(x-9)(x-4)^2$ . Khi đó hàm số  $g(x) = f(x^2)$  đồng biến trên khoảng nào?

- A.  $(-2; 2)$ . B.  $(3; +\infty)$ . C.  $(-\infty; -3)$ . D.  $(-\infty; -3) \cup (0; 3)$ .

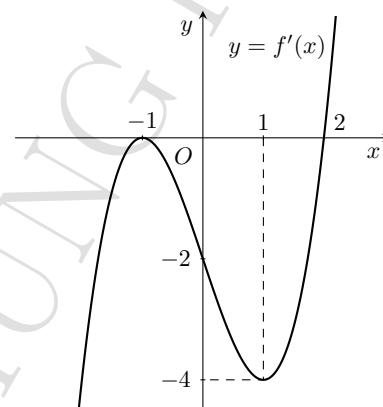
**Câu 105.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2(x - 2028)(x - 2023)^2$ . Khi đó hàm số  $y = g(x) = f(x^2 + 2019)$  đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A.  $(-2; 2)$ . B.  $(0; 3)$ . C.  $(-3; 0)$ . D.  $(2; +\infty)$ .

**Câu 106.**

Cho hàm số  $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ , đồ thị hình bên là đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$ . Xét hàm số  $g(x) = f(x^2 - 2)$ . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

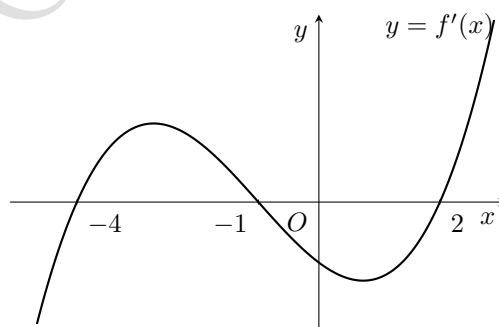
- A. Hàm số  $g(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$ .  
 B. Hàm số  $g(x)$  đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .  
 C. Hàm số  $g(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(-1; 0)$ .  
 D. Hàm số  $g(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(0; 2)$ .



**Câu 107.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị  $y = f'(x)$  như hình bên. Hỏi hàm số  $g(x) = f(x^2 - 5)$  có bao nhiêu khoảng nghịch biến?

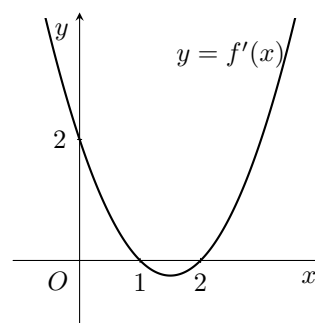
- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.



**Câu 108.**

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình bên. Hàm số  $y = f(x - x^2)$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

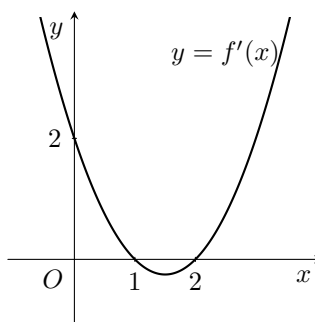
- A.  $(-\frac{1}{2}; +\infty)$ . B.  $(-\frac{3}{2}; +\infty)$ . C.  $(-\infty; \frac{3}{2})$ . D.  $(\frac{1}{2}; +\infty)$ .



**Câu 109.**

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình bên. Hàm số  $y = f(1 + 2x - x^2)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(-\infty; 1)$ . B.  $(1; +\infty)$ . C.  $(0; 1)$ . D.  $(1; 2)$ .

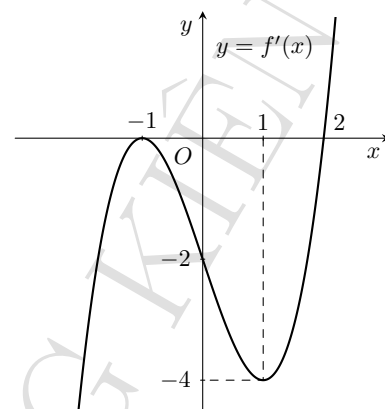


**Câu 110.**



Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  trên  $\mathbb{R}$  và đồ thị của hàm số  $f'(x)$  như hình vẽ. Hàm số  $g(x) = f(x^2 - 2x - 1)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

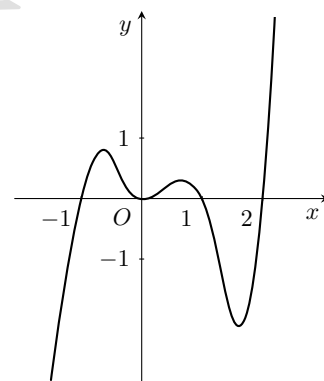
- A.**  $(-\infty; 1)$ . **B.**  $(1; +\infty)$ . **C.**  $(0; 2)$ . **D.**  $(-1; 0)$ .



**Câu 111.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ . Biết hàm số  $y = f'(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình bên dưới. Tìm các khoảng đồng biến của hàm số  $y = f(\sqrt{x^2 + 1})$ .

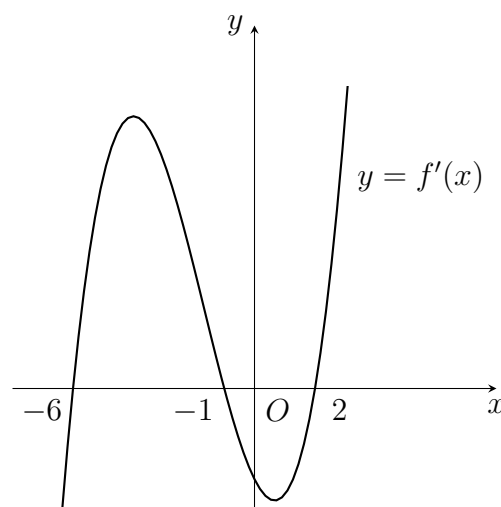
- A.**  $(-\infty; -\sqrt{3})$ ,  $(0; \sqrt{3})$ . **B.**  $(-\infty; -\sqrt{3})$ ,  $(\sqrt{3}; +\infty)$ .  
**C.**  $(-\sqrt{3}; 0)$ ,  $(\sqrt{3}; +\infty)$ . **D.**  $(-\infty; -\sqrt{3})$ ,  $(0; +\infty)$ .



**Câu 112.**

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Biết rằng hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số  $y = f(3 - x^2)$  đồng biến trên khoảng

- A.**  $(0; 1)$ . **B.**  $(-1; 0)$ . **C.**  $(2; 3)$ . **D.**  $(-2; -1)$ .



**Câu 113.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ bên dưới.

|         |           |      |     |      |     |           |
|---------|-----------|------|-----|------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ |     | $-1$ |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$  | $0$ | $+$  | $0$ | $-$       |

Hỏi hàm số  $y = g(x) = f(x^2 + 2x)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.**  $(-\infty; 0)$ . **B.**  $(-2; 1)$ . **C.**  $(-\infty; -2)$ . **D.**  $(2; +\infty)$ .

**Câu 114.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết hàm số  $y = f'(x)$  có bảng xét dấu như hình bên dưới.

|         |           |   |   |   |   |   |           |
|---------|-----------|---|---|---|---|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |   | 1 |   | 2 |   | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | + | 0 | - | 0 | + |           |

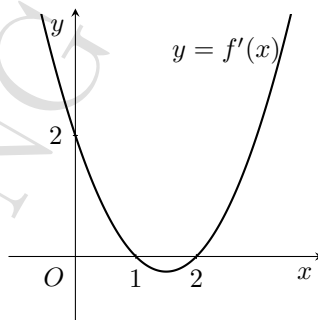
Hàm số  $g(x) = f(2\cos x + 1)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(0; \frac{\pi}{6})$ . B.  $(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3})$ . C.  $(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2})$ . D.  $(\frac{\pi}{2}; \pi)$ .

**Câu 115.**

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình bên. Hàm số  $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2})$  đồng biến trên khoảng nào sau đây?

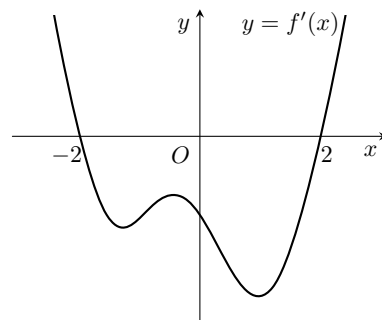
- A.  $(-\infty; -1)$ . B.  $(-\infty; \frac{1}{2})$ . C.  $(\frac{1}{2}; +\infty)$ . D.  $(-1; +\infty)$ .



**Câu 116.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  có  $f(-2) < 0$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

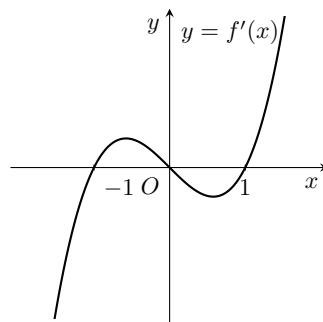
- A. Hàm số  $y = |f(1 - x^2)|$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$ .  
 B. Hàm số  $y = |f(1 - x^2)|$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$ .  
 C. Hàm số  $y = |f(1 - x^2)|$  nghịch biến trên khoảng  $(-1; 0)$ .  
 D. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là  $|f(-2)|$ .



**Câu 117.**

Cho hàm số  $y = f(x)$ , hàm số  $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số  $g(x) = f(f'(x))$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(1; +\infty)$ . B.  $(-\infty; -2)$ .  
 C.  $(-1; 0)$ . D.  $(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3})$ .



**Câu 118.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x(x-1)^2(x^2 + mx + 9)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu số nguyên dương  $m$  để hàm số  $g(x) = f(3-x)$  đồng biến trên khoảng  $(3; +\infty)$ ?

- A. 5. B. 6. C. 7. D. 8.

**Câu 119.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x(x-1)^2(3x^4 + mx^3 + 1)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu số nguyên âm  $m$  để hàm số  $g(x) = f(x^2)$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ ?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

**Câu 120.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2(x+2)(x^2 + mx + 5)$  với  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Số giá trị nguyên âm của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = f(x^2 + x - 2)$  đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$  là

- A. 7. B. 5. C. 4. D. 3.

**Câu 121.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  là  $f'(x) = (x-1)(x+3)$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-10; 20]$  để hàm số  $y = f(x^2 + 3x - m)$  đồng biến trên khoảng  $(0; 2)$ ?

- A. 18. B. 17. C. 16. D. 20.

**Câu 122.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  là  $f'(x) = (x-1)(x+3)$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-10; 20]$  để hàm số  $y = f(x^2 + 3x - m)$  đồng biến trên khoảng  $(0; 2)$ .

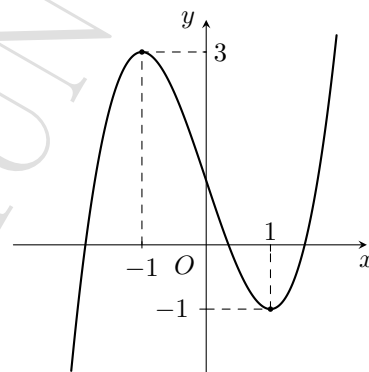
- A. 18. B. 17. C. 16. D. 20.

**Câu 123.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x+1)(x-1)(x-4); \forall x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu số nguyên  $m < 2021$  để hàm số  $g(x) = f\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right)$  đồng biến trên  $(2; +\infty)$ .

- A. 2022. B. 2019. C. 2020. D. 2021.

**Câu 124.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên. Số giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(x^2 + x + m)$  nghịch biến trên  $(0; 1)$  là



- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

**Câu 125.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

|         |           |     |      |     |             |     |     |     |           |
|---------|-----------|-----|------|-----|-------------|-----|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |     | $-1$ |     | $1$         |     | $3$ |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$ | $0$  | $+$ | $\parallel$ | $+$ | $0$ | $-$ |           |

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = f(x+m)$  đồng biến trên khoảng  $(0; 2)$ .

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

**Câu 126.** Cho hàm số  $y = f(x)$  là một hàm đa thức và có bảng xét dấu của  $f'(x)$  như hình bên dưới:

|         |           |     |     |     |     |     |           |
|---------|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |     | $1$ |     | $3$ |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |           |

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(\sqrt{x-2} + m)$  (1) nghịch biến trên khoảng  $(11; 25)$ .

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

**Câu 127.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f'(x) = x^2(x-1)(4-x)$ . Hàm số  $y = g(x) = f(x) + f(1-x)$  đồng biến trên khoảng

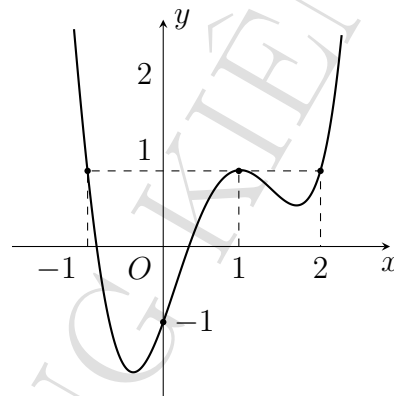
- A.  $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$ . B.  $(0; 1)$ . C.  $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ . D.  $(1; 2)$ .

**Câu 128.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $f'(x) = x^2(x-1)^2(x-3)$ . Hàm số  $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - 5$  đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A.  $(0; 2)$ . B.  $\left(2; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ . C.  $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; 2\right)$ . D.  $\left(0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ .

**Câu 129.**

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình bên. Đặt  $g(x) = f(x) - x$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?



**A.**  $g(-1) < g(1) < g(2)$ .

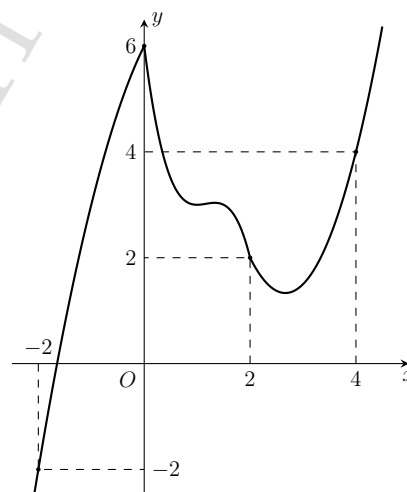
**C.**  $g(2) < g(-1) < g(1)$ .

**B.**  $g(2) < g(1) < g(-1)$ .

**D.**  $g(1) < g(-1) < g(2)$ .

**Câu 130.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Hàm số  $g(x) = 2f(x) - x^2$  đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?



**A.**  $(-\infty; -2)$ .

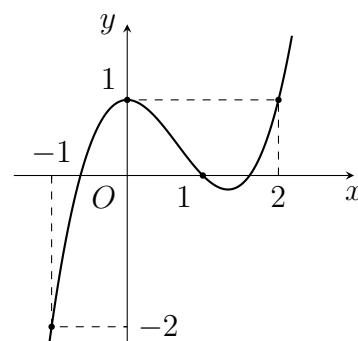
**B.**  $(-2; 2)$ .

**C.**  $(2; 4)$ .

**D.**  $(2; +\infty)$ .

**Câu 131.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Hàm số  $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$  đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



**A.**  $(-1; 0)$ .

**B.**  $(0; 2)$ .

**C.**  $(1; 2)$ .

**D.**  $(0; 1)$ .

**Câu 132.** Cho hàm số  $f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = (1 - x)(x + 2)g(x) + 2021$  với  $g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Hàm số  $y = f(1 - x) + 2021x + 2022$  nghịch biến trên khoảng nào?

**A.**  $(1; +\infty)$ .

**B.**  $(0; 3)$ .

**C.**  $(-\infty; 3)$ .

**D.**  $(3; +\infty)$ .

**Câu 133.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = (1 - x^2)(x - 5)$ . Hàm số  $y = 3f(x + 3) - x^3 + 12x$  nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

**A.**  $(1; 5)$ .

**B.**  $(2; +\infty)$ .

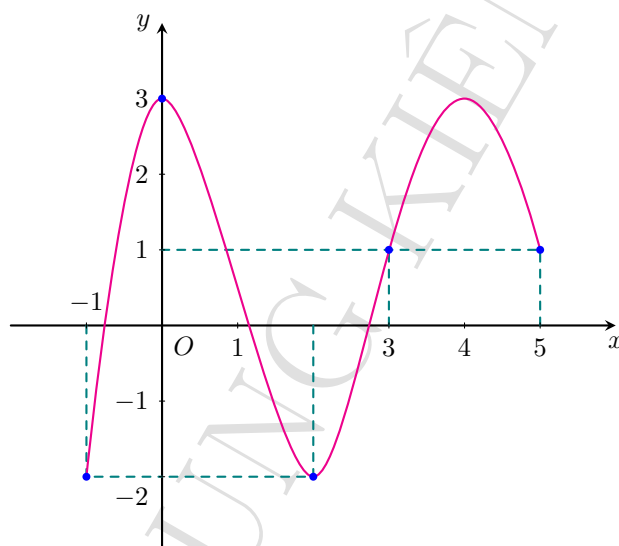
**C.**  $(-1; 0)$ .

**D.**  $(-\infty; -1)$ .

**Câu 134.**

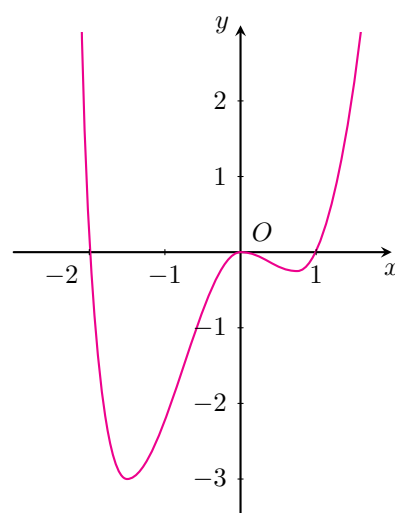
Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $[-1; 5]$  có đồ thị của hàm  $y = f'(x)$  được cho như hình bên. Hàm số  $g(x) = -2f(x) + x^2 - 4x + 4$  đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- A.  $(-1; 0)$ . B.  $(0; 2)$ .  
C.  $(2; 3)$ . D.  $(-2; -1)$ .

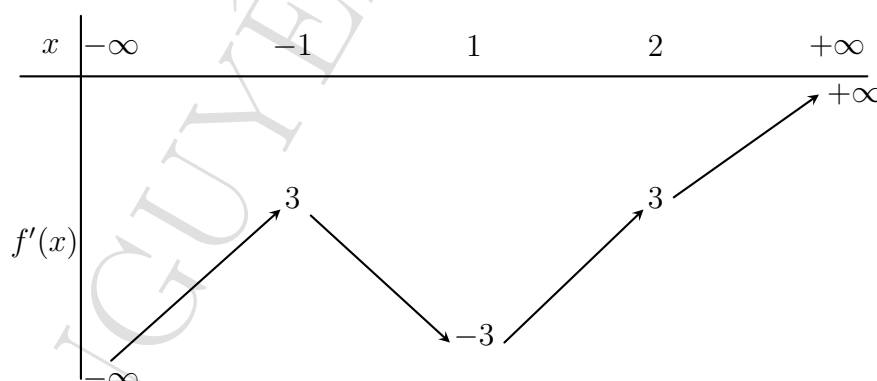
**Câu 135.**

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị  $y = f'(x)$  như hình bên. Hỏi hàm số  $g(x) = f(x+1) + f(2-x) - x^2 + 6x - 3$  đồng biến trên khoảng nào cho dưới đây?

- A.  $(-\infty; 0)$ . B.  $(0; 3)$ . C.  $(1; 2)$ . D.  $(3; +\infty)$ .



**Câu 136.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và bảng biến thiên của  $y = f'(x)$  như sau



Hàm số  $g(x) = f(x) - 3x$  đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A.  $(2; 2019)$ . B.  $(-2019; -2)$ . C.  $(1; 2)$ . D.  $(-1; 1)$ .

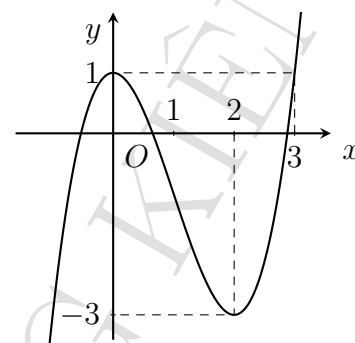
**Câu 137.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = 3x^2 + 6x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ . Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng  $(-50; 50)$  của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = f(x) - (m+1)x - 2$  nghịch biến trên khoảng  $(0; 2)$ ?

- A. 26. B. 25. C. 51. D. 50.

**Câu 138.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Các giá trị của  $m$  để hàm số  $y = f(x) + (m - 1)x$  đồng biến trên khoảng  $(0; 3)$  là

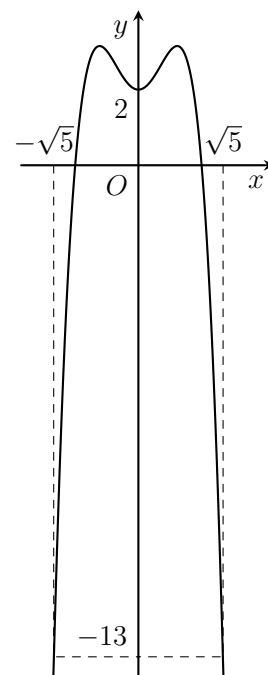
- A.  $m > 4$ . B.  $m \leq 4$ . C.  $m \geq 4$ . D.  $0 > m > 4$ .



**Câu 139.**

Cho hàm số  $f(x)$  có đồ thị  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Xét hàm số  $g(x) = -2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5}$  ( $m \in \mathbb{R}$ ). Để  $g(x) \leq 0$  với  $\forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$  thì điều kiện của  $m$  là

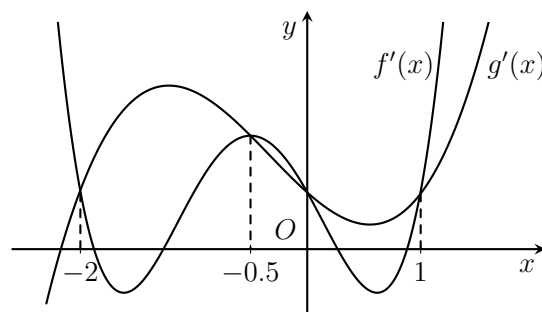
- A.  $m \geq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$ . B.  $m \leq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$ .  
C.  $m \leq \frac{2}{3}f(0) - 2\sqrt{5}$ . D.  $m \geq \frac{2}{3}f(-\sqrt{5}) - 4\sqrt{5}$ .



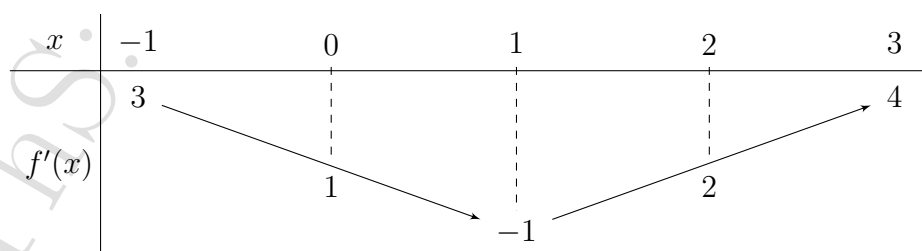
**Câu 140.**

Cho hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị các đạo hàm như hình vẽ bên. Hàm số  $h(x) = f(x - 1) - g(x - 1)$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(\frac{1}{2}; 1)$ . B.  $(-1; \frac{1}{2})$ .  
C.  $(1; +\infty)$ . D.  $(2; +\infty)$ .



**Câu 141.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Bảng biến thiên của hàm số  $f'(x)$  như hình vẽ sau



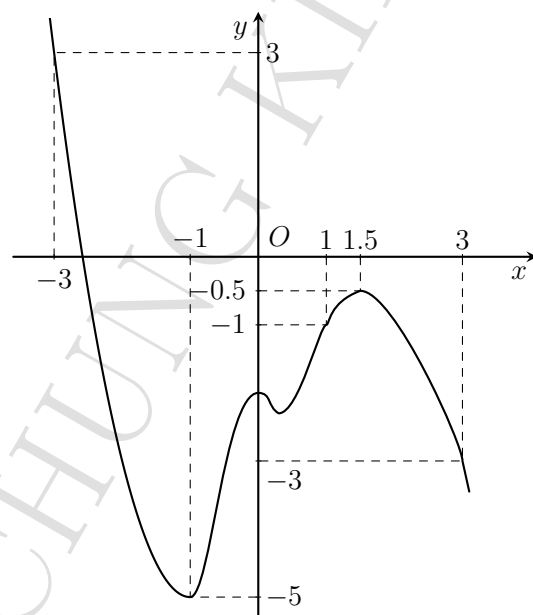
Hàm số  $g(x) = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + x$  nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A.**  $(-4; -2)$ . **B.**  $(-2; 0)$ . **C.**  $(0; 2)$ . **D.**  $(2; 4)$ .

**Câu 142.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Hàm số  $y = f(1 - x) + \frac{x^2}{2} - x$  nghịch biến trên khoảng

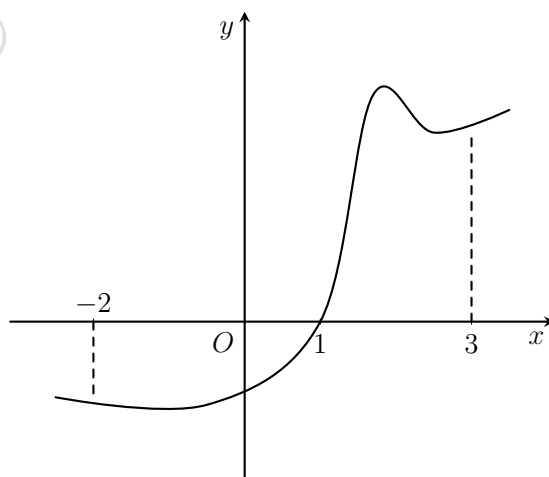
- A.**  $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$ . **B.**  $(-2; 0)$ . **C.**  $(-3; 1)$ . **D.**  $(1; 3)$ .



**Câu 143.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  có như sau. Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  không có giao điểm với trục hoành và  $\max_{\mathbb{R}} f(x) = -1$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  có duy nhất 1 giao điểm với trục hoành. Có bao nhiêu giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = \frac{(x-1)^2 [(-2m^2+1)x+m]}{f(x)}$  luôn đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

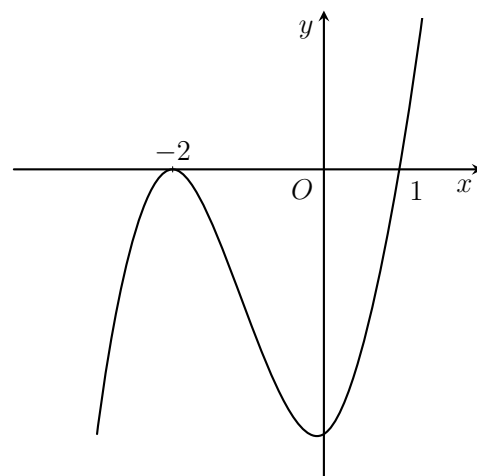
- A.** 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 5.



**Câu 144.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(3x+5)$  như hình vẽ. Hàm số  $y = f(x)$  nghịch trên khoảng nào?

- A.**  $(-\infty; 8)$ . **B.**  $\left(-\frac{7}{3}; +\infty\right)$ .  
**C.**  $\left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$ . **D.**  $(-\infty; 10)$ .



**Câu 145.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và  $f'(x) = (1-x)(x+2)g(x) + 1$  trong đó  $g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Hàm số  $y = f(1-x) + x + 2$  nghịch biến trên các khoảng



A.  $(1; +\infty)$ .

B.  $(0; 3)$ .

C.  $(-\infty; 3)$ .

D.  $(3; +\infty)$ .

**Câu 146.**

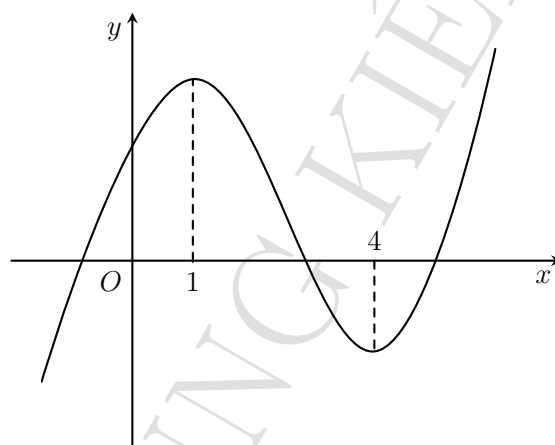
Cho hàm số  $f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Hàm số  $f(3x - 2)$  nghịch biến trên khoảng  $(\alpha; \beta)$ . Khi đó giá trị lớn nhất của  $\beta - \alpha$  là.

A. 9.

B. 3.

C. 6.

D. 1.



**Câu 147.**

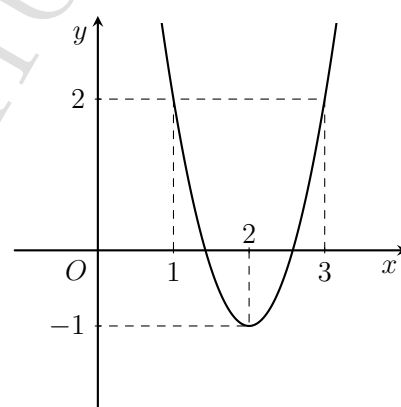
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm là hàm số  $f'(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Biết rằng hàm số  $y = f'(x - 2) + 2$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên khoảng nào?

A.  $(-\infty; 2)$ .

B.  $(-1; 1)$ .

C.  $(\frac{3}{2}; \frac{5}{2})$ .

D.  $(2; +\infty)$ .



**Câu 148.**

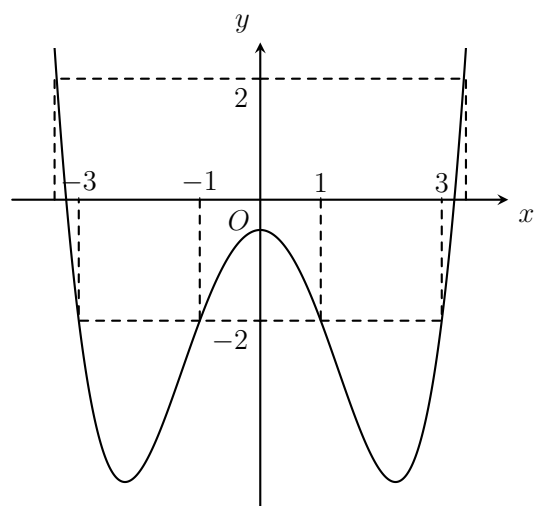
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm là hàm số  $f'(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Biết rằng hàm số  $y = f'(x + 2) - 2$  có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên khoảng nào?

A.  $(-3; -1), (1; 3)$ .

B.  $(-1; 1), (3; 5)$ .

C.  $(-\infty; -2), (0; 2)$ .

D.  $(-5; -3), (-1; 1)$ .



**Câu 149.** Cho hàm số  $y = f(x + 2)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như hình vẽ.

|         |           |      |     |      |     |           |
|---------|-----------|------|-----|------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-4$ |     | $-2$ |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $+$  | $0$ | $-$  | $0$ | $+$       |
| $f(x)$  |           |      |     |      |     |           |
|         | $-\infty$ |      |     |      |     | $+\infty$ |

Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng nào sau đây.

- A.  $(0; 2)$ . B.  $(2; 5)$ . C.  $(-2; 0)$ . D.  $(-4; -2)$ .

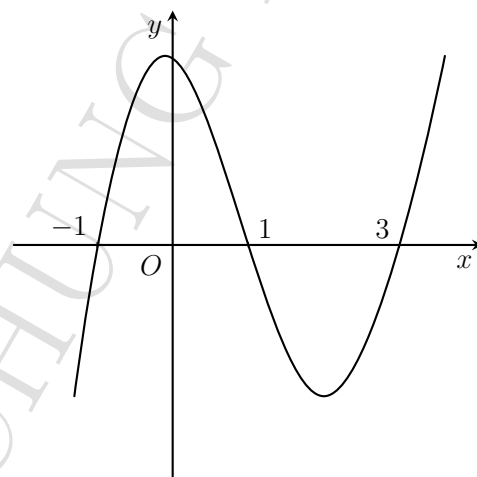
**Câu 150.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = (1-x)(x+2)g(x) + 2022$  với  $g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Khi đó hàm số  $y = f(1-x) + 2022x + 2023$  nghịch biến trên khoảng nào?

- A.  $(1; +\infty)$ . B.  $(0; 3)$ . C.  $(-\infty; 3)$ . D.  $(4; +\infty)$ .

**Câu 151.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số  $y = f'\left(2x + \frac{3}{2}\right)$  như hình vẽ bên. Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$ . B.  $\left(-\frac{5}{4}; \frac{1}{4}\right)$ .  
C.  $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$ . D.  $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ .



THẦY KIÊN TOÁN: ————— DẠY THẬT - HỌC THẬT - GIÁ TRỊ THẬT —————

K12 – CHƯƠNG 1

§2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

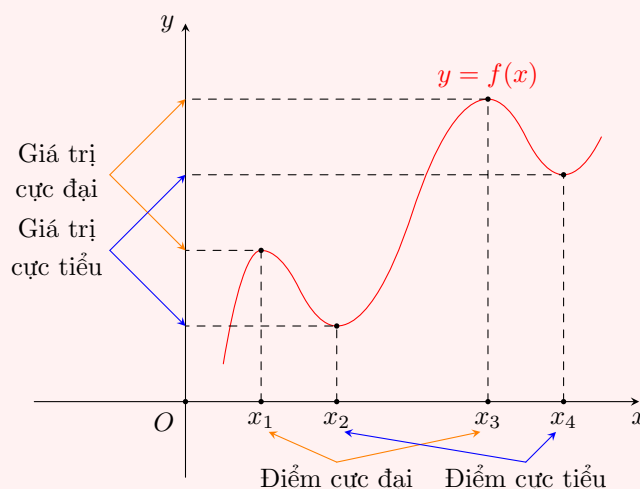
### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

## 1 Khái niệm cực trị của hàm số

### Định nghĩa 1

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên tập hợp  $\mathcal{D}$  và  $x_0 \in \mathcal{D}$ .

- ☑ Nếu tồn tại một khoảng  $(a; b)$  chứa điểm  $x_0$  và  $(a; b) \subset \mathcal{D}$  sao cho  $f(x) < f(x_0)$  với mọi  $x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$  thì  $x_0$  được gọi là một **điểm cực đại**,  $f(x_0)$  được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số  $y = f(x)$ , kí hiệu  $y_{CD}$ .
- ☑ Nếu tồn tại một khoảng  $(a; b)$  chứa điểm  $x_0$  và  $(a; b) \subset \mathcal{D}$  sao cho  $f(x) > f(x_0)$  với mọi  $x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$ , thì  $x_0$  được gọi là một **điểm cực tiểu**,  $f(x_0)$  được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số  $y = f(x)$ , kí hiệu  $y_{CT}$ .



Hình 6

- !** a) Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị** của hàm số. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị cực trị** (còn gọi là **cực trị**) của hàm số.

- b) Nếu  $x_0$  là một điểm cực trị (điểm cực đại, điểm cực tiểu) của hàm số  $y = f(x)$  thì ta cũng nói hàm số  $y = f(x)$  đạt cực trị (cực đại, cực tiểu) tại  $x_0$ .
- c) Hàm số có thể đạt cực đại và cực tiểu tại nhiều điểm trên  $\mathcal{D}$ .
- d) Nếu  $x_0$  là điểm cực trị của hàm số  $y = f(x)$  thì điểm  $M(x_0; f(x_0))$  là một điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = f(x)$ .

## 2 Tìm cực trị của hàm số

**Định lý 9** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên khoảng  $(a; b)$  chứa điểm  $x_0$  và có đạo hàm trên các khoảng  $(a; x_0)$  và  $(x_0; b)$ . Khi đó

- ☑ Nếu  $f'(x) < 0$  với mọi  $x \in (a; x_0)$  và  $f'(x) > 0$  với mọi  $x \in (x_0; b)$  thì hàm số  $y = f(x)$  đạt cực tiểu tại điểm  $x_0$ ;
- ☑ Nếu  $f'(x) > 0$  với mọi  $x \in (a; x_0)$  và  $f'(x) < 0$  với mọi  $x \in (x_0; b)$  thì hàm số  $y = f(x)$  đạt cực đại tại điểm  $x_0$ .

🔥 **NHẬN XÉT.** Từ kết quả trên, để tìm cực trị của hàm số  $y = f(x)$ , ta thực hiện như sau

- ☑ **Bước 1.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số.
- ☑ **Bước 2.** Tính đạo hàm  $f'(x)$  của hàm số. Tìm các điểm  $x_1; x_2; \dots; x_n$  thuộc  $\mathcal{D}$  mà tại đó đạo hàm  $f'(x)$  bằng 0 hoặc không tồn tại.
- ☑ **Bước 3.** Xét dấu  $f'(x)$ . Nếu  $f'(x)$  đổi dấu từ âm sang dương khi  $x$  qua điểm  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) thì hàm số đạt cực tiểu tại  $x_i$ . Nếu  $f'(x)$  đổi dấu từ dương sang âm khi  $x$  qua điểm  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) thì hàm số đạt cực đại tại  $x_i$ .

- ⚠
- a) Nếu  $f'(x) = 0$  nhưng không đổi dấu khi  $x$  qua điểm  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) thì hàm số không có cực trị tại  $x_i$ .
  - b) Nếu  $f'(x)$  không đổi dấu trên khoảng  $K$  thì  $f(x)$  không có cực trị trên khoảng đó.

## B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

### DẠNG 1 Tìm cực trị của hàm số cho bởi công thức

**Định nghĩa 2** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên khoảng  $(a; b)$  ( $a$  có thể là  $-\infty$ ,  $b$  có thể là  $+\infty$ ) và điểm  $x_0 \in (a; b)$ .

- Nếu tồn tại số  $h > 0$  sao cho  $f(x) < f(x_0)$  với mọi  $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$  và  $x \neq x_0$  thì ta nói hàm số  $f(x)$  đạt **cực đại** tại  $x_0$ .
- Nếu tồn tại số  $h > 0$  sao cho  $f(x) > f(x_0)$  với mọi  $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$  và  $x \neq x_0$  thì ta nói hàm số  $f(x)$  đạt **cực tiểu** tại  $x_0$ .

**Cách tìm cực trị hàm số theo dấu hiệu 1:**

- 1) Tìm tập xác định của hàm số.
- 2) Tính  $f'(x)$ . Tìm các điểm mà tại đó  $f'(x)$  bằng 0 hoặc  $f'(x)$  không tồn tại.
- 3) Lập bảng biến thiên.

4) Từ bảng biến thiên, suy ra các điểm cực trị, giá trị cực trị.

### Cách tìm cực trị hàm số theo dấu hiệu 2:

- 1) Tìm tập xác định của hàm số.
- 2) Tính  $f'(x)$ . Giải phương trình  $f'(x) = 0$ , tìm nghiệm  $x_0$ .
- 3) Tính  $f''(x)$ .

- ☑ Nếu  $f''(x_0) < 0$  thì  $x_0$  là điểm cực đại của hàm số (“**âm**” lồi).
- ☑ Nếu  $f''(x_0) > 0$  thì  $x_0$  là điểm cực tiểu của hàm số (“**dương**” lõm).



- Đối với hàm chứa dấu trị tuyệt đối, ta cần phá dấu trị tuyệt đối trước khi tính đạo hàm.
- Đối với hàm chứa căn thức, hay phân thức thì phải chú ý tới tập xác định của các hàm này.
- Đối với các nghiệm của  $f'(x) = 0$ , ta cần chú ý tới tính chất của nghiệm là bội chẵn hay bội lẻ để xác định dấu của  $f'(x)$ .
- Đạo hàm của hàm số hợp  $(f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$  hay  $f'_x = f'_u \cdot u'_x$ .

## 1

### Ví dụ mẫu

**Ví dụ 1 (Mức độ 1).** Tìm cực trị của hàm số  $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{1}{3}$ .

**Ví dụ 2 (Mức độ 1).** Tìm cực trị của hàm số  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ .

**Ví dụ 3 (Mức độ 2).** Tìm cực trị của hàm số  $y = f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ .

**Ví dụ 4 (Mức độ 2).** Tìm cực trị của hàm số  $g(x) = \frac{x^2+x+4}{x+1}$ .

**Ví dụ 5 (Mức độ 2).** Tìm cực trị của hàm số sau  $y = x^4 - 3x^2 + 1$ .

**Ví dụ 6 (Mức độ 2).** Tìm cực trị của hàm số  $y = x \cdot e^x$ .

**Ví dụ 7 (Mức độ 2).** Tìm cực trị của hàm số  $y = x - \ln x$ .

**Ví dụ 8 (Mức độ 2).** Tìm cực trị của hàm số sau  $y = |x|$ .

**Ví dụ 9 (Mức độ 2).** Cho hàm số  $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ . Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của hàm số trên.

**Ví dụ 10 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ ,  $\forall x \neq 0$ . Mỗi kết quả dưới đây **đúng** hay **sai**?

| Phát biểu                                                       | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm $f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ .                     |   |   |
| b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \cos x - \sin x = 0$ .          |   |   |
| c) $x \cos x - \sin x = 0$ có nghiệm khi $x^2 - 1 \geq 0$ .     |   |   |
| d) Số điểm cực trị của hàm số trên khoảng $(0; 100\pi)$ là 100. |   |   |

**Ví dụ 11 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $y = f(x) = 1 + C_{10}^1x + C_{10}^2x^2 + \dots + C_{10}^{10}x^{10}$ . Mỗi kết quả dưới đây đúng hay sai?

| Phát biểu                                                                          | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .                            |   |   |
| b) $f(x) = 1 + C_{10}^1x + C_{10}^2x^2 + \dots + C_{10}^{10}x^{10} = (1+x)^{10}$ . |   |   |
| c) $f'(x) = 10(1+x)^9$ .                                                           |   |   |
| d) Đồ thị có 9 điểm cực trị.                                                       |   |   |

**Ví dụ 12 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2(x-1)(x-4)^2$ . Tìm số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x^2)$ .  
KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

## 2 Bài tập tự luận

**Bài 1 (Mức độ 2).** Tìm cực trị của hàm số sau  $y = x^4 - 6x^2 + 8x + 1$ .

**Bài 2 (Mức độ 2).** Tìm các điểm cực trị của hàm số  $y = 3^{x-2x^2}$ .

**Bài 3 (Mức độ 2).** Tìm các điểm cực trị của hàm số sau  $y = \ln(x^2 + e)$ .

**Bài 4 (Mức độ 2).** Tìm cực trị của hàm số sau  $y = \sqrt{-x^2 + 4}$ .

**Bài 5 (Đề tốt nghiệp 2020 Đợt 2 Mã đề 103, Mức độ 2).** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm

$$f'(x) = x(x+1)(x-4)^3, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tìm số điểm cực đại của hàm số đã cho.

**Bài 6.** Gọi  $A, B, C$  là các điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 4$ . Tìm bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

## 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 1 (Mức độ 1).** Hàm số  $y = x^2$  có cực tiểu tại

- A.  $x = 0$ .      B.  $x = 1$ .      C.  $x = 2$ .      D.  $x = 3$ .

**Câu 2 (Mức độ 1).** Hàm số  $y = x$  có bao nhiêu cực trị

- A. Không có cực trị.      B. Có 1 cực trị.      C. Có 2 cực trị.      D. Có vô số cực trị.

**Câu 3 (Mức độ 1).** Hàm số nào sau đây không có điểm cực trị?

- A.  $y = x^2$ .      B.  $y = x^3$ .      C.  $y = x^4$ .      D.  $y = -x^2$ .

**Câu 4 (Mức độ 2).** Tìm giá trị cực đại  $y_{CD}$  của hàm số  $y = x^3 - 3x + 2$ .

- A.  $y_{CD} = 4$ .      B.  $y_{CD} = 1$ .      C.  $y_{CD} = 0$ .      D.  $y_{CD} = -1$ .

**Câu 5 (Mức độ 2).** Số điểm cực trị của hàm số  $y = x^3 + x^2 + 3x - 1$  là

- A. 1.      B. 0.      C. 2.      D. 3.

**Câu 6 (Mức độ 2).** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2(x^2 - 1), \forall x \in \mathbb{R}$ . Hỏi hàm số  $y = f(x)$  đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

- A.  $x = 1$ .      B.  $x = -1$ .      C.  $x = 0$ .      D.  $x = 2$ .

**Câu 7 (Mức độ 2).** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 9x$ , giả sử hàm số đạt cực trị tại hai điểm có hoành độ  $x_1, x_2$ , khi đó  $x_1 \cdot x_2$  bằng

- A.  $-8$ . B.  $-9$ . C.  $2$ . D.  $10$ .

**Câu 8 (Mức độ 2).** Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = |x|(x + 2)$  là

- A.  $x = 0$ . B.  $x = 1$ . C.  $x = -2$ . D.  $x = 2$ .

**Câu 9 (Mức độ 3).** Đồ thị của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$  có hai điểm cực trị  $A$  và  $B$ . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng  $AB$ ?

- A.  $P(1; 0)$ . B.  $M(0; 1)$ . C.  $N(1; -10)$ . D.  $Q(-1; 10)$ .

**Câu 10 (Mức độ 3).** Đồ thị của hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 + 5$  có hai điểm cực trị  $A$  và  $B$ . Tính diện tích  $S$  của tam giác  $OAB$  với  $O$  là gốc tọa độ.

- A.  $S = 9$ . B.  $S = \frac{10}{3}$ . C.  $S = 5$ . D.  $S = 10$ .

**Câu 11 (Mức độ 3).** Các điểm cực đại của hàm số  $f(x) = x - 2 \sin x$  có dạng (với  $k \in \mathbb{Z}$ )

- A.  $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ . B.  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ . C.  $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ . D.  $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ .

**Câu 12 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2(x - 1)(x - 4)^2(x - 9)^3$ . Tìm số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x^2)$ .

- A.  $1$ . B.  $2$ . C.  $3$ . D.  $5$ .

#### 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 13 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = x - 2\sqrt{x^2 - 2|x|} + 2$ . Mỗi kết quả dưới đây **đúng** hay **sai**?

| Phát biểu                                               | Đ | S |
|---------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ . |   |   |
| b) Hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 0$ .                 |   |   |
| c) $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.                 |   |   |
| d) Hàm số có một cực đại và một cực tiểu.               |   |   |

**Câu 14 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $y = |-x^2 + 3x + 5|$ . Mỗi kết quả dưới đây **đúng** hay **sai**?

| Phát biểu                                                                         | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .                        |   |   |
| b) Đồ thị hàm số $g(x) = -x^2 + 3x + 5$ là đường parabol có bề lõm quay lên trên. |   |   |
| c) Hàm số $g(x) = -x^2 + 3x + 5$ có 2 cực trị.                                    |   |   |
| d) Hàm số $y =  -x^2 + 3x + 5 $ có 3 điểm cực trị.                                |   |   |

**Câu 15 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x^3 - 2x^2)(x^3 - 2x)$ , với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Mỗi kết quả dưới đây **đúng** hay **sai**?

| Phát biểu                             | Đ | S |
|---------------------------------------|---|---|
| a) $f'(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt. |   |   |



| Phát biểu                                                    | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------|---|---|
| b) Đồ thị $y = f(x)$ có 4 cực trị.                           |   |   |
| c) $f(x) = 0$ có tối đa 5 nghiệm phân biệt.                  |   |   |
| d) Hàm số $y =  f(1 - 2024x) $ có nhiều nhất 9 điểm cực trị. |   |   |

**Câu 16 (Mức độ 3).** Biết đồ thị (C) của hàm số  $y = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}$  có hai điểm cực trị. Mỗi kết quả dưới đây **đúng** hay **sai**?

| Phát biểu                                                                                           | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .                                             |   |   |
| b) $y' = \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 1}$ .                                                              |   |   |
| c) Gọi $x_1$ là hoành độ cực trị ta có $\frac{u(x_1)}{v(x_1)} = \frac{u'(x_1)}{v'(x_1)}$ .          |   |   |
| d) Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị (C) cắt trục hoành tại điểm M có hoành độ bằng 2. |   |   |

**Câu 17 (Mức độ 3).** Đường cong  $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$  có điểm cực tiểu A. Xét điểm  $B(1; 1)$  và  $C(a; b)$  thuộc trục hoành. Mỗi kết quả dưới đây **đúng** hay **sai**?

| Phát biểu                                                    | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .   |   |   |
| b) Đồ thị có cực đại $A'(-1; 6)$ ; cực tiểu $A(2; -19)$ .    |   |   |
| c) $C(a; b) \in Ox \Rightarrow C(a; 0)$ .                    |   |   |
| d) $CB + CA$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $T = 20a + 21b = 21$ . |   |   |

## 5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 18 (Mức độ 2).** Biết đồ thị hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$  có hai điểm cực trị là  $A(0; 2), B(2; -14)$ . Giá trị của  $y(1)$  là

KQ:

**Câu 19 (Mức độ 3).** Hàm số  $y = ax^3 + x^2 - 5x + b$  đạt cực tiểu tại  $x = 1$  và giá trị cực tiểu bằng 2. Tính giá trị của biểu thức  $H = 4a - b$ .

KQ:

**Câu 20 (Mức độ 3).** Đường cong  $y = -x^3 + 3x^2 - 1$  có điểm cực tiểu A và điểm cực đại B. Đường thẳng AB cắt trục hoành tại C, tỷ số  $k = CA : CB = \frac{a}{b}$  (với  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản). Tính  $a + b$ .

KQ:

**Câu 21 (Mức độ 4).** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đúng ba điểm cực trị là  $-2; -1; 0$  và có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Khi đó hàm số  $y = f(x^2 - 2x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

KQ:

**Câu 22 (Mức độ 4).** Giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = x^3 + ax^2 + bx + c$  và đường thẳng (AB) đi qua gốc tọa độ. Giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của  $P = abc + ab + c$  bằng  $-\frac{m}{n}$  (với  $\frac{m}{n}$  là phân số tối giản,  $m; n$  nguyên dương). Tính  $m + n$ .

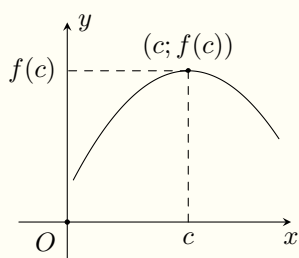
KQ:



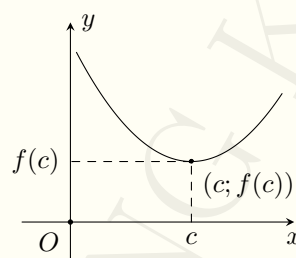
## DẠNG 2

## Tìm cực trị hàm số dựa vào bảng biến thiên hoặc đồ thị

- ☑ Hàm số  $y = f(x)$  xác định trên khoảng  $(a; b)$ . Quan sát hình ảnh đồ thị hay bảng biến thiên để tìm cực trị của hàm số.  
Hình ảnh đồ thị



Hàm số  $f$  đạt cực đại tại  $x = c$ .



Hàm số  $f$  đạt cực tiểu tại  $x = c$ .

Hình ảnh bảng biến thiên

| $x$  | $a$ | $x_0$    | $b$ |
|------|-----|----------|-----|
| $y'$ |     | +        | -   |
| $y$  |     | $y_{CD}$ |     |

Hàm số  $f$  đạt cực đại tại  $x = x_0$ .

| $x$  | $a$ | $x_0$    | $b$ |
|------|-----|----------|-----|
| $y'$ |     | -        | +   |
| $y$  |     | $y_{CT}$ |     |

Hàm số  $f$  đạt cực tiểu tại  $x = x_0$ .

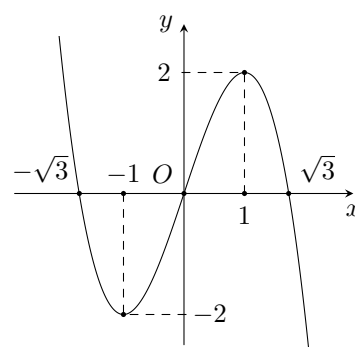
- ☑ Để hàm số đạt cực trị tại điểm  $x = x_0$  thì  $x_0$  thuộc tập xác định, tại  $x_0$  đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc không xác định và đạo hàm đổi dấu qua điểm đó.

## 1

## Ví dụ mẫu

## Ví dụ 13.

Dựa vào đồ thị hàm số  $y = f(x) = -x^3 + 3x$  trong hình vẽ, hãy chỉ ra các điểm cực trị của hàm số đó.



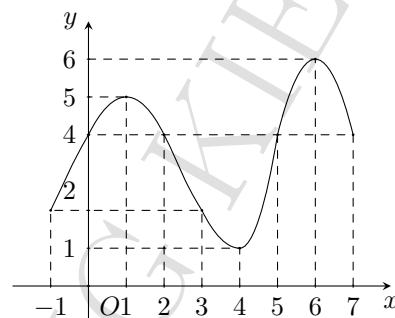
**Ví dụ 14.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau

| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $1$  | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----|------|-----------|
| $f'(x)$ |           | +   | -    | +         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $2$ | $-3$ | $+\infty$ |

Xác định các cực trị của hàm số  $f(x)$ .

**Ví dụ 15.**

Tìm cực trị của hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị được cho trong hình vẽ.



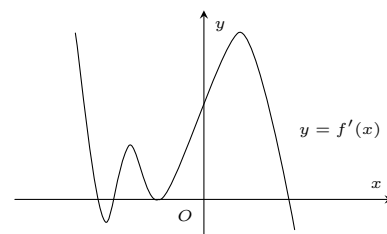
**Ví dụ 16.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu  $f'(x)$  như sau

|         |           |      |     |     |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $+$  | $0$ | $-$ | $0$ | $+$       |

Tìm số điểm cực đại của hàm số đã cho.

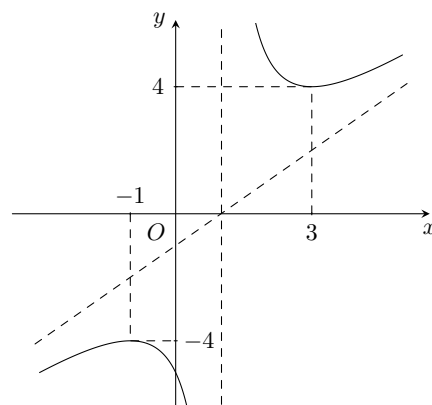
**Ví dụ 17.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  là đường cong ở hình bên. Hỏi hàm số  $y = f(x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?



**Ví dụ 18.**

Cho hàm số  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$  có đồ thị  $(C)$  như hình vẽ bên. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị  $(C)$ .



**Ví dụ 19.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau

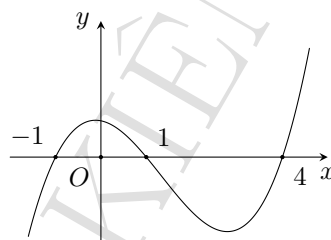
|         |           |      |      |     |           |
|---------|-----------|------|------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $0$  | $3$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$ | $+$       |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $-1$ | $-3$ | $2$ | $-\infty$ |

Hàm số  $y = \ln(f(x))$  có tất cả bao nhiêu điểm cực đại?

**Ví dụ 20.**

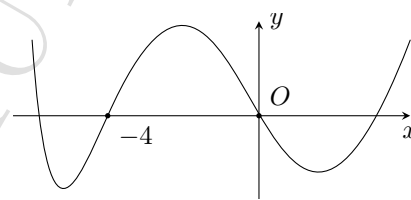
Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Khi đó

| Phát biểu                                                                                       | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $y = f'(x)$ có 2 điểm cực trị.                                                        |   |   |
| b) Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.                                                         |   |   |
| c) $x = a$ là điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ . Khi đó $-1, a, 3$ lập thành một cấp số nhân. |   |   |
| d) Hàm số $g(x) = e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}$ có 3 điểm cực trị.                                    |   |   |

**Ví dụ 21.**

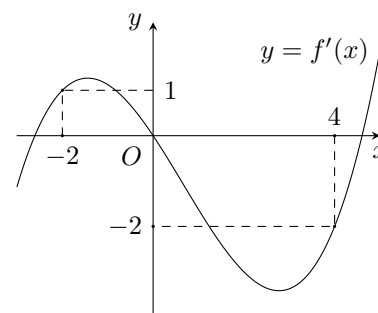
Cho hàm số bậc bốn  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó

| Phát biểu                                           | Đ | S |
|-----------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực tiểu.            |   |   |
| b) Phương trình $f'(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.  |   |   |
| c) Hàm số $h(x) = 2f(x) - 1$ có 3 điểm cực trị.     |   |   |
| d) Hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2)$ có 6 điểm cực trị. |   |   |

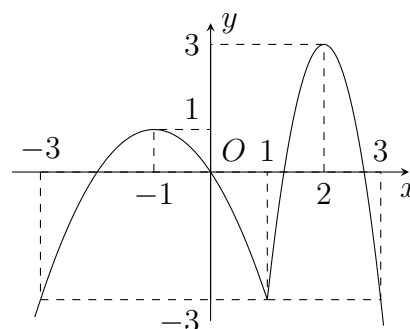
**Ví dụ 22.**

Cho hàm số bậc bốn  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Gọi  $m, n$  lần lượt là số điểm cực đại, số điểm cực tiểu của hàm số  $g(x) = 4f(x^2 - 4) + x^4 - 8x^2$ . Tính  $Q = 6m - 8n$ .

KQ:

**2****Bài tập tự luận****Bài 7.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-3; 3]$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Hãy xác định các điểm cực trị, giá trị cực trị của hàm số  $f(x)$  trên khoảng  $(-3; 3)$ .



**Bài 8.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên các khoảng  $(-\infty; 1)$ ,  $(1; +\infty)$  các có bảng biến thiên như sau

|         |           |           |    |   |    |           |           |
|---------|-----------|-----------|----|---|----|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 1         | 2  | 3 | 4  | 5         | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | -         | 0  | + | 0  | -         | +         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ | -2 | 1 | -1 | $+\infty$ |           |

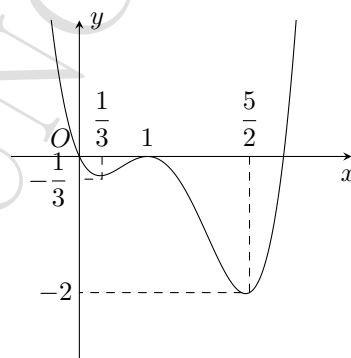
Xác định cực trị của hàm số đã cho.

### Bài 9.

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0; 3]$  thỏa mãn

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = f'(1) = f'\left(\frac{5}{2}\right) = 0$$

và có đồ thị là đường cong như hình bên. Tìm cực trị của hàm số đã cho trên khoảng  $(0; 3)$ .



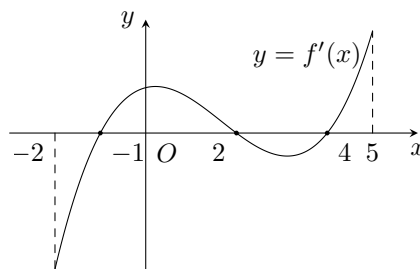
### Bài 10.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số  $y = |f(x)|$ .

|      |           |      |      |           |     |
|------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $3$  | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $3$  | $-1$ | $+\infty$ |     |

### Bài 11.

Đạo hàm  $f'(x)$  của hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm điểm cực trị của hàm số  $y = f(x)$ .



## 3

### Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

#### Câu 23.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. 2. B. 3. C. -4. D. 0.

|      |           |     |      |           |     |
|------|-----------|-----|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $0$ | $3$  | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$ | $-$  | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $2$ | $-4$ | $+\infty$ |     |

Câu 24. Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu đạo hàm như sau

|         |           |     |      |     |     |     |     |     |     |     |           |
|---------|-----------|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |     | $-1$ |     | $0$ |     | $1$ |     | $2$ |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$ | $0$  | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |           |

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

**Câu 25.**

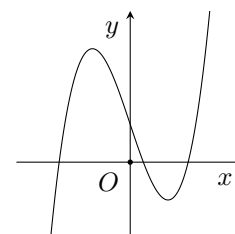
Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

**Câu 26.**

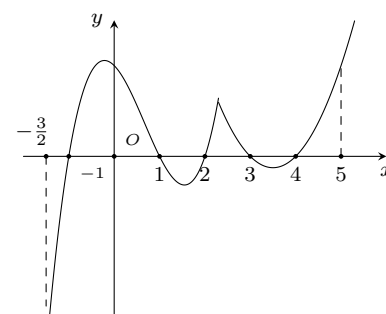
Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị  $y = f'(x)$  như trong hình vẽ bên. Hàm số  $y = f(x)$  có bao nhiêu điểm cực tiểu trên khoảng  $\left(-\frac{3}{2}; 5\right)$ ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.



**Câu 27.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số  $g(x) = 3f(x) + 1$  đạt cực đại tại điểm

|      |           |      |     |     |           |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |     |           |
| $y'$ |           | $-$  | $+$ | $0$ | $-$       | $0$ | $+$       |
| $y$  | $+\infty$ |      |     |     |           |     | $+\infty$ |

Arrows indicate the behavior of the function  $y$ : from  $+\infty$  at  $x = -\infty$  down to a local minimum at  $x = -1$  (labeled 1), up to a local maximum at  $x = 0$  (labeled 2), down to a local minimum at  $x = 1$  (labeled 1), and up to  $+\infty$  at  $x = +\infty$ .

A.  $x = -1$ .B.  $x = 1$ .C.  $x = \pm 1$ .D.  $x = 0$ .**Câu 28.**

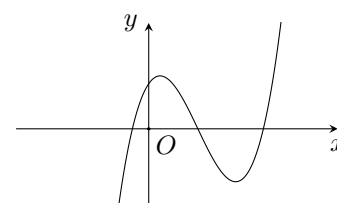
Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số  $y = |f(x)|$  là

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 5.



**Câu 29.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

|         |           |      |      |           |
|---------|-----------|------|------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $2$  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$  | $+$       |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $4$  | $-3$ | $+\infty$ |

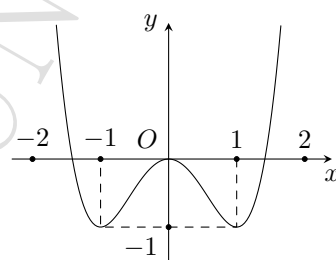
Điểm cực tiểu của hàm số  $y = f(3x)$  là

- A.  $x = \frac{2}{3}$ . B.  $x = 2$ . C.  $y = -3$ . D.  $x = -\frac{2}{3}$ .

**Câu 30.**

Cho hàm số  $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$  có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f(x^3 + f(x))$  là

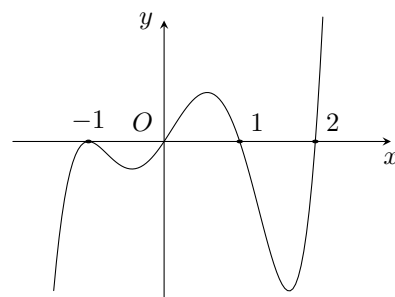
- A. 11. B. 9. C. 8. D. 10.



**Câu 31.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , có đạo hàm  $f'(x) = (x^2 - x - 2)(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) \cdot g(x)$  với  $g(x)$  là hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ. Hàm số  $y = f(x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 5. B. 2. C. 3. D. 4.



**Câu 32.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$ . Bảng biến thiên của hàm số  $y = f'(x)$  được cho như hình vẽ bên dưới.

|         |           |      |     |      |           |
|---------|-----------|------|-----|------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+\infty$ | $-3$ | $2$ | $-1$ | $+\infty$ |

Số điểm cực trị của hàm số  $y = f(4x^2 + 4x)$  là

- A. 7. B. 9. C. 3. D. 5.

4

### Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 33.** Cho hàm số  $y = f(x)$ , xác định và có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Bảng xét dấu hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ dưới đây.

|         |           |     |     |           |     |
|---------|-----------|-----|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$ | $-$ | $0$       | $+$ |

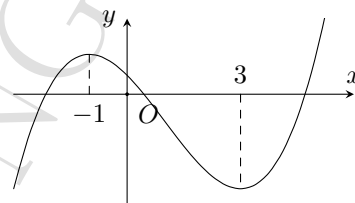
Khi đó

| Phát biểu                                                         | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$ .               |   |   |
| b) Hàm số $y = h(x) = -2f(x) + 3$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$ . |   |   |
| c) Hàm số $y = k(x) = 2^{f(x)}$ có hai điểm cực trị.              |   |   |
| d) Hàm số $y = g(x) = f[\log_3(x^2 - 2x + 3)]$ có 3 điểm cực đại. |   |   |

**Câu 34.**

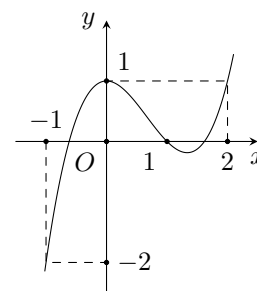
Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị  $(C)$  như hình vẽ bên. Khi đó

| Phát biểu                                                                       | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị $(C)$ có hai điểm cực trị.                                            |   |   |
| b) Tiếp tuyến của đồ thị $(C)$ tại điểm có hoành độ bằng 3 luôn cắt trục hoành. |   |   |
| c) Có đúng 3 giá trị nguyên của $x$ thỏa mãn $f'(x) < 0$ .                      |   |   |
| d) Hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có 2 điểm cực trị.                                  |   |   |

**Câu 35.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó

| Phát biểu                                                                                  | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $f'(-1) = 0$ .                                                                          |   |   |
| b) Trên khoảng $(-1; 2)$ , hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.                            |   |   |
| c) $f(0) < f(1)$ .                                                                         |   |   |
| d) Trên khoảng $(0; +\infty)$ , hàm số $g(x) = 3f(x) - \sqrt{2x^3} + 1$ có 2 điểm cực trị. |   |   |



**Câu 36.** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|      |           |      |     |           |           |
|------|-----------|------|-----|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $0$  | $2$ | $+\infty$ |           |
| $y'$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$       | $-$       |
| $y$  | $+\infty$ |      | $1$ |           | $-\infty$ |
|      |           | $-3$ |     |           |           |

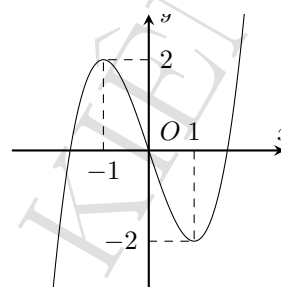
Khi đó

| Phát biểu                                                                    | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $y = f(x)$ có điểm cực tiểu âm.                                    |   |   |
| b) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = a$ . Khi đó $\log_a 32 = 5$ . |   |   |
| c) Hàm số $h(x) = f(x - 1)$ có hai điểm cực trị dương.                       |   |   |
| d) Hàm số $g(x) = f(f(x))$ có 5 điểm cực trị.                                |   |   |



**Câu 37.**

Cho hàm số bậc ba  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị  $(C)$  như hình vẽ bên. Khi đó



| Phát biểu                                                                                                               | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $a - b + c - d = 2$ .                                                                                                |   |   |
| b) $f'(-1) = f'(1)$ .                                                                                                   |   |   |
| c) Đường tròn nhận đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của $(C)$ làm đường kính có phương trình là $x^2 + y^2 = \sqrt{5}$ . |   |   |
| d) Hàm số $g(x) =  f(x^2 + 2x) $ có 7 điểm cực trị.                                                                     |   |   |

**5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn**

**Câu 38.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|         |           |      |     |           |     |
|---------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $2$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $5$  | $1$ | $+\infty$ |     |

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị là  $A, B$ . Gọi  $G(x_0; y_0)$  là trọng tâm tam giác  $OAB$  với  $O$  là gốc toạ độ. Tính  $T = 3x_0 - y_0$ .

KQ:

**Câu 39.** Cho  $y = f(x)$  là hàm số xác định và có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ . Biết rằng hàm số  $y = f'(3 - 2x)$  có bảng xét dấu như sau

|            |           |                |               |     |     |           |     |
|------------|-----------|----------------|---------------|-----|-----|-----------|-----|
| $x$        | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | $3$ | $4$ | $+\infty$ |     |
| $f'(3-2x)$ | $-$       | $0$            | $+$           | $0$ | $-$ | $0$       | $+$ |

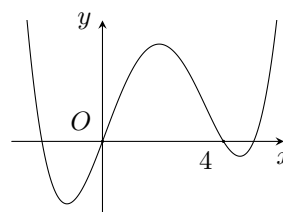
Hàm số  $y = f(x)$  có bao nhiêu điểm cực đại?

KQ:

**Câu 40.**

Cho hàm số bậc bốn  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ .

KQ:



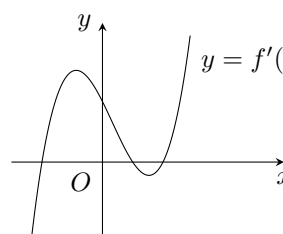
**Câu 41.**

Cho hàm số bậc bốn  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Gọi  $m, n$  lần lượt là số điểm cực đại và số điểm cực tiểu của hàm số

$$h(x) = 2f(|3 - x|) + 1.$$

Tính  $T = 2m + 3n$

KQ:

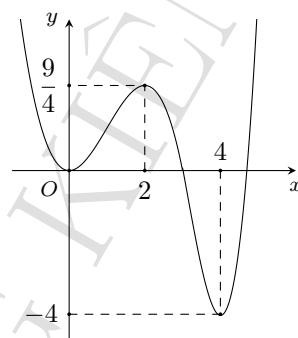


**Câu 42.**

Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị của hàm số  $y = f(5-2x)$  như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số  $m$  thuộc khoảng  $(-9; 9)$  thỏa mãn  $2m \in \mathbb{Z}$  và hàm số  $y = \left| 2f(4x^3 + 1) + m - \frac{1}{2} \right|$  có 5 điểm cực trị?

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**DẠNG 3****Tìm tham số để hàm số đạt cực trị tại một điểm**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên tập hợp  $\mathcal{D}$ .

- ☑ Nếu tồn tại một khoảng  $(a; b)$  chứa điểm  $x_0$  và  $(a; b) \subset \mathcal{D}$  sao cho  $f(x) < f(x_0)$  với mọi  $x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$  thì  $x_0$  được gọi là một **điểm cực đại**,  $f(x_0)$  được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số  $y = f(x)$ , kí hiệu  $y_{CD}$ .
- ☑ Nếu tồn tại một khoảng  $(a; b)$  chứa điểm  $x_0$  và  $(a; b) \subset \mathcal{D}$  sao cho  $f(x) > f(x_0)$  với mọi  $x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$ , thì  $x_0$  được gọi là một **điểm cực tiểu**,  $f(x_0)$  được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số  $y = f(x)$ , kí hiệu  $y_{CT}$ .
- ☑ Để hàm số đạt cực trị tại điểm  $x = x_0$  thì  $x_0$  thuộc tập xác định, tại  $x_0$  đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc không xác định và đạo hàm đổi dấu qua điểm đó.
- ☑ Để hàm số đạt cực đại tại điểm  $x = x_0$  thì  $x_0$  thuộc tập xác định, tại  $x_0$  đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc không xác định và đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm qua điểm đó.
- ☑ Để hàm số đạt cực tiểu tại điểm  $x = x_0$  thì  $x_0$  thuộc tập xác định, tại  $x_0$  đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc không xác định và đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương qua điểm đó.
- ☑ Tìm  $m$  để hàm số  $y = f(x)$  đạt cực trị tại điểm  $x_0$  cho trước ( $f(x)$  có đạo hàm tại  $x_0$ ):
  - Giải điều kiện  $f'(x_0) = 0$ , tìm  $m$ .
  - Lập bảng xét dấu đạo hàm (hoặc bảng biến thiên) với  $m$  vừa tìm được và chọn giá trị  $m$  nào thỏa mãn yêu cầu.

**1****Ví dụ mẫu**

**Ví dụ 23.** Tìm giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = -x^3 + x^2 + mx$  có hai điểm cực trị.

**Ví dụ 24.** Tìm giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = 2^x + m$  đạt cực đại tại điểm  $x = 1$ .

**Ví dụ 25.** Tìm giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 5$  đạt cực tiểu tại  $x = 1$ .

**Ví dụ 26.** Có bao nhiêu số nguyên dương  $m$  để hàm số  $y = (3 - m)x^{100}$  đạt cực tiểu tại  $x = 0$ .

**Ví dụ 27.** Cho hàm số  $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  (với  $a, b, c$  là các số thực) có cực tiểu bằng  $-3$  tại điểm  $x = 1$  và đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là 2. Tính  $H = 3a + b - c$ .

**Ví dụ 28.** Biết rằng đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2ax^2 + b$  có một điểm cực trị là  $(1; 2)$ . Tính khoảng cách giữa điểm cực đại và điểm cực tiểu của hàm số đã cho.

**Ví dụ 29.** Tìm giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x^2 - x + m}{x - 1}$  đạt cực tiểu tại điểm  $x = 2$ .

**Ví dụ 30.** Cho hàm số  $y = f(x) = \ln(x^2 + 2mx + 2m^2 + 1)$ , với  $m$  là tham số. Khi đó

| Phát biểu                                                                                                 | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ , với mọi $m$ .                                      |   |   |
| b) Hàm số có đạo hàm $f'(x) = \frac{2x + 2m}{x^2 + 2mx + 2m^2 + 1}$ .                                     |   |   |
| c) Khi $m = -1$ , hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$ .                                                   |   |   |
| d) Khi hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$ thì bất phương trình $f(x) < \ln 14$ có đúng 7 nghiệm nguyên. |   |   |

**Ví dụ 31.** Cho hàm số  $y = x^5 - x^4 + (m^3 - 3m^2 - 4m + 12)x^3 + 1$ , với  $m$  là tham số. Khi đó

| Phát biểu                                                                      | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Phương trình $y' = 0$ luôn nhận $x = 0$ làm nghiệm với mọi $m$ .            |   |   |
| b) Khi $m = 3$ , hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$ .                         |   |   |
| c) Với mọi $m$ hàm số luôn đạt cực trị tại điểm $x = 0$ .                      |   |   |
| d) Có đúng 3 giá trị nguyên của $m$ để hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 0$ . |   |   |

**Ví dụ 32.** Hàm số  $y = x^6 + (8 + m)x^5 + (64 - m^2)x^4 + 2$ . Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị  $m$  nguyên để hàm số đã cho đạt cực tiểu tại  $x = 0$ . Tính tổng các phần tử của  $S$ . KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

## 2 Bài tập tự luận

**Bài 12.** Cho hàm số  $y = x^3 + 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 2$ . Hãy tìm tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số có cực tiểu tại  $x = 2$ .

**Bài 13.** Cho hàm số  $y = x^3 - 2x^2 + ax + b$ , ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị ( $\mathcal{C}$ ). Biết đồ thị ( $\mathcal{C}$ ) có điểm cực trị là  $A(1; 3)$ . Tính giá trị của  $P = 4a - b$ .

**Bài 14.** Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  với  $a \neq 0$ . Biết đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là  $A(1; -1)$ ,  $B(-1; 3)$ . Tính  $f(4)$ .

**Bài 15.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^4 + mx^2$  đạt cực tiểu tại  $x = 0$ .

**Bài 16.** Biết hàm số  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  đạt cực tiểu tại  $x = 1$  và  $f(1) = -3$ , đồng thời đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. Tính giá trị của  $f(3)$ .

## 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 43.** Gọi  $S$  là tập tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(x) = |x| + m$  đạt cực tiểu tại điểm  $x = 0$ . Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

- A.**  $S = \emptyset$ . **B.**  $S = (0; +\infty)$ . **C.**  $S = \{0\}$ . **D.**  $S = \mathbb{R}$ .

**Câu 44.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x + m}{x + 1}$  đạt cực đại tại điểm  $x = 2$ . Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

- A.**  $S = \{0\}$ . **B.**  $S = \{1\}$ .  
**C.**  $S = \emptyset$ . **D.**  $S$  có nhiều hơn 1 phần tử.

**Câu 45.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = 2^{mx^2}$  đạt cực tiểu tại điểm  $x = 0$ .

- A.**  $m = 0$ . **B.**  $m = 1$ . **C.**  $m < 0$ . **D.**  $m > 0$ .

**Câu 46.** Số giá trị thực của  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + (m+2)x - m$  đạt cực tiểu tại  $x = 1$  là

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

**Câu 47.** Có bao nhiêu giá trị của  $m$  để hàm số  $y = x^3 - (2m+3)x^2 + (m^2+2m)x + 2$  đạt cực đại tại  $x = 0$ ?

- A. 0. B. Vô số. C. 1. D. 2.

**Câu 48.** Hàm số  $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(m-1)^2x$  đạt cực trị tại điểm có hoành độ  $x = 1$  khi

- A.  $m = 4$ . B.  $m = 0; m = 1$ . C.  $m = 1$ . D.  $m = 0; m = 4$ .

**Câu 49.** Biết rằng đồ thị hàm số  $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$  có hai điểm cực trị là  $A(0; 2)$  và  $B(2; -14)$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A.  $f(1) = -6$ . B.  $f(1) = -5$ . C.  $f(1) = 0$ . D.  $f(1) = -7$ .

**Câu 50.** Biết  $M(1; -5)$  là một điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = f(x) = ax^3 + 4x^2 + bx + 1$ . Giá trị  $f(2)$  bằng

- A. 3. B. 15. C. -21. D. -3.

**Câu 51.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$ . Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số  $f(x)$  có đúng một điểm cực trị?

- A. 0. B. 7. C. 5. D. 6.

**Câu 52.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = -x^4 + (m+1)x^2$  đạt cực đại tại  $x = 0$ .

- A.  $m = -1$ . B.  $m \geq -1$ . C.  $m \leq -1$ . D.  $m > -1$ .

## 4

## Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 53.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x - m^3$  với  $m$  là tham số. Khi đó

| Phát biểu                                                                                                     | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số luôn có hai điểm cực trị với mọi $m$ .                                                              |   |   |
| b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ khi $m = 2$ .                                                              |   |   |
| c) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng 2.                        |   |   |
| d) Khi đồ thị hàm số có điểm cực đại thì điểm cực đại luôn thuộc đường thẳng cố định với hệ số góc $k = -3$ . |   |   |

**Câu 54.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - 2mx + m + 2}{x - m}$ , với  $m$  là tham số. Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                  | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-m\}$ .                                                              |   |   |
| b) Có hai giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số có hai điểm cực trị.                                                    |   |   |
| c) Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ khi $m = \frac{1}{2}$ .                                                                 |   |   |
| d) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị có phương trình là $y = 2x - 2$ . |   |   |

**Câu 55.** Cho hàm số  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + a^2$  có đồ thị  $(C)$  nhận điểm  $M(0; 4)$  là điểm cực đại. Khi đó

| Phát biểu        | Đ | S |
|------------------|---|---|
| a) $f(0) = 4$ .  |   |   |
| b) $f'(0) = 0$ . |   |   |

| Phát biểu        | Đ | S |
|------------------|---|---|
| c) $b > 0$ .     |   |   |
| d) $f(3) = 49$ . |   |   |

**Câu 56.** Biết rằng  $A(0; 2)$  và  $B(-1; 1)$  là điểm cực trị của đồ thị  $(C)$  của hàm số  $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ). Khi đó

| Phát biểu                                                      | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $f(-1) = 0$ .                                               |   |   |
| b) Đồ thị $(C)$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác cân. |   |   |
| c) $ab > 0$ .                                                  |   |   |
| d) $f(2) = 10$ .                                               |   |   |

**Câu 57.** Cho hàm số  $y = f(x) = 2x^4 + (m^2 - 9)x^2 - 1$  có đồ thị  $(C)$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                                                     | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị $(C)$ luôn cắt trục hoành.                                                                                                                          |   |   |
| b) Hàm số luôn có ba điểm cực trị với mọi $m$ .                                                                                                               |   |   |
| c) Có đúng 2 giá trị của $m$ để hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -3$ .                                                                                       |   |   |
| d) Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị của $m$ để đồ thị $(C)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 2. Tích các phần của $S$ bằng $-5$ . |   |   |

## 5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 58.** Đồ thị hàm số  $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2ax + b$  có điểm cực tiểu là  $A(2; -2)$ . Tính  $a + b$ .

KQ:

**Câu 59.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in (-100; 100)$  để hàm số  $y = x^3 - mx^2 + (2m - 3)x - 3$  đạt cực đại tại  $x = 1$ .

KQ:

**Câu 60.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{4}x^4 - (2a + b)x^2 - a - b$ . Với  $a \in \mathbb{Q}$ ,  $b \in \mathbb{Z}$  thì hàm số đạt giá trị cực tiểu bằng 2 tại  $x = 1$ . Tính giá trị biểu thức  $Q = 4a + b$ .

KQ:

**Câu 61.** Cho hàm số  $y = x^2 - 2mx - 2 \ln(x^2 - 2mx + m^2 + 1)$ , với  $m$  là tham số. Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị của  $m$  để hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm  $x = 2$ . Tính tổng các phần tử của  $S$ .

KQ:

**Câu 62.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^6 + (m + 4)x^5 + (16 - m^2)x^4 + 2$  đạt cực tiểu tại  $x = 0$ ?

KQ:

## DẠNG 4

## Tìm tham số để hàm số bậc ba có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước

## Phương pháp

a) Biện luận nghiệm phương trình  $y' = 0$  (phương trình bậc hai)

(a)  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$ : Hàm số có hai điểm cực trị.

(b)  $\Delta \leq 0$  hoặc suy biến  $a = 0, b = 0$ : Hàm số không có cực trị.

## Quy tắc 1:

(a) **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm  $f'(x)$ .

(b) **Bước 2:** Tìm các điểm  $x_i (i = 1; 2; \dots)$  mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.

(c) **Bước 3:** Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu  $f'(x)$ . Nếu  $f'(x)$  đổi dấu khi qua  $x_i$  thì hàm số đạt cực trị tại  $x_i$

## Quy tắc 2:

(a) **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm  $f'(x)$ .

(b) **Bước 2:** Tìm các nghiệm  $x_i (i = 1; 2; \dots)$  của phương trình  $f'(x) = 0$ .

(c) **Bước 3:** Tìm  $f''(x)$  và tính  $f'(x_i)$ .

☑ Nếu  $f''(x_i) < 0$  thì hàm số  $f$  đạt cực đại tại điểm  $x_i$ .

☑ Nếu  $f''(x_i) > 0$  thì hàm số  $f$  đạt cực tiểu tại điểm  $x_i$ .

b) **Định lý Vi-et:**  $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a}$  và  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a}$  (nhìn trực tiếp từ hàm số).

☑  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ .

☑  $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$ .

☑  $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$ .

c) Các công thức tính toán thường gặp:

☑ Độ dài  $MM = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2}$ .

☑ Khoảng cách từ điểm  $M(x_M, y_M)$  đến đường thẳng  $\Delta: Ax + By + C = 0$ :

$$d(M, \Delta) = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

☑ Tam giác vuông tại  $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ .

☑ Diện tích tam giác  $ABC$  là  $S = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$ , với  $\overrightarrow{AB} = (a_1; b_1), \overrightarrow{AC} = (a_2; b_2)$ .

## 1

## Ví dụ mẫu

**Ví dụ 33 (Mức độ N).** Tìm điều kiện để hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a \neq 0$ ) có cực đại và cực tiểu.

**Ví dụ 34 (Mức độ H).** Cho hàm số  $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$ . Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số không có cực trị.



**Ví dụ 35 (Mức độ H).** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (2m-1)x - 1$  có cực trị.

**Ví dụ 36 (Mức độ H).** Tìm tất cả tham số thực  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}(m+2)x^3 + x^2 + \frac{1}{3}mx - 2$  có cực đại, cực tiểu.

**Ví dụ 37 (Mức độ H).** Cho hàm số  $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + (m-2)x + m^2$ . Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số không có cực trị.

**Ví dụ 38 (Mức độ V).** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + 2$  đạt cực tiểu tại  $x = 1$ .

**Ví dụ 39 (Mức độ V).** Với giá trị nào của tham số  $m$  thì hàm số  $y = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + mx - 1$  có hai điểm cực trị  $x_1, x_2$  sao cho  $x_2 = 2x_1$ .

**Ví dụ 40 (Mức độ V).** Cho hàm số  $y = x^3 - 2mx^2 + (4m-1)x - 3$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                                          | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đạo hàm của hàm số là $y' = 3x^2 - 4mx + 4m - 1$ .                                                              |   |   |
| b) Không có giá trị của $m$ thỏa mãn để hàm số có cực trị tại điểm $x = 1$ .                                       |   |   |
| c) Hàm số có hai cực trị khi $m < 3$ .                                                                             |   |   |
| d) Tổng các giá trị của $m$ để hàm số có hai cực trị $x_1, x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 16$ bằng $\frac{3}{2}$ . |   |   |

**Ví dụ 41 (Mức độ V).** Cho hàm số  $y = x^3 - (m-1)x^2 + x - 2$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                                               | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số có đạo hàm $y' = 3x^2 - (m-1)x + 1$ .                                                                         |   |   |
| b) Với $m = -1$ thì hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ .                                                                   |   |   |
| c) Giá trị nhỏ nhất của $m$ để hàm số không có cực trị là $m = 1 - \sqrt{3}$ .                                          |   |   |
| d) Tổng tất cả các giá trị của $m$ để hàm số có hai cực trị $x_1, x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$ bằng $2\sqrt{15}$ . |   |   |

**Ví dụ 42 (Mức độ V).** Biết  $M(0; 2), N(2; -2)$  là các điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Tính giá trị của hàm số tại  $x = -2$ . KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

## 2

## Bài tập tự luận

**Bài 17 (Mức độ H).** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m+3)x + m$  có cực trị.

**Bài 18 (Mức độ H).** Tìm  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 2x^2 + mx - 3$  đạt cực đại tại điểm  $x = 1$ .

**Bài 19 (Mức độ H).** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$  có hai điểm cực trị  $x_1, x_2$  sao cho  $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$ .

**Bài 20 (Mức độ H).** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x$  đạt cực tiểu tại  $x = 1$ .



**Bài 21 (Mức độ V).** Có tất cả bao nhiêu số nguyên dương  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + (m^2 + m - 6)x + 3$  có 2 điểm cực trị nằm khác phía so với trục tung?

### 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 63 (Mức độ N).** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  để hàm số  $y = 5x^3 - m^2x$  có hai điểm cực trị.

- A.  $m \neq 0$ . B.  $m > 0$ . C.  $m < 0$ . D.  $m = 0$ .

**Câu 64 (Mức độ N).** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (3m+1)x + 2$  có hai điểm cực trị.

- A.  $\begin{cases} m < 0 \\ m > 1 \end{cases}$ . B.  $m < 0$ . C.  $0 \leq m \leq 1$ . D.  $m > 1$ .

**Câu 65 (Mức độ N).** Tìm tất cả giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 1$  có cực trị.

- A.  $m > 1$ . B.  $m < 1$ . C.  $m \geq 1$ . D.  $m \leq 1$ .

**Câu 66 (Mức độ N).** Tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2+m)x - 1$  có cực trị là

- A.  $m > 2$ . B.  $\begin{cases} m < -2 \\ m > 1 \end{cases}$ . C.  $\begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$ . D.  $-1 < m < 2$ .

**Câu 67 (Mức độ H).** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$ . Tìm  $m$  để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị  $A, B$  thỏa mãn  $x_A^2 + x_B^2 = 2$ .

- A.  $m = 0$ . B.  $m = \pm 1$ . C.  $m = \pm 3$ . D.  $m = 2$ .

**Câu 68 (Mức độ H).** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 12mx + 2019$  có hai điểm cực trị  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = -8$ .

- A.  $m = -1$ . B.  $m = 2$ . C.  $m = 1$ . D.  $m = -2$ .

**Câu 69 (Mức độ H).** Biết hàm số  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  đạt cực tiểu tại điểm  $x = 1$ ,  $f(1) = -3$  và đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. Tính giá trị của hàm số tại  $x = 3$ .

- A.  $f(3) = 27$ . B.  $f(3) = 29$ . C.  $f(3) = 81$ . D.  $f(3) = -29$ .

**Câu 70 (Mức độ V).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x - 10$ , với  $m$  là tham số. Gọi  $x_1, x_2$  là các điểm cực trị của hàm số đã cho. Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)$  bằng

- A. 1. B. 4. C. 0. D. 9.

**Câu 71 (Mức độ V).** Biết  $m_0$  là giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$  có hai điểm cực trị  $x_1, x_2$  sao cho  $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $m_0 \in (-15; -7)$ . B.  $m_0 \in (-7; -1)$ . C.  $m_0 \in (7; 10)$ . D.  $m_0 \in (-1; 7)$ .

**Câu 72 (Mức độ V).** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + (m+2)x - m$  có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành.

- A.  $m \leq -2$ . B.  $m < 2$ . C.  $m < 1$ . D.  $m < -2$ .

**Câu 73.** Tìm các giá trị thực của  $m$  để hàm số  $y = -(m^2 + 5m)x^3 + 6mx^2 + 6x - 6$  đạt cực trị tại  $x = 1$ .

A.  $\begin{cases} m = -2 \\ m = 1 \end{cases}$ .

B.  $\begin{cases} m = 2 \\ m = 1 \end{cases}$ .

C.  $m = 1$ .

D.  $m = -2$ .

**Câu 74.** Hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + mx - 2$  đạt cực tiểu tại  $x = 2$  khi?

A.  $m > 0$ .

B.  $m \neq 0$ .

C.  $m = 0$ .

D.  $m < 0$ .

**Câu 75.** Tìm các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 + (m^2 - m + 2)x^2 + (3m^2 + 1)x$  đạt cực tiểu tại  $x = -2$ .

A.  $\begin{cases} m = 3 \\ m = 1 \end{cases}$ .

B.  $m = 3$ .

C.  $m = 1$ .

D.  $\begin{cases} m = -3 \\ m = -1 \end{cases}$ .

**Câu 76.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (4m - 1)x - 3$ . Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Khi  $m < \frac{1}{2}$  thì hàm số có cực đại, cực tiểu.

B. Với mọi  $m$ , hàm số luôn có cực trị.

C. Khi  $m \neq \frac{1}{2}$  thì hàm số có cực đại, cực tiểu.

D. Khi  $m > 1$  thì hàm số có cực đại, cực tiểu.

**Câu 77.** Hàm số  $y = (m + 2)x^3 + 3x^2 + mx - 6$  có 2 điểm cực trị khi và chỉ khi  $m \in (a; b) \setminus \{c\}$  (với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ). Giá trị biểu thức  $P = a + b + c$  là

A.  $P = -4$ .

B.  $P = 4$ .

C.  $P = -3$ .

D.  $P = -5$ .

**Câu 78.** Số giá trị nguyên âm của tham số  $m \in [-2020; 2020]$  để hàm số  $y = mx^3 + 3mx^2 - (m - 1)x - 1$  có cực trị

A. 2038.

B. 2020.

C. 2018.

D. 2021.

**Câu 79.** Giả sử  $A, B$  là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $f(x) = x^3 + cx^2 + bx + c$  và đường thẳng  $AB$  đi qua gốc tọa độ. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P = abc + ab + c$ .

A.  $-\frac{16}{25}$ .

B.  $-9$ .

C.  $-\frac{25}{9}$ .

D. 1.

**Câu 80.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m - 1)x^2 + 3(m - 2)x + \frac{1}{6}$  đạt cực trị tại  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 + 2x_2 = 1$ .

A.  $1 - \frac{\sqrt{6}}{2} < m < 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ .

B.  $\begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ m = 2 \end{cases}$ .

C.  $m \in \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{2}; 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \setminus \{0\}$ .

D.  $m = 2$ .

**Câu 81.** Gọi  $x_1, x_2$  là hai điểm cực trị của hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ . Tìm tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  để  $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$ .

A.  $m = \pm\sqrt{2}$ .

B.  $m = \pm 2$ .

C.  $m = 0$ .

D.  $m = \pm 1$ .

**Câu 82.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{m}{3}x^3 + 2x^2 + mx + 1$  có 2 điểm cực trị thỏa mãn  $x_{CD} < x_{CT}$ .

A.  $m < 2$ .

B.  $-2 < m < 0$ .

C.  $-2 < m < 2$ .

D.  $0 < m < 2$ .

**Câu 83.** Với các giá trị thực của tham số  $m \in \left(\frac{a}{b}; +\infty\right) \setminus \{c\}$  (với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản) thì đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m - 1)x + 2$  có hai điểm cực trị và hoành độ cực trị đều dương.

Tính giá trị biểu thức  $P = \frac{a + b + c}{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}$

A.  $P = -\frac{1}{2}$ . B.  $P = \frac{3}{5}$ . C.  $P = \frac{3}{2}$ . D.  $P = \frac{1}{4}$ .

**Câu 84.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in (-2019; 2019)$  thì đồ thị hàm số  $y = -x^3 + 3(m+1)x^2 - (3m^2 + 7m - 1)x + m^2 - 1$  có điểm cực tiểu tại một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1?

A. 2018. B. 2020. C. 2019. D. 4038.

**Câu 85.** Với các giá trị thực của tham số  $m = a$  ( $a \in \mathbb{Z}$ ) thì đồ thị hàm số  $y = 2x^3 + mx^2 - 12x - 13$  có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm này cách đều trục tung  $Oy$ . Biết  $t$  thỏa mãn phương trình sau  $4t^2 + 3at + a^2 + 3a - 9 = 0$ . Tính giá trị của  $t$ .

A.  $t = 3$ . B.  $t = \pm \frac{3}{2}$ . C.  $t = \frac{3}{2}$ . D.  $t = \pm 3$ .

**Câu 86.** Với các giá trị thực của tham số  $m = \frac{a}{b}$  (với  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản) thì đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 12mx - 3m + 4$  có hai điểm cực trị là  $A$  và  $B$  và hai điểm này cùng với điểm  $C\left(-1; -\frac{9}{2}\right)$  lập thành tam giác nhận gốc tọa độ  $O$  làm trọng tâm. Tính giá trị biểu thức  $P = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$ .

A.  $P = \frac{25}{4}$ . B.  $P = \frac{15}{4}$ . C.  $P = \frac{7}{2}$ . D.  $P = -\frac{5}{4}$ .

**Câu 87.** Cho hàm số  $y = x^3 - 6x^2 + 3(m+2)x - m - 6$ . Tìm tất cả các giá trị thực của  $m$  để hàm số có hoành độ 2 cực trị cùng dấu.

A.  $-2 < m < 2$ . B.  $\frac{-15}{4} < m < 2$ . C.  $\frac{-21}{4} < m < 2$ . D.  $\frac{-17}{4} < m < 2$ .

**Câu 88.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$  có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trên đường thẳng có phương trình  $y = -4x$  ( $d$ ).

A.  $m \in \{1\}$ . B.  $m \in \{0; 1\}$ . C.  $m \in \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$ . D.  $m \in \left\{\frac{1}{2}\right\}$ .

**Câu 89.** Với các giá trị thực của tham số  $m = a$  hoặc  $m = b$  (với  $a, b \in \mathbb{Z}$ ) thì đồ thị hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$  có điểm cực đại và điểm cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại  $O$ . Tính giá trị biểu thức  $P = \frac{a+b}{a^2+b^2}$ .

A.  $P = \frac{1}{2}$ . B.  $P = 1$ . C.  $P = 2$ . D.  $P = 0$ .

**Câu 90.** Với các giá trị thực của tham số  $m = -\frac{a}{b}$  hoặc  $m = \frac{c}{d}$  (với  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  và  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  là các phân số tối giản) thì hàm số  $y = -x^3 - 3x^2 + 3(m^2 - a)x - 3m^2 - 1$  ( $C$ ) có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số cách đều gốc tọa độ. Tính giá trị biểu thức  $P = \frac{a+b+c+d}{a^2+b^2}$ .

A.  $P = \frac{6}{5}$ . B.  $P = \frac{5}{6}$ . C.  $P = \frac{4}{7}$ . D.  $P = \frac{7}{4}$ .

**Câu 91.** Với các giá trị thực của tham số  $m = -\frac{a\sqrt{2}}{b}$  hoặc  $m = \frac{c\sqrt{2}}{d}$  (với  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$  và  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  là các phân số tối giản) thì đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$  có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng  $d: y = x$ . Giá trị biểu thức  $P = a^3 + b^3 + c^3 + d^3$  là

A.  $P = 8$ . B.  $P = 28$ . C.  $P = 10$ . D.  $P = 18$ .

**Câu 92.** Với các giá trị thực của tham số  $m = a$  hoặc  $m = -\frac{b}{c}$  (với  $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$  và  $\frac{b}{c}$  phân số tối giản) thì đồ thị hàm số  $y = mx^3 - 3mx^2 + 3m - 3$  có hai điểm cực trị  $A, B$  và thỏa mãn  $2AB^2 - (OA^2 + OB^2) = 20$

(trong đó  $O$  là gốc tọa độ). Giá trị biểu thức  $P = \frac{a+b+c}{abc}$  là

A.  $P = \frac{187}{28}$ .

B.  $P = \frac{28}{28}$ .

C.  $P = \frac{187}{29}$ .

D.  $P = \frac{29}{187}$ .

**Câu 93.** Với các giá trị thực của tham số  $m = a$  hoặc  $m = -\frac{b}{c}$  (với  $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$  và  $\frac{b}{c}$  phân số tối giản) thì đường thẳng  $\Delta: x + my + 3 = 0$  tạo với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2$  ( $C'$ ) một góc  $\alpha$ , biết  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ . Giá trị biểu thức  $P = \frac{a+b+c}{a-b-c}$  là

A.  $P = -\frac{15}{11}$ .

B.  $P = \frac{15}{11}$ .

C.  $P = \frac{11}{15}$ .

D.  $P = -\frac{11}{15}$ .

**Câu 94.** Cho hàm số  $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + m$ . Giả sử đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là  $A, B$  đồng thời  $A, B$  cùng với gốc tọa độ  $O$  không thẳng hàng. Khi đó chu vi  $\triangle ABC$  nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

A.  $\sqrt{10} - \sqrt{2}$ .

B.  $\sqrt{10} + \sqrt{2}$ .

C.  $\sqrt{20} - \sqrt{10}$ .

D.  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ .

#### 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 95.** Cho hàm số  $y = 2x^3 + 3mx^2 + 2mx - 5$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                                          | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số có đạo hàm cấp hai là $y'' = 12x + 6m$ .                                                                 |   |   |
| b) Với $m = \frac{3}{2}$ thì hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ .                                                     |   |   |
| c) Với $m > 0$ thì hàm số có hai cực trị.                                                                          |   |   |
| d) Tổng các giá trị của $m$ để hàm số có hai cực trị $x_1$ và $x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 12$ bằng 0. |   |   |

**Câu 96.** Cho hàm số  $y = -x^3 - 2mx^2 + (m^2 + 1)x + 7$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                  | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số có đạo hàm cấp hai là $y'' = 6x - 4m$ .                                          |   |   |
| b) Hàm số có cực tiểu tại $x = 1$ khi $m = 2 + \sqrt{6}$ .                                 |   |   |
| c) Không có giá trị nào của $m$ để hàm số có hai điểm cực trị nằm khác phía với trục tung. |   |   |
| d) Có ba giá trị nguyên của $m$ để hàm số không có cực trị.                                |   |   |

**Câu 97.** Cho hàm số  $y = x^3 - mx^2 - (2m - 9)x + 2$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                                  | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số có đạo hàm là $y' = 3x^2 + 2mx + (2m - 9)$ .                                                     |   |   |
| b) Với $m > 3$ thì hàm số có hai cực trị.                                                                  |   |   |
| c) Giá trị nguyên dương nhỏ nhất của $m$ để hàm số có hai điểm cực trị nằm cùng phía với trục tung bằng 3. |   |   |
| d) Tổng các giá trị nguyên của $m$ để hàm số không có cực trị bằng $-39$ .                                 |   |   |

**Câu 98.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m - 1)x$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                               | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đạo hàm của hàm số là $y' = 3x^2 - 2mx + (m^2 - 1)$ .                                                |   |   |
| b) Với $x = m$ thì $y'' = 0$ .                                                                          |   |   |
| c) Hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị với mọi $m$ .                                                 |   |   |
| d) Tổng các giá trị của $m$ để hàm số có hai điểm cực trị nằm cách đều đường thẳng $y = 5x - 9$ bằng 0. |   |   |

**Câu 99.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + (m - 1)x - 3$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                  | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đạo hàm cấp hai của hàm số là $y'' = 2x - 2$ .                          |   |   |
| b) Với $m = 2$ thì hàm số có cực đại tại điểm $x = 1$ .                    |   |   |
| c) Với $m < 1$ thì hàm số có hai điểm cực trị nằm khác phía với trục tung. |   |   |
| d) Giá trị nhỏ nhất của $m$ để hàm số không có cực trị bằng 2.             |   |   |

## 5

## Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 100.** Tìm tổng các giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 + (m - 1)x^2 + 3x - 2$  không có cực trị. KQ:

**Câu 101.** Cho hàm số  $y = (m - 1)x^3 - 3x^2 - (m + 1)x + 3m^2 - m + 2$ . Số nguyên dương  $m$  bé nhất để hàm số có cực đại, cực tiểu là KQ:

**Câu 102.** Cho hàm số  $y = x^3 + (m - 1)x^2 + 3x - 2$ . Tìm tổng các giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số không có cực trị. KQ:

**Câu 103.** Cho hàm số  $y = (m - 1)x^3 - 3x^2 - (m + 1)x + 3m^2 - m + 2$ . Tìm số giá trị  $m$  nguyên thuộc  $[0; 10]$  để hàm số có cực đại, cực tiểu. KQ:

**Câu 104 (Mức độ H).** Cho hàm số  $y = x^3 - x^2 - (m^2 + 1)x + 7$  ( $\mathcal{C}$ ). Biết hàm số trên đạt cực trị tại  $x_1$  và  $x_2$ . Tính  $3(x_1 + x_2)$ . KQ:

**Câu 105 (Mức độ V).** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 + 4(m - 2)x^2 - 7x + 1$  có hai điểm cực trị  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) thỏa mãn  $|x_1| - |x_2| = -4$ ? KQ:

**Câu 106 (Mức độ V).** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$  với  $m$  là tham số thực. Giá trị của  $m$  thuộc tập hợp nào để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng  $d: x + 8y - 74 = 0$ . KQ:

**Câu 107 (Mức độ C).** Gọi  $S$  là tập hợp giá trị  $m$  là số nguyên để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - (m + 1)x^2 + (m - 2)x + 2m - 3$  đạt cực trị tại hai điểm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1^2 + x_2^2 = 18$ . Tính tổng các phần tử nguyên thuộc tập  $S$ . KQ:

**Câu 108 (Mức độ C).** Hàm số  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + (m^2 - 3)x + 2018$  có hai điểm cực trị  $x_1, x_2$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = |x_1(x_2 - 2) - 2(x_2 + 1)|$ . KQ:

**DẠNG 5**

**Tìm tham số để hàm trùng phương có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước**

**Phương pháp**

a) Tính  $y' = 4ax^3 - 2bx = 2x(2ax^2 + b)$ ;  $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$  hoặc  $2ax^2 + b = 0$  (1).

b) Nhận xét:

(a) Hàm số có ba điểm cực trị khi (1) có hai nghiệm khác 0. Suy ra  $ab < 0$ .

(b) Hàm số có đúng một điểm cực trị  $ab \geq 0$  và  $a, b$  không đồng thời bằng 0.

c) Các công thức tính nhanh

(a)  $\cos A = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$ .

(b)  $S_{ABC}^2 = -\frac{b^5}{32a^3}$ .

d) Các công thức tính toán thường gặp

☉ Độ dài  $MM = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2}$ .

☉ Khoảng cách từ điểm  $M(x_M, y_M)$  đến đường thẳng  $\Delta: Ax + By + C = 0$ :

$$d(M, \Delta) = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

☉ Tam giác vuông tại  $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ .

☉ Diện tích tam giác  $ABC$  là  $S = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$ , với  $\overrightarrow{AB} = (a_1; b_1), \overrightarrow{AC} = (a_2; b_2)$ .

**1 Ví dụ mẫu**

**Ví dụ 43 (Mức độ N).** Cho hàm số  $y = (m + 1)x^4 - mx^2 + 3$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số có ba điểm cực trị.

**Ví dụ 44 (Mức độ N).** Cho hàm số  $y = -x^4 + (m^2 - m)x^2$ . Tìm  $m$  để hàm số có đúng một cực trị.

**Ví dụ 45 (Mức độ H).** Tìm tất cả giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 + 2m - 3$  có ba điểm cực trị là ba đỉnh của tam giác cân.

**Ví dụ 46 (Mức độ H).** Biết hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$  có ba điểm cực trị là  $A, B, C$ . Có nhận xét gì về hình dạng của  $\Delta ABC$ ?

**Ví dụ 47 (Mức độ H).** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = (m + 3)x^4 + (2m - 13)x^2 + 6m - 5$  có 3 điểm cực trị?

**Ví dụ 48 (Mức độ H).** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên âm của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2(m + 1)x^2 + m^2$  có ba điểm cực trị. Số phần tử của tập hợp  $S$  là bao nhiêu?

**Ví dụ 49 (Mức độ H).** Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để đồ thị của hàm số  $y = (m - 1)x^4 + (6 - m)x^2 + m$  có đúng một cực trị?

**Ví dụ 50 (Mức độ V).** Cho hàm số  $y = x^4 - 2mx^2$ . Khi đó

| Phát biểu                                  | Đ | S |
|--------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số có đạo hàm là $y' = 4x^3 - 4m$ . |   |   |



| Phát biểu                                                                                   | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| b) Với $m < 0$ thì phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt.                            |   |   |
| c) Với $m > 0$ thì hàm số có ba điểm cực trị.                                               |   |   |
| d) Với $0 < m < 1$ thì hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích nhỏ hơn 1. |   |   |

**Ví dụ 51 (Mức độ V).** Cho hàm số  $y = x^4 - 2(m+2)x^2 + 3(m+2)^2$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                    | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số có đạo hàm là $y' = 4x^3 + 4(m+2)x$ .                              |   |   |
| b) Với $m < -2$ thì hàm số có ba điểm cực trị.                               |   |   |
| c) Điểm $A(0; 3(m+2)^2)$ là một điểm cực trị của hàm số.                     |   |   |
| d) Với $m \in (-1; 0)$ thì hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều. |   |   |

**Ví dụ 52 (Mức độ H).** Tìm giá trị lớn nhất của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^4 - 2(m+2)x^2 + 3m - 1$  chỉ có điểm cực tiểu, không có điểm cực đại.  
KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

## 2

### Bài tập tự luận

**Bài 22 (Mức độ H).** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho đồ thị của hàm số  $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$  có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

**Bài 23 (Mức độ H).** Cho hàm số phụ thuộc tham số  $m$  là  $y = x^4 - 8x^2 + m$ ; kí hiệu đồ thị của nó là  $(C_m)$ . Tìm giá trị của tham số  $m$  để  $(C_m)$  có các điểm cực tiểu cách gốc tọa độ  $O$  một khoảng bằng 2.

**Bài 24 (Mức độ H).** Tìm các giá trị của  $m$  để hàm số  $y = mx^4 + (m^2 + m)x^2 - 2019$  có đúng một điểm cực trị.

**Bài 25 (Mức độ H).** Cho đồ thị hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$  có điểm cực đại  $A(0; -3)$  và điểm cực tiểu  $B(-1; -5)$ . Tính giá trị của  $P = a + 2b + 3c$ .

**Bài 26 (Mức độ V).** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 + \frac{m}{2}$  có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua ba điểm cực trị này có bán kính bằng 1.

## 3

### Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 109 (Mức độ N).** Cho hàm số  $y = (m+1)x^4 - mx^2 + 3$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số có ba điểm cực trị.

**A.**  $m \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$ .

**B.**  $m \in (-1; 0)$ .

**C.**  $m \in (-\infty; -1) \cup [0; +\infty)$ .

**D.**  $m \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$ .

**Câu 110 (Mức độ N).** Tìm tất cả các giá trị thực của  $m$  để hàm số  $y = mx^4 - (m+1)x^2 + 2m - 1$  có 3 điểm cực trị?

**A.**  $-1 < m < 0$ .

**B.**  $m < -1$ .

**C.**  $m > -1$ .

**D.**  $\begin{cases} m < -1 \\ m > 0 \end{cases}$ .

**Câu 111 (Mức độ N).** Hàm số  $y = x^4 - 4mx^2 - 2$  có ba cực trị khi

**A.**  $m \in \mathbb{R}$ .

**B.**  $m \geq 0$ .

**C.**  $m \in \emptyset$ .

**D.**  $m > 0$ .



**Câu 112 (Mức độ H).** Đồ thị hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$  ( $a \neq 0$ ) có số điểm cực trị bằng số điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = mx^3 + nx^2 + p$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $ab > 0$ . B.  $mn < 0$ . C.  $m = 0$  và  $n \neq 0$ . D.  $\begin{cases} m = 0; n \neq 0 \\ ab \geq 0 \end{cases}$ .

**Câu 113 (Mức độ H).** Biết đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 + 2$  có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân. Tính giá trị của biểu thức  $P = m^2 + 2m + 1$ .

- A.  $P = 1$ . B.  $P = 4$ . C.  $P = 2$ . D.  $P = 0$ .

**Câu 114 (Mức độ H).** Để đồ thị hàm số  $y = -x^4 - (m - 3)x^2 + m + 1$  có điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu thì tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  là

- A.  $m \leq 3$ . B.  $m < 3$ . C.  $m \geq 3$ . D.  $m > 3$ .

**Câu 115 (Mức độ H).** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số  $y = mx^4 + (m^2 - 4)x^2 + 2$  có đúng một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu?

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

**Câu 116 (Mức độ V).** Số giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 + (m - 2)x^2 - \frac{3m}{2}$  có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác nhận điểm  $O(0; 0)$  làm trọng tâm là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

**Câu 117 (Mức độ V).** Để đồ thị  $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$  có ba điểm cực trị nhận gốc tọa độ  $O$  làm trực tâm thì giá trị của tham số  $m$  bằng

- A. 2. B. 1. C.  $\frac{1}{3}$ . D.  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 118 (Mức độ V).** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$  có ba điểm cực trị đồng thời các điểm cực trị của đồ thị lập thành tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1. Tính tổng tất cả các phần tử của  $S$ .

- A.  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . B.  $\frac{2 + \sqrt{5}}{2}$ . C. 0. D.  $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ .

**Câu 119.** Hàm số  $y = mx^4 + (m - 1)x^2 + m$  chỉ có đúng một cực trị khi và chỉ khi  $m \in (-\infty; a] \cup [b; +\infty)$  (với  $a, b \in \mathbb{Z}$ ). Giá trị biểu thức  $P = 2a^{2019} + 3b^{2020}$  bằng

- A.  $P = 2^{2019} + 3$ . B.  $P = 2 + 3 \times 2^{2020}$ . C.  $P = 3$ . D.  $P = 0$ .

**Câu 120.** Số giá trị nguyên của tham số  $m \in [-1000; 2010]$  để hàm số  $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$  có ba điểm cực trị.

- A. 1000. B. 3010. C. 2010. D. 999.

**Câu 121.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2(m + 1)x^2 + m^2$  có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

- A. Không tồn tại  $m$ . B.  $m = 0$ . C.  $\begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$ . D.  $m = -1$ .

**Câu 122.** Với các giá trị thực của tham số  $m = a$  hoặc  $m = b$  (với  $a \in \mathbb{Z}^-$ ,  $b \in \mathbb{Z}^+$ ) thì đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$  ( $C$ ) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông cân. Giá trị biểu

$$P = \frac{3a^2 - b^2}{ab} \text{ là}$$

- A.  $P = 0$ . B.  $P = -1$ . C.  $P = 2$ . D.  $P = -2$ .

**Câu 123.** Với các giá trị của tham số  $m = a + \frac{b\sqrt[3]{3}}{c}$  (với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ) và  $\frac{b}{c}$  là phân số tối giản) thì đồ thị hàm số  $y = x^4 - 4(m-1)x^2 + 2m - 1$  có 3 điểm cực trị tạo thành 3 đỉnh của một tam giác đều. Giá trị biểu thức  $P = 2^a + 3^b + 4^c$  là

- A.  $P = 11$ . B.  $P = 9$ . C.  $P = 21$ . D.  $P = 15$ .

**Câu 124.** Cho hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ . Để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành 1 tam giác nhận gốc tọa độ  $O$  làm trực tâm thì giá trị của tham số thực  $m$  thuộc khoảng nào sau đây?

- A.  $m \in (-10; -5)$ . B.  $m \in (-5; 0)$ . C.  $m \in (0; 5)$ . D.  $m \in (5; 10)$ .

**Câu 125.** Với các giá trị thực của tham số  $m = -a$  hoặc  $m = b$  (với  $a, b \in \mathbb{Z}^+$ ) thì đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 + m^4 + 1$  có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc  $O$  tạo thành một tứ giác nội tiếp. Giá trị biểu thức  $P = a^2 + 5ab + b^2$  là

- A.  $P = 7$ . B.  $P = 2$ . C.  $P = 5$ . D.  $P = 3$ .

**Câu 126.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 - 8m^2x^2 + 1$  có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có diện tích bằng 64.

- A. Không tồn tại  $m$ . B.  $m = \sqrt[5]{2}$ . C.  $m = -\sqrt[5]{2}$ . D.  $m = \pm\sqrt[5]{2}$ .

**Câu 127.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 - (3m-1)x^2 + 2m + 1$  có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với điểm  $D(7; 3)$  nội tiếp được một đường tròn.

- A.  $m = 3$ . B.  $m = 1$ . C.  $m = -1$ . D. Không tồn tại  $m$ .

**Câu 128.** Với các giá trị thực của tham số  $m = \frac{a}{b}$  hoặc  $m = \frac{c-\sqrt{2}}{d}$  hoặc  $m = \frac{e+\sqrt{2}}{f}$  (với  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}^+$  và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản) thì đồ thị hàm số  $y = -x^4 + 2mx^2 - 4m + 1$  có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ tạo thành một hình thoi. Giá trị biểu thức  $P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{d^2 + e^2 + f^2}$ .

- A.  $P = \frac{1}{4}$ . B.  $P = \frac{3}{4}$ . C.  $P = \frac{1}{2}$ . D.  $P = \frac{4}{5}$ .

#### 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 129.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{4}x^4 - (3m+1)x^2 + 2(m+1)$  có đồ thị  $(C_m)$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                                   | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số có đạo hàm là $y' = x^3 - 2(3m+1)x$ .                                                             |   |   |
| b) Hàm số có đúng một cực trị khi và chỉ khi $m \leq -\frac{1}{3}$ .                                        |   |   |
| c) Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $m < -\frac{1}{3}$ .                                                 |   |   |
| d) Với $m = \frac{1}{3}$ thì hàm số có ba cực trị tạo thành một tam giác có trọng tâm trùng với gốc tọa độ. |   |   |

**Câu 130.** Cho hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 - m$ . Khi đó

| Phát biểu                                | Đ | S |
|------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số có đạo hàm $y' = 4x^3 - 4mx$ . |   |   |

| Phát biểu                                                                                                         | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| b) Với $m < 0$ thì hàm số có ba cực trị.                                                                          |   |   |
| c) Điểm $A(0; -m)$ là một điểm cực trị của hàm số.                                                                |   |   |
| d) Với $m = 1$ thì hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có đường trong ngoại tiếp có bán kính bằng 1. |   |   |

**Câu 131 (Mức độ V).** Cho hàm số  $y = x^4 - 2(m - 1)x^2 + m^4 - 3m^2 + 2017$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                 | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số có đạo hàm là $y' = 4x^3 + 4(m - 1)x - 6m$ .                                    |   |   |
| b) Với $m > 1$ thì hàm số có ba điểm cực trị.                                             |   |   |
| c) Điểm $A(0; m^4 - 3m^2 + 2017)$ là một điểm cực trị của đồ thị hàm số.                  |   |   |
| d) Với $m = 5$ thì hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 32. |   |   |

**Câu 132.** Cho hàm số  $f(x) = x^4 - (m^2 - 1)x^2 + 2$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                 | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số có đạo hàm là $y' = 2x[2x^2 - (m^2 - 1)]$ .                     |   |   |
| b) Với $m > 1$ thì hàm số có ba cực trị.                                  |   |   |
| c) Với $m = -1$ thì hàm số có đúng một cực trị và là cực đại.             |   |   |
| d) Với $-1 \leq m \leq 1$ thì hàm số có một cực tiểu và không có cực đại. |   |   |

**Câu 133.** Cho hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 + 1$  (1). Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                                     | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số có đạo hàm là $y' = 4x^3 - 4m$ .                                                                                                    |   |   |
| b) Với $m > 0$ thì hàm số có ba điểm cực trị.                                                                                                 |   |   |
| c) Điểm $B(-\sqrt{m}; 1 - m^2)$ là một điểm cực trị của hàm số.                                                                               |   |   |
| d) Tổng lập phương các giá trị của $m$ để hàm số có ba điểm cực trị và bán kính đường tròn đi qua ba điểm cực trị bằng 1 là $-1 + \sqrt{5}$ . |   |   |

## 5

### Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 134.** Tìm số giá trị nguyên của  $m$  trên  $[-10; 10]$  để hàm số  $y = mx^4 - (m + 1)x^2 + 2m - 1$  có ba điểm cực trị. KQ:

**Câu 135.** Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của  $m \in [-2; 2]$  để hàm số  $y = mx^4 - (m + 1)x^2 + 2m - 1$  có 3 điểm cực trị. KQ:

**Câu 136 (Mức độ H).** Cho hàm số  $y = mx^4 + (m^2 - 4)x^2 + m - 2$ . Tìm giá trị nguyên âm lớn nhất của tham số  $m$  để hàm số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu. KQ:

**Câu 137 (Mức độ V).** Cho hàm số  $y = f(x) = x^4 + mx^2 + 4$  có đồ thị  $(C_m)$  với  $m$  là tham số. Tìm tất cả các giá trị thực của  $m$  để đồ thị  $(C_m)$  có 3 điểm cực trị nằm trên các trục tọa độ. KQ:

**Câu 138 (Mức độ V).** Cho hàm số  $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành một tam giác vuông. KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 139 (Mức độ C).** Cho hàm số  $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^2$  có đồ thị  $(C)$ . Tích các giá trị của  $m$  để đồ thị  $(C)$  có ba điểm cực trị  $A, B, C$  sao cho bốn điểm  $A, B, C, O$  là bốn đỉnh của hình thoi ( $O$  là gốc tọa độ). KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 140 (Mức độ C).** Với giá trị nào của tham số  $m$  thì hàm số  $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$  có ba điểm cực trị lập thành một tam giác có một góc bằng  $120^\circ$ ? (Lấy giá trị xấp xỉ đến hàng phần trăm) KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**DẠNG 6****Tìm điều kiện của tham số để hàm bậc hai trên bậc nhất có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước**

Xét hàm số có dạng  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ , với  $a, d \neq 0$ . Khi đó

☑  $f'(x) = \frac{adx^2 + 2aex + be - cd}{(dx + e)^2}$ ,  $\forall x \neq -\frac{e}{d}$  nên  $f'(x)$  và  $g(x) = adx^2 + 2aex + be - cd$  cùng dấu.

☑ Hàm số  $f(x)$  không có điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình  $g'(x) = 0$  vô nghiệm hoặc có nghiệm kép hay  $\Delta_g \leq 0$ .

☑ Nếu  $g\left(-\frac{e}{d}\right) = 0$  khi và chỉ khi  $-\frac{e}{d}$  là nghiệm kép của  $g(x)$ . Do đó hàm số  $f(x)$  có cực trị khi và chỉ khi  $f(x)$  có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình  $g(x) = 0$  có hai nghiệm phân biệt hay  $\Delta_g > 0$ .

☑ Ta có

$$f(x) + f'(x) \cdot \frac{dx + e}{d} = \frac{(dx + e)(2ax + b)}{d(dx + e)} = \frac{2ax + b}{d}.$$

Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị (nếu có) của đồ thị hàm số  $f(x)$  là  $y = \frac{2ax + b}{d}$ .

⚠ Nếu đặt  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} = \frac{u(x)}{v(x)}$  thì  $y = \frac{u'(x)}{v'(x)}$  là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $f(x)$ .

☑ Đồ thị hàm số  $f(x)$  có tâm đối xứng là  $I\left(-\frac{e}{d}; \frac{bd - 2ae}{d^2}\right)$  (là giao của hai đường tiệm cận (học ở bài sau)). Do đó nếu đồ thị hàm số  $f(x)$  có hai điểm cực trị thì  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm này.

**1 Ví dụ mẫu**

**Ví dụ 53 (Mức độ 2).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x^2 - 2mx + 1}{x - 1}$ . Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số  $f(x)$  có đúng hai điểm cực trị.

**Ví dụ 54 (Mức độ 2).** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $f(x) = \frac{x^2 - mx}{x + 1}$  không có điểm cực trị nào.

**Ví dụ 55 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = x + 1 + \frac{m}{x}$ , với  $m$  là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của

$m$  sao cho  $f(x)$  có hai điểm cực trị trái dấu.

**Ví dụ 56 (Mức độ 3).** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2m}{x - 2}$  có hai điểm cực trị dương.

**Ví dụ 57 (Mức độ 3).** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $f(x) = \frac{x^2 - 2mx + 1}{x - 1}$  có một điểm cực trị là  $x_0 = 2$ .

**Ví dụ 58 (Mức độ 3).** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $f(x) = \frac{x^2 - mx}{(x + 1)^2}$  nhận  $x_0 = 1$  là điểm cực tiểu.

**Ví dụ 59 (Mức độ 3).** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $f(x) = x + \frac{m}{x}$  có hai điểm cực trị  $A$  và  $B$  sao cho  $AB = 2\sqrt{5}$ .

**Ví dụ 60 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2m}{x - 2}$ , với  $m$  là tham số.

| Phát biểu                                                                      | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $f'(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .            |   |   |
| b) Hàm số $f(x)$ có cực trị khi và chỉ khi phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm. |   |   |
| c) Nếu hàm số $f(x)$ có cực trị thì sẽ có hai điểm cực trị.                    |   |   |
| d) Tồn tại $m$ nguyên dương để hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị trái dấu.     |   |   |

**Ví dụ 61 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{mx^2 - 2x}{x - 2}$ .

| Phát biểu                                                                  | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Nếu $m = 1$ thì hàm số $f(x)$ không có cực trị.                         |   |   |
| b) Nếu $m = 0$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên từng khoảng xác định.      |   |   |
| c) Có một giá trị của $m$ để $x_0 = 1$ là điểm cực trị của hàm số $f(x)$ . |   |   |
| d) Không tồn tại $m$ để hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị dương.           |   |   |

**Ví dụ 62 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x^2 - 3mx + 2m}{x - 1}$ , với  $m$  là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $f(x)$  có hai điểm cực trị  $A, B$  và đường thẳng  $AB$  đi qua điểm  $\left(\frac{1}{8}; -2\right)$ .

KQ:

## 2 Bài tập tự luận

**Bài 27 (Mức độ 2).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + m - 2}{x + 2}$ . Tìm  $m$  để hàm số có hai điểm cực trị.

**Bài 28 (Mức độ 2).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x^2 + (m + 1)x + m + 1}{x + 1}$  có đồ thị  $(C_m)$ . Chứng minh rằng  $(C_m)$  luôn có hai điểm cực trị với mọi  $m$ , đồng thời khoảng cách giữa hai điểm đó bằng  $\sqrt{20}$ .

**Bài 29 (Mức độ 2).** Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số  $f(x) = \frac{x^2 + x - m}{x - 1}$  có điểm cực trị là  $x = 2$ .

**Bài 30 (Mức độ 2).** Cho hàm số  $f'(x) = \frac{x^2 - mx + m}{x - m}$ . Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số có điểm cực tiểu là  $x = 3$ .

**Bài 31 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = mx + \frac{1}{x}$  có đồ thị  $(C_m)$ . Tìm  $m$  để hàm số có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu đến đường thẳng  $\Delta: y = mx$  bằng  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

## 3

## Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 141 (Mức độ 2).** Cho hàm số  $y = \frac{-x^2 + 3x + m}{x - 4}$ . Hàm số có cực trị khi và chỉ khi

- A.  $m \geq 4$ . B.  $m > 4$ . C.  $m < 4$ . D.  $m \leq 4$ .

**Câu 142 (Mức độ 2).** Cho  $y = mx - \frac{1}{x}$ . Điều kiện của tham số  $m$  để  $y$  có cực trị là

- A.  $m \geq 0$ . B.  $m \leq 0$ . C.  $m > 0$ . D.  $m < 0$ .

**Câu 143 (Mức độ 2).** Cho  $y = \frac{x^2 + mx - m^2}{x - m}$ . Hàm số có cực trị khi và chỉ khi

- A.  $m > 0$ . B.  $m < 0$ . C.  $m \neq 0$ . D.  $\forall m \in \mathbb{R}$ .

**Câu 144 (Mức độ 2).** Hàm số  $y = \frac{x^2 - (m + 1)x + 2m + 1}{x - m}$  có cực trị khi và chỉ khi

- A.  $m \geq 1$ . B.  $m > -1$ . C.  $m \leq 1$ . D.  $m < 1$ .

**Câu 145 (Mức độ 3).** Có bao nhiêu giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $f(x) = \frac{mx^2 + (m + 3)x + 1}{mx + 2}$  đạt cực trị tại  $x = 1$ ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

**Câu 146 (Mức độ 3).** Có bao nhiêu giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $f(x) = \frac{-x^2 + mx + m^2}{x - m}$  đạt cực trị tại điểm  $x = -1$ ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

**Câu 147 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + m + 1}{x + m - 1}$  có đồ thị  $(C_m)$ . Khi  $(C_m)$  có hai điểm cực trị thì hệ số góc của đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của nó là

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 6.

**Câu 148 (Mức độ 3).** Biết giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $f(x) = \frac{mx^2 + mx + 4}{x + m}$  nhận điểm  $x = 1$  là cực đại là phân số tối giản  $\frac{a}{b}$ . Giá trị của  $ab$  là

- A. 6. B. 12. C. -6. D. -12.

**Câu 149 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{mx^2 + 2mx + 1}{x - 1}$ , với  $m$  là tham số thực. Biết giá trị của tham số  $m$  để đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $f(x)$  vuông góc với đường thẳng  $y = x$  là phân số tối giản  $\frac{a}{b}$ , giá trị của  $a^2 + b^2$  là



A. 5.

B. 13.

C. 25.

D. 34.

**Câu 150 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x^2 + mx + m}{x - 1}$  với  $m$  là tham số thực. Tổng các giá trị của  $m$  để đồ thị hàm số  $f(x)$  có hai điểm cực trị  $A$  và  $B$  sao cho tam giác  $OAB$  có diện tích bằng 4 là

A. 0.

B. 1.

C. -2.

D. 3.

**Câu 151 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x^2 + 3mx + 2}{x - 1}$ . Tích các giá trị của tham số  $m$  sao cho đồ thị hàm số  $f(x)$  có hai điểm cực trị  $A, B$  thỏa mãn diện tích tam giác  $ABO$  bằng 2 là

A.  $\frac{2}{3}$ .

B.  $-\frac{2}{3}$ .

C.  $\frac{2}{9}$ .

D.  $-\frac{2}{9}$ .

**Câu 152 (Mức độ 3).** Biết  $a, b$  là các số thực sao cho hàm số  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + ab}{(bx + a)^2}$  có điểm cực đại là  $x_1 = 4$  và điểm cực tiểu là  $x_2 = 0$ . Khi đó giá trị của  $a^2 + b^2$  là

A. 1.

B. 2.

C. 5.

D. 13.

**Câu 153.** Tìm các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$  đạt cực tiểu tại  $x = 2$ .

A.  $\begin{cases} m = -3 \\ m = -1 \end{cases}$ .

B.  $\begin{cases} m = 3 \\ m = 1 \end{cases}$ .

C.  $m = -1$ .

D.  $m = -3$ .

**Câu 154.** Cho hàm số  $y = \frac{-x^2 + 2mx + 5}{x - 1}$ . Tất cả các số thực  $m$  để hàm số có hai điểm cực trị là

A.  $m \geq 3$ .

B.  $m \leq 3$ .

C.  $m \neq 3$ .

D.  $m < 3$ .

**Câu 155.** Tìm các giá trị của  $m$  để hàm số  $y = \frac{x^2 - (m + 1)x - m^2 + 4m - 2}{x - 1}$  có cực đại và cực tiểu.

A.  $1 \leq m \leq 2$ .

B.  $1 \leq m < 2$ .

C.  $1 < m \leq 2$ .

D.  $1 < m < 2$ .

**Câu 156.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + mx}{1 - x}$  ( $C$ ). Tìm  $m$  để khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị ( $C$ ) bằng 10.

A.  $m = 4$ .

B.  $m = 1$ .

C.  $m = -1$ .

D.  $m = 2$ .

**Câu 157.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + (m + 1)x + m + 1}{x + 1}$ . Gọi  $A, B$  là hai điểm cực trị, tìm  $m$  để diện tích  $\triangle OAB$  bằng 2. Với  $m$  vừa tìm được, tính khoảng cách từ  $O$  đến đường thẳng  $AB$ .

A.  $\begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}$ .

B.  $\begin{cases} m = -3 \\ m = 1 \end{cases}$ .

C.  $m = -1$ .

D.  $m = 2$ .

**Câu 158.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 2mx + 2}{x + 1}$ . Tìm tham số  $m$  để hàm số có cực đại và cực tiểu, đồng thời khoảng cách từ hai điểm ấy đến đường thẳng  $\Delta: x + y + 2 = 0$  bằng nhau.

A.  $m = -\frac{1}{2}$ .

B.  $m = 1$ .

C.  $m = -1$ .

D.  $m = \frac{1}{2}$ .

**Câu 159.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 2mx + 2}{x + 1}$ . Tìm tham số  $m$  để hàm số có cực đại và cực tiểu, đồng thời khoảng cách từ hai điểm ấy đến đường thẳng  $\Delta: x + y + 2 = 0$  bằng nhau.

A.  $m = -\frac{1}{2}$ .

B.  $m = 1$ .

C.  $m = -1$ .

D.  $m = \frac{1}{2}$ .



**Câu 160.** Cho hàm số  $y = \frac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x - 1}$ . Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số thực  $m$  để hàm số có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị này nằm về hai phía so với trục hoành.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

**Câu 161.** Cho hàm số  $y = \frac{-x^2 + 2mx + 5}{x - 1}$ . Tìm tham số thực  $m$  để hàm số có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị này nằm về hai phía so với đường thẳng  $\Delta: y = 2x$ .

- A.  $m < -2$ . B.  $m \geq 2\sqrt{6}$ .  
C.  $-2 - 2\sqrt{6} < m < -2 + 2\sqrt{6}$ . D.  $-\sqrt{6} < m < \sqrt{6}$ .

**Câu 162.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x^2 - (m + 1)x - m^2 + 4m - 2}{x - 1}$  có cực đại, cực tiểu, đồng thời tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất.

- A.  $m = -\frac{1}{2}$ . B.  $m = \frac{7}{5}$ . C.  $m = -\frac{3}{2}$ . D.  $m = \frac{3}{2}$ .

#### 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 163 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x^2 + 3mx + 2m}{x - 1}$ , với  $m$  là tham số

| Phát biểu                                                           | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $f'(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ . |   |   |
| b) Hàm số luôn có hai điểm cực trị với mọi giá trị của $m$ .        |   |   |
| c) Với $m = 1$ thì hàm số có hai điểm cực trị trái dấu.             |   |   |
| d) Hàm số có hai điểm cực trị cùng dấu khi và chỉ khi $m > 1$ .     |   |   |

**Câu 164 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + m}{x - m}$ , với  $m$  là tham số.

| Phát biểu                                                                 | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Với $m = 1$ thì hàm số đã cho có hai điểm cực trị.                     |   |   |
| b) Với $m = 0$ thì đồ thị hàm số đã cho đi qua gốc tọa độ.                |   |   |
| c) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 1$ .             |   |   |
| d) Có duy nhất một giá trị của $m$ để $x = 2$ là điểm cực đại của hàm số. |   |   |

**Câu 165 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{-x^2 + 3x + m}{x - 4}$ , với  $m$  là tham số.

| Phát biểu                                                                                   | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Với $m = 0$ thì đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.              |   |   |
| b) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m \geq 4$ .                            |   |   |
| c) Có đúng một giá trị của tham số $m$ để đồ thị hàm số có điểm cực trị nằm trên trục tung. |   |   |

| Phát biểu                                                                                                      | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| d) Có đúng một giá trị của $m$ để $ y_1 - y_2  = 4$ , với $y_1, y_2$ là các giá trị cực trị của hàm số đã cho. |   |   |

**Câu 166 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x - 1}$ , với  $m$  là tham số.

| Phát biểu                                                                                                | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số đã cho luôn cắt trục hoành.                                                             |   |   |
| b) Không tồn tại $m$ nguyên để hàm số không có cực trị.                                                  |   |   |
| c) Đồ thị hàm số đã cho luôn đi qua một điểm cố định.                                                    |   |   |
| d) Tổng các giá trị nguyên của $m$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành là 6. |   |   |

## 5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 167.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + (m+1)x + 2m + 1}{x + 1}$ . Tìm số giá trị nguyên lớn hơn  $-10$  của tham số  $m$  để hàm số có 2 cực trị.

KQ:

**Câu 168.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + (m+1)x + 2m + 1}{x + 1}$ . Tìm hệ số góc của đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số.

KQ:

**Câu 169.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + mx}{1 - x}$ . Tìm tham số  $m$  để hàm số có 2 cực trị, giá trị nguyên nhỏ nhất của  $m$  bằng bao nhiêu?

KQ:

**Câu 170.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 2mx + 2}{x + 1}$ . Tìm tham số  $m$  để hàm số có cực đại và cực tiểu, giả sử  $m \in (-\infty; a)$ , tìm  $a$ ?

KQ:

**Câu 171.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + (m+1)x + 2m + 1}{x + 1}$ . Tìm số nguyên  $m$  bé nhất để hàm số có 2 điểm cực trị.

KQ:

**Câu 172.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + (m+1)x + 2m + 1}{x + 1}$ . Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có hệ số góc bằng

KQ:

**Câu 173 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + m - 2}{x + 2}$  với  $m$  là tham số. Gọi  $y_1, y_2$  lần lượt là giá trị cực tiểu và giá trị cực đại của hàm số (nếu có). Biết tập các giá trị của  $m$  để  $|y_1 - y_2| < 12$  là khoảng  $(a; b)$ , tính  $b - a$ .

KQ:

**Câu 174 (Mức độ 3).** Tính tổng các giá trị nguyên của tham số  $m$  để đồ thị hàm số

$$f(x) = \frac{x^2 + (m+1)x - m + 1}{x - m}$$

có hai điểm cực trị nằm khác phía đối với trục  $Ox$ .

KQ:

**Câu 175 (Mức độ 3).** Điều kiện cần và đủ của tham số  $m$  để đồ thị hàm số

$$f(x) = \frac{mx^2 - (3m+2)x + 2(m+3)}{x-3}$$

có hai điểm cực trị cùng thuộc góc phần tư thứ nhất trên mặt phẳng  $Oxy$  là  $m > a(b + a\sqrt{c})$ , với  $a, b$  là các số nguyên tố. Tính tích  $abc$ . KQ:

**Câu 176 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{2x^2 + (m-2)x}{x-1}$  có đồ thị là  $(C_m)$ . Khi đồ thị  $(C_m)$  có hai điểm cực trị thì điểm cực đại luôn chạy trên một parabol cố định có phương trình  $y = ax^2 + bx + c$ . Tính tổng  $a + b + c$ . KQ:

**Câu 177 (Mức độ 4).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x^2 + m(m^2 - 1)x - m^4 + 1}{x - m}$ , với  $m$  là tham số, có đồ thị  $(C_m)$ . Biết rằng tồn tại duy nhất một điểm vừa điểm cực đại của  $(C_{m_1})$  và là cực tiểu của  $(C_{m_2})$ , tính giá trị của  $m_1 \cdot m_2$ . KQ:

**Câu 178 (Mức độ 4).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x^2 - m(m+1)x + m^3 + 1}{x - m}$  có đồ thị là  $(C_m)$ . Điểm  $A(a; b)$  vừa là điểm cực đại của  $(C_{m_1})$  vừa là điểm cực tiểu của  $(C_{m_2})$ . Tính  $a - b$ . KQ:

## DẠNG

7

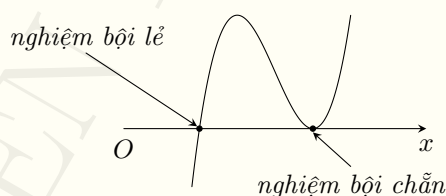
## Cực trị một số hàm số khác

Ta tìm cực trị bằng cách tìm nghiệm của  $f'(x)$  và những điểm mà  $f'(x)$  không xác định, rồi xét dấu của  $f'(x)$ .



☑ Hàm số đổi dấu khi  $x$  đi qua  $x_0$  nếu  $x_0$  là nghiệm bội lẻ, giữ nguyên dấu khi  $x$  đi qua  $x_0$  nếu  $x_0$  là nghiệm bội chẵn.

☑ Dấu hiệu về đồ thị nhận biết nghiệm bội lẻ, bội chẵn:



☑ Cho hai đa thức  $f(x)$  và  $g(x)$ , số thực  $a$  sao cho  $f(x) = (x-a)^n g(x)$  và  $g(a) \neq 0$ . Nếu  $n$  chẵn thì  $x = a$  là nghiệm bội chẵn và nếu  $n$  lẻ thì  $x = a$  là nghiệm bội lẻ của  $f(x)$ .



Cực trị của hàm số trị tuyệt đối chứa tham số  $m$

☑ Hàm số  $y = f(x)$  có  $n$  số điểm cực trị dương thì hàm số  $y = f(|x|)$  có  $2n + 1$  số điểm cực trị.

☑ Hàm số  $y = f(x)$  có  $n$  số điểm cực trị và phương trình  $f(x) = 0$  có  $m$  số nghiệm đơn và bội lẻ thì hàm số  $y = |f(x)|$  có  $n + m$  số điểm cực trị.

☑ Hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có hai điểm cực trị  $x_1, x_2$ . Khi đó hàm số  $y = |f(x)|$  có

— 3 điểm cực trị  $\Leftrightarrow f(x_1) \cdot f(x_2) \geq 0$

— 5 điểm cực trị  $\Leftrightarrow f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ .

# 1 Ví dụ mẫu

**Ví dụ 63 (Mức độ 2).** Tìm các điểm cực trị của hàm số  $f(x) = x^3 + \frac{3}{x} - 2$ .

**Ví dụ 64 (Mức độ 2).** Tìm các điểm cực trị của hàm số  $f(x) = 3^{x^3-3x+2}$ .

**Ví dụ 65 (Mức độ 2).** Tìm các điểm cực đại của hàm số  $f(x) = \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 2$  trên đoạn  $[0; 2\pi]$ .

**Ví dụ 66 (Mức độ 2).** Tìm các điểm cực trị của hàm số  $f(x) = \frac{\ln(x^2 + 2x) + 1}{2 \ln(x^2 + 2x) - 3}$ .

**Ví dụ 67 (Mức độ 3).**

Cho hàm số  $f(x)$  có bảng xét dấu của  $f'(x)$  như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số  $y = f(2x - 2)$  là bao nhiêu?

|      |           |   |   |           |   |   |
|------|-----------|---|---|-----------|---|---|
| $x$  | $-\infty$ | 0 | 2 | $+\infty$ |   |   |
| $f'$ |           | + | 0 | -         | 0 | + |

**Ví dụ 68 (Mức độ 3).**

Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ. Tìm số điểm cực đại của hàm số  $g(x) = f(3 - x)$ .

|      |           |   |   |   |           |   |   |   |
|------|-----------|---|---|---|-----------|---|---|---|
| $x$  | $-\infty$ | 0 | 1 | 2 | $+\infty$ |   |   |   |
| $f'$ |           | + | 0 | - | 0         | + | 0 | - |

**Ví dụ 69 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên

|      |           |     |      |     |     |     |     |     |           |
|------|-----------|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ |     | $-2$ |     | $0$ |     | $2$ |     | $+\infty$ |
| $f'$ |           | $-$ | $0$  | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |           |
| $f$  | $+\infty$ |     |      |     | $5$ |     |     |     | $+\infty$ |
|      |           |     | $1$  |     |     | $3$ |     |     |           |

Hàm số  $g(x) = \ln(f(x)) + \frac{2}{f(x)}$  có bao nhiêu điểm cực trị?

**Ví dụ 70 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = 9x + m\sqrt{x^2 + 9}$ , với  $m$  là tham số.

| Phát biểu                                                                               | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ .                                             |   |   |
| b) Với $m = 0$ thì hàm số không có điểm cực trị.                                        |   |   |
| c) Với $m = 1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ .                                 |   |   |
| d) Có không quá 4 giá trị nguyên âm lớn hơn $-14$ của tham số $m$ để hàm số có cực trị. |   |   |

**Ví dụ 71 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = x^8 + (m - 2)x^5 - (m^2 - 4)x^4$ , với  $m$  là tham số.

| Phát biểu                                                              | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Với $m = 2$ thì hàm số không có điểm cực trị.                       |   |   |
| b) Với $m = -2$ thì $x = 0$ không có điểm cực tiểu.                    |   |   |
| c) $f'(0) = 0$ với mọi $m$ .                                           |   |   |
| d) Có 5 giá trị nguyên của $m$ để $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số. |   |   |

**Ví dụ 72 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{x} - mx$ . Tính tổng các giá trị nguyên dương của  $m$

thỏa mãn hàm số  $f(x)$  không có cực trị.

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

## 2 Bài tập tự luận

**Bài 32 (Mức độ 2).** Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số  $f(x) = x + \sqrt{9 - x^2}$ .

**Bài 33 (Mức độ 2).** Tìm các điểm cực trị của hàm số  $f(x) = x^2 \ln x$ .

**Bài 34 (Mức độ 2).** Tìm các điểm cực trị của hàm số  $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$ .

**Bài 35 (Mức độ 2).** Tìm các điểm cực trị của hàm số  $f(x) = x^{2025}(x - 4)^2$ .

**Bài 36 (Mức độ 3).** Tìm giá trị cực trị của hàm số  $f(x) = x^x$  với  $x > \frac{1}{e^3}$ .

## 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 179 (Mức độ 2).** Hàm số  $y = x^2 \ln x$  đạt cực trị tại điểm

- A.  $x = \sqrt{e}$ .      B.  $x = 0; x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ .      C.  $x = 0$ .      D.  $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ .

**Câu 180 (Mức độ 2).** Cho hàm số  $y = (x^2 + x)e^x$  xác định trên  $\mathbb{R}$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số chỉ có một cực đại, không có cực tiểu.  
B. Hàm số có một cực đại và một cực tiểu.  
C. Hàm số chỉ có một cực tiểu, không có cực đại.  
D. Hàm số không có cực trị.

**Câu 181 (Mức độ 2).** Hàm số  $y = x^2 \ln x$  đạt cực trị tại điểm

- A.  $x = 0; x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ .      B.  $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ .      C.  $x = 0$ .      D.  $x = \sqrt{e}$ .

**Câu 182 (Mức độ 2).** Hàm số  $f(x) = xe^{-x}$  đạt cực trị tại điểm

- A.  $x = e$ .      B.  $x = e^2$ .      C.  $x = 1$ .      D.  $x = 2$ .

**Câu 183 (Mức độ 2).** Hàm số  $y = (x^3 - 3x)^e$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3.      B. 2.      C. 1.      D. 0.

**Câu 184 (Mức độ 2).** Hàm số  $y = \ln(x^3 - 3x^2 + 1)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2.      B. 3.      C. 0.      D. 1.

**Câu 185 (Mức độ 2).** Hoàn chỉnh điểm cực đại của hàm số  $y = e^{x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x - 1}$  là

- A.  $x_{CD} = 1$ .      B.  $x_{CD} = 0$ .      C.  $x_{CD} = \frac{2}{3}$ .      D.  $x_{CD} = \frac{1}{3}$ .

**Câu 186 (Mức độ 4).** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  không vượt quá 2019 để hàm số  $f(x) = \frac{x^2}{8} + \sqrt{x + m + 2}$  không có điểm cực trị?

- A. 0.      B. 1.      C. 2018.      D. 2019.

**Câu 187 (THPTQG 2018, mã 102, Mức độ 4).**

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^8 + (m - 1)x^5 - (m^2 - 1)x^4 + 1$  đạt cực tiểu tại  $x = 0$ ?

- A. 3.      B. 2.      C. Vô số.      D. 1.

**Câu 188 (THPTQG 2018, mã 103, Mức độ 4).**

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^8 + (m - 4)x^5 - (m^2 - 16)x^4 + 1$  đạt cực tiểu tại  $x = 0$ .

- A. 8. B. Vô số. C. 7. D. 9.

**Câu 189.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $y = |x^4 - 2mx^2 + 64x|$  có đúng ba điểm cực trị?

- A. 5. B. 6. C. 12. D. 11.

**Câu 190.** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số  $a$  để hàm số  $y = |x^4 + ax^2 - 8x|$  có đúng 3 điểm cực trị?

- A. 5. B. 6. C. 11. D. 10.

**Câu 191.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $f(x) = |x^3 + 3x^2 - 3 + m|$  có ba điểm cực trị.

- A.  $m = 3$  hoặc  $m = -1$ . B.  $m \geq 1$  hoặc  $m \leq -3$ .  
C.  $1 \geq m \geq 3$ . D.  $m \geq 3$  hoặc  $m \leq -1$ .

**Câu 192.** Tổng các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \left| x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} \right|$  có 5 điểm cực trị bằng

- A. -2016. B. -496. C. 1952. D. 2016.

**Câu 193.** Cho hàm số  $f(x) = mx^3 - 3mx^2 + (3m - 2)x + 2 - m$  với  $m$  là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in [-10; 10]$  để hàm số  $g(x) = |f(x)|$  có đúng 5 điểm cực trị?

- A. 7. B. 9. C. 10. D. 11.

**Câu 194.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = |x|^3 - (2m + 1)x^2 + 3m|x| - 5$  có ba điểm cực trị?

- A.  $(-\infty; \frac{1}{4})$ . B.  $[0; \frac{1}{4}) \cup (1; +\infty)$ . C.  $(-\infty; 0]$ . D.  $(1; +\infty)$ .

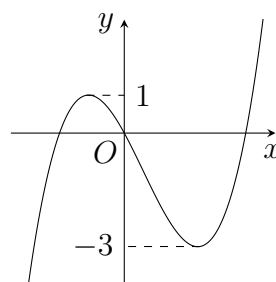
**Câu 195.** Cho hàm số  $f(x) = (m^4 + 1)x^4 - (2^{m+1} \cdot m^2 + 4)x^2 + 4^m + 15$  với  $m$  là tham số thực. Số cực trị của đồ thị hàm số  $g(x) = |f(x) - 1|$  là

- A. 3. B. 5. C. 6. D. 7.

**Câu 196.**

Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên. Tất cả các giá trị thực của tham số để hàm số  $g(x) = |f(x) + m|$  có 3 điểm cực trị là

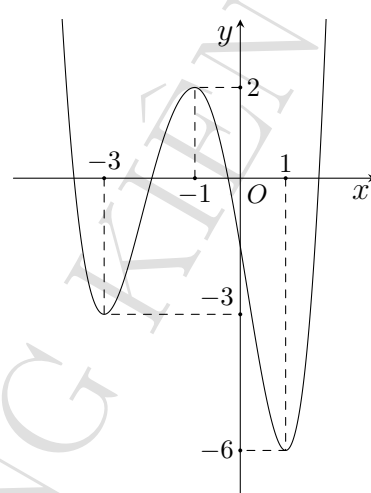
- A.  $m \leq -1$  hoặc  $m \geq 3$ . B.  $m \leq -3$  hoặc  $m \geq 1$ .  
C.  $m = -1$  hoặc  $m = 3$ . D.  $1 \leq m \leq 3$ .



**Câu 197.**

Hình vẽ là đồ thị hàm số  $y = f(x)$ . Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $y = |f(x - 1) + m|$  có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của  $S$  bằng

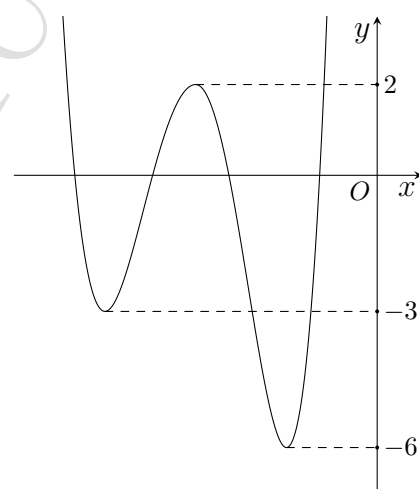
- A. 9. B. 12. C. 18. D. 15.



**Câu 198.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Đồ thị hàm số  $g(x) = |f(x + 2024) + m|$  có 7 điểm cực trị khi

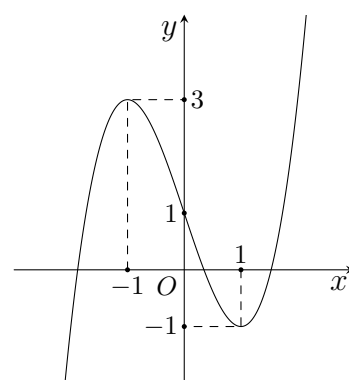
- A. 2. B. 3. C. 4. D. 6.



**Câu 199.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Với  $m < -1$  thì hàm số  $g(x) = f(|x + m|)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

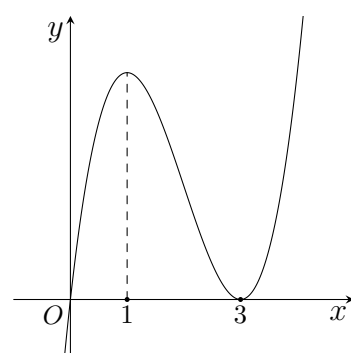
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 5.



**Câu 200.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $h(x) = |f^2(x) + f(x) + m|$  có đúng 3 điểm cực trị.

- A.  $m > \frac{1}{4}$ . B.  $m \geq \frac{1}{4}$ . C.  $m < 1$ . D.  $m \leq 1$ .





#### 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 201 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = x^2 - 3x + \frac{m}{x} + 3$ , với  $m$  là tham số

| Phát biểu                                                                               | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ .                                             |   |   |
| b) Với $m = 0$ thì hàm số có một điểm cực tiểu.                                         |   |   |
| c) Với $m = -1$ thì hàm số có ba điểm cực trị.                                          |   |   |
| d) Nếu đồ thị hàm số có ba điểm cực trị thì parabol đi qua chúng có hoành độ đỉnh là 1. |   |   |

**Câu 202 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$  và  $f(x)$  là một hàm số đa thức bậc bốn có ba điểm cực trị  $-2, 1, 2$ .

| Phát biểu                                                                       | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Phương trình $g'(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt.                             |   |   |
| b) Phương trình $f'(x) = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt.                        |   |   |
| c) Phương trình $f'(g(x)) = 0$ có cùng tập nghiệm với phương trình $g(x) = 2$ . |   |   |
| d) Hàm số $f(g(x))$ có 7 điểm cực trị.                                          |   |   |

**Câu 203 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 9x + m}{x}$  với  $m$  là tham số.

| Phát biểu                                                                               | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số luôn cắt trục tung.                                                    |   |   |
| b) Với $m = 0$ thì đồ thị hàm số là một parabol.                                        |   |   |
| c) Có 31 giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt. |   |   |
| d) Có hai giá trị nguyên của $m$ để $f(x)$ có ba điểm cực trị.                          |   |   |

**Câu 204 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $g(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x - m$  và hàm số  $f(x) = |g(x)|$  tham số  $m$ .

| Phát biểu                                                              | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ .                          |   |   |
| b) Đồ thị hàm số $g(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x - m$ có 4 điểm cực trị.    |   |   |
| c) Với $m = -15$ thì đồ thị hàm số $g(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm. |   |   |
| d) Với $m = 0$ thì hàm số $f(x)$ có 9 điểm cực trị.                    |   |   |

#### 5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 205 (Mức độ 3).** Giả sử  $a, b$  là các số thực sao cho đồ thị hàm số  $y = \frac{2x^2 - ax + 5}{x^2 + b}$  có điểm cực đại là  $\left(\frac{1}{2}; 6\right)$ , tính giá trị của  $ab$ . KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 206 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = (m+2)\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 - 3m\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) + 4m$ , với  $m$  là tham số. Biết rằng  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  là tất cả các giá trị nguyên dương của  $m$  sao cho hàm số  $f(x)$  có ba điểm cực trị, tìm số tự nhiên  $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ . KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 207 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{m \sin x - \cos x - 1}{a \cos x}$ , với  $m$  là tham số khác 0. Tập các giá  $m$  để hàm số có ba điểm cực trị thuộc khoảng  $\left(0; \frac{9\pi}{4}\right)$  là khoảng  $(a; b)$ , tính  $a + b$  (làm tròn đến hai chữ số thập phân). KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 208 (Mức độ 3).** Cho đường thẳng  $d: y = \frac{4}{3}x + 1$  và hàm số  $f(x) = \frac{x^2 + mx + 1}{x^2 + 1}$  với  $m$  là tham số. Tìm  $m$  sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $f(x)$  vuông góc với đường thẳng  $d$ . KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 209 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = x^n + (3-x)^n$ ,  $x \in [0; 3]$ , với  $n \geq 2$  là tham số nguyên dương. Tìm phần thập phân của giá trị cực tiểu của hàm số  $f(x)$ , biết rằng giá trị cực tiểu này là một số thập có đúng ba chữ số khác 0 sau dấu phẩy. KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

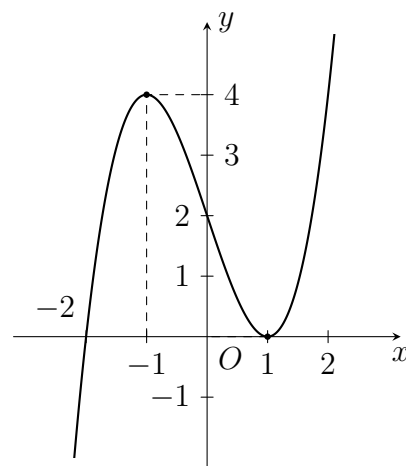
**DẠNG 8**

**Xét tính đơn điệu và cực trị của hàm số khi biết hàm số hoặc bảng biến thiên hoặc đồ thị hàm số  $y = f'(x)$**

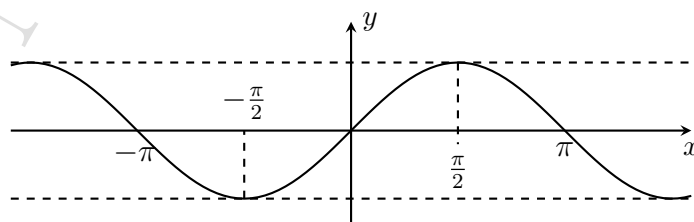
**1****Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn****Câu 210.**

Cho hàm số  $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$  ( $a \neq 0$ ). Biết rằng hàm số  $f(x)$  có đạo hàm là  $f'(x)$  và hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó nhận xét nào sau đây là **sai**?

- A. Trên  $(-2; 1)$  thì hàm số  $f(x)$  luôn tăng.
- B. Hàm  $f(x)$  giảm trên đoạn  $[-1; 1]$ .
- C. Hàm  $f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .
- D. Hàm  $f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$ .



**Câu 211.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục và xác định trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  và hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ.



Xét trên  $(-\pi; \pi)$ , khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-\pi; \pi)$ .  
**B.** Hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(-\pi; \pi)$ .  
**C.** Hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(-\pi; -\frac{\pi}{2})$  và  $(\frac{\pi}{2}; \pi)$ .  
**D.** Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(0; \pi)$ .

**Câu 212.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x-1)(x-2)^4(x^2-4)$ . Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A.** 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

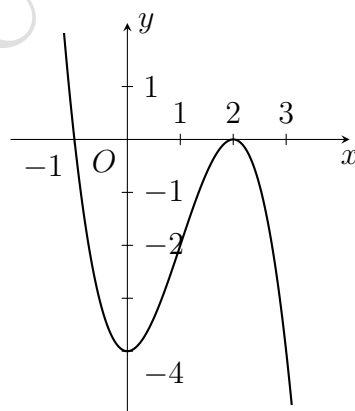
**Câu 213.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có  $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$ . Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.**  $(-\infty; -1)$ . **B.**  $(1; 2)$ . **C.**  $(-1; 1)$ . **D.**  $(2; +\infty)$ .

**Câu 214.**

Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị của hàm số  $f'(x)$  như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

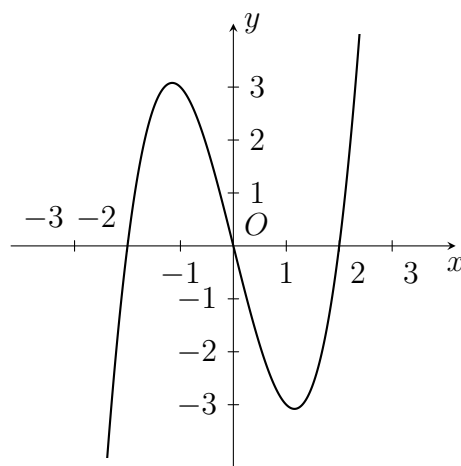
- A.** Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-4; 2)$ .  
**B.** Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$ .  
**C.** Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(0; 2)$ .  
**D.** Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -4)$  và  $(2; +\infty)$ .



**Câu 215.**

Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị hàm số  $f'(x)$  là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

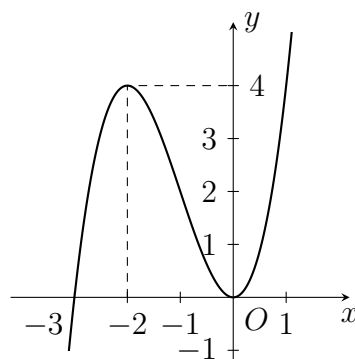
- A.** Hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(-1; 1)$ .  
**B.** Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(1; 2)$ .  
**C.** Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-2; 1)$ .  
**D.** Hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(0; 2)$ .



**Câu 216.**

Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị của hàm số  $f'(x)$  như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

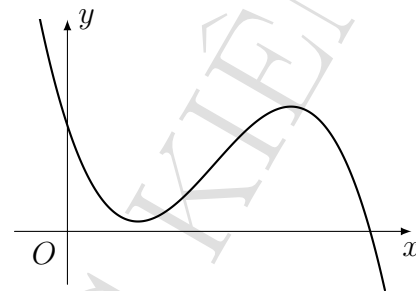
- A.** Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -2); (0; +\infty)$ .  
**B.** Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(-2; 0)$ .  
**C.** Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-3; +\infty)$ .  
**D.** Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .



**Câu 217.**

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x)$ .

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 1.



**Câu 218.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x - 1)(3 - x)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Hàm số  $y = f(x)$  đạt cực đại tại

- A.  $x = 0$ . B.  $x = 1$ . C.  $x = 2$ . D.  $x = 3$ .

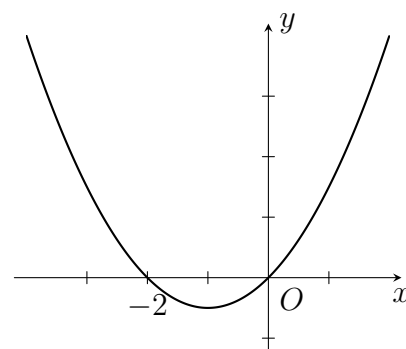
**Câu 219.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x + 1)(x - 2)^2(x - 3)^3(x + 5)^4$ . Hỏi hàm số  $y = f(x)$  có mấy điểm cực trị?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

**Câu 220.**

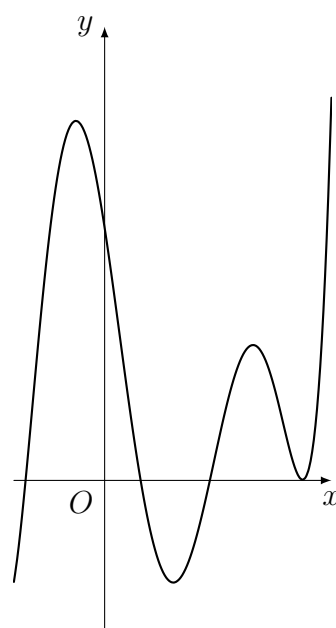
Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị của hàm số  $f'(x)$  như hình vẽ bên. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A.  $f(x)$  đạt cực tiểu tại  $x = 0$ .  
 B.  $f(x)$  đạt cực tiểu tại  $x = -2$ .  
 C.  $f(x)$  đạt cực đại tại  $x = -2$ .  
 D. Giá trị cực tiểu của  $f(x)$  nhỏ hơn giá trị cực đại của  $f(x)$ .

**Câu 221.**

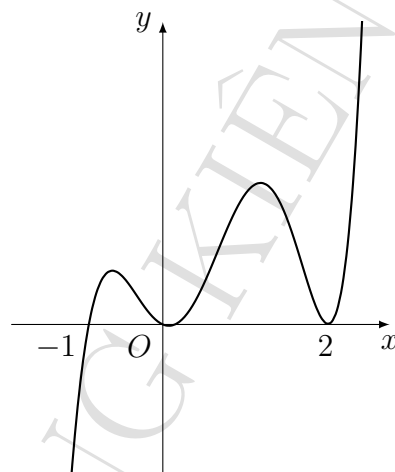
Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị của đạo hàm  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên dưới. Tìm số điểm cực đại của đồ thị hàm số  $y = f(x)$ .

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

**Câu 222.**

Hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  trên khoảng  $K$ . Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số  $f'(x)$  trên khoảng  $K$ . Hỏi hàm số  $f(x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

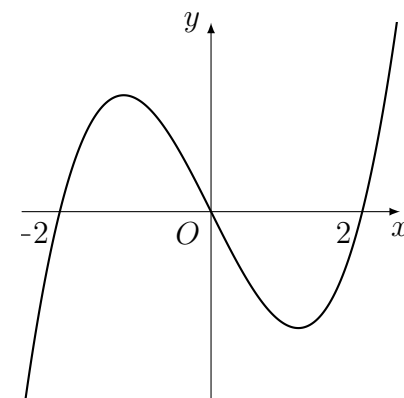
- A. 0.      B. 1.      C. 2.      D. 4.



## 2 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

### Câu 223.

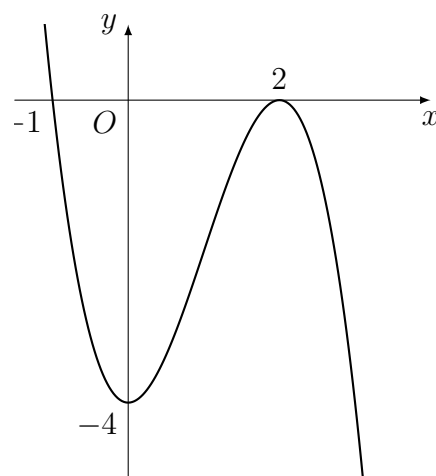
Cho hàm  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị hàm số  $f'(x)$  là một đường cong như hình bên.



| Phát biểu                                            | Đ | S |
|------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ . |   |   |
| b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$ .    |   |   |
| c) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$ .   |   |   |
| d) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ .  |   |   |

### Câu 224.

Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị của hàm số  $f'(x)$  như hình vẽ.

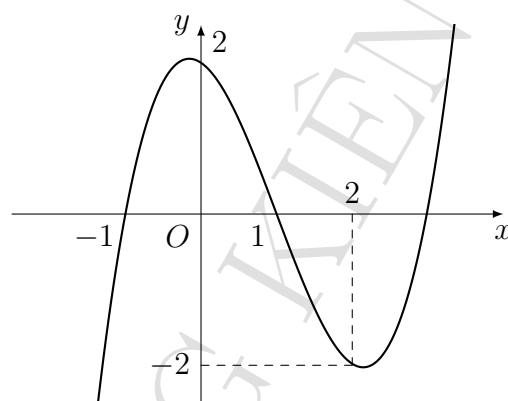


| Phát biểu                                                                    | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4; 2)$ .                           |   |   |
| b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ .                     |   |   |
| c) Hàm số $f(x)$ có một điểm cực trị.                                        |   |   |
| d) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -4)$ và $(2; +\infty)$ . |   |   |

### Câu 225.

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $y = f'(x)$ . Biết rằng hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ.

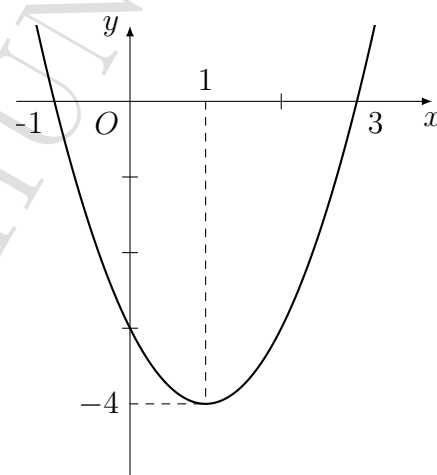
| Phát biểu                                             | Đ | S |
|-------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $y = f(x)$ giảm trên $(-\infty; -1)$ .      |   |   |
| b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; -1)$ . |   |   |
| c) Hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.              |   |   |
| d) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(1; 2)$ .        |   |   |



### Câu 226.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết rằng hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ.

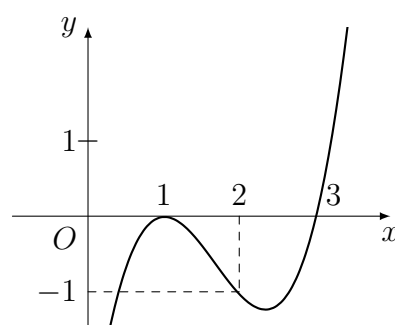
| Phát biểu                                                                          | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ .                            |   |   |
| b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ .                               |   |   |
| c) Hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị.                                          |   |   |
| d) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$ . |   |   |



### Câu 227.

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình bên.

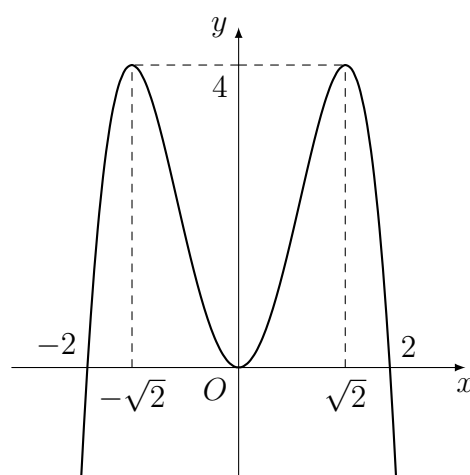
| Phát biểu                                                        | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt. |   |   |
| b) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.                 |   |   |
| c) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.                  |   |   |
| d) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị.                 |   |   |



### Câu 228.

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị hàm số  $f'(x)$  là đường cong như hình bên.

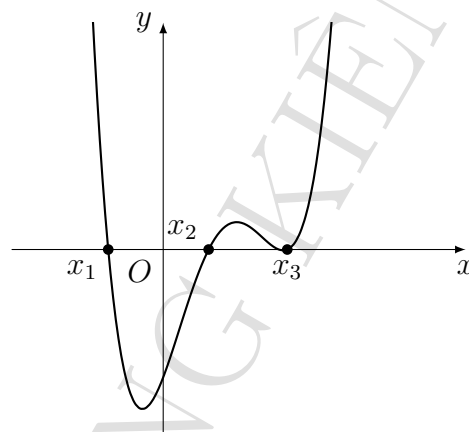
| Phát biểu                                             | Đ | S |
|-------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 2$ .        |   |   |
| b) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$ .       |   |   |
| c) Hàm số $y = f(x)$ có 3 cực trị.                    |   |   |
| d) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = \sqrt{2}$ . |   |   |



**Câu 229.**

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị trên một khoảng  $K$  như hình vẽ bên.

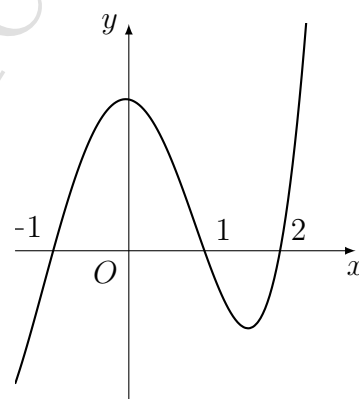
| Phát biểu                                     | Đ | S |
|-----------------------------------------------|---|---|
| a) Trên $K$ , hàm số có 2 điểm cực trị.       |   |   |
| b) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x_3$ . |   |   |
| c) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x_2$ . |   |   |
| d) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x_1$ . |   |   |



**Câu 230.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên.

| Phát biểu                                                                | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ .              |   |   |
| b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ và $(2; +\infty)$ . |   |   |
| c) Hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.                                 |   |   |
| d) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$ .                  |   |   |



**Câu 231.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x^2 - 1)(x + 1)(5 - x)$ .

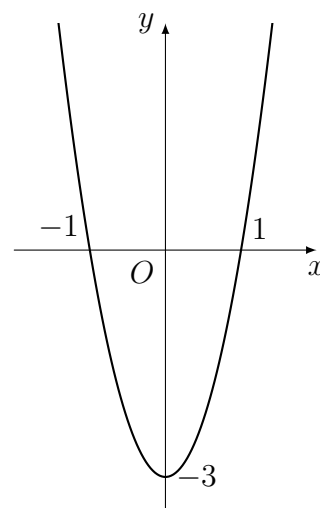
| Phát biểu                 | Đ | S |
|---------------------------|---|---|
| a) $f(1) < f(4) < f(2)$ . |   |   |
| b) $f(1) < f(2) < f(4)$ . |   |   |

| Phát biểu                 | Đ | S |
|---------------------------|---|---|
| c) $f(2) < f(1) < f(4)$ . |   |   |
| d) $f(4) < f(2) < f(1)$ . |   |   |

**Câu 232.**

Có hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên.

| Phát biểu                                                     | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị.                            |   |   |
| b) $f\left(\frac{1}{2}\right) < f\left(-\frac{1}{2}\right)$ . |   |   |
| c) Hàm số $y = f(x)$ giảm trên khoảng $(-1; 1)$ .             |   |   |
| d) Hàm số $y = f(x)$ giảm trên khoảng $(-\infty; -1)$ .       |   |   |

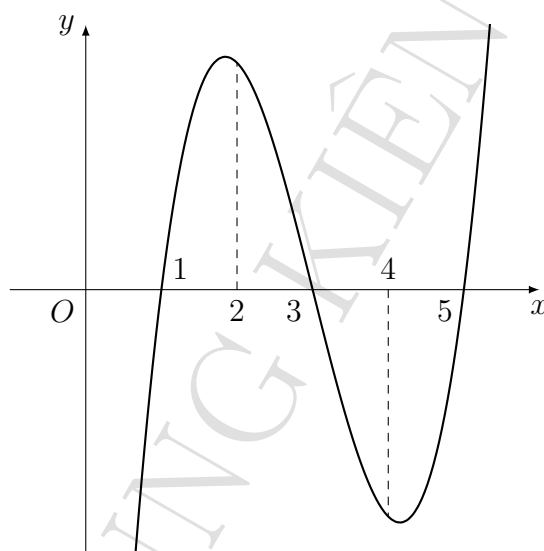


**Câu 233.**



Cho hàm số  $y = f(x)$ . Biết  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  và hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ.

| Phát biểu                                                                                     | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị.                                                            |   |   |
| b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$ .                                         |   |   |
| c) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ .                                 |   |   |
| d) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ chỉ có hai điểm cực trị và chúng nằm về hai phía của trục hoành.. |   |   |



### 3 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 234.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu của hàm  $f'(x)$  như sau:

|      |           |      |     |     |           |     |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $1$ | $3$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ |           | $-$  | $0$ | $+$ | $0$       | $-$ |

Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(a; b)$  và  $b - a$  đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị  $S = a - 2b$ .

KQ:

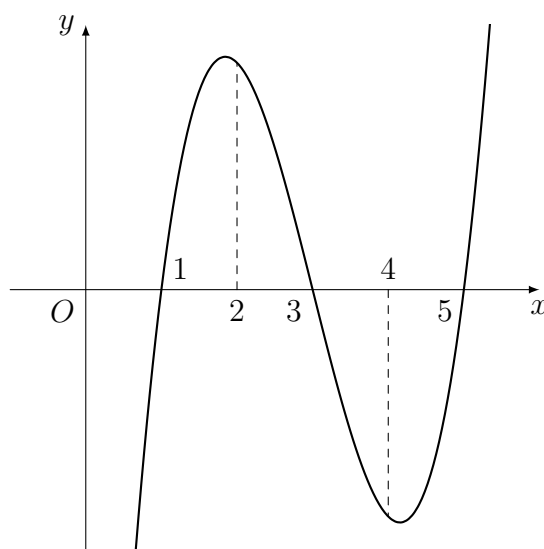
**Câu 235.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x(x+2)^4(x^2+4)$ . Tìm số điểm cực trị của hàm số  $y = f(|x|)$ .

KQ:

**Câu 236.**

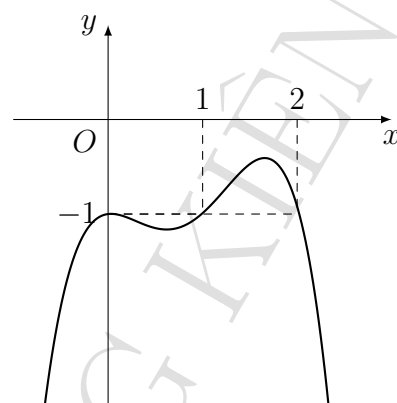
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(a; b)$  và nghịch biến trên khoảng  $(c; d)$ , trong đó  $a, b, c, d$  đều là số thực và các giá trị  $b - a$  và  $d - c$  đều lớn nhất có thể. Tính giá trị biểu thức  $S = a + b + c + d$ ?

KQ:



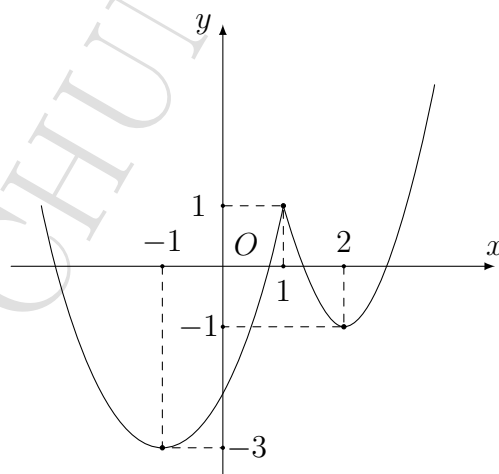
**Câu 237.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng trong khoảng  $(1; 2)$ , hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(a; b)$  và  $b - a$  là lớn nhất có thể. Tính giá trị  $V = 2a + b$ ?  
KQ:



**Câu 238.**

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Hàm số  $y = f(x)$  có mấy cực đại. KQ:



**Câu 239.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết hàm số  $y = f'(x)$  có bảng xét dấu sau

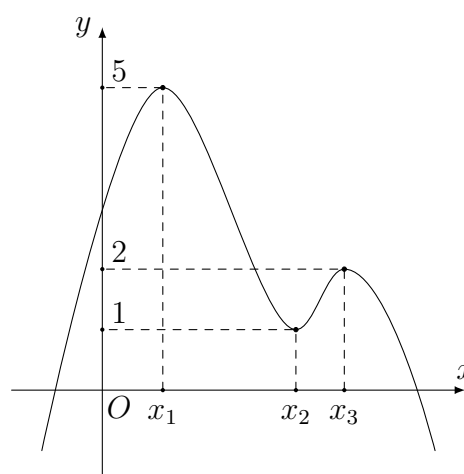
|         |           |     |      |     |     |     |     |     |           |
|---------|-----------|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |     | $-3$ |     | $2$ |     | $5$ |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$ | $0$  | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |           |

Tìm số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x)$ .

KQ:

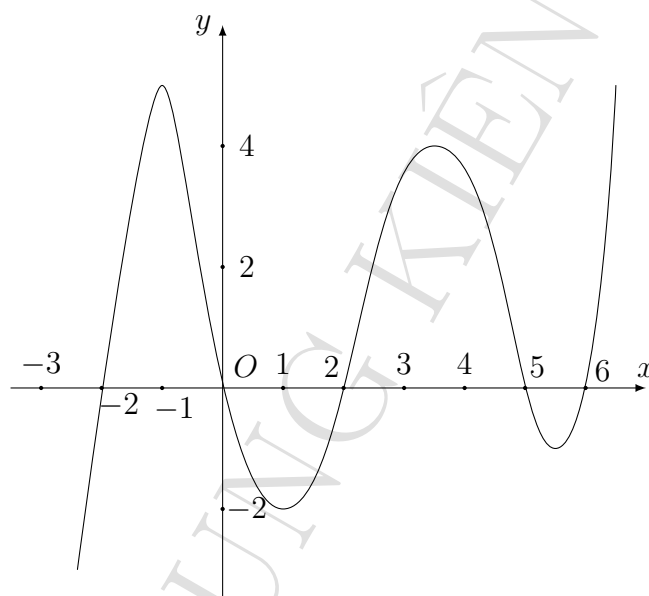
**Câu 240.**

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Hàm số  $y = f(x)$  có mấy cực trị? KQ:

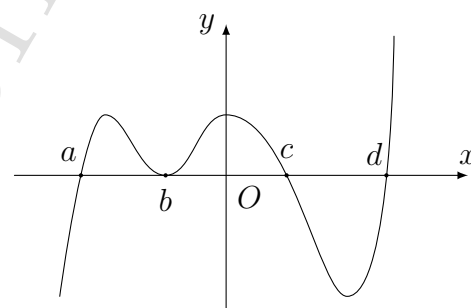


**Câu 241.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ .  
Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số  
 $y = f(x)$  có mấy cực tiểu? KQ:

**Câu 242.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  là hàm đa thức có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Hàm số  $y = f(x)$  có mấy cực trị?

KQ:    

**Câu 243.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên của đạo hàm  $y = f'(x)$  như hình vẽ.

|         |           |            |            |            |            |
|---------|-----------|------------|------------|------------|------------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$       | $0$        | $3$        | $+\infty$  |
| $f'(x)$ |           | $1$        |            | $2$        |            |
|         | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | $\searrow$ |
|         |           |            | $-1$       |            | $+\infty$  |

Tìm số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x)$ .

KQ:

**DẠNG 9**

**Cực trị của hàm hợp  $y = f(u)$**

- ☑ Hàm số  $y = f(x)$  có  $n$  số điểm cực trị dương thì hàm số  $y = f(|x|)$  có  $2n + 1$  số điểm cực trị.
- ☑ Hàm số  $y = f(x)$  có  $n$  số điểm cực trị và phương trình  $f(x) = 0$  có  $m$  số nghiệm đơn và bội lẻ thì hàm số  $y = |f(x)|$  có  $n + m$  số điểm cực trị.
- ☑ Hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có hai điểm cực trị  $x_1, x_2$ . Khi đó hàm số  $y = |f(x)|$  có:
  - 3 điểm cực trị  $\Leftrightarrow f(x_1) \cdot f(x_2) \geq 0$ .
  - 5 điểm cực trị  $\Leftrightarrow f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ .

**⚠** Cực trị hàm số  $g(x) = [f(u(x))]^k$ .

**Bước 1.** Tính  $y' = g'(x) = k \cdot u'(x) \cdot [f(u(x))]^{k-1} \cdot f'(u(x))$

- ☑ Nếu  $k$  chẵn thì  $y' = g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = 0 \\ f(u(x)) = 0 \\ f'(u(x)) = 0. \end{cases}$
- ☑ Nếu  $k$  lẻ thì  $y' = g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = 0 \\ f'(u(x)) = 0. \end{cases}$

**Bước 2.** Giải tìm nghiệm.

- ☑  $u'(x) = 0$  ta giải bình thường.
- ☑  $f'(u(x)) = 0$  thì ta cho  $u(x)$  bằng các điểm cực trị của hàm số  $y = f(x)$ .
- ☑  $f(u(x)) = 0$  thì ta cho  $u(x)$  bằng các nghiệm  $x_0$  của phương trình  $f(x) = 0$  hoặc điều kiện của  $x_0$  để chứng minh được phương trình có bao nhiêu nghiệm cụ thể.
- ☑ Kiểm chứng các nghiệm trên có nghiệm nào bội chẵn không.

**Bước 3:** Kết luận.

**1 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn**

**Câu 244.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau

|         |           |      |     |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $  $ | $+$ | $-$ | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $1$  | $2$ | $1$ | $+\infty$ |

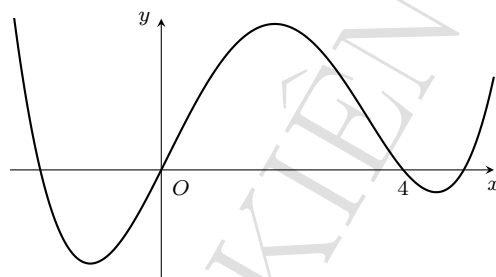
Hàm số  $g(x) = 3f(x) + 1$  đạt cực tiểu tại điểm nào sau đây?

- A.**  $x = -1$ .      **B.**  $x = 1$ .      **C.**  $x = \pm 1$ .      **D.**  $x = 0$ .

**Câu 245.**

Cho hàm số bậc bốn  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$  là

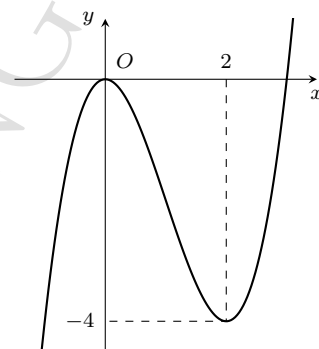
- A. 5. B. 3. C. 7. D. 11.



**Câu 246.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên. Hàm số  $g(x) = f(f(x))$  có bao nhiêu điểm cực trị?

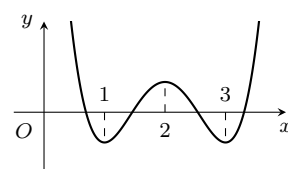
- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.



**Câu 247.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số  $y = |f(x - 1)|$  là

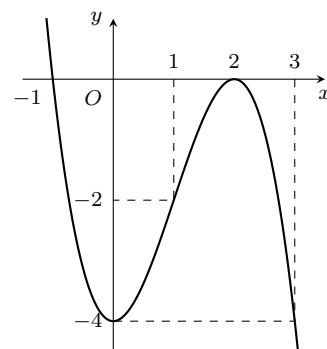
- A. 7. B. 5. C. 3. D. 6.



**Câu 248.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số  $y = f(|x + 2|)$  là

- A. 5. B. 3. C. 1. D. 2.



**Câu 249.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Hàm số  $g(x) = f(3 - x)$  có bao nhiêu điểm cực đại?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

**Câu 250.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục, có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và  $f'(x) = x^2(x - 2028)(x - 2023)^2$ . Khi đó hàm số  $y = g(x) = f(x^2 + 2019)$  có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

**Câu 251.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm là  $f'(x) = x^2 + 10x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(x^4 - 8x^2 + m)$  có đúng 9 điểm cực trị?

- A. 16. B. 9. C. 15. D. 10.

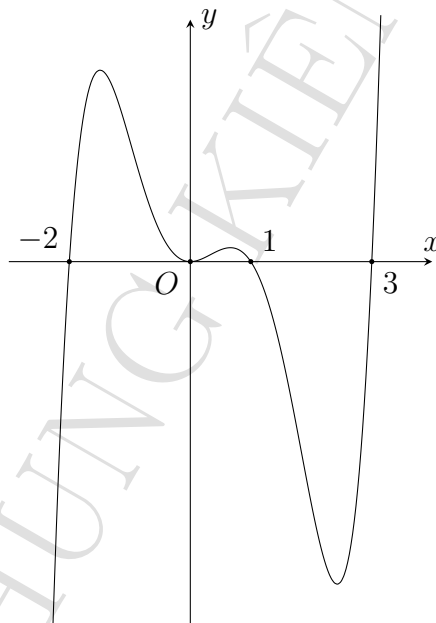
**Câu 252.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x - 1)^2(x^2 - 2x)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = f(x^2 - 8x + m)$  có 5 điểm cực trị?

- A. 15. B. 16. C. 17. D. 18.

**Câu 253.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên. Đồ thị hàm số  $h(x) = f(|x|) + 2021$  có bao nhiêu điểm cực trị?

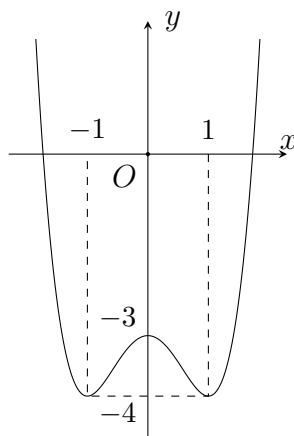
- A. 2. B. 3. C. 5. D. 7.



**Câu 254.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên. Đồ thị hàm số  $g(x) = f(|x - 2|) + 1$  có bao nhiêu điểm cực trị?

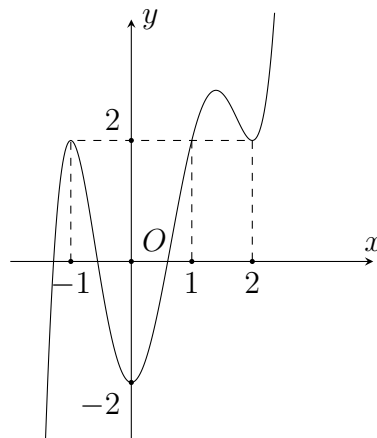
- A. 2. B. 3. C. 5. D. 7.



**Câu 255.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên. Đồ thị hàm số  $h(x) = |2f(x) - 3|$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 4. B. 5. C. 7. D. 9.



**Câu 256.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = \frac{2}{9}x^3 - \frac{2}{9}x^2 - x + 3$ . Khi đó số điểm cực trị của hàm số  $y = g(x) = 2f(x) - (x + 1)^2$  là

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

**Câu 257.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có  $f'(x) = (x + 1)(2x^2 - 3x - 9)$ . Hỏi hàm số  $g(x) = f(x) + x^3 - 3x^2 - 9x + 6$  có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

**Câu 258.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như hình vẽ.

|      |           |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$      | $1$       | $+\infty$ |
| $y'$ |           | +         | +         | +         |
| $y$  | $-2$      | $+\infty$ | $+\infty$ | $2$       |

Đồ thị hàm số  $y = |f(x) - 1|$  có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

**Câu 259.**

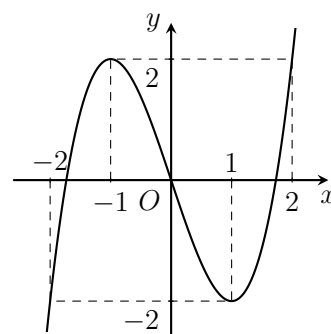
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số  $y = f(x + 2022)$  có mấy cực trị?

A. 1.

B. 2.

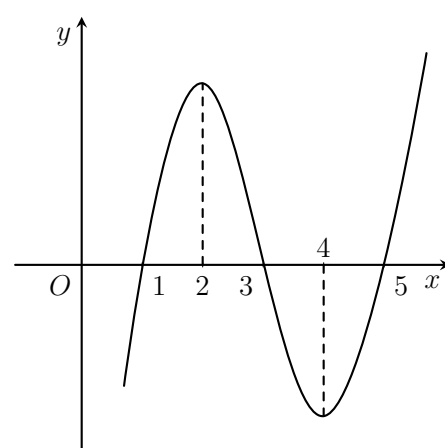
C. 3.

D. 4.



**Câu 260.**

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Biết  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  và hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Hàm số  $g(x) = f(x - 1) - 2021$  đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

A.  $x = 2$ .B.  $x = 4$ .C.  $x = 1$ .D.  $x = 3$ .

**Câu 261.**

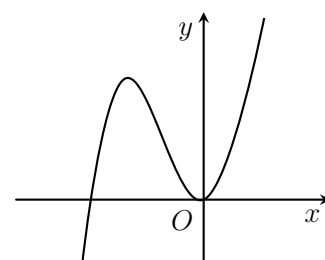
Hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên khoảng  $K$ , biết đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  trên  $K$  như hình vẽ. Tìm số cực trị của hàm số  $g(x) = f(x + 1)$  trên  $K$ ?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

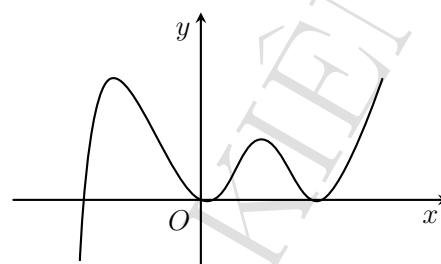




**Câu 262.**

Cho hàm số  $f(x)$  có đồ thị  $f'(x)$  của nó trên khoảng  $K$  như hình vẽ. Khi đó trên  $K$ , hàm số  $y = f(x - 2021) + 2021$  có bao nhiêu điểm cực trị?

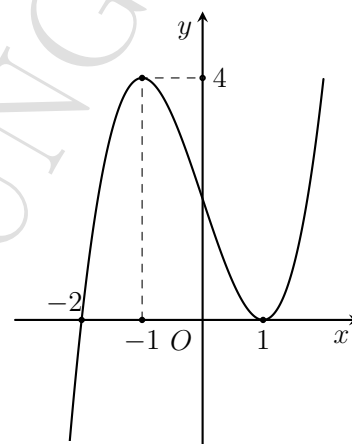
- A. 1.      B. 4.      C. 3.      D. 2.



**Câu 263.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ , hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số  $g(x) = f(-x^2 + 3x) - 3$  có bao nhiêu điểm cực đại?

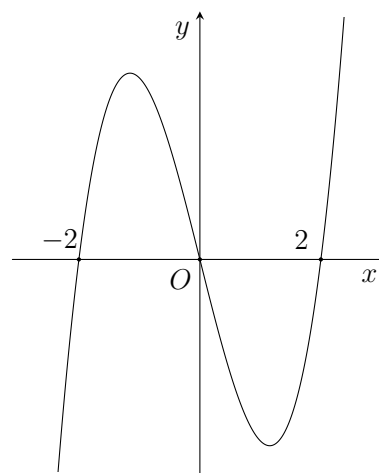
- A. 3.      B. 4.      C. 5.      D. 6.



**Câu 264.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên tập  $\mathbb{R}$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình bên. Hàm số  $y = f(x^2 - x) - 5$  có bao nhiêu điểm cực tiểu?

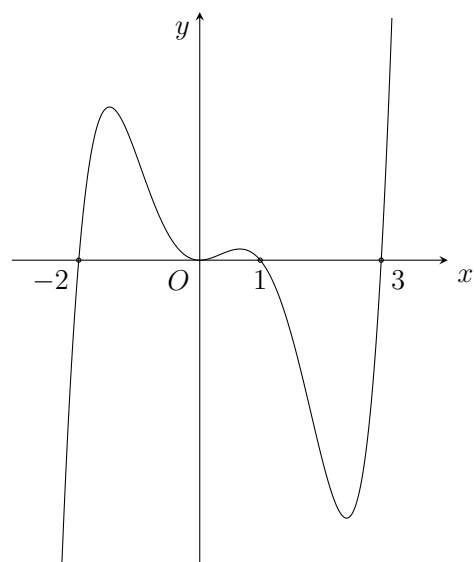
- A. 1.      B. 2.      C. 3.      D. 4.



**Câu 265.**

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị của hàm số  $f'(x)$  như hình bên. Hàm số  $g(x) = f(x^2) - \sqrt{2021}$  có bao nhiêu điểm cực trị?

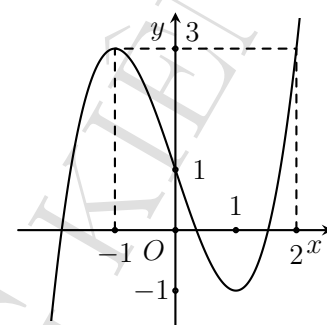
- A. 4.      B. 3.      C. 5.      D. 2.



**Câu 266.**

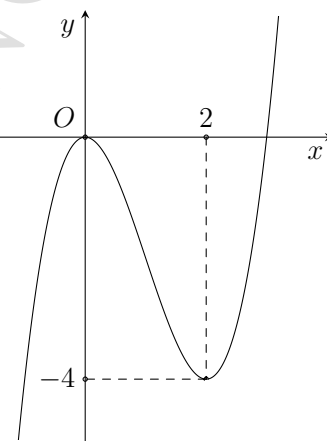
Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đúng hai điểm cực trị  $x = -1, x = 1$ . Hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số  $y = f(x^2 - 2x + 1) + 2021$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A.** 4.                      **B.** 3.                      **C.** 1.                      **D.** 2.

**Câu 267.**

Biết rằng hàm số  $f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số  $y = f[f(x)]$ .

- A.** 5.                      **B.** 3.                      **C.** 4.                      **D.** 6.



**Câu 268.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ , bảng biến thiên của hàm số  $f'(x)$  như sau

|         |           |      |      |           |
|---------|-----------|------|------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $1$  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-\infty$ | $4$  | $-2$ | $+\infty$ |

Số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x^2 + 2x)$  là

- A.** 4.                      **B.** 5.                      **C.** 1.                      **D.** 7.

**Câu 269.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ

|      |           |      |      |           |     |
|------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $3$  | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $4$  | $-2$ | $+\infty$ |     |

Số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right)$  là

- A.** 3.                      **B.** 4.                      **C.** 5.                      **D.** 6.

**Câu 270.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết hàm số  $y = f'(x)$  có bảng xét dấu sau

|         |           |   |   |   |   |   |   |   |           |
|---------|-----------|---|---|---|---|---|---|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |   | 1 |   | 3 |   | 5 |   | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | - | 0 | + | 0 | - | 0 | - |           |

Số điểm cực trị của hàm số  $y = g(x) = f(x + \sqrt{x^2 + 1})$  là

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

**Câu 271.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên của đạo hàm như hình vẽ.

|         |           |  |    |    |   |  |           |
|---------|-----------|--|----|----|---|--|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |  | -2 |    | 2 |  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+\infty$ |  |    |    | 3 |  | $-\infty$ |
|         |           |  |    | -1 |   |  |           |

Đặt  $g(x) = f\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)$ . Tìm số điểm cực trị của hàm số  $y = g(x)$ .

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 8.

**Câu 272.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu  $f'(x)$  như sau

|         |           |   |    |   |   |   |   |   |           |
|---------|-----------|---|----|---|---|---|---|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |   | -1 |   | 1 |   | 4 |   | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | - | 0  | + | 0 | + | 0 | - |           |

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc  $[-10; 10]$  để  $g(x) = f(x^2 - 2x - m)$  có 5 điểm cực trị?

- A. 10. B. 15. C. 20. D. 21.

**Câu 273.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = 3(x^2 - 1)(x - 2)$ . Khi đó hàm số  $g(x) = f(x) - x^3 + 3x$  đạt cực đại tại

- A.  $x = 1$ . B.  $x = 2$ . C.  $x = -1$ . D.  $x = 3$ .

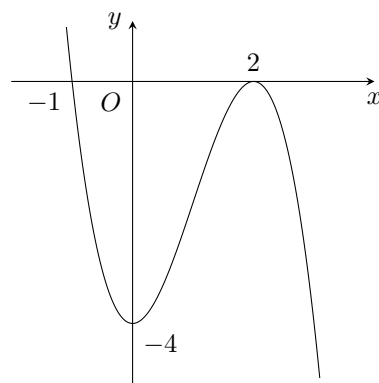
**Câu 274.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$ , có đạo hàm  $f'(x)$  thỏa  $f'(x) = (1 - x)(x + 2)g(x) + 2019$  với  $g(x) < 0$  với  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Hàm số  $y = f(1 - x) + 2019x + 2020$  đạt cực đại tại

- A.  $x_0 = 1$ . B.  $x_0 = 2$ . C.  $x_0 = 0$ . D.  $x_0 = 3$ .

**Câu 275.**

Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị của hàm số  $f'(x)$  như hình vẽ. Hàm số  $y = g(x) = f(x) + 4x$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.



**Câu 276.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 1)$  với  $x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(x) - mx$  có 4 điểm cực trị?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

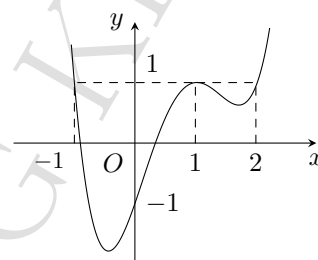
**Câu 277.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = -x^3 - 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ . Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = f(x) + mx + 3$  có 3 điểm cực trị?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

**Câu 278.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$ , có đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Đặt  $g(x) = f(x) + x$ . Tìm số cực trị của hàm số  $g(x)$ ?

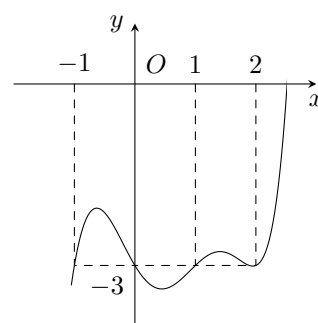
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.



**Câu 279.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và đồ thị hình bên là đồ thị của đạo hàm  $f'(x)$ . Hỏi hàm số  $g(x) = f(x) + 3x$  có bao nhiêu điểm cực trị?

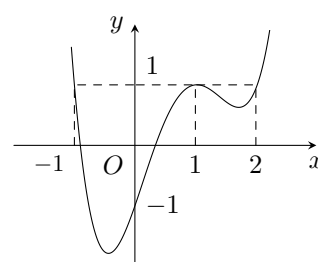
- A. 2. B. 3. C. 4. D. 7.



**Câu 280.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị  $f'(x)$  như hình vẽ bên. Hàm số  $g(x) = f(x) - x$  đạt cực đại tại

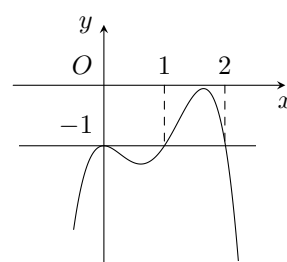
- A.  $x = -1$ . B.  $x = 0$ . C.  $x = 1$ . D.  $x = 2$ .



**Câu 281.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$ , có đạo hàm  $f'(x)$ . Biết đồ thị của hàm số  $f'(x)$  như hình vẽ. Xác định điểm cực tiểu của hàm số  $g(x) = f(x) + x$ .

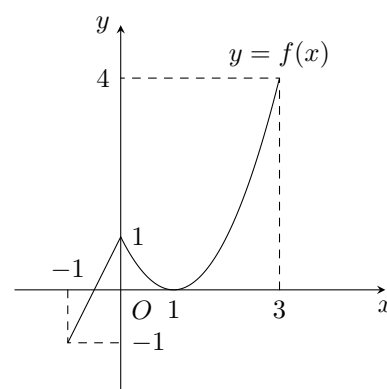
- A. Không có cực tiểu. B.  $x = 0$ .  
C.  $x = 1$ . D.  $x = 2$ .



**Câu 282.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Hàm số  $y = f(x) - \frac{2020x - 1}{2021}$  có mấy cực trị?

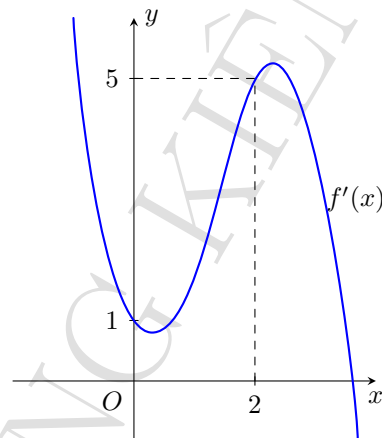
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.



**Câu 283.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** Hàm số  $y = f(x) - x^2 - x + 2021$  đạt cực đại tại  $x = 0$ .
- B.** Hàm số  $y = f(x) - x^2 - x + 2021$  đạt cực tiểu tại  $x = 0$ .
- C.** Hàm số  $y = f(x) - x^2 - x + 2021$  không có cực trị.
- D.** Hàm số  $y = f(x) - x^2 - x + 2021$  không đạt cực trị tại  $x = 0$ .

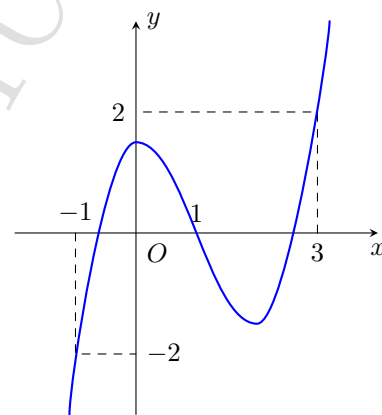


**Câu 284.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số

$$g(x) = 2f(x) - x^2 + 2x + 2021.$$

- A.** Hàm số  $g(x)$  nghịch biến trên  $(1; 3)$ .
- B.** Hàm số  $g(x)$  có 2 điểm cực trị đại.
- C.** Hàm số  $g(x)$  đồng biến trên  $(-1; 1)$ .
- D.** Hàm số  $g(x)$  nghịch biến trên  $(3; +\infty)$ .



**Câu 285.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu đạo hàm như sau

|         |           |      |     |           |     |
|---------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-3$ | $1$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$       | $+$ |

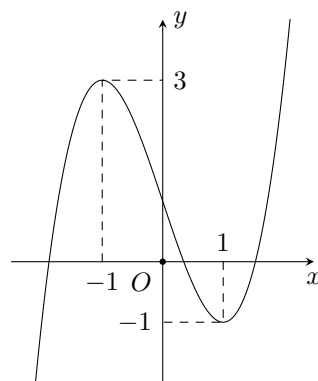
Hỏi hàm số  $g(x) = f(x) + x^3 + 3x^2 - 9x - 5$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A.** 2.
- B.** 1.
- C.** 0.
- D.** 3.

**Câu 286.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị đạo hàm  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc khoảng  $(-12; 12)$  sao cho hàm số  $y = f(x) + mx + 12$  có đúng một điểm cực trị?

- A.** 5.
- B.** 18.
- C.** 20.
- D.** 12.



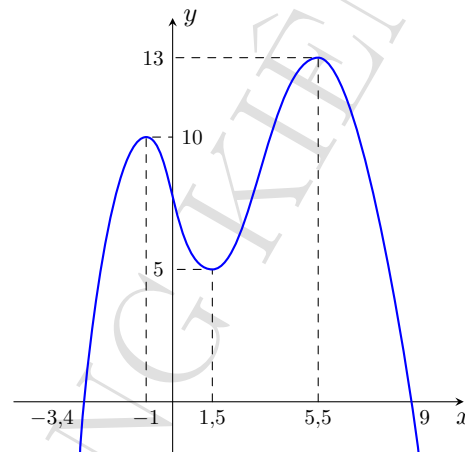
**Câu 287.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có biểu thức đạo hàm  $f'(x) = (x+3)(x-1)(x-2)$  và hàm số  $y = g(x) = 6f(x) + 2x^3 + 3(m+1)x^2 - 6(m+2)x + 2021$ . Gọi  $S = (-\infty; a) \cup (b; c)$  là tập tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = g(x)$  có ba cực trị. Giá trị của  $a + 2b + 3c$  bằng

- A.** 2.
- B.** 4.
- C.** 6.
- D.** 8.

**Câu 288.**

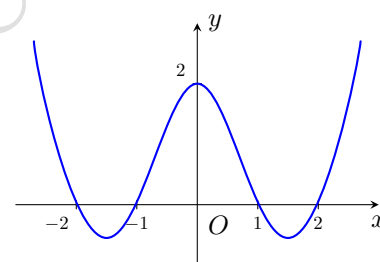
Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Đặt  $g(x) = f(x) - mx + 5$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $y = g(x)$  có đúng hai điểm cực trị?

- A. 4.      B. 7.      C. 8.      D. 9.

**Câu 289.**

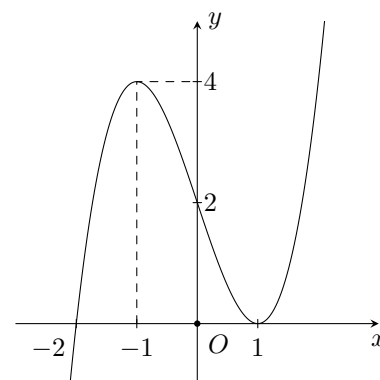
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Hàm số  $y = f(x+1) - x$  có mấy cực đại?

- A. 0.      B. 1.      C. 3.      D. 2.

**Câu 290.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm và liên tục trên  $\mathbb{R}$ , có đồ thị hàm  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số  $y = g(x) = f(x - 2019) + 2017x - 2018$ .

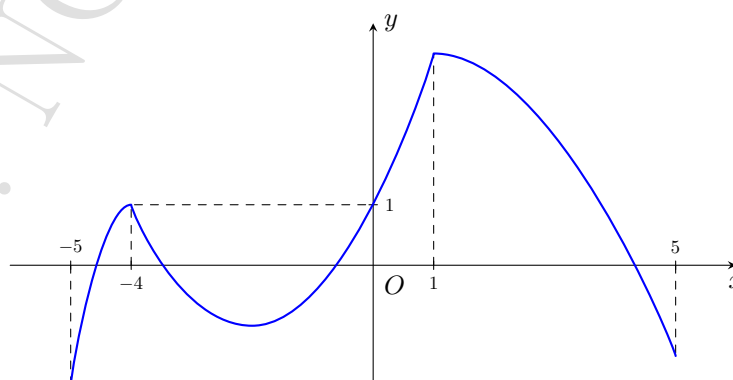
- A. 1.      B. 2.      C. 3.      D. 4.



**Câu 291.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (2-x)(x^2-8)^{2019}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Hàm số  $y = f(x^2-2) + \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 2021$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 4.      B. 2021.      C. 5.      D. 2020.

**Câu 292.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên.



Hàm số  $y = f(x^2 + 4x) - x^2 - 4x$  có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng  $(-5; 1)$ ?

- A. 5. B. 4. C. 6. D. 3.

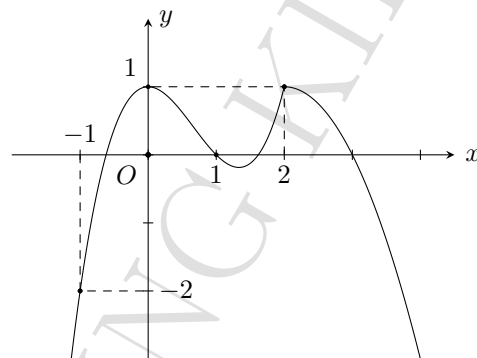
**Câu 293.**

Cho hàm số  $f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Hàm số

$$g(x) = f(x^2) - \frac{x^6}{3} + x^4 - x^2$$

đạt cực tiểu tại bao nhiêu điểm?

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.



**Câu 294.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

|         |           |   |   |   |   |   |   |   |           |
|---------|-----------|---|---|---|---|---|---|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |   | 1 |   | 3 |   | 5 |   | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + |           |

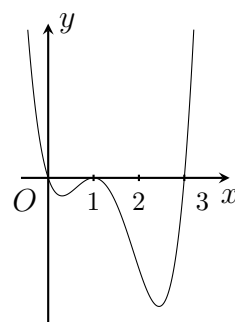
Đặt  $g(x) = f(x+2) + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2021$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số  $y = g(x)$  đạt cực đại tại  $x = 1$ .  
 B. Hàm số  $y = g(x)$  có 1 điểm cực trị.  
 C. Hàm số  $y = g(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(1; 4)$ .  
 D.  $g(5) > g(6)$  và  $g(0) > g(1)$ .

**Câu 295.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ . Đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  như hình vẽ. Đồ thị hàm số  $y = (f(x))^2$  có bao nhiêu điểm cực đại, điểm cực tiểu?

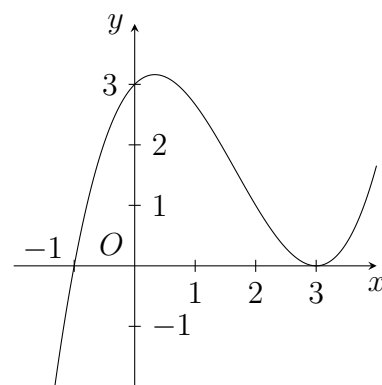
- A. 1 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu. B. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.  
 C. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu. D. 2 điểm cực tiểu, 3 điểm cực đại.



**Câu 296.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  là hàm đa thức bậc bốn có  $f(-1) = 0$ , đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = [f(x)]^2$  là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.



**Câu 297.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = 3x^2 - 3$  và  $f(2) = 4$ . Hàm số  $g(x) = [f(1-2x)]^2$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.



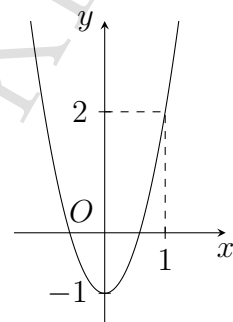
**Câu 298.** Cho hàm số bậc bốn trùng phương  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = 4x^3 - 4x$  và  $f(0) = -1, f(-1) = -2$ . Hàm số  $g(x) = 2f^3(x) + 4f^2(x) + 1$  có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 4. B. 5. C. 7. D. 9.

**Câu 299.**

Cho hàm số  $y = f(x) = mx^5 + nx^3 + px$  có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = [f(x+2)]^5$  là

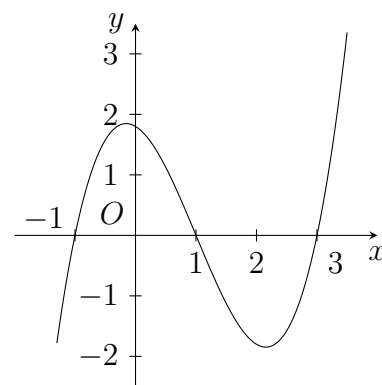
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.



**Câu 300.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  là hàm đa thức bậc bốn có  $f(1) = 0$  đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = [f(x^2 - 2x)]^4$  là

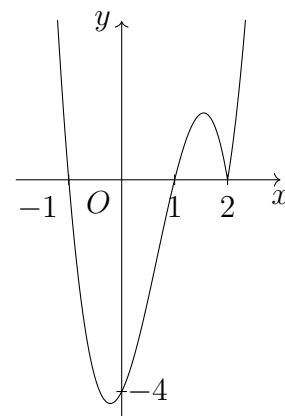
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 5.



**Câu 301.**

Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm trên tập  $\mathbb{R}$  và đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  được cho như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số  $y = f^{2019}(x^3 - 1)$  là

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.



**Câu 302.** Cho hàm số bậc bốn  $f(x)$  có bảng xét dấu như sau

|         |           |      |     |      |           |
|---------|-----------|------|-----|------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$  | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $-2$ | $3$ | $-2$ | $+\infty$ |

Số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = x^4 [f(x+1)]^2$  là

- A. 11. B. 9. C. 7. D. 5.

**Câu 303.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |     |      |     |     |     |           |
|---------|-----------|-----|------|-----|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |     | $-2$ |     | $1$ |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$ | $0$  | $+$ | $0$ | $-$ |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ |     |      |     |     | $5$ |           |
|         |           |     | $2$  |     |     |     | $-\infty$ |

Số cực trị của hàm số  $g(x) = f^2(2x^2 + x)$  là

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

**Câu 304.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên

|      |           |      |     |      |           |     |
|------|-----------|------|-----|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $1$  | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$ | $+$  | $0$       | $-$ |
| $y$  | $-\infty$ | $4$  | $2$ | $+7$ | $-\infty$ |     |

Hàm số  $y = [f(2 - x)]^2$  có bao nhiêu cực trị?

- A. 4. B. 3. C. 5. D. 7.

**Câu 305.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , có bảng xét dấu của  $f'(x)$  như sau

|         |           |      |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$  | $3$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$  | $0$ | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ |      | $1$ |           |
|         |           | $-1$ |     | $+\infty$ |

Hàm số  $y = [f(4 - x^2)]^3$  có bao nhiêu cực trị?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

**Câu 306.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu  $f'(x)$  như sau

|         |           |      |     |     |           |     |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $1$ | $3$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ |           | $-$  | $0$ | $+$ | $0$       | $-$ |

Biết rằng hàm số  $y = f(x)$  là hàm đa thức có đồ thị cắt trục hoành tại một điểm duy nhất. Hỏi hàm số  $y = f^2(x^2 - 2x)$  có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 4. B. 2. C. 5. D. 3.

**Câu 307.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau

|      |           |     |      |     |           |
|------|-----------|-----|------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $0$ | $1$  | $2$ | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $+$ | $0$  | $-$ |           |
| $y$  |           |     |      |     |           |
|      |           | $3$ |      | $2$ |           |
|      | $-\infty$ |     | $-1$ |     | $-\infty$ |

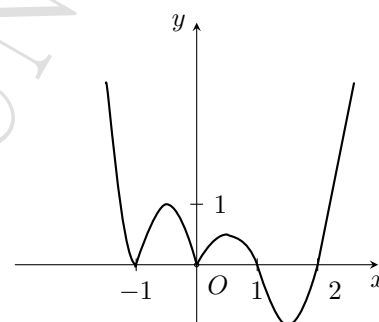
Hàm số  $g(x) = \left(f\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\right)^{2022}$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 7. B. 3. C. 5. D. 6.

**Câu 308.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = [(f(x+1))^3 + m]^7$  có 2 điểm cực trị?

- A. 2. B. 0. C. 1. D. Vô số.



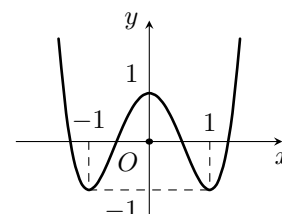
**Câu 309.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm cấp hai liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 15x^4 + 12x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Hàm số  $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

**Câu 310.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , biết rằng hàm số  $y = f'(x-2) + 2$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số  $y = f(x)$  có bao nhiêu cực trị?

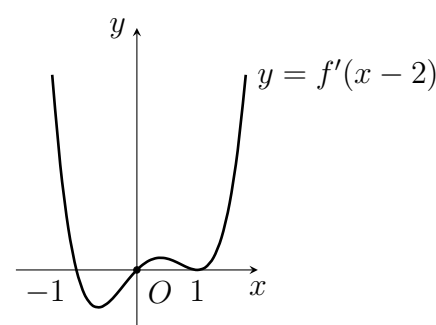
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.



**Câu 311.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ , hàm số  $y = f'(x-2)$  có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x)$  là

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.



**Câu 312.** Cho  $y = f(x)$  là hàm số xác định và có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ . Biết bảng xét dấu của  $f'(3-2x)$  như sau:

|            |           |                |               |     |     |           |     |
|------------|-----------|----------------|---------------|-----|-----|-----------|-----|
| $x$        | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | $3$ | $4$ | $+\infty$ |     |
| $f'(3-2x)$ | $-$       | $0$            | $+$           | $0$ | $-$ | $0$       | $+$ |

Hỏi hàm số  $y = f(x)$  có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

**Câu 313.** Cho  $y = f(x)$  là hàm số xác định và có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ . Biết bảng xét dấu của  $f'(\sqrt[3]{x})$  như sau:

|                   |           |     |      |     |     |     |      |     |           |
|-------------------|-----------|-----|------|-----|-----|-----|------|-----|-----------|
| $x$               | $-\infty$ |     | $-1$ |     | $8$ |     | $27$ |     | $+\infty$ |
| $f'(\sqrt[3]{x})$ |           | $-$ | $0$  | $+$ | $0$ | $-$ | $0$  | $+$ |           |

Tìm số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x)$ .

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

**Câu 314.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x^3 - 2x^2)(x^3 - 2x)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Hàm số  $g(x) = |f(1 - 2018x)|$  có nhiều nhất bao nhiêu cực trị?

A. 9.

B. 2018.

C. 2022.

D. 11.

**Câu 315.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu  $f'(x)$  như sau. Hàm số  $y = f(|x - 3|)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

|      |           |     |      |     |     |     |           |
|------|-----------|-----|------|-----|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ |     | $-2$ |     | $4$ |     | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $+$ | $0$  | $-$ | $0$ | $+$ |           |

A. 5.

B. 6.

C. 3.

D. 1.

**Câu 316.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  có đạo hàm  $f'(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu như hình vẽ bên dưới

|         |           |     |     |     |     |     |     |     |           |
|---------|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |     | $0$ |     | $1$ |     | $2$ |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |           |

Hỏi hàm số  $y = f(x^2 - 2|x|)$  có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 7.

C. 9.

D. 11.

**Câu 317.** Cho hàm số  $y = f(x)$  là một hàm đa thức có bảng xét dấu  $f'(x)$  như sau

|         |           |     |      |     |     |     |           |
|---------|-----------|-----|------|-----|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |     | $-1$ |     | $1$ |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $+$ | $0$  | $-$ | $0$ | $+$ |           |

Số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f(x^2 - |x|)$

A. 5.

B. 3.

C. 1.

D. 7.

**Câu 318.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2(x + 1)(x^2 + 2mx + 5)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m > -10$  để hàm số  $g(x) = f(|x|)$  có 5 điểm cực trị?

A. 6.

B. 7.

C. 8.

D. 9.

**Câu 319.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2(x + 1)(x^2 + 2mx + 5)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = f(|x|)$  có đúng 1 điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

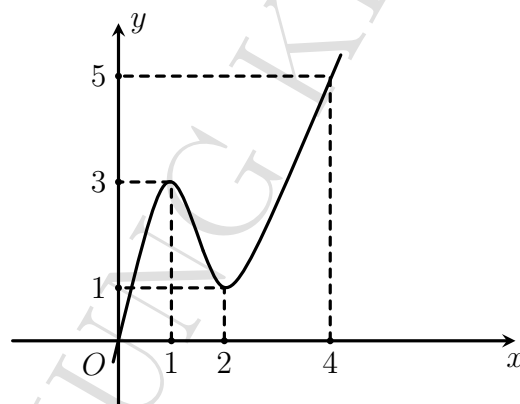
**Câu 320.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x+1)^2(x^2+m^2-3m-4)^3(x+3)^5$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = f(|x|)$  có 3 điểm cực trị?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

**Câu 321.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f(0) = 0$ ;  $f(4) > 4$ . Biết hàm  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = |f(x^2) - 2x|$ .

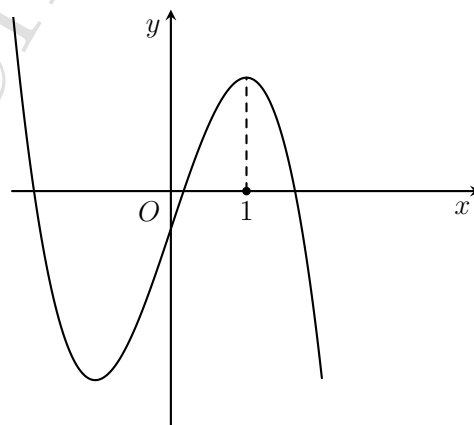
- A. 5. B. 1. C. 3. D. 2.



**Câu 322.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục và xác định trên  $\mathbb{R}$  có đồ thị đạo hàm  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Hỏi hàm số  $y = f(|x| + |x-1|)$  có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.



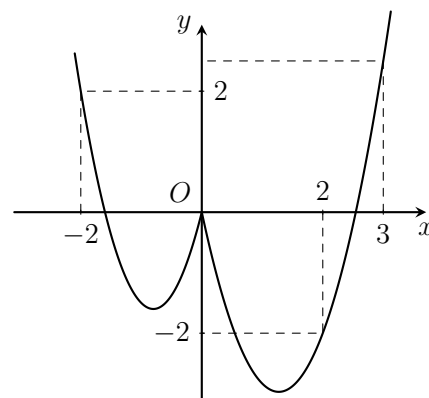
**Câu 323.**

Cho hàm số  $f(x)$  có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  được cho như hình vẽ bên. Hàm số

$$y = |f(x) + \frac{1}{2}x^2 - f(0)|$$

có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng  $(-2; 3)$ ?

- A. 6. B. 2. C. 5. D. 3.



**Câu 324.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = f(|x|)$  có 3 điểm cực trị?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

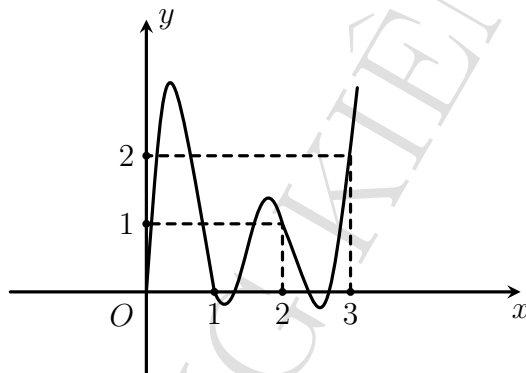
**Câu 325.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x^3 - 2x^2)(x^3 - 2x)$ , với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Hàm số  $y = |f(1 - 2018x)|$  có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 9. B. 2022. C. 11. D. 2018.

**Câu 326.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  và đồ thị hình bên là đồ thị của đạo hàm  $f'(x)$ . Hỏi đồ thị của hàm số  $g(x) = |2f(x) - (x-1)^2|$  có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

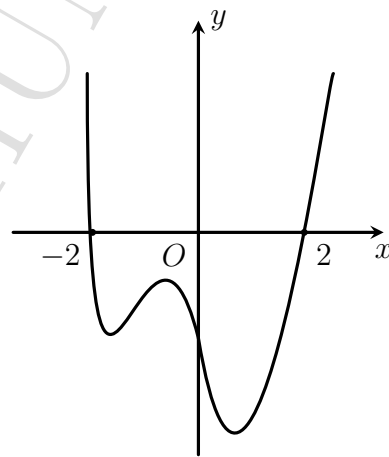
- A. 9. B. 11. C. 8. D. 7.



**Câu 327.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có  $f(-2) < 0$  và đồ thị hàm số  $f'(x)$  như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A. Hàm số  $y = |f(1 - x^{2018})|$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$ .  
 B. Hàm số  $y = |f(1 - x^{2018})|$  có hai cực tiểu.  
 C. Hàm số  $y = |f(1 - x^{2018})|$  có hai cực đại và một cực tiểu.  
 D. Hàm số  $y = |f(1 - x^{2018})|$  đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .



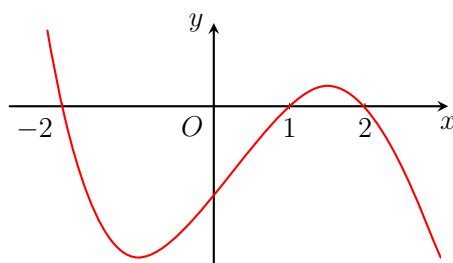
**Câu 328.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình bên. Đặt

$$g(x) = f(|x+m|).$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $g(x)$  có 5 điểm cực trị?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. Vô số.



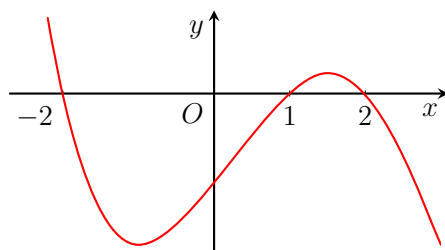
**Câu 329.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình bên. Đặt

$$g(x) = f(|x| + m).$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $g(x)$  có đúng 5 điểm cực trị?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. Vô số.



## 2

## Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 330.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = 4x^3 + 2x$  và  $f(0) = 1$ .

| Phát biểu                                                       | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $f(x)$ có một điểm cực trị.                           |   |   |
| b) Hàm số $g(x) = f^3(x^2 - 2x - 3)$ có ba điểm cực trị.        |   |   |
| c) Hàm số $g(x) = f^3(x^2 - 2x - 3)$ có hai điểm cực đại.       |   |   |
| d) Hàm số $g(x) = f^3(x^2 - 2x - 3)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ . |   |   |

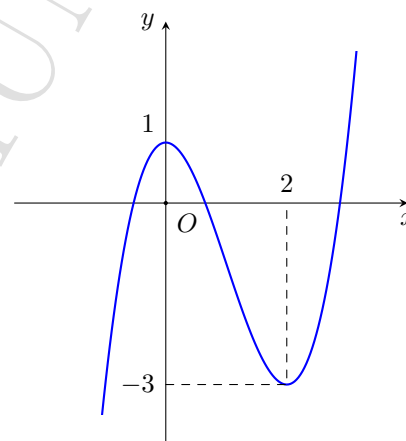
**Câu 331.**

Cho đồ thị hàm số  $y = f(x)$  như hình vẽ bên. Đặt

$$g(x) = f(x+1) - 2.$$

Khi đó kết luận dưới đây đúng hay sai?

| Phát biểu                                                    | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ .      |   |   |
| b) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ .         |   |   |
| c) Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$ .                   |   |   |
| d) Đồ thị hàm số $g(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt. |   |   |

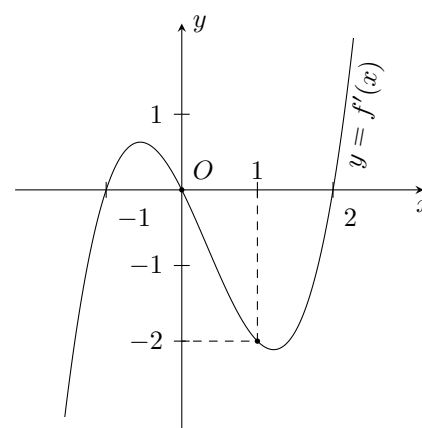


**Câu 332.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị

$$y = f'(x) \text{ như hình vẽ. Xét } g(x) = 3f(x^2 - 2) + \frac{3}{2}x^4 - 3x^2.$$

| Phát biểu                                  | Đ | S |
|--------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.        |   |   |
| b) Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực đại.        |   |   |
| c) Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu.       |   |   |
| d) Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$ . |   |   |



**Câu 333.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu của  $f'(x)$ .

|         |           |     |      |     |     |     |           |
|---------|-----------|-----|------|-----|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |     | $-1$ |     | $2$ |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$ | $0$  | $-$ | $0$ | $+$ |           |

| Phát biểu                              | Đ | S |
|----------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.  |   |   |
| b) Hàm số $f(x)$ có một điểm cực tiểu. |   |   |

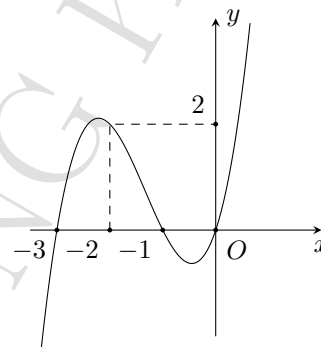


| Phát biểu                                               | Đ | S |
|---------------------------------------------------------|---|---|
| c) Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$ có ba điểm cực trị.       |   |   |
| d) Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$ đạt cực đại tại $x = 0$ . |   |   |

**Câu 334.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Xét  $g(x) = f(x^2 + 2x) + \frac{x^4}{2} + 2x^3 + 2x^2$ .

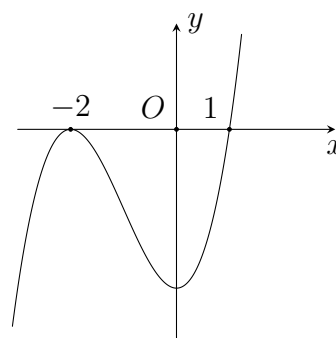
| Phát biểu                                                  | Đ | S |
|------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.                  |   |   |
| b) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = -3$ và $x = 0$ . |   |   |
| c) Hàm số $y = g(x)$ có ba điểm cực trị.                   |   |   |
| d) Hàm số $y = g(x)$ có hai điểm cực đại.                  |   |   |



**Câu 335.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(3x + 5)$  như hình vẽ bên.

| Phát biểu                                                                      | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.                                      |   |   |
| b) Hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại là $x = -2$ và điểm cực tiểu là $x = 1$ . |   |   |
| c) Hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực đại.                                      |   |   |
| d) Hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực tiểu.                                     |   |   |



**3 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn**

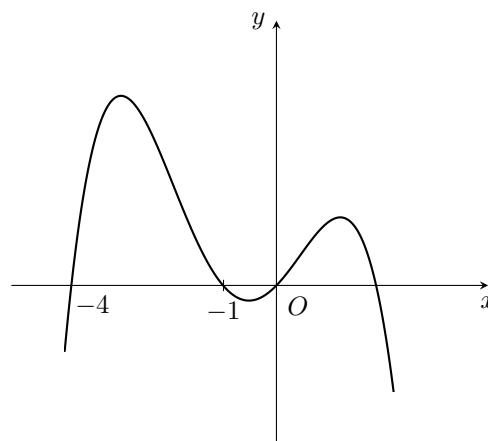
**Câu 336.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đúng ba điểm cực trị là  $-2; -1; 0$ . Hỏi hàm số  $y = f(x^2 - 2x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

KQ:

**Câu 337.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và đồ thị có ba điểm cực trị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f(x^3 - 3x + 2)$  là bao nhiêu?

KQ:



**Câu 338.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau?

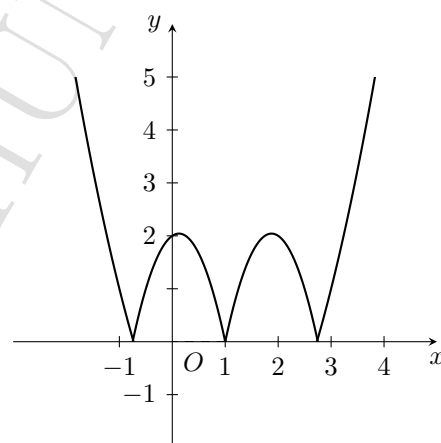
|      |           |      |      |           |     |           |
|------|-----------|------|------|-----------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $1$  | $+\infty$ |     |           |
| $f'$ |           | $-$  | $0$  | $+$       | $0$ | $+$       |
| $f$  | $+\infty$ |      | $-2$ |           | $2$ | $+\infty$ |

Hàm số  $g(x) = f(x^2 + 1)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

KQ:

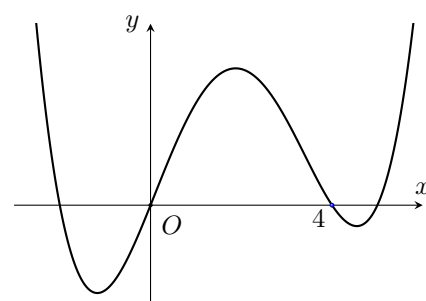
**Câu 339.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số  $y = \left| f(x-1) - \frac{1}{2} \right|$  là bao nhiêu? KQ:



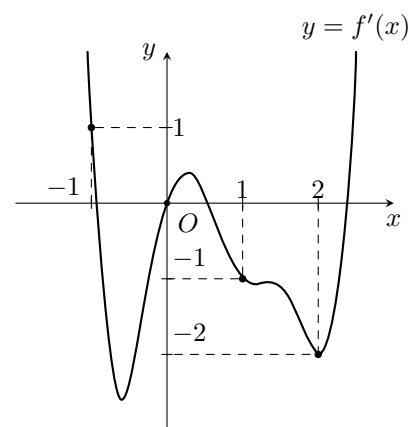
**Câu 340.**

Cho hàm số bậc bốn  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ . KQ:



**Câu 341.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Hàm số  $g(x) = 2f(x) + x^2$  đạt cực đại tại điểm nào? KQ:



**Câu 342.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như hình dưới.

|      |           |           |             |           |
|------|-----------|-----------|-------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$      | $2$         | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $-$       | $-$ $0$ $+$ |           |
| $y$  | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$   | $+\infty$ |

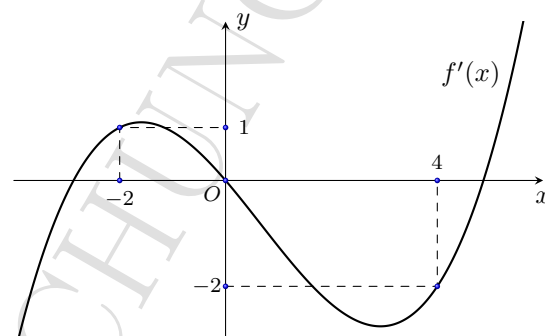
Đồ thị hàm số  $y = |f(x) - 2022|$  có bao nhiêu điểm cực trị?

KQ:

**Câu 343.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $f(0) = 0$  và đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Hàm số  $g(x) = |4f(x) + x^2|$  có bao nhiêu điểm cực trị?

KQ:



**Câu 344.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|      |           |     |             |           |
|------|-----------|-----|-------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $0$ | $2$         | $+\infty$ |
| $y'$ | $+$       | $0$ | $-$ $0$ $+$ |           |
| $y$  | $-\infty$ | $2$ | $-\infty$   | $+\infty$ |

Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số  $y = |f(x) - m| + 2019$  có 5 điểm cực trị?

KQ:

**Câu 345.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$ , với  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(x^2 - 8x + m)$  có 5 điểm cực trị? KQ:

DẠNG

10

Ứng dụng cực trị trong thực tế

1

Ví dụ mẫu

**Ví dụ 73.** Thể tích  $V$  của 1 kg nước (tính bằng  $\text{cm}^3$ ) ở nhiệt độ  $T$  (đơn vị:  $^\circ\text{C}$ ) khi  $T$  thay đổi từ  $0^\circ\text{C}$  đến  $30^\circ\text{C}$  được cho xấp xỉ bởi công thức  $V = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000769T^3$ .

(Nguồn: James Stewart, J. (2015). Calculus. Cengage Learning 8th edition, p.284)

Tìm nhiệt độ  $T_0 \in (0; 30)$  để thể tích  $V$  đạt cực trị (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

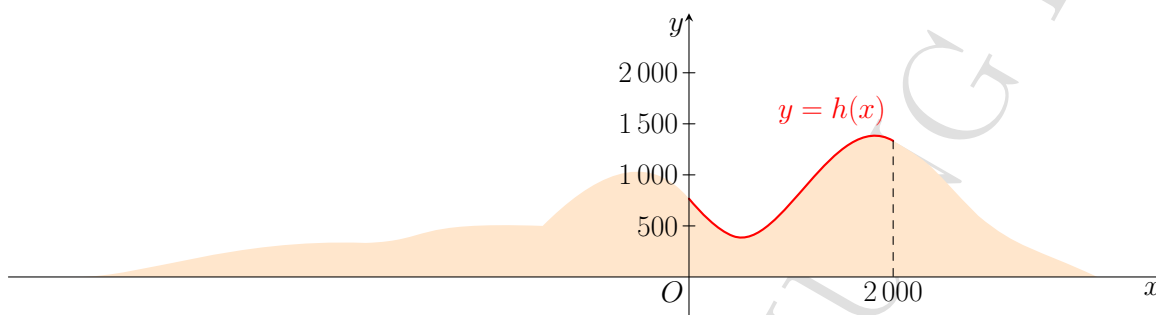
**Ví dụ 74.** Giả sử doanh số (tính bằng sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong một năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số  $f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}}$ ,  $t \geq 0$ , trong đó thời gian

$t$  được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó đạo hàm  $f'(t)$  biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là cực đại?

**Ví dụ 75.** Một phần lát cắt của dãy núi có độ cao tính bằng mét được mô tả bởi hàm số

$$y = h(x) = -\frac{1}{1\,320\,000}x^3 + \frac{9}{3\,520}x^2 - \frac{81}{44}x + 840, \text{ với } 0 \leq x \leq 2\,000.$$

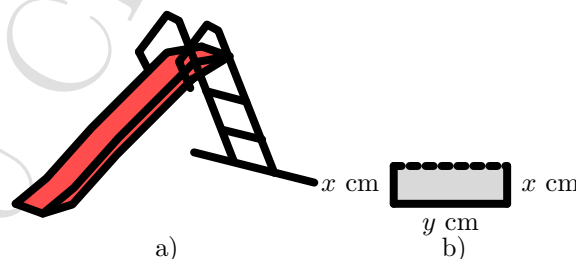
Tìm tọa độ các đỉnh của lát cắt dãy núi trên đoạn  $[0; 2\,000]$ .



**Ví dụ 76.**

Máng trượt của một cầu trượt cho trẻ em (Hình a) được uốn từ một tấm kim loại có bề rộng 80 cm, mặt cắt được mô tả ở Hình b. Nhà thiết kế khuyến cáo, diện tích mặt cắt càng lớn thì càng đảm bảo an toàn cho trẻ em.

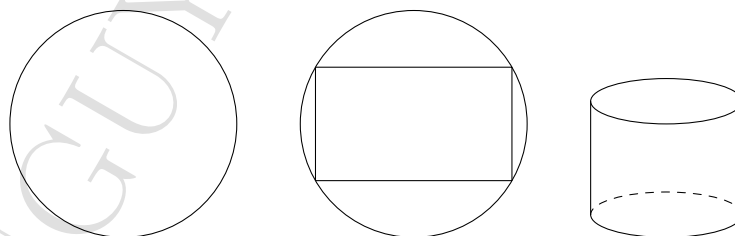
- Gọi  $S$  là diện tích mặt cắt. Tìm điều kiện của  $x$  và viết công thức tính  $S$  theo  $x$ .
- Với  $x$  đạt giá trị bằng bao nhiêu thì mức độ đảm bảo an toàn của cầu trượt đạt cực đại?



**Ví dụ 77.** Trong các khối trụ có cùng diện tích toàn phần là  $6\pi$ .

- Mô tả thể tích  $V$  khối trụ theo bán kính  $R$ .
- Tìm bán kính đáy của khối trụ có thể tích cực đại.

**Ví dụ 78.** Từ một miếng tôn hình tròn bán kính 2 m, người ta cắt ra một hình chữ nhật rồi uốn thành mặt xung quanh của một chiếc thùng phi hình trụ như hình vẽ.



Tính diện tích phần tôn bị cắt bỏ biết thể tích thùng đạt cực đại (làm tròn đến hàng đơn vị).

**Ví dụ 79.** Sau khi tiêu thụ đồ uống có cồn, nồng độ cồn trong máu (*blood alcohol concentration* hoặc BAC) tăng lên khi rượu được hấp thụ, tiếp theo là giảm dần khi rượu được chuyển hóa. Hàm số

$$C(t) = 1,35 \cdot t \cdot e^{-2,802t}$$

minh họa BAC trung bình, tính theo đơn vị mg/mL, của một nhóm 8 người đàn ông sau khi tiêu thụ nhanh 15 mL ethanol (tương ứng với một thức uống có cồn) trong  $t$  giờ. Tính giá trị cực đại của BAC trong 3 giờ đầu tiên.

**Ví dụ 80.** Kính viễn vọng Không gian Hubble được triển khai vào ngày 24 tháng 4 năm 1990, bởi tàu con thoi Discovery. Một mô hình minh họa cho vận tốc của tàu con thoi trong nhiệm vụ này, từ khi cất cánh ở  $t = 0$  cho đến khi các tên lửa đẩy bị loại bỏ ở  $t = 126$  giây, được cho bởi hàm số

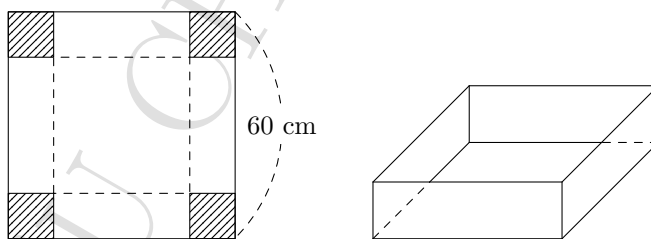
$$v(t) = 0,001\,302t^3 - 0,09\,029t^2 + 23,61t - 3,083, \text{ (tính bằng feet trên giây, } 1 \text{ foot} = 0,3048 \text{ m).}$$

Sử dụng mô hình này, xét tính đúng sai các phát biểu sau

| Phát biểu                                                                                          | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Gia tốc của tàu con thoi được minh họa qua hàm số $a(t) = 0,003\,906t^2 - 0,18\,058t + 23,61$ . |   |   |
| b) Sau khoảng 10 giây kể từ lúc cất cánh, vận tốc của tàu con thoi tăng liên tục.                  |   |   |
| c) Vận tốc của tàu con thoi đạt cực đại tại $t = 112$ giây.                                        |   |   |
| d) Gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian từ 30 đến 40 giây.                      |   |   |

**Ví dụ 81.**

Từ một tấm bìa carton hình vuông có độ dài cạnh bằng 60 cm, người ta cắt bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc rồi gấp thành một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp (minh họa qua hình vẽ bên). Gọi  $x$  (cm) là độ dài cạnh của các hình vuông nhỏ được cắt ở bốn góc của tấm bìa.



| Phát biểu                                                                                               | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Nếu cắt ở mỗi góc quá 15 cm thì không tạo được chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật.                  |   |   |
| b) Thể tích của chiếc hộp được mô tả thông qua $V(x) = 4x^3 + 240x^2 + 3600x \text{ cm}^3$ .            |   |   |
| c) Thể tích của chiếc hộp đạt cực đại $16\,000 \text{ cm}^3$ .                                          |   |   |
| d) Nếu cắt trong khoảng từ 5 đến 10 cm thì thể tích của chiếc hộp không nhỏ hơn $8\,000 \text{ cm}^3$ . |   |   |

**Ví dụ 82.** Theo thống kê tại một nhà máy Z, nếu áp dụng tuần làm việc 40 giờ thì mỗi tuần có 100 công nhân đi làm và mỗi công nhân làm được 120 sản phẩm trong một giờ. Nếu tăng thời gian làm việc thêm 2 giờ mỗi tuần thì sẽ có 1 công nhân nghỉ việc và năng suất lao động giảm đi 5 sản phẩm/1 công nhân/1 giờ (và như vậy, nếu giảm thời gian làm việc 2 giờ mỗi tuần thì sẽ có thêm 1 công nhân đi làm đồng thời năng suất lao động tăng 5 sản phẩm/1 công nhân /1 giờ). Ngoài ra, số phế phẩm mỗi tuần ước tính là

$$P(x) = \frac{95x^2 + 120x}{4}, \text{ với } x \text{ là thời gian làm việc trong 1 tuần. Nhà máy cần áp dụng thời gian làm việc}$$

mỗi tuần mấy giờ để số lượng sản phẩm thu được mỗi tuần đạt cực đại?

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

## 2

### Bài tập tự luận

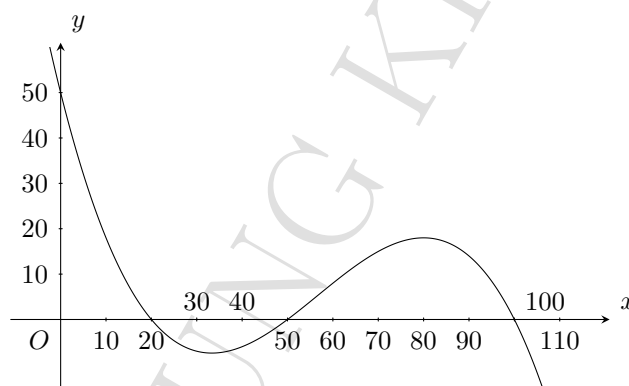
**Bài 37.** Khi một vật lạ mắc vào khí quản buộc một người phải ho, cơ hoành sẽ đẩy lên trên, làm tăng áp lực trong phổi. Đồng thời, khí quản co lại, khiến vật thể bị tống ra ngoài, không khí di chuyển nhanh hơn và tăng áp lực lên vật thể. Thông qua mô hình toán học, vận tốc (tính bằng cm/s) của luồng khí qua khí quản của một người trưởng thành liên quan đến bán kính  $r$  của khí quản (tính bằng cm) theo hàm số  $v(r) = 3,2(1 - r)r^2$  với  $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$ .

(Nguồn: James Stewart, *Precalculus Mathematics for Calculus* - 7<sup>th</sup>, trang 209)

Tìm giá trị của  $r$  để  $v$  đạt cực đại.

### Bài 38.

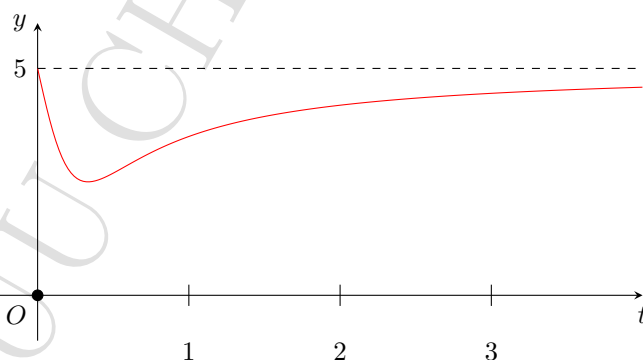
Một phần đường ray tàu lượn siêu tốc có dạng đồ thị hàm số bậc ba  $y = f(x) = -\frac{1}{2000}x^3 + \frac{17}{200}x^2 - 4x + 50$ . Trục  $Ox$  mô tả quãng đường tàu di chuyển theo chiều ngang (tính bằng centimet), trục  $Oy$  mô tả chiều cao của đường ray (tính bằng centimet) tại mỗi vị trí  $x$ . Tìm tọa độ các cực trị của đường ray trên đoạn  $[0; 100]$ .



### Bài 39.

Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau  $t$  giờ ( $t \geq 0$ ) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số (có đồ thị như đường màu đỏ ở hình bên)

$$y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}.$$



Tìm các thời điểm nồng độ oxygen trong nước đạt cực trị?

**Bài 40.** Khối lượng  $q$  (kg) của một mặt hàng mà cửa tiệm bán được trong một ngày phụ thuộc vào giá bán  $p$  (nghìn đồng/kg) theo công thức  $p = 15 - \frac{1}{2}q$ . Doanh thu từ việc bán mặt hàng trên của cửa tiệm được tính theo công thức  $R = pq$ . Tìm giá bán mỗi kilôgam sản phẩm để doanh thu đạt cực trị và xác định doanh thu đó.

## 3

### Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 346.** Một loại vi khuẩn được tiêm một loại thuốc kích thích sự sinh sản. Sau  $t$  phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức  $N(t) = 1000 + 30t^2 - t^3$  ( $0 \leq t \leq 30$ ). Hỏi sau bao nhiêu giây thì số vi khuẩn đạt cực đại?

- A. 1100.      B. 1200.      C. 20.      D. 10.

**Câu 347.** Một bác nông dân cần xây một hố ga không có nắp dạng hình hộp chữ nhật có thể tích  $3200 \text{ cm}^3$ , tỉ số giữa chiều cao của hố và chiều rộng của đáy bằng 2. Diện tích của đáy hố ga đạt cực trị bằng

- A.  $1200 \text{ cm}^2$ .      B.  $120 \text{ cm}^2$ .      C.  $160 \text{ cm}^2$ .      D.  $1600 \text{ cm}^2$ .

**Câu 348.** Khi loại thuốc A được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ (mg/L) của thuốc trong máu sau  $x$  phút (kể từ khi bắt đầu tiêm) được xác định bởi công thức  $C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$ .

(Nguồn: James Stewart, J. (2015). *Calculus*. Cengage Learning)

Dựa vào đó có thể đưa ra những lời khuyên và cách xử lý phù hợp cho bệnh nhân. Hãy cho biết hàm nồng độ thuốc trong máu  $C(x)$  đạt giá trị cực đại là bao nhiêu trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm.

- A.  $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ . B.  $\sqrt{2}$ . C.  $\frac{90}{19}$ . D. 15.

**Câu 349.** Một công ty tiến hành khai thác 17 giếng dầu trong khu vực được chỉ định. Trung bình mỗi giếng dầu chiết xuất được 245 thùng dầu mỗi ngày. Công ty có thể khai thác nhiều hơn 17 giếng dầu nhưng cứ khai thác thêm một giếng thì lượng dầu mỗi giếng chiết xuất được hàng ngày sẽ giảm 9 thùng. Để giám đốc công ty có thể quyết định số giếng cần thêm cho phù hợp với tài chính, hãy chỉ ra số giếng công ty có thể khai thác thêm để sản lượng dầu chiết xuất đạt cực đại.

- A. 5. B. 3. C. 4. D. 6.

**Câu 350.** Giả sử chi phí tiền xăng  $C$  (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình  $v$  (km/h) theo công thức

$$C(v) = \frac{16000}{v} + \frac{5}{2}v \quad (0 < v \leq 120)$$

Tính tốc độ trung bình để chi phí tiền xăng đạt cực tiểu.

- A. 60 km/h. B. 70 km/h. C. 50 km/h. D. 80 km/h.

**Câu 351.** Cho một tấm bìa hình vuông cạnh 50 cm. Để làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ 4 tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy chính là cạnh của hình vuông rồi gấp lên, ghép lại thành một hình chóp tứ giác đều. Để mô hình có thể tích đạt cực đại thì cạnh đáy của mô hình bằng

- A.  $20\sqrt{2}$  cm. B.  $15\sqrt{2}$  cm. C.  $10\sqrt{2}$  cm. D.  $25\sqrt{2}$  cm.

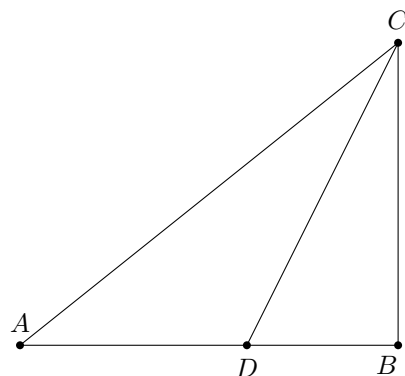
**Câu 352.** Với một đĩa phẳng hình tròn bằng thép bán kính  $R$ , phải làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của đĩa này và gấp phần còn lại thành một hình nón. Gọi độ dài cung tròn của hình quạt còn lại là  $x$ . Tìm  $x$  để thể tích khối nón tạo thành đạt cực đại.

- A.  $x = \frac{2\pi R\sqrt{6}}{3}$ . B.  $x = \frac{2\pi R\sqrt{2}}{3}$ . C.  $x = \frac{2\pi R\sqrt{3}}{3}$ . D.  $x = \frac{\pi R\sqrt{6}}{3}$ .

**Câu 353.**

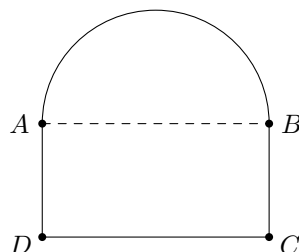
Đường dây điện 110KV kéo từ trạm phát (điểm  $A$ ) trong đất liền ra Côn Đảo (điểm  $C$ ). Biết khoảng cách ngắn nhất từ  $C$  đến  $B$  là 60 km, khoảng cách từ  $A$  đến  $B$  là 100 km, mỗi km dây điện dưới nước chi phí là 5000 USD, chi phí cho mỗi km dây điện trên bờ là 3000 USD. Hỏi điểm  $D$  cách điểm  $A$  bao nhiêu để mắc dây điện từ  $A$  đến  $D$  rồi từ  $D$  đến  $B$  chi phí đạt cực tiểu? (hình vẽ bên)

- A. 40 km. B. 50 km. C. 55 km. D. 45 km.



**Câu 354.**

Từ một cây sắt dài 6 mét người ta uốn và hàn lại thành khung của một cánh cổng gồm một hình chữ nhật và một nửa hình tròn ghép lại như hình vẽ (không tính cạnh chung  $AB$ ). Cánh cổng trên có diện tích đạt cực đại bằng bao nhiêu nếu bỏ qua hao hụt khi gia công.



- A.  $\frac{18}{\pi + 4}$ . B.  $\frac{8\pi}{9}$ . C.  $\frac{9(\pi + 4)}{25}$ . D.  $\frac{4 + 6\pi}{9}$ .

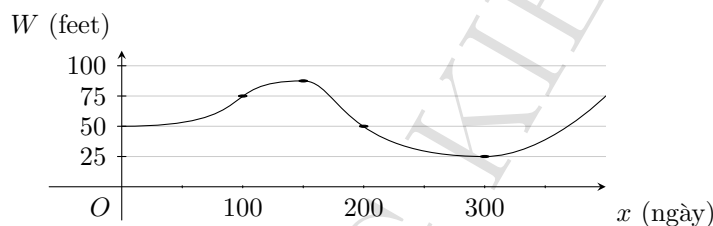


## 4

## Bài tập trắc nghiệm đúng sai

## Câu 355.

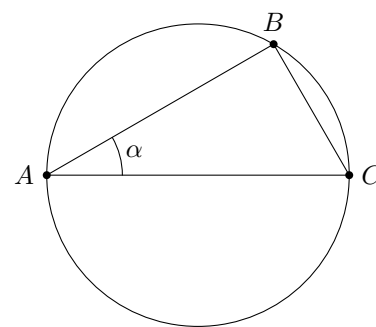
Biểu đồ mực nước của một hồ chứa trong năm được mô tả bằng một hàm số  $W$  tính bằng feet với  $x$  là số ngày được tính từ đầu năm (hình vẽ bên). Khi đó



| Phát biểu                                                                    | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Trong khoảng từ ngày thứ 150 đến ngày thứ 300 thì mực nước trong hồ giảm. |   |   |
| b) Mực nước trong hồ chứa đạt cực đại được vào ngày 100.                     |   |   |
| c) Mực nước trong hồ chứa đạt cực tiểu bằng 25 feet.                         |   |   |
| d) Mực nước trong hồ giảm đi 50 feet từ ngày thứ 100 đến ngày thứ 300.       |   |   |

## Câu 356.

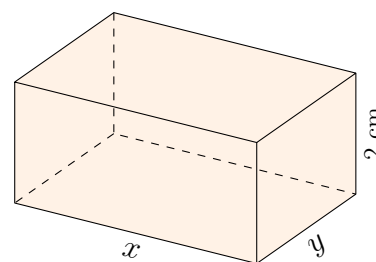
Một người phụ nữ đứng ở vị trí  $A$  của một bờ hồ hình tròn có bán kính 2 km. Cô ấy muốn đến điểm  $C$  nằm đối diện với  $A$  ở phía bên kia của hồ (tham khảo hình vẽ bên). Biết rằng vận tốc đi bộ và vận tốc chèo thuyền của cô gái này lần lượt là 4 km/h và 2 km/h.



| Phát biểu                                                                                                                                                                                               | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $T(\alpha) = \alpha - \cos \alpha$ với $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ mô tả tổng thời gian di chuyển bằng đường bộ và chèo thuyền của cô gái, với $\alpha$ là góc chèo thuyền của cô gái. |   |   |
| b) Thời gian đi bộ của cô gái từ $A$ đến $C$ là 1 giờ.                                                                                                                                                  |   |   |
| c) Thời gian chèo thuyền của cô gái từ $A$ đến $C$ là 2 giờ.                                                                                                                                            |   |   |
| d) Khi $\alpha = \frac{\pi}{6}$ thì thời gian di chuyển của cô gái đạt cực trị.                                                                                                                         |   |   |

## Câu 357.

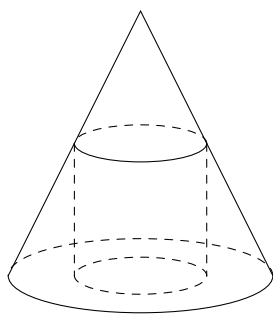
Người ta muốn chế tạo một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có thể tích  $500\text{cm}^3$ . Chiều cao hộp phải là 2 cm, các kích thước khác là  $x, y$  với  $x > 0$  và  $y > 0$ . Gọi  $S(x)$  là diện tích toàn phần của chiếc hộp. Khi đó



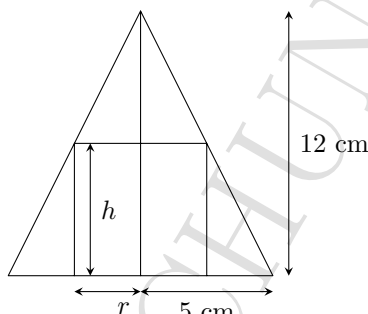
| Phát biểu                      | Đ | S |
|--------------------------------|---|---|
| a) Khi $x = 10$ thì $y = 20$ . |   |   |

| Phát biểu                                                                               | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| b) Diện tích toàn phần của chiếc hộp là $S(x) = 500 + 4x + \frac{1000}{x}$ .            |   |   |
| c) Hàm số $S(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 5)$ .                                     |   |   |
| d) Nếu kích thước của hộp lần lượt là 20; 12,5; 2 thì diện tích toàn phần đạt cực tiểu. |   |   |

**Câu 358.** Một chi tiết máy có dạng khối nón với chiều cao bằng 12 cm và bán kính đáy bằng 5 cm (hình a). Người ta cắt hình nón, trụ này theo mặt phẳng chứa đường thẳng nối đỉnh và tâm hình tròn đáy của hình nón thì thu được một hình phẳng như hình b. Gọi  $r, h$  lần lượt là bán kính đáy hình trụ và chiều cao hình trụ. Khi đó



Hình a



Hình b

| Phát biểu                                                                            | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Công thức tính theo của nó là $r = \frac{(12 + h)}{12}$ .                         |   |   |
| b) Thể tích khối trụ theo $h$ là $V(h) = \frac{\pi \cdot h \cdot (12 - h)^2}{144}$ . |   |   |
| c) Nếu $h = 4$ thì thể tích khối trụ $V(h)$ đạt cực đại.                             |   |   |
| d) Thể tích khối trụ $V(h)$ luôn tăng khi $h \in (10; 12)$ .                         |   |   |

**Câu 359.** Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được  $x$  mét vải lụa ( $1 \leq x \leq 18$ ). Tổng chi phí sản xuất  $x$  mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

$$C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500.$$

Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi  $B(x)$  là số tiền bán được và  $L(x)$  là lợi nhuận thu được khi bán  $x$  mét vải lụa. Khi đó

| Phát biểu                                                               | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Số tiền thu được là $B(x) = 220x$ (nghìn đồng).                      |   |   |
| b) Lợi nhuận thu được là $L(x) = x^3 - 3x^2 + 200x + 500$ (nghìn đồng). |   |   |
| c) Hàm số $L(x)$ nghịch biến trên $(10; 15)$ .                          |   |   |
| d) Lợi nhuận của hộ đạt cực đại bằng 1 200 (nghìn đồng).                |   |   |

## 5

### Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 360.** Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục

giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu  $P$  (tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số

$$P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}, 0 \leq t \leq 10,$$

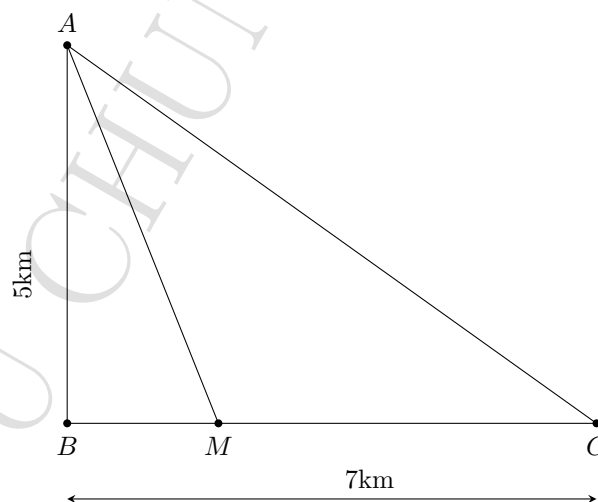
trong đó thời gian  $t$  được tính bằng giây. Tìm giá trị cực trị của huyết áp tâm thu  $P$ .

KQ:

**Câu 361.** Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hoá bằng hàm số  $N(t) = -t^3 + 12t^2$ ,  $0 \leq t \leq 12$ , trong đó  $N$  là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và  $t$  là thời gian (tuần). Hãy ước tính số người bị nhiễm bệnh cực đại ở địa phương đó. KQ:

**Câu 362.**

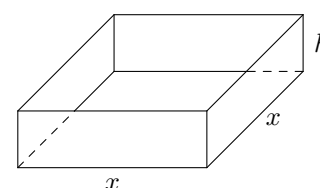
Một ngọn hải đăng được đặt tại vị trí  $A$  cách bờ biển một khoảng  $AB = 5$  km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí  $C$  cách  $B$  một khoảng 7 km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ  $A$  đến địa điểm  $M$  trên bờ biển với vận tốc 4 km/h, rồi đi bộ đến  $C$  với vận tốc 6 km/h. Hỏi cần đặt vị trí của  $M$  cách  $B$  một khoảng bằng bao nhiêu km để thời gian của người đó đến kho đạt cực tiểu? (Làm tròn hai chữ số thập phân) KQ:



**Câu 363.** Gia đình An xây bể hình trụ có thể tích  $150\text{m}^3$ . Đáy bể làm bằng bê tông giá  $100000\text{đ}/\text{m}^2$ . Phần thân làm bằng vật liệu chống thấm giá  $90000\text{đ}/\text{m}^2$ , nắp bằng nhôm giá  $120000\text{đ}/\text{m}^2$ . Hỏi tỷ số giữa chiều cao bể và bán kính đáy là bao nhiêu để chi phí sản xuất bể đạt cực đại? (Làm tròn đến hai chữ số thập phân) KQ:

**Câu 364.**

Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng  $108\text{ cm}^2$  như hình bên. Tìm kích thước của đáy chiếc hộp sao cho thể tích của hộp đạt cực đại. KQ:



## THẦY KIÊN TOÁN: DẠY THẬT - HỌC THẬT - GIÁ TRỊ THẬT

## K12 - CHƯƠNG 1

## §3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

## A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

## 1 Định nghĩa

**Định nghĩa 3** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên tập hợp  $\mathcal{D}$ .

- ☑ Số  $M$  được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên  $\mathcal{D}$  nếu  $f(x) \leq M$  với mọi  $x$  thuộc  $\mathcal{D}$  và tồn tại  $x_0$  thuộc  $\mathcal{D}$  sao cho  $f(x_0) = M$ . Kí hiệu  $M = \max_{\mathcal{D}} f(x)$ .
- ☑ Số  $m$  được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên  $\mathcal{D}$  nếu  $f(x) \geq m$  với mọi  $x$  thuộc  $\mathcal{D}$  và tồn tại  $x_0$  thuộc  $\mathcal{D}$  sao cho  $f(x_0) = m$ . Kí hiệu  $m = \min_{\mathcal{D}} f(x)$ .

⚠ Ta quy ước khi chỉ nói giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  (mà không cho rõ tập hợp  $\mathcal{D}$ ) thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên tập xác định của nó.

⚠ Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số thường được tìm bằng cách sử dụng đạo hàm và bảng biến thiên.

## 2 Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn

- ☑ Bước 1. Tìm các điểm  $x_1; x_2; \dots; x_n \in (a; b)$  mà tại đó  $f'(x)$  bằng 0 hoặc không tồn tại.
- ☑ Bước 2. Tính  $f(a); f(x_1); f(x_2); \dots; f(x_n); f(b)$ .
- ☑ Bước 3. Gọi  $M$  là số lớn nhất và  $m$  là số nhỏ nhất trong các giá trị tìm được ở bước 2. Khi đó

$$M = \max_{[a;b]} f(x), m = \min_{[a;b]} f(x).$$

## B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

## DẠNG 1 Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn

Các bước tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[a; b]$ :

**Bước 1.** Tìm các điểm  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$  mà tại đó  $f'(x)$  bằng 0 hoặc không tồn tại.

**Bước 2.** Tính  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a)$  và  $f(b)$ .

**Bước 3.** Gọi  $M$  là số lớn nhất và  $m$  là số nhỏ nhất trong các giá trị tìm được ở Bước 2. Khi đó

$$M = \max_{[a;b]} f(x); m = \min_{[a;b]} f(x).$$



⊙ Khi tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của một hàm số mà không yêu cầu trên tập nào thì ta mặc định tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số đó trên tập xác định của nó.

⊙ Khi thực hiện đổi biến số  $t = t(x)$ .

Ta viết lại hàm số  $y = f(x)$  thành hàm số theo  $t$  là  $y = f(x) = g(t)$ .

Gọi  $T$  là miền giá trị của hàm số  $t = t(x)$  với  $x \in X$ .

Khi đó

$$\max_{x \in X} f(x) = \max_{t \in T} g(t) \text{ và } \min_{x \in X} f(x) = \min_{t \in T} g(t).$$

## 1

## Ví dụ mẫu

**Ví dụ 1.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^4 - 4x^2 + 3$  trên đoạn  $[0; 4]$ .

**Ví dụ 2.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sin x + \cos x$  trên đoạn  $[0; 2\pi]$ .

**Ví dụ 3.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$  trên đoạn  $[0; 5]$ .

**Ví dụ 4.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 9$  trên đoạn  $[-1; 3]$ .

**Ví dụ 5.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$  trên đoạn  $[-3; 2]$ .

**Ví dụ 6.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $g(x) = x + \frac{4}{x^2}$  trên đoạn  $[1; 4]$ .

**Ví dụ 7.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = \sin 2x - 2x$  trên đoạn  $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ .

**Ví dụ 8.** Cho hàm số  $y = \sqrt{2 - x^2} - x$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                  | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tập xác định của hàm số là $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ .                    |   |   |
| b) Hàm số có đạo hàm là $y' = \frac{x + \sqrt{2 - x^2}}{\sqrt{2 - x^2}}$ . |   |   |
| c) Hàm số có duy nhất 1 cực trị.                                           |   |   |
| d) Tổng giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số bằng $2 - \sqrt{2}$ .      |   |   |

**Ví dụ 9.** Cho hàm số  $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                         | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tập xác định của hàm số $g(x)$ là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . |   |   |
| b) Hàm số đã cho có một cực tiểu.                                                 |   |   |
| c) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 1)$ .                                 |   |   |
| d) Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đoạn $[1; 4]$ bằng $\frac{1}{e}$ .      |   |   |

**Ví dụ 10.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{mx - 1}{x + m}$  đạt giá trị lớn nhất trên đoạn  $[1; 3]$  bằng 2.

KQ:

## 2 Bài tập tự luận

- Bài 1.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$  trên đoạn  $[-1; 2]$
- Bài 2.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 1$  trên đoạn  $[-1; 1]$ .
- Bài 3.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x) = e^x - x$  trên đoạn  $[-1; 2]$ .
- Bài 4.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = \cos 2x + 2x + 1$  trên đoạn  $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ .
- Bài 5.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-2}$  trên đoạn  $[3; 7]$ .
- Bài 6.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sin 2x$  trên đoạn  $\left[0; \frac{7\pi}{12}\right]$ .
- Bài 7.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x) = x + \frac{1}{x} - 2$  trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .
- Bài 8.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x) = \sqrt{4-x^2}$ .
- Bài 9.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 7)$  trên đoạn  $[0; 3]$ .
- Bài 10.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x) = x \ln x$  trên đoạn  $[e^{-2}; e]$ .

## 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

- Câu 1.** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = x^4 - 2x^2 - 15$  trên  $[-3; 2]$ .
- A.  $\max_{[-3;2]} = 54.$       B.  $\max_{[-3;2]} = 7.$       C.  $\max_{[-3;2]} = 48.$       D.  $\max_{[-3;2]} = 16.$
- Câu 2.** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$  trên  $[-4; 4]$ . Tính tổng  $M + m$ .
- A. 12.      B. 98.      C. 17.      D. 73.
- Câu 3.** Nếu hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f'(x) = \sin x - 2023, \forall x \in \mathbb{R}$  thì giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[1; 2]$  bằng
- A.  $f(0).$       B.  $f(1).$       C.  $f(1,5).$       D.  $f(2).$
- Câu 4.** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = \sin x + \cos 2x$  trên  $[0; \pi]$  là
- A.  $\frac{9}{8}.$       B.  $\frac{5}{4}.$       C. 2.      D. 1.
- Câu 5.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{x-1}{x+1}$  trên đoạn  $[0; 3]$  là
- A.  $\min_{[0;3]} y = \frac{1}{2}.$       B.  $\min_{[0;3]} y = -3.$       C.  $\min_{[0;3]} y = 1.$       D.  $\min_{[0;3]} y = -1.$
- Câu 6.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$  trên đoạn  $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$  là
- A.  $-\frac{7}{2}.$       B.  $-\frac{13}{3}.$       C. 1.      D.  $-3.$
- Câu 7.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = (x - 2)^2 e^x$  trên  $[1; 3]$  là
- A.  $e^3.$       B.  $e.$       C. 0.      D.  $e^4.$
- Câu 8.** Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = (x + 1)e^{-x}$  trên đoạn  $[-1; 1]$  bằng
- A. 0.      B. 1.      C.  $e.$       D.  $\frac{1}{e}.$

**Câu 9.** Cho hàm số  $y = x + \ln x$ . Tìm giá trị lớn nhất  $M$  của hàm số trên đoạn  $[1; e]$ .

- A.  $M = 1$ . B.  $M = e + 1$ . C.  $M = e^2 + 1$ . D.  $M = 1 - e$ .

**Câu 10.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 + m^2x - 2m^2 + 2m - 9$ ,  $m$  là tham số. Gọi  $S$  là tập tất cả các giá trị của  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn  $[0; 3]$  không vượt quá 3. Tìm tập  $S$ .

- A.  $S = (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ . B.  $S = (-3; 1]$ .  
C.  $S = (-\infty; -3] \cup (1; +\infty)$ . D.  $S = (-3; 1)$ .

**Câu 11.** Hàm số  $y = x + \frac{1}{x} + x^2 + \frac{1}{x^2}$  có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất trên đoạn  $[1; 3]$  là

- A.  $3; \frac{112}{9}$ . B.  $1; 4$ . C.  $1; \frac{112}{9}$ . D.  $4; \frac{112}{9}$ .

**Câu 12.** Hàm số  $y = \sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}$  có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất trên đoạn  $[0; 63]$  là

- A.  $2; 12$ . B.  $1; 2$ . C.  $0; 2$ . D.  $0; 12$ .

**Câu 13.** Hàm số  $y = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$  có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $[0; 4]$  lần lượt là

- A.  $\frac{8}{3}; 0$ . B.  $\frac{8}{3}; -\frac{8}{3}$ . C.  $0; -\frac{8}{3}$ . D.  $\frac{24}{5}; 0$ .

## 4

## Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 14.** Cho hàm số  $y = 2x^3 - 2x^2 + 7x + 1$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                         | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ .                                                                                           |   |   |
| b) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 4.                                                                        |   |   |
| c) Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 0]$ lần lượt là $M$ và $m$ . Giá trị của $M + m$ là $-9$ . |   |   |
| d) Phương trình tiếp tuyến của hàm số tại điểm $B(1; 8)$ là $y = 3x + 2$ .                                                        |   |   |

**Câu 15.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                         | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .                      |   |   |
| b) Đạo hàm của hàm số là $y' = \frac{x^2 - 2}{2(x - 1)^2}$ .                      |   |   |
| c) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ là $-3$ . |   |   |
| d) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ .                                               |   |   |

**Câu 16.** Cho hàm số  $f(x) = 4^x - 2^{x+3}$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                   | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đạo hàm của hàm số $f(x)$ là $f'(x) = 4^x \cdot \ln 4 - 2^{x+3} \ln 2$ . |   |   |
| b) Phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.                           |   |   |

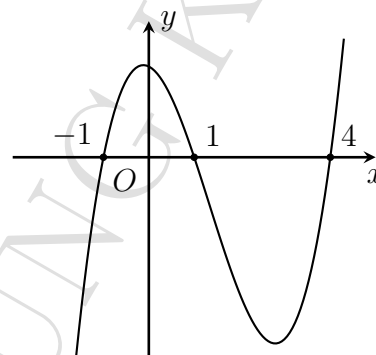


| Phát biểu                                                                  | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------|---|---|
| c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ đạt tại $x = 2$ . |   |   |
| d) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 0.           |   |   |

**Câu 17.**

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình bên.

| Phát biểu                                                      | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $f(x)$ có hai cực trị.                               |   |   |
| b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ .               |   |   |
| c) $f(-1) < f(1)$ .                                            |   |   |
| d) Trên đoạn $[-1; 4]$ giá trị lớn nhất của hàm số là $f(1)$ . |   |   |



**Câu 18.** Cho hàm số  $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                  | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đạo hàm của hàm số là $y' = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}$ .             |   |   |
| b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[1; e^3]$ là 0.                       |   |   |
| c) Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . |   |   |
| d) Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = (0; +\infty)$ .               |   |   |

**5**

**Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn**

**Câu 19.** Tìm giá trị lớn nhất  $M$  của hàm số  $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$  (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

**Câu 20.** Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{\cos^2 x - 5 \cos x + 3}{\cos x - 6}$ . (Làm tròn đến hàng phần mười)

KQ:

**Câu 21.** Gọi  $T$  là tập hợp tất cả giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{mx+1}{x+m^2}$  có giá trị lớn nhất trên đoạn  $[2; 3]$  bằng  $\frac{5}{6}$ . Tính tổng  $S$  của các phần tử trong  $T$ .

KQ:

**Câu 22.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^3 + (m^2 - m + 1)x + m^3 - 4m^2 + m + 2025$  trên đoạn  $[0; 2]$  bằng 2019?

KQ:

**Câu 23.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{x^3 + x^2 - m}{x+1}$  trên  $[0; 2]$  bằng 5. Khi đó, tìm  $m$ ?

KQ:

## DẠNG 2

## Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng

Để tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên khoảng, ta thường thực hiện các bước sau

- ☑ Tính đạo hàm  $f'(x)$ , giải phương trình  $f'(x) = 0$ .
- ☑ Lập bảng biến thiên.
- ☑ Dựa vào bảng biến thiên và kết luận.

## 1 Ví dụ mẫu

**Ví dụ 11.** Tìm GTLN, GTNN của hàm số  $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$  trên nửa khoảng  $[-1; 4)$ .

**Ví dụ 12.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $g(x) = x + \frac{1}{x}$  trên khoảng  $(0; 5)$ .

**Ví dụ 13.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số  $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x}$  trên  $(0; +\infty)$ .

**Ví dụ 14.** Cho hàm số  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ . Khi đó

| Phát biểu                                                       | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $(1; 3)$ bằng $-3$ .        |   |   |
| b) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $(1; 3)$ bằng $1$ .  |   |   |
| c) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $(-1; 3)$ bằng $1$ . |   |   |
| d) Hàm số không có giá trị lớn nhất trên $(0; 3)$ .             |   |   |

**Ví dụ 15.** Cho hàm số  $y = x \ln x$ . Khi đó

| Phát biểu                                                            | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số có đạo hàm $f'(x) = \ln x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ . |   |   |
| b) Hàm số có giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{1}{e}$ .                |   |   |
| c) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $(0; 1)$ là $0$ .                |   |   |
| d) Hàm số không có giá trị lớn nhất trên tập xác định.               |   |   |

**Ví dụ 16.** Xét tính đúng sai của các phát biểu sau

| Phát biểu                                                                                        | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2$ .                                   |   |   |
| b) Hàm số $y = xe^{-x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 1$ .                                       |   |   |
| c) Hàm số đa thức bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ( $a \neq 0$ ) không có GTLN, GTNN.          |   |   |
| d) Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $ad - bc \neq 0$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{a}{c}$ . |   |   |

**Ví dụ 17.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$  trên  $(1; +\infty)$  bằng  $2\sqrt{a}$ , với  $a \in \mathbb{Z}$ . Tính  $a$ .

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

## 2 Bài tập tự luận

**Bài 11.** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 6$  trên khoảng  $(-1; 1)$ .

**Bài 12.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^3(1-x)^2$  trên nửa khoảng  $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ .

**Bài 13.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = \frac{x}{4+x^2}$  trên  $\mathbb{R}$ .

**Bài 14.** Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất (nếu có) của hàm số  $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$  trên  $(0; +\infty)$ .

**Bài 15.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}$  trên tập xác định của nó.

**Bài 16.** Cho hàm số  $f(x) = x + \sqrt{2x^2 + 1}$ . Tìm tham số  $m$  thỏa mãn

a) Phương trình  $x + \sqrt{2x^2 + 1} = m$  có nghiệm.

b) Bất phương trình  $x + \sqrt{2x^2 + 1} > m$  có nghiệm với mọi  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

## 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 24.** Giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $y = x^2 - 1$  là

- A.  $m = 0$ . B.  $m = 1$ . C.  $m = 8$ . D.  $m = -1$ .

**Câu 25.** Cho hàm số  $y = (x^4 - 4048x^2 + 2024)^2 + 2025$ . Giá trị nhỏ nhất của hàm số này bằng

- A.  $-2024$ . B.  $2025$ . C.  $1$ . D.  $2024$ .

**Câu 26.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x + \frac{4}{x}$  trên nửa khoảng  $(1; 3]$  bằng

- A.  $5$ . B.  $\frac{13}{3}$ . C.  $4$ . D.  $\frac{5}{9}$ .

**Câu 27.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-1}$  trên  $[0; 1) \cup (1; 3]$  là

- A.  $\frac{7}{2}$ . B.  $-1$ . C.  $\frac{1}{2}$ . D. Không tồn tại.

**Câu 28.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \sqrt{x+2} - x$  là

- A.  $-\frac{5}{4}$ . B.  $\sqrt{3} - 1$ . C.  $\frac{9}{4}$ . D.  $2$ .

**Câu 29.** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$  tương ứng là  $m$  và  $n$ . Khi đó giá trị  $m + 3n$  bằng

- A.  $m + 3n = 6$ . B.  $m + 3n = 4$ . C.  $m + 3n = 3$ . D.  $m + 3n = 2$ .

**Câu 30.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$  trên  $\mathbb{R}$  là

- A.  $1$ . B.  $\frac{5}{3}$ . C.  $\frac{4}{3}$ . D.  $0$ .

**Câu 31.** Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x + \frac{4}{x^2}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

- A.  $\min_{(0; +\infty)} y = 5$ . B.  $\min_{(0; +\infty)} y = 3$ . C.  $\min_{(0; +\infty)} y = 4$ . D.  $\min_{(0; +\infty)} y = 8$ .

**Câu 32.** Hàm số  $y = f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 1$  đạt giá trị nhỏ nhất tại  $x = 0$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $S = a + b$  là

- A. 2. B. 0. C. -2. D. -1.

**Câu 33.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 3x + \frac{4}{x^2}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$  là

- A.  $\min_{x \in (0; +\infty)} y = 7$ . B.  $\min_{x \in (0; +\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$ . C.  $\min_{x \in (0; +\infty)} y = \frac{33}{5}$ . D.  $\min_{x \in (0; +\infty)} y = 2\sqrt[3]{9}$ .

**Câu 34.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \sqrt{4+x} + \sqrt{4-x} - 4\sqrt{(4+x)(4-x)} + 5$  bằng

- A. 10. B.  $5 - 2\sqrt{2}$ . C. -7. D.  $5 + 2\sqrt{2}$ .

**Câu 35.** Giá trị lớn nhất  $M$ , giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $y = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$  là

- A.  $M = -1; m = -\frac{3}{2}$ . B.  $M = 3; m = -1$ . C.  $M = 3; m = -\frac{3}{2}$ . D.  $M = \frac{3}{2}; m = -3$ .

**Câu 36.** Giá trị lớn nhất  $M$ , giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $y = \sin^4 x - 4\sin^2 x + 5$  là

- A.  $M = 2; m = -5$ . B.  $M = 5; m = 2$ . C.  $M = 5; m = -2$ . D.  $M = -2; m = -5$ .

**Câu 37.** Hàm số  $y = -2\sin^3 x + 3\cos 2x - 6\sin x + 4$  có giá trị lớn nhất bằng

- A. -6. B. -7. C. 8. D. 9.

**Câu 38.** Cho hàm số  $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$ . Gọi  $M$  là giá trị lớn nhất và  $m$  là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề đúng.

- A.  $M = m + \frac{2}{3}$ . B.  $M = m + 1$ . C.  $M = \frac{3}{2}m$ . D.  $M = m + \frac{3}{2}$ .

**Câu 39.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x(x+2)(x+4)(x+6) + 5$  trên nửa khoảng  $[-4; +\infty)$  là

- A. -8. B. -11. C. -17. D. -9.

#### 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 40.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                                                | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Nếu $\min_{\mathbb{R}} f(x) = m$ thì $\exists x_1 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_1) = m$ và $f(x) > m, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1\}$ .    |   |   |
| b) Nếu $\max_{\mathbb{R}} f(x) = M$ thì $\exists x_2 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_2) = M$ và $f(x) \leq M, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_2\}$ . |   |   |
| c) Nếu $\max_{\mathbb{R}} f(x) = M$ và $\min_{\mathbb{R}} f(x) = m$ thì $M > m$ .                                                                        |   |   |
| d) Nếu $\min_{\mathbb{R}} f(x) = m$ thì $f(x) \geq m, \forall x \in \mathbb{R}$ .                                                                        |   |   |

**Câu 41.** Cho hàm số  $y = x^4 - 2x^2$ . Khi đó

| Phát biểu                                                               | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số không có giá trị lớn nhất trên tập xác định.                  |   |   |
| b) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 1.                                   |   |   |
| c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng $(2; +\infty)$ bằng 0.       |   |   |
| d) Phương trình $f(x) + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt khi $-1 < m < 0$ . |   |   |

**Câu 42.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $\mathbb{R}$  là 0. Khi đó

| Phát biểu                                | Đ | S |
|------------------------------------------|---|---|
| a) $\exists x_0, f(x_0) = 0.$            |   |   |
| b) $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$ |   |   |

| Phát biểu                                   | Đ | S |
|---------------------------------------------|---|---|
| c) $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$    |   |   |
| d) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0.$ |   |   |

**Câu 43.** Cho hàm số  $y = x + \frac{1}{x}$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                   | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên $(0; 3)$ khi $x = 2.$                   |   |   |
| b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên tập xác định bằng 2.                    |   |   |
| c) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $(0; 3)$ bằng $\frac{10}{3}.$           |   |   |
| d) Có đúng 2 giá trị nguyên của $m$ để phương trình $f(x) = m$ có 1 nghiệm. |   |   |

**Câu 44.** Cho hàm số  $f(x) = x^2 + 4 \ln(3 - x)$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                            | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}.$                                           |   |   |
| b) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4.                                               |   |   |
| c) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên $(-\infty; 2)$ tại $x = 1.$                      |   |   |
| d) Không giá trị nguyên $m$ để phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm dương phân biệt. |   |   |

**Câu 45.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 2024$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                              | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên tập xác định.               |   |   |
| b) Với $m = 1, \max_{(-1,2)} f(x) = 2023.$                                             |   |   |
| c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ có $b - a$ lớn nhất bằng 2.                 |   |   |
| d) Có 2 nguyên của $m$ sao cho hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$ . |   |   |

## 5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 46.** Cho hàm số  $y = \frac{4x}{1+x^2}$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $(-2; 2)$ . Tính  $M \cdot m$ . KQ:

**Câu 47.** Tìm số giá trị của tham số thực  $m$  để hàm số  $y = m \sin x + 7x - 5m + 3$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ ? KQ:

**Câu 48.** Cho hàm số  $y = f(x) = x^4 - (m+2)x^3 + mx + 3$ , với  $m$  là tham số. Trong trường hợp giá trị nhỏ nhất của  $f(x)$  đạt giá trị lớn nhất hãy tính  $f(3)$ . KQ:

**Câu 49.** Cho biểu thức  $P = \log_a \frac{a^2}{\sqrt{b}} - \log_b a^6$  (với  $a, b$  là các số thực dương lớn hơn 1). Giá trị lớn nhất của  $P$  là  $-\frac{m}{n}$ , với  $m, n \in \mathbb{N}$  và  $\frac{m}{n}$  tối giản. Tính  $mn$ . KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 50.** Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^4 - 38x^2 + 120x + 4m|$  trên đoạn  $[0; 2]$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm  $m$ . KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 51.** Cho hàm số  $f(x) = -x^3 + 3x$  và  $g(x) = |f(2 + \sin x) + m|$  ( $m$  là tham số thực). Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của  $m$  thỏa mãn  $\max_{\mathbb{R}} g(x) + \min_{\mathbb{R}} g(x) = 50$ ? KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

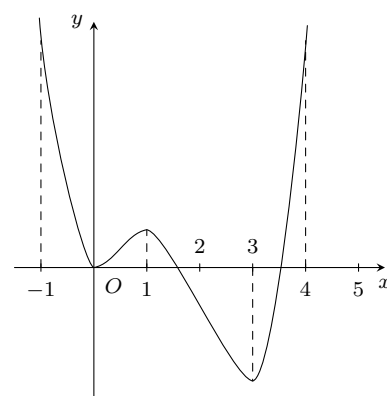
**DẠNG 3****Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất dựa vào đồ thị, bảng biến thiên**

- ☑ Dựa vào đồ thị, bảng biến thiên của hàm số  $f(x)$ , xác định điểm cao nhất, thấp nhất trên khoảng và từ đó xác định giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.
- ☑ Dựa vào đồ thị, bảng biến thiên, bảng xét dấu của đạo hàm  $f'(x)$ , lập bảng biến thiên của  $f(x)$  và từ đó kết luận min, max.

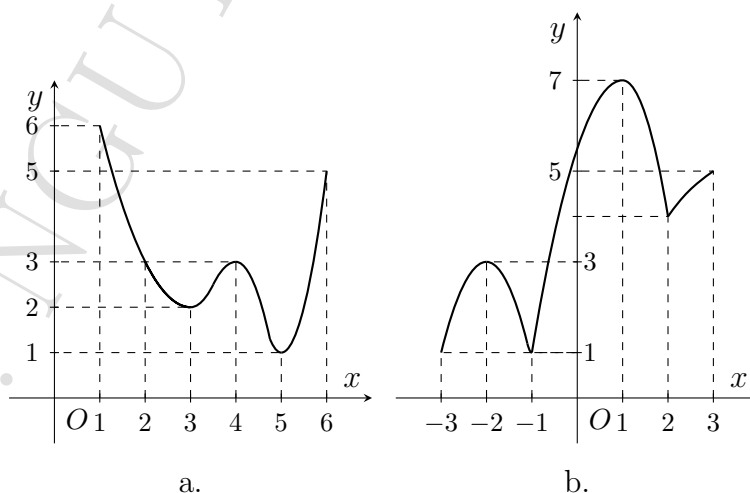
**1****Ví dụ mẫu****Ví dụ 18 (Mức độ 1).**

Cho hàm số  $y = f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$  có một phần đồ thị như hình bên. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên

- a) Nửa khoảng  $(-1; 4]$ ;
- b) Đoạn  $[-1; 1]$ .



**Ví dụ 19 (Mức độ 2).** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số có đồ thị được cho ở hình dưới.



**Ví dụ 20.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

|         |           |             |     |     |           |     |     |
|---------|-----------|-------------|-----|-----|-----------|-----|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$        | $0$ | $1$ | $+\infty$ |     |     |
| $f'(x)$ | $-$       | $\parallel$ | $-$ | $0$ | $+$       | $0$ | $-$ |

- a) Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên  $(0; +\infty)$  tại  $x$  bằng bao nhiêu?  
 b) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên  $(-1; 1)$  tại  $x$  bằng bao nhiêu?

**Ví dụ 21.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên đoạn  $[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]$  và có bảng biến thiên như hình vẽ

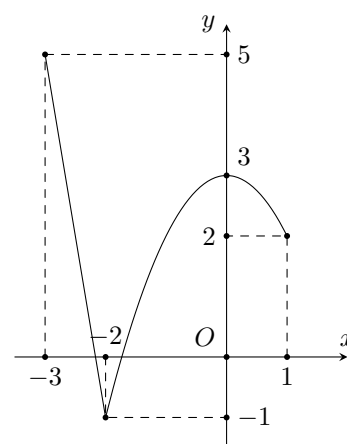
|      |             |      |      |             |     |
|------|-------------|------|------|-------------|-----|
| $x$  | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $1$  | $\sqrt{5}$  |     |
| $y'$ | $+$         | $0$  | $-$  | $0$         | $+$ |
| $y$  | $0$         | $2$  | $-2$ | $2\sqrt{5}$ |     |

- a) Tìm  $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} f(x)$ ;  
 b) Tìm  $\min_{(-1; 2)} f(x)$ ;  
 c) Tìm  $\max_{[-\sqrt{3}; 1]} f(x)$ .

**Ví dụ 22.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-3; 1]$  và có đồ thị như hình vẽ. Khi đó

| Phát biểu                                                                                     | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\min_{[-3; 1]} f(x) = -2$ .                                                               |   |   |
| b) $\max_{[-3; 1]} f(x) = 3$ .                                                                |   |   |
| c) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-2; 1]$ bằng 2.                |   |   |
| d) Có đúng 3 giá trị nguyên của $m$ để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm trên $[-3; 1]$ . |   |   |

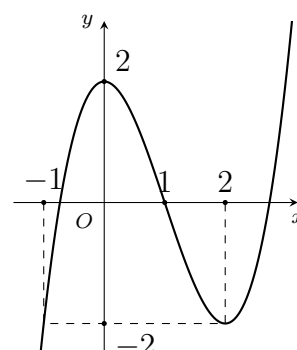


## 2 Bài tập tự luận

**Bài 17.**

Cho hàm số  $f(x)$  có đồ thị như hình vẽ.

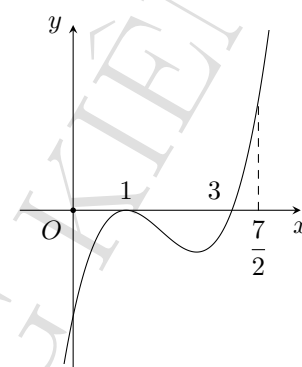
- a) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $(0; +\infty)$ ;  
 b) Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên  $(-\infty; 2)$  tại  $x$  bằng bao nhiêu?  
 c) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $g(x) = f(\sin x) + 3$





**Bài 18.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Hàm số  $y = f(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $\left[0; \frac{7}{2}\right]$  tại điểm có hoành độ bằng bao nhiêu?



**Bài 19.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ

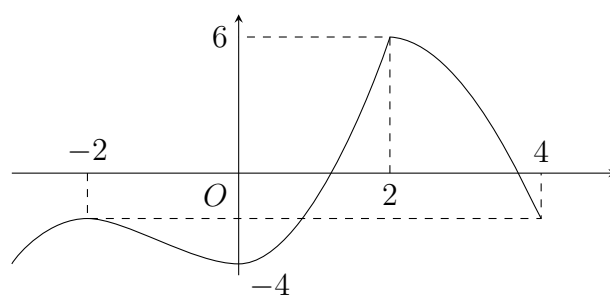
|         |           |      |     |               |           |
|---------|-----------|------|-----|---------------|-----------|
| $t$     | $-\infty$ | $-2$ | $2$ | $\frac{5}{2}$ | $+\infty$ |
| $f'(t)$ |           | $-$  |     | $0$           | $+$       |
| $f(t)$  | $+\infty$ |      | $2$ |               | $+\infty$ |

The table is accompanied by a diagram showing a shaded region between  $t = -2$  and  $t = 2$ . Arrows indicate that the function values at the boundaries of this interval are  $22$  at  $t = -2$  and  $\frac{7}{4}$  at  $t = 2$ .

- Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên tập xác định.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $(2; 10)$ .
- Phương trình  $f(x^2) = 3$  có bao nhiêu nghiệm?

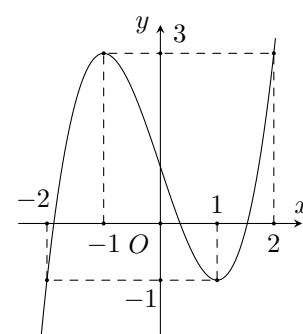
**Bài 20.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  trên  $[-2; 4]$  như hình vẽ. Gọi  $S$  là tập chứa các giá trị của  $m$  để hàm số  $y = (f(2-x) + m)^2$  có giá trị lớn nhất trên đoạn  $[-2; 4]$  bằng 49. Tính tổng các phần tử tập  $S$ .

**Bài 21.**

Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ.

- Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $[-2; 2]$ .
- Tìm tập hợp các giá trị của  $m$  để  $f(x) = m$  có nghiệm trên  $(-1; 2)$ .
- Tìm tập hợp các giá trị  $a$  để  $f(x) > a$ , với mọi  $x \in (-1; 1)$ .
- Xét hàm số  $g(x) = m^2 - 3m - 4 + f(2x^3 + x - 1)$ . Tìm các giá trị của  $m$  để  $\max_{x \in [0; 1]} g(x) = 3$ .

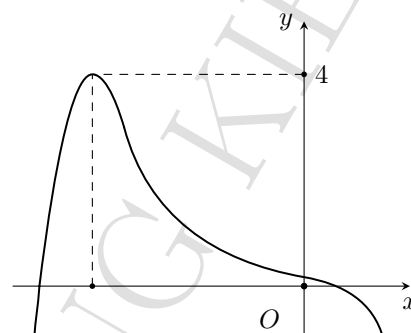


### 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

#### Câu 52.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  là

- A. -5. B. 0. C. -4. D. 4.



Câu 53. Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây là sai?

|      |           |      |     |     |           |           |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |           |
| $y'$ |           | $-$  | $0$ | $+$ | $0$       | $+$       |
| $y$  | $+\infty$ |      | $5$ |     | $4$       | $+\infty$ |

- A. Hàm số có 3 điểm cực trị.  
 B. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 4.  
 C. Hàm số đồng biến trong các khoảng  $(-1; 0)$  và  $(1; +\infty)$ .  
 D. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 5.

#### Câu 54.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên trên  $[-5; 7]$  như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

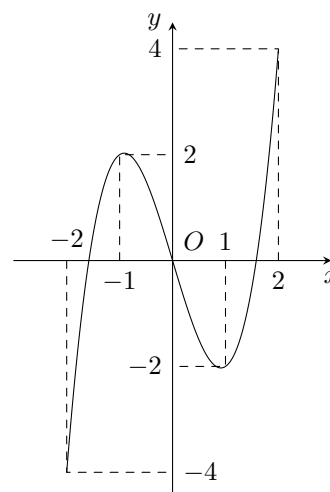
- A.  $\min_{[-5; 7]} f(x) = 2$ . B.  $\max_{[-5; 7]} f(x) = 6$ .  
 C.  $\min_{[-5; 7]} f(x) = 6$ . D.  $\max_{[-5; 7]} f(x) = 9$ .

|      |      |     |     |
|------|------|-----|-----|
| $x$  | $-5$ | $1$ | $7$ |
| $y'$ | $-$  | $0$ | $+$ |
| $y$  | $6$  | $2$ | $9$ |

#### Câu 55.

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên đoạn  $[-2; 2]$  và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn  $[-2; 2]$ . Giá trị của  $M - m$  bằng

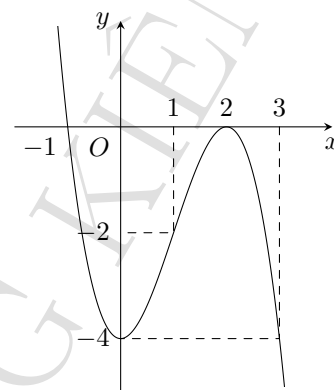
- A. 0. B. 8. C. 4. D. 2.



**Câu 56.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$  có đồ thị bên dưới. Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn  $[1; 3]$ . Giá trị của  $M + m$  bằng

- A.** 4.                      **B.** -6.                      **C.** -2.                      **D.** -4.



**Câu 57.** Cho hàm số  $f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau

|      |           |   |    |           |
|------|-----------|---|----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 1 | 3  | $+\infty$ |
| $y'$ | +         | 0 | -  | +         |
| $y$  | $-\infty$ | 2 | -1 | $+\infty$ |

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** Hàm số có đúng một cực trị.  
**B.** Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 3.  
**C.** Hàm số đạt cực đại tại  $x = 1$  và đạt cực tiểu tại  $x = 3$ .  
**D.** Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng 1.

**Câu 58.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên trên  $[-5; 7)$  như sau

|      |           |    |   |   |           |
|------|-----------|----|---|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | -5 | 1 | 7 | $+\infty$ |
| $y'$ |           | -  | 0 | + |           |
| $y$  |           | 5  | 2 | 9 |           |

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.**  $\max_{[-5; 7)} f(x) = 6$  và  $\min_{[-5; 7)} f(x) = 2$ .  
**B.**  $\max_{[-5; 7)} f(x) = 9$  và  $\min_{[-5; 7)} f(x) = 6$ .  
**C.**  $\min_{[-5; 7)} f(x) = 2$  và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên  $[-5; 7)$ .  
**D.**  $\max_{[-5; 7)} f(x) = 9$  và  $\min_{[-5; 7)} f(x) = 2$ .

**Câu 59.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu đạo hàm dưới đây

|      |           |    |   |   |           |
|------|-----------|----|---|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | -1 | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $y'$ | -         | 0  | - | 0 | -         |

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $\max_{(-1;1]} f(x) = f(0)$ .

C.  $\min_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$ .

B.  $\max_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$ .

D.  $\min_{(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$ .

Câu 60.

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để hàm số  $y = f(x)$  có giá trị lớn nhất?

A. 5.

B. Vô số.

C. 4.

D. 3.

|      |           |   |   |   |    |   |           |
|------|-----------|---|---|---|----|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ |   | 1 |   | 3  |   | $+\infty$ |
| $y'$ |           | + | 0 | - | 0  | + |           |
| $y$  | $-\infty$ |   | 0 |   | -4 |   | $m$       |

Câu 61.

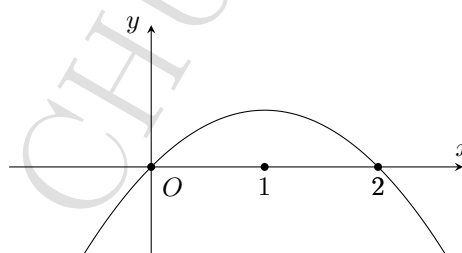
Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm là  $f'(x)$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  cắt  $Ox$  tại các điểm có hoành độ bằng 0, 2 như hình vẽ. Biết  $f(2) + f(4) = f(3) + f(0)$ . Giá trị nhỏ nhất của  $f(x)$  trên  $[0; 4]$  là

A.  $f(1)$ .

B.  $f(4)$ .

C.  $f(2)$ .

D.  $f(0)$ .



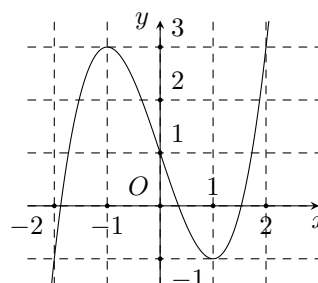
## 4

### Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 62.

Hàm số  $f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Khi đó

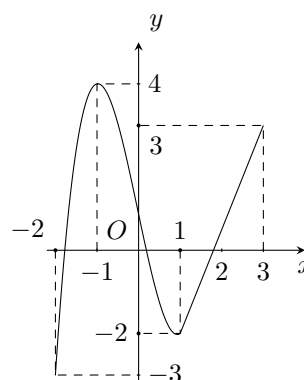
| Phát biểu                                                                                    | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số đồng biến trên $(1; 3)$ .                                                          |   |   |
| b) Hàm số không có giá trị lớn nhất trên $(-2; 2)$ .                                         |   |   |
| c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0; 3)$ đạt được tại $x = -1$ .                         |   |   |
| d) Tồn tại đúng 2 giá trị $m$ để phương trình $f(x) = m$ có đúng một nghiệm trên $(-2; 2)$ . |   |   |



Câu 63.

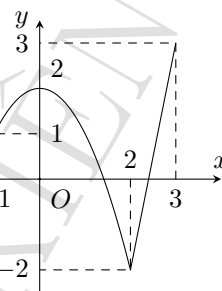
Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-2; 3]$  có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó

| Phát biểu                                                 | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\max_{[-2;0]} f(x) = 4$ .                             |   |   |
| b) $\min_{[-2;3]} f(x) = -2$ .                            |   |   |
| c) Phương trình $f(x) = 3$ có 3 nghiệm trên $[-2; 3]$ .   |   |   |
| d) Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(\sin x)$ bằng 4. |   |   |



Câu 64.

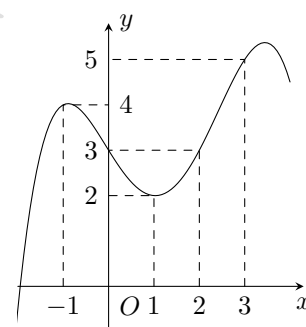
Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-1; 3]$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó



| Phát biểu                                                        | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số có 2 điểm cực trị trên $[-1; 3]$ .                     |   |   |
| b) $\max_{[-1; 3]} f(x) = 3$ .                                   |   |   |
| c) $\min_{[-1; 2]} f(x) = 2$ .                                   |   |   |
| d) Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(3 \cos x  - 1)$ bằng 3. |   |   |

### Câu 65.

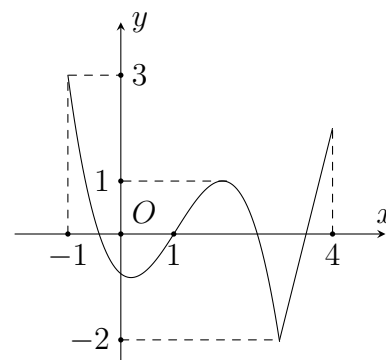
Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó



| Phát biểu                                                    | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số đã cho đồng biến trên $(1; 3)$ .                   |   |   |
| b) $\max_{[-1; 3]} f(x) = 5$ .                               |   |   |
| c) Phương trình $f(x) = 4$ có hai nghiệm trên $(-1; 3)$ .    |   |   |
| d) Tổng GTLN, NN của $y = f( x - 2 )$ trên $[-1; 5]$ bằng 7. |   |   |

### Câu 66.

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[-1; 4]$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó



| Phát biểu                                                                                          | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 4]$ bằng 3.                                              |   |   |
| b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1; 4]$ tại $x = -2$ .                                       |   |   |
| c) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$ .                                                           |   |   |
| d) Có đúng 5 giá trị nguyên của $m \in [-10; 10]$ để $ f(x) + m  < 2m$ , với mọi $x \in [-1; 4]$ . |   |   |

## 5

### Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 67.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ.

|         |           |      |     |                |                |           |
|---------|-----------|------|-----|----------------|----------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $2$            | $+\infty$      |           |
| $f'(x)$ |           | $+$  | $0$ | $+$            | $0$            | $+$       |
| $f(x)$  |           |      |     | $\frac{9}{20}$ | $-\frac{3}{5}$ | $+\infty$ |
|         | $-\infty$ |      |     |                |                |           |

Giá trị lớn nhất của hàm số trên  $(-1; 2)$  bằng bao nhiêu?

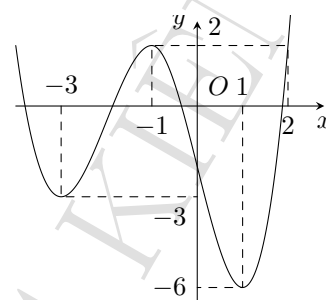
KQ:

**Câu 68.** Cho hàm số  $y = \left| \frac{x^2 - 2mx + 1}{x^2 - x + 2} \right|$ . Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in [-10; 10]$  để giá trị lớn nhất của hàm số lớn hơn hoặc bằng 4?

KQ:

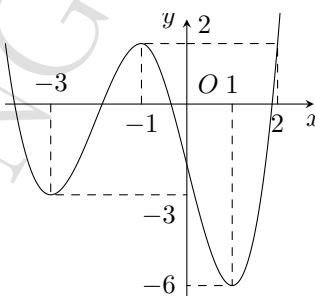
**Câu 69.**

Cho hàm số  $f(x)$  liên tục và có đồ thị như hình vẽ. Tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên  $(-3; 2)$  bằng bao nhiêu? KQ:



**Câu 70.**

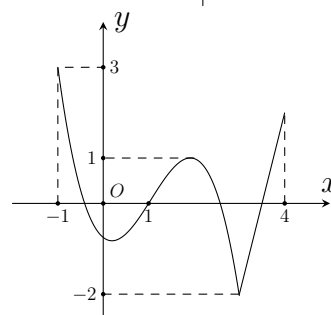
Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f\left(\frac{5x+9}{x+3}\right)$  trên  $[-2; -1]$ . Tích  $M \cdot m$  bằng bao nhiêu? KQ:



**Câu 71.**

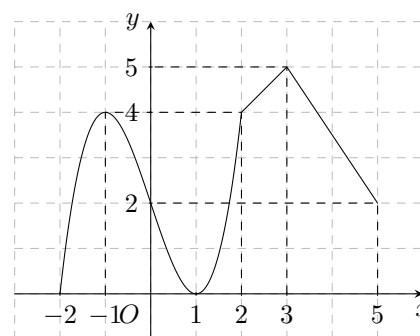
Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-1; 4]$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  thuộc đoạn  $[-10; 10]$  để bất phương trình  $|f(x) + m| < 2m$  đúng với mọi  $x$  thuộc đoạn  $[-1; 4]$ ?

KQ:



**Câu 72.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-2; 3]$  và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $y = f(2 \cos 5x + 1)$ . Tính  $M - 2m$ . KQ:



## DẠNG 4

Ứng dụng GTLN, GTNN tìm điều kiện của tham số  $m$  để phương trình có nghiệm

Xét phương trình  $f(x, m) = 0$ , với  $m$  là tham số.

- ☑ Bước 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình đã cho.
- ☑ Bước 2: Biến đổi để đưa phương trình đã cho về dạng  $g(x) = h(m)$ . Chuyển bài toán về dạng: Tìm điều kiện của  $m$  để phương trình  $g(x) = h(m)$  có nghiệm.
- ☑ Bước 3: Tìm GTLN, GTNN của  $g(x)$  hoặc tập giá trị của  $g(x)$  để suy ra điều kiện của  $m$ .

## 1 Ví dụ mẫu

**Ví dụ 23 (Mức độ 1).** Cho phương trình  $2x^3 - 6x = m$ , với  $m$  là tham số. Tìm điều kiện của  $m$  để phương trình đã cho có nghiệm trên đoạn  $[0; 2]$ .

**Ví dụ 24 (Mức độ 1).** Cho phương trình  $m - 1 = \frac{-2x + 3}{x + 1}$ , với  $m$  là tham số. Tìm điều kiện của  $m$  để phương trình đã cho có nghiệm trên đoạn  $[1; 4]$ .

**Ví dụ 25 (Mức độ 2).** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để phương trình  $2\sqrt{x+1} = x + m$  có nghiệm trên đoạn  $[-3; 3]$ .

**Ví dụ 26 (Mức độ 2).** Cho phương trình  $x^3 - 3mx + 2 = 0$ , với  $m$  là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương  $m$  để phương trình đã cho có nghiệm trên đoạn  $[1; 4]$ ?

- A. 5.                      B. 4.                      C. 3.                      D. 2.

**Ví dụ 27 (Mức độ 1).** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  có bảng biến thiên như sau.

|         |           |      |     |           |           |
|---------|-----------|------|-----|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $5$ | $+\infty$ |           |
| $f'(x)$ | -         | 0    | +   | 0         | -         |
| $f(x)$  | $-\infty$ |      |     | 4         |           |
|         |           | $-2$ |     |           | $+\infty$ |

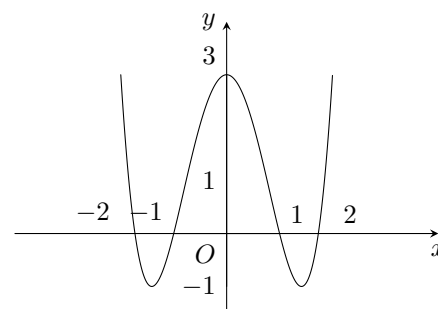
Tập hợp các giá trị của  $m$  để phương trình  $f(x) = 2m$  có nghiệm thuộc đoạn  $[-1; 5]$  là

- A.  $-1 \leq m \leq 4$ .                      B.  $-1 \leq m \leq 2$ .                      C.  $-2 \leq m \leq 4$ .                      D.  $-2 < m < 4$ .

**Ví dụ 28 (Mức độ 2).**

Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  có đồ thị như sau. Tập hợp các giá trị của  $m$  để phương trình  $-3f(x) = m$  có nghiệm thuộc đoạn  $[-1; 1]$  là

- A.  $-2 \geq m \geq 2$ .                      B.  $0 \leq m \leq 3$ .  
C.  $0 \geq m \geq -9$ .                      D.  $-6 \leq m \leq 6$ .



**Ví dụ 29 (Mức độ 3).** Cho phương trình  $m\sqrt{x^2 + 2} = x + m$  (1). Khi đó



| Phát biểu                                                                                        | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Với $m = 1$ , phương trình (1) có nghiệm duy nhất.                                            |   |   |
| b) Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $m \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ .                     |   |   |
| c) Có giá trị nguyên của $m$ sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.                   |   |   |
| d) Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m \in [a; b]$ , khi đó $a \cdot b = -1$ . |   |   |

**Ví dụ 30 (Mức độ 3).** Cho phương trình  $x^2 + (m + 2)x + 4 = (m - 1)\sqrt{x^3 + 4x}$  (1). Khi đó

| Phát biểu                                                                                                   | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Điều kiện xác định của phương trình (1) là $\mathbb{R}$ .                                                |   |   |
| b) Với $x > 0$ , đặt $t = \sqrt{\frac{x^2 + 4}{x}}$ thì phương trình (1) trở thành $t^2 - mt + m + 2 = 0$ . |   |   |
| c) Với $m = 1$ , phương trình (1) có nghiệm.                                                                |   |   |
| d) Trên đoạn $[5; 2024]$ , có 2018 số nguyên $m$ sao cho phương trình (1) có nghiệm.                        |   |   |

**Ví dụ 31 (Mức độ 4).** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương trình  $x + \sqrt{3x^2 + 1} = m^2 - 2m$  có nghiệm trên  $[1; 4)$ ?  
KQ:

**Ví dụ 32 (Mức độ 4).** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương trình

$$\sqrt{21 + 4x - x^2} - \frac{3}{4}x + 3 = m(\sqrt{x + 3} + 2\sqrt{7 - x})$$

có nghiệm?

KQ:

## 2 Bài tập tự luận

**Bài 22 (Mức độ 2).** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $x^4 - 8x^2 - m = 0$  có nghiệm trên đoạn  $[1; 3]$ .

**Bài 23 (Mức độ 2).** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $x + \sqrt{4 - x^2} = m$  có nghiệm.

**Bài 24 (Mức độ 2).** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in [0; 2024]$  sao cho phương trình  $x^4 - 6x^3 + mx^2 - 12x + 4 = 0$  có nghiệm thuộc đoạn  $[1; 8]$ ?

**Bài 25 (Mức độ 3).** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $x + 1 = m\sqrt{2x^2 + 1}$  có nghiệm thuộc đoạn  $[0; 1]$ .

**Bài 26 (Mức độ 3).** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $3\sin^4 x + m\cos^2 x + 2 = 0$  có nghiệm trên đoạn  $[0; \frac{\pi}{4}]$ .

## 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 73 (Mức độ 1).** Cho phương trình  $x^3 - 3x^2 = m$ , với  $m$  là tham số. Điều kiện của  $m$  để phương trình đã cho có nghiệm trên đoạn  $[-1; 1]$  là

- A.  $[-4; 0]$ . B.  $[-4; -2]$ . C.  $[-1; 0]$ . D.  $[-2; 0]$ .

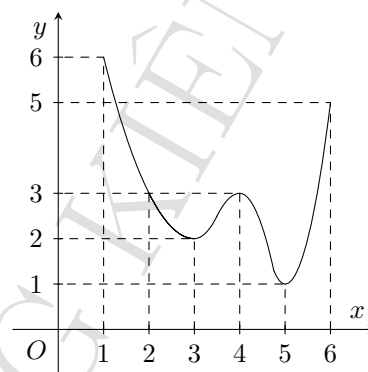
**Câu 74 (Mức độ 1).** Cho phương trình  $-x^2 + 4x + 3 = m$ , với  $m$  là tham số. Điều kiện của  $m$  để phương trình đã cho có nghiệm trên đoạn  $[-2; 5]$  là

- A.  $[-9; -2]$ . B.  $[-9; 7]$ . C.  $[-2; 7]$ . D.  $[-2; 5]$ .

**Câu 75 (Mức độ 2).**

Cho đồ thị hàm số  $f(x)$  như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên  $m$  để phương trình  $f(x) = m^2$  có nghiệm trên đoạn  $[1; 6]$ ?

- A. 6. B. 2. C. 3. D. 5.



**Câu 76 (Mức độ 1).** Cho bảng biến thiên của hàm số  $f(x)$  như hình bên dưới.

|      |   |                 |           |
|------|---|-----------------|-----------|
| $x$  | 0 | $\frac{4}{3}$   | $+\infty$ |
| $y'$ | – | 0               | +         |
| $y$  | 1 | $-\frac{5}{27}$ | $-\infty$ |

Điều kiện của  $m$  để phương trình  $f(x) = m$  luôn có nghiệm dương là

- A.  $\left[-\frac{5}{27}; 1\right]$ . B.  $\left[-\frac{5}{27}; +\infty\right)$ . C.  $\left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$ . D.  $(-\infty; +\infty)$ .

**Câu 77 (Mức độ 2).** Cho phương trình  $m = \sqrt{4x - 2x^2}$ , với  $m$  là tham số. Để phương trình đã cho có nghiệm thì tập hợp giá trị của  $m$  là  $[0; \sqrt{a}]$ . Tính  $3a + 1$ .

- A. 10. B. 7. C. 4. D. 13.

**Câu 78 (Mức độ 2).** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  trong đoạn  $[-100; 100]$  để phương trình  $2\sqrt{x+1} = x + m$  có nghiệm?

- A. 100. B. 101. C. 102. D. 103.

**Câu 79 (Mức độ 3).** Cho phương trình  $m(\sqrt{x^2 - 2x + 2 + 1}) - x^2 + 2x = 0$  ( $m$  là tham số). Biết rằng tập hợp các giá trị của tham số  $m$  để phương trình có nghiệm thuộc đoạn  $[0; 1 + 2\sqrt{2}]$  là đoạn  $[a; b]$ .

Giá trị của biểu thức  $T = -a + 2b$  là

- A. 4. B.  $\frac{3}{2}$ . C. 3. D.  $\frac{1}{2}$ .

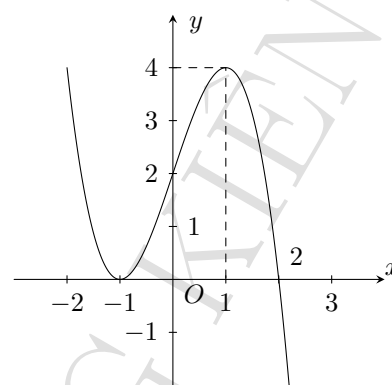
**Câu 80 (Mức độ 3).** Giá trị nhỏ nhất của tham số  $m$  để phương trình  $x^4 + (2 - x)^4 = m$  có nghiệm là  $m_0$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $m_0 \in (-20; -15)$ . B.  $m_0 \in (-12; -8)$ . C.  $m_0 \in \left(\frac{-3}{2}; 0\right)$ . D.  $m_0 \in \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$ .

**Câu 81 (Mức độ 2).**

Cho đồ thị của hàm số  $f(x)$  như hình vẽ. Giá trị của  $m$  để phương trình  $f(x) = m$  có nghiệm trên đoạn  $[0; 2]$  là

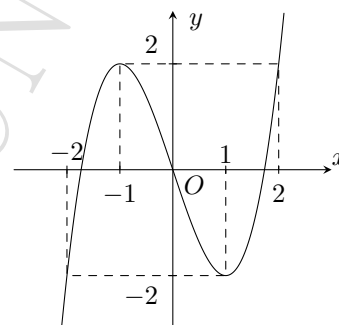
- A.  $0 \leq m \leq 2$ . B.  $1 \leq m \leq 3$ .  
C.  $0 \leq m \leq 4$ . D.  $-1 \leq m \leq 3$ .



**Câu 82 (Mức độ 3).**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(\sqrt{4 + 2f(\cos x)}) = m$  có nghiệm  $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ .

- A. 4. B. 5. C. 3. D. 2.



**4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai**

**Câu 83 (Mức độ 1).** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[-3; 2]$  và có bảng biến thiên như sau.

|        |    |    |   |   |   |
|--------|----|----|---|---|---|
| $x$    | -3 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $f(x)$ | -2 | 3  | 0 | 2 | 1 |

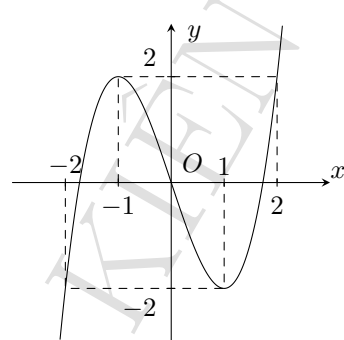
| Phát biểu                                                                                  | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm trên đoạn $[-3; -1]$ khi và chỉ khi $m \in [-2; 3]$ . |   |   |
| b) Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm trên đoạn $[-1; 1]$ khi và chỉ khi $m \in [2; 3]$ .   |   |   |
| c) Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm trên đoạn $[-1; 0]$ khi và chỉ khi $m \in [0; 3]$ .   |   |   |
| d) Phương trình $f(x) = m$ vô nghiệm trên đoạn $[1; 2]$ khi và chỉ khi $m \in [1; 2]$ .    |   |   |

**Câu 84 (Mức độ 2).** Cho phương trình  $x^3 - 3x + 1 = m$  trên đoạn  $[0; 2]$ .

| Phát biểu                                                                                 | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Phương trình có nghiệm trên đoạn $[0; 1]$ khi và chỉ khi $m \in [-1; 1]$ .             |   |   |
| b) Phương trình có nghiệm trên đoạn $[0; 2]$ khi và chỉ khi $m \in [-1; 3]$ .             |   |   |
| c) Phương trình có nghiệm trên đoạn $[1; 2]$ khi và chỉ khi $m \in [-1; 3]$ .             |   |   |
| d) Phương trình có 2 nghiệm phân biệt trên đoạn $[0; 2]$ khi và chỉ khi $m \in [-1; 1]$ . |   |   |

**Câu 85 (Mức độ 3).**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình bên. Cho phương trình  $1 - m - f^2(x) = 0$  (1).



| Phát biểu                                                        | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) (1) có 2 nghiệm phân biệt trên $[-2; -1]$ .                   |   |   |
| b) (1) có nghiệm trên $[-1; 1] \Leftrightarrow m \in [-8; 1]$ .  |   |   |
| c) $m \in (0; 1)$ thì (1) có 2 nghiệm phân biệt trên $[-1; 1]$ . |   |   |
| d) (1) có nghiệm trên $[1; 2] \Leftrightarrow m \in [-8; 1]$ .   |   |   |

**Câu 86 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau.

|         |           |      |     |           |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $+\infty$ |     |           |
| $f'(x)$ |           | $+$  | $0$ | $-$       | $0$ | $+$       |
| $f(x)$  |           |      | $2$ |           | $3$ | $+\infty$ |
|         | $-\infty$ |      |     |           |     |           |

Cho phương trình  $f(x^2 - 2x) - m = 0$ .

| Phát biểu                                                                    | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Phương trình có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in (2; 3)$ .        |   |   |
| b) Khi $m = 3$ thì phương trình có 2 nghiệm.                                 |   |   |
| c) Khi $m = 2$ thì phương trình có 1 nghiệm.                                 |   |   |
| d) Phương trình có nghiệm trên đoạn $[0; 1]$ khi và chỉ khi $m \in [2; 3]$ . |   |   |

**Câu 87 (Mức độ 2).** Cho phương trình  $x + \sqrt{3x^2 + 1} = m$ .

| Phát biểu                                                                    | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Khi $m = 2$ thì phương trình có 2 nghiệm.                                 |   |   |
| b) Phương trình luôn có nghiệm với mọi $m$ .                                 |   |   |
| c) Phương trình có nghiệm trên đoạn $[0; 1]$ khi và chỉ khi $m \in [1; 3]$ . |   |   |
| d) Phương trình vô nghiệm khi $m < \sqrt{\frac{2}{3}}$ .                     |   |   |

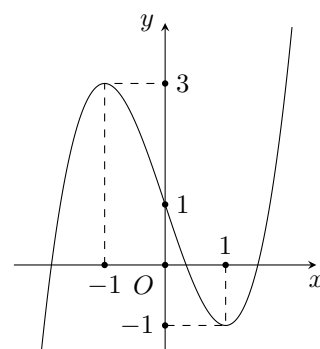
## 5

### Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 88 (Mức độ 3).**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương trình  $f(f(\sin x)) = m$  có nghiệm thuộc khoảng  $(0; \pi)$ ?

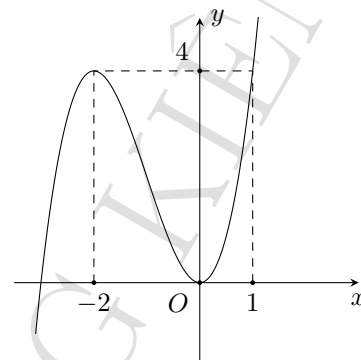
KQ:



**Câu 89 (Mức độ 3).**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ. Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $f(x^2 + 2x - 2) = 3m + 1$  có nghiệm thuộc  $[0; 1]$ . Tổng các phần tử nguyên của tập hợp  $S$  bằng bao nhiêu?

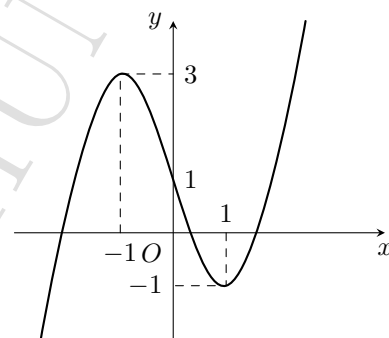
KQ:



**Câu 90 (Mức độ 4).**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ. Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(\sin x) = 3\sin x + m$  có nghiệm thuộc khoảng  $(0; \pi)$ . Tổng các phần tử của  $S$  bằng bao nhiêu?

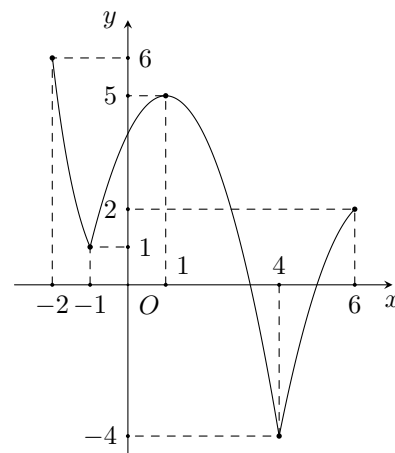
KQ:



**Câu 91 (Mức độ 2).**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-2; 6]$  có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để phương trình  $f(\cos x) = m$  có nghiệm  $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ ?

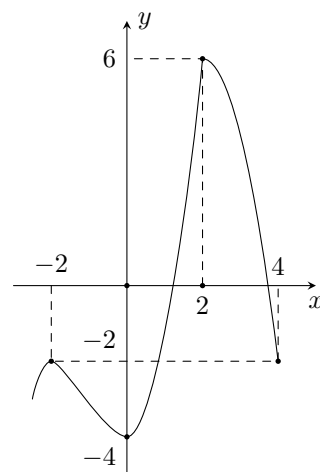
KQ:



**Câu 92 (Mức độ 4).**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2} + 1\right) + x = m$  có nghiệm thuộc đoạn  $[-2; 2]$ ?

KQ:



## DẠNG 5

Ứng dụng GTLN, GTNN tìm điều kiện của tham số  $m$  để bất phương trình có nghiệm đúng với mọi  $x$  thuộc  $(a; b)$ ,  $[a; b]$ 

Xét bất phương trình  $f(x, m) \leq 0$  có nghiệm đúng  $\forall x \in [a; b]$ , với  $m$  là tham số. Biến đổi để đưa phương trình đã cho về một trong hai dạng:

☺  $h(m) \leq g(x), \forall x \in [a; b]$ . Điều này tương đương  $h(m) \leq \min_{[a; b]} g(x)$ .

☺  $h(m) \geq g(x), \forall x \in [a; b]$ . Điều này tương đương  $h(m) \geq \max_{[a; b]} g(x)$ .

Trường hợp  $f(x, m) \geq 0, f(x, m) > 0, f(x, m) < 0$  có nghiệm đúng với mọi  $x$  thuộc  $(a; b), [a; b]$  làm tương tự.

## 1 Ví dụ mẫu

**Ví dụ 33 (Mức độ 1).** Cho bất phương trình  $2x^3 - 6x \geq m$ , với  $m$  là tham số. Tìm điều kiện của  $m$  để bất phương trình đã cho có nghiệm đúng  $\forall x \in [0; 2]$ .

**Ví dụ 34 (Mức độ 1).** Tìm  $m$  để bất phương trình  $x^3 - 2x^2 + x - m - 6 < 0, \forall x \in [-2; 3]$ .

**Ví dụ 35 (Mức độ 2).** Tìm  $m$  để bất phương trình  $\sqrt{\frac{m}{72}x^2 + 1} < \sqrt{x}$  có nghiệm đúng với mọi  $x \in [1; 6]$ .

**Ví dụ 36 (Mức độ 2).** Gọi  $S$  là tập các giá trị nguyên của  $m \in [0; 2024]$  sao cho bất phương trình  $x^2 - m + \sqrt{(1-x^2)^3} \leq 0$  (1) nghiệm đúng với mọi  $x \in [-1; 1]$ . Số phần tử của tập  $S$  là

- A. Vô số. B. 2024. C. 2025. D. 2.

**Ví dụ 37 (Mức độ 1).** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[-3; 1), (1; 11]$  và có bảng biến thiên như sau

|         |                |            |    |
|---------|----------------|------------|----|
| $x$     | -3             | 1          | 11 |
| $f'(x)$ | -              |            | -  |
| $f(x)$  | $-\frac{1}{2}$ | $+\infty$  | 3  |
|         | $\nearrow$     | $\searrow$ |    |
|         |                | $-\infty$  |    |

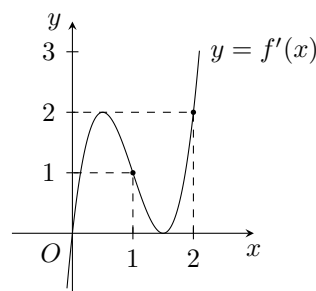
Tìm  $m$  sao cho bất phương trình  $f(x) \geq m + 2$  (1) nghiệm đúng với mọi  $x \in [2; 11]$ .

- A.  $m \leq 1$ . B.  $m \leq 3$ . C.  $m \geq \frac{1}{2}$ . D.  $m < 2$ .

**Ví dụ 38 (Mức độ 2).**

Cho hàm số bậc bốn  $y = f(x)$  có đồ thị  $f'(x)$  như hình bên. Bất phương trình  $f(x) - \frac{x^2}{2} < m$  (1) nghiệm đúng với mọi  $x \in (0; 2)$  khi và chỉ khi

- A.  $m \geq f(1) - \frac{1}{2}$ . B.  $m \geq f(1) + \frac{1}{2}$ .  
C.  $m > f(1) + \frac{1}{2}$ . D.  $m > f(1) - \frac{1}{2}$ .



**Ví dụ 39 (Mức độ 3).** Cho bất phương trình  $4^x - (m+1)2^{x+1} + m \geq 0$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                 | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -1$ .            |   |   |
| b) Bất phương trình không tồn tại nghiệm thuộc $[0; +\infty) \Leftrightarrow m \leq -1$ . |   |   |
| c) Bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 3] \Leftrightarrow m \leq 0$ .         |   |   |
| d) Bất phương trình không tồn tại nghiệm thuộc $[1; 3] \Leftrightarrow m \leq -1$ .       |   |   |

**Ví dụ 40 (Mức độ 3).** Cho bất phương trình  $m(\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1) + x(2 - x) \leq 0$ . Khi đó

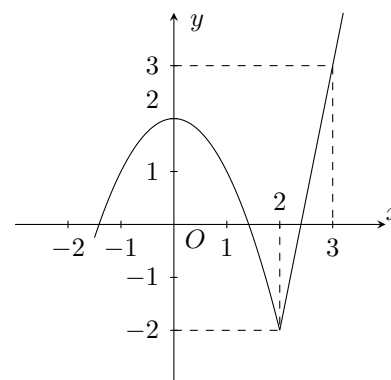
| Phát biểu                                                                                                         | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Bất phương trình đã cho có nghiệm đúng $\forall x \in [0; 1 + \sqrt{3}] \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{2}$ . |   |   |
| b) Bất phương trình đã cho không tồn tại nghiệm thuộc $[0; 1 + \sqrt{3}] \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{2}$ .   |   |   |
| c) Bất phương trình đã cho có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{2}$ .        |   |   |
| d) Bất phương trình đã cho vô nghiệm $\Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{2}$ .                                      |   |   |

**Ví dụ 41 (Mức độ 4).** Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị nguyên của tham số  $m \in [0; 2024]$  để bất phương trình  $x^2 - m + \sqrt{(1 - x^2)^3} \leq 0$  nghiệm đúng với mọi  $x \in [-1; 1]$ . Tập  $S$  có bao nhiêu phần tử?

KQ:

**Ví dụ 42 (Mức độ 4).**

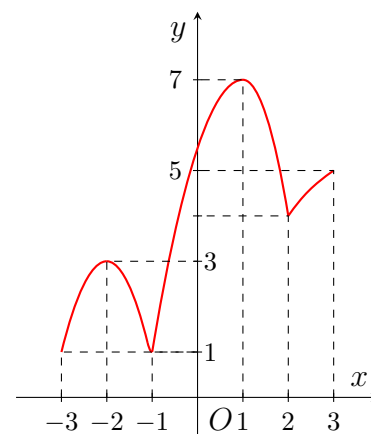
Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[-1; 3]$  và có đồ thị như hình vẽ. Bất phương trình  $f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} \geq m$  có nghiệm thuộc  $[-1; 3]$  khi và chỉ khi  $m \leq a$ . Giá trị của  $a$  là bao nhiêu? KQ:



## 2 Bài tập tự luận

**Bài 27 (Mức độ 3).**

Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm  $m$  để bất phương trình  $f(x) \geq m$  nghiệm đúng trên đoạn  $[-1; 3]$ .





**Bài 28 (Mức độ 2).** Cho bất phương trình  $x^3 - 3x^2 \geq m$ , với  $m$  là tham số. Tìm giá trị của tham số  $m$  để bất phương trình đã cho có nghiệm đúng  $\forall x \in [-1; 1]$ .

**Bài 29 (Mức độ 2).** Cho bất phương trình  $m \geq \sin x + \cos x$ , với  $m$  là tham số. Tìm  $m$  để bất phương trình đã cho có nghiệm đúng  $\forall x \in [0; 2\pi]$ .

**Bài 30 (Mức độ 2).** Cho bất phương trình  $m \geq x \ln x$ , với  $m$  là tham số. Tìm  $m$  để bất phương trình đã cho có nghiệm đúng  $\forall x \in [e^{-2}; e]$ .

**Bài 31 (Mức độ 3).** Cho bất phương trình  $m \geq (x + 1)e^{-x}$ , với  $m$  là tham số. Tìm  $m$  để bất phương trình đã cho có nghiệm đúng  $\forall x \in [-1; 1]$ .

## 3

## Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 93 (Mức độ 1).** Điều kiện của tham số  $m$  để bất phương trình  $x^3 - 4x^2 + 5x - m + 2024 < 0$  có nghiệm đúng với mọi  $x \in [0; 2]$  là

- A.  $m > 2026$ . B.  $m > 2025$ . C.  $m < 2026$ . D.  $m \geq 2025$ .

**Câu 94 (Mức độ 1).** Điều kiện của tham số  $m$  để bất phương trình  $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - m - 3 \geq 0$  có nghiệm đúng với mọi  $x \in (-5; 2)$  là

- A.  $m \geq -\frac{14}{3}$ . B.  $m > -\frac{7}{3}$ . C.  $m < -\frac{14}{3}$ . D.  $m \leq -\frac{14}{3}$ .

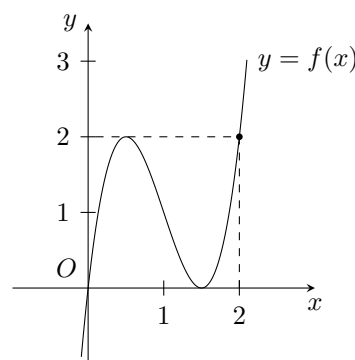
**Câu 95 (Mức độ 2).** Điều kiện của tham số  $m$  để bất phương trình  $\sin^2 x + 2 \sin x - 3m + 2024 \leq 0$  có nghiệm đúng với mọi  $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$  là

- A.  $m < 2027$ . B.  $m \geq \frac{2027}{3}$ . C.  $m \leq \frac{2024}{3}$ . D.  $m > \frac{2027}{3}$ .

**Câu 96 (Mức độ 1).**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số như sau. Điều kiện của tham số  $m$  để bất phương trình  $2f(x) + m - 3 \leq 0$  có nghiệm đúng với mọi  $x \in (0; 2)$  là

- A.  $m \leq -1$ . B.  $m < -1$ . C.  $m \leq 2$ . D.  $m > 2$ .



**Câu 97 (Mức độ 3).** Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị của  $m$  để  $m^2x^4 - (m + 2)x^3 + x^2 + (m^2 - 1)x \geq 0$  nghiệm đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Số phần tử của tập  $S$  là

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

**Câu 98 (Mức độ 2).** Điều kiện của tham số  $m$  để bất phương trình  $x \ln x - 2m > 0$  có nghiệm đúng với mọi  $x \in (0; e]$  là

- A.  $m < -\frac{1}{2e}$ . B.  $m > e$ . C.  $m \geq -\frac{1}{2e}$ . D.  $m \leq e$ .

**Câu 99 (Mức độ 2).** Điều kiện của tham số  $m$  để bất phương trình  $\frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1} \geq m$  có nghiệm đúng với mọi  $x \in [0; 1]$  là

- A.  $m \in (3; +\infty)$ . B.  $m \in (-\infty; 3]$ . C.  $m \in (-\infty; 3)$ . D.  $m \in [3; +\infty)$ .

**Câu 100 (Mức độ 2).** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ ,  $f(a) = 0$  với  $a \in (0; 1)$  và có bảng biến thiên như sau.

|      |           |     |      |           |     |
|------|-----------|-----|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $0$ | $2$  | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$ | $-$  | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $1$ | $-3$ | $+\infty$ |     |

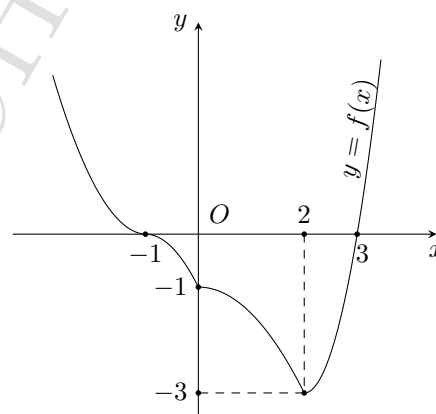
Điều kiện của tham số  $m$  để bất phương trình  $f^2(x) + 3 - m < 0$  có nghiệm đúng với mọi  $x \in [0; 2]$  là

- A.**  $m \in (1; +\infty)$ . **B.**  $m \in (-\infty; -3)$ . **C.**  $m \in (12; +\infty)$ . **D.**  $m \in [12; +\infty)$ .

**Câu 101 (Mức độ 3).**

Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình. Điều kiện để bất phương trình  $2f(x) + x^3 > 2m + 3x^2$  nghiệm đúng với mọi  $x \in (-1; 3)$  là

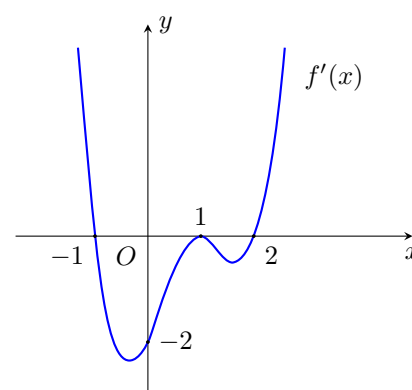
- A.**  $m < -10$ . **B.**  $m < -5$ . **C.**  $m < -3$ . **D.**  $m < -2$ .



**Câu 102 (Mức độ 3).**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số  $f'(x)$  như hình. Điều kiện của tham số  $m$  để bất phương trình  $f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x < m$  có nghiệm đúng với mọi  $x \in [-1; 2]$  là

- A.** 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.



#### 4

#### Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 103 (Mức độ 1).** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên đoạn  $[2; 6]$ . Biết  $\min_{[2; 6]} f(x) = -1$ ,  $\max_{[2; 6]} f(x) = 4$ .

| Phát biểu                                                               | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $f(x) + 2m \geq 0$ có nghiệm trên đoạn $[2; 6]$ là khi $m \leq -2$ . |   |   |
| b) $f(x) - m \leq 0$ có nghiệm trên đoạn $[2; 6]$ là khi $m \geq 4$ .   |   |   |
| c) $2f(x) - m > 0$ có nghiệm trên đoạn $[2; 6]$ là khi $m < -2$ .       |   |   |
| d) $f(x) < -3m$ có nghiệm trên đoạn $[2; 6]$ là khi $m > 7$ .           |   |   |

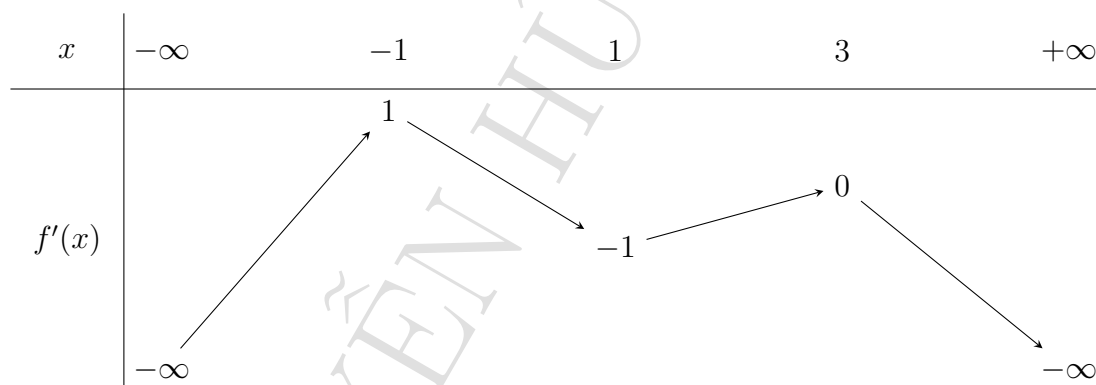
**Câu 104 (Mức độ 2).** Cho hàm số  $f(x) = x + \frac{4}{x-1}$ .

| Phát biểu                                                                             | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) GTLN của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(-3; 1)$ là $-3$ .                             |   |   |
| b) GTNN của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(-3; 1)$ là $-4$ .                             |   |   |
| c) Có 2 giá trị nguyên của $m$ để $f(x) - m \geq 0$ có nghiệm trên khoảng $(-3; 1)$ . |   |   |
| d) $f(x) - m \geq 0$ có nghiệm trên khoảng $(-3; 1)$ là khi $m \leq -3$ .             |   |   |

**Câu 105 (Mức độ 2).** Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị nguyên của tham số  $m$  để bất phương trình  $x^2 - m + \sqrt{(1-x^2)^3} \leq 0$  nghiệm đúng với mọi  $x \in [-1; 1]$ .

| Phát biểu                                                    | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $m \in [-2; 5]$ thì tích các phần tử của tập $S$ là 24.   |   |   |
| b) $m \in [6; 11]$ thì tổng các phần tử của tập $S$ là 51.   |   |   |
| c) $m \in [-7; -1]$ thì số các phần tử của tập $S$ là 6.     |   |   |
| d) $m \in [0; 2024]$ thì số các phần tử của tập $S$ là 2024. |   |   |

**Câu 106 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $y = f(x)$ , biết  $f(1) = -1$  và  $f(2) = -1,93$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có bảng biến thiên như sau.



Bất phương trình  $f(x) - \frac{1}{2}x^2 < m$  nghiệm đúng với mọi  $x \in [1; 2]$ .

| Phát biểu                                    | Đ | S |
|----------------------------------------------|---|---|
| a) $m < -3,93$ .                             |   |   |
| b) Giá trị nguyên nhỏ nhất của $m$ là $-1$ . |   |   |
| c) Giá trị nguyên lớn nhất của $m$ là $3$ .  |   |   |
| d) $m > -\frac{3}{2}$ .                      |   |   |

**Câu 107 (Mức độ 3).** Cho bất phương trình  $m(\sqrt{2-2x+x^2}+1) + x(2-x) \leq 0$  nghiệm đúng trên đoạn  $[0; 2]$ .

| Phát biểu | Đ | S |
|-----------|---|---|
|-----------|---|---|

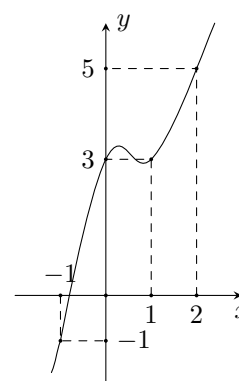
| Phát biểu                                                 | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------|---|---|
| a) Nếu $m \in [-3; 2]$ thì có 3 giá trị nguyên của $m$ .  |   |   |
| b) Nếu $m \in [-9; -5]$ thì có 5 giá trị nguyên của $m$ . |   |   |
| c) Nếu $m \in [0; 4]$ thì có 5 giá trị nguyên của $m$ .   |   |   |
| d) Nếu $m \in [-1; 2]$ thì có 0 giá trị nguyên của $m$ .  |   |   |

## 5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

### Câu 108 (Mức độ 1).

Cho hàm số,  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  trong đoạn  $[0; 20]$  thỏa mãn bất phương trình  $f(x) \leq m$  có nghiệm đúng với mọi  $x \in [-1; 2]$ ?

KQ:



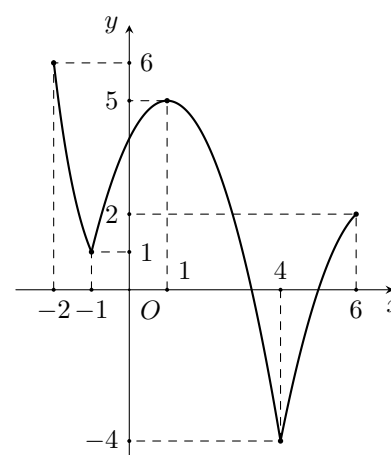
**Câu 109 (Mức độ 4).** Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị của  $m$  để  $m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x \geq 0$  nghiệm đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Tính số phần tử của tập  $S$ .

KQ:

### Câu 110 (Mức độ 2).

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-2; 6]$ , có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  thỏa mãn bất phương trình  $f(\sin x) \geq m$  có nghiệm đúng với mọi  $x \in [-2; 6]$ ?

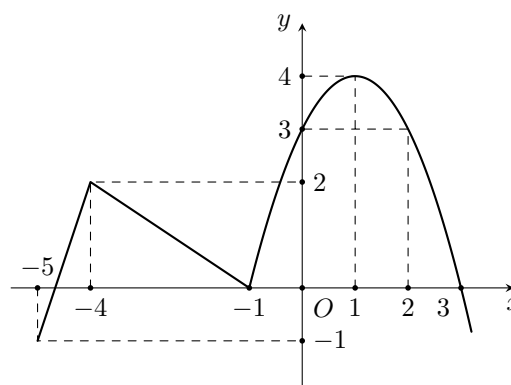
KQ:



### Câu 111 (Mức độ 3).

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[-5; 3]$ , có đồ thị như hình vẽ. Tổng các giá trị nguyên dương của tham số  $m$  thỏa mãn bất phương trình  $f(\sqrt{4x-x^2}) \geq m$  có nghiệm đúng với mọi  $x \in [0; 4]$  bằng bao nhiêu?

KQ:

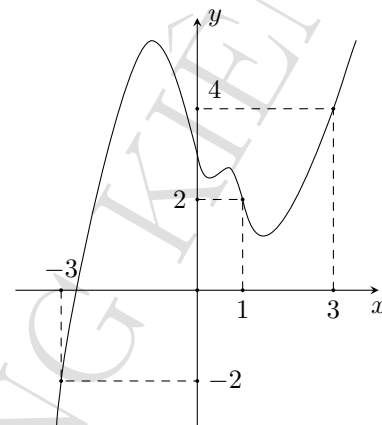


**Câu 112 (Mức độ 4).**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Điều kiện của tham số  $m$  để bất phương trình  $m \geq 2[f(x+1) - 2x] - x^2 - 4$  nghiệm đúng với mọi  $x \in [-4, 2]$  là  $m \geq af(b) + c$ . Giá trị của  $abc$  bằng bao nhiêu?

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**DẠNG 6****Ứng dụng GTLN, GTNN để tìm điều kiện bất phương trình có nghiệm trên một khoảng, đoạn**

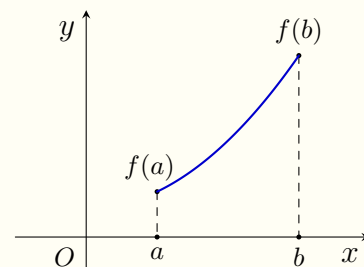
☑ Hàm số  $y = f(x)$  không tồn tại GTLN, GTNN trên khoảng  $(a; b)$ .

—  $m > f(x)$  có nghiệm trên  $(a; b) \Leftrightarrow m > \min_{[a; b]} f(x) = f(a)$ .

—  $m \geq f(x)$  có nghiệm trên  $(a; b) \Leftrightarrow m \geq \min_{[a; b]} f(x) = f(a)$ .

—  $m < f(x)$  có nghiệm trên  $(a; b) \Leftrightarrow m < \max_{[a; b]} f(x) = f(b)$ .

—  $m \leq f(x)$  có nghiệm trên  $(a; b) \Leftrightarrow m \leq \max_{[a; b]} f(x) = f(b)$ .



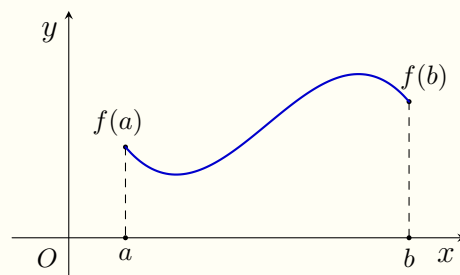
☑ Hàm số  $y = f(x)$  có GTLN và GTNN trên khoảng  $(a; b)$ .

—  $m > f(x)$  có nghiệm trên  $(a; b) \Leftrightarrow m > \min_{[a; b]} f(x)$ .

—  $m \geq f(x)$  có nghiệm trên  $(a; b) \Leftrightarrow m \geq \min_{[a; b]} f(x)$ .

—  $m < f(x)$  có nghiệm trên  $(a; b) \Leftrightarrow m < \max_{[a; b]} f(x)$ .

—  $m \leq f(x)$  có nghiệm trên  $(a; b) \Leftrightarrow m \leq \max_{[a; b]} f(x)$ .

**1****Ví dụ mẫu**

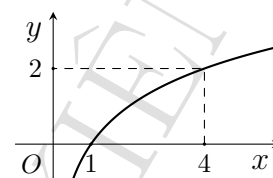
**Ví dụ 43 (Mức độ 1).** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ.

|         |           |      |      |           |     |
|---------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-3$ | $4$  | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $2$  | $-2$ | $+\infty$ |     |

Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  để bất phương trình  $f(x) \leq m$  có nghiệm  $x \in (-3; +\infty)$ .

**Ví dụ 44 (Mức độ 1).**

Cho hàm số  $y = f(x) = \log_2 x$  có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  để bất phương trình  $f(x) \geq m$  có nghiệm  $x \in (0; 4)$ .



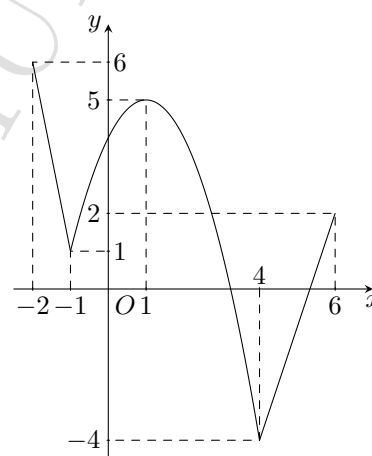
**Ví dụ 45 (Mức độ 2).** Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  để bất phương trình  $e^x \geq m$  có nghiệm  $x \in [0; 1]$ .

**Ví dụ 46 (Mức độ 2).** Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  để bất phương trình  $x^3 + 3x + 1 \leq m$  có nghiệm  $x \in [-1; 1]$ .

**Ví dụ 47 (Mức độ 2).** Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  để bất phương trình  $x - m \leq mx - 3$  có nghiệm  $x \in [0; 3]$ .

**Ví dụ 48 (Mức độ 3).**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-2; 6]$  có đồ thị như hình vẽ. Khi đó



| Phát biểu                                                                                                  | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 4]$ bằng 6.                                      |   |   |
| b) Bất phương trình $f(x) \geq 5$ có 2 nghiệm nguyên trên đoạn $[-2; 6]$ .                                 |   |   |
| c) Bất phương trình $f(x) > m$ có nghiệm $x \in [-1; 1]$ khi và chỉ khi $m < 5$ .                          |   |   |
| d) Có 1 giá trị nguyên âm của tham số $m$ để bất phương trình $f(x) + x \leq m$ có nghiệm $x \in [4; 6]$ . |   |   |

**Ví dụ 49 (Mức độ 2).** Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  để bất phương trình  $\frac{(x-2)^2}{x-1} > m$  có nghiệm  $x \in [2; 3]$ .

**Ví dụ 50 (Mức độ 2).** Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  để bất phương trình  $\ln x - x \leq m$  có nghiệm  $x \in \left(\frac{1}{e}; e\right)$ .

**Ví dụ 51 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $y = f(x) = x^3 - 3x + 5$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                           | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\max_{[0;3]} f(x) = 23$ .                                                                       |   |   |
| b) Hàm số đã cho không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ .                                      |   |   |
| c) Bất phương trình $f(x) < m$ có nghiệm trên đoạn $[0; 2]$ khi và chỉ khi $m > 3$ .                |   |   |
| d) Bất phương trình $f(x) - mx - 3 \geq 0$ có nghiệm trên đoạn $[1; 2]$ khi và chỉ khi $m \leq 1$ . |   |   |

**Ví dụ 52 (Mức độ 3).** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để bất phương trình  $\log_2 x + x^2 - mx \geq 0$  có nghiệm  $x \in [1; 2]$ ? KQ:

**2**

**Bài tập tự luận**

**Bài 32 (Mức độ 2).** Tìm  $m$  để bất phương trình  $x^4 - 4x^2 + 9 > m$  có nghiệm trên đoạn  $[-\sqrt{3}; 2]$ .

**Bài 33 (Mức độ 2).** Tìm giá trị của tham số  $m$  để bất phương trình  $\frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1} \geq m$  có nghiệm  $x \in [0; 1]$ .

**Bài 34 (Mức độ 2).** Tìm  $m$  để bất phương trình  $x - \sqrt{16 - x^2} - m \leq 0$  có nghiệm.

**Bài 35 (Mức độ 2).** Tìm  $m$  để bất phương trình  $e^{x^3 - 3x + 3} \geq m$  có nghiệm trên đoạn  $[0; 2]$ .

**Bài 36 (Mức độ 3).** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để bất phương trình  $m(x - 1) - \sqrt{x - 4} \leq m + 1$  có nghiệm.

## 3

## Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 113 (Mức độ 2).** Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  để bất phương trình  $x^5 - 5x \geq m$  có nghiệm trên  $[-2; 0]$ .

- A.  $m \leq 22$ .      B.  $m \leq 0$ .      C.  $m \leq -22$ .      D.  $m \leq 4$ .

**Câu 114 (Mức độ 2).** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để bất phương trình  $x^3 - 2x^2 - 4x + 5 - 2m > 0$  có nghiệm trên đoạn  $[1; 3]$ .

- A.  $m < -\frac{3}{2}$ .      B.  $m < 0$ .      C.  $m < 1$ .      D.  $m < 2$ .

**Câu 115 (Mức độ 1).** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau

|      |           |   |   |           |
|------|-----------|---|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 1 | 2 | $+\infty$ |
| $y'$ | +         | 0 | - | +         |
| $y$  | $-\infty$ | 3 | 0 | $+\infty$ |

Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  để bất phương trình  $f(x) > m$  có nghiệm trên  $(-\infty; 2)$ .

- A.  $m < 1$ .      B.  $m < 0$ .      C.  $m < 2$ .      D.  $m < 3$ .

**Câu 116 (Mức độ 1).** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

|        |           |    |           |   |           |
|--------|-----------|----|-----------|---|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | -2 | 0         | 3 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | 1  | $+\infty$ | 2 | $+\infty$ |

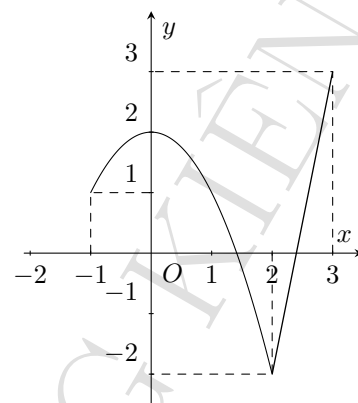
Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  để bất phương trình  $f(x) \leq m$  có nghiệm trên  $(-\infty; 3)$ .

- A.  $m \geq 2$ .      B.  $m \geq 1$ .      C.  $m \leq 1$ .      D.  $m \leq 2$ .

**Câu 117 (Mức độ 1).**



Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-1; 3]$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để bất phương trình  $f(x) \geq m$  có nghiệm trên  $[-1; 2]$ .



- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

**Câu 118 (Mức độ 2).** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in [-5; 5]$  để bất phương trình  $x^2 - 2 \ln x \leq m$  có nghiệm trên  $[e^{-1}; e]$ ?

- A. 11. B. 6. C. 4. D. 5.

**Câu 119 (Mức độ 2).** Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  để bất phương trình  $x + 1 \leq m(x - 2)$  có nghiệm trên khoảng  $(-1; 1)$ .

- A.  $m < 0$ . B.  $m \leq 0$ . C.  $m \geq -2$ . D.  $m > -2$ .

**Câu 120 (Mức độ 3).** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để bất phương trình  $x^2 - (m - 1)x + 4 - m \geq 0$  có nghiệm trên đoạn  $[0; 4]$ .

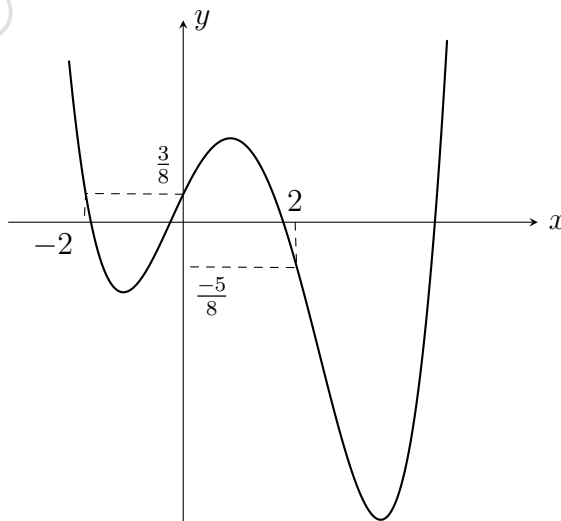
- A.  $m < 4$ . B.  $m \leq \frac{24}{5}$ . C.  $m < \frac{24}{5}$ . D.  $m \leq 4$ .

**Câu 121 (Mức độ 3).**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị  $y = f'(x)$  như hình bên.

Xét hàm số  $g(x) = f(x) + \frac{x^3}{24} + \frac{x^2}{8} - \frac{3x}{8}$ . Bất phương trình  $g(x) \leq m$  có nghiệm trên đoạn  $[-2; 2]$  khi và chỉ khi

- A.  $m \geq g(-1)$ . B.  $m \geq g(-2)$ .  
C.  $m \geq g(0)$ . D.  $m \geq g(2)$ .



**Câu 122 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|         |           |      |     |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$ | $-$       |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $4$  | $2$ | $3$ | $-\infty$ |

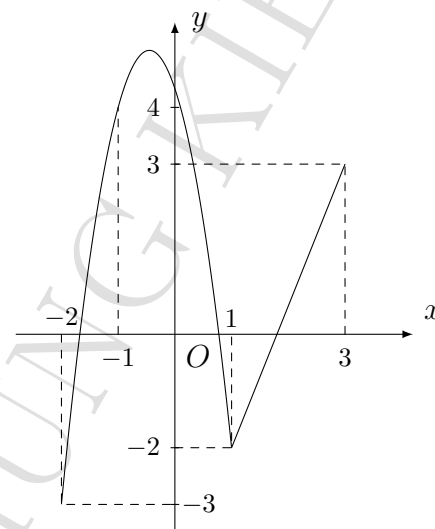
Bất phương trình  $(x^2 + 1)f(x) \geq m$  có nghiệm trên khoảng  $(-1; 2)$  khi và chỉ khi

- A.  $m < 10$ . B.  $m \leq 15$ . C.  $m < 27$ . D.  $m < 15$ .

## 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

### Câu 123 (Mức độ 3).

Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-2; 3]$  có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Khi đó



| Phát biểu                                                                                                                          | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Ký hiệu $M, m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ . Khi đó $M + m = 0$ . |   |   |
| b) Bất phương trình $f(x) > 3$ có 2 nghiệm nguyên trên đoạn $[-2; 3]$ .                                                            |   |   |
| c) Bất phương trình $f(x) < m$ có nghiệm $x \in [-1; 3]$ khi và chỉ khi $m > -3$ .                                                 |   |   |
| d) Có đúng 4 giá trị nguyên âm của tham số $m$ để bất phương trình $f(x) - 2x \leq m$ có nghiệm $x \in [0; 1]$ .                   |   |   |

**Câu 124 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = -x(x - 2)^2(x - 3), \forall x \in \mathbb{R}$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                          | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.                                                            |   |   |
| b) $\max_{[0; 4]} f(x) = f(3)$ .                                                                   |   |   |
| c) Bất phương trình $f(x) \leq m$ có nghiệm trên $(-\infty; 0)$ khi và chỉ khi $m \geq f(0)$ .     |   |   |
| d) Bất phương trình $2f(x) + 2^{x-1} > m$ có nghiệm trên $[0; 3]$ khi và chỉ khi $m < 2f(3) + 4$ . |   |   |

**Câu 125 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                                       | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $\mathcal{D} = [-1; 1]$ .                                                  |   |   |
| b) $\max_{x \in [-1; 1]} f(x) = f(-1)$ .                                                                        |   |   |
| c) Bất phương trình $f(x) - m \leq 0$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq -1$ .                                    |   |   |
| d) Có đúng 1 giá trị nguyên dương của tham số $m$ để bất phương trình $f(x) \geq mx$ có nghiệm $x \in (0; 1]$ . |   |   |

**Câu 126 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                       | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.                                                           |   |   |
| b) $\min_{(1; 3)} f(x) = 3$ .                                                                   |   |   |
| c) Bất phương trình $f(x) + m \geq 0$ có nghiệm trên $(-\infty; 1)$ khi và chỉ khi $m \geq 0$ . |   |   |

| Phát biểu                                                                                                | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| d) Bất phương trình $x^2(x+2m) - 2mx < 0$ có nghiệm trên khoảng $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $m < -2$ . |   |   |

**Câu 127 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $y = f(x)$  và có bảng biến thiên trên  $[-5; 7]$  như hình dưới.

|      |           |      |     |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-5$ | $1$ | $7$ | $+\infty$ |
| $y'$ |           |      | $-$ | $0$ | $+$       |
| $y$  |           | $6$  |     | $9$ |           |

Khi đó

| Phát biểu                                                                                                      | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\min_{[-5;7]} f(x) = 2$ và không tìm được GTLN của $f(x)$ trên $[-5; 7]$ .                                 |   |   |
| b) Bất phương trình $f(x) \leq \log_2 m$ có nghiệm trên $[-5; 7]$ khi và chỉ khi $m \geq 4$ .                  |   |   |
| c) Có đúng 9 giá trị nguyên dương của tham số $m$ để bất phương trình $f(x) \geq m$ có nghiệm trên $[-5; 7]$ . |   |   |
| d) Bất phương trình $f(x) + x^2 - 2x + 3 \geq m$ có nghiệm trên $[-5; 7]$ khi và chỉ khi $m < 47$ .            |   |   |

## 5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 128 (Mức độ 2).** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số  $m$  để bất phương trình  $x^4 - 4x^2 - m + 1 \leq 0$  có nghiệm thực.

KQ:

**Câu 129 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $f(-2) = m + 1$ ,  $f(1) = m - 2$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ.

|         |           |     |      |           |
|---------|-----------|-----|------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $2$  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $0$ | $-2$ | $+\infty$ |

Bất phương trình  $\frac{1}{2}f(x) - \frac{2x+1}{x+3} \leq m$  (với  $m$  là tham số) có nghiệm  $x \in [-2; 1]$  khi và chỉ khi  $m \geq m_0$ .

Giá trị của  $m_0$  là bao nhiêu?

KQ:

**Câu 130 (Mức độ 3).** Cho bất phương trình  $\log_2^2(2x) - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0$ . Tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng  $(\sqrt{2}; +\infty)$  là  $(-m_0; +\infty)$ . Khi đó giá trị của  $m_0$  bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

KQ:

**Câu 131 (Mức độ 4).** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên sau

|         |           |      |     |                |     |      |           |     |
|---------|-----------|------|-----|----------------|-----|------|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $\frac{21}{4}$ | $7$ | $10$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ |           | $+$  | $0$ | $-$            | $0$ | $+$  | $0$       | $-$ |
| $f(x)$  |           | $4$  |     | $5$            |     | $8$  |           |     |
|         | $-\infty$ |      | $2$ |                | $0$ |      | $-\infty$ |     |

Gọi  $S$  là tập hợp các số nguyên của tham số  $m \in [-5; 15]$  để bất phương trình  $f(x^2 - 2x) - m \geq 0$  có nghiệm trên khoảng  $\left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$ . Tìm số phần tử của tập  $S$ .  
KQ:

**Câu 132 (Mức độ 4).** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

| $x$     | 0 | 1 | 3 |
|---------|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | - |
| $f(x)$  | 8 | 9 | 5 |

Gọi  $S$  là tập hợp các số nguyên dương  $m$  để bất phương trình  $f(x) \geq mx^2(x^2 - 2) + 2m$  có nghiệm thuộc đoạn  $[0; 3]$ . Tìm số phần tử của tập  $S$ .  
KQ:

### DẠNG 7

### Tìm GTLN, GTNN của hàm hợp, giá trị tuyệt đối và một số hàm số khác

$$y = f(|x|), y = f(|u(x)|)$$

$$y = f(|x| + b), y = f(|u(x)| + b), y = f(|x + a| + b), y = f(|u(x) + a| + b)$$

**Câu 133.** Biết hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  có  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn  $[0; 2]$ . Hàm số  $y = f\left(\frac{4x}{x^2 + 1}\right)$  có tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất là

**A.**  $M + m$ .

**B.**  $2M + m$ .

**C.**  $M + 2m$ .

**D.**  $2M + 2m$ .

**Câu 134.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên, biết rằng

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

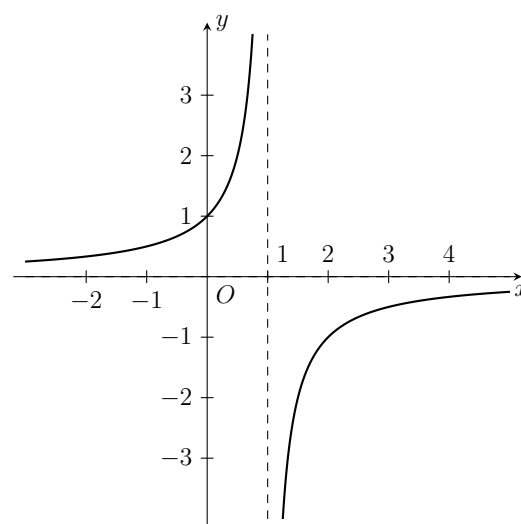
và  $g(x) = f(f(x))$ . Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $g(x)$  trên đoạn  $[-3; -1]$ .

**A.**  $-2$ .

**B.**  $2$ .

**C.**  $1$ .

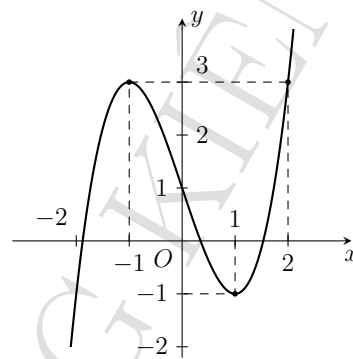
**D.**  $-\frac{4}{3}$ .



**Câu 135.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  có đồ thị như hình vẽ bên. Xét hàm số  $g(x) = f(2x^3 + x - 1) + m$ . Tìm  $m$  để  $\max_{[0;1]} g(x) = -10$ .

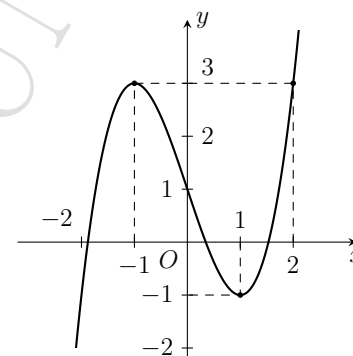
- A.**  $m = 3$ .      **B.**  $m = -12$ .      **C.**  $m = -13$ .      **D.**  $m = 6$ .



**Câu 136.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(\sqrt{4 - x^2})$  trên  $[-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$ .

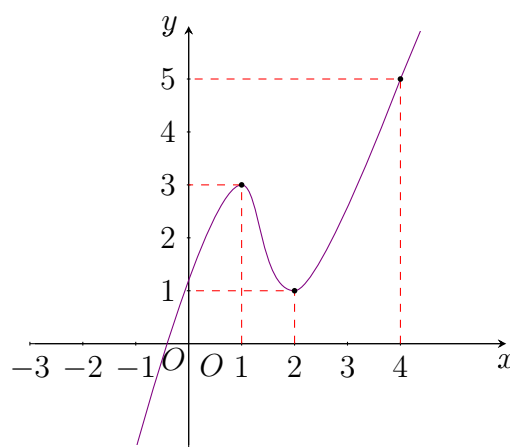
- A.** 3.      **B.** -1.  
**C.** 0.      **D.** Không tồn tại.



**Câu 137.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $g(x) = f\left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 3\right)$  trên  $\mathbb{R}$ . Giá trị của  $M + m$  bằng

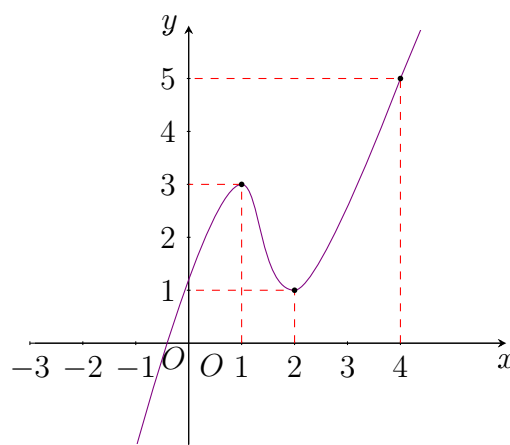
- A.** 6.      **B.** 8.      **C.** 4.      **D.** 5.



**Câu 138.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi  $M, m$  lần lượt là GTLN - GTNN của hàm số  $g(x) = f[2(\sin^4 x + \cos^4 x)]$ . Tổng  $M + m$  bằng

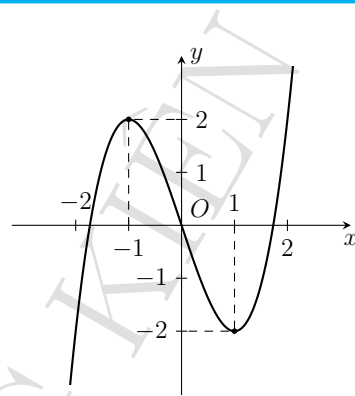
- A.** 3.      **B.** 5.      **C.** 4.      **D.** 6.



**Câu 139.**

Cho  $x, y$  thỏa mãn  $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 16$  và hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của  $P = f\left(\frac{x^2 + y^2 - 2}{x^2 - y^2 - 2xy + 4}\right)$ . Tính  $M^2 + m^2$ .

- A.  $M^2 + m^2 = 4$ .  
 B.  $M^2 + m^2 = 1$ .  
 C.  $M^2 + m^2 = 25$ .  
 D.  $M^2 + m^2 = 2$ .



**Câu 140.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau

|         |           |      |     |                |           |
|---------|-----------|------|-----|----------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $\frac{21}{4}$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$            | $-$       |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $4$  | $2$ | $5$            | $-\infty$ |

Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x^2 - 2x)$  trên đoạn  $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$ .

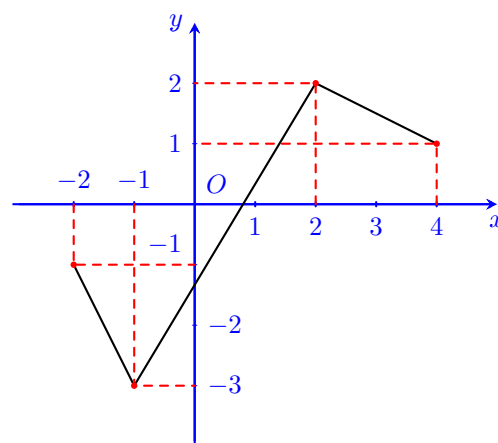
Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

- A.  $M.m > 10$ .  
 B.  $\frac{M}{m} > 2$ .  
 C.  $M - m > 3$ .  
 D.  $M + m > 7$ .

**Câu 141.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị trên đoạn  $[-2; 4]$  như hình vẽ bên. Tìm  $\max_{[-2; 4]} |f(x)|$ .

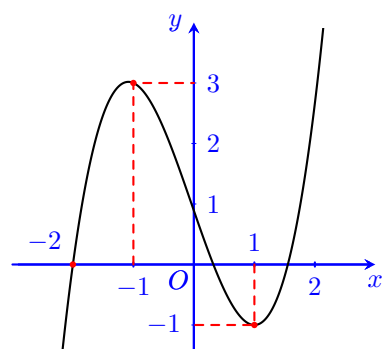
- A.  $|f(0)|$ .  
 B. 2.  
 C. 3.  
 D. 1.



**Câu 142.**

Cho đồ thị hàm số  $y = f(x)$  như hình vẽ bên. Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = |f(x)|$  trên đoạn  $[-1; 1]$  lần lượt là  $M, m$ . Tính giá trị của biểu thức  $T = 673M - 2019m$ .

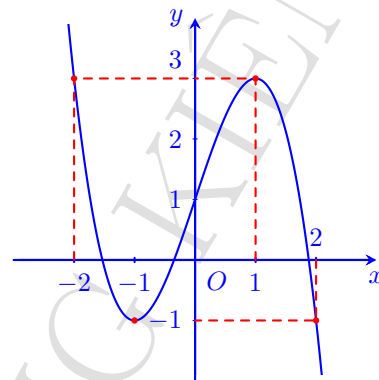
- A.  $T = 2019$ .  
 B.  $T = 0$ .  
 C.  $T = 4036$ .  
 D.  $T = 2692$ .



**Câu 143.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số như hình bên. Gọi  $m, M$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |f(2x - 1)|$  trên đoạn  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ . Tính giá trị  $M - m$ .

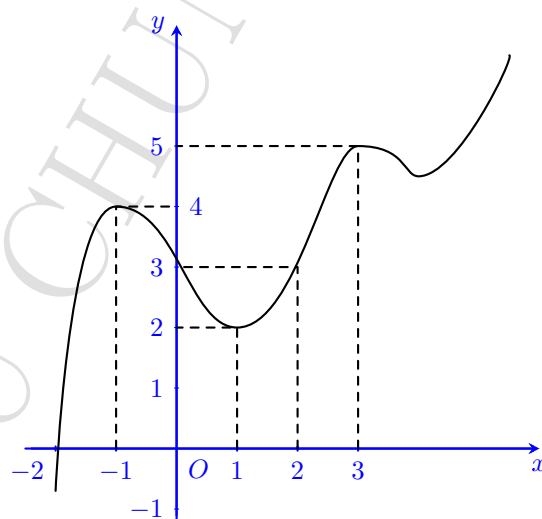
- A.** 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.



**Câu 144.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi  $M, m$  theo thứ tự là GTLN, GTNN của hàm số  $y = f(|x - 2|)$  trên đoạn  $[-1, 5]$ . Tổng  $M + m$  bằng

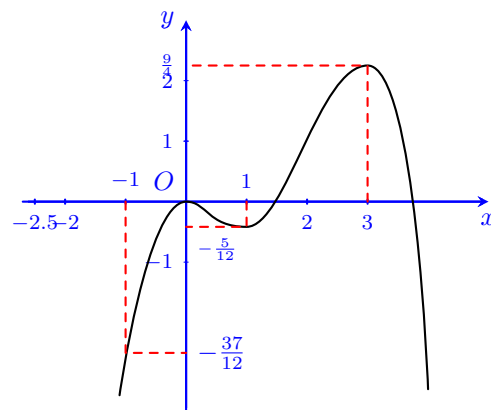
- A.** 9. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 1.



**Câu 145.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị  $(C)$  như hình vẽ. Gọi  $M, m$  theo thứ tự là GTLN-GTNN của hàm số  $y = f(|-x^3 + 3x^2 - 1|)$  trên đoạn  $[-1; 3]$ . Tích  $M \cdot m$  bằng

- A.** 0. **B.**  $-\frac{111}{16}$ . **C.**  $-\frac{45}{48}$ . **D.**  $\frac{185}{144}$ .

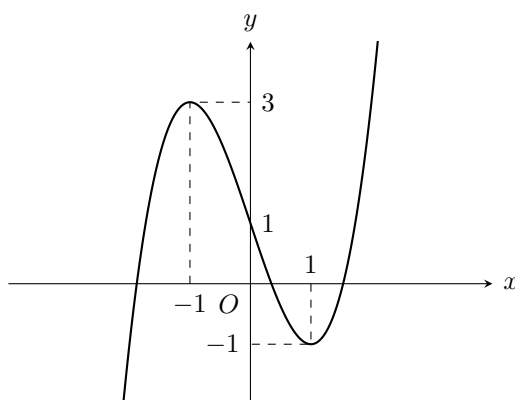


**Câu 146.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Đặt  $M = \max_{\mathbb{R}} |f(\sin^2 2x)|$ ,  $m = \min_{\mathbb{R}} |f(\sin^2 2x)|$ .

Tổng  $M + m$  bằng

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.





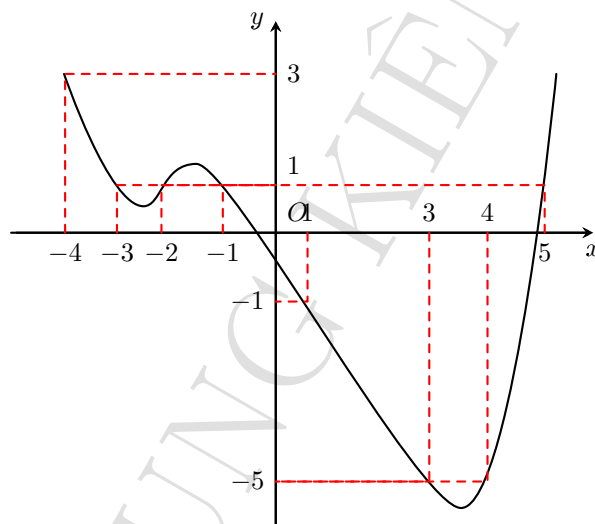
**Câu 147.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị  $(C)$  như hình vẽ. Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = f\left(3 - 2\sqrt{6x - 9x^2}\right).$$

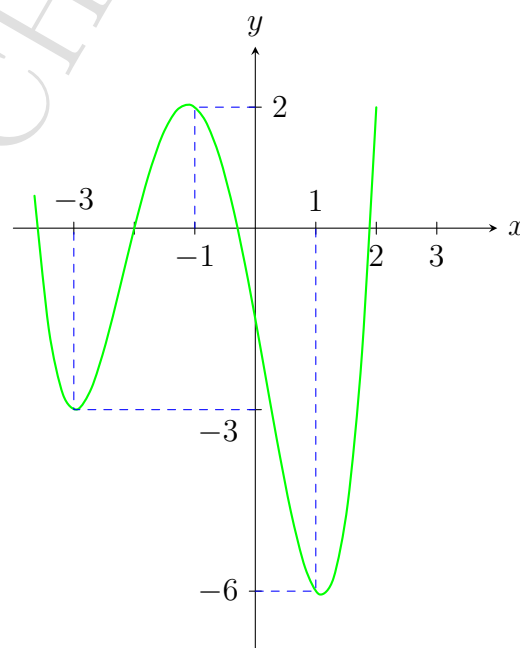
Giá trị biểu thức  $T = 3M - m$  bằng

- A.**  $T = 2.$     **B.**  $T = 0.$     **C.**  $T = -8.$     **D.**  $T = 14.$

**Câu 148.**

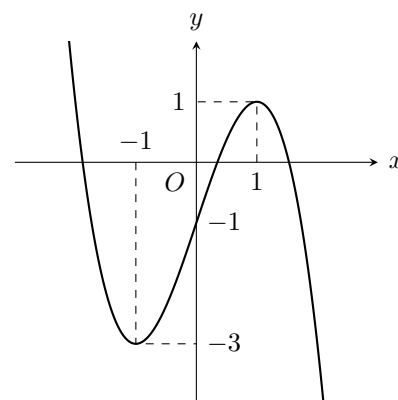
Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi  $M$  là giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |f(x - 1)|$  trên đoạn  $[-3; 3]$ . Tìm  $M$ .

- A.**  $M = 0.$     **B.**  $M = 6.$     **C.**  $M = 5.$     **D.**  $M = 2.$

**Câu 149.**

Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $K$  và có đồ thị như hình vẽ. Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $g(x) = |f(2\sin^4 x + 2\cos^4 x - 2)|$  trên  $K$ . Tính  $T = M - m$ .

- A.** 2.    **B.** 0.    **C.** 3.    **D.** 1.



**Câu 150.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $f'(0) = 3$ ,  $f'(2) = -2018$  và bảng xét dấu của  $f''(x)$  như sau

|          |           |   |   |           |   |
|----------|-----------|---|---|-----------|---|
| $x$      | $-\infty$ | 0 | 2 | $+\infty$ |   |
| $f''(x)$ | +         | 0 | - | 0         | + |

Hàm số  $y = f(x + 2017) + 2018x$  đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm  $x = x_0$  thuộc khoảng nào sau đây?

- A.  $(0; 2)$ . B.  $(-\infty; -2017)$ . C.  $(-2017; 0)$ . D.  $(2017; +\infty)$ .

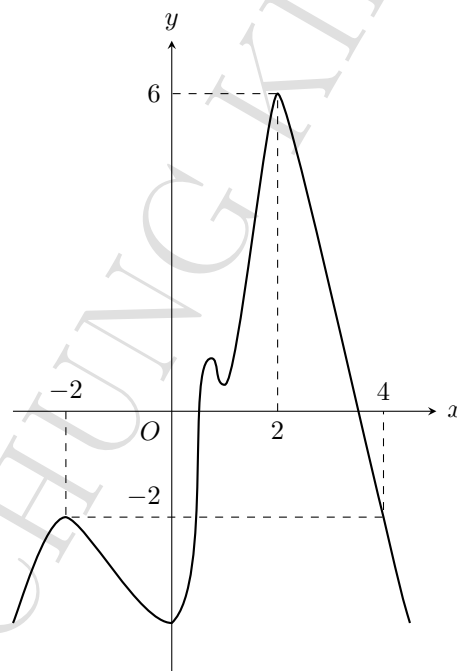
**Câu 151.**

Cho hàm số  $f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi  $m, M$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số

$$y = \left| \frac{1}{3} f \left( \frac{4}{\sqrt{3}} \sin \left( \frac{\pi}{3} |\sin x| \right) \right) \right|.$$

Khi đó tổng  $m + M$  là

- A.  $\frac{2}{3}$ . B. 4. C. 2. D.  $\frac{4}{3}$ .



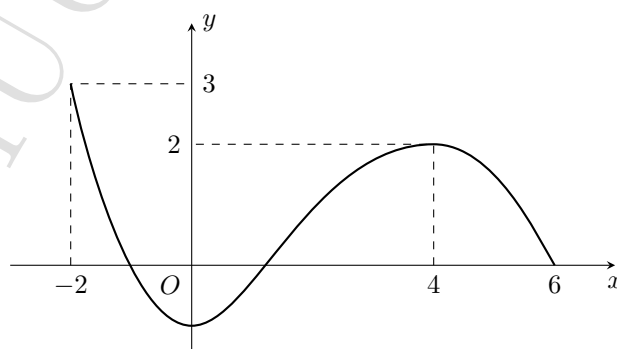
**Câu 152.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[-2; 6]$  và có đồ thị như hình vẽ. Gọi  $M$  là giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = f(|x| + 1)$$

trên đoạn  $[-2; 4]$ . Giá trị của  $M$  bằng

- A. 3. B. -1. C. 2. D. 0.



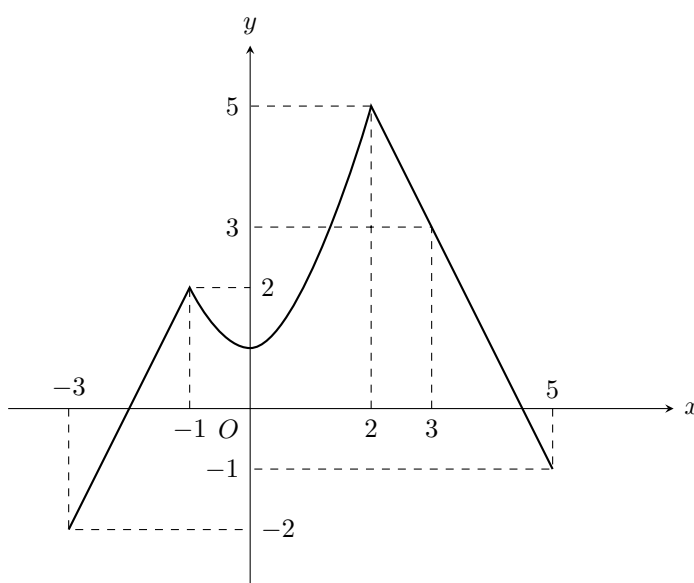
**Câu 153.**

Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-3; 5]$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = f(|3 \cos x + 4 \sin x| - 2)$$

bằng

- A. 0. B. 1. C. 3. D. -2.

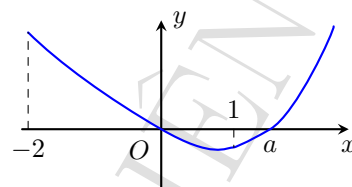


**Câu 154.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị  $f'(x)$  như hình vẽ. Khi đó hàm số

$$g(x) = f(|x+1| - 2)$$

lần lượt đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất là  $M, m$  trên đoạn  $[0; 1]$ . Chọn khẳng định đúng.



**A.**  $M - m = f(-1) - f(0)$ .

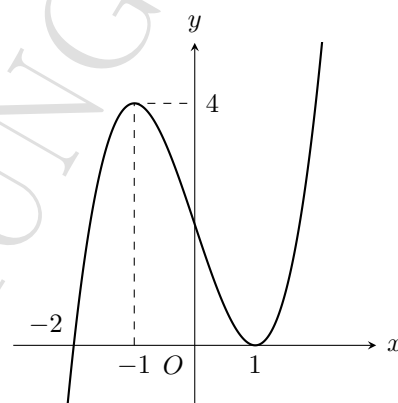
**B.**  $M + 2m = f(0) + 2f(-1)$ .

**C.**  $2M - m = 2f(a) - f(0)$ .

**D.**  $m - M = f(-1) - f(0)$ .

**Câu 155.**

Cho đồ thị hàm số  $y = f(x)$  như hình vẽ. Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = |f(x^2 + 2x)|$  trên đoạn  $[-2; 0]$  lần lượt là  $M, m$ . Tính giá trị của biểu thức  $T = M - 3m$ .



**A.** 3.

**B.** -2.

**C.** 6.

**D.** 4.

**Câu 156.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = |f(\sin 3x + \sin^3 x)|$$

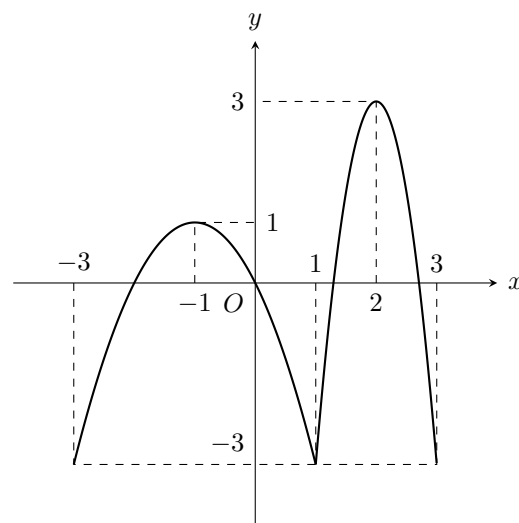
trên  $\mathbb{R}$ . Giá trị  $e^{\ln M} + 2019^m$  bằng bao nhiêu?

**A.**  $e$ .

**B.** 4.

**C.**  $2009^{-3}$ .

**D.** 3.



**Câu 157.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên và có bảng biến thiên như sau

|      |           |         |        |        |           |     |     |     |  |
|------|-----------|---------|--------|--------|-----------|-----|-----|-----|--|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$    | $0$    | $4$    | $+\infty$ |     |     |     |  |
| $y'$ |           | $-$     | $0$    | $+$    | $0$       | $-$ | $0$ | $+$ |  |
| $y$  | $+\infty$ |         | $f(0)$ |        | $+\infty$ |     |     |     |  |
|      |           | $f(-2)$ |        | $f(4)$ |           |     |     |     |  |

Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(|x|)$  trên đoạn  $[-2; 4]$  bằng

**A.**  $f(2)$ .

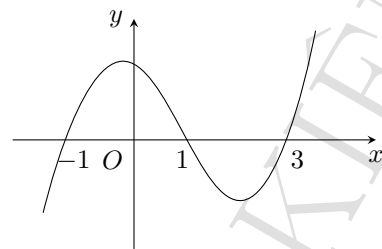
**B.**  $f(0)$ .

**C.**  $f(4)$ .

**D.** Không xác định được.

**Câu 158.**

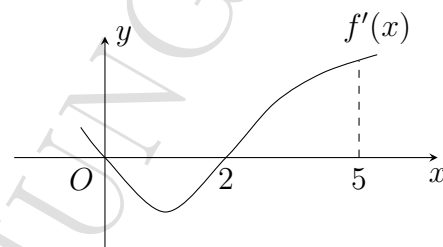
Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f(1) < 0$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $g(x) = |f(x)|$  trên  $[-1; 1]$ . Khi đó  $M; m$  là



- A.  $M = f(-1), m = f(1)$ .  
 B.  $M = |f(1)|, m = |f(-1)|$ .  
 C.  $M = |f(-1)|, m = |f(1)|$ .  
 D.  $M = f(-1), m = |f(1)|$ .

**Câu 159.**

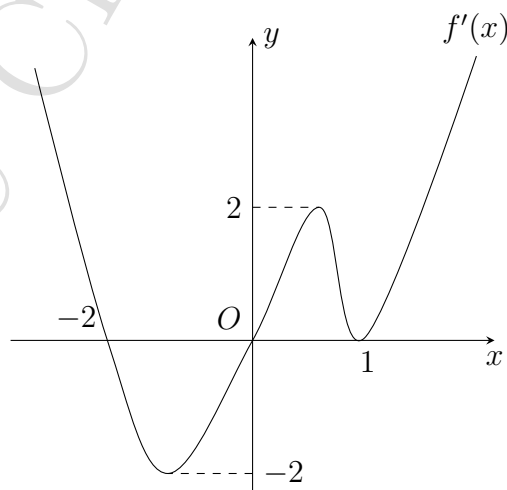
Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $[0; 5]$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  trên  $[0; 5]$  như hình vẽ. Biết  $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$  và  $f(5) < 0$ . Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $g(x) = |f(x)|$  trên đoạn  $[0; 5]$  lần lượt là



- A.  $|f(3)|, |f(5)|$ .  
 B.  $|f(2)|, |f(0)|$ .  
 C.  $|f(2)|, |f(5)|$ .  
 D.  $|f(0)|, |f(5)|$ .

**Câu 160.**

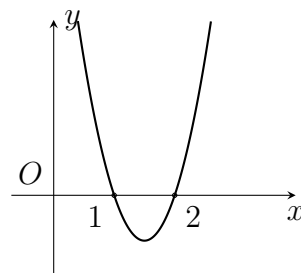
Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$  có đồ thị của hàm  $y = f'(x)$  được cho như hình bên và  $f(-2) = 3, f(0) = -5, f(1) = 0$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số  $y = |f(x)| + 1$  trên  $[-2; 1]$ . Khi đó  $M^2 + m^2$  bằng



- A. 8.  
 B. 25.  
 C. 37.  
 D. 34.

**Câu 161.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  là hàm số bậc hai có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng  $\min_{\mathbb{R}} f'(x) = -\frac{3}{4}, f(0) = 0$ . Giá trị lớn nhất của hàm số  $g(x) = f(|x-2|+1)$  trên đoạn  $[1; 3]$  có dạng  $\frac{m}{n}$  với  $m, n \in \mathbb{Z}, n > 0$  và phân số đó tối giản. Tính  $m^2 + n^2$ .



- A. 85.  
 B. 74.  
 C. 61.  
 D. 58.

**Câu 162.** Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn  $x \geq 0, y \geq 1; x + y = 3$ . Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x^3 + 2y^2 + 3x^2 + 4xy - 5x$  lần lượt bằng

- A. 20 và 18.  
 B. 20 và 15.  
 C. 18 và 15.  
 D. 15 và 13.

**Câu 163.** Cho các số thực  $x, y$  thỏa mãn  $x \geq 0, y \geq 0$  và  $x + y = 1$ . Giá trị lớn nhất  $M$ , giá trị nhỏ nhất  $m$  của biểu thức  $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$  là

- A.  $M = \frac{25}{2}; m = \frac{191}{16}$ .  
 B.  $M = 12; m = \frac{191}{16}$ .  
 C.  $M = \frac{25}{2}; m = 12$ .  
 D.  $M = \frac{25}{2}; m = 0$ .

**Câu 164.** Cho các số thực  $x, y$  thỏa mãn  $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32$ . Giá trị nhỏ nhất  $m$  của biểu thức  $A = x^3 + y^3 + 3(xy-1)(x+y-2)$  là

**A.**  $m = \frac{17 - 5\sqrt{5}}{4}$ .

**B.**  $m = 16$ .

**C.**  $m = 398$ .

**D.**  $m = 0$ .

**Câu 165.**

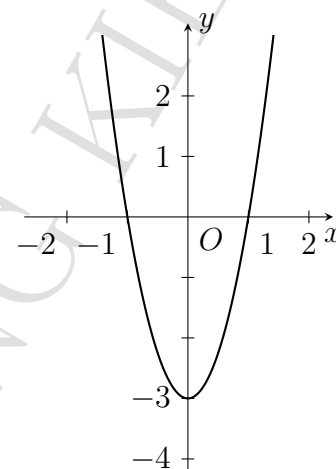
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên và  $f(1) = -5$ ;  $f(3) = 15$ . Xét hàm số  $g(x) = |f(x) + m|$ . Gọi  $S$  là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $g(x)$  trên đoạn  $[1; 3]$  bằng 3. Tổng tất cả các giá trị của phần tử  $S$  bằng

**A.**  $-10$ .

**B.**  $-8$ .

**C.**  $8$ .

**D.**  $10$ .



**Câu 166.**

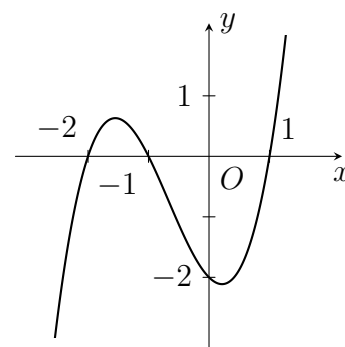
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $y = f'(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên và  $f(-1) < -2$ ,  $f(-2) - f(1) > 0$ . Khi đó gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $g(x) = |f(x) + 2|$  trên đoạn  $[-2; 1]$  lần lượt là  $M, m$ . Tổng  $M + m$  bằng

**A.**  $g(-2) + g(1)$ .

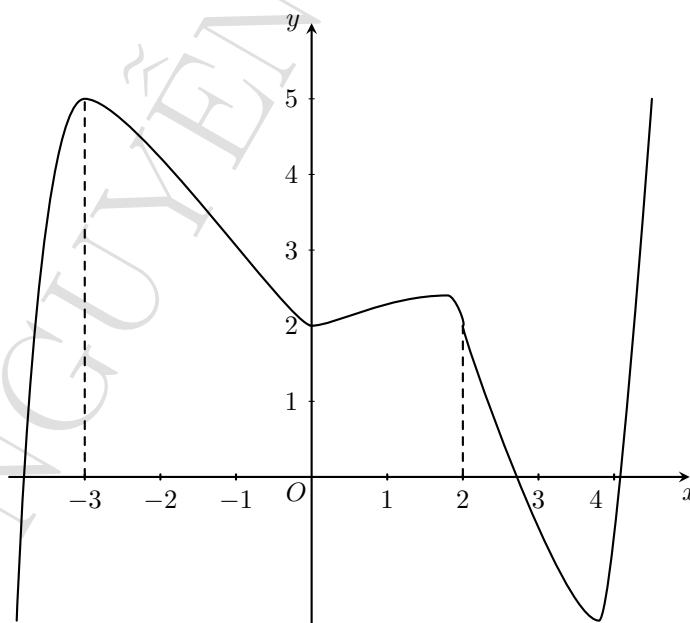
**B.**  $g(-2) + g(-1)$ .

**C.**  $|f(-1) + 2| + |f(1) + 2|$ .

**D.**  $|f(-1) + f(1) + 4|$ .



**Câu 167.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $y = f'(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ sau.



Giá trị lớn nhất của hàm số  $g(x) = f(2x) - 4x$  trên đoạn  $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$  bằng

**A.**  $f(0)$ .

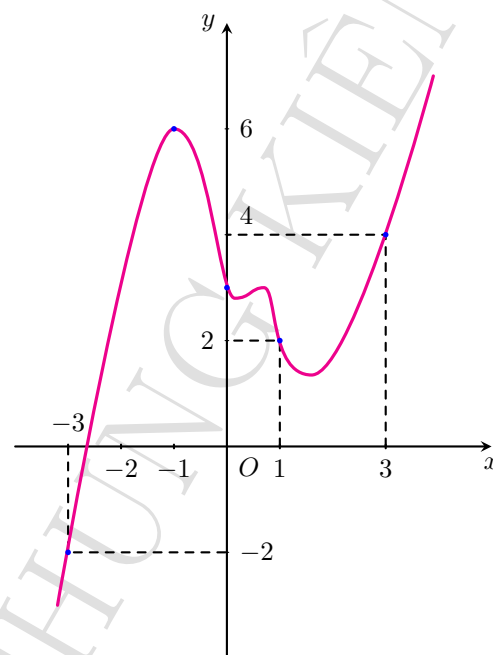
**B.**  $f(-3) + 6$ .

**C.**  $f(2) - 4$ .

**D.**  $f(4) - 8$ .

**Câu 168.**

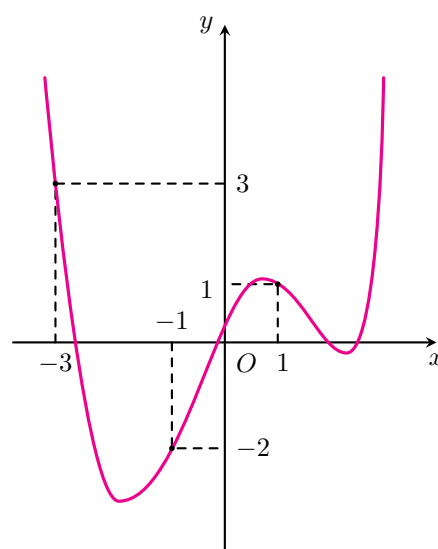
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $y = f'(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Xét hàm số  $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?



- A.  $\min_{[-3;3]} g(x) = g(1)$ .
- B.  $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$ .
- C.  $\max_{[-3;3]} g(x) = g(3)$ .
- D. Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của hàm số  $g(x)$  trên  $[-3;3]$ .

**Câu 169.**

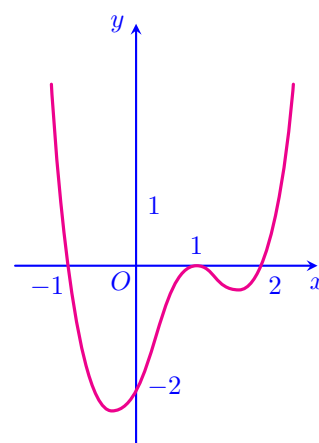
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $y = f'(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên.



- A.  $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$ .
- B.  $\min_{[-3;1]} g(x) = g(1)$ .
- C.  $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$ .
- D.  $\min_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$ .

**Câu 170.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $y = f'(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x$  trên đoạn  $[-1;2]$  bằng



- A.  $f(2) + \frac{2}{3}$ .
- B.  $f(-1) + \frac{2}{3}$ .
- C.  $\frac{2}{3}$ .
- D.  $f(1) - \frac{2}{3}$ .

**Câu 171.** Cho hai số thực  $x \neq 0, y \neq 0$  thay đổi và thỏa mãn điều kiện  $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$ . Giá trị lớn nhất  $M$  của biểu thức  $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$  là

A.  $M = 8$ .

B.  $M = 0$ .

C.  $M = 1$ .

D.  $M = 16$ .

**Câu 172.** Cho  $a, b$  là các số thực dương thỏa mãn  $2(a^2 + b^2) + ab = (a + b)(ab + 2)$ . Giá trị nhỏ nhất  $m$  của biểu thức  $P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$  là

A.  $m = -10$ .

B.  $m = \frac{85}{4}$ .

C.  $m = -\frac{23}{4}$ .

D.  $m = 0$ .

**Câu 173.**

Cho hàm số  $f(x)$ , đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  là đường cong trong hình bên.

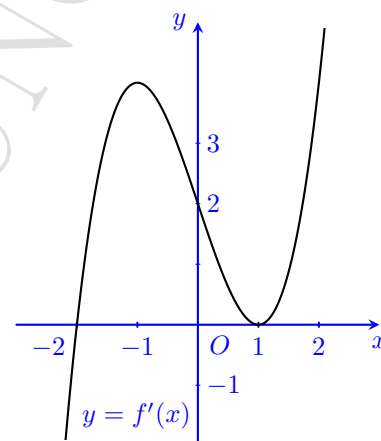
Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$  trên đoạn  $[-5; 3]$  bằng

A.  $f(-2)$ .

B.  $f(1)$ .

C.  $f(-4)$ .

D.  $f(2)$ .



**Câu 174.**

Cho hàm số  $f(x)$ , đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  là đường cong trong hình bên.

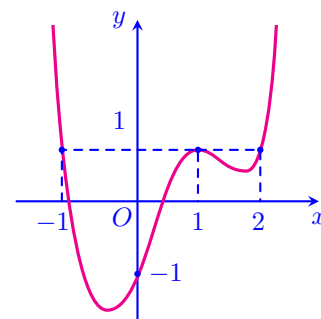
Giá trị lớn nhất của hàm số  $g(x) = -f(2x - 1) + 2x$  trên đoạn  $[0; 2]$  bằng

A.  $-f(1) + 2$ .

B.  $-f(-1)$ .

C.  $-f(2) + 3$ .

D.  $-f(3) + 4$ .



**Câu 175.**

Cho hàm số  $f(x)$ , đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  là đường cong trong hình bên.

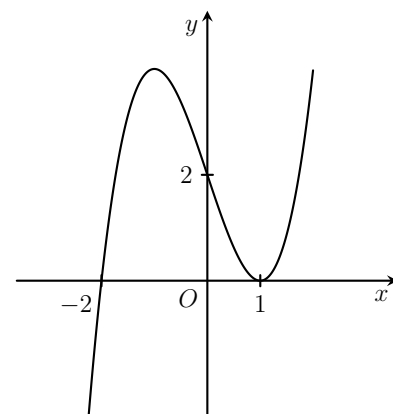
Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$  trên đoạn  $[-5; 3]$  bằng

A.  $f(-2)$ .

B.  $f(1)$ .

C.  $f(-4)$ .

D.  $f(2)$ .



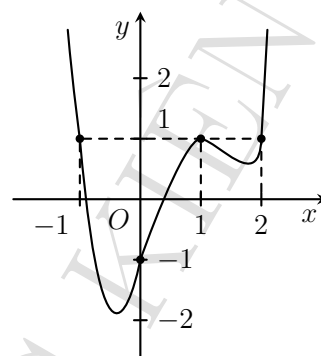
**Câu 176.**



Cho hàm số  $f(x)$ , đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  là đường cong trong hình bên.

Giá trị lớn nhất của hàm số  $g(x) = -f(2x-1) + 2x$  trên đoạn  $[0; 2]$  bằng

- A.**  $-f(1) + 2$ .      **B.**  $-f(-1)$ .      **C.**  $-f(2) + 3$ .      **D.**  $-f(3) + 4$ .

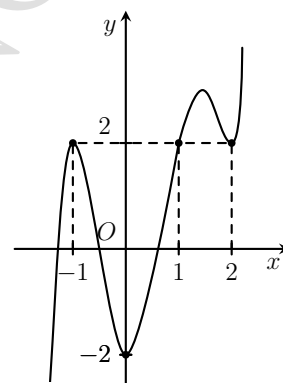


**Câu 177.**

Cho hàm số  $f(x)$ , đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  là đường cong như hình vẽ. Giá

trị nhỏ nhất của hàm số  $g(x) = f(2x+1) - 4x - 3$  trên đoạn  $[-\frac{3}{2}; 1]$  bằng

- A.**  $f(0)$ .      **B.**  $f(-1) + 1$ .      **C.**  $f(2) - 5$ .      **D.**  $f(1) - 3$ .

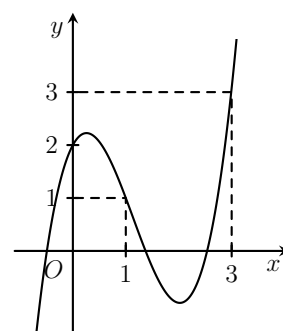


**Câu 178.**

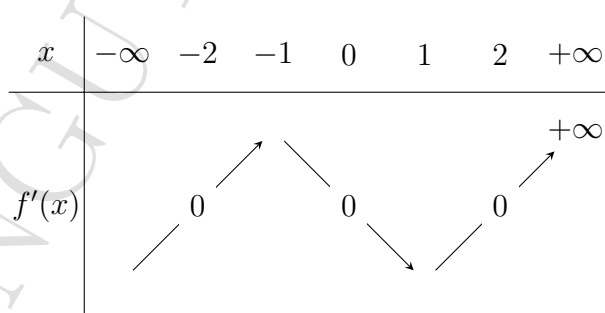
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như

hình vẽ. Trên  $[-2; 4]$ , gọi  $x_0$  là điểm mà tại đó hàm số  $g(x) = f\left(\frac{x}{2} + 1\right) - \ln(x^2 + 8x + 16)$  đạt giá trị lớn nhất. Khi đó  $x_0$  thuộc khoảng nào?

- A.**  $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ .      **B.**  $\left(2; \frac{5}{2}\right)$ .      **C.**  $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ .      **D.**  $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ .



**Câu 179.** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Giá trị lớn nhất của hàm số  $g(x) = f(2x) - \sin^2 x$  trên đoạn  $[-1; 1]$  là



- A.**  $f(-1)$ .      **B.**  $f(0)$ .      **C.**  $f(2)$ .      **D.**  $f(1)$ .

**Câu 180.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$  trên đoạn  $[1; 3]$ .

|         |           |   |   |   |   |   |           |
|---------|-----------|---|---|---|---|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |   | 0 |   | 4 |   | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | - | 0 | + | 0 | - |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ |   |   |   | 5 |   | $-\infty$ |

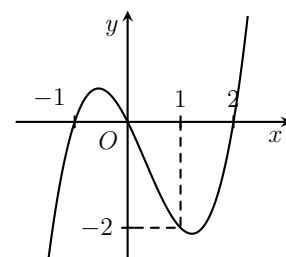
A. 15.

B.  $\frac{25}{3}$ .C.  $\frac{19}{3}$ .

D. 12.

**Câu 181.**

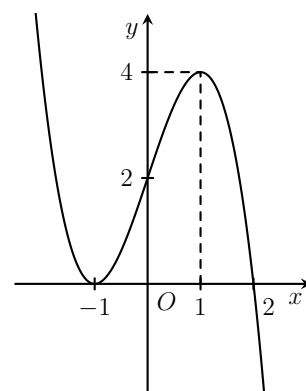
Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , hàm số  $f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số  $g(x) = 3f(x^2 - 2) - \frac{3}{2}x^4 - 3x^2 + 2$  đạt giá trị lớn nhất trên  $[-2; 2]$  bằng

A.  $g(1)$ .B.  $g(-2)$ .C.  $g(0)$ .D.  $g(2)$ .**Câu 182.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  liên tục trên tập số thực và có đồ thị như hình vẽ. Biết  $f(-1) = \frac{13}{4}$ ,  $f(2) = 6$ . Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$  trên  $[-1; 2]$  bằng

A.  $\frac{1573}{64}$ .

B. 198.

C.  $\frac{37}{4}$ .D.  $\frac{14245}{64}$ .

**Câu 183.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  sao cho  $\max_{x \in [0; 10]} f(x) = f(2) = 4$ . Xét hàm số  $g(x) = f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m$ . Giá trị của tham số  $m$  để  $\max_{x \in [0; 2]} g(x) = 8$  là

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. -1.

**Câu 184.**

Cho hai hàm số  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên, biết rằng  $x = 1$  và  $x = 3$  đều là các điểm cực trị của hai hàm số  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$  đồng thời

$$3f(1) = g(3) + 1, \quad 2f(3) = g(1) + 4, \quad f(-2x + 7) = g(2x - 3) - 1.$$

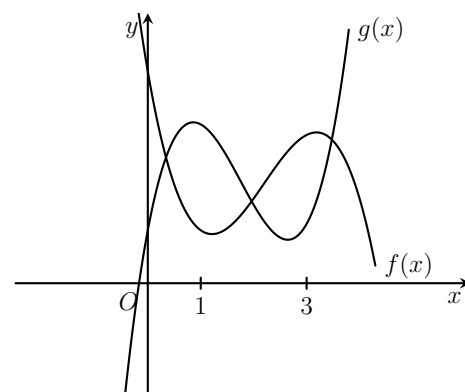
Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đoạn  $[1; 3]$  của hàm số  $S(x) = f(x)g(x) - g^2(x) + f(x) - 4g(x) + 2$ . Tính tổng  $P = M - 2m$ .

A. 39.

B. 107.

C. 19.

D. 51.

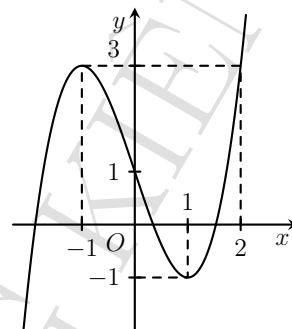
**Câu 185.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Xét hàm số

$$g(x) = f(2x^3 + x - 1) + m.$$

Giá trị  $m$  để  $\max_{[0;1]} g(x) = -10$  bằng

- A.  $m = -13$ . B.  $m = 5$ . C.  $m = 3$ . D.  $m = -1$ .



**Câu 186.** Cho hai số thực dương thỏa mãn  $1 \leq x \leq 2$ ;  $1 \leq y \leq 2$ . Giá trị nhỏ nhất  $m$  của biểu thức

$$P = \frac{x+2y}{x^2+3y+5} + \frac{y+2x}{y^2+3x+5} + \frac{1}{4(x+y-1)}$$

- A.  $m = 0$ . B.  $m = \frac{85}{4}$ . C.  $m = -10$ . D.  $m = \frac{7}{8}$ .

**Câu 187.** Cho  $x, y$  là các số thực thỏa mãn  $x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của  $P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y}$ . Tính giá trị  $M + m$ .

- A. 42. B. 41. C. 43. D. 44.

**Câu 188.** Cho  $x, y > 0$  thỏa mãn  $x + y = \frac{3}{2}$  và biểu thức  $P = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tính  $x^2 + y^2$ .

- A.  $\frac{153}{100}$ . B.  $\frac{5}{4}$ . C.  $\frac{2313}{1156}$ . D.  $\frac{25}{16}$ .

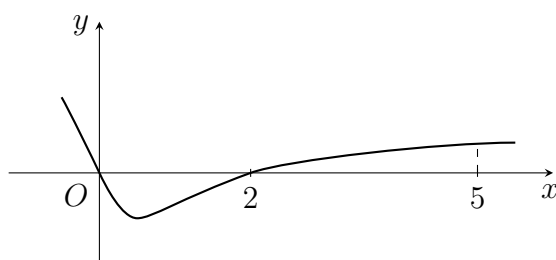
**Câu 189.**

Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  được cho như hình vẽ bên. Biết rằng

$$f(0) + f(3) = f(2) + f(5).$$

Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của  $f(x)$  trên đoạn  $[0; 5]$  lần lượt là

- A.  $f(0), f(5)$ . B.  $f(2), f(0)$ .  
C.  $f(1), f(5)$ . D.  $f(2), f(5)$ .



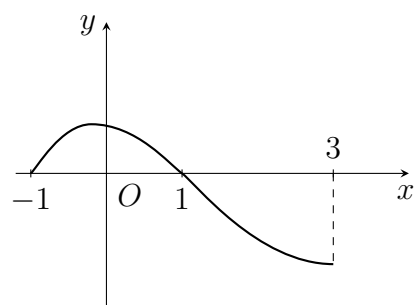
**Câu 190.**

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị  $y = f'(x)$  như hình bên. Biết

$$f(-1) + f(0) - 2f(1) = f(3) - f(2).$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn  $[-1; 3]$ .

- A.  $f(1), f(0)$ . B.  $f(2), f(1)$ .  
C.  $f(1), f(-1)$ . D.  $f(1), f(3)$ .



**Câu 191.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $y = f'(x)$ . Hàm  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng

$$f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất  $m$  và giá trị lớn nhất  $M$  của  $f(x)$  trên đoạn  $[0; 4]$ .

- A.**  $m = f(4); M = f(2)$ .      **B.**  $m = f(4); M = f(1)$ .  
**C.**  $m = f(0); M = f(2)$ .      **D.**  $m = f(1); M = f(2)$ .

**Câu 192.**

Cho hai hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  có đạo hàm là  $f'(x)$ ,  $g'(x)$ . Đồ thị hàm số  $f'(x)$  và  $g'(x)$  được cho như hình vẽ bên. Biết rằng  $f(0) - f(6) < g(0) - g(6)$ . Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số  $h(x) = f(x) - g(x)$  trên đoạn  $[0; 6]$  lần lượt là

- A.**  $h(2), h(6)$ .      **B.**  $h(6), h(2)$ .  
**C.**  $h(0), h(2)$ .      **D.**  $h(2), h(0)$ .

**Câu 193.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình bên. Biết  $f(0) < f(3) < f(4)$ , gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(|x|)$  trên đoạn  $[-4; 3]$ . Tính giá trị của  $M - m$ .

- A.**  $f(4) + f(2)$ .      **B.**  $f(4) + f(0)$ .      **C.**  $f(3) - f(0)$ .      **D.**  $f(3) + f(2)$ .

**Câu 194.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $y = f(|x|)$  trên đoạn  $[-1; 4]$  biết  $f(2) > f(0)$ .

- A.**  $\max_{[-1;4]} f(|x|) = f(1); \min_{[-1;4]} f(|x|) = f(0)$ .  
**B.**  $\max_{[-1;4]} f(|x|) = f(4); \min_{[-1;4]} f(|x|) = f(0)$ .  
**C.**  $\max_{[-1;4]} f(|x|) = f(4); \min_{[-1;4]} f(|x|) = f(2)$ .  
**D.**  $\max_{[-1;4]} f(|x|) = f(1); \min_{[-1;4]} f(|x|) = f(2)$ .

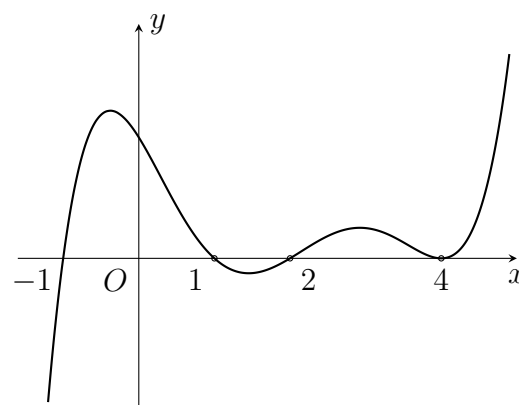
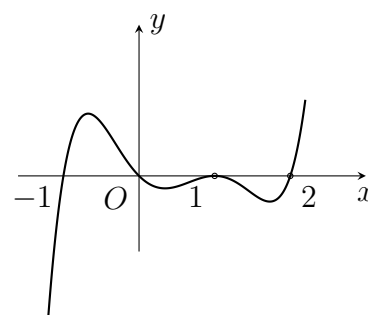
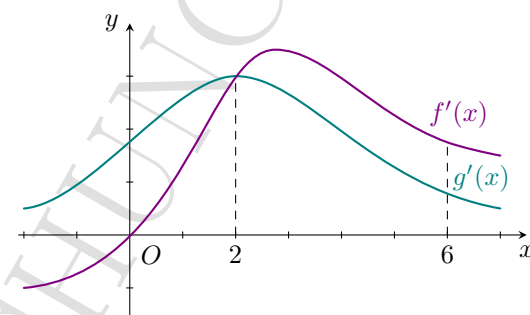
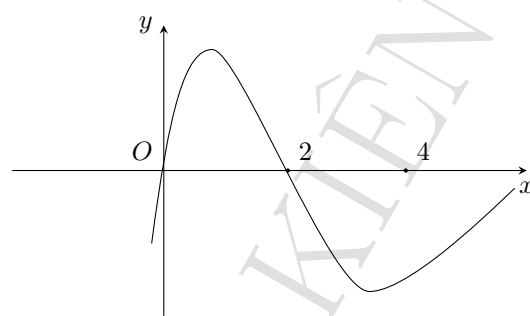
**Câu 195.** Cho  $x, y$  là các số thực thỏa mãn  $x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của  $P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y}$ . Tính giá trị  $M + m$ .

- A.** 42.      **B.** 41.      **C.** 43.      **D.** 44.

**Câu 196.** Cho ba số thực  $x, y, z$  thỏa mãn  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 1, x + y + z = 2$ . Biết giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = xyz$  bằng  $\frac{a}{b}$  với  $a, b \in \mathbb{N}^*$  và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Giá trị của  $2a + b$  bằng

- A.** 5.      **B.** 43.      **C.** 9.      **D.** 6.

**Câu 197.** Cho hàm số  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ . Biết rằng đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có ít nhất một giao điểm với trục hoành. Bất đẳng thức nào sau đây là đúng?



- A.**  $a^2 + b^2 + c^2 > \frac{4}{3}$ . **B.**  $a^2 + b^2 + c^2 < \frac{4}{3}$ . **C.**  $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$ . **D.**  $a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{4}{3}$ .

**Câu 198.** Cho  $x^2 - xy + y^2 = 2$ . Giá trị nhỏ nhất của  $P = x^2 + xy + y^2$  bằng

- A.**  $\frac{2}{3}$ . **B.**  $\frac{1}{6}$ . **C.**  $\frac{1}{2}$ . **D.** 2.

**Câu 199.** Cho các số thực  $x, y$  thay đổi thỏa mãn  $x^2 + y^2 - xy = 1$  và hàm số  $f(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$ . Gọi  $M, m$  tương ứng là GTLN và GTNN của  $Q = f\left(\frac{5x - y + 2}{x + y + 4}\right)$ . Tổng  $M + m$  bằng

- A.**  $-4 - 3\sqrt{2}$ . **B.**  $-4 - 5\sqrt{2}$ . **C.**  $-4 - 4\sqrt{2}$ . **D.**  $-4 - 2\sqrt{2}$ .

**Câu 200.** Cho các số thực  $x, y$  thỏa mãn  $x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3})$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $M = 3^{x+y-4} + (x+y+1) \cdot 2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2)$  bằng

- A.**  $-\frac{9476}{243}$ . **B.**  $-76$ . **C.**  $\frac{193}{3}$ . **D.**  $\frac{148}{3}$ .

**Câu 201.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \left| \sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right|$ .

- A.**  $\sqrt{2} - 1$ . **B.**  $2\sqrt{2} + 1$ . **C.**  $\sqrt{2} + 1$ . **D.**  $2\sqrt{2} - 1$ .

**Câu 202.** Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn  $9x^3 + (2 - y\sqrt{3xy-5})x + \sqrt{3xy-5} = 0$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P = x^3 + y^3 + 6xy + 3(3x^2 + 1)(x + y - 2)$ .

- A.**  $\frac{296\sqrt{15} - 18}{9}$ . **B.**  $\frac{36 + 296\sqrt{15}}{9}$ . **C.**  $\frac{36 - 4\sqrt{6}}{9}$ . **D.**  $\frac{-4\sqrt{6} + 18}{9}$ .

**Câu 203.** Cho  $x, y > 0$  và  $x + y = \frac{5}{4}$  sao cho biểu thức  $P = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}$  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó:

- A.**  $x^2 + y^2 = \frac{25}{32}$ . **B.**  $x^2 + y^2 = \frac{17}{16}$ . **C.**  $x^2 + y^2 = \frac{25}{16}$ . **D.**  $x^2 + y^2 = \frac{13}{16}$ .

**Câu 204.** Cho  $x, y$  là hai số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện  $(xy + 1)(\sqrt{xy+1} - \sqrt{y}) \leq 1 - x - \frac{1}{y}$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - xy + 3y^2}} - \frac{x-2y}{6(x+y)}$ .

- A.**  $\frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{7}{30}$ . **B.**  $\frac{7}{30} - \frac{\sqrt{5}}{3}$ . **C.**  $\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{7}{30}$ . **D.**  $\frac{\sqrt{5} + 7}{30}$ .

**Câu 205.** Xét các số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $x + y + z = 4$  và  $xy + yz + zx = 5$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $(x^3 + y^3 + z^3)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$  bằng

- A.** 20. **B.** 25. **C.** 15. **D.** 35.

**Câu 206.** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sin^{2018}x + \cos^{2018}x$  trên  $\mathbb{R}$ . Khi đó

- A.**  $M = 2, m = \frac{1}{2^{1008}}$ . **B.**  $M = 1, m = \frac{1}{2^{1009}}$ . **C.**  $M = 1, m = 0$ . **D.**  $M = 1, m = \frac{1}{2^{1008}}$ .

**Câu 207.** Cho các số thực  $x, y$  thỏa mãn  $x + y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3})$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = 4(x^2 + y^2) + 15xy$ .

- A.**  $\min P = -80$ . **B.**  $\min P = -91$ . **C.**  $\min P = -83$ . **D.**  $\min P = -63$ .

**Câu 208.** Biết rằng bất phương trình  $m(|x| + \sqrt{1-x^2} + 1) \leq 2\sqrt{x^2-x^4} + \sqrt{x^2} + \sqrt{1-x^2} + 2$  có nghiệm khi và chỉ khi  $m \in (-\infty; a\sqrt{2} + b]$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Tính giá trị của  $T = a + b$ .

- A.**  $T = 3$ . **B.**  $T = 2$ . **C.**  $T = 0$ . **D.**  $T = 1$ .

**Câu 209.** Cho  $x, y$  là các số thực dương thỏa mãn  $2(x^2 + y^2) + xy = (x + y)(xy + 2)$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = 4\left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3}\right) - 9\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right)$ .

- A.  $-\frac{25}{4}$ . B. 5. C.  $-\frac{23}{4}$ . D. -13.

**Câu 210.** Cho các số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $2x + y = \frac{5}{4}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của  $P = \frac{2}{x} + \frac{1}{4y}$ .

- A.  $P_{\min} = \frac{34}{5}$ . B.  $P_{\min} = \frac{65}{4}$ . C.  $P_{\min}$  không tồn tại. D.  $P_{\min} = 5$ .

**Câu 211.** Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn:  $2y^3 + 7y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} + 3(2y^2 + 1)$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = x + 2y$ .

- A.  $P = 10$ . B.  $P = 4$ . C.  $P = 6$ . D.  $P = 8$ .

**Câu 212.** Cho  $x, y$  là các số thực dương thỏa mãn điều kiện:  $\begin{cases} x^2 - xy + 3 = 0 \\ 2x + 3y - 14 \leq 0 \end{cases}$ . Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = 3x^2y - xy^2 - 2x^3 + 2x$ .

- A. 8. B. 0. C. 12. D. 4.

**DẠNG 8**

**Toán thực tế ứng dụng khái niệm GTLN, GTNN của hàm số**

- ☑ Biểu diễn dữ kiện cần đạt max – min qua một hàm  $f(t)$ .
- ☑ Khảo sát hàm  $f(t)$  trên miền điều kiện của hàm và suy ra kết quả.
- ⚠ *Các bài toán liên quan chuyển động*
- ☑ Nếu phương trình chuyển động của vật là  $s = f(t)$  thì  $v(t) = f'(t)$  là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm  $t$ .
- ☑ Một vật chuyển động có phương trình  $s = f(t)$  thì đạo hàm cấp hai (nếu có) là gia tốc tức thời của chuyển động. Ta có  $a(t) = f''(t)$ .
- ⚠ *Một số dạng khác*
- ☑ Nếu hàm số  $T = f(t)$  biểu thị nhiệt độ  $T$  theo thời gian  $t$  thì  $f'(t_0)$  biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm  $t_0$ .
- ☑ Cường độ tức thời của điện lượng  $Q = Q(t)$  tại thời điểm là  $I(t_0) = Q'(t_0)$ .

**1 Ví dụ mẫu**

**Ví dụ 53 (Mức độ 2).** Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình

$$s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5,$$

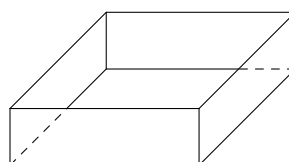
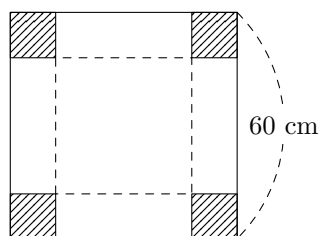
trong đó  $t$  tính bằng giây và  $s$  tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?

**Ví dụ 54 (Mức độ 2).** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ  $t$  là  $f(t) = 45t^2 - t^3$ . Nếu xem  $f'(t)$  là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm  $t$ . Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ mấy?

**Ví dụ 55 (Mức độ 2).** Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi bằng 18 cm, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

**Ví dụ 56 (Mức độ 3).** Khi xây nhà, chủ nhà cần làm một bồn nước bằng gạch và xi măng có dạng hình hộp đứng đáy là hình chữ nhật có chiều rộng là  $x$  (m), chiều dài gấp 2 lần chiều rộng và không nắp, có chiều cao là  $h$  (m), có thể tích là  $\frac{4}{3} \text{ m}^3$ . Tìm chiều rộng của đáy hình chữ nhật để chi phí xây dựng là thấp nhất.

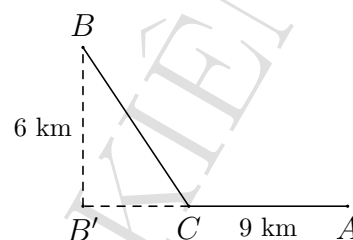
**Ví dụ 57 (Mức độ 2).** Từ một tấm bìa carton hình vuông có độ dài cạnh bằng 60 cm, người ta cắt bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc rồi gấp thành một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp (Hình bên). Tính cạnh của các hình vuông bị cắt sao cho thể tích của chiếc hộp là lớn nhất.





**Ví dụ 58 (Mức độ 3).**

Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ một điểm  $A$  trên bờ đến một điểm  $B$  trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Giá để xây đường ống trên bờ là 50 000 USD mỗi km, và 130 000 USD mỗi km để xây dưới nước. Gọi  $B'$  là điểm trên bờ biển sao cho  $BB'$  vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ  $A$  đến  $B'$  là 9 km. Vị trí  $C$  trên đoạn  $AB'$  sao cho khi nối ống theo  $ACB$  thì số tiền ít nhất. Khi đó khoảng cách từ  $C$  đến  $A$  là bao nhiêu?



**Ví dụ 59 (Mức độ 3).** Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2000000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 50000 đồng một tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Công ty đã tìm ra phương án cho thuê đạt lợi nhuận lớn nhất. Hỏi thu nhập nhiều nhất công ty có thể đạt được trong một tháng là bao nhiêu?

**Ví dụ 60 (Mức độ 3).** Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích  $V$  (lít) của lượng xăng trong bình xăng tính theo thời gian bơm xăng  $t$  (phút) được cho bởi công thức

$$V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4 \text{ với } 0 \leq t \leq 0,5.$$

(Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson)

| Phát biểu                                                                                                                                                                                               | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Ban đầu trong bình xăng có 4 lít xăng.                                                                                                                                                               |   |   |
| b) Sau khi bơm 30 giây thì bình xăng đầy. Dung tích của bình xăng trong xe là 42 lít.                                                                                                                   |   |   |
| c) Để lượng xăng trong bình xăng có thể tích tối thiểu là 13,6 lít thì thời gian bơm xăng $t \leq 0,2$ phút.                                                                                            |   |   |
| d) Khi xăng chảy vào bình xăng, gọi $V(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm $t$ với $0 \leq t \leq 0,5$ . Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất. |   |   |

**Ví dụ 61 (Mức độ 3).** Khối lượng  $q$  (kg) của một mặt hàng mà cửa tiệm bán được trong một ngày phụ thuộc vào giá bán  $p$  (nghìn đồng/kg) theo công thức  $p = 15 - \frac{1}{2}q$ . Doanh thu từ việc bán mặt hàng trên của cửa tiệm được tính theo công thức  $R = pq$ .

| Phát biểu                                                                                                                          | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Nếu một mặt hàng với giá 5 nghìn đồng/kg thì khối lượng mặt hàng đó mà cửa tiệm bán được trong một ngày là 20 kg.               |   |   |
| b) Công thức biểu diễn $R$ theo $p$ là $R = -2p^2 + 30p$ với $p > 0$ .                                                             |   |   |
| c) Để một mặt hàng có doanh thu tối thiểu là 88 nghìn đồng, thì giá của của mặt hàng đó $p \geq 4$ nghìn đồng/kg.                  |   |   |
| d) Giá bán mỗi kilôgam sản phẩm để đạt được doanh thu cao nhất là 7,5 nghìn đồng và doanh thu cao nhất khi đó là 121,5 nghìn đồng. |   |   |

**Ví dụ 62 (Mức độ 3).** Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích  $1000 \text{ cm}^3$ . Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá 1,2 nghìn đồng/ $\text{cm}^2$ , trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá 0,75 nghìn đồng/ $\text{cm}^2$ . Tìm bán kính đáy của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.

KQ:

**Ví dụ 63.** Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe X với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang bán chạy này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi theo đó, giá bán mới là bao nhiêu thì lợi nhuận thu được cao nhất?

**Ví dụ 64.** Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1 000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức:

$$N(t) = 1\,000 + \frac{100t}{100 + t^2} \text{ (con)},$$

trong đó  $t$  là thời gian tính bằng giây.

(Nguồn: R. Larson and B. Edwards, *Calculus 10e*, Cengage 2014)

Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

## 2 Bài tập tự luận

**Bài 37 (Mức độ 2).** Một vật chuyển động theo quy luật  $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$  với  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

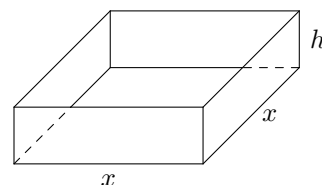
**Bài 38 (Mức độ 2).** Trong các hình chữ nhật có chu vi là 24 cm, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

**Bài 39 (Mức độ 2).** Trong một trò chơi, mỗi đội được phát một tấm bìa hình vuông có cạnh bằng 30 cm. Nhiệm vụ của mỗi đội chơi là cắt ở bốn góc của tấm bìa này bốn hình vuông bằng nhau, rồi gấp tấm bìa lại (Hình 1.6) và dán keo để được một cái hộp không nắp có dạng hình hộp chữ nhật. Đội nào thiết kế được một cái hộp có thể tích lớn nhất sẽ dành chiến thắng. Hãy xác định cạnh của các hình vuông bị cắt để thu được hộp có thể tích lớn nhất.

**Bài 40 (Mức độ 2).** Tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5 cm có thể có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

**Bài 41 (Mức độ 3).**

Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng  $108 \text{ cm}^2$  như hình bên. Tìm các kích thước của chiếc hộp sao cho thể tích của hộp là lớn nhất.



## 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 213 (Mức độ 2).** Đợt xuất khẩu gạo của tỉnh A thường kéo dài trong 2 tháng (60 ngày). Người ta nhận thấy số lượng xuất khẩu gạo tính theo ngày thứ  $t$  được xác định bởi công thức  $S(t) = \frac{2}{5}t^3 - 63t^2 + 3240t - 3100$  (tấn) với  $(1 \leq t \leq 60)$ . Hỏi trong 60 ngày đó thì ngày thứ mấy có số lượng xuất khẩu gạo cao nhất.

A. 60.

B. 45.

C. 30.

D. 25.

**Câu 214 (Mức độ 2).** Độ giảm huyết áp của một bệnh  $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$  trong đó  $x$  là số miligam thuốc được tiêm cho bệnh nhân ( $0 < x < 30$ ). Để bệnh nhân đó có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm vào là

- A.  $x = 15$  mg. B.  $x = 20$  mg. C.  $x = 20$  mg. D.  $x = 25$  mg.

**Câu 215 (Mức độ 2).** Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong  $t$  giờ được cho bởi công thức  $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$  mg/L. Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

- A. 4 giờ. B. 3 giờ. C. 1 giờ. D. 2 giờ.

**Câu 216 (Mức độ 2).** Một xe buýt của hãng xe A có sức chứa tối đa là 50 hành khách. Nếu một chuyến xe buýt chở  $x$  hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là  $20\left(3 - \frac{x}{40}\right)^2$  (nghìn đồng). Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất khi có 50 hành khách.  
B. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất khi có 45 hành khách.  
C. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất bằng 2 700 000 (đồng).  
D. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất bằng 3 200 000 (đồng).

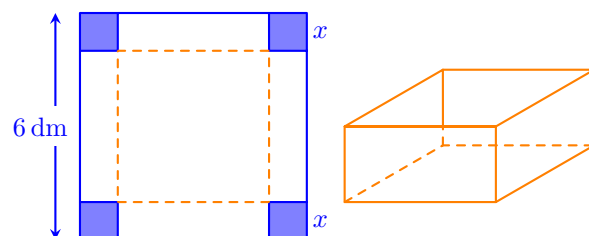
**Câu 217 (Mức độ 2).** Khi làm nhà kho, bác An muốn cửa sổ có dạng hình chữ nhật với chu vi bằng 4 m. Tìm kích thước khung cửa sổ sao cho diện tích cửa sổ lớn nhất (để hứng được nhiều ánh sáng nhất)?

- A. 3 m. B. 1 m. C. 2 m. D. 1,5 m.

**Câu 218 (Mức độ 2).**

Cho một tấm nhôm có dạng hình vuông cạnh 6 dm. Bác Ánh cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh độ dài bằng  $x$  (dm), rồi gập tấm nhôm lại như hình bên để được một cái hộp có dạng khối hộp chữ nhật không có nắp. Gọi  $V$  là thể tích của khối hộp đó tính theo  $x$ . Tìm  $x$  (dm) để khối hộp tạo thành có thể tích lớn nhất.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.



**Câu 219 (Mức độ 2).** Ho ép khí quản lại, ảnh hưởng đến tốc độ của không khí đi vào khí quản. Tốc độ của không khí đi vào khí quản khi ho được cho bởi công thức  $V = k(R - r)r^2$  với  $0 \leq r < R$ , trong đó  $k$  là hằng số,  $R$  là bán kính bình thường của khí quản,  $r$  là bán kính khí quản khi ho.

(Nguồn: R. Lason and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014)

Hỏi bán kính của khí quản khi ho bằng bao nhiêu thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất?

- A.  $\frac{R}{2}$ . B.  $\frac{R}{3}$ . C.  $\frac{3R}{4}$ . D.  $\frac{2R}{3}$ .

**Câu 220 (Mức độ 3).** Ông Nam cần xây một cái bể chứa nước có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp đáy để phục vụ cho việc tưới cây trong vườn. Do các điều kiện về diện tích vườn, ông Nam cần bể có thể tích là  $36 \text{ m}^3$ , đáy bể có chiều dài gấp hai lần chiều rộng và chiều rộng không quá 4 m, biết rằng chi phí vật liệu xây dựng mỗi mét vuông diện tích bề mặt là như nhau. Hỏi chiều cao bể nước bằng bao nhiêu để tổng chi phí vật liệu là nhỏ nhất?

- A. 3 m. B. 18 m. C. 2 m. D. 4,5 m.

**Câu 221 (Mức độ 3).** Ông An dự định làm một cái bể chứa nước hình trụ bằng inox có nắp đáy với thể tích là  $k \text{ m}^3$  ( $k > 0$ ). Chi phí mỗi  $\text{m}^2$  đáy là 600 nghìn đồng, mỗi  $\text{m}^2$  nắp là 200 nghìn đồng và mỗi  $\text{m}^2$  mặt bên là 400 nghìn đồng. Hỏi ông An cần chọn bán kính đáy của bể là bao nhiêu để chi phí làm bể là ít nhất? (Biết bề dày vỏ inox không đáng kể)

A.  $\sqrt[3]{\frac{k}{\pi}}$ .

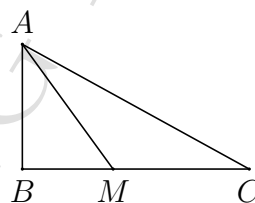
B.  $\sqrt[3]{\frac{2\pi}{k}}$ .

C.  $\sqrt[3]{\frac{k}{2\pi}}$ .

D.  $\sqrt[3]{\frac{k}{2}}$ .

**Câu 222 (Mức độ 3).**

Nhà của 3 bạn A, B, C nằm ở 3 vị trí tạo thành một tam giác vuông tại B (như hình vẽ),  $AB = 10 \text{ km}$ ,  $BC = 25 \text{ km}$  và 3 bạn tổ chức họp mặt ở nhà bạn C. Bạn B hẹn chờ bạn A tại vị trí M trên đoạn đường BC. Từ nhà, bạn A đi xe buýt đến điểm hẹn M với tốc độ 30 km/h và từ M hai bạn A, B di chuyển đến nhà bạn C bằng xe máy với tốc độ 50 km/h. Hỏi điểm hẹn M cách nhà bạn B bao nhiêu km để bạn A đến nhà bạn C nhanh nhất?



A. 5 km.

B. 7,5 km.

C. 10 km.

D. 12,5 km.

**Câu 223.** Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi 16 cm, hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng

A.  $64 \text{ cm}^2$ .

B.  $4 \text{ cm}^2$ .

C.  $16 \text{ cm}^2$ .

D.  $8 \text{ cm}^2$ .

**Câu 224.** Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích  $48 \text{ cm}^2$ , hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng

A.  $16\sqrt{3} \text{ cm}$ .

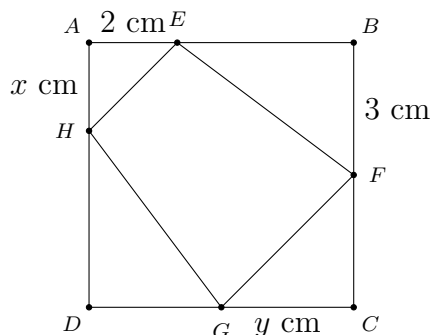
B.  $4\sqrt{3} \text{ cm}$ .

C. 24 cm.

D.  $8\sqrt{3} \text{ cm}$ .

**Câu 225.**

Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Tìm tổng  $x + y$  để diện tích hình thang EFGH đạt giá trị nhỏ nhất.



A. 7.

B. 5.

C.  $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ .

D.  $4\sqrt{2}$ .

**Câu 226.** Tam giác vuông có diện tích lớn nhất là bao nhiêu nếu tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số  $a$  ( $a > 0$ )?

A.  $\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$ .

B.  $\frac{a^2}{9}$ .

C.  $\frac{2a^2}{9}$ .

D.  $\frac{a^2}{3\sqrt{3}}$ .

**Câu 227.** Cho  $\triangle ABC$  đều cạnh  $a$ . Người ta dựng một hình chữ nhật MNPQ có cạnh MN nằm trên BC, hai đỉnh P, Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác. Xác định vị trí của điểm M sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

A.  $BM = \frac{2a}{3}$ .

B.  $BM = \frac{3a}{4}$ .

C.  $BM = \frac{a}{3}$ .

D.  $BM = \frac{a}{4}$ .

**Câu 228.** Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính 10 cm, biết một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc trên đường kính của đường tròn.

A.  $80 \text{ cm}^2$ .

B.  $100 \text{ cm}^2$ .

C.  $160 \text{ cm}^2$ .

D.  $200 \text{ cm}^2$ .

**Câu 229.** Từ một bờ tường có sẵn, người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 100 m thẳng hàng rào. Vậy làm thế nào để rào khu đất ấy theo hình chữ nhật sao cho có diện tích lớn nhất. Khi đó chiều dài và chiều rộng hình chữ nhật là

A. 50 và 25.

B. 35 và 35.

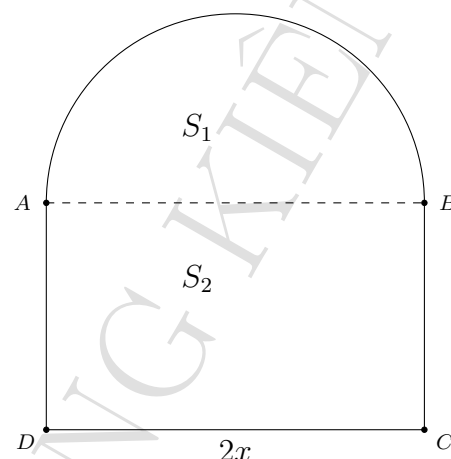
C. 75 và 25.

D. 50 và 50.

**Câu 230.**

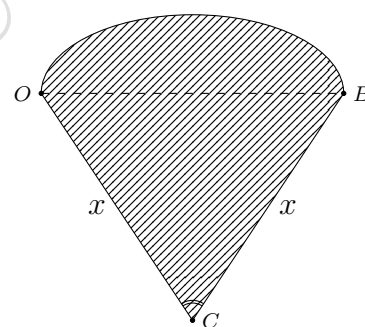
Cần phải làm cái cửa sổ mà, phía trên là hình bán nguyệt, phía dưới là hình chữ nhật, có chu vi là  $a$  (m) ( $a$  chính là chu vi hình bán nguyệt cộng với chu vi hình chữ nhật trừ đi độ dài cạnh hình chữ nhật là dây cung của hình bán nguyệt). Hãy xác định các kích thước của nó để diện tích cửa sổ là lớn nhất?

- A.** Chiều rộng bằng  $\frac{2a}{4+\pi}$ , chiều cao bằng  $\frac{a}{4+\pi}$ .  
**B.** Chiều rộng bằng  $\frac{a}{4+\pi}$ , chiều cao bằng  $\frac{2a}{4+\pi}$ .  
**C.** Chiều rộng bằng  $a(4+\pi)$ , chiều cao bằng  $2a(4+\pi)$ .  
**D.** Đáp án khác.

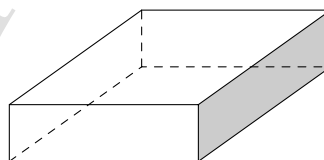
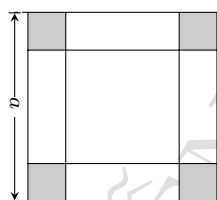
**Câu 231.**

Người ta muốn làm một cánh diều hình quạt sao cho với chu vi cho trước là  $a$  sao cho diện tích của hình quạt là cực đại. Dạng của quạt này phải như thế nào?

- A.**  $x = \frac{a}{4}; y = \frac{a}{2}$ . **B.**  $x = \frac{a}{3}; y = \frac{a}{3}$ .  
**C.**  $x = \frac{a}{6}; y = \frac{2a}{3}$ . **D.** Đáp án khác.

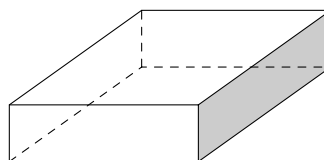
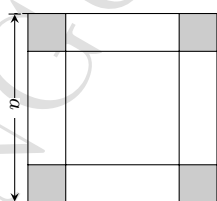


**Câu 232.** Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh  $a$ . Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gấp tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp. Tìm cạnh của hình vuông bị cắt sao cho thể tích của khối hộp là lớn nhất.



- A.**  $\frac{5a}{6}$ . **B.**  $\frac{a}{6}$ . **C.**  $\frac{a}{12}$ . **D.**  $\frac{a}{9}$ .

**Câu 233.** Có một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng  $x$  (cm) rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm  $x$  để hình hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



- A.**  $x = 6$ . **B.**  $x = 3$ . **C.**  $x = 2$ . **D.**  $x = 4$ .

**Câu 234.** Một sợi dây có chiều dài 28 m là được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là tối thiểu.

- A.** 14. **B.**  $\frac{196}{4+\pi}$ . **C.**  $\frac{112}{4+\pi}$ . **D.**  $\frac{28\pi}{4+\pi}$ .



**Câu 235.** Một bác nông dân cần xây dựng một hố ga không có nắp dạng hình hộp chữ nhật có thể tích  $3200 \text{ cm}^3$ , tỉ số giữa chiều cao của hố và chiều rộng của đáy bằng 2. Hãy xác định diện tích của đáy hố ga để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất.

- A.  $1200 \text{ cm}^2$ . B.  $160 \text{ cm}^2$ . C.  $1600 \text{ cm}^2$ . D.  $120 \text{ cm}^2$ .

**Câu 236.** Người ta phải cưa một thân cây hình trụ có đường kính 1 m, chiều dài 8 m để được một cây xà hình khối chữ nhật. Hỏi thể tích cực đại của khối gỗ sau khi cưa xong là bao nhiêu?

- A.  $V = 2 \text{ m}^3$ . B.  $V = 4 \text{ m}^3$ . C.  $V = 8 \text{ m}^3$ . D.  $V = 16 \text{ m}^3$ .

**Câu 237.**

Một tấm bìa cứng hình chữ nhật có kích thước  $3 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ . Người ta cắt mỗi góc của tấm bìa một hình vuông có cạnh là  $x$  để tạo ra hình hộp chữ nhật không nắp. Với giá trị nào của  $x$  thì thể tích hình hộp chữ nhật đạt giá trị lớn nhất?

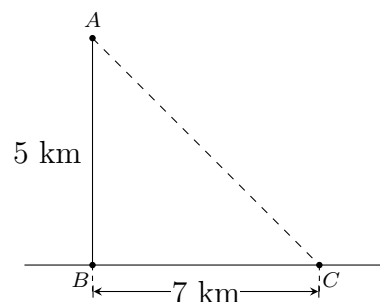
- A.  $x = \frac{1}{3} \text{ m}$ . B.  $x = 1 \text{ m}$ . C.  $x = \frac{2}{3} \text{ m}$ . D.  $x = \frac{4}{3} \text{ m}$ .



**Câu 238.**

Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng  $AB = 5 \text{ km}$ . Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7 km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến điểm M trên bờ biển với vận tốc 4 km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h (xem hình vẽ dưới đây). Tính độ dài đoạn BM để người đó đến kho nhanh nhất.

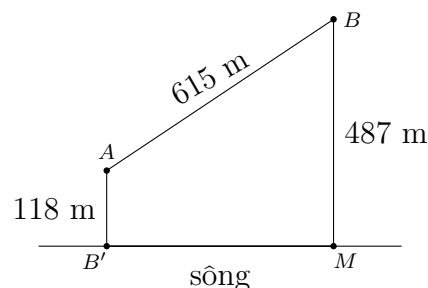
- A.  $\frac{\sqrt{74}}{4}$ . B.  $\frac{29}{12}$ . C.  $\sqrt{29}$ . D.  $2\sqrt{5}$ .



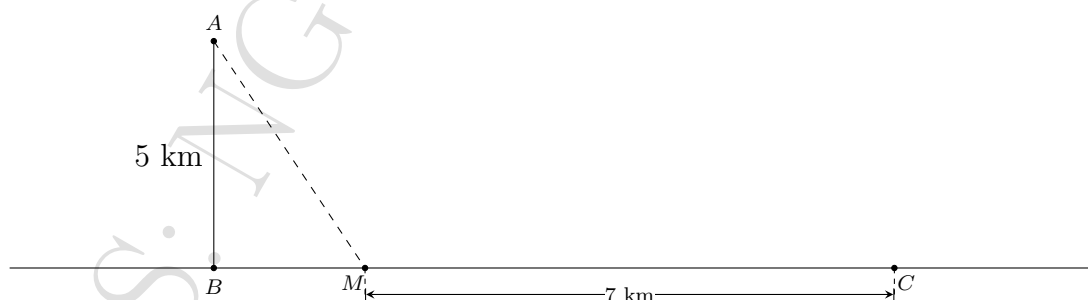
**Câu 239.**

Cho hai vị trí A, B cách nhau 615 m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118 m và 487 m. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước và mang về B. Đoạn đường ngắn nhất mà người đó phải đi là

- A. 569,5 m. B. 671,4 m. C. 779,8 m. D. 741,2 m.



**Câu 240.** Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A có khoảng cách đến bờ biển  $AB = 5 \text{ km}$ . Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng 7 km (như hình vẽ).



Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến M trên bờ biển với vận tốc 4 km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h. Vị trí của điểm M cách B một khoảng bao nhiêu để người đó đi đến kho nhanh nhất?

- A. 0 km. B. 7 km. C.  $2\sqrt{5}$  km. D.  $\frac{14 + 5\sqrt{5}}{12}$  km.

**Câu 241.** Một chất điểm chuyển động theo quy luật  $S = 6t^2 - t^3$ , vận tốc  $v(m/s)$  của chuyển động đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm  $t(s)$  bằng

- A.  $2(s)$ . B.  $12(s)$ . C.  $6(s)$ . D.  $4(s)$ .

**Câu 242.** Một vật chuyển động theo quy luật  $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$  với  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. 243 (m/s). B. 27 (m/s). C. 144 (m/s). D. 36 (m/s).

**Câu 243.** Một chất điểm chuyển động theo quy luật  $S(t) = 1 + 3t^2 - t^3$ . Vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi  $t$  (giây) bằng bao nhiêu?

- A.  $t = 2$  (s). B.  $t = 1$  (s). C.  $t = 3$  (s). D.  $t = 4$  (s).

**Câu 244.** Một chất điểm chuyển động theo quy luật  $S = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t$  với  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và  $S$  (mét) là quãng đường vật chuyển động trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của chất điểm là bao nhiêu?

- A. 88 (m/s). B. 25 (m/s). C. 100 (m/s). D. 11 (m/s).

**Câu 245.** Một chất điểm chuyển động theo phương trình  $S = -2t^3 + 18t^2 + 2t + 1$ , trong đó  $t$  tính bằng giây,  $a$  tính bằng mét ( $m$ ). Tính thời gian vận tốc chất điểm đạt giá trị lớn nhất.

- A.  $t = 5s$ . B.  $t = 6s$ . C.  $t = 3s$ . D.  $t = 1s$ .

**Câu 246.** Hai số có hiệu là 13, tích của chúng bé nhất khi hai số đó bằng

- A. 5; -8. B. 1; -12. C.  $-\frac{13}{2}; \frac{13}{2}$ . D. 6; -7.

**Câu 247.** Công suất  $P$  (đơn vị  $W$ ) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin 12V được cho bởi công thức  $P = 12I - 0,5I^2$  với  $I$  (đơn vị  $A$ ) là cường độ dòng điện. Tìm công suất tối đa của mạch điện.

- A. 72. B. 12. C.  $-\frac{1}{192}$ . D.  $\frac{23}{2}$ .

**Câu 248.** Để giảm nhiệt độ trong phòng từ  $28^\circ C$ , một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi  $T$  (đơn vị  $^\circ C$ ) là nhiệt độ phòng ở phút thứ  $t$  được cho bởi công thức  $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$  với  $t \in [1; 10]$ . Tìm nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động.

- A.  $27,832^\circ C$ . B.  $18,4^\circ C$ . C.  $26,2^\circ C$ . D.  $25,312^\circ C$ .

**Câu 249.** Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có  $n$  con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng  $P(n) = 480 - 20n$  (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều gam cá nhất?

- A. 12. B. 24. C. 6. D. 32.

**Câu 250.** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức  $G(x) = 0,025x^2(3 - x)$ , trong đó  $x$  là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân ( $x$  được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất bằng

- A. 100 mg. B. 20 mg. C. 30 mg. D. 0 mg.



**Câu 251.** Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là 300 km. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là  $v$  (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong  $t$  giờ được cho bởi công thức  $E(v) = cv^3t$ , trong đó  $c$  là hằng số và  $E$  tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất bằng

- A. 6 km/h. B. 8 km/h. C. 7 km/h. D. 9 km/h.

**Câu 252.** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ  $t$  là  $f(t) = 45t^2 - t^3, t = 0, 1, 2, \dots, 25$ . Nếu coi  $f(t)$  là hàm số xác định trên đoạn  $[0; 25]$  thì đạo hàm  $f'(t)$  được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm  $t$ . Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất?

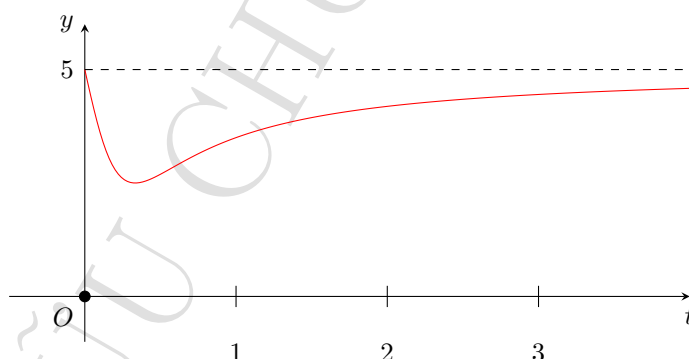
- A. Ngày thứ 19. B. Ngày thứ 5. C. Ngày thứ 16. D. Ngày thứ 15.

#### 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 253 (Mức độ 3).**

Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau  $t$  giờ ( $t \geq 0$ ) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số (có đồ thị như đường màu đỏ ở hình bên)

$$y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}.$$



(Theo: [https://www.researchgate.net/publication/264903978\\_Microrespirometric\\_characterization\\_of\\_activated\\_sludge\\_inhibition\\_by\\_copper\\_and\\_zinc](https://www.researchgate.net/publication/264903978_Microrespirometric_characterization_of_activated_sludge_inhibition_by_copper_and_zinc))

Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                                        | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Khi $t = 1$ giờ, thì nồng độ oxygen trong hồ là 3,5 mg/l.                                                                                     |   |   |
| b) Nồng độ oxygen trong hồ cao nhất là 5 mg/l.                                                                                                   |   |   |
| c) Nồng độ oxygen trong hồ thấp nhất là 2,45 mg/l.                                                                                               |   |   |
| d) Đạo hàm $y'(t)$ biểu thị tốc độ thay đổi nồng độ oxygen trong nước. Tốc độ thay đổi nồng độ oxygen lớn nhất khi $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ giờ. |   |   |

**Câu 254 (Mức độ 3).** Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hoá bằng hàm số  $N(t) = -t^3 + 12t^2, 0 \leq t \leq 12$ , trong đó  $N$  là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và  $t$  là thời gian (tuần). Khi đó

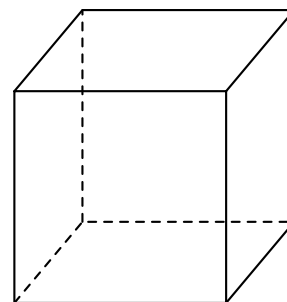
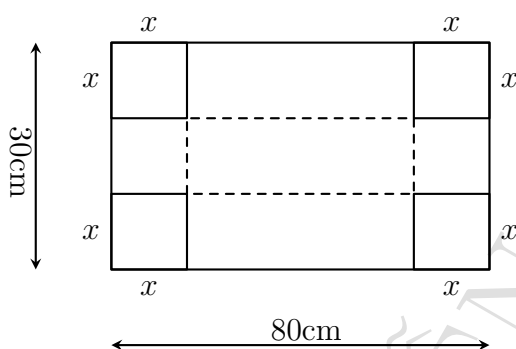
| Phát biểu                                                                             | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Sau 7 tuần thì số người bị nhiễm bệnh ở địa phương đó là 254 người.                |   |   |
| b) Số người tối đa bị nhiễm bệnh ở địa phương đó là 256 người.                        |   |   |
| c) Đạo hàm $N'(t)$ biểu thị tốc độ lây lan của virus (còn gọi là tốc độ truyền bệnh). |   |   |

| Phát biểu                                    | Đ | S |
|----------------------------------------------|---|---|
| d) Virus sẽ lây lan nhanh nhất ở tuần thứ 4. |   |   |

**Câu 255 (Mức độ 3).** Một doanh nghiệp tư nhân  $A$  chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe  $X$  với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang bán chạy này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Gọi giá bán mới là  $x$  (triệu đồng) với  $x \in [27; 31]$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                             | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Với giá bán mới là 30 triệu thì số xe bán ra là 200 chiếc.                                         |   |   |
| b) Lợi nhuận thu được được biểu thị qua hàm số $f(x) = -200 \left(x - \frac{61}{2}\right)^2 + 2450$ . |   |   |
| c) Với giá bán mới là 30 triệu thì lợi nhuận thu được là 24000 (triệu đồng).                          |   |   |
| d) Giá bán mới là 30,5 triệu đồng thì lợi nhuận thu được là lớn nhất.                                 |   |   |

**Câu 256 (Mức độ 3).** Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 30 cm và chiều dài 80 cm, người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh  $x$  (cm) với  $5 \leq x \leq 10$  và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp như hình vẽ. Gọi  $V(x)$  là thể tích được biểu diễn theo  $x$  của chiếc hộp.



Khi đó

| Phát biểu                                                                                           | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đáy của chiếc hộp có kích thước được biểu diễn theo $x$ lần lượt là $(80 - 2x)$ và $(30 - 2x)$ . |   |   |
| b) Thể tích chiếc hộp là $V(x) = \frac{1}{3}x(30 - 2x)(80 - 2x)$ .                                  |   |   |
| c) $V(10) - V(5) = 1000$ .                                                                          |   |   |
| d) Thể tích lớn nhất của chiếc hộp là $\frac{200000}{27} \text{ cm}^3$ .                            |   |   |

**Câu 257 (Mức độ 3).** Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức  $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100 + t^2}$  (con), trong đó  $t$  là thời gian tính bằng giây.

(Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014)

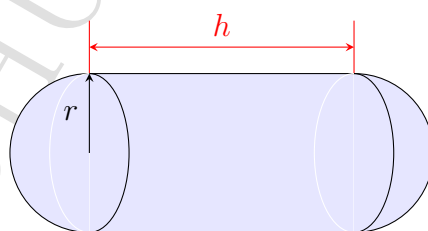
Khi đó

| Phát biểu                                                                                                  | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Số lượng vi khuẩn sau 1 giây là 1 002 con.                                                              |   |   |
| b) Số lượng vi khuẩn vượt trên 1 004 con trong khoảng thời gian 15 giây.                                   |   |   |
| c) Số lượng vi khuẩn có thể đạt được 1 006 con kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. |   |   |
| d) Số lượng vi khuẩn đạt lớn nhất sau 10 giây kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.  |   |   |

## 5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

### Câu 258 (Mức độ 4).

Một thùng chứa nhiên liệu gồm phần ở giữa là một hình trụ có chiều dài  $h$  mét ( $h > 0$ ) và hai đầu là các nửa hình cầu bán kính  $r$  ( $r > 0$ ) (Hình bên). Biết rằng thể tích của thùng chứa là  $144\,000\pi \text{ m}^3$ . Để sơn mặt ngoài của phần hình cầu cần 20 000 đồng cho  $1 \text{ m}^2$ , còn sơn mặt ngoài cho phần hình trụ cần 10 000 đồng cho  $1 \text{ m}^2$ . Xác định  $r$  để chi phí cho việc sơn diện tích mặt ngoài thùng chứa (bao gồm diện tích xung quanh hình trụ và diện tích hai nửa hình cầu) là nhỏ nhất, biết rằng bán kính  $r$  không được vượt quá 50 m. KQ:



**Câu 259 (Mức độ 2).** Một đoàn tàu chuyển động thẳng khởi hành từ một nhà ga. Quãng đường  $S$  (mét) đi được của đoàn tàu là một hàm số của thời gian  $t$  (giây), hàm số đó là  $S = 6t^2 - t^3$ . Tìm thời điểm  $t$  (giây) mà tại đó vận tốc  $v$  (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất. KQ:

**Câu 260 (Mức độ 3).** Hộp sữa 1 lít được thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh  $x$  cm. Tìm  $x$  để diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất. KQ:

**Câu 261 (Mức độ 3).** Ông Bình đặt thợ làm một bể cá, nguyên liệu bằng kính trong suốt, không có nắp đáy dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chứa được  $220\,500 \text{ cm}^3$  nước. Biết tỉ lệ giữa chiều cao và chiều rộng của bể bằng 3. Xác định diện tích đáy của bể cá để tiết kiệm nguyên vật liệu nhất. KQ:

**Câu 262.** Cho hình chữ nhật có diện tích bằng 100 ( $\text{cm}^2$ ). Hỏi chiều rộng của nó bằng bao nhiêu để chu vi của nó nhỏ nhất? KQ:

**Câu 263.** Có một tấm gỗ hình vuông cạnh 200 cm. Cắt một tấm gỗ có hình tam giác vuông, có tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số 120 cm từ tấm gỗ trên sao cho tấm gỗ hình tam giác vuông có diện tích lớn nhất. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ này là bao nhiêu? KQ:

**Câu 264.** Người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 180 mét thẳng hàng rào. Ở đó người ta tận dụng một bờ giậu có sẵn để làm một cạnh của hàng rào và rào thành mảnh đất hình chữ nhật. Hỏi mảnh đất hình chữ nhật được rào có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu? KQ:

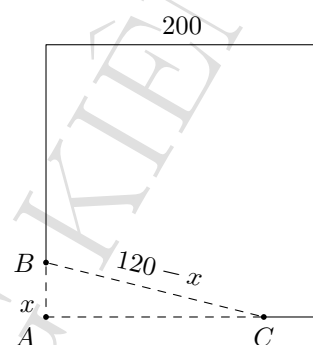
**Câu 265.** Một lão nông chia đất cho con trai để người con canh tác riêng, biết người con sẽ được chọn miếng đất hình chữ nhật có chu vi bằng 800 m. Hỏi anh ta chọn mảnh đất có chiều dài bao nhiêu để diện tích canh tác lớn nhất? KQ:

**Câu 266 (Mức độ 4).**

Cho một tấm gỗ hình vuông cạnh 200 cm. Người ta cắt một tấm gỗ có hình một tam giác vuông  $ABC$  từ tấm gỗ hình vuông đã cho như hình vẽ bên. Biết  $AB = x$  ( $0 < x < 60$  cm) là một cạnh góc vuông của tam giác  $ABC$  và tổng độ dài cạnh góc vuông  $AB$  với cạnh huyền  $BC$  bằng 120 cm. Tìm  $x$  để tam giác  $ABC$  có diện tích lớn nhất.

KQ:

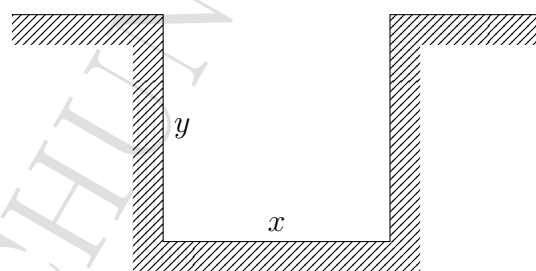
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 267.**

Trong lĩnh vực thủy lợi, cần phải xây dựng nhiều mương dẫn nước dạng “Thủy động học” (Ký hiệu diện tích tiết diện ngang của mương là  $S$ ,  $\ell$  là độ dài đường biên giới hạn của tiết diện này,  $\ell$ -đặc trưng cho khả năng thấm nước của mương; mương được gọi là có dạng thủy động học nếu với  $S = 50$  m,  $\ell$  là nhỏ nhất). Tính tổng các kích thước của mương dẫn nước? Nếu mương dẫn nước có tiết diện ngang là hình chữ nhật như hình vẽ bên.

KQ:

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

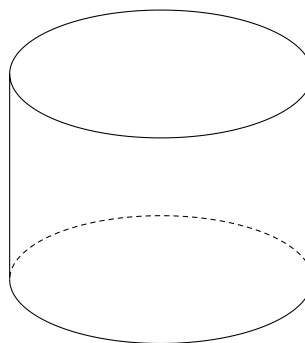


**Câu 268.** Trong các hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính  $R = 1$ , hình trụ có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 269.** Bạn Hiền là một học sinh lớp 12, bố bạn là một thợ hàn. Bố bạn định làm một chiếc thùng hình trụ từ một mảnh tôn có chu vi 120 cm theo cách dưới đây



Bằng kiến thức đã học em giúp bố bạn Hiền chọn mảnh tôn để làm được chiếc thùng có thể tích lớn nhất, khi đó chiều dài của mảnh tôn là bao nhiêu?

KQ:

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 270.** Một vật chuyển động theo quy luật  $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$  với  $t$  (giây) là khoảng thời gian từ khi vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật di chuyển trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất vật đạt được bằng bao nhiêu (m/s)?

KQ:

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 271.** Một chất điểm chuyển động theo quy luật  $s(t) = -t^3 + 6t^2$  với thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động,  $s(t)$  là quãng đường đi được trong khoảng thời gian  $t$  giây. Tính thời điểm  $t$  mà tại đó vận tốc đạt giá trị lớn nhất.

KQ:

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

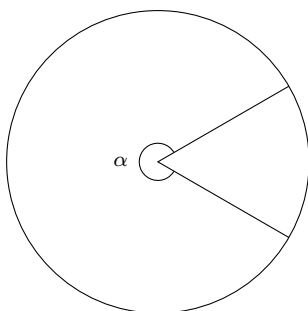
**Câu 272.** Một vật chuyển động theo quy luật  $s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t$ , với  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong

khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu (m/s)? KQ:

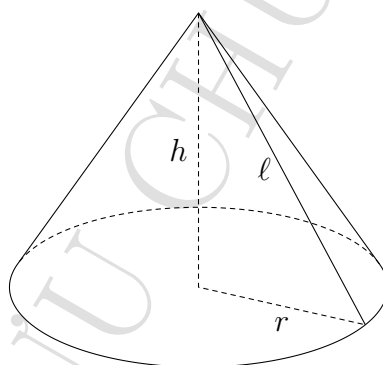
**Câu 273.** Một chất điểm chuyển động theo quy luật  $s(t) = t^2 - \frac{1}{6}t^3$  (m). Tìm thời điểm  $t$  (giây) mà tại đó vận tốc  $v$  (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất. KQ:

**Câu 274.** Một chất điểm chuyển động trong 20 giây đầu tiên có phương trình  $s(t) = \frac{1}{12}t^4 - t^3 + 6t^2 + 10t$ , trong đó  $t > 0$  với  $t$  tính bằng giây (s) và  $s(t)$  tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc của vật bằng bao nhiêu (m/s)? KQ:

**Câu 275.** Cho một tấm tôn hình tròn có diện tích  $4\pi \text{ dm}^2$ . Người ta cắt thành một hình quạt có góc ở tâm là  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 2\pi$ ) như Hình 1 để làm thành một cái gầu múc nước hình nón như Hình 2. Thể tích lớn nhất của cái gầu là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm). KQ:



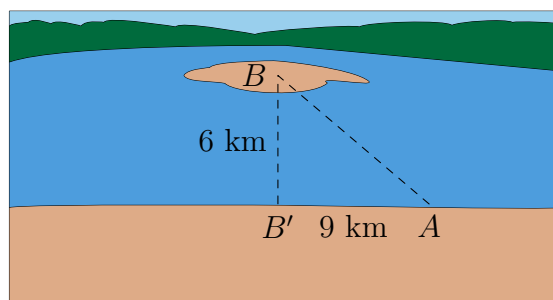
Hình 1



Hình 2

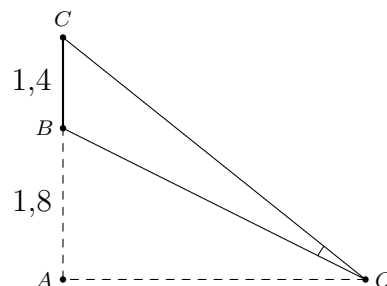
**Câu 276.**

Một công ty xây dựng muốn làm một đường ống dẫn từ một điểm  $A$  trên bờ đến một điểm  $B$  trên một hòn đảo (như hình vẽ). Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Giá để xây đường ống trên bờ là 50 000 USD mỗi km, và 130 000 USD mỗi km để xây dưới nước.  $B'$  là điểm trên bờ biển sao cho  $BB'$  vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ  $A$  đến  $B'$  là 9 km. Vị trí  $C$  trên đoạn  $AB'$  sao cho khi nối ống theo  $ACB$  thì số tiền ít nhất. Khi đó  $C$  cách  $A$  một đoạn bằng bao nhiêu? KQ:



**Câu 277.**

Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4 m được đặt ở độ cao 1,8 m so với tầm mắt (tính đầu mép dưới của màn hình như hình vẽ). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng cách màn ảnh sao cho góc nhìn lớn nhất. Hãy xác định vị trí đó. KQ:



## THẦY KIÊN TOÁN: ————— DẠY THẬT - HỌC THẬT - GIÁ TRỊ THẬT —————

## K12 – CHƯƠNG 1

## §4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

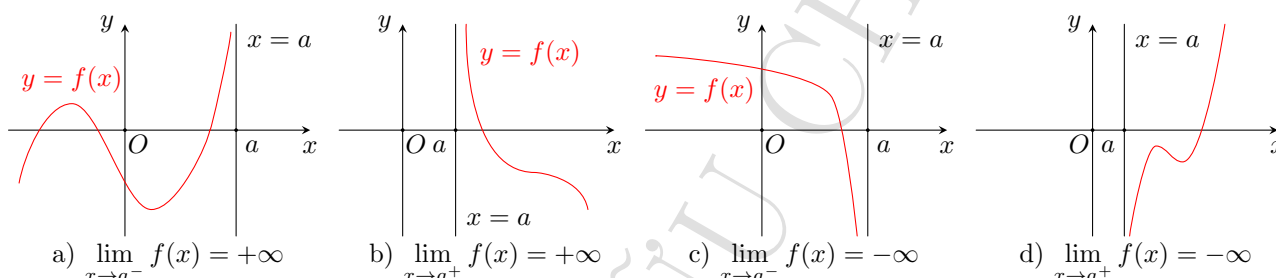
## A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

## 1 Đường tiệm cận đứng

**Định nghĩa 4** Đường thẳng  $x = a$  được gọi là một **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty.$$

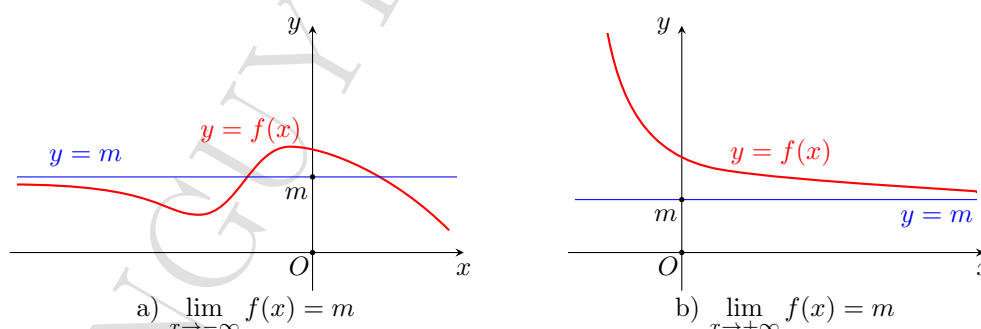
Đường thẳng  $x = a$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  được minh họa như hình dưới.



## 2 Đường tiệm cận ngang

**Định nghĩa 5** Đường thẳng  $y = m$  được gọi là một **đường tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nếu  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m$  hoặc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$ .

Đường thẳng  $y = m$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  được minh họa như hình dưới.

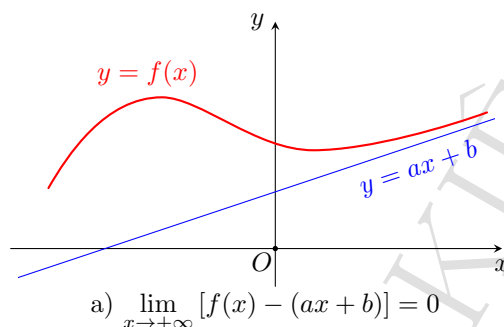
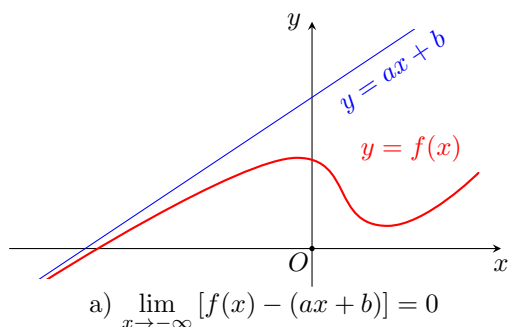


## 3 Đường tiệm cận xiên

**Định nghĩa 6** Đường thẳng  $y = ax + b$ ,  $a \neq 0$ , được gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nếu  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$  hoặc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ .

Đường thẳng  $y = ax + b$  là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  được minh họa như hình dưới.





## B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

### DẠNG 1

#### Tìm tiệm cận của đồ thị hàm phân thức, hàm căn thức

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Để tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang, ta làm như sau:

##### a) Các bước tìm tiệm cận đứng:

- Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là  $x = x_0$ .
- Tính giới hạn một bên tại  $x_0$ . Nếu xảy ra  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$  hoặc  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$  thì ta kết luận  $x = x_0$  là đường tiệm cận đứng.

##### b) Các bước tìm tiệm cận ngang:

- Tính  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  và  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- Xem ở giá trị nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở giá trị đó.

##### c) Các bước tìm TCX $y = ax + b$ : Ta xác định hệ số của $a$ và $b$ trong 2 trường hợp sau

- Tính  $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$ .
- Tính  $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$ .

##### d) Lưu ý:

- Nếu  $a = 0$  thì tiệm cận xiên chính là tiệm cận ngang.
- Đối với hàm số phân thức  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ , ta có thể chia đa thức, biến đổi về dạng

$$f(x) = a'x + b' + \frac{e}{mx + n}, \text{ với } e \neq 0$$

Suy ra  $y = a'x + b'$  là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

- Đồ thị hàm số  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$  luôn có TCD  $x = -\frac{d}{c}$  và TCN:  $y = \frac{a}{c}$ .

### 1

#### Ví dụ mẫu

**Ví dụ 1.** Tìm phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{x+1}{2-x}$ .



**Ví dụ 2.** Tìm phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = f(x) = \frac{-x^2 - 3x - 3}{x + 1}$ .

**Ví dụ 3.** Tính khoảng cách giữa hai tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{x^2 - 2}$ .

**Ví dụ 4.** Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4}$  bằng bao nhiêu?

**Ví dụ 5.** Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1}$  bằng bao nhiêu?

**Ví dụ 6.** Tìm giao điểm  $I$  giữa hai tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}$ .

**Ví dụ 7.** Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{1 - x}$ .

**Ví dụ 8.** Cho hàm số sau  $y = \frac{x + 1}{x^2 - 4}$ . Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau

| Phát biểu                                                           | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số có đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang.          |   |   |
| b) Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng.                          |   |   |
| c) Đồ thị hàm số có đường thẳng $x = 0$ là một đường tiệm cận đứng. |   |   |
| d) Khoảng cách giữa hai đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là 2. |   |   |

**Ví dụ 9.** Cho hàm số  $y = \frac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6}$ . Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau

| Phát biểu                                                                 | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$ . |   |   |
| b) Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng là $x = 3$ ; $x = 2$ .          |   |   |
| c) Đồ thị hàm số có tất cả 2 đường tiệm cận.                              |   |   |
| d) $x = 3$ là tiệm cận đứng duy nhất của đồ thị hàm số.                   |   |   |

**Ví dụ 10.** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{x + 1}{\sqrt{2x^2 - x - 1}}$  là

KQ:

## 2

## Bài tập tự luận

**Bài 1.** Tìm các tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x^2 + 9x + 11}{2x + 5}$ .

**Bài 2.** Tìm đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{9x^2 + 6x + 4}}{x + 2}$ .

**Bài 3.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{mx - 8}{x + 2}$  có tiệm cận đứng.

**Bài 4.** Tính tổng tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{x + 1}{x^2 - 2x + m}$  có đúng hai đường tiệm cận.

**Bài 5.** Cho hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-3}$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $M$  là một điểm thuộc đồ thị  $(C)$ . Tìm điểm  $M$  để tổng các khoảng cách từ  $M$  đến hai đường tiệm cận của  $(C)$  đạt giá trị nhỏ nhất.

### 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 1.** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{x+2}{x+1}$  là

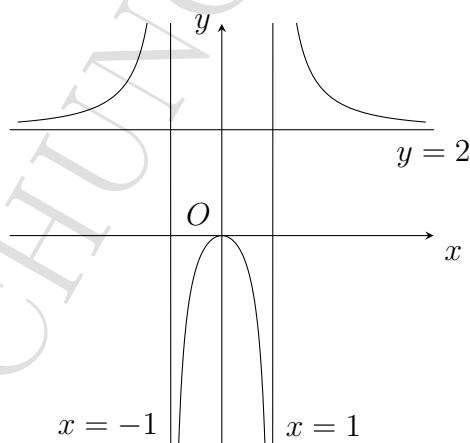
- A.  $x = -1$ . B.  $x = -2$ . C.  $x = 1$ . D.  $x = 2$ .

**Câu 2.**

Cho hàm số  $y = \frac{2x^2}{x^2-1}$  có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên.

Số các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang và tiệm cận xiên (nếu có) của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 5.



**Câu 3.** Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2+3x+5}{x+2}$  là

- A.  $y = x$ . B.  $y = x + 1$ . C.  $y = x + 2$ . D.  $y = x + 3$ .

**Câu 4.** Cho hàm số thỏa mãn  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Đường thẳng  $x = 2$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.  
B. Đường thẳng  $y = 2$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.  
C. Đường thẳng  $y = 1$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.  
D. Đường thẳng  $x = 2$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

**Câu 5.** Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2+2x-2}{x+2}$  là

- A.  $y = -2$ . B.  $y = 1$ . C.  $y = x + 2$ . D.  $y = x$ .

**Câu 6.** Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x^3+3x^2-3}{x^2-1}$  là đường thẳng có phương trình

- A.  $y = 2x + 3$ . B.  $y = 2x + 1$ . C.  $y = x + 3$ . D.  $y = x + 1$ .

**Câu 7.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-4x+3}$  có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

**Câu 8.** Tìm  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{(m+1)x-5m}{2x-m}$  có đường tiệm cận ngang đi qua điểm  $A(2022; 1)$ .

- A.  $m = 0$ . B.  $m = \frac{5}{2}$ . C.  $m = 1$ . D.  $m = 2$ .

**Câu 9.** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \sqrt{4x^2-8x+5} + 2x$  có phương trình là

A.  $y = 4$ .

B.  $y = -2$ .

C.  $y = 2$ .

D.  $y = -4$ .

**Câu 10.** Biết đồ thị hàm số  $y = \frac{mx + \sqrt{4x^2 + 1} + 2022}{\sqrt{x^2 - 2x}}$  có hai tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang cắt nhau tạo thành hình chữ nhật có diện tích bằng 6. Giá trị tham số thực dương  $m$  nằm trong khoảng

A.  $(0; 1)$ .

B.  $(2; 3)$ .

C.  $(1; 2)$ .

D.  $(3; 5)$ .

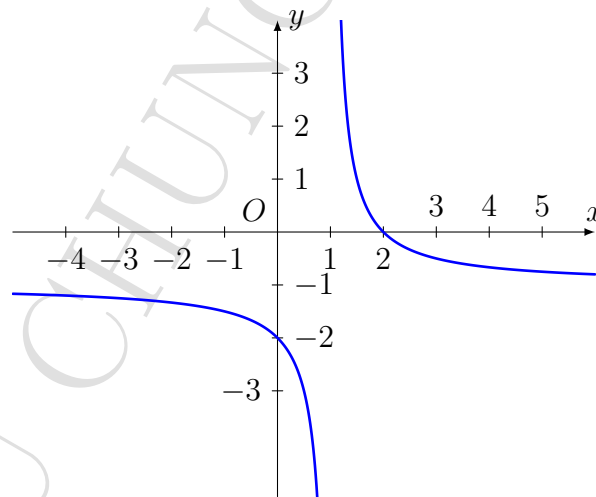
## 4

## Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 11.**

Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{1}{x-1} - 1$  có đồ thị  $(C)$  như hình bên.

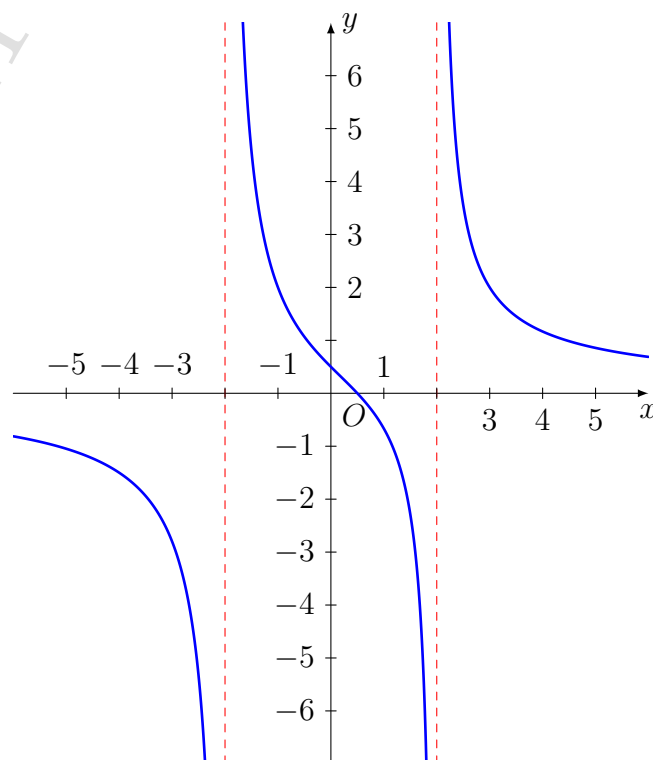
| Phát biểu                                                                | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị của hàm số $f(x)$ có 1 tiệm cận ngang là $y = -1$ .            |   |   |
| b) Đồ thị của hàm số $f(x)$ có 1 tiệm cận đứng là $x = 1$ .              |   |   |
| c) Đồ thị của hàm số $f(x)$ có 2 tiệm cận ngang là $y = -1$ và $y = 1$ . |   |   |
| d) Đồ thị của hàm số $f(x)$ có 2 tiệm cận đứng là $x = -1$ và $x = 1$ .  |   |   |



**Câu 12.**

Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{2-4x}{4-x^2}$  có đồ thị là đường cong như hình bên.

| Phát biểu                                                                                                  | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số $f(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng là $x = -2$ và $x = 2$ .                                  |   |   |
| b) Đồ thị hàm số $f(x)$ chỉ có tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang.                                     |   |   |
| c) Đồ thị hàm số $f(x)$ có 1 đường tiệm cận ngang là trục hoành.                                           |   |   |
| d) Đồ thị hàm số $f(x)$ có đúng 1 đường tiệm cận đứng là $x = -2$ và đúng 1 đường tiệm cận ngang $y = 0$ . |   |   |



**Câu 13.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 2}$ .

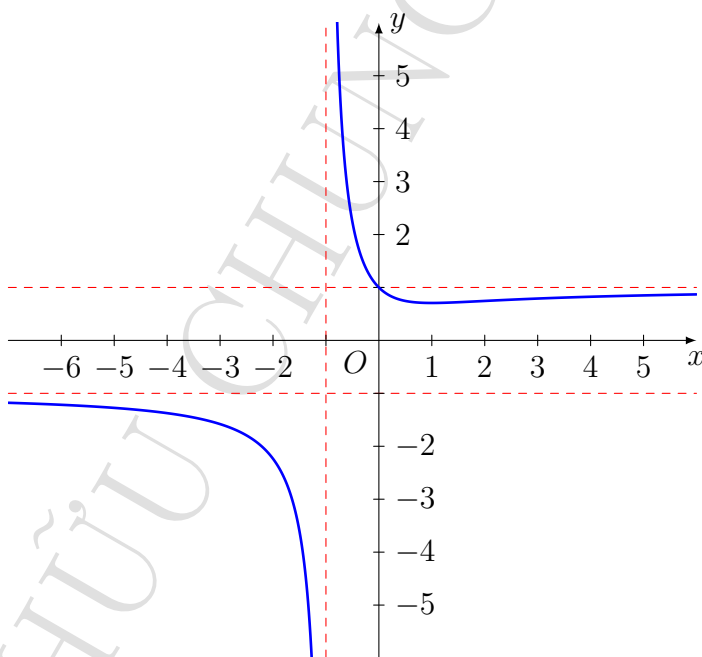
| Phát biểu | Đ | S |
|-----------|---|---|
|-----------|---|---|

| Phát biểu                                                                                                                 | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là $y = 1$ và 1 tiệm cận đứng là $x = -2$ .                                          |   |   |
| b) Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là $x = -2$ và 1 tiệm cận xiên là $\Delta: y = x + 1$ .                               |   |   |
| c) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 1)$ và điểm $(-1; 0)$ .                                         |   |   |
| d) Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là $y = 1$ , 1 tiệm cận đứng là $x = -2$ và 1 tiệm cận xiên là $\Delta: y = x - 1$ . |   |   |

**Câu 14.**

Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$  có đồ thị là đường cong như hình bên.

| Phát biểu                                        | Đ | S |
|--------------------------------------------------|---|---|
| a) $x = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.  |   |   |
| b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -1$ .  |   |   |
| c) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = -1$ . |   |   |
| d) Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang.            |   |   |



**Câu 15.** Cho hàm số  $y = \frac{x - 3}{x + 1}$  có đồ thị  $(C)$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                                                      | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .                                                                                                 |   |   |
| b) Đồ thị của hàm số chỉ có tiệm cận ngang là $y = 3$ .                                                                                                        |   |   |
| c) Hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số giao nhau tại điểm $I(-1; 1)$ .                                                                                        |   |   |
| d) Có hai điểm $M$ trên $(C)$ sao cho tiếp tuyến tại $M$ của $(C)$ tạo với hai đường tiệm cận của $(C)$ một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất. |   |   |

**5**

**Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn**

**Câu 16.** Đồ thị hàm số  $y = \sqrt{4x^2 + 4x + 3} - \sqrt{4x^2 + 1}$  có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

KQ:

**Câu 17.** Hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{3x + 1}{x - 4}$  cắt hai trục tọa độ tại các điểm  $A, B$ . Bán kính  $R$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $OAB$  là bao nhiêu?

KQ:

**Câu 18.** Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{x + 1}{|x| + 1}$  là bao nhiêu?

KQ: 

**Câu 19.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + (1-m)x - 2}{x+1}$  ( $C_m$ ). Tìm  $m$  để tiệm cận xiên của ( $C_m$ ) tạo với các trục tọa độ thành một tam giác có diện tích bằng 18.

KQ: 

**Câu 20.** Có tất cả bao nhiêu điểm trên đồ thị hàm số  $y = \frac{x+1}{x-2}$  sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất?

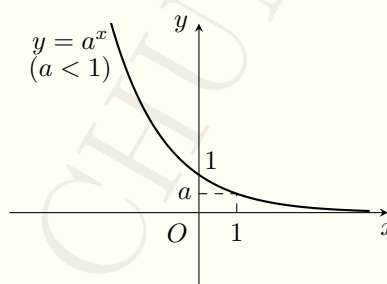
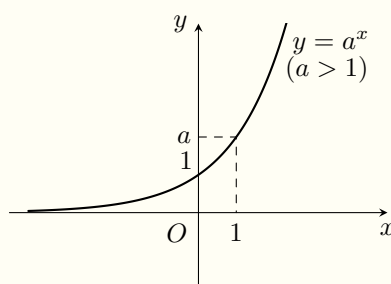
KQ: 

DẠNG

2

Tìm tiệm cận của đồ thị hàm mũ, hàm logarit

## HÀM SỐ MŨ



**Nhận xét:** Cho hàm số mũ  $y = a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ).

| $y = a^x \ (a > 1)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | $y = a^x \ (0 < a < 1)$                                                                                                                                                |           |           |           |           |     |     |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |     |           |     |           |           |           |     |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----|-----|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----------|-----|-----------|-----------|-----------|-----|-----|
| <ul style="list-style-type: none"><li>• Tập xác định: <math>\mathbb{R}</math>; tập giá trị: <math>(0; +\infty)</math>.</li></ul>                                                                                                                                                                                    | <ul style="list-style-type: none"><li>• Tập xác định: <math>\mathbb{R}</math>; tập giá trị: <math>(0; +\infty)</math>.</li></ul>                                       |           |           |           |           |     |     |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |     |           |     |           |           |           |     |     |
| <ul style="list-style-type: none"><li>• Tính liên tục: Hàm số liên tục trên <math>\mathbb{R}</math>.</li></ul>                                                                                                                                                                                                      | <ul style="list-style-type: none"><li>• Tính liên tục: Hàm số liên tục trên <math>\mathbb{R}</math>.</li></ul>                                                         |           |           |           |           |     |     |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |     |           |     |           |           |           |     |     |
| <ul style="list-style-type: none"><li>• Giới hạn đặc biệt<br/><math>\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty</math>.</li></ul>                                                                                                                                              | <ul style="list-style-type: none"><li>• Giới hạn đặc biệt<br/><math>\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0</math>.</li></ul> |           |           |           |           |     |     |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |     |           |     |           |           |           |     |     |
| <ul style="list-style-type: none"><li>• Đường tiệm cận:<br/>Nhận <math>Ox</math> làm tiệm cận ngang.</li></ul>                                                                                                                                                                                                      | <ul style="list-style-type: none"><li>• Đường tiệm cận:<br/>Nhận <math>Ox</math> làm tiệm cận ngang.</li></ul>                                                         |           |           |           |           |     |     |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |     |           |     |           |           |           |     |     |
| <ul style="list-style-type: none"><li>• Sự biến thiên: Hàm số đồng biến trên <math>\mathbb{R}</math>.</li></ul>                                                                                                                                                                                                     | <ul style="list-style-type: none"><li>• Sự biến thiên: Hàm số nghịch biến trên <math>\mathbb{R}</math>.</li></ul>                                                      |           |           |           |           |     |     |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |     |           |     |           |           |           |     |     |
| <ul style="list-style-type: none"><li>• Bảng biến thiên</li></ul> <table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>0</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>y = a^x</math></td><td><math>0</math></td><td><math>1</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr></table> | $x$                                                                                                                                                                    | $-\infty$ | $0$       | $+\infty$ | $y = a^x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ | <ul style="list-style-type: none"><li>• Bảng biến thiên</li></ul> <table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>0</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>y = a^x</math></td><td><math>+\infty</math></td><td><math>1</math></td><td><math>0</math></td></tr></table> | $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ | $y = a^x$ | $+\infty$ | $1$ | $0$ |
| $x$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | $-\infty$                                                                                                                                                              | $0$       | $+\infty$ |           |           |     |     |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |     |           |     |           |           |           |     |     |
| $y = a^x$                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | $0$                                                                                                                                                                    | $1$       | $+\infty$ |           |           |     |     |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |     |           |     |           |           |           |     |     |
| $x$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | $-\infty$                                                                                                                                                              | $0$       | $+\infty$ |           |           |     |     |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |     |           |     |           |           |           |     |     |
| $y = a^x$                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | $+\infty$                                                                                                                                                              | $1$       | $0$       |           |           |     |     |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |     |           |     |           |           |           |     |     |

HÀM SỐ LOGARIT Hàm số  $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$  có

- Tập xác định là  $\mathcal{D} = (0; +\infty)$ .  
Tập giá trị là  $T = \mathbb{R}$ .  
Hàm số liên tục trên  $(0; +\infty)$ .
- Sự biến thiên:

- + Nếu  $a > 1$  thì hàm số đồng biến trên  $(0; +\infty)$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$ .  
 Bảng biến thiên

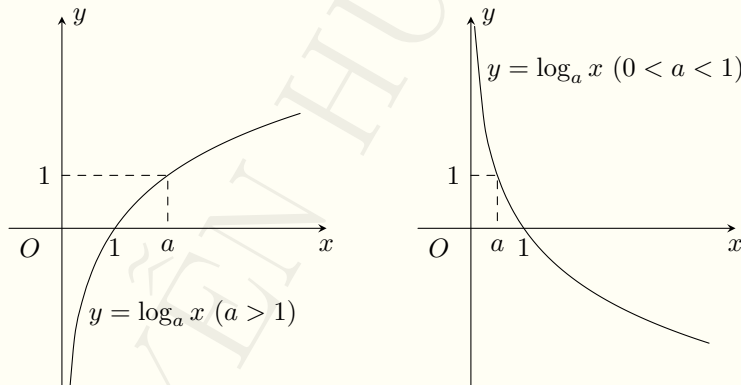
| $x$            | 0         | 1 | $+\infty$ |
|----------------|-----------|---|-----------|
| $y = \log_a x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |

- + Nếu  $0 < a < 1$  thì hàm số nghịch biến trên  $(0; +\infty)$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$ .  
 Bảng biến thiên

| $x$            | 0         | 1 | $+\infty$ |
|----------------|-----------|---|-----------|
| $y = \log_a x$ | $+\infty$ | 0 | $-\infty$ |

— Đồ thị của hàm số

- + Cắt trục hoành tại điểm  $(1; 0)$ , đi qua điểm  $(a; 1)$ .
- + Nằm bên phải trục tung.
- + Nhận  $Oy$  là đường tiệm cận đứng.



## 1 Ví dụ mẫu

**Ví dụ 11.** Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = 2^x$ .

**Ví dụ 12.** Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ .

**Ví dụ 13.** Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \log_2 x$ .

**Ví dụ 14.** Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ .

**Ví dụ 15.** Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = 2^x - 1$ .

**Ví dụ 16.** Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \log_2(x - 1)$ .

**Ví dụ 17.** Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \log_2 x + 2^x$ .

**Ví dụ 18.** Cho hàm số  $y = \log(mx^2 - 2(m + 1)x + m + 1)$ . Gọi  $S$  là tập các giá trị nguyên của tham

số  $m$  sao cho đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng mà khoảng cách giữa chúng lớn hơn 1. Tích của các phần tử của  $S$  bằng bao nhiêu?

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Ví dụ 19.** Xét hàm số  $y = \log(x^2 - 1)$ . Khi đó

| Phát biểu                                       | Đ | S |
|-------------------------------------------------|---|---|
| a) Tập xác định $\mathcal{D} = (-1; 1)$ .       |   |   |
| b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$ . |   |   |
| c) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.       |   |   |
| d) Đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận đứng. |   |   |

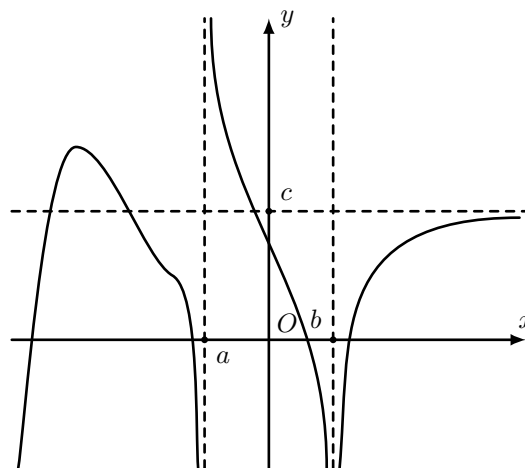
**Ví dụ 20.** Xét hàm số  $y = \frac{1}{\log x}$ . Khi đó

| Phát biểu                                                      | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tập xác định $\mathcal{D} = (0; +\infty) \setminus \{1\}$ . |   |   |
| b) Đồ thị hàm số có (duy nhất) một tiệm cận ngang.             |   |   |
| c) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng.                         |   |   |
| d) Đồ thị hàm số có tất cả hai đường tiệm cận.                 |   |   |

## 2 Bài tập tự luận

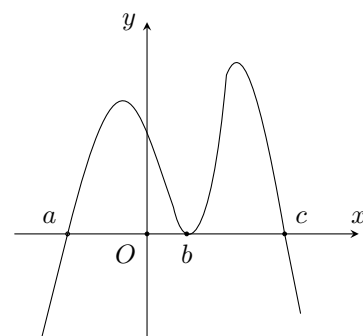
### Bài 6.

Cho đồ thị hàm số  $y = f(x)$  như hình vẽ. Đồ thị của hàm số  $y = (0,7)^{f(x)}$  có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?



### Bài 7.

Cho đồ thị hàm số  $y = f(x)$  như hình vẽ. Đồ thị của hàm số  $y = \log f(x)$  có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?





**Bài 8.** Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ .

**Bài 9.** Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \log_3(x - 2)$ .

**Bài 10.** Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = 4^x + 2$ .

### 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 21.** Hàm số nào dưới đây có đồ thị hàm số nhận hai trục tọa độ  $Ox$ ,  $Oy$  làm các đường tiệm cận?

- A.  $y = \log_2 x$ . B.  $y = x^{\frac{1}{2}}$ . C.  $y = 2^x$ . D.  $y = x^{-2}$ .

**Câu 22.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , tổng khoảng cách từ gốc tọa độ đến tất cả các đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \log_2 \frac{2x+3}{x-1}$  bằng

- A. 2. B. 3. C.  $\frac{5}{2}$ . D.  $\frac{7}{2}$ .

**Câu 23.** Cho hàm số  $y = a^x$  với  $0 < a \neq 1$ . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Đồ thị hàm số  $y = a^x$  và đồ thị hàm số  $y = \log_a x$  đối xứng nhau qua đường thẳng  $y = x$ .  
 B. Hàm số  $y = a^x$  có tập xác định là  $\mathbb{R}$  và tập giá trị là  $(0; +\infty)$ .  
 C. Hàm số  $y = a^x$  đồng biến trên tập xác định của nó khi  $a > 1$ .  
 D. Đồ thị hàm số  $y = a^x$  có tiệm cận đứng là trục tung.

**Câu 24.** Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. Đồ thị hàm số  $y = \ln(-x)$  không có đường tiệm cận ngang.  
 B. Hàm số  $y = \ln x^2$  không có cực trị.  
 C. Hàm số  $y = \ln x^2$  có một điểm cực tiểu.  
 D. Hàm số  $y = \ln x^2$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .

**Câu 25.** Đồ thị hàm số nào sau đây **không** có đường tiệm cận ngang?

- A.  $y = \log_2 \frac{1}{x}$ . B.  $y = \frac{1}{2^x}$ . C.  $y = \frac{1}{x}$ . D.  $y = \frac{\sqrt{1-x}}{x}$ .

**Câu 26.** Phát biểu nào sau đây là **sai**?

- A. Hàm số logarit  $y = \log_a x$  ( $0 < a \neq 1$ ) có tập xác định là khoảng  $(0; +\infty)$ .  
 B. Đồ thị hàm số mũ  $y = a^x$  ( $0 < a \neq 1$ ) nhận trục tọa độ  $Ox$  làm tiệm cận ngang.  
 C. Hàm số mũ  $y = a^x$  ( $0 < a \neq 1$ ) có tập xác định là khoảng  $(0; +\infty)$ .  
 D. Hàm số mũ  $y = a^x$  ( $0 < a \neq 1$ ) và hàm số logarit  $y = \log_a x$  đồng biến khi cơ số  $a > 1$ .

**Câu 27.** Đồ thị của hàm số nào dưới đây **không** có tiệm cận ngang?

- A.  $y = 3^x$ . B.  $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}$ . C.  $y = \log_3 x$ . D.  $y = \frac{1}{1+x}$ .

**Câu 28.** Đồ thị hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

- A.  $y = 2^x$ . B.  $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$ . C.  $y = \log_2 x$ . D.  $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ .

**Câu 29.** Hỏi đồ thị hàm số  $y = 7^{\frac{x-2}{x-1}}$  có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

**Câu 30.** Đồ thị hàm số  $y = \log \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 4}$  có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

#### 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 31.** Cho hàm số  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$ . Khi đó

| Phát biểu                                                           | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $f'(x) = -2x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \cdot \ln 2$ . |   |   |
| b) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ .                           |   |   |
| c) $f(0) > 0$ .                                                     |   |   |
| d) Đồ thị nhận trục tung làm tiệm cận đứng.                         |   |   |

**Câu 32.** Cho hàm số  $y = \log_{2024} x$  có đồ thị  $(C)$ . Khi đó

| Phát biểu                                                         | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ .                       |   |   |
| b) Đồ thị $(C)$ không có tiệm cận ngang.                          |   |   |
| c) Hàm số $y = \log_{2024} x$ đồng biến trên tập xác định của nó. |   |   |
| d) Đồ thị $(C)$ không có tiệm cận đứng.                           |   |   |

**Câu 33.** Cho hàm số  $y = a^x$ ,  $(0 < a < 1)$  có đồ thị  $(C)$ . Khi đó

| Phát biểu                                      | Đ | S |
|------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị $(C)$ có tiệm cận $y = 0$ .          |   |   |
| b) Đồ thị $(C)$ luôn nằm phía trên trục hoành. |   |   |
| c) Đồ thị $(C)$ luôn đi qua $M(0; 1)$ .        |   |   |
| d) Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ .   |   |   |

**Câu 34.** Cho hàm số  $y = f(x) = \log_2 x$  và  $y = g(x) = 2^x$ . Khi đó

| Phát biểu                                                             | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị của hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ luôn cắt nhau tại một điểm. |   |   |
| b) Đồ thị hai hàm số đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$ .          |   |   |
| c) Đồ thị hàm số $f(x)$ nhận $Oy$ làm tiệm cận đứng.                  |   |   |
| d) Chỉ có đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận.                           |   |   |

**Câu 35.** Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau.

| Phát biểu                                                           | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị của hàm số $y = \log x$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng. |   |   |
| b) Đồ thị của hàm số $y = 2^x$ đi qua điểm $(0; 1)$ .               |   |   |

| Phát biểu                                                                             | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| c) Đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3^x}$ nhận trục hoành làm tiệm cận ngang.          |   |   |
| d) Đồ thị hàm số $y = e^{-\frac{1}{x^2(x-1)^2}}$ có duy nhất một đường tiệm cận đứng. |   |   |

## 5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 36.** Đồ thị của hàm số  $y = e^{2x+3}$  có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận? KQ:

**Câu 37.** Đồ thị của hàm số  $y = 5^{\frac{x+1}{x-2}}$  có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận? KQ:

**Câu 38.** Đồ thị hàm số  $y = \log(x^3 - 3x)$  có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng? KQ:

**Câu 39.** Đồ thị hàm số  $y = \log \frac{x-2}{x+1}$  có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận? KQ:

**Câu 40.** Đồ thị hàm số  $y = \log \frac{x^2 - 4x + 3}{x(x-2)}$  có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận? KQ:

## DẠNG 3 Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số dựa vào BBT hoặc đồ thị, tiệm cận hàm ẩn

### I. Lý thuyết

#### 1. Đường tiệm cận ngang

Đường thẳng  $y = y_0$  gọi là đường tiệm cận ngang (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0.$$

- ☑ Nhìn “vị trí”  $\pm\infty$  để xác định đường TCN.
  - Nếu “vị trí” nào ra kết quả hữu hạn thì vị trí đó có TCN.
  - Nếu “vị trí” nào không tồn tại hoặc ra kết quả  $\infty$  thì “vị trí” đó không có TCN.
- ☑ Sử dụng máy tính cầm tay: Nhập biểu thức  $f(x)$ .
  - a) Bấm   $X = 10^8$  để kiểm tra khi  $x \rightarrow +\infty$ .
  - b) Bấm   $X = -10^8$  để kiểm tra khi  $x \rightarrow -\infty$ .

#### 2. Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng  $x = x_0$  gọi là đường tiệm cận đứng (gọi tắt là **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty.$$

- ☑ Nhìn “vị trí có hai gạch sọc” để xác định TCD.
  - Nếu “vị trí” nào xuất hiện  $\infty$  thì vị trí đó là TCD.
  - Nếu “vị trí” nào không xuất hiện  $\infty$  ở cả hai bên (giới hạn trái và giới hạn phải) thì vị trí đó không là TCD.
- ☑ Sử dụng máy tính cầm tay: Nhập biểu thức  $f(x)$ .
  - a) Bấm   $X = x_0 - 0.000001$  để kiểm tra khi  $x \rightarrow x_0^-$ .
  - b) Bấm   $X = x_0 + 0.000001$  để kiểm tra khi  $x \rightarrow x_0^+$ .

### 3. Đường tiệm cận xiên

Đường thẳng  $y = ax + b$ , ( $a \neq 0$ ) được gọi là đường tiệm cận xiên (gọi tắt là **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

## II. Phương pháp giải

a) Tìm tiệm cận ngang, tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Thực hiện theo các bước sau

☑ **B1.** Tìm tập xác định của hàm số  $f(x)$ .

☑ **B2.** Tìm các giới hạn của  $f(x)$  khi  $x$  dần tới các biên của miền xác định và dựa vào định nghĩa của các đường tiệm cận để kết luận.

**Chú ý.**

☑ Đồ thị hàm số  $f$  chỉ có thể có tiệm cận ngang khi tập xác định của nó là một khoảng vô hạn hay một nửa khoảng vô hạn (nghĩa là biến  $x$  có thể tiến đến  $+\infty$  hoặc  $-\infty$ ).

☑ Đồ thị hàm số  $f$  chỉ có thể có tiệm cận đứng khi tập xác định của nó có một trong các dạng sau:  $(a; b)$ ,  $[a; b)$ ,  $(a; b]$ ,  $(a; +\infty)$ ;  $(-\infty; a)$  hoặc là hợp của các tập hợp này và tập xác định không có một trong các dạng sau:  $\mathbb{R}$ ,  $[c; +\infty)$ ,  $(-\infty; c]$ ,  $[c; d]$

b) Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Thực hiện theo các bước sau

☑ **B1.** Tìm tập xác định của hàm số (đồ thị hàm số  $f$  chỉ có thể có tiệm cận xiên nếu tập xác định của nó là một khoảng vô hạn hay một nửa khoảng vô hạn)

☑ **B2.** Sử dụng định nghĩa.

Hoặc sử dụng định lý:

Nếu  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b$  hoặc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$  và  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = b$  thì đường thẳng  $y = ax + b$  là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $f$ .

**Chú ý:** Đối với hàm phân thức  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  trong đó  $P(x)$ ,  $Q(x)$  là hai đa thức của  $x$  ta thường dùng phương pháp sau để tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

i) Tiệm cận đứng.

Nếu  $\begin{cases} P(x_0) \neq 0 \\ Q(x_0) = 0 \end{cases}$  thì đường thẳng  $x = x_0$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

ii) Tiệm cận ngang.

☑ Nếu bậc của  $P(x)$  bé hơn bậc của  $Q(x)$  thì đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là trục hoành độ.

☑ Nếu bậc của  $P(x)$  bằng bậc của  $Q(x)$  thì đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng:  $y = \frac{A}{B}$  trong đó  $A, B$  lần lượt là hệ số của số hạng có số mũ lớn nhất của  $P(x)$  và  $Q(x)$ .

☑ Nếu bậc của  $P(x)$  lớn hơn bậc của  $Q(x)$  thì đồ thị của hàm số không có tiệm cận ngang.

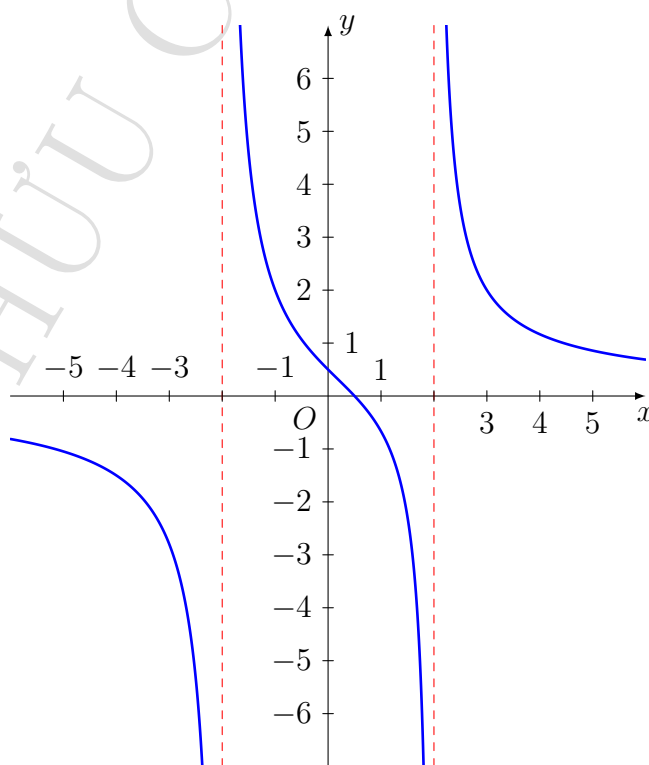
iii) Tiệm cận xiên.

- ☑ Nếu bậc của  $P(x)$  bé hơn hay bằng bậc của  $Q(x)$  hoặc lớn hơn bậc của  $Q(x)$  từ hai bậc trở lên thì đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên.
- ☑ Nếu bậc của  $P(x)$  lớn hơn bậc của  $Q(x)$  một bậc và  $P(x)$  không chia hết cho  $Q(x)$  thì đồ thị hàm có tiệm cận xiên và ta tìm tiệm cận xiên bằng cách chia  $P(x)$  cho  $Q(x)$  và viết  $f(x) = ax + b + \frac{R(x)}{Q(x)}$ , trong đó  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{Q(x)} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{R(x)}{Q(x)} = 0$ .  
Suy ra đường thẳng  $y = ax + b$  là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.
- ☑ Đồ thị hàm số  $y = mx + n + \sqrt{ax^2 + bx + c}$  có các đường cận là  $y = mx + n \pm \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$ .

## 1 Ví dụ mẫu

**Ví dụ 21.**

Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{2-4x}{4-x^2}$  có đồ thị là đường cong như bên. Các đường thẳng  $x = 2$  và  $x = -2$  có phải là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho hay không? Vì sao?



**Ví dụ 22.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

|      |           |      |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $0$  | $1$ | $+\infty$ |
| $y'$ | $-$       | $+$  | $0$ | $-$       |
| $y$  | $+\infty$ | $-1$ | $2$ | $-\infty$ |

Xác định các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang (nếu có) của đồ thị hàm số.

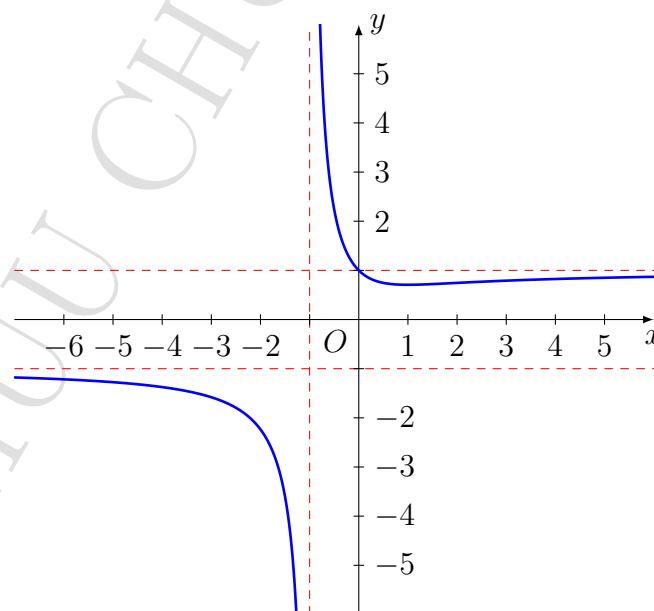
**Ví dụ 23.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$  liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ.

|      |           |           |     |           |           |
|------|-----------|-----------|-----|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$      | $0$ | $1$       | $+\infty$ |
| $y'$ | $-$       | $-$       | $0$ | $+$       | $+$       |
| $y$  | $-2$      | $+\infty$ | $1$ | $+\infty$ | $-2$      |

Xác định các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

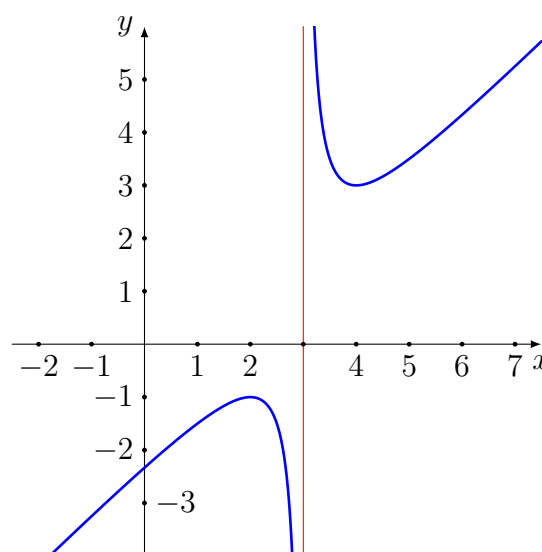
**Ví dụ 24.**

Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$  có đồ thị là đường cong như hình bên. Hãy xác định các đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

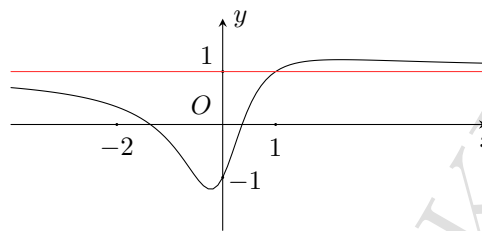
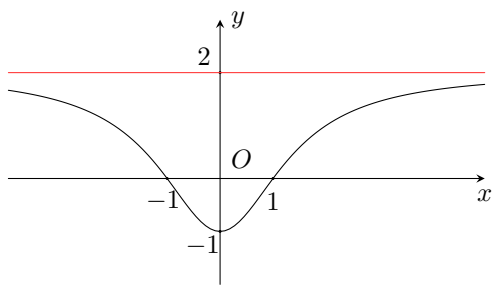


**Ví dụ 25.**

Đường cong ở hình bên là đồ thị ( $C$ ) của hàm số  $y = f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $\Delta: y = x - 2$  là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = f(x)$ . Vẽ  $\Delta$  lên cùng hệ trục tọa độ với ( $C$ ).



**Ví dụ 26.** Đồ thị hàm số ở hai hình dưới đều có đường tiệm cận ngang là đường thẳng màu đỏ. Hỏi đó là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?



a)  $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1};$

b)  $y = \frac{2x^2 + x + 1}{x - 1};$

c)  $y = \frac{2x^2 - 2}{x^2 + 2}.$

**Ví dụ 27.** Cho bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$  như sau.

|     |           |                |           |
|-----|-----------|----------------|-----------|
| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
| $y$ | $-\infty$ | $+\infty$      | $3$       |

Đồ thị của hàm số đã cho có tổng số bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

**Ví dụ 28.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

|      |           |           |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$      | $0$       | $2$       | $+\infty$ |
| $y'$ | $+$       | $-$       | $0$       | $+$       |           |
| $y$  | $-2$      | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |           |

**Ví dụ 29.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên các khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{e^{f^2(x)} - 2}$  là bao nhiêu? KQ:

|      |           |           |     |           |
|------|-----------|-----------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $1$       | $2$ | $+\infty$ |
| $y'$ | $+$       | $-$       | $0$ | $+$       |
| $y$  | $-\infty$ | $+\infty$ | $1$ | $+\infty$ |

**Ví dụ 30.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|      |           |      |     |      |           |
|------|-----------|------|-----|------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$  | $+\infty$ |
| $y'$ | $-$       | $-$  | $-$ | $0$  | $+$       |
| $y$  | $+\infty$ | $2$  | $1$ | $-1$ | $1$       |



Tìm tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{2}{3f(x) - 2}$ .

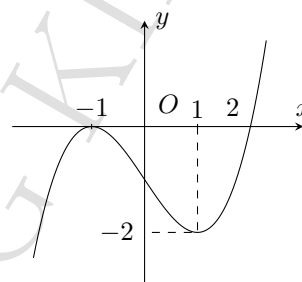
KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

### Ví dụ 31.

Cho hàm số đa thức bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau.

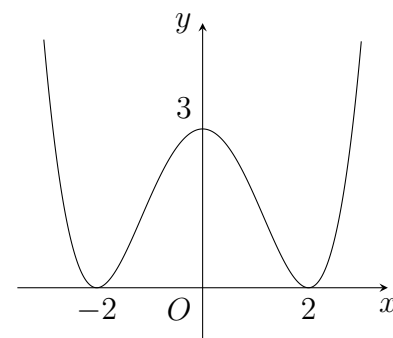
| Phát biểu                                                             | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số $y = \frac{(x+1)(x^2-1)}{f(x)}$ có 1 tiệm cận đứng.  |   |   |
| b) Đồ thị hàm số $y = \frac{(x+1)(x^2+1)}{f(x)}$ có 2 tiệm cận đứng.  |   |   |
| c) Đồ thị hàm số $y = \frac{(x+1)(x^2-1)}{f(x)}$ có 1 tiệm cận ngang. |   |   |
| d) Đồ thị hàm số $y = \frac{(x+1)(x^2+1)}{f(x)}$ có 2 tiệm cận ngang. |   |   |



### Ví dụ 32.

Cho hàm số  $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$  có đồ thị như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau.

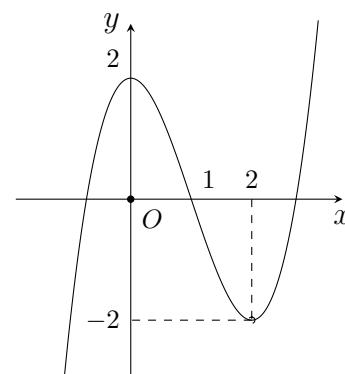
| Phát biểu                                                                              | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2025(x-2)^3\sqrt{x^2+2026}}{f(x)}$ có 1 tiệm cận đứng.  |   |   |
| b) Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2025(x+2)^3\sqrt{x^2+2026}}{f(x)}$ có 2 tiệm cận đứng.  |   |   |
| c) Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2025(x+2)^3\sqrt{x^2+2026}}{f(x)}$ có 1 tiệm cận ngang. |   |   |
| d) Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2025(x-2)^3\sqrt{x^2+2026}}{f(x)}$ có 2 tiệm cận ngang. |   |   |



### Ví dụ 33.

Cho hàm số bậc ba  $f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau.

| Phát biểu                                                                                        | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số $g_1(x) = \frac{1}{f(x)}$ có 3 tiệm cận đứng.                                   |   |   |
| b) Đồ thị hàm số $g_2(x) = \frac{1}{f(x)-2}$ có 3 tiệm cận đứng.                                 |   |   |
| c) Đồ thị hàm số $g_3(x) = \frac{x^2-x}{f(x)}$ có 2 tiệm cận đứng.                               |   |   |
| d) Đồ thị hàm số $g_4(x) = \frac{x^2-x}{[f(x)]^2-2f(x)}$ có 4 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang. |   |   |



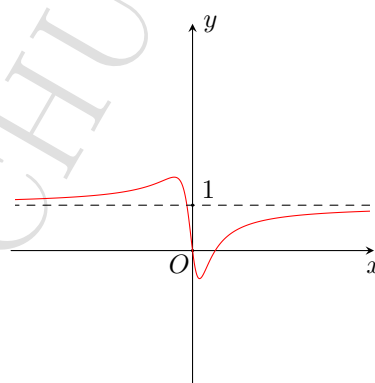
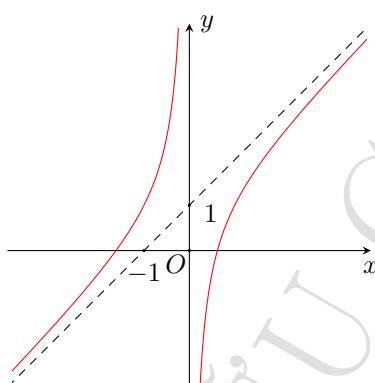
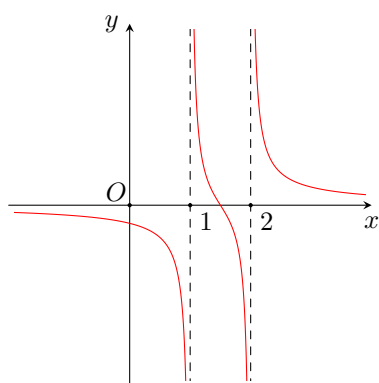
## 2 Bài tập tự luận

**Bài 11.** Hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên dưới đây.

|      |           |      |      |     |           |
|------|-----------|------|------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $0$  | $1$ | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $-$  | $-$  | $+$ | $-$       |
| $y$  | $-1$      | $2$  | $-4$ | $3$ | $0$       |

Xác định các tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = f(x)$ .

**Bài 12.** Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số sau:



a)  $y = \frac{2x - 3}{5x^2 - 15x + 10}$ ;

b)  $y = \frac{x^2 + x - 1}{x}$ ;

c)  $y = \frac{16x^2 - 8x}{16x^2 + 1}$ .

**Bài 13.** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ

|         |           |      |     |           |     |
|---------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $0$  | $1$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$       | $-$ |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $-1$ | $3$ | $-\infty$ |     |

Xác định số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{x}{f(x) + 1}$ .

**Bài 14.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

|      |           |           |     |           |
|------|-----------|-----------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$      | $0$ | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $+$       | $-$ |           |
| $y$  |           | $+\infty$ | $1$ | $0$       |

Hỏi đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{2f(x) - 1}$  có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

**Bài 15.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

|      |           |      |           |           |
|------|-----------|------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $0$       | $+\infty$ |
| $y'$ |           |      | +         | -         |
| $y$  |           |      | $+\infty$ | $0$       |

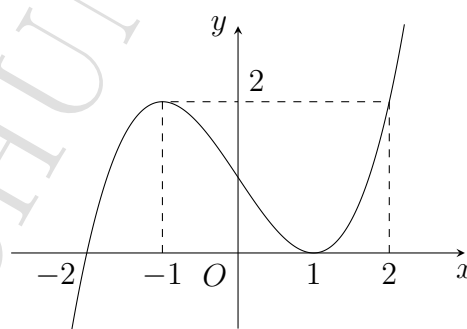
Hỏi đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{2f(x) - 1}$  có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

**Bài 16.**

Cho hàm số  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a \neq 0$ ) có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi  $S$  là tập các giá trị nguyên của  $m$  thuộc khoảng  $(-2025; 2026)$  để đồ thị hàm số

$$g(x) = \frac{(x-1)\sqrt{f(x)}}{(f(x)-2)(x^2-2mx+m+2)}$$

có tất cả 5 đường tiệm cận (đứng và ngang). Xác định số phần tử của tập  $S$ .



### 3

### Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 41.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây **sai**?

|      |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $2$       | $+\infty$ |
| $y'$ |           | +         | +         |
| $y$  |           | $+\infty$ | $3$       |

- A.** Phương trình  $f(x) - 5 = 0$  có hai nghiệm thực.
- B.** Đường thẳng  $x = 2$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- C.** Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$ .
- D.**  $\max_{x \in [3; 10]} f(x) = f(10)$ .

**Câu 42.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên các khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Hỏi số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{e^{f^2(x)} - 2}$  là bao nhiêu?

|         |           |      |           |           |
|---------|-----------|------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $1$       | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | +    | -         | +         |
| $f(x)$  |           | $1$  | $+\infty$ | $+\infty$ |

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

**Câu 43.** Cho hàm số có bảng biến thiên như sau:

|      |           |   |    |           |
|------|-----------|---|----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 0 | 3  | $+\infty$ |
| $y'$ |           | - | 0  | +         |
| $y$  | 1         | 2 | -3 | 3         |

Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

**Câu 44.** Cho hàm số có bảng biến thiên như sau:

|      |           |           |    |           |
|------|-----------|-----------|----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 0         | 1  | $+\infty$ |
| $y'$ |           | -         | 0  | +         |
| $y$  | 0         | $+\infty$ | -2 | $+\infty$ |

Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

**Câu 45.** Cho hàm số có bảng biến thiên như sau:

|      |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 1         | $+\infty$ |
| $y'$ |           | +         | +         |
| $y$  | 2         | $+\infty$ | 5         |

Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

**Câu 46.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

|      |           |    |   |           |
|------|-----------|----|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | -2 | 0 | $+\infty$ |
| $y'$ |           | +  | - |           |
| $y$  | $+\infty$ | 1  | 0 | $-\infty$ |

Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

**Câu 47.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|      |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$      | $+\infty$ |
| $y'$ |           | -         | -         |
| $y$  | $-1$      | $+\infty$ | $-1$      |

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng có phương trình

A.  $x = -1$ .B.  $y = -1$ .C.  $y = -2$ .D.  $x = -2$ .

**Câu 48.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

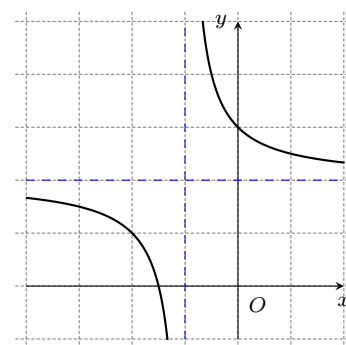
|      |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$      | $+\infty$ |
| $y'$ |           | -         | -         |
| $y$  | $-1$      | $+\infty$ | $-1$      |

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng có phương trình

A.  $y = -1$ .B.  $y = -2$ .C.  $x = -2$ .D.  $x = -1$ .

**Câu 49.**

Cho hàm số  $f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số lần lượt là

A.  $x = 1$  và  $y = -2$ .B.  $x = -1$  và  $y = 2$ .C.  $x = 1$  và  $y = 2$ .D.  $x = -1$  và  $y = -2$ .

**Câu 50.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|      |           |      |     |           |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $2$ | $+\infty$ |     |           |
| $y'$ |           | $+$  | $0$ | $-$       | $0$ | $+$       |
| $y$  | $-\infty$ |      | $3$ |           | $0$ | $+\infty$ |

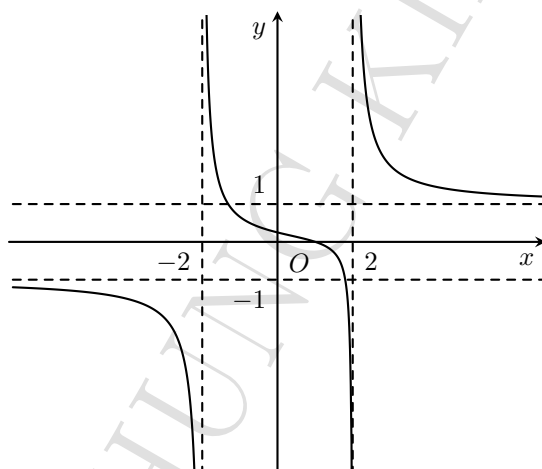
Đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{f(3-x)-2}$  có bao nhiêu tiệm cận đứng?

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

**Câu 51.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{2}{3f(x)-2}$ .

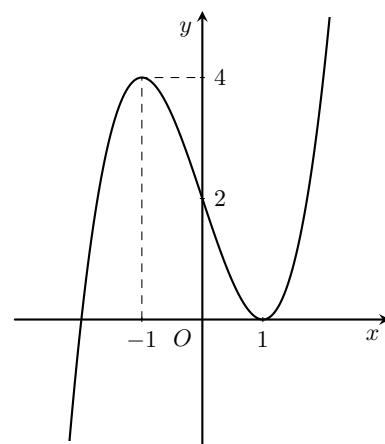
- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.



**Câu 52.**

Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong hình bên dưới. Đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{(x-1)(x^2-1)}{f^2(x)-2f(x)}$  có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

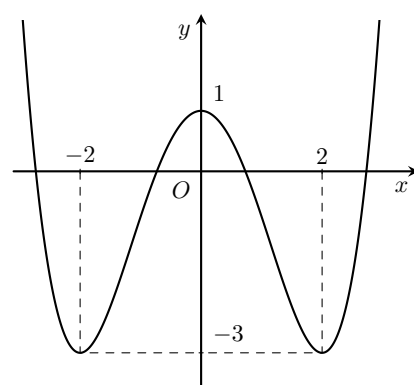
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.



**Câu 53.**

Cho hàm số bậc bốn  $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số  $y = \frac{(x^2-4) \cdot (x^2+2x)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3}$  có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

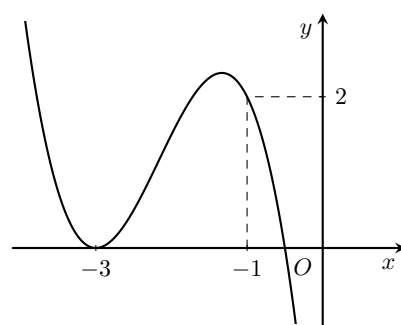
- A. 4. B. 5. C. 3. D. 2.



**Câu 54.**

Cho hàm số bậc ba  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị là đường cong như hình bên. Đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{(x^2+4x+3) \cdot \sqrt{x^2+x}}{x \cdot [(f(x))^2 - 2f(x)]}$  có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 3.



**Câu 55.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:

|         |           |    |           |       |           |           |
|---------|-----------|----|-----------|-------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 1  |           | 2     | $+\infty$ |           |
| $f'(x)$ |           | +  |           | - 0 + |           |           |
| $f(x)$  |           |    | $+\infty$ | 5     |           | $+\infty$ |
|         |           | -2 |           |       | 3         |           |

Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số  $y = g(x) = \frac{1}{f(x) - 5}$  là

- A.** 2.                      **B.** 3.                      **C.** 4.                      **D.** 5.

**Câu 56.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |      |     |           |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |     |           |
| $f'(x)$ |           | $+$  | $0$ | $-$       | $0$ | $+$       |
| $f(x)$  |           |      | $4$ |           | $0$ | $+\infty$ |
|         | $-\infty$ |      |     |           |     |           |

Hỏi đồ thị hàm số  $y = g(x) = \frac{x^4 - 1}{f^2(x) - 4f(x)}$  có bao nhiêu tiệm cận đứng?

- A.** 5.                      **B.** 2.                      **C.** 3.                      **D.** 4.

**Câu 57.** Cho hàm số đa thức bậc bốn  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |      |     |      |           |     |     |           |
|---------|-----------|------|-----|------|-----------|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-3$ | $1$ | $2$  | $+\infty$ |     |     |           |
| $f'(x)$ |           | $+$  | $0$ | $-$  | $0$       | $+$ | $0$ | $-$       |
| $f(x)$  |           |      | $0$ |      | $2$       |     |     |           |
|         | $-\infty$ |      |     | $-3$ |           |     |     | $-\infty$ |

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = g(x) = \frac{(x-1) \cdot \sqrt{x+3}}{f^2(x) + 3f(x)}$  là

- A.** 4.                      **B.** 5.                      **C.** 6.                      **D.** 7.

**Câu 58.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục, không âm trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ .

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = g(x) = \frac{2\sqrt{x^2+1} \cdot f(x) + 1}{x+3}$  là

- A.** 3.                      **B.** 2.                      **C.** 0.                      **D.** 1.

**Câu 59.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow (\frac{3}{2})^+} f(x) = 1$  và

hàm số  $y = g(x) = \frac{5f(x) - 1}{[f^2(x) + 1](2x - 3)}$ . Trong các khẳng định sau về đồ thị hàm số  $y = g(x)$ , khẳng định nào đúng?



- A.** Đồ thị hàm số  $y = g(x)$  có tiệm cận đứng là  $x = 2$ .  
**B.** Đồ thị hàm số  $y = g(x)$  có tiệm cận ngang  $y = \frac{3}{2}$ .  
**C.** Đồ thị hàm số  $y = g(x)$  có tiệm cận ngang  $y = 0$  và tiệm cận đứng  $x = \frac{3}{2}$ .  
**D.** Đồ thị hàm số  $y = g(x)$  có tiệm cận ngang  $y = 2$  và tiệm cận đứng  $x = \frac{3}{2}$ .

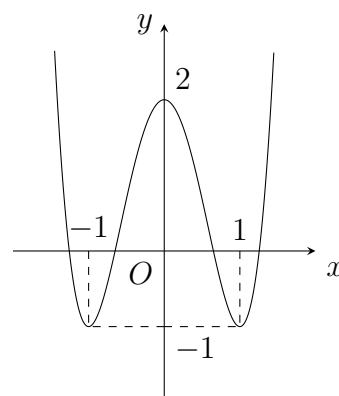
**Câu 60.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$ , thỏa mãn  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  và  $f(x) < 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Xét hàm số  $g(x) = \frac{2f^3(x) + f^2(x) - 2f(x) - 1}{f^3(x) - 4f^2(x) + 5f(x) - 2}$ . Khẳng định nào đúng?

- A.** Đồ thị hàm số  $g(x)$  có các đường tiệm cận đứng là  $x = 2$ .  
**B.** Đồ thị hàm số  $g(x)$  có các đường tiệm cận đứng là  $x = 0$ .  
**C.** Đồ thị hàm số  $g(x)$  chỉ có một đường tiệm cận ngang là  $y = 2$ .  
**D.** Đồ thị hàm số  $g(x)$  chỉ có một đường tiệm cận ngang là  $y = -2$ .

**Câu 61.**

Cho hàm số  $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$  có đồ thị như hình vẽ. Số các giá trị nguyên của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{2020x}{f(x)[f(x) - m]}$  có tổng số 9 đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng là

- A.** 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.



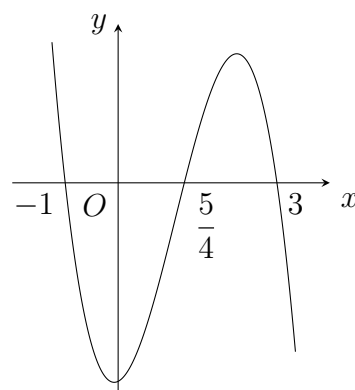
**Câu 62.**

Cho hàm số  $g(x) = \frac{2018}{h(x) - m^2 - m}$  với

$$h(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx \quad (m, n, p, q \in \mathbb{R}).$$

Hàm số  $y = h'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm các giá trị  $m$  nguyên để số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = g(x)$  là 2.

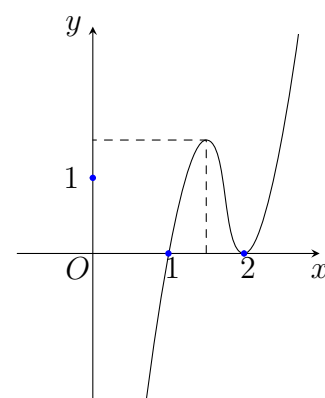
- A.** 11. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 20.



**Câu 63.**

Cho hàm số bậc ba  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của  $m \in [-10; 1]$  để đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{[f(x) - m][f(x) - 1]}$  có đúng bốn đường tiệm cận đứng là

- A.** 9. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 10.



**Câu 64.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

|         |           |           |           |           |           |
|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$       | $1$       | $+\infty$ |           |
| $f'(x)$ | $+$       |           | $+$       | $0$       | $-$       |
| $f(x)$  |           | $+\infty$ |           | $3$       |           |
|         | $1$       |           | $-\infty$ |           | $-\infty$ |

Số giá trị nguyên của  $m$  để đồ thị hàm số  $y = g(x) = \frac{1}{f(x) - m}$  có đúng 5 tiệm cận là.

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

**Câu 65.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|        |           |           |           |
|--------|-----------|-----------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $2$       | $+\infty$ |
| $f(x)$ |           | $+\infty$ | $6$       |

Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để đồ thị hàm số  $y = g(x) = \frac{f^2(x)}{f(x) - m}$  có đúng 3 tiệm cận đứng.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

**Câu 66.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  và có bảng biến thiên

|         |           |           |     |           |     |
|---------|-----------|-----------|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $0$       | $1$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       |           | $+$ | $0$       | $-$ |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ | $2$ | $-\infty$ |     |

Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x}}{(x^2 + 1)[f(x) - m]}$  có đúng ba đường tiệm cận.

A.  $m > 2$ .B. không tồn tại  $m$ .C.  $m \leq 2$ .D.  $m < 2$ .

**Câu 67.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc  $[-2020; 2020]$  để đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3x + x}}{\sqrt{2f(x) - f^2(x)} + m}$  có tiệm cận ngang nằm bên dưới đường thẳng  $y = -1$ .

A. 4041.

B. 2019.

C. 1.

D. 10.

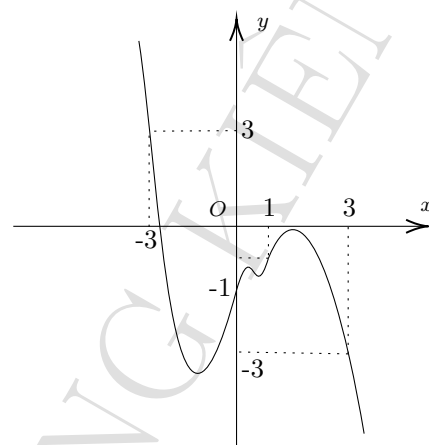
**Câu 68.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , có  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ . Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm  $g(x) = \frac{f(x) + 1}{\sqrt{m \cdot f^2(x) + 2}}$  có hai đường tiệm ngang là

A.  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .B.  $(0; +\infty)$ .C.  $(-\infty; 0)$ .D.  $\{0\}$ .

**Câu 69.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[-3; 3]$  và có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Đặt  $h(x) = \frac{3}{2f(x) + x^2 + 4}$ , biết rằng  $f(1) = -24$ . Hỏi trên đoạn  $[-3; 3]$  đồ thị hàm số  $y = h(x)$  có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

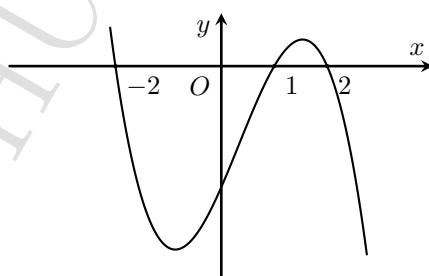
- A. 1. B. 4. C. 2. D. 0.



**Câu 70.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ , thỏa  $f(1) = 0$  và đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  có dạng như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{2025x}{f^2(x) + f(x)}$  có bao nhiêu tiệm cận đứng?

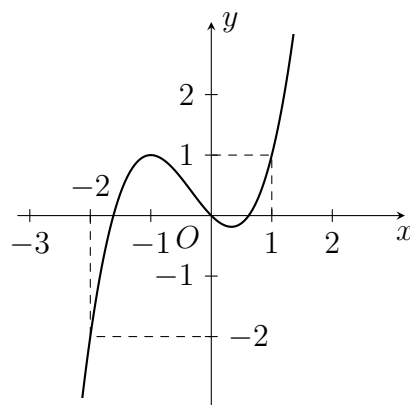
- A. 3. B. 2. C. 5. D. 4.



**Câu 71.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Xét hàm số  $y = \frac{1}{f(x) - \frac{x^2}{2}}$ . Đặt  $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$ , tìm điều kiện để đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{f(x) - \frac{x^2}{2}}$  có 4 đường tiệm cận đứng.

- A.  $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(1) < 0 \end{cases}$  B.  $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(1) < 0 \\ g(-2) < 0 \end{cases}$  C.  $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(-2) > 0 \end{cases}$  D.  $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(-2) \leq 0 \\ g(1) \leq 0 \end{cases}$



**Câu 72.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $y = f'(x)$  có bảng biến thiên như sau.

|      |           |      |           |           |      |
|------|-----------|------|-----------|-----------|------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $1$       | $+\infty$ |      |
| $y'$ | $+$       |      | $+$       | $0$       | $-$  |
| $y$  |           | $3$  |           | $2$       |      |
|      | $1$       |      | $-\infty$ |           | $-1$ |

Đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{2025}{f(x) - m}$  có nhiều nhất bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

**Câu 73.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  là hàm đa thức liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $3f(1) - 2 < 0$  và  $3f(a) - a^3 + 3a > 0, \forall a > 2$ . Đồ thị hàm số

$y = f'(x)$  như hình vẽ. Đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{x+1}{3f(x+2) - x^3 + 3x}$

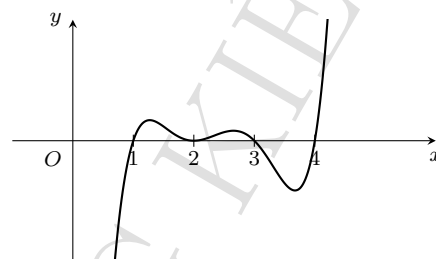
có số tiệm cận đứng là

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.



**Câu 74.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $y = f'(x)$  có bảng biến thiên như sau

|      |           |      |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |
| $y'$ | $+$       | $+$  | $0$ | $-$       |
| $y$  | $1$       | $3$  | $2$ | $-1$      |

Đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{2020}{f(x) - m}$  có nhiều nhất bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

**Câu 75.**

Cho hàm số  $g(x) = \frac{2019}{h(x) - m^2 - m}$  với  $h(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx$

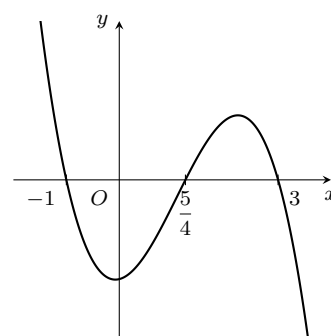
$(m, n, p, q \in \mathbb{R}), h(0) = 0$ . Hàm số  $y = h'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để đồ thị hàm số  $g(x)$  có 2 tiệm cận đứng?

A. 2.

B. 10.

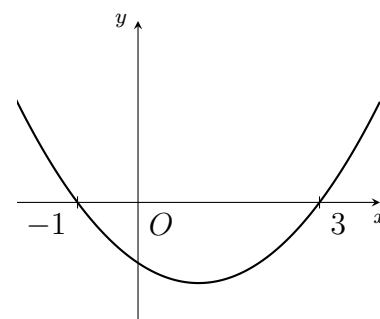
C. 71.

D. 2019.

**Câu 76.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  là hàm số bậc 3. Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ và  $f(-1) < 20$ . Giá trị của  $m$  để đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{f(x) - 20}{f(x) - m}$  có

4 tiệm cận là

A.  $m < f(3)$ .B.  $f(3) < m < f(-1)$ .C.  $m > f(-1)$ .D.  $f(3) \leq m \leq f(-1)$ .

## 4

**Bài tập trắc nghiệm đúng sai**

**Câu 77.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathcal{D} = (-3; 3) \setminus \{-1; 1\}$ , liên tục trên mỗi khoảng xác định và có  $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                   | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Các đường thẳng $x = -3$ và $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.  |   |   |
| b) Các đường thẳng $x = -1$ và $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.  |   |   |
| c) Các đường thẳng $y = -3$ , $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. |   |   |
| d) Các đường thẳng $y = 1$ và $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.  |   |   |

**Câu 78.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ , liên tục trên mỗi khoảng xác định và có  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                                                     | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Các đường thẳng $x = -1$ và $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.                                                                                    |   |   |
| b) Các đường thẳng $y = -1$ , $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.                                                                                   |   |   |
| c) Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và đường thẳng $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.                                        |   |   |
| d) Đồ thị hàm số đã cho có đúng hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = -1$ , $y = 1$ và có đúng hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = -1$ , $x = 1$ . |   |   |

**Câu 79.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|      |           |      |     |     |           |      |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $2$ | $4$ | $+\infty$ |      |
| $y'$ | $+$       |      |     | $+$ | $0$       | $-$  |
| $y$  | $+\infty$ |      |     | $2$ |           | $-3$ |

Khi đó

| Phát biểu                                             | Đ | S |
|-------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 2$ .     |   |   |
| b) Hàm số có đúng 1 điểm cực trị.                     |   |   |
| c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 2 tại $x$ bằng 4. |   |   |
| d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; 3)$ .            |   |   |

**Câu 80.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                                                                   | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Nếu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ thì đồ thị hàm số đã cho có duy nhất một tiệm cận ngang $y = 0$ .           |   |   |
| b) Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ . |   |   |

| Phát biểu                                                                                                                                                                                | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| c) Nếu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ thì đồ thị hàm số đã cho có duy nhất một đường tiệm cận ngang.                                        |   |   |
| d) Nếu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ thì đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$ . |   |   |

**Câu 81.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau

|      |           |      |     |           |     |
|------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $2$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$       | $+$ |
| $y$  |           |      | $4$ |           | $2$ |
|      | $2$       |      |     | $-5$      |     |

Khi đó

| Phát biểu                                            | Đ | S |
|------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có đường tiệm cận. |   |   |
| b) Hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại bằng $x = -1$ . |   |   |
| c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-5; 2)$ .      |   |   |
| d) Hàm số $y = f(x)$ có cực tiểu bằng $-5$ .         |   |   |

**Câu 82.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|      |           |      |           |           |           |           |
|------|-----------|------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $0$  | $1$       | $2$       | $+\infty$ |           |
| $y'$ | $-$       | $0$  | $+$       | $+$       | $0$       | $-$       |
| $y$  | $+\infty$ |      | $+\infty$ |           | $2$       |           |
|      |           | $-2$ |           | $-\infty$ |           | $-\infty$ |

Khi đó

| Phát biểu                                                                     | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số đồng biến trên $(0; 2)$ .                                           |   |   |
| b) $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -2$ ; $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 2$ . |   |   |
| c) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$ .      |   |   |
| d) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ .                    |   |   |

**Câu 83.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ . Khi đó

| Phát biểu                                                    | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số có các tiệm cận ngang $y = -1$ và $y = 1$ . |   |   |

| Phát biểu                                                              | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------|---|---|
| b) Với mọi $m \in (-1; 1)$ phương trình $f(x) = m$ có nghiệm duy nhất. |   |   |
| c) Với mọi $m \in [-1; 1]$ phương trình $f(x) = m$ có nghiệm duy nhất. |   |   |
| d) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ .          |   |   |

**Câu 84.** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $(-\infty; 5) \setminus \{-1\}$ , liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên

|         |           |           |     |     |
|---------|-----------|-----------|-----|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$      | $1$ | $5$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $+$       | $-$ |     |
| $f(x)$  | $-2$      | $-\infty$ | $5$ | $2$ |

Khi đó

| Phát biểu                                               | Đ | S |
|---------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số không có đạo hàm tại $x = -1$ .               |   |   |
| b) Hàm số không đạt cực trị tại $x = 1$ .               |   |   |
| c) Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng $x = -1$ .  |   |   |
| d) Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y = -2$ . |   |   |

## 5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 85.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

Phương trình  $f(x) = \frac{1}{2}$  có ba nghiệm phân biệt. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị

hàm số  $y = \frac{1}{2f(x) - 1}$  là bao nhiêu?

KQ:

**Câu 86.** Cho hàm số  $y = f(x)$  là hàm đa thức có bảng biến thiên

|      |           |      |      |           |     |
|------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $3$  | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $4$  | $-2$ | $+\infty$ |     |

Xác định số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{2024}{f(x)}$ .

KQ:

**Câu 87.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên dưới. Hỏi đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có tổng số bao nhiêu tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

KQ:



|      |           |      |           |           |   |           |           |
|------|-----------|------|-----------|-----------|---|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ |      | 1         |           | 3 |           | $+\infty$ |
| $y'$ |           | +    |           | +         | 0 | -         |           |
| $y$  |           |      | $+\infty$ |           | 2 |           |           |
|      |           | $-1$ |           | $-\infty$ |   | $-\infty$ |           |

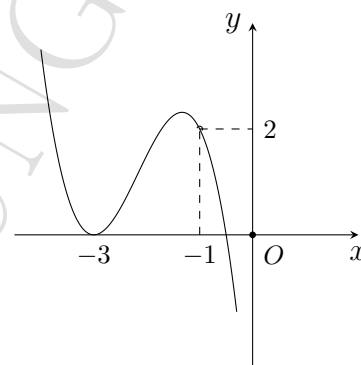
**Câu 88.**

Cho hàm số bậc ba  $f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số

$$g(x) = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}$$

có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

KQ:

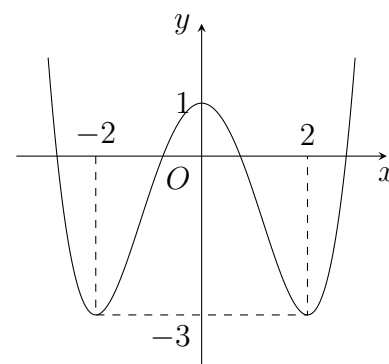
**Câu 89.**

Cho hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$  có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số

$$y = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2x)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3}$$

có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

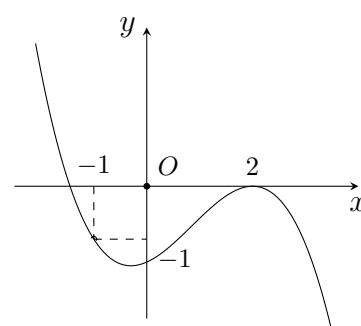
KQ:

**Câu 90.**

Cho hàm số bậc ba  $f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Xác định tổng số các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$$g(x) = \frac{(x^2 - 2x - 3)\sqrt{x + 2}}{(x^2 - x)[f^2(x) + f(x)]}$$

KQ:



**Câu 91.** Hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ , có đạo hàm trên  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$  và có bảng biến thiên như sau

|         |           |           |           |   |   |           |   |   |           |
|---------|-----------|-----------|-----------|---|---|-----------|---|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |           | -1        |   | 0 |           | 1 |   | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | -         |           | - | 0 | +         |   | + |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ |           | $+\infty$ |   |   | $+\infty$ |   | 0 |           |
|         |           | $-\infty$ |           | 1 |   | $-\infty$ |   |   |           |

Đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{f(x) - 1}$  có bao nhiêu đường tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

KQ:

**Câu 92.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |      |      |     |           |     |           |     |
|---------|-----------|------|------|-----|-----------|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$  | $4$ | $+\infty$ |     |           |     |
| $f'(x)$ |           | $-$  | $0$  | $+$ | $0$       | $-$ | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $+\infty$ |      |      | $3$ |           |     | $+\infty$ |     |
|         |           |      | $-1$ |     | $-5$      |     |           |     |

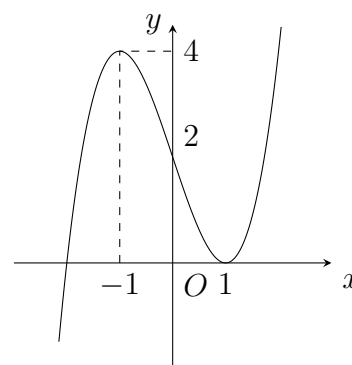
Đồ thị hàm số  $y = g(x) = \frac{f^2(x) + 2f(x) + 1}{f^2(x) - 9}$  có tổng số tất cả các đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là bao nhiêu?

KQ:

**Câu 93.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị hàm  $f(x)$  như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{x^2 - 1}{f^2(x) - 4f(x)}$  có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

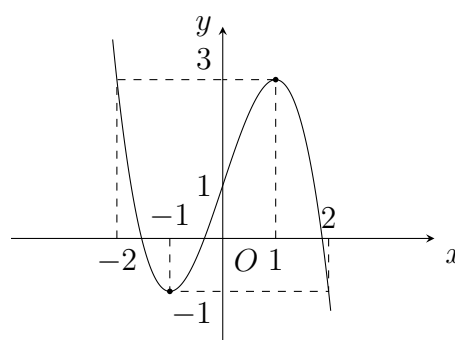
KQ:



**Câu 94.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x+1)[f^2(x) - f(x)]}$  có bao nhiêu tiệm cận đứng?

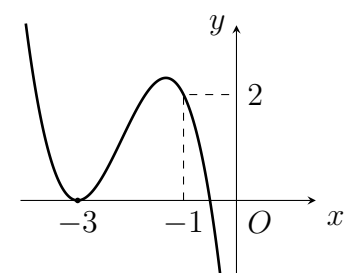
KQ:



**Câu 95.**

Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Đồ thị hàm  $y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}$  có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

KQ:

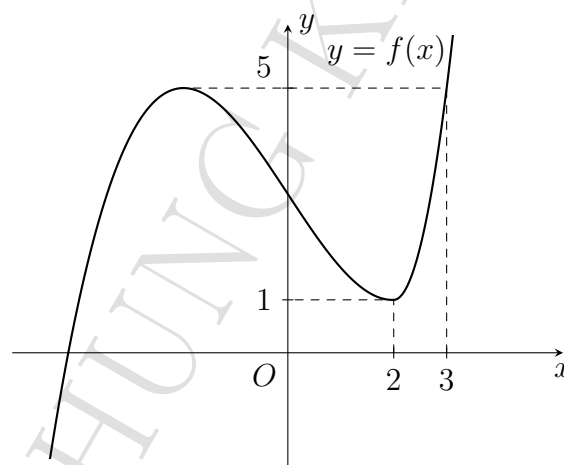


**Câu 96.** Cho hàm số  $f(x)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Có bao

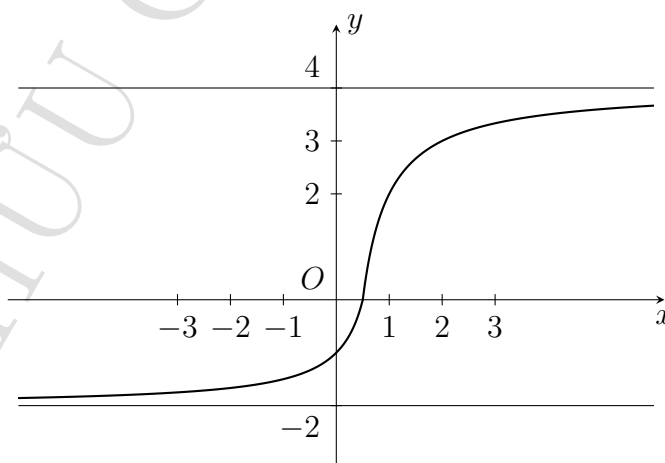
nhieu số nguyên dương  $m$  để đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{(\sqrt{3x+1}-2)f(x)}{(x^2-4x+m)\sqrt{f^2(x)+1}}$  có đúng 2 đường tiệm cận.

KQ:    **Câu 97.**

Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi  $S$  là tập hợp chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{m-x}}{f(x)-m}$  có tất cả 4 đường tiệm cận. Số phần tử của tập  $S$  là bao nhiêu?

KQ:    **Câu 98.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = |f(x) + \sqrt[3]{8-m} + \sqrt{m+1} - 4|$  có đúng một tiệm cận ngang?

KQ:    

**Câu 99.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên sau:

|         |           |      |     |       |           |
|---------|-----------|------|-----|-------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $2$   | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$   | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ |      | $2$ |       | $+\infty$ |
|         |           | $1$  |     | $-15$ |           |

Tìm số các giá trị nguyên âm của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{2021}{f(x)-m}$  có tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là 3.

KQ:    

**Câu 100.** Hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  có bảng biến thiên như hình vẽ sau

|      |           |     |           |
|------|-----------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $y'$ | $+$       | $0$ | $-$       |
| $y$  |           | $1$ |           |
|      | $0$       |     | $0$       |

Với giá trị của  $a < m < b$  thì đồ thị hàm số  $y = g(x) = \frac{1}{(f(x))^2 - m}$  có đúng 2 tiệm cận đứng. Tính  $50a - 20b$ .

KQ:

**DẠNG 4**

**Tiệm cận của đồ thị hàm số chứa tham số**

- ☑ Phương pháp giải dạng toán: Dựa vào định nghĩa các loại tiệm cận đứng, tiệm cận ngang và tiệm cận xiên.
- ☑ Lưu ý những kiến thức sau: Đối với hàm phân thức  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  trong đó  $P(x)$ ,  $Q(x)$  là hai đa thức của  $x$  ta thường dùng phương pháp sau để tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

i) Tiệm cận đứng.

Nếu  $\begin{cases} P(x_0) \neq 0 \\ Q(x_0) = 0 \end{cases}$  thì đường thẳng  $x = x_0$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

ii) Tiệm cận ngang.

- Nếu bậc của  $P(x)$  bé hơn bậc của  $Q(x)$  thì đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là trục hoành độ.
- Nếu bậc của  $P(x)$  bằng bậc của  $Q(x)$  thì đồ thị hàm có tiệm cận ngang là đường thẳng :  $y = \frac{A}{B}$  trong đó  $A, B$  lần lượt là hệ số của số hạng có số mũ lớn nhất của  $P(x)$  và  $Q(x)$ .
- Nếu bậc của  $P(x)$  lớn hơn bậc của  $Q(x)$  thì đồ thị của hàm số không có tiệm cận ngang.

iii) Tiệm cận xiên.

- Nếu bậc của  $P(x)$  bé hơn hay bằng bậc của  $Q(x)$  hoặc lớn hơn bậc của  $Q(x)$  từ hai bậc trở lên thì đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên.
- Nếu bậc của  $P(x)$  lớn hơn bậc của  $Q(x)$  một bậc và  $P(x)$  không chia hết cho  $Q(x)$  thì đồ thị hàm có tiệm cận xiên và ta tìm tiệm cận xiên bằng cách chia  $P(x)$  cho  $Q(x)$  và viết  $f(x) = ax + b + \frac{R(x)}{Q(x)}$ , trong đó  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{Q(x)} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{R(x)}{Q(x)} = 0$ .  
Suy ra đường thẳng  $y = ax + b$  là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.
- Đồ thị hàm số  $y = mx + n + \sqrt{ax^2 + bx + c}$  có các đường cận là  $y = mx + n \pm \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$ .

## 1

## Ví dụ mẫu

**Ví dụ 34.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{ax+b}{2x+c}$  có tiệm cận ngang  $y = 2$  và tiệm cận đứng  $x = 1$ . Tính  $a + c$ .

**Ví dụ 35.** Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{mx+2}{1-x}$  luôn có tiệm cận ngang.

- A.**  $\forall m \in \mathbb{R}$ . **B.**  $\forall m \neq 2$ . **C.**  $\forall m \neq -2$ . **D.**  $\forall m \neq \frac{1}{2}$ .

**Ví dụ 36.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{x-m}{x^2-3x+2}$  có đúng hai đường tiệm cận.

**Ví dụ 37.** Cho hàm số  $y = \frac{x+1}{x^2-2mx+4}$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

**Ví dụ 38.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2-2x+m^2+1}{x-1}$  ( $C$ ). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị ( $C$ ) có tiệm cận đứng.

- A.**  $m \neq 0$ . **B.**  $m = 0$ . **C.**  $m \in \emptyset$ . **D.**  $m \in \mathbb{R}$ .

**Ví dụ 39.** Cho đồ thị hàm số  $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$  và  $g(x) = \frac{ax+1}{x+2}$  với  $a \neq \frac{1}{2}$ . Tìm tất cả các giá trị thực dương của  $a$  để các tiệm cận của hai đồ thị hàm số tạo thành một hình chữ nhật có diện tích là 4.

**Ví dụ 40.** Gọi ( $C$ ) là đồ thị của hàm số  $y = (m^2+1)^x$  ( $m$  là tham số). Khi đó

| Phát biểu                                         | Đ | S |
|---------------------------------------------------|---|---|
| a) Trục $Ox$ là tiệm cận ngang của ( $C$ ).       |   |   |
| b) Đồ thị ( $C$ ) nằm phía dưới trục hoành.       |   |   |
| c) Đồ thị ( $C$ ) luôn đi qua điểm $(0; 1)$ .     |   |   |
| d) Đồ thị ( $C$ ) luôn đi qua điểm $(1; m^2+1)$ . |   |   |

**Ví dụ 41.** Cho hàm số  $y = \log_2(x-m)$  ( $m$  là tham số). Khi đó

| Phát biểu                                               | Đ | S |
|---------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đạo hàm của hàm số là $y' = \frac{1}{(x-m) \ln 2}$ . |   |   |
| b) Đồ thị hàm số nhận trục $Oy$ làm tiệm cận đứng.      |   |   |
| c) Đồ thị hàm số nhận trục $Ox$ làm tiệm cận ngang.     |   |   |
| d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(m; +\infty)$ .        |   |   |

**Ví dụ 42.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{2x-1}{(mx^2-2x+1)(4x^2+4mx+1)}$  có đúng 1 đường tiệm cận.  
KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Ví dụ 43.** Cho hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-m}$  có đồ thị là ( $C_m$ ). Tìm số các giá trị  $m$  nguyên dương sao cho diện tích hình chữ nhật tạo bởi các trục tọa độ và hai đường tiệm cận của đồ thị ( $C_m$ ) không vượt quá 2024 (đvdt).  
KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

## 2 Bài tập tự luận

**Bài 17.** Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng  $144 \text{ m}^2$ . Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là  $x \text{ m}$ .

- Viết biểu thức tính chu vi  $P(x)$  (mét) của mảnh vườn.
- Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số  $P(x)$ .

**Bài 18.** Cho đường cong  $(C): y = \frac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x + 3m}$ . Tìm  $m$  để góc giữa hai đường tiệm cận bằng  $45^\circ$ .

**Bài 19.** Cho đường cong  $(C_m): y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ . Tìm các tiệm cận của  $(C_m)$  khi  $m$  thay đổi.

**Bài 20.** Đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{mx + 1}{2m + 1 - x}$  cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 3. Tìm  $m$ .

**Bài 21.** Cho  $(C_m): y = \frac{2x^2 + mx - 2}{x - 1}$ . Tìm  $m$  để tiệm cận xiên của  $(C_m)$  tạo với hệ trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.

## 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 101.** Cho hàm số  $y = \frac{x + 8}{2x - a}$ . Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng  $x = 5$  thì giá trị của  $a$  bằng

- A. -5. B. 10. C. -10. D. 5.

**Câu 102.** Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{(m + 1)x - 2}{1 - x}$  có đường tiệm cận ngang đi qua điểm  $A(3; 1)$ .

- A.  $m = 2$ . B.  $m = 0$ . C.  $m = -2$ . D.  $m = -4$ .

**Câu 103.** Cho hàm số  $y = \frac{2x + 2m - 1}{x + m}$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đi qua điểm  $M(3; 1)$ .

- A.  $m = 1$ . B.  $m = 3$ . C.  $m = -3$ . D.  $m = 2$ .

**Câu 104.** Tìm  $m$  để tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{(m - 1)x + 2}{3x + 4}$  cắt đường thẳng  $2x - 3y + 5 = 0$  tại điểm có hoành độ bằng 2.

- A.  $m = 2$ . B.  $m = 1$ . C.  $m = 10$ . D.  $m = 7$ .

**Câu 105.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{mx + 3}{\sqrt{mx^2 - 5}}$  có hai đường tiệm cận ngang.

- A.  $m \geq 0$ . B.  $m > \sqrt{5}$ . C.  $m < 0$ . D.  $m > 0$ .

**Câu 106.** Cho hàm số  $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$  có đồ thị  $(C)$ . Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để  $(C)$  không có tiệm cận đứng.

- A.  $m = 0$  hoặc  $m = 1$ . B.  $m = 2$ . C.  $m = 1$ . D.  $m = 0$ .

**Câu 107.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{1 + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2 - mx - 3m}}$  có đúng hai đường tiệm cận đứng.

- A.  $\left(0; \frac{1}{2}\right]$ . B.  $(0; +\infty)$ . C.  $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$ . D.  $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ .

**Câu 108.** Số giá trị nguyên dương của tham số  $a$  để đồ thị hàm số  $y = ax + \sqrt{4x^2 + 1}$  có đường tiệm cận ngang là

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

**Câu 109.** Có bao nhiêu giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{mx + \sqrt{x^2 - 2x + 3}}{2x - 1}$  có một tiệm cận ngang là  $y = 2$ ?

- A. 1. B. Vô số. C. 0. D. 2.

**Câu 110.** Cho hàm số  $y = 2x + m - \frac{1}{x+1}$ . Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm  $A(0; 1)$  khi  $m$  bằng

- A. 2. B. -2. C. 0. D. 1.

**Câu 111.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{(x-m)(x^2 - 2x + m)}$  có ba tiệm cận đứng.

- A.  $(-\infty; 1)$ . B.  $(-\infty; +\infty) \setminus \{0; 1\}$ . C.  $(-1; 1) \setminus \{0\}$ . D.  $(-\infty; 1) \setminus \{0\}$ .

**Câu 112.** Tìm các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{mx^2 + mx - 1}}{2x + 1}$  có hai tiệm cận ngang.

- A.  $m > 0$ . B.  $m = 0$ . C. Không có giá trị  $m$ . D.  $m < 0$ .

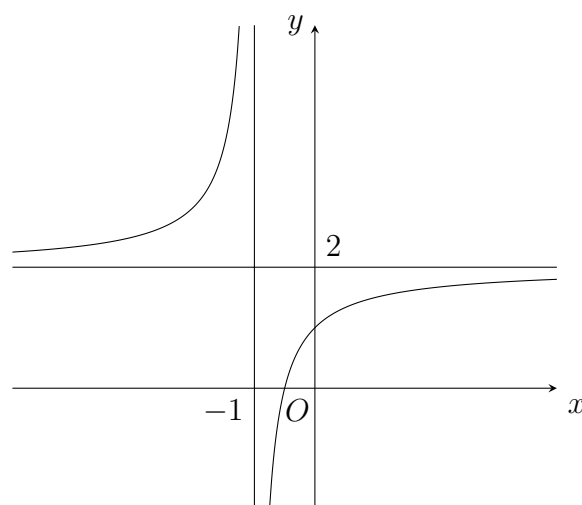
**Câu 113.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{x-3}{\sqrt{x^2 + m}}$  có đúng ba đường tiệm cận.

- A.  $(0; +\infty)$ . B.  $(-\infty; 0] \setminus \{-9\}$ . C.  $\{-9; 0\}$ . D.  $(-\infty; 0) \setminus \{-9\}$ .

**Câu 114.**

Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{nx+1}{x+m}$  ( $mn \neq 1$ ) xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , liên tục trên từng khoảng xác định và có đồ thị như hình vẽ bên. Tính tổng  $m+n$ ?

- A.  $m+n=1$ . B.  $m+n=-1$ .  
C.  $m+n=3$ . D.  $m+n=-3$ .



**Câu 115.** Tập hợp các giá trị của  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{2x-1}{(mx^2 - 2x + 1)(4x^2 + 4mx + 1)}$  có đúng 1 đường tiệm cận là



- A.  $(-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$ .  
C.  $\emptyset$ .

- B.  $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ .  
D.  $\{0\}$ .

**Câu 116.** Cho hàm số  $y = \frac{2mx + m}{x - 1}$ . Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cùng hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8.

- A.  $m \neq \pm 2$ . B.  $m = \pm \frac{1}{2}$ . C.  $m = 2$ . D.  $m = \pm 4$ .

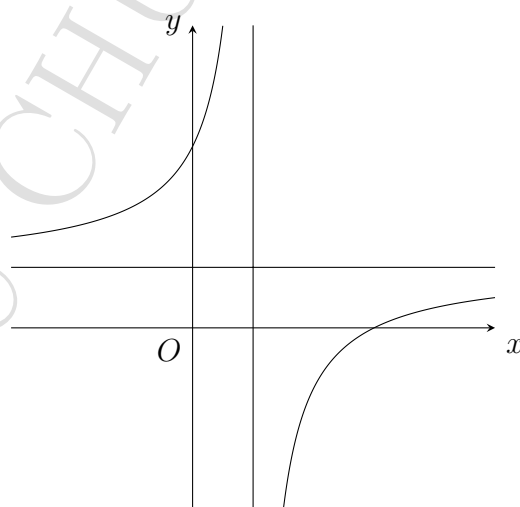
**Câu 117.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho đồ thị hàm số  $y = \frac{x + 2}{\sqrt{mx^2 + 1} + \sqrt{(1 - m)x^2 + 1}}$  có hai tiệm cận ngang.

- A.  $m > 0$ . B.  $m < 1$ . C.  $0 \leq m \leq 1$ . D.  $0 < m < 1$ .

**Câu 118.**

Cho hàm số  $y = \frac{(2m - 1)x - 3}{x - m}$  có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để tâm đối xứng của đồ thị hàm số nằm trong đường tròn tâm gốc tọa độ  $O$  bán kính bằng  $\sqrt{2019}$ ?

- A. 40. B. 0. C. 1. D. 38.



**Câu 119.** Cho đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên xác định như hình vẽ.

|      |           |     |           |
|------|-----------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $m$ | $+\infty$ |
| $y'$ |           | -   | +         |
| $y$  | $+\infty$ | 1   | $-\infty$ |
|      |           |     | 8         |

Biết rằng đồ thị hàm số có tiệm cận đứng  $x = x_0$ , tiệm cận ngang là  $y = y_0$  và  $x_0 y_0 = 16$ . Tính  $m$ ?

- A.  $m = 8$ . B.  $m = -16$ . C.  $m = 1$ . D.  $m = 2$ .

**Câu 120.** Hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên các khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ.

|      |           |   |           |
|------|-----------|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 3 | $+\infty$ |
| $y'$ |           | - | +         |
| $y$  | $+\infty$ | 5 | $-\infty$ |
|      |           |   | $m + 2$   |

Tìm  $m$  để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang  $y = y_0$  sao cho  $x_0 y_0 < 30$ .

**A.**  $m < 1$ .

**B.**  $m < 10$ .

**C.**  $m < 8$ .

**D.**  $m > 8$ .

**Câu 121.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình.

|         |           |           |     |           |
|---------|-----------|-----------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$      | $1$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$       | $-$ | $+$       |
| $f(x)$  | $4$       | $+\infty$ | $2$ | $m^2$     |

Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m \in [-4; 4]$  để hàm số có 4 tiệm cận?

**A.** 5.

**B.** 6.

**C.** 7.

**D.** 8.

**Câu 122.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình.

|         |           |           |      |           |              |
|---------|-----------|-----------|------|-----------|--------------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$      | $1$  | $2$       | $+\infty$    |
| $f'(x)$ |           | $-$       | $-$  | $0$       | $+$          |
| $f(x)$  | $0$       | $+\infty$ | $-3$ | $+\infty$ | $(m-1)(2-m)$ |

Tìm tổng số các giá trị nguyên dương của tham số  $m \in (-10; 10)$  để đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là 4.

**A.** 42.

**B.** 45.

**C.**  $-3$ .

**D.** 0.

**Câu 123.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ.

|      |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-m$      | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $-$       | $-$       |
| $y$  | $m$       | $+\infty$ | $m$       |

Định tham số  $m$  để giao điểm của đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là điểm  $I(-1; 1)$ .

**A.** Không có  $m$ .

**B.**  $m = 0$ .

**C.**  $m = -1$ .

**D.**  $m = 1$ .

**Câu 124.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ.

|      |               |                  |               |
|------|---------------|------------------|---------------|
| $x$  | $-\infty$     | $\frac{2-2m}{n}$ | $+\infty$     |
| $y'$ |               | $-$              | $-$           |
| $y$  | $\frac{m}{n}$ | $+\infty$        | $\frac{m}{n}$ |

Định tham số  $m$  và  $n$  để đồ thị hàm số nhận đường thẳng  $x = 2$ ,  $y = 2$  lần lượt là tiệm cận đứng và tiệm cận ngang thì biểu thức  $9m^2 + 6mn + 36n^2$  có giá trị là

- A.  $\frac{28}{3}$ . B.  $\frac{2}{3}$ . C.  $\frac{1}{3}$ . D.  $\frac{7}{3}$ .

**Câu 125.** Cho hàm số  $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ . Tìm  $a, b$  để đồ thị hàm số có  $x = 1$  là tiệm cận đứng và  $y = \frac{1}{2}$  là tiệm cận ngang.

- A.  $a = -1; b = 2$ . B.  $a = 4; b = 4$ . C.  $a = 1; b = 2$ . D.  $a = -1; b = -2$ .

**Câu 126.** Cho  $y = \frac{x-1}{x^2-8x+m}$ , có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận?

- A. 14. B. 8. C. 15. D. 16.

**Câu 127.** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2+m}{x^2-3x+2}$  có đúng hai đường tiệm cận.

- A.  $m = -1$ . B.  $m \in \{1; 4\}$ . C.  $m = 4$ . D.  $m \in \{-1; -4\}$ .

**Câu 128.** Biết rằng đồ thị của hàm số  $y = \frac{(n-3)x+n-2017}{x+m+3}$  ( $m, n$  là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tính tổng  $m+n$ .

- A. 0. B. -3. C. 3. D. 6.

**Câu 129.** Với giá trị nào của hàm số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}$  có tiệm cận ngang.

- A.  $m = 1$ . B.  $m = -1$ . C.  $m = \pm 1$ . D. Không có  $m$ .

**Câu 130.** Cho hàm số  $y = \frac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn  $[-6; 6]$  của tham số  $m$  để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận?

- A. 12. B. 9. C. 8. D. 11.

**Câu 131.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{[x^2-(2m+1)x+2m]\sqrt{x-m}}$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

- A.  $\begin{cases} 0 < m < 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$ . B.  $\begin{cases} m < 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$ . C.  $m > 1$ . D.  $\begin{cases} 0 \leq m \leq 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$ .

**Câu 132.** Cho  $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ , tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho đồ thị của hàm số có hai tiệm cận ngang.

- A.  $m < 0$ . B.  $m = 0$ . C.  $m > 0$ . D. Không tồn tại  $m$ .

**Câu 133.** Cho  $y = \frac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}$ , có bao nhiêu giá trị  $m$  nguyên thuộc khoảng  $(-10; 10)$  để đồ thị hàm số có đúng ba đường tiệm cận?

- A. 12. B. 11. C. 0. D. 10.

**Câu 134.** Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn  $[-2022; 2022]$  của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}$  có đúng hai đường tiệm cận.

- A. 4044. B. 2022. C. 2009. D. 2011.

**Câu 135.** Hàm số  $y = \frac{\sqrt{3x+1} + ax + b}{(x-1)^2}$  không có tiệm cận đứng. Khi đó hiệu  $a - b$  bằng

A.  $\frac{1}{2}$ .      B.  $-\frac{3}{4}$ .      C.  $-\frac{5}{4}$ .      D.  $-\frac{1}{2}$ .

#### 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 136.** Biết đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{5x+1} + ax + b}{(x-3)^2}$  không có tiệm cận đứng. Khi đó

| Phát biểu                    | Đ | S |
|------------------------------|---|---|
| a) $a + b = -\frac{11}{4}$ . |   |   |
| b) $a - b = -\frac{29}{8}$ . |   |   |

| Phát biểu                     | Đ | S |
|-------------------------------|---|---|
| c) $a + 2b = -\frac{39}{8}$ . |   |   |
| d) $a - 2b = -\frac{27}{8}$ . |   |   |

**Câu 137.** Biết đồ thị hàm số  $y = \frac{x^4 + ax^2 + b}{(x-1)^2}$  không có tiệm cận đứng. Khi đó

| Phát biểu         | Đ | S |
|-------------------|---|---|
| a) $a - b = 2$ .  |   |   |
| b) $a + b = -1$ . |   |   |

| Phát biểu         | Đ | S |
|-------------------|---|---|
| c) $ab = -2$ .    |   |   |
| d) $a + 2b = 1$ . |   |   |

**Câu 138.** Cho hàm số  $y = \frac{2x^2 + mx + 1}{x^2 - m^2}$ . Khi đó

| Phát biểu                                            | Đ | S |
|------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số luôn có tiệm cận đứng với mọi $m$ . |   |   |
| b) Khi $m > 0$ đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.  |   |   |
| c) Khi $m < 0$ đồ thị hàm số không có tiệm cận.      |   |   |
| d) Khi $m \neq 0$ đồ thị hàm số có ba tiệm cận.      |   |   |

**Câu 139.** Cho hàm số  $y = \frac{x}{x^3 - m^3}$ . Khi đó

| Phát biểu                                                 | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số luôn có ít nhất 2 tiệm cận với mọi $m$ . |   |   |
| b) Khi $m > 0$ đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang.         |   |   |
| c) Khi $m < 0$ đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng.          |   |   |
| d) Khi $m \neq 0$ đồ thị hàm số đúng 2 tiệm cận.          |   |   |

**Câu 140.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2mx + m^2 - 1}$  có đồ thị là  $(C)$ , với  $m$  là tham số thực. Khi đó

| Phát biểu                                                            | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $(C)$ có tiệm cận ngang $y = 1$ .                                 |   |   |
| b) $(C)$ luôn có hai tiệm cận đứng và khoảng cách giữa chúng bằng 2. |   |   |

| Phát biểu                                       | Đ | S |
|-------------------------------------------------|---|---|
| c) Tồn tại $m$ để $(C)$ không có tiệm cận đứng. |   |   |
| d) $(C)$ luôn có ba đường tiệm cận.             |   |   |

## 5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 141.** Tìm tất cả các giá trị nguyên  $m > -2025$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{x-1}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$  có đúng hai đường tiệm cận đứng.

KQ:

**Câu 142.** Tìm tất cả các giá trị nguyên  $m \leq 2026$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{x-2}{\sqrt{(m-1)x^2+1}}$  có hai đường tiệm cận ngang.

KQ:

**Câu 143.** Cho hàm số  $y = \frac{(m-1)x+1}{2x+m}$  có đồ thị là  $(C)$ . Gọi  $I$  là giao điểm của hai đường tiệm cận của  $(C)$ ,  $O$  là gốc tọa độ và  $A(4; -6)$ . Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để ba điểm  $O, I, A$  thẳng hàng.

KQ:

**Câu 144.** Cho hàm số  $y = \frac{x+2}{x-1}$  có đồ thị là  $(C)$ . Tính diện tích tam giác tạo bởi tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $(C)$  tại điểm  $M \in (C)$  bất kì với hai đường tiệm cận của nó.

KQ:

**Câu 145.** Cho hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-3}$  có đồ thị là  $(C)$ . Gọi  $M$  là điểm bất kì trên đồ thị  $(C)$ , tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách từ  $M$  đến hai tiệm cận của đồ thị (làm tròn đến 1 chữ số thập phân).

KQ:

**Câu 146.** Cho hàm số  $y = \frac{4x-3}{x-3}$  có đồ thị  $(C)$ . Biết đồ thị  $(C)$  có hai điểm phân biệt  $M, N$  và tổng khoảng cách từ  $M$  hoặc  $N$  tới hai tiệm cận là nhỏ nhất. Tính độ dài  $MN$  (làm tròn đến 1 chữ số thập phân).

KQ:

**Câu 147.** Cho hàm số  $y = \frac{mx^2+(3m^2-2)x-2}{x+3m}$  (1), với  $m$  là tham số thực. Tìm các giá trị của  $m$  để góc giữa hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng  $45^\circ$ .

KQ:

**Câu 148.** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{mx^2+(m^2-1)x+1-m}{x}$ . Có bao nhiêu giá trị  $m$  sao cho đồ thị của hàm số  $f$  có tiệm cận xiên đi qua gốc tọa độ.

KQ:

**Câu 149.** Cho hàm số  $y = \frac{ax^2+(2a-1)x+a+3}{x-2}$  ( $a \neq -1, a \neq 0$ ) có đồ thị  $(C)$ . Hãy xác định số điểm cố định mà tiệm cận xiên của đồ thị hàm số luôn đi qua.

KQ:

**Câu 150.** Định  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{mx-1}{2x+m}$  có đường tiệm cận đứng đi qua  $A(-1; \sqrt{2})$ .

KQ:

**Câu 151.** Cho đồ thị hàm số  $y = \frac{3}{4x^2+2(2m+3)x+m^2-1}$ . Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số  $m$  để đồ thị có đúng hai đường tiệm cận đứng?

KQ:

**Câu 152.** Cho hàm số  $y = \frac{x-1}{mx^2-2x+3}$ . Có tất cả bao nhiêu giá trị  $m$  để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận? KQ:

**Câu 153.** Cho hàm số  $y = \frac{x+1}{x^2-2mx+4}$ . Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m \in [-10; 10]$  để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận. KQ:

**Câu 154.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$  bằng 3? KQ:

**Câu 155.** Tìm tất cả các giá trị nguyên của  $m$  sao cho đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}$  có đúng một đường tiệm cận. KQ:

**Câu 156.** Cho đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2+(3m+2)x+2m-1}{x+5}$ . Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m \in (-10; 10)$  để đồ thị có tiệm cận xiên. KQ:

**Câu 157.** Cho đồ thị hàm số  $y = \frac{mx^2+(2m+1)x+m+3}{x+2}$ . Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m \in [-10; 10]$  để đồ thị có tiệm cận xiên. KQ:

**Câu 158.** Cho đồ thị hàm số  $y = \frac{mx^2-mx+m-1}{x-1}$ . Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m \in [-10; 10]$  để đồ thị có cực trị và có tiệm cận xiên. KQ:

**Câu 159.** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{x^2+(m+2)x+m^2-4m+3}{mx+1}$ . Có bao nhiêu giá trị của tham số  $m$  để tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ? KQ:

**Câu 160.** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{(m-1)x^2+(m+1)x-2m+3}{x-2m}$  ( $C_m$ ),  $\forall m \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu giá trị của tham số  $m$  để đồ thị ( $C_m$ ) có tiệm cận xiên cắt hai trục tọa độ tại  $A, B$  sao cho tam giác  $AOB$  có diện tích bằng 4? KQ:

**DẠNG 5**

**Bài toán tiệm cận liên quan đến tính toán tọa độ giao điểm**

- ✓ Xác định tiệm cận đứng, tiệm cận ngang, tiệm cận xiên của đồ thị hàm số tùy theo yêu cầu của bài toán.
- ✓ Xác định giao điểm của tiệm cận của đồ thị hàm số với các đồ thị hàm số khác mà giả thiết cho, từ đó tính toán theo yêu cầu của bài toán.

**1 Ví dụ mẫu**

**Ví dụ 44 (Mức độ 1).** Tìm số giao điểm của tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{x+2}{2x-1}$  với trục hoành.

**Ví dụ 45 (Mức độ 1).** Tìm tọa độ giao điểm của tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{3-x}{x+1}$ .

**Ví dụ 46 (Mức độ 2).** Tìm tọa độ giao điểm của tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x}{2-x}$  với đường thẳng  $y = 2x + 3$ .

**Ví dụ 47 (Mức độ 2).** Tìm tọa độ giao điểm của đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $f(x) = x - 2 + \frac{3}{x+1}$  và đường thẳng  $y = 2x - 5$ .

**Ví dụ 48 (Mức độ 2).** Biết rằng parabol  $y = x^2 + 3x - 4$  cắt tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = 2^x$  tại hai điểm phân biệt  $M$  và  $N$ . Tính độ dài  $MN$ .

**Ví dụ 49 (Mức độ 2).** Biết rằng đường thẳng  $d: x + my + n = 0$  đi qua điểm  $A(-2; 1)$  và song song với tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \log x$ . Tính  $m + n$ .

**Ví dụ 50 (Mức độ 2).** Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$  cắt hai trục tọa độ  $Ox, Oy$  tại hai điểm  $A$  và  $B$ . Tính diện tích tam giác  $OAB$ .

**Ví dụ 51 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $y = \frac{2x^2 - 3x}{x + 5}$  có đồ thị  $(C)$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                                                                    | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tiệm cận đứng của $(C)$ là $x = 5$ .                                                                                                                                      |   |   |
| b) Tiệm cận ngang của $(C)$ là $y = 2$ .                                                                                                                                     |   |   |
| c) Tiệm cận xiên và tiệm cận đứng của $(C)$ cắt nhau tại điểm $I$ . Khi đó $OI = \sqrt{554}$ (với $O$ là gốc tọa độ).                                                        |   |   |
| d) Gọi $A$ là giao điểm của tiệm cận xiên của $(C)$ với trục tung, $M$ là điểm thuộc trục hoành và thỏa mãn $MA = \sqrt{185}$ . Tọa độ điểm $M$ là $(2; 0)$ hoặc $(-2; 0)$ . |   |   |

**Ví dụ 52 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{2x - 3}{5x^2 - 15x + 10}$  có đồ thị  $(C)$ . Khi đó

| Phát biểu                                          | Đ | S |
|----------------------------------------------------|---|---|
| a) Tiệm cận ngang của $(C)$ là $y = \frac{2}{5}$ . |   |   |
| b) Tiệm cận đứng của $(C)$ là $x = 1$ và $x = 2$ . |   |   |



| Phát biểu                                                                                                                                           | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| c) Đường thẳng $y = 2x - 3$ cắt hai tiệm cận đứng của $(C)$ tại hai điểm $A$ và $B$ . Độ dài $AB$ bằng $2\sqrt{5}$ .                                |   |   |
| d) Hai tiệm cận đứng của $(C)$ cùng với trục hoành và đường thẳng $y = a$ tạo thành hình chữ nhật có diện tích bằng 6. Giá trị của $a$ là $\pm 6$ . |   |   |

**Ví dụ 53 (Mức độ 3).** Tìm tham số  $m$  ( $m < 0$ ) để đồ thị hàm số  $y = f(x) = \frac{x^2 + mx + 1}{x - 1}$  có tiệm cận xiên cắt hai trục tọa độ tại hai điểm  $A, B$  sao cho  $AB = 2\sqrt{2}$ .  
KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

## 2 Bài tập tự luận

**Bài 22 (Mức độ 2).** Tìm tọa độ giao điểm của tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{2 - x}$  với trục hoành.

**Bài 23 (Mức độ 2).** Tìm tọa độ giao điểm của tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{3x - 4}{x + 2}$  với đường thẳng  $y = 4 - x$ .

**Bài 24 (Mức độ 2).** Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 2}$  cắt tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = g(x) = \log_2 x$  tại điểm  $M$ . Tìm tọa độ điểm  $M$ .

**Bài 25 (Mức độ 2).** Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = f(x) = \frac{2x^2 - x}{x + 3}$  cắt hai trục tọa độ tại hai điểm  $A, B$ . Tính độ dài  $AB$ .

**Bài 26 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{m^2x + 3}{x - 5}$  và  $g(x) = \frac{3x^2 - 4x - 2}{x - 6}$ . Tìm  $m$  để tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $f(x)$  cắt tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $g(x)$  tại điểm có hoành độ bằng 2.

## 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 161 (Mức độ 1).** Số giao điểm của tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = e^x$  và trục tung là

- A. 1.                      B. 2.                      C. 0.                      D. vô số.

**Câu 162 (Mức độ 1).** Giao điểm của hai đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x + 4}{3 - x}$  có tọa độ là

- A.  $(3; -2)$ .                      B.  $(2; 3)$ .                      C.  $(-2; 3)$ .                      D.  $(-3; 2)$ .

**Câu 163 (Mức độ 1).** Giao điểm của tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \ln x$  với đường thẳng  $y = 3x - 2$  là

- A.  $A(0; 2)$ .                      B.  $B(0; -2)$ .                      C.  $C(2; 0)$ .                      D.  $D(-2; 0)$ .

**Câu 164 (Mức độ 2).** Số giao điểm của tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{x}$  với parabol  $y = x^2 + x + 3$  là

- A. 1.                      B. 0.                      C. 3.                      D. 2.

**Câu 165 (Mức độ 2).** Gọi  $d$  là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $f(x) = 2x - 4 + \frac{1}{3x + 4}$ . Giao điểm của  $d$  với trục tung là

- A.  $M(2; 0)$ .                      B.  $N(-2; 0)$ .                      C.  $P(0; 4)$ .                      D.  $Q(0; -4)$ .

**Câu 166 (Mức độ 2).** Gọi  $\Delta$  là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $f(x) = 3x - 1 + \frac{2}{x-1}$ . Số giao điểm của  $\Delta$  với đường thẳng  $d: y = 3x + 1$  là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. vô số.

**Câu 167 (Mức độ 2).** Biết rằng parabol  $y = x^2 + x - 2$  cắt tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = 5^x$  tại hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$ . Độ dài  $AB$  là

- A. 2. B.  $2\sqrt{5}$ . C. 3. D.  $3\sqrt{5}$ .

**Câu 168 (Mức độ 3).** Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x + 1}$  cắt hai trục tọa độ  $Ox, Oy$  tại hai điểm  $A$  và  $B$ . Diện tích tam giác  $OAB$  bằng

- A. 1. B. 2. C.  $\sqrt{3}$ . D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 169 (Mức độ 3).** Tìm tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $f(x) = \frac{x^2 - mx + 1}{x - 2}$  có tiệm cận xiên cắt hai trục tọa độ  $Ox, Oy$  tại hai điểm  $A, B$  sao cho tam giác  $OAB$  có diện tích bằng 8.

- A.  $m = 2$  hoặc  $m = 6$ . B.  $m = -2$  hoặc  $m = 6$ .  
C.  $m = 2$  hoặc  $m = -6$ . D.  $m = -2$  hoặc  $m = -6$ .

**Câu 170 (Mức độ 3).** Gọi  $d$  là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $f(x) = \frac{mx^2 + nx + 1}{x - 1}$ , với  $m, n$  là tham số. Biết rằng  $d$  song song với đường thẳng  $\Delta: y = 3x + 2$  và đi qua điểm  $M(-1; 4)$ . Khi đó  $m + n$  bằng

- A. 5. B. 6. C. 7. D. 8.

#### 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 171 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $y = \frac{2x + 3}{3 - 2x}$  có đồ thị  $(C)$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                                                                                                                     | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tiệm cận đứng của $(C)$ là $x = \frac{3}{2}$ .                                                                                                                                                                             |   |   |
| b) Tiệm cận ngang của $(C)$ cắt đường thẳng $y = 2x + 3$ tại điểm $(-2; -1)$ .                                                                                                                                                |   |   |
| c) Hình chữ nhật tạo bởi tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của $(C)$ và hai trục tọa độ có diện tích bằng $\frac{2}{3}$ .                                                                                                         |   |   |
| d) Gọi $I$ là giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của $(C)$ . Đường thẳng $y = 4 - x$ cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của $(C)$ lần lượt tại hai điểm $A, B$ . Tam giác $IAB$ có diện tích bằng $\frac{9}{8}$ . |   |   |

**Câu 172 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{2x^2 - x}{2x + 4}$  có đồ thị  $(C)$ . Khi đó

| Phát biểu                                             | Đ | S |
|-------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tiệm cận đứng của $(C)$ là $x = 1$ .               |   |   |
| b) Tiệm cận xiên của $(C)$ là $y = x - \frac{5}{2}$ . |   |   |

| Phát biểu                                                                                                                                                                 | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| c) Tiệm cận xiên của $(C)$ cắt đường thẳng $y = mx - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 3. Khi đó $m = \frac{1}{2}$ .                                                           |   |   |
| d) Biết rằng đường thẳng $\Delta$ có hệ số góc $k = 2$ và đi qua giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của $(C)$ . $\Delta$ có phương trình là $2x - 2y - 1 = 0$ . |   |   |

**Câu 173 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - a}$  có đồ thị  $(C)$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                                | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tiệm cận ngang của $(C)$ là $y = 1$ .                                                                                                 |   |   |
| b) Nếu $a < 0$ thì $(C)$ không có tiệm cận đứng.                                                                                         |   |   |
| c) Biết đường thẳng $y = mx - 7$ cắt tiệm cận ngang của $(C)$ tại điểm có hoành độ bằng $-2$ . Giá trị của $m$ là 4.                     |   |   |
| d) Giả sử $(C)$ có hai tiệm cận đứng cắt trục hoành lần lượt tại hai điểm $A$ và $B$ sao cho $AB = 10$ . Giá trị của $a$ là $\sqrt{5}$ . |   |   |

**Câu 174 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{mx^2 - x}{2x - 1}$  có đồ thị  $(C)$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                            | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Nếu $m = 0$ thì $(C)$ có tiệm cận ngang là $y = 0$ .                              |   |   |
| b) Để $(C)$ có tiệm cận đứng thì $m \neq 4$ .                                        |   |   |
| c) Nếu $m = 4$ thì $(C)$ có tiệm cận xiên là $y = 2x + \frac{1}{2}$ .                |   |   |
| d) Khi $m = 14$ thì $(C)$ có tiệm cận xiên cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3. |   |   |

**Câu 175 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{m + x}$  có đồ thị  $(C)$ .

| Phát biểu                                                                                                                                   | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Khi $m \neq -2$ và $m \neq 3$ thì $(C)$ có tiệm cận đứng.                                                                                |   |   |
| b) Nếu $m = 0$ thì tiệm cận đứng của $(C)$ là $x = 1$ .                                                                                     |   |   |
| c) Nếu $m = 1$ thì tiệm cận xiên của $(C)$ cắt hai trục tọa độ $Ox$ , $Oy$ lần lượt tại hai điểm phân biệt $M$ và $N$ .                     |   |   |
| d) Biết tiệm cận xiên của $(C)$ cắt tiệm cận đứng của $(C)$ tại điểm $A$ sao cho $OA = \sqrt{2}$ . Khi đó $m = 1$ hoặc $m = -\frac{1}{5}$ . |   |   |

## 5

## Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 176 (Mức độ 2).** Cho hàm số  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  có đồ thị  $(C)$ . Biết tiệm cận ngang của  $(C)$  cắt đường thẳng  $y = 2x - 6$  tại điểm  $M(a; b)$ . Tính  $a + b$ . KQ:

**Câu 177 (Mức độ 3).** Gọi  $I(m; m)$  là giao điểm của tiệm cận xiên và tiệm cận đứng của hàm số  $f(x) =$

$x + \frac{2}{x-1}$ . Tính  $m^2 - n^2$ .

KQ:

**Câu 178 (Mức độ 3).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{2x^2 + 8x + 5}{3 + x}$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $M(a; b)$  là điểm có tọa độ nguyên thuộc tiệm cận xiên của  $(C)$  sao cho  $OM = \sqrt{17}$  ( $O$  là gốc tọa độ). Tính  $a \cdot b$ .

KQ:

**Câu 179 (Mức độ 4).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x + 2}$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $I$  là giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của  $(C)$ . Đường thẳng  $y = m$  (với  $m \neq 0$ ) cắt tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của  $(C)$  tại hai điểm  $A, B$  sao cho tam giác  $IAB$  có diện tích bằng 32. Tìm  $m$ . KQ:

**Câu 180 (Mức độ 4).** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x - 4}$  có đồ thị  $(C)$ . Biết đường thẳng  $\Delta: y = -x + m$  cắt tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của  $(C)$  lần lượt tại hai điểm  $B, C$  sao cho tam giác  $OBC$  có diện tích bằng  $\frac{11}{4}$  (với  $O$  là gốc tọa độ). Biết  $m$  là số nguyên và lớn hơn 1. Tính giá trị  $m^2 - 1$ .

KQ:

**DẠNG 6**

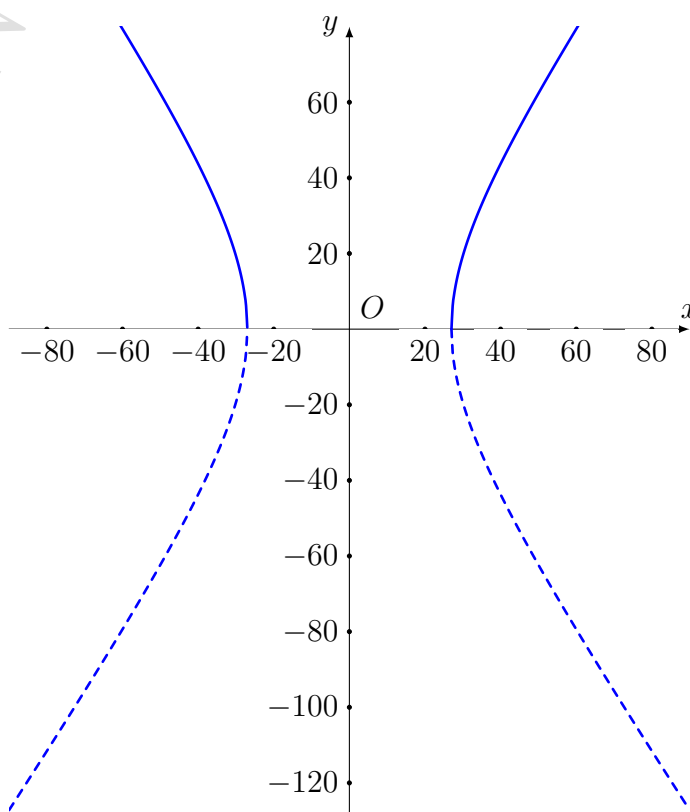
**Ứng dụng khái niệm tiệm cận vào bài toán thực tế**

- ☑ Xác định tiệm cận đứng, tiệm cận ngang, tiệm cận xiên của đồ thị hàm số tùy theo yêu cầu của bài toán.
- ☑ Từ đó trả lời các câu hỏi theo yêu cầu bài toán.

**1 Ví dụ mẫu**

**Ví dụ 54 (Mức độ 2).**

Một ống khói của nhà máy điện hạt nhân có mặt cắt là một hypebol  $(H)$  có phương trình chính tắc là  $\frac{x^2}{27^2} - \frac{y^2}{40^2} = 1$  (Hình bên). Xét hai nhánh bên trên  $Ox$  của  $(H)$  là đồ thị  $(C)$  của hàm số  $y = \frac{40}{27}\sqrt{x^2 - 27^2}$  (phần nét liền đậm). Đường thẳng  $y = \frac{a}{b}x$  là một đường tiệm cận xiên của  $(C)$ . Biết với  $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^*, \frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính  $a + b$ . KQ:



**Ví dụ 55 (Mức độ 1).** Theo thuyết tương đối hẹp, khối lượng  $m$  (kg) của một hạt phụ thuộc vào tốc độ di chuyển  $v$  (km/s) của nó trong hệ quy chiếu quán tính theo công thức  $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , trong đó

$m_0$  là khối lượng nghỉ của hạt,  $c = 300000$  km/s là tốc độ ánh sáng. Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số khối lượng hạt.

**Ví dụ 56 (Mức độ 2).** Nếu trong một ngày, một xưởng sản xuất được  $x$  kilôgam sản phẩm thì chi phí trung bình (tính bằng nghìn đồng) cho một sản phẩm được cho bởi công thức  $C(x) = \frac{50x + 2000}{x}$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                          | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = 0$ .                                                    |   |   |
| b) Nếu xưởng sản xuất được 40 kg sản phẩm thì chi phí trung bình cho một sản phẩm là 100 000 đồng. |   |   |
| c) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 2000$ .                                                |   |   |
| d) Chi phí trung bình thấp nhất cho một sản phẩm sản xuất trong một ngày là 100 000 đồng.          |   |   |

## 2

## Bài tập tự luận

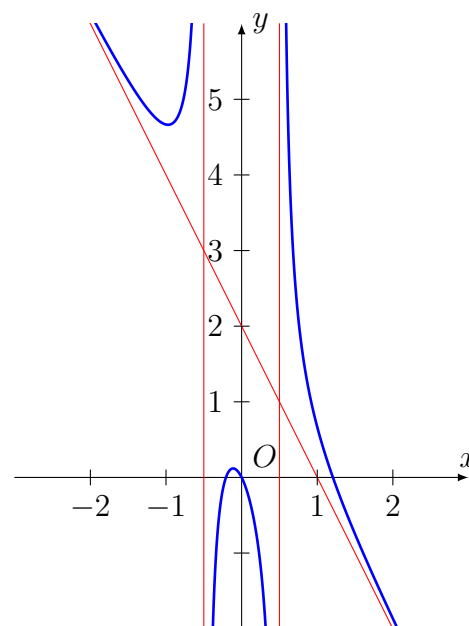
**Bài 27 (Mức độ 1).** Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian  $t$  cho bởi công thức  $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$ , với  $y$  được tính theo mg/l và  $t$  được tính theo giờ,  $t \geq 0$ . Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y(t)$ . Từ đó, có nhận xét gì về nồng độ oxygen trong hồ khi thời gian  $t$  trở nên rất lớn?

(Theo: [www.researchgate.net/publication/264903978\\_Microrespirometric\\_characterization\\_of\\_activated\\_sludge\\_inhibition\\_by\\_copper\\_and\\_zinc](http://www.researchgate.net/publication/264903978_Microrespirometric_characterization_of_activated_sludge_inhibition_by_copper_and_zinc))

**Bài 28 (Mức độ 2).**

Tại một công ty sản xuất đồ chơi A, công ty phải chi 50 000 USD để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi A, công ty phải trả 5 USD cho nguyên liệu thô và nhân công. Gọi  $x$  ( $x \geq 1$ ) là số đồ chơi A mà công ty đã sản xuất và  $T(x)$  (đơn vị USD) là tổng tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất  $x$  đồ chơi A. Người ta xác định chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi A là  $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ .

- Xem  $M(x)$  là hàm số theo  $x$  xác định trên nửa khoảng  $[1; +\infty)$ , tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số này.
- Nêu nhận xét về chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi A khi  $x$  đủ lớn.



### 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 181 (Mức độ 2).** Trong thuyết tương đối của Einstein, khối lượng của vật chuyển động với vận tốc  $v$  được cho bởi công thức  $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , trong đó  $m_0$  là khối lượng của vật khi nó đứng yên,  $c$  là vận tốc ánh sáng.

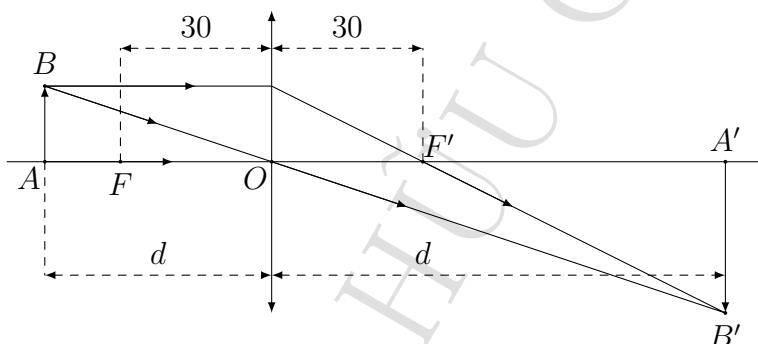
(nguồn: <https://www.britannica.com/science/relativity/Relativistic-mass>)

Xem  $m$  là hàm số theo vận tốc  $v$ , đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là

- A.  $v = m_0$ . B.  $v = 1$ . C.  $v = c$ . D.  $v = 0$ .

**Câu 182 (Mức độ 2).** Một thấu kính hội tụ có tiêu cự  $f = 30$  cm. Trong vật lí, ta biết rằng nếu đặt vật thật  $AB$  cách quang tâm  $O$  của thấu kính hội tụ một khoảng  $d$  (cm) lớn hơn 30 cm thì được ảnh thật  $A'B'$  cách quang tâm của thấu kính một  $d'$  (cm). Ngược lại, nếu  $0 < d < 30$  thì ta có ảnh ảo. Công thức của thấu kính là  $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$ . Gọi  $h(d)$  là biểu thức xác định  $d'$  theo  $d$ . Tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $h(d)$  lần lượt là

- A.  $x = 30$  và  $y = 0$ . B.  $x = 0$  và  $y = 30$ . C.  $x = 30$  và  $y = 30$ . D.  $x = 30$  và  $y = 6$ .



**Câu 183 (Mức độ 2).** Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong  $x$  (tháng) được tính theo công thức  $S(x) = 200 \left( 5 - \frac{9}{2+x} \right)$ , trong đó  $x \geq 1$ .

(Nguồn: R.Larson and B.Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014)

Số lượng sản phẩm bán được của công ty trong  $x$  (tháng) khi  $x$  đủ lớn là

- A. 1000. B. 2000. C. 500. D. 200.

**Câu 184 (Mức độ 2).** Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng  $144 \text{ m}^2$ . Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là  $x(\text{m})$ . Gọi  $P(x)$  (mét) là biểu thức tính chu vi của mảnh vườn. Tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $P(x)$  là

- A.  $x = 0$  và  $y = 2x + 1$ . B.  $x = 1$  và  $y = 2x$ .  
C.  $x = 0$  và  $y = 2x$ . D.  $x = 1$  và  $y = 2x + 1$ .

### 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 185 (Mức độ 2).** Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất  $x$  (sản phẩm) là  $C(x) = 2x + 50$  (triệu đồng). Khi đó  $f(x) = \frac{C(x)}{x}$  là chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm. Khi đó



| Phát biểu                                                                  | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $f(x)$ giảm.                                                     |   |   |
| b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .                               |   |   |
| c) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(x)$ là $x = 0$ .                     |   |   |
| d) Chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm luôn lớn hơn 1 triệu đồng. |   |   |

**Câu 186 (Mức độ 2).** Để loại bỏ  $p\%$  một loài tảo độc khỏi một hồ nước, người ta ước tính chi phí bỏ ra là  $C(p) = \frac{45p}{100 - p}$  (triệu đồng), với  $0 \leq p < 100$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                        | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Để loại bỏ 10% tảo độc khỏi hồ nước thì chi phí bỏ ra là 10 triệu đồng.       |   |   |
| b) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = 45$ .                                 |   |   |
| c) Với chi phí là 11,25 triệu đồng thì loại bỏ được 20% tảo độc ra khỏi hồ nước. |   |   |
| d) Có thể loại bỏ hoàn toàn tảo độc khỏi hồ nước.                                |   |   |

## 5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 187 (Mức độ 1).** Số dân của một thị trấn sau  $x$  năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức

$$y = f(x) = \frac{26x + 10}{x + 5}$$

( $f(x)$  được tính bằng nghìn người).

(Nguồn: Giải tích 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020)

Xem  $y = f(x)$  là một hàm số xác định trên nửa khoảng  $[0; +\infty)$ . Dân số của thị trấn ngày càng “tiến gần” tới con số nào (đơn vị: nghìn người)?

KQ:

**Câu 188 (Mức độ 2).** Một bể bơi chứa 5 000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 30 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 25 lít/phút. Gọi  $f(t)$  là hàm số biểu thị nồng độ muối trong bể sau  $t$  phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) xác định trên nửa khoảng  $[0; +\infty]$ . Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $f(t)$  là  $y = a$ . Tìm  $a$ .

KQ:



## A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### Sơ đồ khảo sát hàm số

Để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , ta thực hiện theo các bước sau đây:

- ☑ **Bước 1.** Tìm tập xác định của hàm số.
- ☑ **Bước 2.** Xét sự biến thiên của hàm số.
  - Tìm đạo hàm  $y'$ , xét dấu  $y'$ , xác định khoảng đơn điệu, cực trị (nếu có) của hàm số.
  - Tìm giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực của hàm số và các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
  - Lập bảng biến thiên của hàm số.
- ☑ **Bước 3.** Vẽ đồ thị của hàm số.
  - Xác định các điểm cực trị (nếu có), giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ (nếu có và dễ tìm), ...
  - Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
  - Vẽ đồ thị hàm số.

## B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

### DẠNG 1 Đồ thị hàm số bậc ba

- a) Tìm tập xác định của hàm số.
- b) Khảo sát sự biến thiên của hàm số
  - ☑ Tính đạo hàm  $y'$ . Tìm các điểm mà tại đó  $y'$  bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
  - ☑ Tìm cực trị của hàm số.
  - ☑ Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
  - ☑ Lập bảng biến thiên của hàm số.
- c) Vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

⚠ Khi vẽ đồ thị, nên xác định thêm một số điểm đặc biệt của đồ thị, chẳng hạn hãy tìm giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ (khi có và việc tìm không quá phức tạp). Ngoài ra cần lưu ý đến tính đối xứng của đồ thị (đối xứng tâm, đối xứng trục).

⚠ Đồ thị của hàm số bậc ba  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$

- ☑ Có tâm đối xứng là điểm có hoành độ thỏa mãn  $y'' = 0$  hay  $x = -\frac{b}{3a}$ .
- ☑ Không có tiệm cận.

## 1

## Ví dụ mẫu

**Ví dụ 1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ .

**Ví dụ 2.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số  $y = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ .

**Ví dụ 3.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số  $y = -2x^3 + 3x^2 - 5x$ .

**Ví dụ 4.**

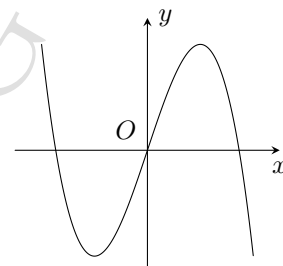
Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình bên?

**A.**  $y = -x^3 + 3x$ .

**B.**  $y = x^4 - x^2$ .

**C.**  $y = \frac{2x+1}{x+2}$ .

**D.**  $y = x^2 + x$ .



**Ví dụ 5.** Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như hình vẽ?

|      |           |      |      |           |     |     |           |
|------|-----------|------|------|-----------|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $1$  | $+\infty$ |     |     |           |
| $y'$ |           | $-$  | $0$  | $+$       | $0$ | $-$ |           |
| $y$  | $+\infty$ |      | $-1$ |           | $3$ |     | $-\infty$ |

**A.**  $y = \frac{x+2}{x}$ .

**B.**  $y = -x^3 + 3x + 1$ .

**C.**  $y = x^4 - 3x^2$ .

**D.**  $y = -2x^2 + 1$ .

**Ví dụ 6.**

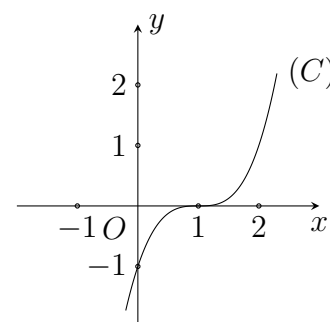
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị  $(C)$  như hình vẽ. Hỏi  $(C)$  là đồ thị của hàm số nào?

**A.**  $y = x^3 - 1$ .

**B.**  $y = (x+1)^3$ .

**C.**  $y = (x-1)^3$ .

**D.**  $y = x^3 + 1$ .



**Ví dụ 7.**

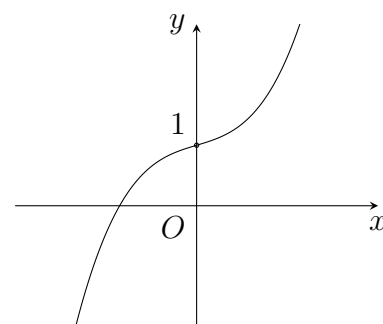
Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

**A.**  $y = \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{3}x + 1$ .

**B.**  $y = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x + 1$ .

**C.**  $y = \frac{1}{4}x^4 + x^2 + 1$ .

**D.**  $y = -x^3 + x^2 - x + 1$ .

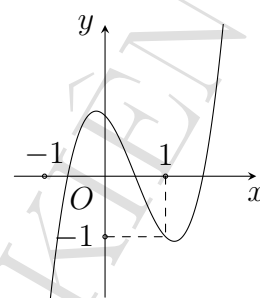


**Ví dụ 8.**

Cho hàm số bậc ba  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , ( $a \neq 0$ ) có đồ thị ( $C$ ) như hình vẽ bên. Khi đó

| Phát biểu    | Đ | S |
|--------------|---|---|
| a) $a > 0$ . |   |   |
| b) $d > 0$ . |   |   |

| Phát biểu                   | Đ | S |
|-----------------------------|---|---|
| c) $bc < 0$ .               |   |   |
| d) $f(a + b + c + d) < 0$ . |   |   |

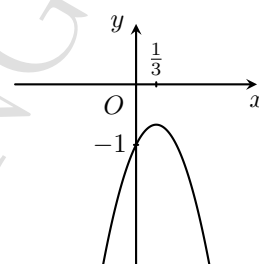


### Ví dụ 9.

Cho hàm số  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ). Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Khi đó

| Phát biểu    | Đ | S |
|--------------|---|---|
| a) $a > 0$ . |   |   |
| b) $c < 0$ . |   |   |

| Phát biểu               | Đ | S |
|-------------------------|---|---|
| c) $a + b = -1$ .       |   |   |
| d) $f(1) - f(0) = -1$ . |   |   |

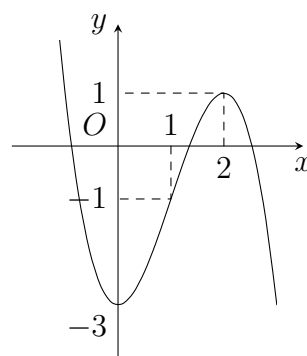


### Ví dụ 10.

Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ  $-3$ ; hoành độ điểm cực đại là  $2$  và đi qua điểm  $(1; -1)$  như hình vẽ bên.

Tính tỉ số  $\frac{b}{a}$ ?

KQ:



## 2 Bài tập tự luận

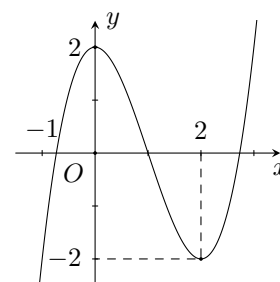
**Bài 1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

- a)  $y = x^3 + 3x^2 - 4$ ;      b)  $y = x^3 + 4x^2 + 4x$ ;      c)  $y = -2x^3 + 2$ ;      d)  $y = -x^3 - x^2 - x + 1$ .

**Bài 2.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số  $y = -x^3 - 3x^2 + 2$ .

### Bài 3.

Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Tính  $S = a + b$ .

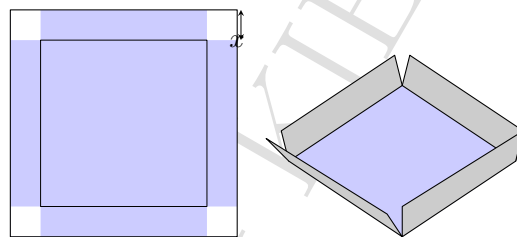


**Bài 4.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2$

- a) Tìm điểm  $I$  thuộc đồ thị hàm số biết hoành độ của  $I$  là nghiệm của phương trình  $y'' = 0$ .  
b) Chứng minh rằng  $I$  là trung điểm nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

**Bài 5.** Bạn Việt muốn dùng tấm bìa hình vuông cạnh 6 dm làm một chiếc hộp không nắp, có đáy là hình vuông bằng cách cắt bỏ đi 4 hình vuông nhỏ ở bốn góc của tấm bìa (minh họa như hình bên dưới). Bạn Việt muốn tìm độ dài cạnh hình vuông cần cắt bỏ để chiếc hộp đạt thể tích lớn nhất.

- a) Hãy thiết lập hàm số biểu thị thể tích hộp theo  $x$  với  $x$  là độ dài cạnh hình vuông cần cắt đi.
- b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số tìm được. Từ đó, hãy tư vấn cho bạn Việt cách giải quyết vấn đề và giải thích vì sao cần chọn giá trị này.



## 3

## Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

## Câu 1.

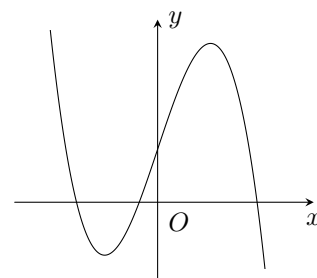
Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

**A.**  $y = x^3 - 3x + 1$ .

**B.**  $y = x^4 + 4x^2 + 1$ .

**C.**  $y = -x^3 + 3x + 1$ .

**D.**  $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ .



## Câu 2.

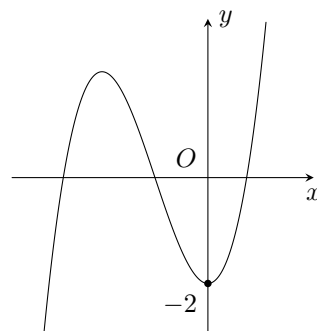
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

**A.**  $y = -x^3 + x^2 - 2$ .

**B.**  $y = x^3 + 3x^2 - 2$ .

**C.**  $y = x^3 - 3x + 2$ .

**D.**  $y = x^2 - 3x - 2$ .



## Câu 3.

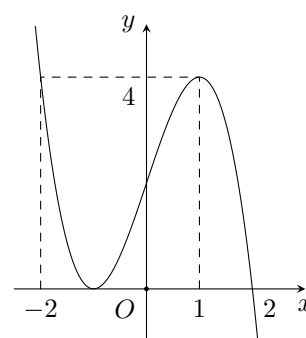
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

**A.**  $y = x^3 + 3x - 2$ .

**B.**  $y = x^3 - 3x + 2$ .

**C.**  $y = -x^3 + 3x + 2$ .

**D.**  $y = -x^3 - 3x - 2$ .



## Câu 4.

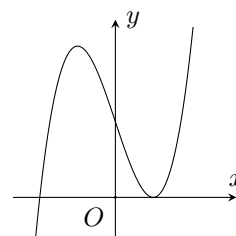
Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

**A.**  $y = x^3 - 3x + 2$ .

**B.**  $y = x^4 - x^2 + 1$ .

**C.**  $y = x^4 + x^2 + 1$ .

**D.**  $y = -x^3 + 3x + 2$ .



**Câu 5.** Bảng biến thiên ở hình bên dưới là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

|      |           |   |   |           |   |
|------|-----------|---|---|-----------|---|
| $x$  | $-\infty$ | 0 | 2 | $+\infty$ |   |
| $y'$ | +         | 0 | - | 0         | + |
| $y$  | $-\infty$ | 5 | 1 | $+\infty$ |   |

- A.**  $y = -x^3 - 2x^2 + 5$ . **B.**  $y = x^3 - 3x^2 + 5$ . **C.**  $y = -x^3 - 3x + 5$ . **D.**  $y = x^3 + 3x^2 + 5$ .

**Câu 6.** Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau

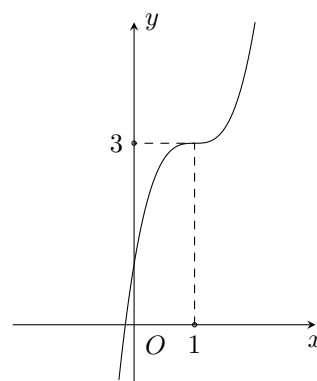
|      |           |      |     |           |     |
|------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$       | $+$ |
| $y$  | $+\infty$ | $-2$ | $2$ | $-\infty$ |     |

- A.**  $y = x^3 - 3x$ . **B.**  $y = -x^3 + 3x$ . **C.**  $y = x^2 - 2x$ . **D.**  $y = -x^2 + 2x$ .

**Câu 7.**

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số ở dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

- A.**  $y = 2x^3 - x^2 + 6x + 1$ . **B.**  $y = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 1$ .  
**C.**  $y = 2x^3 - 6x^2 - 6x + 1$ . **D.**  $y = -2x^3 - 6x^2 - 6x + 1$ .



**Câu 8.** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có bảng biến thiên như hình bên dưới.

|      |           |   |    |           |   |
|------|-----------|---|----|-----------|---|
| $x$  | $-\infty$ | 0 | 4  | $+\infty$ |   |
| $y'$ | +         | 0 | -  | 0         | + |
| $y$  | $-\infty$ | 3 | -5 | $+\infty$ |   |

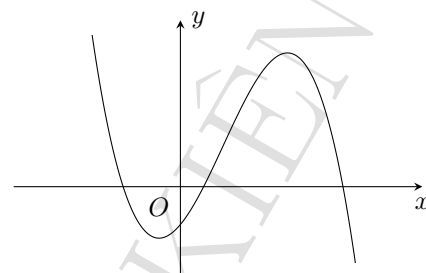
Có bao nhiêu số dương trong các số  $a, b, c, d$ ?

- A.** 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

**Câu 9.**

Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ. Trong các giá trị  $a, b, c, d$  có bao nhiêu giá trị âm?

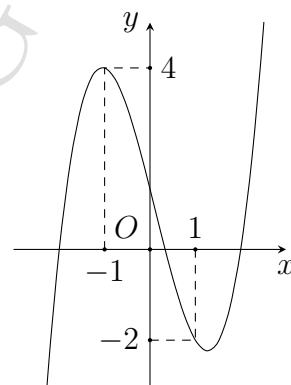
- A.** 3.      **B.** 1.      **C.** 4.      **D.** 2.



**Câu 10.**

Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ. Tính giá trị của biểu thức  $T = f(a - b + c - d + 5) + f(f(a + b + c + d + 3) + 3)$ .

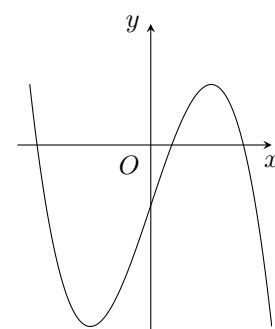
- A.**  $T = 2$ .      **B.**  $T = -4$ .      **C.**  $T = 8$ .      **D.**  $T = -6$ .



**Câu 11.**

Cho hàm số  $y = ax^3 + 3x + d$  ( $a; d \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

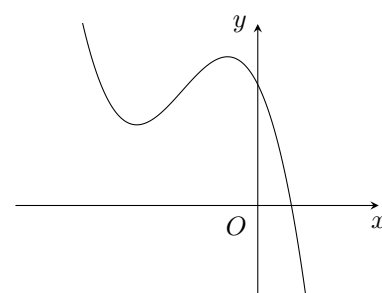
- A.**  $a > 0, d > 0$ .      **B.**  $a < 0, d > 0$ .      **C.**  $a > 0, d < 0$ .      **D.**  $a < 0, d < 0$ .



**Câu 12.**

Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số  $a, b, c, d$ ?

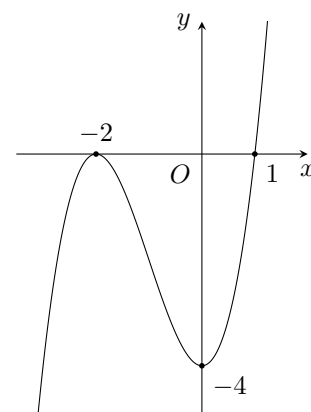
- A.** 4.      **B.** 2.      **C.** 1.      **D.** 3.



**Câu 13.**

Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị trong hình bên. Tính tổng  $S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ .

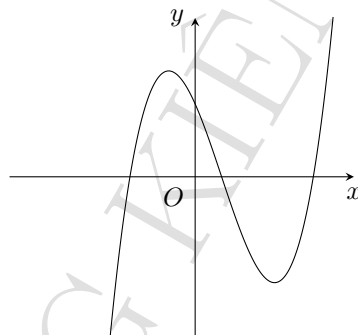
- A.** 16.      **B.** 25.      **C.** 10.      **D.** 26.



**Câu 14.**

Hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào là đúng?

- A.**  $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0.$       **B.**  $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0.$   
**C.**  $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0.$       **D.**  $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0.$

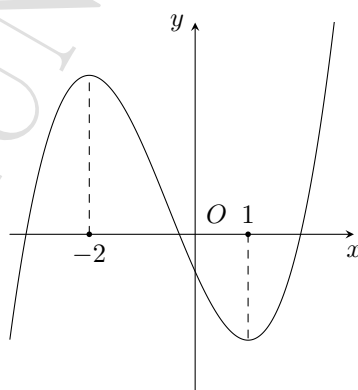


**Câu 15.**

Cho đường cong (C):  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình bên.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.**  $a > 0, b < 0, c < 0, d < 0.$       **B.**  $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0.$   
**C.**  $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0.$       **D.**  $a > 0, b > 0, c < 0, d < 0.$



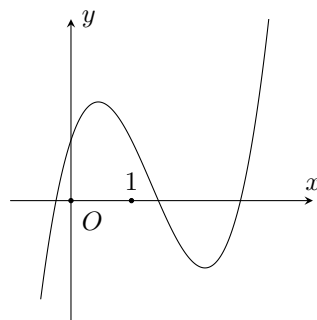
**4**

**Bài tập trắc nghiệm đúng sai**

**Câu 16.**

Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ sau. Khi đó

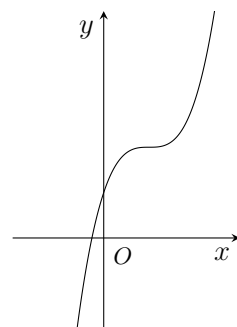
| Phát biểu                                              | Đ | S |
|--------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại duy nhất một điểm. |   |   |
| b) $f(1) = 0.$                                         |   |   |
| c) $ad > 0.$                                           |   |   |
| d) $bc < 0.$                                           |   |   |



**Câu 17.**

Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình bên. Khi đó

| Phát biểu                                                       | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số có một điểm cực trị.                                  |   |   |
| b) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.       |   |   |
| c) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại duy nhất một điểm.          |   |   |
| d) Hàm số có $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$ |   |   |

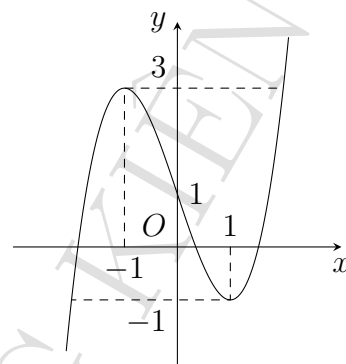


**Câu 18.**



Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị  $(C)$ . Khi đó

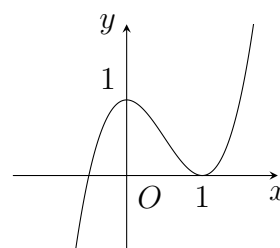
| Phát biểu                                                                             | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-1 \leq m \leq 3$ . |   |   |
| b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .                                    |   |   |
| c) $f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$ .                                       |   |   |
| d) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ .                                                            |   |   |



### Câu 19.

Cho hàm số bậc ba  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ,  $(a \neq 0)$  có đồ thị  $(C)$  như hình vẽ. Khi đó

| Phát biểu                                                | Đ | S |
|----------------------------------------------------------|---|---|
| a) $a > 0$ .                                             |   |   |
| b) $d < 0$ .                                             |   |   |
| c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0; +\infty)$ là 1. |   |   |
| d) $f(a + b + c + d) = 1$ .                              |   |   |

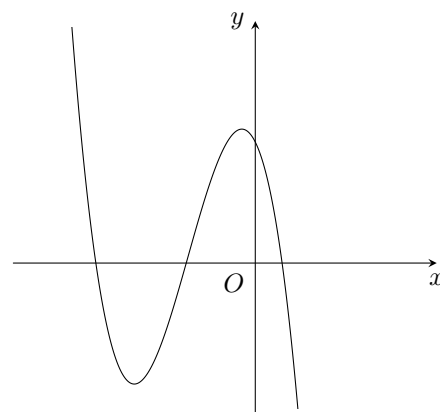


### Câu 20.

Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị là đường cong trong hình bên.

| Phát biểu    | Đ | S |
|--------------|---|---|
| a) $a < 0$ . |   |   |
| b) $b < 0$ . |   |   |

| Phát biểu    | Đ | S |
|--------------|---|---|
| c) $c < 0$ . |   |   |
| d) $d > 0$ . |   |   |

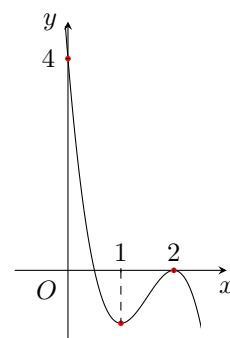


### Câu 21.

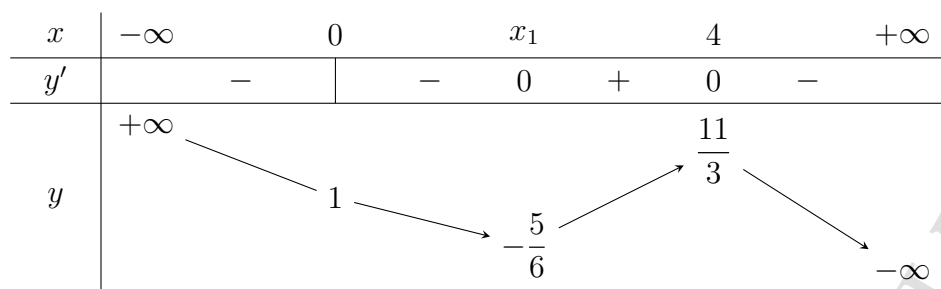
Cho hàm số  $y = -2x^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình bên.

| Phát biểu              | Đ | S |
|------------------------|---|---|
| a) $bcd = -144$ .      |   |   |
| b) $c^2 < b^2 + d^2$ . |   |   |

| Phát biểu            | Đ | S |
|----------------------|---|---|
| c) $b + c + d = 1$ . |   |   |
| d) $b + d < c$ .     |   |   |



**Câu 22.** Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có bảng biến thiên như sau



Khi đó

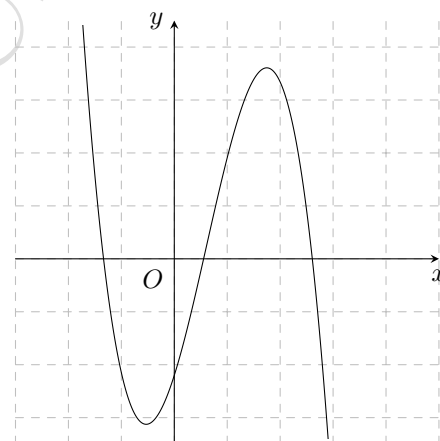
| Phát biểu    | Đ | S |
|--------------|---|---|
| a) $a > 0$ . |   |   |
| b) $d > 0$ . |   |   |

| Phát biểu                                                           | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------|---|---|
| c) $bc < 0$ .                                                       |   |   |
| d) $f\left(16a + 8b + 3c + d + \frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{6}$ . |   |   |

**Câu 23.**

Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị hàm số như hình vẽ bên.

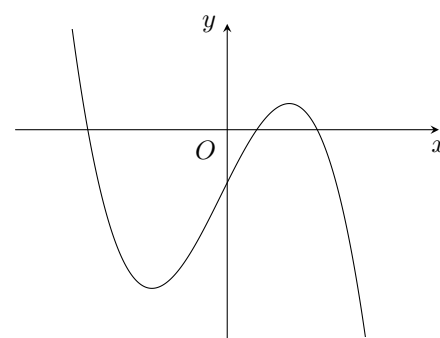
| Phát biểu                         | Đ | S |
|-----------------------------------|---|---|
| a) $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$ . |   |   |
| b) $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$ . |   |   |
| c) $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$ . |   |   |
| d) $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$ . |   |   |



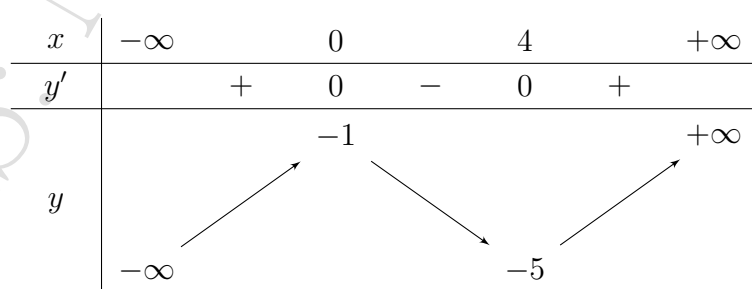
**Câu 24.**

Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình bên.

| Phát biểu                         | Đ | S |
|-----------------------------------|---|---|
| a) $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$ . |   |   |
| b) $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$ . |   |   |
| c) $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$ . |   |   |
| d) $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$ . |   |   |



**Câu 25.** Cho hàm số  $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có bảng biến thiên như sau



| Phát biểu               | Đ | S |
|-------------------------|---|---|
| a) $a = -\frac{1}{8}$ . |   |   |
| b) $b = -\frac{3}{4}$ . |   |   |

| Phát biểu    | Đ | S |
|--------------|---|---|
| c) $c = 0$ . |   |   |
| d) $d = 1$ . |   |   |

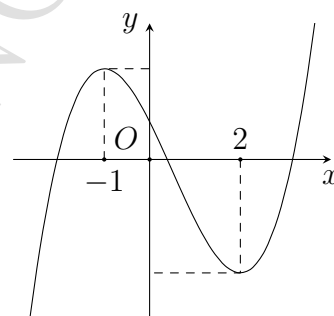
## 5

## Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

## Câu 26.

Cho hàm số  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình bên. Giá trị của biểu thức  $T = 3[f(4) - f(0)]$  bằng bao nhiêu?

KQ:



**Câu 27.** Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 7$ , ( $a; b; c; d \in \mathbb{R}$ ) có bảng biến thiên dưới đây

|         |           |     |      |     |        |     |           |
|---------|-----------|-----|------|-----|--------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |     | $-1$ |     | $2$    |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $+$ | $0$  | $-$ | $0$    | $+$ |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ |     |      |     | $f(2)$ |     | $-\infty$ |

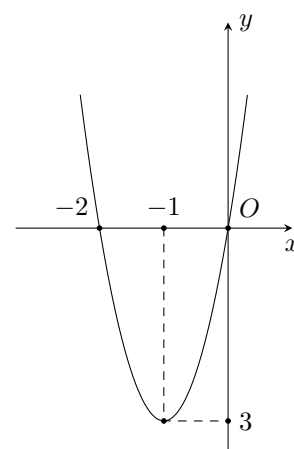
Giá trị  $a + b + c$  bằng bao nhiêu?

KQ:

## Câu 28.

Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đạo hàm là hàm số với đồ thị như hình vẽ. Biết rằng đồ thị hàm số  $y = f(x)$  tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ âm. Khi đó đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là bao nhiêu?

KQ:



**Câu 29.** Biết hàm số  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  đạt cực đại tại điểm  $x = -3$ ,  $f(-3) = 28$  và đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1. Tính  $S = a^2 + b^2 - c^2$ .

KQ:

**Câu 30.** Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1$ , ( $a \neq 0$ ) có bảng biến thiên dưới đây

|      |           |   |   |   |           |
|------|-----------|---|---|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ |   | 1 |   | $+\infty$ |
| $y'$ |           | + | 0 | + |           |
| $y$  | $-\infty$ |   |   |   | $+\infty$ |

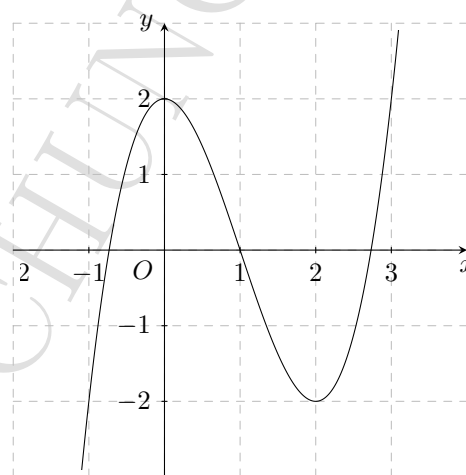
Tổng  $3a + 2b + c$  bằng bao nhiêu?

KQ:

**Câu 31.**

Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ. Tính  $S = a + b$ ?

KQ:



**Câu 32.** Cho hàm số  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có bảng biến thiên như sau

|      |           |   |    |   |   |   |           |
|------|-----------|---|----|---|---|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ |   | -2 |   | 0 |   | $+\infty$ |
| $y'$ |           | + | 0  | - | 0 | + |           |
| $y$  | $-\infty$ |   |    | 2 |   | 1 | $+\infty$ |

Có bao nhiêu số dương trong các số  $a, b, c, d$ ?

KQ:

**DẠNG 2 Đồ thị hàm bậc nhất trên bậc nhất**

- Tìm tập xác định của hàm số.
- Khảo sát sự biến thiên của hàm số
  - Tính đạo hàm  $y'$ . Tìm các điểm mà tại đó  $y'$  bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
  - Tìm cực trị của hàm số.
  - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
  - Lập bảng biến thiên của hàm số.
- Vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

**NHẬN XÉT.** Đồ thị hàm số  $y = f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$  ( $c \neq 0, ad - bc \neq 0$ ) có:

- ☑ Tâm đối xứng là giao điểm  $I$  của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang, nghĩa là  $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ ;
- ☑ Hai trục đối xứng là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận của nó.

## 1 Ví dụ mẫu

**Ví dụ 11.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a)  $y = \frac{x-2}{2x+1}$ ;

b)  $y = \frac{1-2x}{2x+4}$ .

**Ví dụ 12.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số  $y = \frac{x+1}{x-2}$ .

**Ví dụ 13.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số

a)  $y = \frac{2x+1}{x+1}$ ;

b)  $y = \frac{x+3}{1-x}$ .

**Ví dụ 14.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số  $y = f(x) = \frac{2x+4}{2x+1}$ .

**Ví dụ 15.**

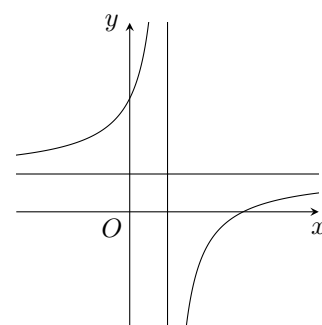
Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

**A.**  $y = x^4 - 3x^2 + 2$ .

**B.**  $y = \frac{x-3}{x-1}$ .

**C.**  $y = x^2 - 4x + 1$ .

**D.**  $y = x^3 - 3x - 5$ .



**Ví dụ 16.**

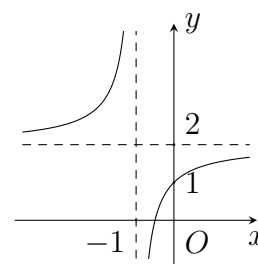
Đồ thị trong hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

**A.**  $y = \frac{x+2}{x+1}$ .

**B.**  $y = \frac{2x+1}{x+1}$ .

**C.**  $y = \frac{x-1}{x+1}$ .

**D.**  $y = \frac{x+3}{1-x}$ .



**Ví dụ 17.** Bảng biến thiên sau đây của hàm số nào?

|      |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$      | $+\infty$ |
| $y'$ |           | +         | +         |
| $y$  | $2$       | $+\infty$ | $2$       |
|      |           | $-\infty$ |           |

**A.**  $y = \frac{2x+3}{x+1}$ .

**B.**  $y = \frac{2x-1}{x-1}$ .

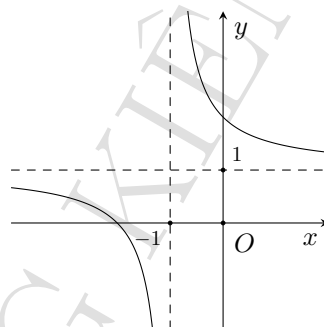
**C.**  $y = \frac{2x-1}{x+1}$ .

**D.**  $y = \frac{x+1}{2x-1}$ .

**Ví dụ 18.**

Cho hàm số  $y = \frac{ax+b}{x+1}$  có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó

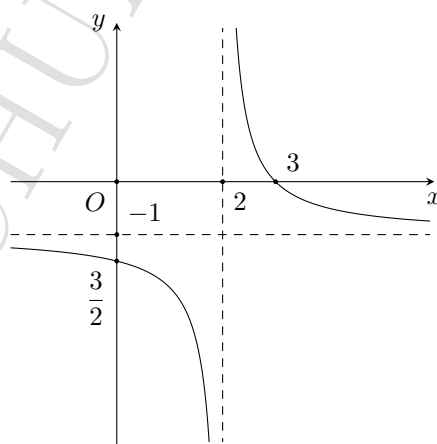
| Phát biểu                        | Đ | S |
|----------------------------------|---|---|
| a) $y' > 0, \forall x \neq -1$ . |   |   |
| b) Tiệm cận đứng $x = 1$ .       |   |   |
| c) Giá trị $a = 1$ .             |   |   |
| d) $a < b$ .                     |   |   |



**Ví dụ 19.**

Cho hàm số  $y = \frac{ax+b}{x+c}$  có đồ thị như hình vẽ bên. Tính giá trị của biểu thức  $a + 2b + c$ .

KQ:



**Ví dụ 20.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có bảng biến thiên như sau

|         |                         |                         |           |
|---------|-------------------------|-------------------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$               | $2$                     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |                         | +                       | +         |
| $f(x)$  | $1 \rightarrow +\infty$ | $-\infty \rightarrow 1$ |           |

Khi đó

| Phát biểu                                                    | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ .  |   |   |
| b) Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ . |   |   |
| c) Tiệm cận ngang $y = 2$ .                                  |   |   |
| d) Trong các số $a, b, c$ và $d$ có 1 giá trị âm.            |   |   |

**2**

**Bài tập tự luận**

**Bài 6.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số  $y = \frac{2x-1}{x+1}$ .

**Bài 7.** Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau

a)  $y = 3 + \frac{1}{x}$ .

b)  $y = \frac{x-3}{1-x}$ .

**Bài 8.** Cho hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-1}$ .

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số.

b) Gọi  $A$  là giao điểm của đồ thị hàm số với trục  $Oy$ ,  $I$  là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số. Tìm điểm  $B$  đối xứng với  $A$  qua  $I$ . Chứng minh rằng điểm  $B$  cũng thuộc đồ thị hàm số này.**Bài 9.** Một trung tâm dạy nghề cần thiết kế mô hình đánh giá kỹ năng của một học viên theo học nghề đánh máy. Người ta có thể làm như sau:

- ☑ Để xây dựng mô hình toán học cho bài toán trên, ta sử dụng thống kê. Bằng cách khảo sát tốc độ đánh máy trung bình  $S$  (tính bằng từ trên phút) của học viên đó sau  $t$  tuần học ( $5 \leq t \leq 30$ ), ta thu thập các số liệu thống kê được cho trong bảng bên dưới.

(Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014).

|     |    |    |    |    |    |    |
|-----|----|----|----|----|----|----|
| $t$ | 5  | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| $S$ | 38 | 56 | 79 | 90 | 93 | 94 |

- ☑ Ta cần chọn hàm số  $y = f(t)$  để biểu diễn các số liệu ở bảng trên, tức là ở hệ trục tọa độ  $Oty$ , đồ thị của hàm số đó trên khoảng  $(0; +\infty)$  “gần” với các điểm  $A(5; 38)$ ,  $B(10; 56)$ ,  $C(15; 79)$ ,  $D(20; 90)$ ,  $E(25; 93)$ ,  $G(30; 94)$ . Ngoài ra, do tốc độ đánh máy trung bình của học viên tăng theo thời gian  $t$  và chỉ đến một giới hạn  $M$  nào đó cho dù thời gian  $t$  có kéo dài đến vô cùng nên hàm số  $y = f(t)$  phải thỏa mãn thêm hai điều kiện: Hàm số đó đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$  và  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = M \in \mathbb{R}$ ,  $M > 94$ . Vì các hàm đa thức (với bậc lớn hơn hoặc bằng 1) không thỏa mãn hai điều kiện đó nên ta chọn một hàm phân thức hữu tỉ để biểu diễn các số liệu ở bảng trên. Ta

có thể chọn hàm số có dạng  $f(t) = \frac{at+b}{ct+d}$  ( $ac \neq 0$ ) cho mục đích đó. Dựa vào bảng trên, ta chọn hàm số  $f(t) = \frac{110t-280}{t+2}$  ( $t > 0$ ).

- a) Dựa theo mô hình đó, dự đoán tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sau 40 tuần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của từ/phút).
- b) Xem  $y = f(t)$  là một hàm số xác định trên khoảng  $(0; +\infty)$ , hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.
- c) Nêu nhận xét về tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sau thời gian  $t$  ngày càng lớn.

**Bài 10.** Ở một bể chứa nước có chứa 1000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30 gam/lít vào bể nước với tốc độ là 25 lít/phút.

- a) Chứng minh rằng nồng độ muối của nước trong bể sau  $t$  phút kể từ khi bắt đầu bơm là  $C(t) = \frac{30t}{40+t}$  (gam/lít).
- b) Khảo sát sự biến thiên của hàm số  $y = C(t)$  sau 10 tiếng kể từ lúc bắt đầu bơm, từ đó nhận xét về nồng độ muối trong bể khi thời gian  $t$  càng lớn.

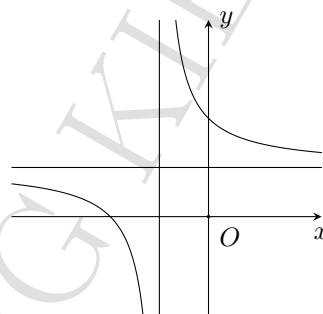


### 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

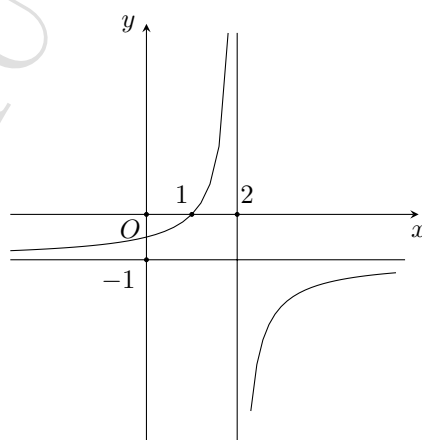
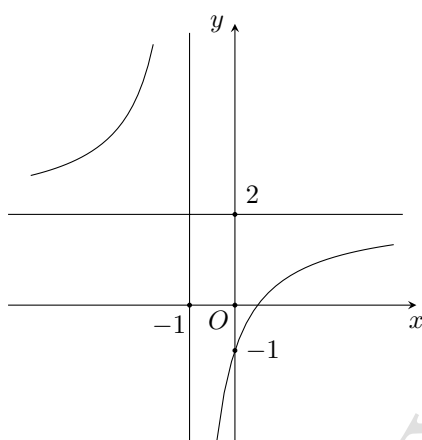
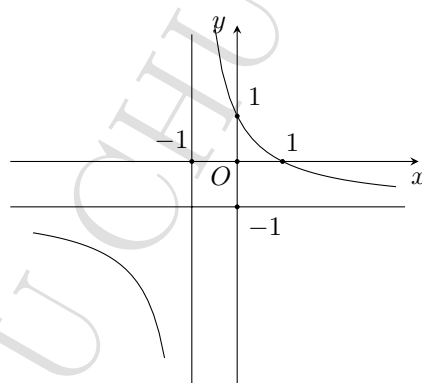
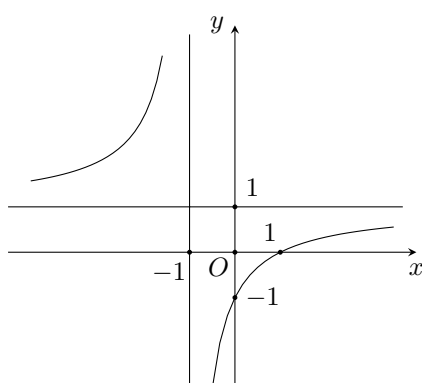
**Câu 33.**

Biết hàm số  $y = \frac{x+a}{x+1}$  ( $a$  là các số thực cho trước,  $a \neq 1$ ) có đồ thị như trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.**  $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . **B.**  $y' > 0, \forall x \neq -1$ .  
**C.**  $y' < 0, \forall x \neq -1$ . **D.**  $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .



**Câu 34.** Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số  $y = \frac{1-x}{x+1}$ ?



**Câu 35.** Biết hàm số  $y = \frac{x+a}{x-2}$  ( $a$  là các số thực cho trước,  $a \neq -2$ ) có bảng biến thiên như trong hình bên dưới. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

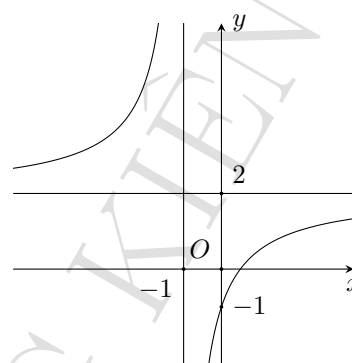
|      |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $2$       | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $+$       | $+$       |
| $y$  | $1$       | $+\infty$ | $-\infty$ |

- A.**  $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . **B.**  $y' > 0, \forall x \neq 2$ . **C.**  $y' < 0, \forall x \neq 2$ . **D.**  $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Câu 36.**

Cho đường cong hình vẽ dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án **A.**, **B.**, **C.**, **D.** dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

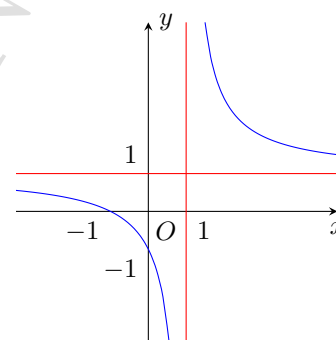
**A.**  $y = \frac{2x+1}{x-1}$ .    **B.**  $y = \frac{2x+3}{x+1}$ .    **C.**  $y = \frac{2x-1}{x+1}$ .    **D.**  $y = \frac{2x-2}{x-1}$ .



**Câu 37.**

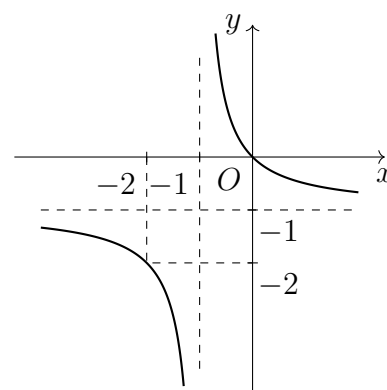
Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

**A.**  $y = \frac{2x+1}{2x-2}$ .    **B.**  $y = \frac{x+1}{x-1}$ .    **C.**  $y = \frac{-x}{1-x}$ .    **D.**  $y = \frac{x-1}{x+1}$ .



**Câu 38.** Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

**A.**  $y = \frac{x+1}{x-1}$ .    **B.**  $y = \frac{-x+1}{x+1}$ .  
**C.**  $y = \frac{x-1}{x+1}$ .    **D.**  $y = \frac{-x}{x+1}$ .



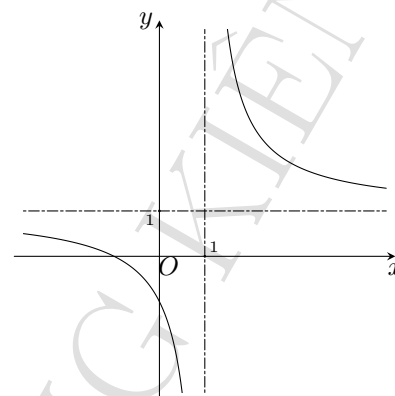
**Câu 39.** Bảng biến thiên trong hình bên dưới là của hàm số nào trong các hàm số đã cho?

|      |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $1$       | $+\infty$ |
| $y'$ |           | +         | +         |
| $y$  | $-1$      | $+\infty$ | $-1$      |

**A.**  $y = \frac{-x-3}{-x+1}$ .    **B.**  $y = \frac{-x-2}{x-1}$ .    **C.**  $y = \frac{x+3}{x-1}$ .    **D.**  $y = \frac{x-2}{-x+1}$ .

**Câu 40.** Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- A.**  $y = \frac{2x-1}{x-1}$ . **B.**  $y = \frac{x+1}{x-1}$ .  
**C.**  $y = x^4 + x^2 + 1$ . **D.**  $y = x^3 - 3x - 1$ .



**Câu 41.** Bảng biến thiên ở hình vẽ bên dưới là của hàm số nào trong các hàm số sau?

|      |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $1$       | $+\infty$ |
| $y'$ | -         |           | -         |
| $y$  | 1         | $+\infty$ | 1         |

- A.**  $y = \frac{x+1}{x-1}$ . **B.**  $y = \frac{x+2}{x-1}$ . **C.**  $y = \frac{x+1}{1-x}$ . **D.**  $y = \frac{2x+1}{2x+3}$ .

**Câu 42.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) có bảng biến thiên như hình bên dưới.

|         |           |           |           |
|---------|-----------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $2$       | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         |           | +         |
| $f(x)$  | 1         | $+\infty$ | 1         |

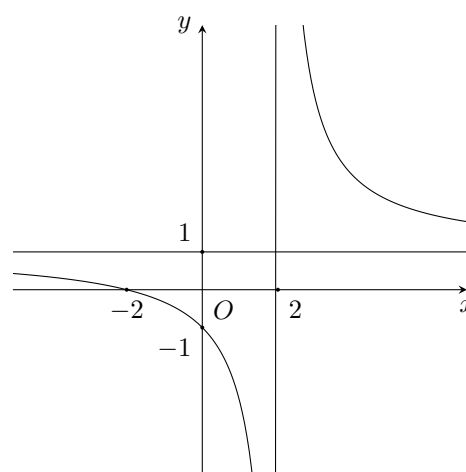
Trong các số  $a, b$  và  $c$  có bao nhiêu số dương?

- A.** 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

**Câu 43.**

Cho hàm số  $y = \frac{x-a}{bx+c}$  có đồ thị như hình vẽ bên. Tính giá trị của biểu thức  $P = a + b + c$ .

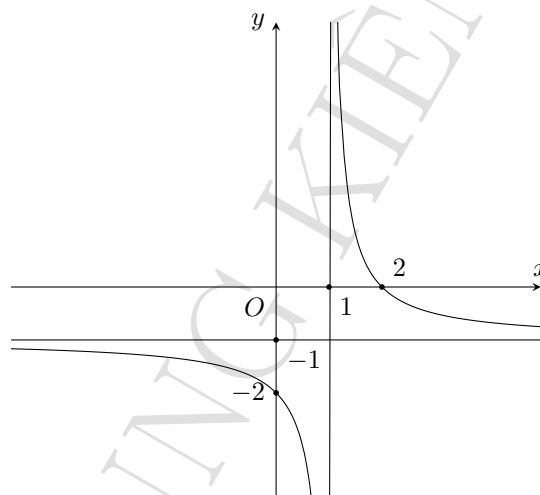
- A.**  $P = -3$ . **B.**  $P = 1$ . **C.**  $P = 5$ . **D.**  $P = 2$ .



**Câu 44.**

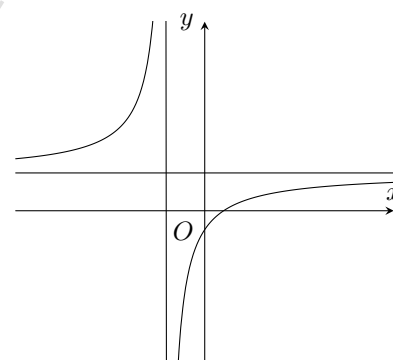
Cho hàm số  $y = \frac{ax+b}{x+c}$  có đồ thị như hình bên, với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Tính giá trị của biểu thức  $T = a + 2b + 3c$ ?

- A.**  $T = -8$ .    **B.**  $T = 2$ .    **C.**  $T = 6$ .    **D.**  $T = 0$ .

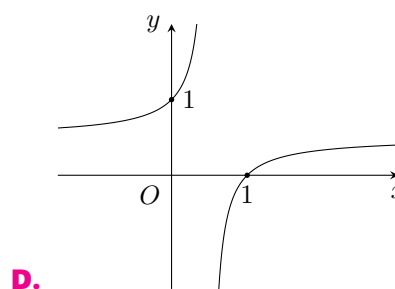
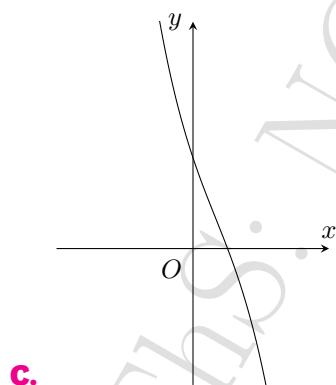
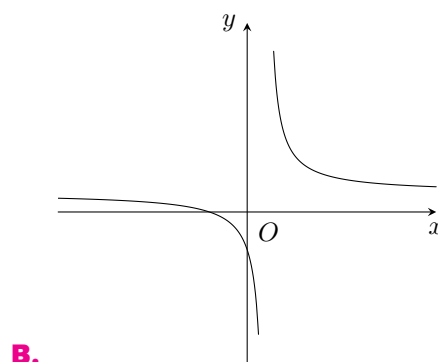
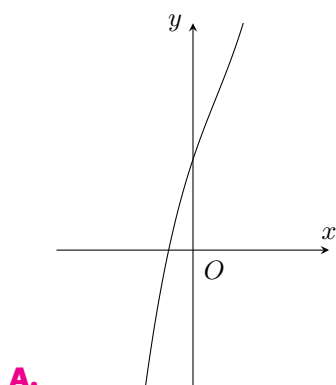
**Câu 45.**

Hình vẽ bên là đồ thị hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.**  $ad > 0$  và  $bd > 0$ .    **B.**  $ad > 0$  và  $ab < 0$ .  
**C.**  $bd < 0$  và  $ab > 0$ .    **D.**  $ad < 0$  và  $ab < 0$ .

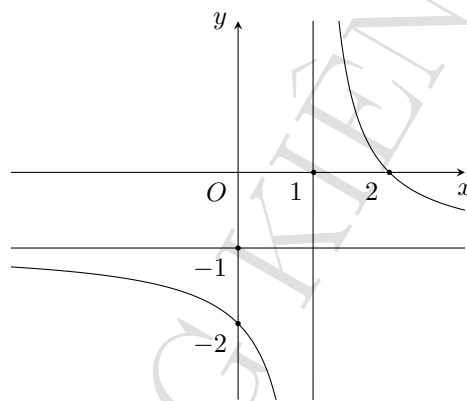


**Câu 46.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{mx+1}{m-x}$  ( $m$  là tham số) có dạng nào sau đây?

**Câu 47.**

Cho hàm số  $y = \frac{ax+b}{x+c}$  có đồ thị như hình vẽ, với  $a, b, c$  là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức  $T = a - 3b + 2c$ .

- A.**  $T = 12$ . **B.**  $T = -7$ . **C.**  $T = 10$ . **D.**  $T = -9$ .



**Câu 48.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) có bảng biến thiên như sau

|         |           |           |           |
|---------|-----------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $2$       | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $+$       | $+$       |
| $f(x)$  | $1$       | $+\infty$ | $1$       |

Trong các số  $a, b$  và  $c$  có bao nhiêu số dương?

- A.** 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

**Câu 49.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{ax-3}{bx+c}$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) có bảng biến thiên như sau

|         |           |           |           |
|---------|-----------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$      | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$       | $-$       |
| $f(x)$  | $3$       | $+\infty$ | $3$       |

Trong các số  $a, b$  và  $c$  có bao nhiêu số âm?

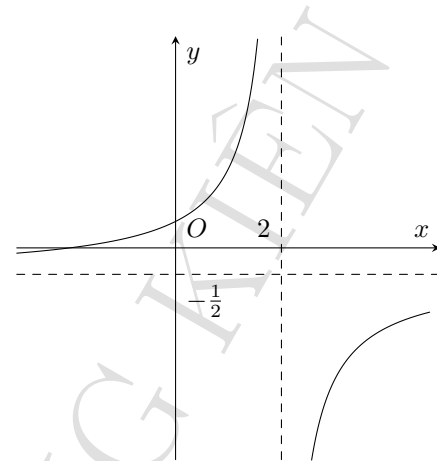
- A.** 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

#### 4

#### Bài tập trắc nghiệm đúng sai

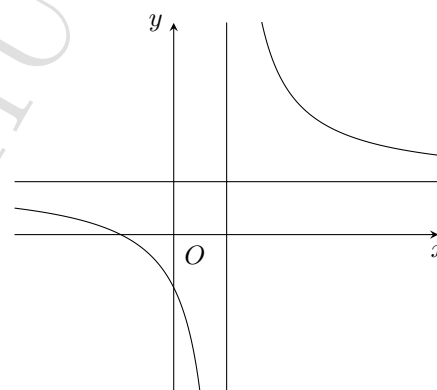
**Câu 50.** Cho hàm số  $y = \frac{x+2}{ax+b}$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình bên dưới. Khi đó

| Phát biểu                                                            | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tiệm cận đứng là $x = 2$ ; tiệm cận ngang là $y = -\frac{1}{2}$ . |   |   |
| b) Giao điểm với trục tung là điểm có tung độ dương.                 |   |   |
| c) Giao điểm với trục hoành là điểm có hoành độ dương.               |   |   |
| d) Hàm số đã cho là $y = \frac{x+2}{-2x-1}$ .                        |   |   |



**Câu 51.** Cho hàm số  $y = \frac{bx-c}{x-a}$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình bên dưới. Khi đó

| Phát biểu                                            | Đ | S |
|------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.     |   |   |
| b) Giao điểm với trục tung là điểm có tung độ dương. |   |   |
| c) Giao điểm với trục hoành là điểm có hoành độ âm.  |   |   |
| d) Trong các số $a, b, c$ có hai số âm.              |   |   |

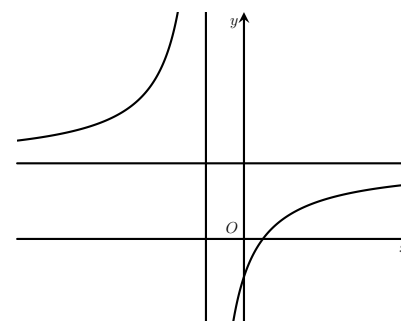


**Câu 52.**

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ . Khi đó

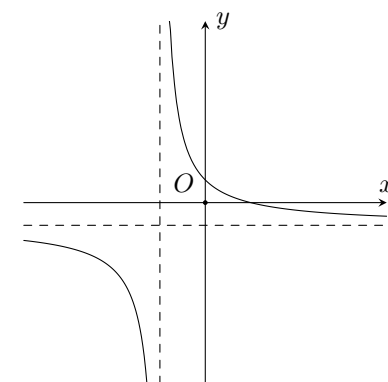
| Phát biểu              | Đ | S |
|------------------------|---|---|
| a) $\frac{a}{c} > 0$ . |   |   |
| b) $\frac{d}{c} > 0$ . |   |   |

| Phát biểu             | Đ | S |
|-----------------------|---|---|
| c) $ad > 0$ .         |   |   |
| d) $ab < 0, bd > 0$ . |   |   |



**Câu 53.** Cho hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ , ( $a \neq 0$ ) có đồ thị như hình vẽ bên.

| Phát biểu                                                                            | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ âm.                             |   |   |
| b) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.                            |   |   |
| c) Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị cùng dấu.                   |   |   |
| d) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ nằm bên phải trục tung. |   |   |



**Câu 54.** Cho hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  có bảng biến thiên như hình bên dưới.

|      |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $2$       | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $-$       | $-$       |
| $y$  | $-2$      | $+\infty$ | $-2$      |

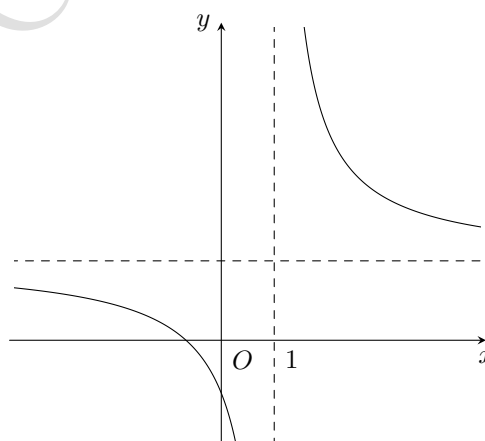
Khi đó

| Phát biểu                                         | Đ | S |
|---------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.  |   |   |
| b) Tiệm cận ngang $y = 2$ .                       |   |   |
| c) Giao điểm với trục tung là điểm có tung độ âm. |   |   |
| d) Trong các số $a, b, c, d$ có hai số dương.     |   |   |

**Câu 55.**

Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số  $\frac{ax+b}{cx+d}$  với  $a, b, c, d$  là các số thực.

| Phát biểu                               | Đ | S |
|-----------------------------------------|---|---|
| a) $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . |   |   |
| b) $y' > 0, \forall x \neq 1$ .         |   |   |
| c) $y' < 0, \forall x \neq 1$ .         |   |   |
| d) $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . |   |   |



**Câu 56.** Cho hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+1}$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) có bảng biến thiên như sau

|      |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$      | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $+$       | $+$       |
| $y$  | $2$       | $+\infty$ | $2$       |

| Phát biểu         | Đ | S |
|-------------------|---|---|
| a) $ac = 2$ .     |   |   |
| b) $2a - c = 3$ . |   |   |

| Phát biểu          | Đ | S |
|--------------------|---|---|
| c) $c - a = -1$ .  |   |   |
| d) $b^3 - 8 < 0$ . |   |   |

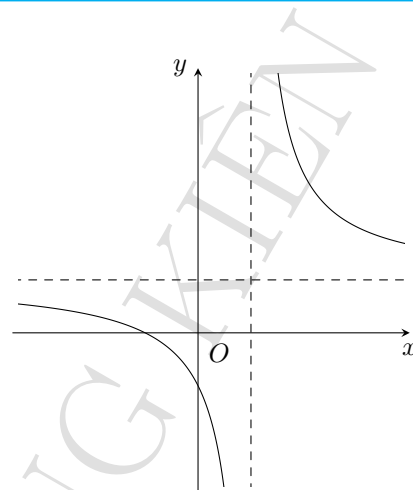
**Câu 57.**



Cho hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  có đồ thị như hình bên.

| Phát biểu            | Đ | S |
|----------------------|---|---|
| a) $ac > 0, bd > 0.$ |   |   |
| b) $ab < 0, cd < 0.$ |   |   |

| Phát biểu            | Đ | S |
|----------------------|---|---|
| c) $bc > 0, ad < 0.$ |   |   |
| d) $ad > 0, bd < 0.$ |   |   |

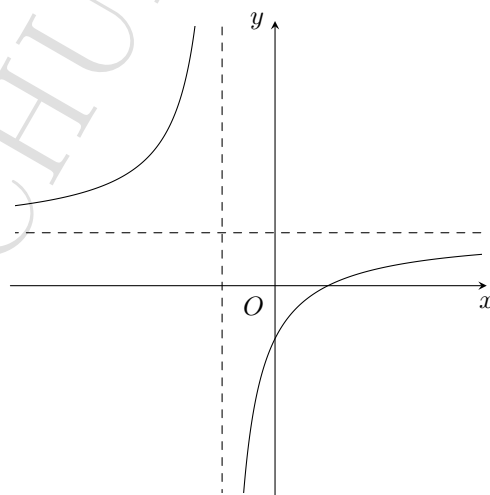


### Câu 58.

Cho hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  có đồ thị như hình vẽ bên.

| Phát biểu                                       | Đ | S |
|-------------------------------------------------|---|---|
| a) $\begin{cases} ad < 0 \\ bc > 0 \end{cases}$ |   |   |
| b) $\begin{cases} ad < 0 \\ bc < 0 \end{cases}$ |   |   |

| Phát biểu                                       | Đ | S |
|-------------------------------------------------|---|---|
| c) $\begin{cases} ad > 0 \\ bc < 0 \end{cases}$ |   |   |
| d) $\begin{cases} ad > 0 \\ bc > 0 \end{cases}$ |   |   |

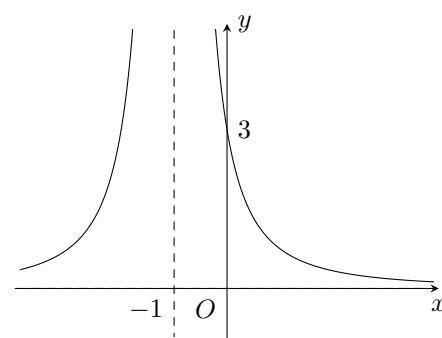


### Câu 59.

Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  có đồ thị hàm số  $f'(x)$  như trong hình vẽ bên.

| Phát biểu                 | Đ | S |
|---------------------------|---|---|
| a) $f(1) = 2.$            |   |   |
| b) $f(2) = \frac{11}{2}.$ |   |   |

| Phát biểu                | Đ | S |
|--------------------------|---|---|
| c) $f(1) = \frac{7}{2}.$ |   |   |
| d) $f(2) = 6.$           |   |   |



## 5

### Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 60.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{2-ax}{bx-c}$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0$ ) có bảng biến thiên như sau

|         |           |           |           |
|---------|-----------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $1$       | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+$       |           | $+$       |
| $f(x)$  | $3$       | $+\infty$ | $3$       |

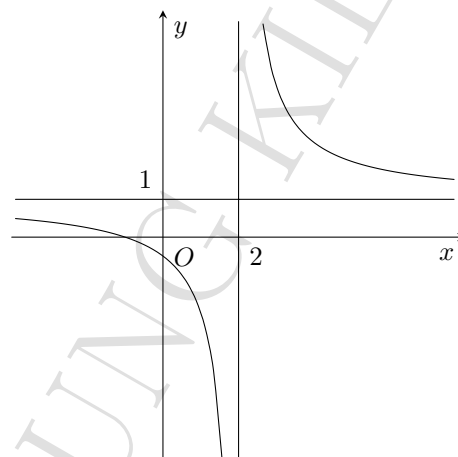
Tổng  $(a + b + c)^2$  thuộc khoảng  $\left(0; \frac{4}{n}\right)$ . Tìm  $n$ .

KQ:

**Câu 61.**

Cho hàm số  $y = \frac{ax + 1}{bx - 2}$  có đồ thị như hình vẽ bên. Tính  $T = a + b$ .

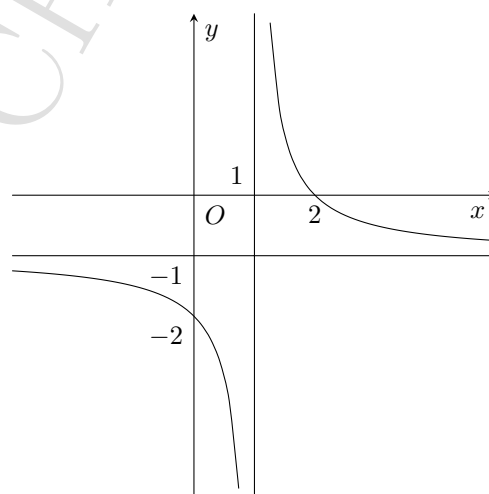
KQ:



**Câu 62.**

Cho hàm số  $y = \frac{ax + b}{x + c}$ ,  $(a, b, c \in \mathbb{R})$  có đồ thị như hình vẽ bên. Tính  $T = a - 3b + 2c$ .

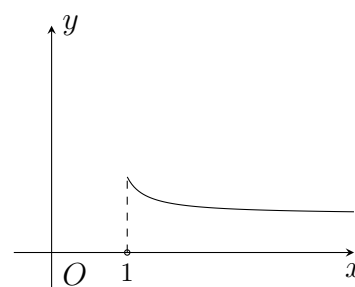
KQ:



**Câu 63.**

Biết có một cặp số nguyên dương  $(a; b)$  để hàm số  $y = \frac{2x - a}{4x - b}$  có đồ thị trên  $(1; +\infty)$  như hình vẽ bên. Tính  $a + b$ .

KQ:



**Câu 64.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{ax - 6}{bx - c}$   $(a, b, c \in \mathbb{R})$  có bảng biến thiên như sau

|      |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$      | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $-$       | $-$       |
| $y$  | $1$       | $+\infty$ | $1$       |

Arrows indicate the behavior of the function: from  $y=1$  at  $x=-\infty$  to  $y=-\infty$  at  $x=-2$ , and from  $y=+\infty$  at  $x=-2$  to  $y=1$  at  $x=+\infty$ .

Trong các số  $a, b, c$  có bao nhiêu số âm?

KQ: 

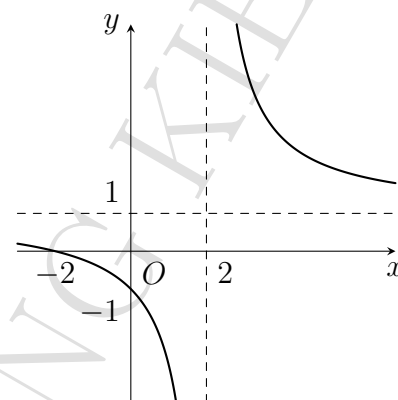
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 65.**

Cho hàm số  $y = \frac{ax+2}{cx+d}$  có đồ thị (C) như hình vẽ bên dưới. Tính giá trị biểu thức  $T = a^2 + b^2 + c^2$ .

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

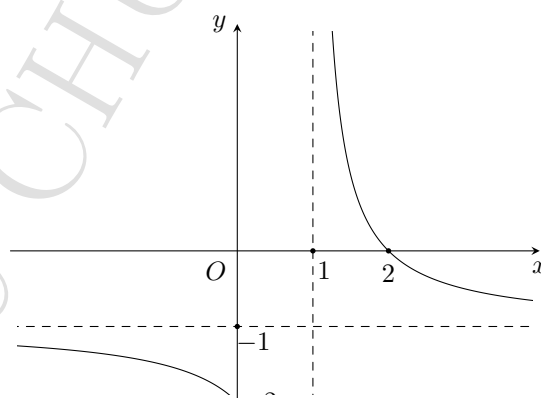


**Câu 66.**

Cho hàm số  $y = \frac{ax+b}{x+c}$  có đồ thị như hình vẽ;  $a, b, c$  là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức  $T = a - 3b + 2c$ ?

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

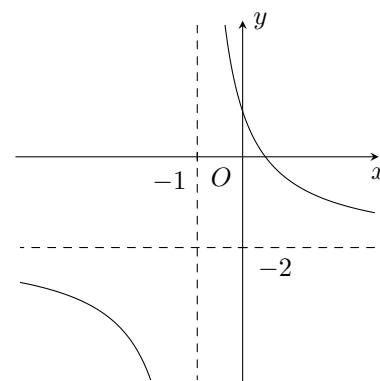


**Câu 67.**

Cho hàm số  $y = \frac{ax+2}{cx+b}$  có đồ thị như hình vẽ. Tính tổng  $S = a + b$ .

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

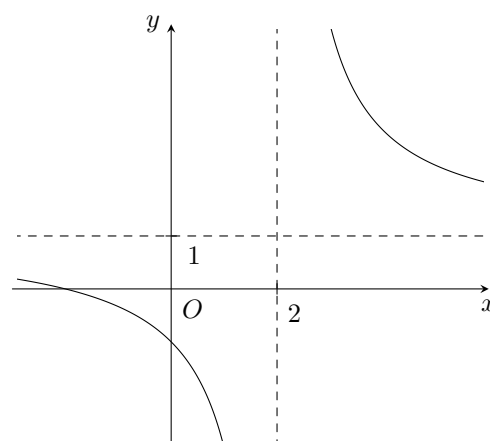


**Câu 68.**

Xét hàm số  $y = \frac{ax+2}{cx+b}$  có đồ thị như hình vẽ. Tính  $S = a^2 + b^2 + c^2$ .

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|



### DẠNG 3 Đồ thị hàm số bậc hai trên bậc nhất

- ⊙ Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{e}\right\}$ .
- ⊙ Tiệm cận đứng  $x = -\frac{d}{e}$ , tiệm cận xiên  $y = mx + n$  trong đó  $mx + n$  là đa thức dư trong phép chia  $ax^2 + bx + c$  cho  $ex + d$ .
- ⊙ Đồ thị cắt trục tung tại điểm  $\left(0; \frac{c}{d}\right)$ .
- ⊙ Đồ thị nhận giao điểm của tiệm cận đứng với tiệm cận xiên làm tâm đối xứng.

## 1 Ví dụ mẫu

**Ví dụ 21 (Mức độ 1).** Tìm tọa độ giao điểm giữa đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$  với trục tung.

**Ví dụ 22 (Mức độ 1).** Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$  với trục hoành.

**Ví dụ 23 (Mức độ 2).** Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$ .

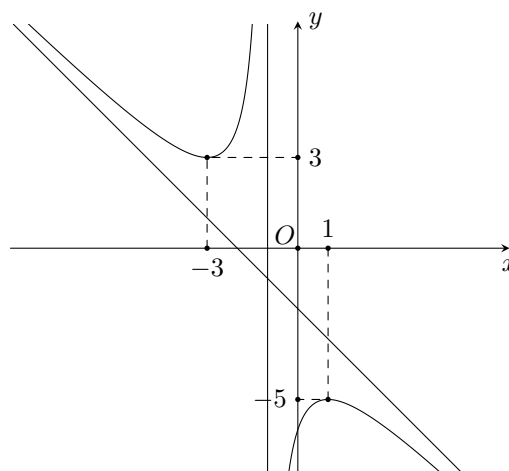
**Ví dụ 24 (Mức độ 2).** Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số  $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2}$ .

**Ví dụ 25 (Mức độ 2).** Cho hàm số  $y = \frac{2x^2 - 5x + 5}{x - 2}$  có đồ thị  $(C)$ . Tìm tất cả các điểm thuộc đồ thị  $(C)$  có tọa độ là số nguyên.

**Ví dụ 26 (Mức độ 2).** Cho hàm số  $y = \frac{-x^2 + x + 1}{x + 1}$  có đồ thị  $(C)$ . Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm  $A(-1; 5)$  và tiếp xúc với đồ thị  $(C)$ .

**Ví dụ 27 (Mức độ 2).**

Đồ thị  $(C)$  của hàm số  $y = \frac{-x^2 - 3x - 6}{x + 1}$  là đường cong như hình vẽ bên. Tìm  $m$  để đường thẳng  $d: y = m$  cắt đồ thị  $(C)$  tại hai điểm phân biệt.



**Ví dụ 28.** Cho hàm số  $y = \frac{-x^2 + x + 1}{x + 1}$  có đồ thị  $(C)$ . Khi đó

| Phát biểu                                                       | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . |   |   |

| Phát biểu                                              | Đ | S |
|--------------------------------------------------------|---|---|
| b) Đồ thị (C) không cắt trục $Ox$ .                    |   |   |
| c) Hàm số có hai điểm cực trị.                         |   |   |
| d) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(1; 2)$ . |   |   |

**Ví dụ 29.** Cho hàm số  $y = \frac{-x^2 - 3x + 2}{x - 3}$  có đồ thị là (C). Khi đó

| Phát biểu                                                                    | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Giao điểm giữa (C) và trục tung là điểm $A\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$ . |   |   |
| b) Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là $x = 3$ .                                  |   |   |
| c) Đồ thị (C) có tâm đối xứng là điểm $I(3; -9)$ .                           |   |   |
| d) Đồ thị (C) có 2 điểm cực trị nằm về 2 phía đối với trục $Ox$ .            |   |   |

**Ví dụ 30.** Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để đường thẳng  $y = -x + m$  cắt đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - 1}{x}$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho  $AB = \sqrt{6}$ .

## 2 Bài tập tự luận

**Bài 11.** Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$ .

**Bài 12.** Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$ .

**Bài 13.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{-x + 2}$  có đồ thị (C). Tìm tất cả các điểm thuộc đồ thị (C) có tọa độ là số nguyên.

**Bài 14.** Tìm tọa độ điểm  $M$  mà đồ thị hàm số  $y = \frac{mx^2 - mx + 1}{x - 1}$  luôn đi qua với mọi  $m$ .

**Bài 15.** Tìm  $m$  để phương trình  $x^2 + 2x + 5 = (m^2 + 2m + 5)(x + 1)$  có hai nghiệm dương phân biệt.

## 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 69.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$  cắt trục tung tại điểm có tọa độ

- A.  $(-2; 0)$ . B.  $(0; 2)$ . C.  $(2; 0)$ . D.  $(0; -2)$ .

**Câu 70.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$  có tiệm cận xiên là

- A.  $y = -x$ . B.  $y = x + 1$ . C.  $y = x$ . D.  $y = -x + 1$ .

**Câu 71.** Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$  bằng

- A.  $2\sqrt{5}$ . B.  $2\sqrt{3}$ . C.  $3\sqrt{2}$ . D.  $5\sqrt{2}$ .

**Câu 72.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$  có đồ thị là (C). Có bao nhiêu điểm trên đồ thị (C) có tọa độ là các số nguyên?

A. 2.

B. 4.

C. 6.

D. 0.

**Câu 73.**

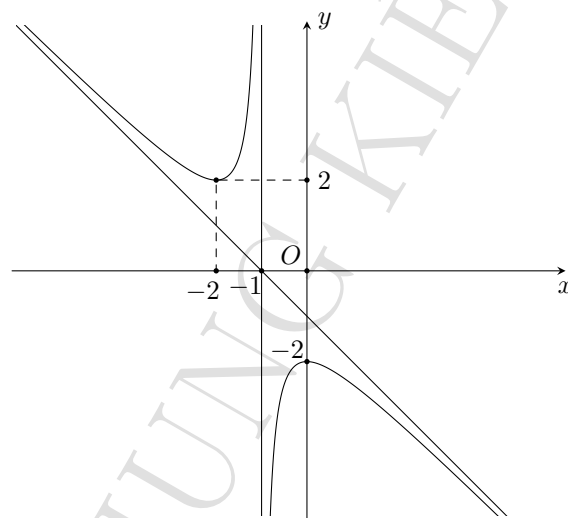
Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A.  $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{-x - 1}$ .

B.  $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ .

C.  $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ .

D.  $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 1}$ .



**Câu 74.**

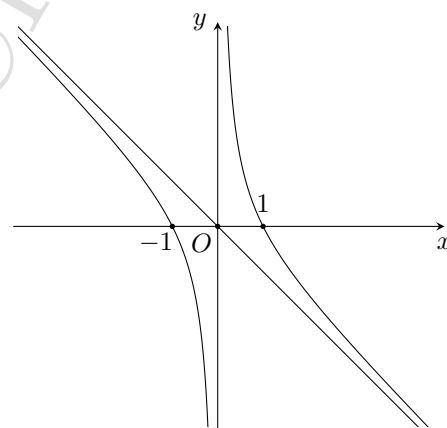
Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A.  $y = \frac{-2x + 1}{2x + 2}$ .

B.  $y = x^3 - 3x^2$ .

C.  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ .

D.  $y = \frac{-x^2 + 1}{x}$ .



**Câu 75.**

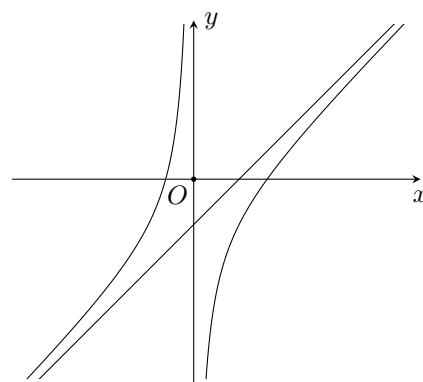
Cho hàm số  $y = ax + b - \frac{r}{x}$  ( $abr \neq 0$ ) và có đồ thị là (C) có dạng như hình vẽ bên. Các hệ số  $a, b, r$  phải thỏa mãn điều kiện nào dưới đây?

A.  $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ r > 0 \end{cases}$

B.  $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ r < 0 \end{cases}$

C.  $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \\ r > 0 \end{cases}$

D.  $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ r > 0 \end{cases}$



**Câu 76.** Cho  $M$  là điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số  $y = \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 2}$ . Ký hiệu  $p, q$  lần lượt là khoảng cách từ điểm  $M$  đến tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị (C). Tính  $pq$ .

A.  $pq = \frac{3}{2}$ .

B.  $pq = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ .

C.  $pq = 3$ .

D.  $pq = 3\sqrt{2}$ .

**Câu 77.** Cho  $M$  là điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số  $y = \frac{\sqrt{3}x^2 + (1 - \sqrt{3})x + 1}{x - 1}$ . Ký hiệu  $p, q$  lần lượt là khoảng cách từ điểm  $M$  đến tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị (C). Giá trị nhỏ nhất của  $p + q$  bằng

A.  $2\sqrt{2}$ .

B. 1.

C. 2.

D.  $3\sqrt{2}$ .

**Câu 78.** Tìm được trên đồ thị ( $C$ ) của hàm số  $y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$  hai điểm  $M(a; b)$  và  $N(c; d)$  có khoảng cách đến đường thẳng  $\Delta: 3x + y + 6 = 0$  nhỏ nhất. Khi đó  $a + b + c + d$  bằng

A. 4.

B. 9.

C.  $-9$ .

D.  $-4$ .

4

## Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 79.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$  có đồ thị là ( $C$ ). Khi đó

| Phát biểu                                                         | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Giao điểm giữa ( $C$ ) và trục tung là điểm $A(0; -1)$ .       |   |   |
| b) Đồ thị ( $C$ ) có tiệm cận đứng là $x = -1$ .                  |   |   |
| c) Đồ thị ( $C$ ) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.          |   |   |
| d) Đồ thị ( $C$ ) có 2 điểm cực trị nằm về 2 phía của trục hoành. |   |   |

**Câu 80.** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x - 2}$  có đồ thị là ( $C$ ). Khi đó

| Phát biểu                                                                 | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số $y = f(x + 1)$ có tiệm cận đứng là $x = 1$ .             |   |   |
| b) Đồ thị hàm số $y = f(x) + 1$ có tiệm cận xiên là $y = 2x + 1$ .        |   |   |
| c) Đồ thị hàm số $y = f(x - 2024)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt. |   |   |
| d) Hàm số $y = f(x + 2) - 3$ là hàm số lẻ.                                |   |   |

**Câu 81.** Cho hàm số  $y = x - \frac{1}{x + 1}$  có đồ thị là ( $C$ ). Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                                            | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$ .                                                                                                   |   |   |
| b) Đồ thị hàm số cắt trục $Oy$ tại $M$ . Phương trình tiếp tuyến của ( $C$ ) tại $M$ là $y = 2x - 1$ .                                               |   |   |
| c) Tồn tại hai tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với nhau.                                                                                             |   |   |
| d) Để đường thẳng $y = k$ cắt ( $C$ ) tại hai điểm phân biệt $A$ và $B$ sao cho $OA \perp OB$ thì $k$ là nghiệm của phương trình $k^2 - k - 1 = 0$ . |   |   |

**Câu 82.** Cho hàm số  $y = \frac{-x^2 + 2(m + 1)x - 5}{x - 1}$ . Khi đó

| Phát biểu                                                           | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Khi $m = 0$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y = -x + 1$ . |   |   |
| b) Khi $m = 0$ thì đồ thị hàm số không cắt $Ox$ .                   |   |   |
| c) Để hàm số có cực đại cực tiểu thì $m > 2$ .                      |   |   |



| Phát biểu                                                                                                                                                                               | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| d) Khi $m = 0$ thì hàm số có đồ thị là $(C)$ . Biết rằng tồn tại điểm $M$ thuộc đồ thị $(C)$ sao cho $x_M > 1$ và $IM$ ngắn nhất ( $I$ là tâm đối xứng của $(C)$ ), khi đó $y_M < -4$ . |   |   |

**Câu 83.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$  có đồ thị là  $(C)$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                                                       | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Biết hàm số có 2 điểm cực trị khi đó tổng của giá trị cực đại và giá trị cực tiểu bằng $-4$ .                                                                |   |   |
| b) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; 1)$ .                                                                                                |   |   |
| c) Gọi $\Delta$ là tiếp tuyến của $(C)$ và vuông góc với đường thẳng $x - 3y - 6 = 0$ . Khi đó $\Delta$ đi qua điểm $B\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ . |   |   |
| d) Để phương trình $x^2 + 3x + 3 = m x + 2 $ có 4 nghiệm phân biệt thì $m > 2$ .                                                                                |   |   |

## 5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

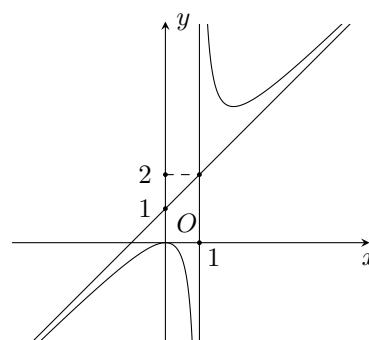
**Câu 84.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$  có đồ thị  $(C)$ . Hỏi có bao nhiêu cặp điểm thuộc  $(C)$  và đối xứng nhau qua điểm  $I\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ ? KQ:

**Câu 85.** Tìm  $m$  để đường thẳng  $y = -2x + m$  cắt đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + x - 1}{x}$  tại hai điểm  $A, B$  sao cho trung điểm đoạn  $AB$  thuộc  $Oy$ . KQ:

**Câu 86.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 2}{2x + 1}$ . Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để bất phương trình  $2021f(\sqrt{3x^2 - 18x + 28}) - m\sqrt{3x^2 - 18x + 28} \geq m + 4042$  nghiệm đúng với mọi  $x$  thuộc đoạn  $[2; 4]$ ? KQ:

**Câu 87.**

Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số  $y = ax + b + \frac{1}{x + c}$ . Tính tổng  $a + b + c$ ? KQ:



**Câu 88.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + mx + m^2 - 2m - 4}{x - 2}$  có đồ thị  $(C)$ . Tìm  $m$  để đồ thị  $(C)$  có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị cách đều đường thẳng  $\Delta: 2x + y + 1 = 0$ . KQ:

## DẠNG 4

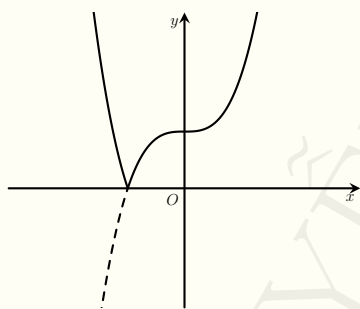
## Biến đổi đồ thị, đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

I. **Biến đổi đồ thị:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị  $(C)$ . Khi đó, với số  $a > 0$ , ta có

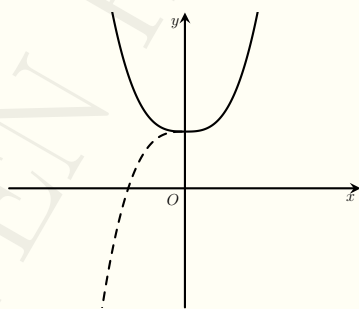
- Hàm số  $y = f(x) + a$  có đồ thị  $(C')$  là tịnh tiến  $(C)$  theo phương của  $Oy$  lên trên  $a$  đơn vị.
- Hàm số  $y = f(x) - a$  có đồ thị  $(C')$  là tịnh tiến  $(C)$  theo phương của  $Oy$  xuống dưới  $a$  đơn vị.
- Hàm số  $y = f(x + a)$  có đồ thị  $(C')$  là tịnh tiến  $(C)$  theo phương của  $Ox$  qua trái  $a$  đơn vị.
- Hàm số  $y = f(x - a)$  có đồ thị  $(C')$  là tịnh tiến  $(C)$  theo phương của  $Ox$  qua phải  $a$  đơn vị.
- Hàm số  $y = -f(x)$  có đồ thị  $(C')$  là đối xứng của  $(C)$  qua trục  $Ox$ .
- Hàm số  $y = f(-x)$  có đồ thị  $(C')$  là đối xứng của  $(C)$  qua trục  $Oy$ .

II. **Đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối:** Cho đồ thị hàm số  $y = f(x)$ . Khi đó:

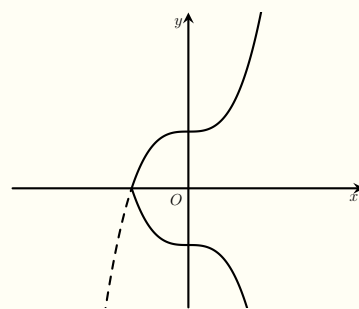
- Đồ thị hàm số  $y = |f(x)|$  có được bằng cách:
  - + Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  nằm phía trên trục hoành (trục  $Ox$ ).
  - + Lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  nằm phía dưới trục hoành.
- Đồ thị hàm số  $y = f(|x|)$  có được bằng cách:
  - + Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  nằm bên phải trục tung (trục  $Oy$ ).
  - + Lấy đối xứng qua trục tung phần đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  nằm bên phải trục tung.



$(C_1): y_1 = |f(x)|$



$(C_2): y_2 = f(|x|)$



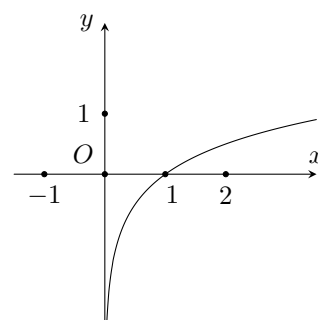
$(C_3): |y_3| = f(x)$

## 1

## Ví dụ mẫu

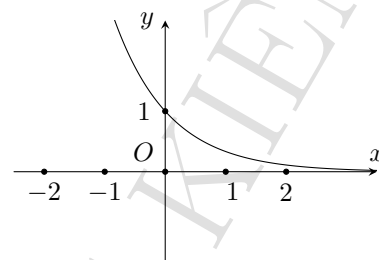
## Ví dụ 31.

Cho hàm số  $y = \log_4 x$  có đồ thị như hình bên. Hãy suy ra đồ thị của hàm số  $y = |\log_4 x|$ .



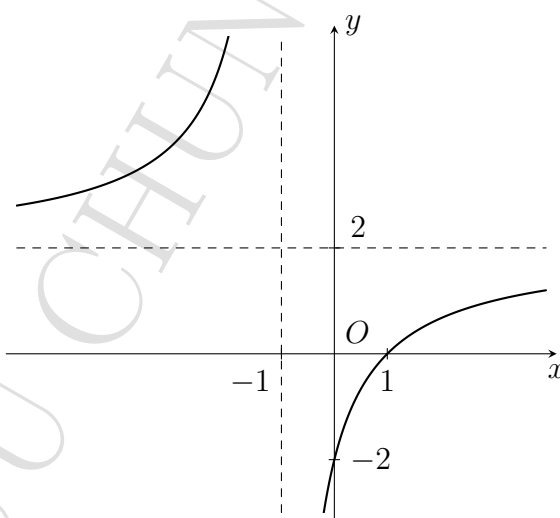
**Ví dụ 32.**

Cho hàm số  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  có đồ thị như hình bên. Hãy suy ra đồ thị của hàm số  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$ ?



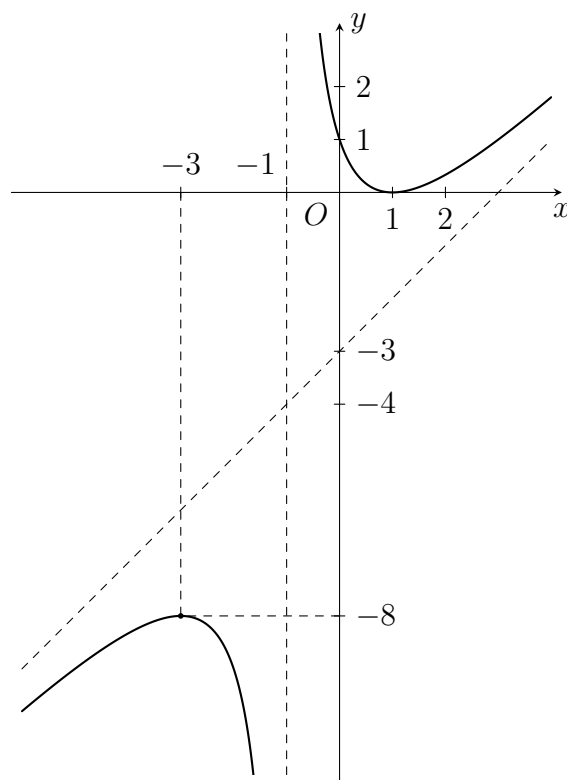
**Ví dụ 33.**

Cho hàm số  $y = \frac{2x-2}{x+1}$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hãy suy ra đồ thị của hàm số  $y = \left|\frac{2x-2}{x+1}\right|$ ?



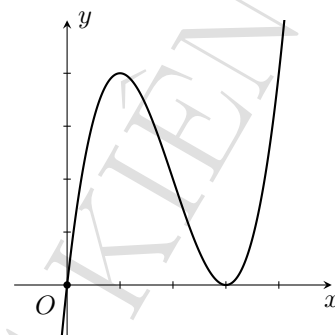
**Ví dụ 34.**

Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x+1}$  có đồ thị như hình bên. Hãy suy ra đồ thị của hàm số  $y = f(|x|)$ ?



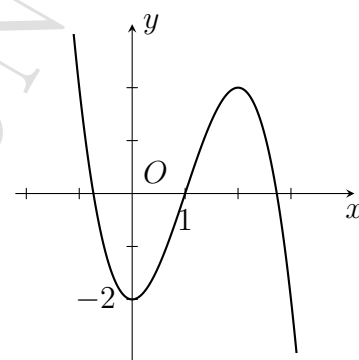
**Ví dụ 35.**

Cho đồ thị hàm số  $y = x^3 - 6x^2 + 9x$  như hình bên. Hãy suy ra đồ thị của hàm số  $y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$ .



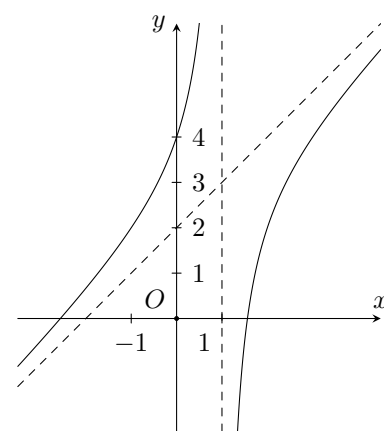
### Ví dụ 36.

Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 - 2$  có đồ thị như hình bên. Từ đó suy ra đồ thị của hàm số  $y = | -|x|^3 + 3|x|^2 - 2 |$ ?



### Ví dụ 37.

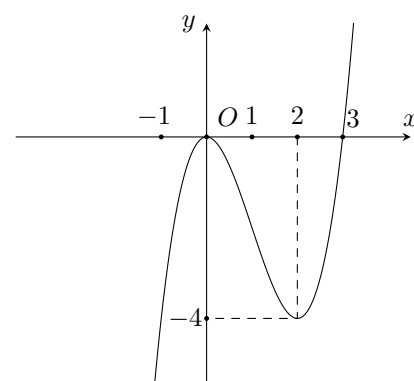
Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + x - 4}{x - 1}$  có đồ thị như hình bên. Từ đó suy ra đồ thị của hàm số  $y = \left| \frac{|x|^2 + |x| - 4}{|x| - 1} \right|$ ?



### Ví dụ 38.

Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2$  có đồ thị như hình vẽ. Khi đó

| Phát biểu                                                                                 | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số đồng biến trong khoảng $(0; 3)$ .                                        |   |   |
| b) Đồ thị hàm số $y =  x ^3 - 3 x ^2$ có 3 điểm cực trị.                                  |   |   |
| c) Đồ thị hàm số $y =  x^3 - 3x^2 $ có 3 điểm cực trị.                                    |   |   |
| d) Có 5 giá trị nguyên của $m$ để đồ thị hàm số $y =  x^3 - 3x^2 + m $ có 5 điểm cực trị. |   |   |



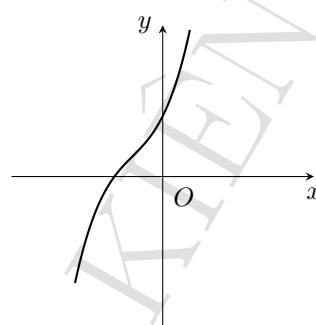
### Ví dụ 39.

Cho hàm số  $f(x)$  xác định là liên tục trên  $\mathbb{R}$  có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên  $a$  để phương trình

$$f(16|x|^3 - 12x^2(x^2 + 1)) = f(a(x^2 + 1)^3)$$

có nghiệm thực.

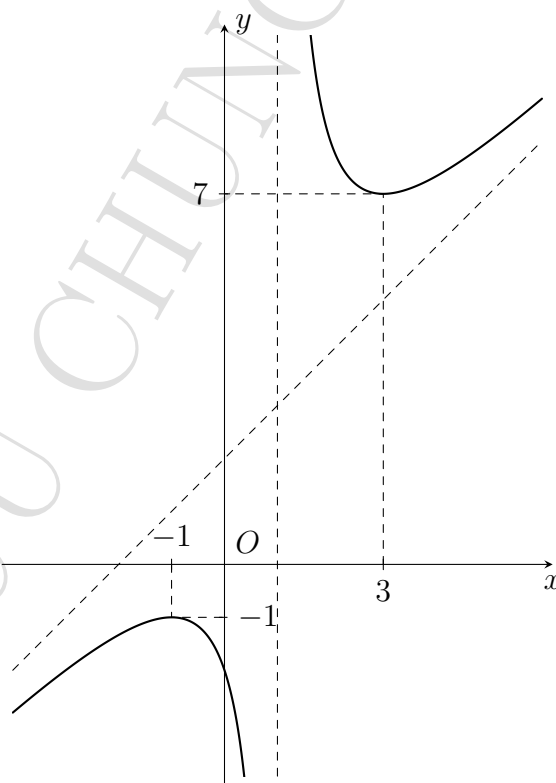
KQ:



#### Ví dụ 40.

Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$  có đồ thị hàm số như hình vẽ. Khi đó

| Phát biểu                                                          | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số đạt cực trị tại $x = -1$ và $x = 3$ .                    |   |   |
| b) Đồ thị hàm số $y =  f(x) $ có GTNN bằng 7.                      |   |   |
| c) Đồ thị hàm số $y = f( x )$ có ba điểm cực trị.                  |   |   |
| d) Đồ thị hàm số $y =  f( x ) $ chỉ có cực tiểu, không có cực đại. |   |   |

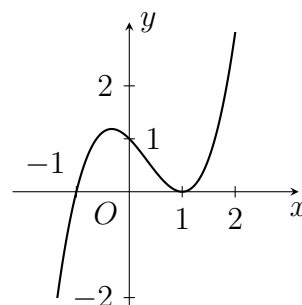


## 2

### Bài tập tự luận

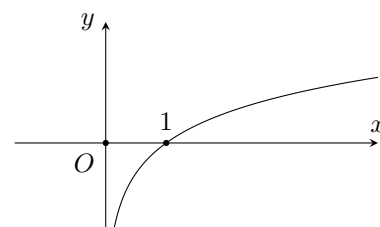
#### Bài 16.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ sau. Hãy xác định khoảng đồng biến của hàm số  $y = f(|x|)$ .



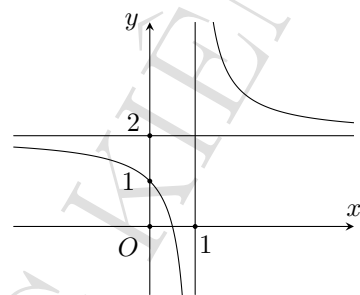
#### Bài 17.

Cho đồ thị của hàm số  $y = f(x) = \log_4 x$  có đồ thị như hình vẽ. Từ đó, hãy suy ra đồ thị của hàm số  $y = |f(x - 2)|$ .



**Bài 18.**

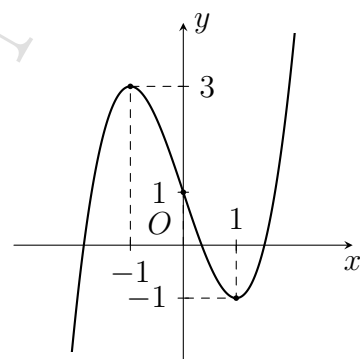
Cho hàm số  $y = \frac{2x-1}{x-1}$  có đồ thị như hình vẽ. Tìm các khoảng đồng biến của hàm số  $y = \frac{2|x|-1}{|x|-1}$ .



**Bài 19.** Cho hàm số  $y = f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$ . Hãy xác định khoảng biến thiên của hàm số  $y = f(-x)$ .

**Bài 20.**

Cho hàm số  $y = x^3 - 3x + 1$  có đồ thị như hình vẽ. Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số  $y = |x-1|^3 - 3|x-1| + 1$ .

**3****Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn**

**Câu 89.** Cho hàm số  $y = f(x)$  và các phát biểu sau:

I. Hàm số  $y = f(|x|)$  làm hàm lẻ.

II. Đồ thị hàm số  $y = f(x) + a$  được tính tiến lên phía trên  $a$  đơn vị (theo phương  $Oy$ ) nếu  $a > 0$  từ đồ thị hàm số  $y = f(x)$ .

III. Đồ thị hàm số  $y = f(x+a)$  được tính tiến sang trái ( $a$  đơn vị nếu  $a > 0$ ) từ đồ thị hàm số  $y = f(x)$ .

IV. Đồ thị hàm số  $y = |f(x)|$  luôn nằm bên trên trục  $Oy$ .

Số phát biểu đúng là

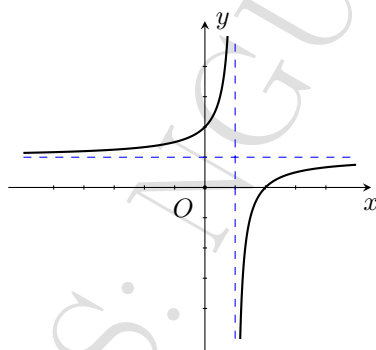
**A.** 1.

**B.** 4.

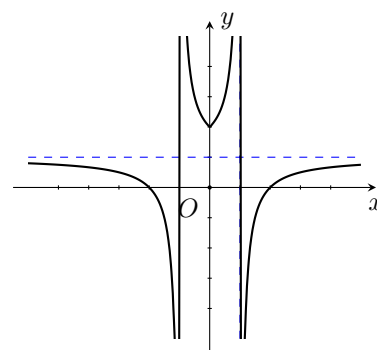
**C.** 2.

**D.** 3.

**Câu 90.** Cho hàm số  $y = \frac{x-2}{x-1}$  có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

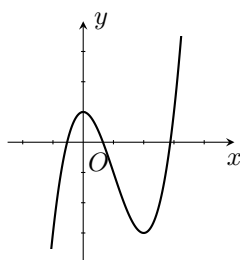
**A.**  $y = \left| \frac{x-2}{x-1} \right|$ .

**B.**  $y = \frac{|x|-2}{|x|-1}$ .

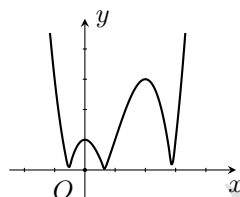
**C.**  $y = \frac{|x|-2}{|x|+1}$ .

**D.**  $y = \frac{|x|-2}{|x|-1}$ .

**Câu 91.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 1$  có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



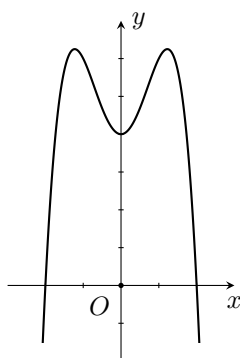
Hình 1



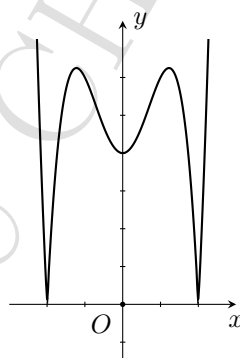
Hình 2

- A.**  $y = |x^3 - 3x^2 + 1|$ . **B.**  $y = |x|^3 - 3x^2 + 1$ . **C.**  $y = |x|^3 - 3|x|^2 + 1$ . **D.**  $y = ||x|^3 - 3x^2 + 1|$ .

**Câu 92.** Cho hàm số  $y = -x^4 + 3x^2 + 4$  có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



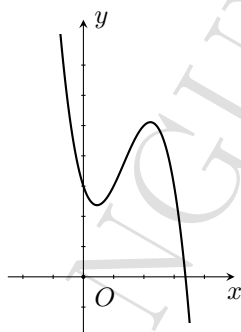
Hình 1



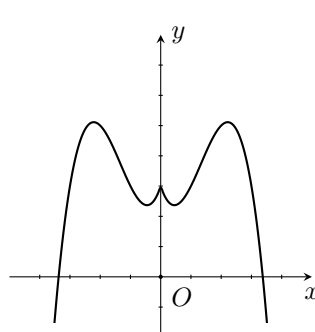
Hình 2

- A.**  $y = |-x^4 + 3x^2 - 4|$ . **B.**  $y = |-x^4 + 3x^2| + 4$ .  
**C.**  $y = -|x|^4 + 3|x|^2 + 4$ . **D.**  $y = |-x^4 + 3x^2 + 4|$ .

**Câu 93.** Cho hàm số  $y = -x^3 + 4x^2 - 3x + 3$  có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1

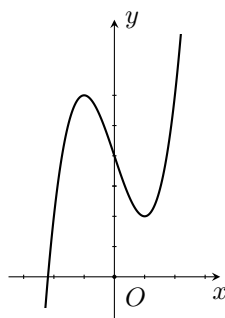


Hình 2

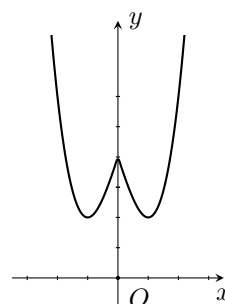
- A.**  $y = |-x^3 + 4x^2 - 3x + 3|$ . **B.**  $y = -|x|^3 + 4x^2 - 3|x| + 3$ .  
**C.**  $y = |x^3 + 4x^2 - 3x - 3|$ . **D.**  $y = ||x|^3 - 4x^2 + 3|x| - 3|$ .

**Câu 94.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x + 4$  có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?





Hình 1



Hình 2

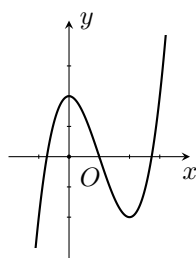
**A.**  $y = |x^3 - 3x + 4|$ .

**C.**  $y = ||x|^3 - 3|x| - 4|$ .

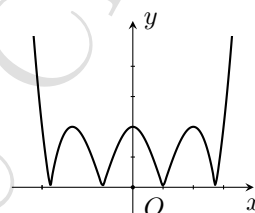
**B.**  $y = |x|^3 - 3|x| + 4$ .

**D.**  $y = ||x|^3 - 3x + 4|$ .

**Câu 95.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

**A.**  $y = |x^3 - 3x^2 + 2|$ .

**B.**  $y = |x|^3 - 3x^2 + 2$ .

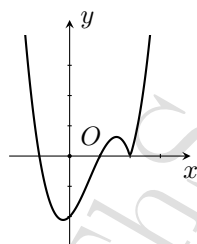
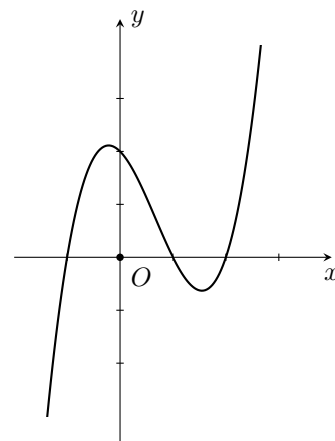
**C.**  $y = |x|^3 - 3|x|^2 + 2$ .

**D.**  $y = ||x|^3 - 3x^2 + 2|$ .

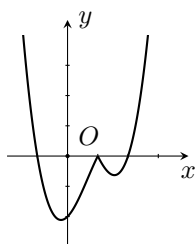
**Câu 96.**

Cho đồ thị hàm số  $y = (x - 2)(x^2 - 1)$ . Hình nào là đồ thị của hàm số

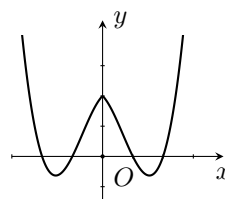
$$y = |x - 2|(x^2 - 1)?$$



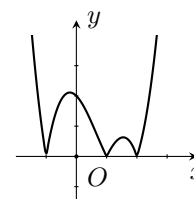
**A.**



**B.**



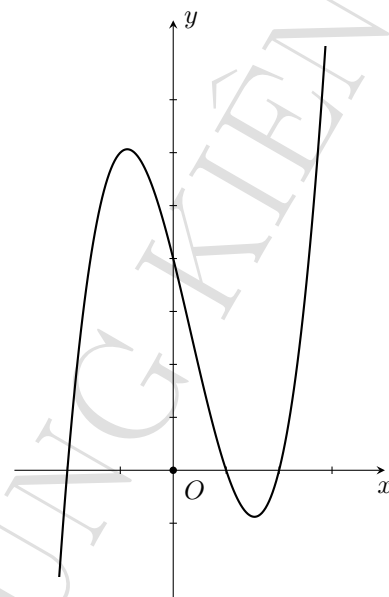
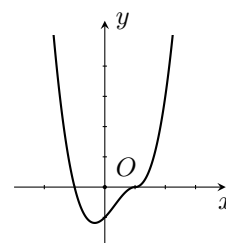
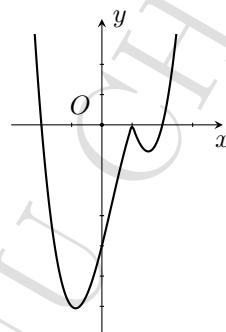
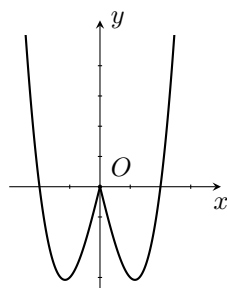
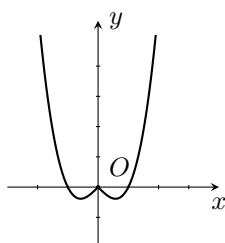
**C.**



**D.**

**Câu 97.**

Cho đồ thị hàm số  $y = (x - 1)(x^2 - 4)$ . Hình nào là đồ thị của hàm số  $y = |x - 1|(x^2 - 4)$ ?



**Câu 98.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|         |           |           |           |
|---------|-----------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $1$       | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | +         | +         |
| $f(x)$  | $-2$      | $+\infty$ | $-2$      |

Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A.** Hàm số  $y = f(|x|)$  không có cực trị.
- B.** Hàm số  $y = |f(x)|$  có một điểm cực trị.
- C.** Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; 1)$  và  $(1; +\infty)$ .
- D.** Hàm số  $y = f(x)$  không có cực trị.

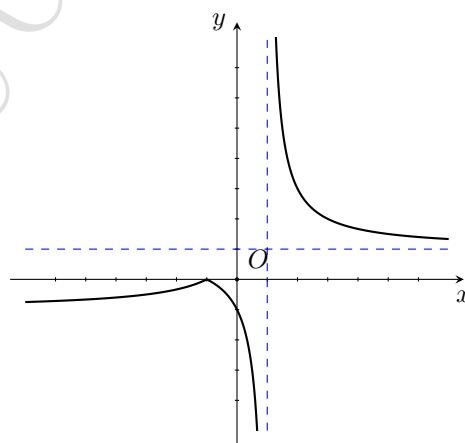
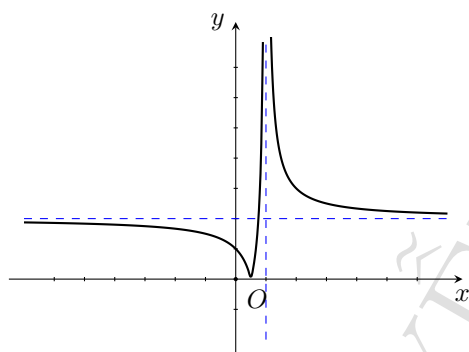
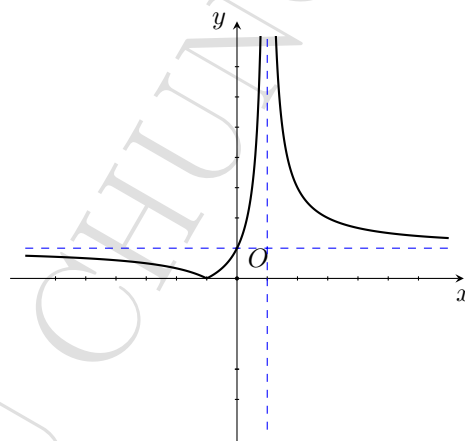
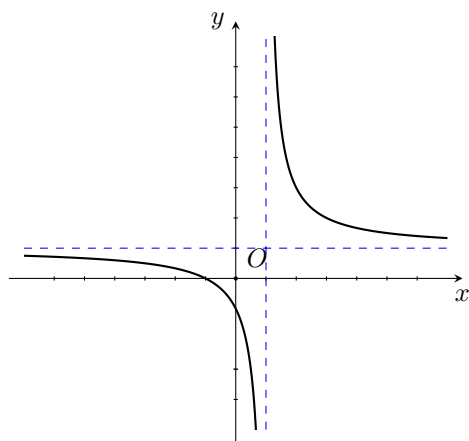
**Câu 99.** Cho hàm số  $y = |mx^3 - 3mx^2 + (3m - 2)x + 2 - m|$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in [-10; 10]$  để hàm số đã cho có 5 điểm cực trị?

- A.** 9.
- B.** 7.
- C.** 11.
- D.** 10.

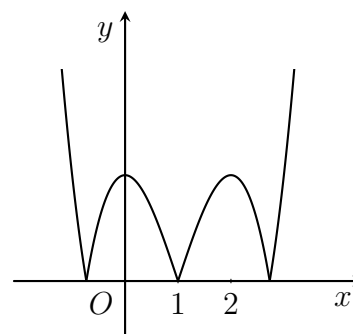
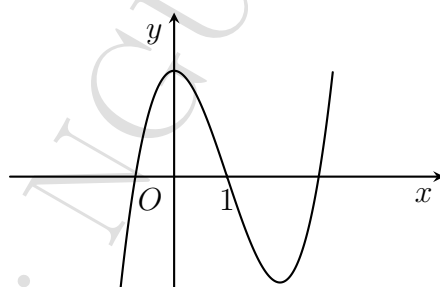
**Câu 100.**

Cho hàm số  $y = \frac{x+1}{x-1}$ . Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số

$$y = \frac{|x+1|}{x-1}?$$

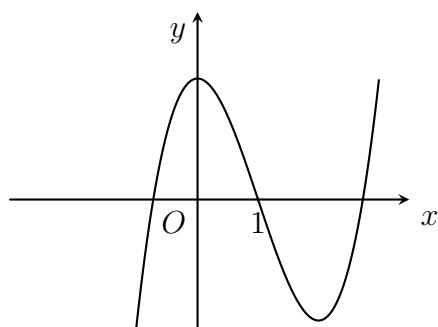


**Câu 101.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?

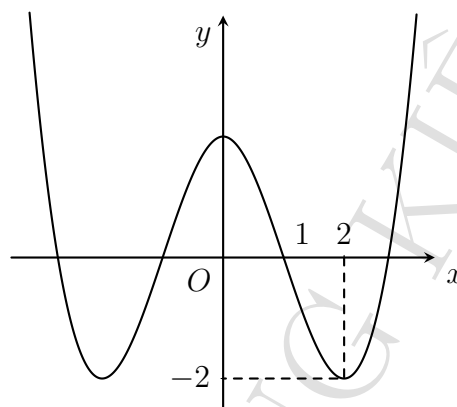


**A.**  $y = |x^3 - 3x^2 + 2|$ . **B.**  $y = |x|^3 - 3x^2 + 2$ . **C.**  $y = |x^3 - 3x^2 + 1|$ . **D.**  $y = |x|^3 - 3x^2 - 1$ .

**Câu 102.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  có đồ thị như Hình 1.



Hình 1



Hình 2

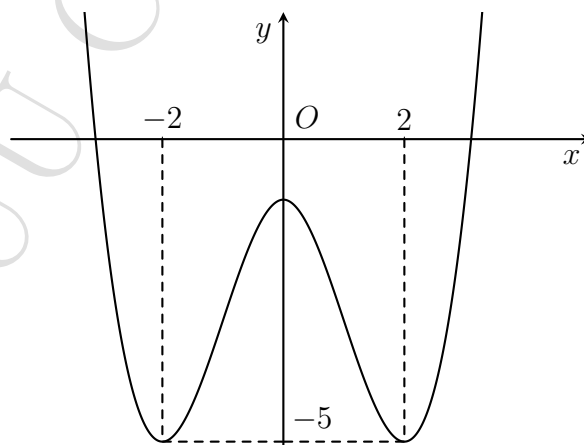
Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?

- A.**  $y = |x^3 - 3x^2 + 2|$ . **B.**  $y = |x|^3 - 3x^2 + 2$ . **C.**  $y = |x^3 - 3x^2 + 1|$ . **D.**  $y = |x|^3 - 3x^2 - 1$ .

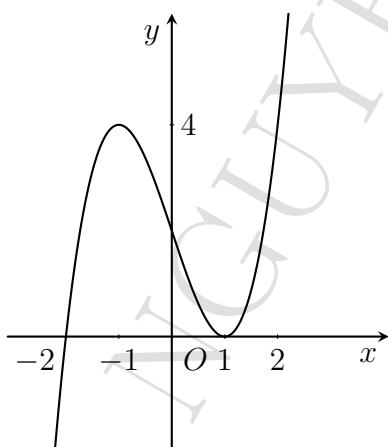
**Câu 103.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$ . Biết đồ thị  $(C)$  của hàm số  $y = f(|x|)$  như hình vẽ. Tìm hàm số  $y = f(x)$  trong các hàm số sau

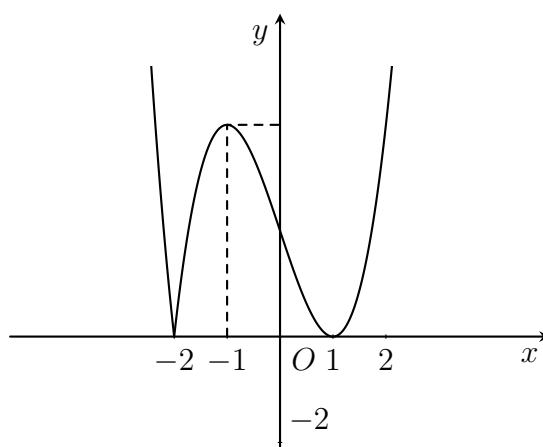
- A.**  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$ . **B.**  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ .  
**C.**  $f(x) = \frac{x^2-4}{x+1}$ . **D.**  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$ .



**Câu 104.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x + 2$  có đồ thị như Hình 1.



Hình 1

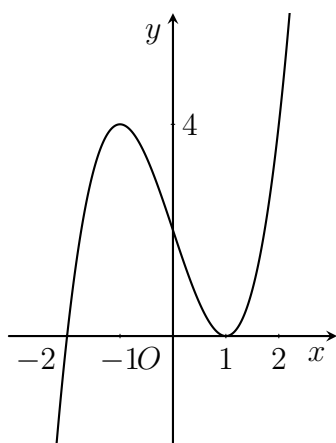


Hình 2

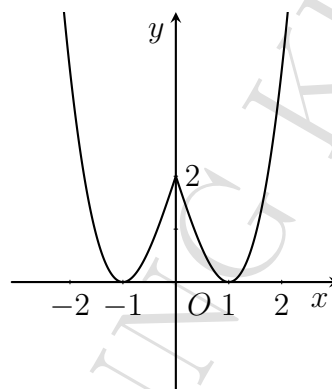
Khi đó đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?

- A.**  $y = |x|^3 - 3|x| + 2$ . **B.**  $y = x^3 - 3|x| + 2$ . **C.**  $|y| = x^3 - 3x + 2$ . **D.**  $y = |x^3 - 3x + 2|$ .

**Câu 105.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x + 2$  có đồ thị như Hình 1.



Hình 1

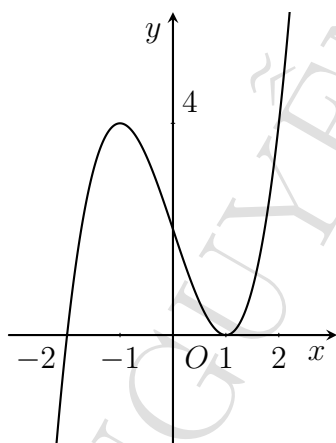


Hình 2

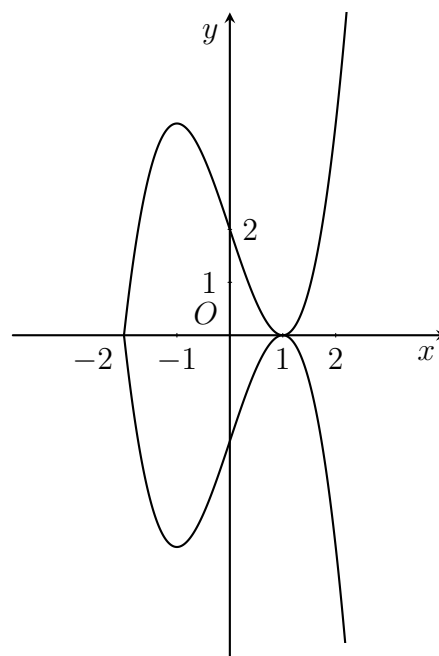
Khi đó đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?

- A.**  $y = |x^3| - 3|x| + 2$ . **B.**  $y = |x^3 - 3x + 2|$ . **C.**  $|y| = x^3 - 3x + 2$ . **D.**  $y = |x^3| - 3|x| - 2$ .

**Câu 106.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như Hình 1.



Hình 1

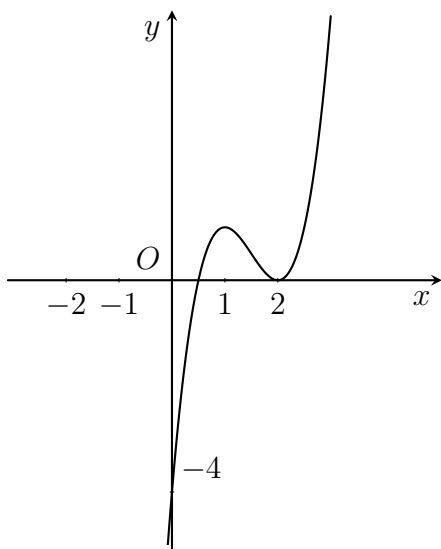


Hình 2

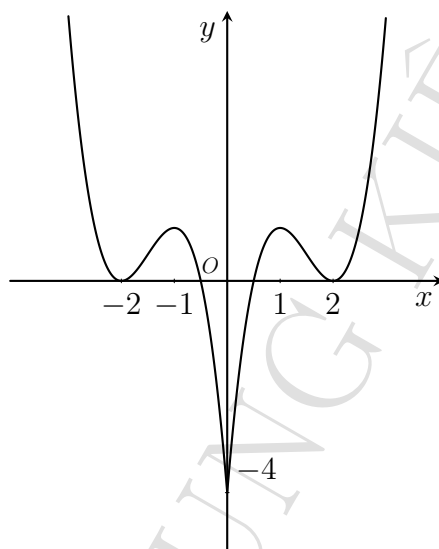
Khi đó đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?

- A.**  $y = |x^3| - 3|x| + 2$ . **B.**  $y = |x^3 - 3x + 2|$ . **C.**  $|y| = x^3 - 3x + 2$ . **D.**  $y = |x^3| - 3|x| - 2$ .

**Câu 107.** Cho hàm số có đồ thị như Hình 1.



Hình 1



Hình 2

Khi đó đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?

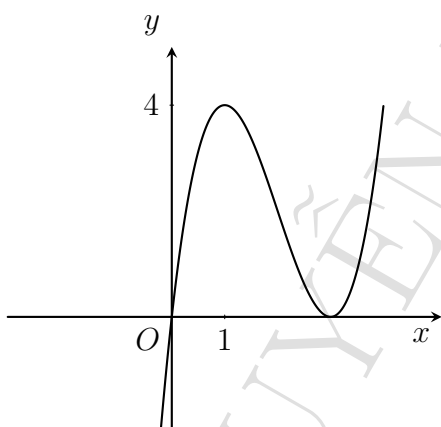
**A.**  $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ .

**B.**  $y = |a|x^3 + bx^2 + c|x| + d|$ .

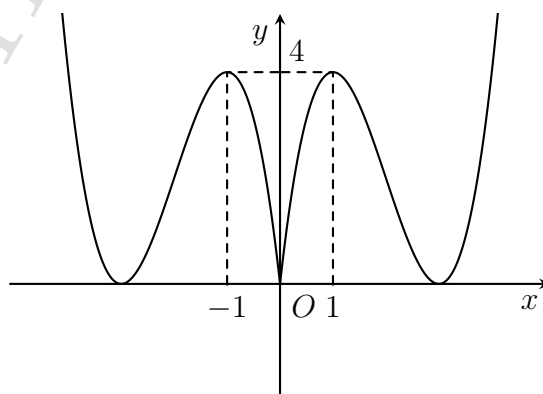
**C.**  $y = a|x|^3 + bx^2 + c|x| + d$ .

**D.**  $|y| = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .

**Câu 108.** Cho hàm số  $y = x^3 - 6x^2 + 9x$  có đồ thị như Hình 1.



Hình 1



Hình 2

Có các nhận định sau:

(1) đồ thị hình 2 là của hàm số  $y = |x^3 - 6x^2 + 9|x||$ .

(2) đồ thị hình 2 là của hàm số  $y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$ .

(3) đồ thị hình 2 là của hàm số  $y = |x^3 - 6x^2 + 9x|$ .

(4) đồ thị hình 2 là của hàm số  $|y| = x^3 - 6x^2 + 9x$ .

Có bao nhiêu nhận định sai?

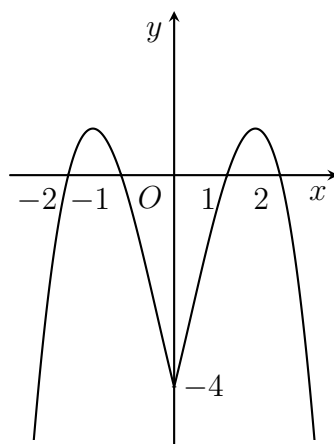
**A.** 1.

**B.** 2.

**C.** 3.

**D.** 4.

**Câu 109.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số  $y = f(|x|)$  như hình vẽ.



Chọn kết luận đúng trong các kết luận sau:

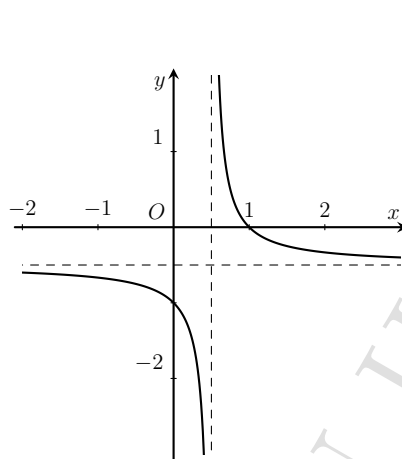
**A.**  $f(x) = -x^3 + x^2 + 4x - 4.$

**C.**  $f(x) = -x^3 - x^2 + 4x - 4.$

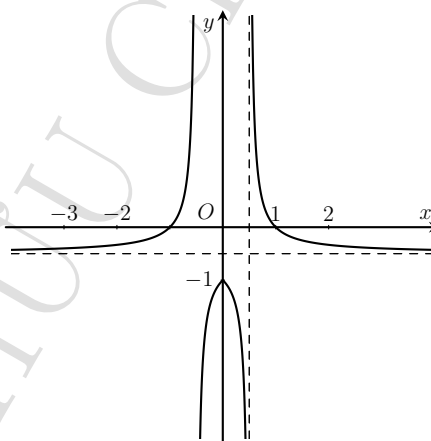
**B.**  $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4.$

**D.**  $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4.$

**Câu 110.** Cho hàm số  $y = \frac{-x+1}{2x-1}$  có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

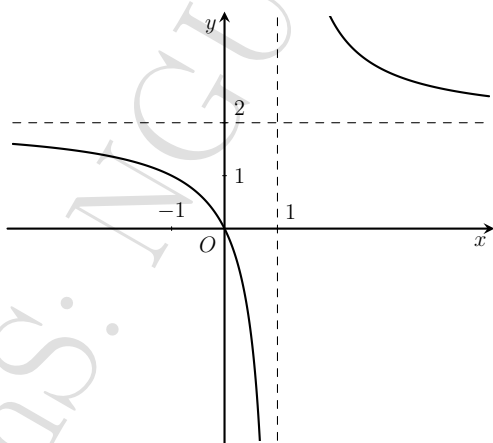
**A.**  $y = \left| \frac{-x+1}{2x-1} \right|.$

**B.**  $y = \frac{-|x|+1}{2|x|-1}.$

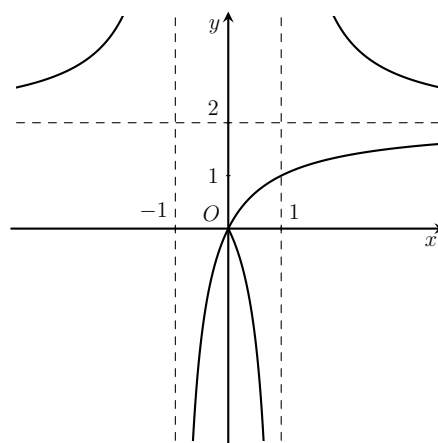
**C.**  $y = \frac{|-x+1|}{2x-1}.$

**D.**  $y = \frac{-x+1}{|2x-1|}.$

**Câu 111.** Cho hàm số  $y = \frac{2x}{x-1}$  có đồ thị như Hình 1.



Hình 1



Hình 2



Khi đó đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?

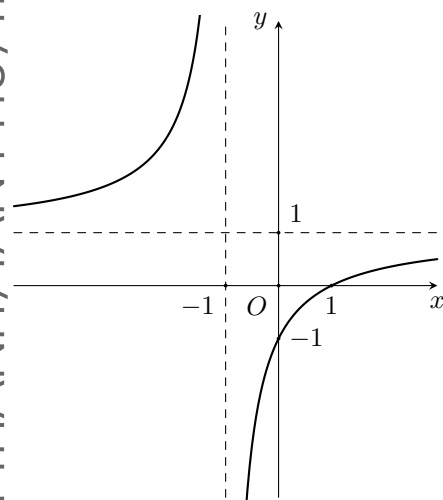
A.  $|y| = \frac{2x}{x-1}$ .

B.  $y = \frac{2x}{|x-1|}$ .

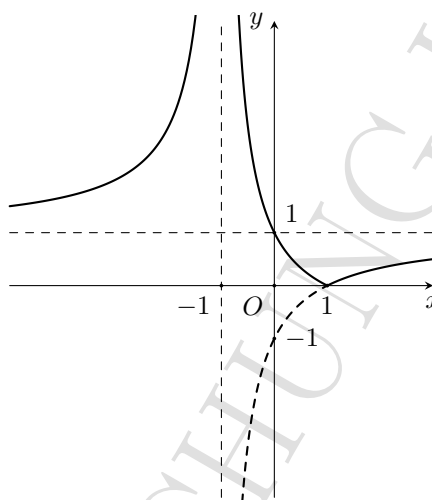
C.  $y = \frac{2|x|}{|x-1|}$ .

D.  $y = \left| \frac{2x}{x-1} \right|$ .

**Câu 112.** Cho hàm số  $y = \frac{x-1}{x+1}$  có đồ thị như Hình 1.



Hình 1



Hình 2

Khi đó đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?

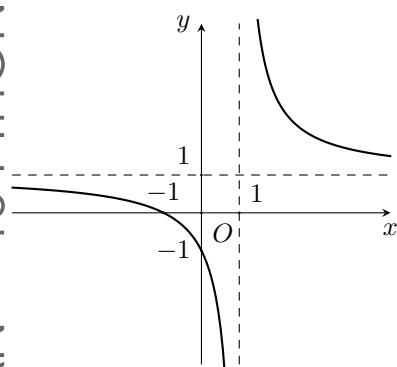
A.  $|y| = \frac{x-1}{x+1}$ .

B.  $y = \frac{x-1}{|x+1|}$ .

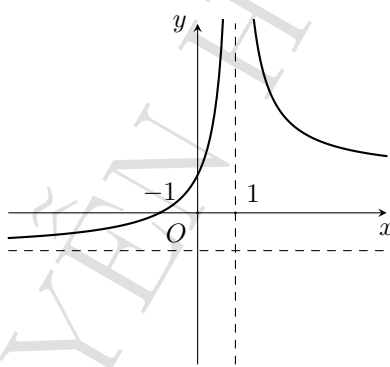
C.  $y = \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$ .

D.  $y = \frac{|x-1|}{x+1}$ .

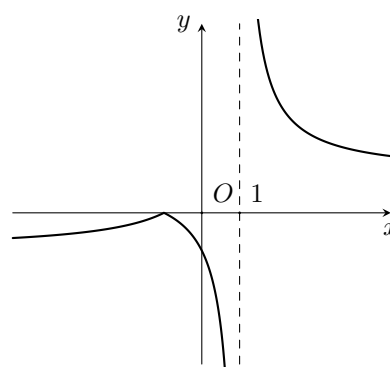
**Câu 113.** Cho 3 đồ thị sau.



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Nhận định nào sau đây đúng?

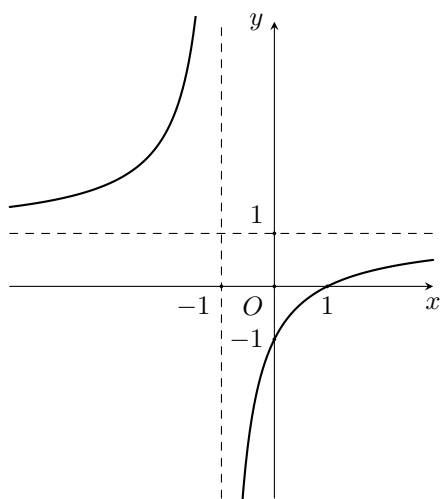
A.  $y = \frac{2x+1}{x-1}$  có đồ thị là Hình 1;  $y = \frac{2x+1}{|x-1|}$  có đồ thị là Hình 2;  $y = \frac{|2x+1|}{x-1}$  có đồ thị là Hình 3

B.  $y = \frac{x+1}{x-1}$  có đồ thị là Hình 1;  $y = \frac{|x+1|}{|x-1|}$  có đồ thị là Hình 2;  $y = \frac{|x+1|}{x-1}$  có đồ thị là Hình 3.

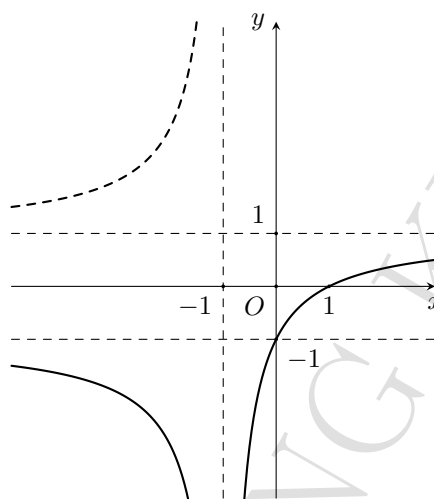
C.  $y = \frac{x+1}{x-1}$  có đồ thị là Hình 1;  $y = \frac{x+1}{|x-1|}$  có đồ thị là Hình 2;  $y = \frac{|x+1|}{x-1}$  có đồ thị là Hình 3.

D.  $y = \frac{x+1}{x-1}$  có đồ thị là Hình 1;  $y = \frac{x+1}{|x-1|}$  có đồ thị là Hình 2;  $|y| = \frac{x+1}{x-1}$  có đồ thị là Hình 3.

**Câu 114.** Cho hàm số  $y = \frac{x-1}{x+1}$  có đồ thị như Hình 1.



Hình 1



Hình 2

Khi đó đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?

**A.**  $y = \frac{x-1}{|x+1|}$ .

**B.**  $y = \frac{|x-1|}{x+1}$ .

**C.**  $y = \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$ .

**D.**  $|y| = \frac{x-1}{x+1}$ .

**Câu 115.**

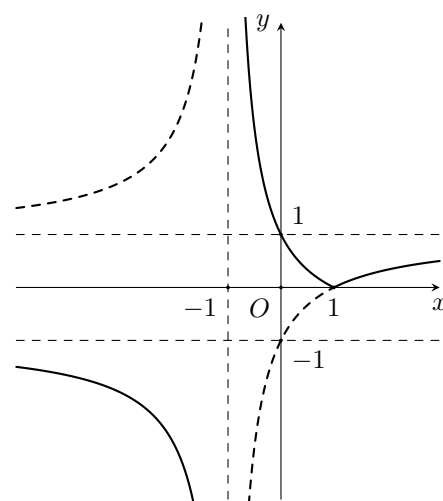
Cho đường cong (C) như hình vẽ bên. Hỏi (C) là dạng đồ thị của hàm số nào?

**A.**  $y = \frac{x-1}{|x+1|}$ .

**B.**  $y = \frac{|x-1|}{x+1}$ .

**C.**  $y = \left| \frac{x-1}{2x+1} \right|$ .

**D.**  $|y| = \frac{x-1}{2x+1}$ .



**Câu 116.**

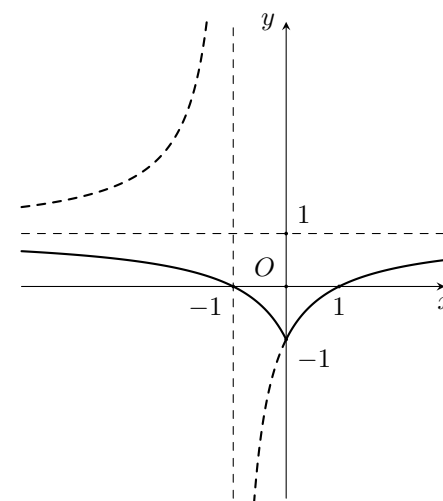
Cho đường cong (C) như hình vẽ. Hỏi (C) là đồ thị của hàm số nào?

**A.**  $y = \frac{x-1}{|x+1|}$ .

**B.**  $y = \frac{|x-1|}{x+1}$ .

**C.**  $y = \frac{|x|-1}{|x|+1}$ .

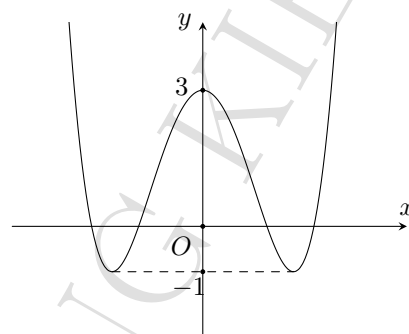
**D.**  $y = \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$ .



# 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 117.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Khi đó

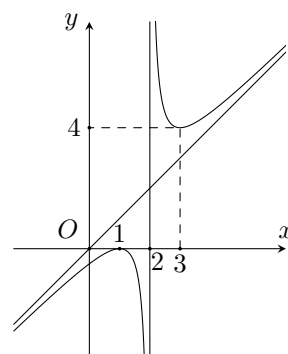
| Phát biểu                                                                                                            | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số có 3 điểm cực trị.                                                                                         |   |   |
| b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 3)$ .                                                                          |   |   |
| c) Phương trình $f(x) = 2$ có 3 nghiệm phân biệt.                                                                    |   |   |
| d) Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $ f(x)  = \frac{m}{4}$ có 8 nghiệm phân biệt là 6. |   |   |



**Câu 118.**

Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$  có đồ thị như hình vẽ. Khi đó

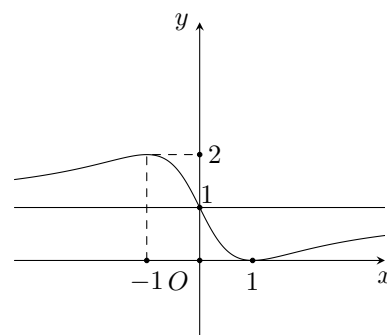
| Phát biểu                                                   | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và cực tiểu tại $x = 3$ . |   |   |
| b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ .          |   |   |
| c) Trên khoảng $(2; +\infty)$ hàm số có $y_{\min} = 4$ .    |   |   |
| d) Đồ thị hàm số $y = f( x )$ có 4 điểm cực trị.            |   |   |



**Câu 119.**

Cho đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$ . Có đồ thị như hình vẽ. Khi đó

| Phát biểu                                                                               | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ .                             |   |   |
| b) Hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận ngang là $y = 1$ .                               |   |   |
| c) Đồ thị hàm số $y = f( x )$ ba điểm cực trị.                                          |   |   |
| d) Hàm số $y = \frac{ x - 1 (x - 1)}{x^2 + 1}$ có giá trị nhỏ nhất là $y_{\min} = -2$ . |   |   |



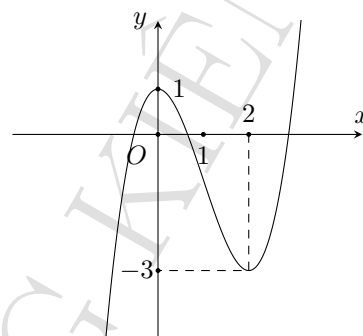
**Câu 120.** Cho hàm số  $f(x) = \sin x + \cos x$  có đồ thị  $(C)$ . Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị không thể thu được bằng cách tịnh tiến đồ thị  $(C)$ ?

| Phát biểu                                                                                  | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số có giá trị lớn nhất là 1.                                                        |   |   |
| b) Tịnh tiến đồ thị $(C)$ sang phải $\frac{\pi}{2}$ ta thu được hàm số $\sin x - \cos x$ . |   |   |
| c) Tịnh tiến đồ thị $(C)$ thu được hàm số $y = \sqrt{2} \sin x + \sqrt{2}$ .               |   |   |
| d) Tịnh tiến theo đồ thị $(C)$ thu được hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .  |   |   |

**Câu 121.**

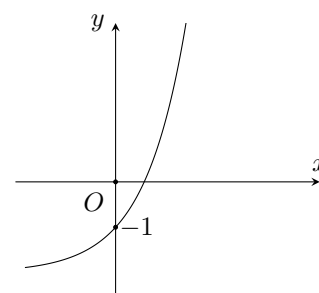
Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó

| Phát biểu                                                                          | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ .                                       |   |   |
| b) Hàm số $y =  f(x) $ có 3 điểm cực trị.                                          |   |   |
| c) Phương trình $y =  f(x)  = \frac{1}{2}$ có 6 nghiệm phân biệt.                  |   |   |
| d) Để hàm số $y =  f(x) + m $ có ba điểm cực trị thì $m \geq 3$ hoặc $m \leq -1$ . |   |   |

**5****Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn****Câu 122.**

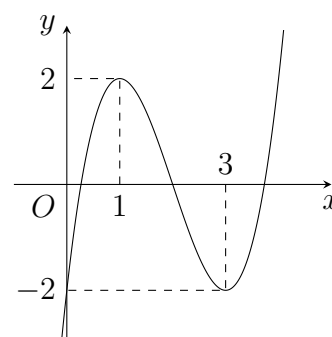
Cho hàm số  $y = 3^x - 2$  như hình vẽ. Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 3^{|x|} - 2$ .

KQ:

**Câu 123.**

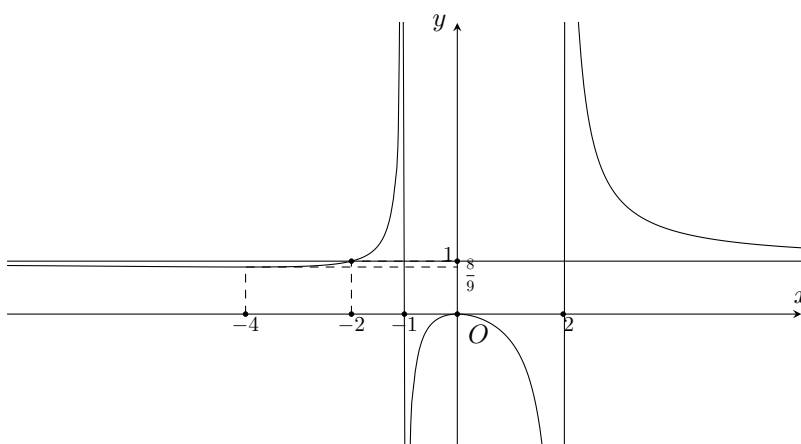
Cho hàm số  $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$  có đồ thị  $(C)$  như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương trình  $|f(x)| = m$  ( $m$  là tham số) có 6 nghiệm phân biệt?

KQ:

**Câu 124.**

Hàm số  $y = |f(x)|$  có đồ thị như hình vẽ. Hàm số  $y = |f(x)|$  đồng biến trên  $(a; b)$  trong đó  $a, b > 0$ , khi đó  $T = a + b$  có giá trị bằng bao nhiêu?

KQ:



**Câu 125.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}|x|^3 - (m-1)x^2 + (m-3)|x| + m^2 - 4m + 1$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in [-10; 10]$  để hàm số có 5 điểm cực trị.

KQ:

**Câu 126.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau

|         |           |      |     |           |     |
|---------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $3$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $5$  | $1$ | $+\infty$ |     |

Đồ thị hàm số  $y = |f(x)|$  có bao nhiêu điểm cực trị?

KQ:

### DẠNG 5 Tương giao khi đề cho bảng biến thiên hoặc đồ thị

Cho hàm số có bảng biến thiên hoặc đồ thị hàm số. Các yêu cầu thường gặp bao gồm:

- ☑ Biện luận số nghiệm của phương trình không chứa tham số.
- ☑ Tìm điều kiện của tham số thỏa mãn điều kiện liên quan tới nghiệm của phương trình.
- ☑ **Bước 1:** Biến đổi phương trình bài toán đưa ra về dạng liên quan với hàm số được cho bảng biến thiên hoặc đồ thị ở đầu bài.
- ☑ **Bước 2:** Biện luận kết quả bài toán dựa trên đồ thị hoặc bảng biến thiên đưa ra ở đề bài.
- ⚠ ☑ Số nghiệm của phương trình  $f(x) = m$  là số giao điểm của đường thẳng  $y = m$  với đồ thị của hàm số  $y = f(x)$ .
- ☑ Số nghiệm của phương trình  $f(x) = g(x)$  là số giao điểm của hai đồ thị của các hàm số  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$ .

### 1 Ví dụ mẫu

**Ví dụ 41.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|         |           |      |     |           |     |
|---------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $4$  | $0$ | $+\infty$ |     |

Xác định số nghiệm của phương trình  $f(x) + 7 = 0$ .

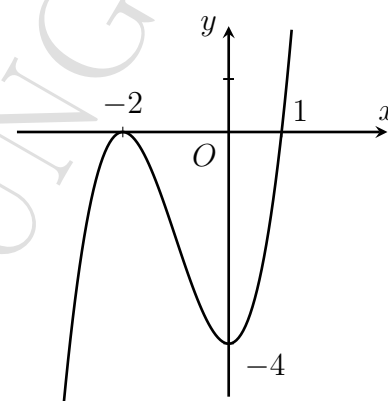
**Ví dụ 42.** Hãy xác định tọa độ giao điểm của đồ thị  $(C): y = \frac{2x-1}{x+1}$  cắt đường thẳng  $d: y = 2x - 3$ .

**Ví dụ 43.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ , liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ sau. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  sao cho phương trình  $f(x) = m$  có ba nghiệm phân biệt.

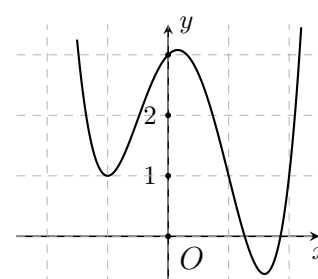
|      |           |     |  |           |           |           |
|------|-----------|-----|--|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 2   |  | 3         | $+\infty$ |           |
| $y'$ |           | -   |  | +         | 0         | -         |
| $y$  | $+\infty$ |     |  |           | 3         |           |
|      |           | $2$ |  | $-\infty$ |           | $-\infty$ |

**Ví dụ 44.**

Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình  $f(x) = 1$ .

**Ví dụ 45.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như đường cong hình bên. Phương trình  $3f(x) + 6 = 2f(x) + 8$  có bao nhiêu nghiệm?

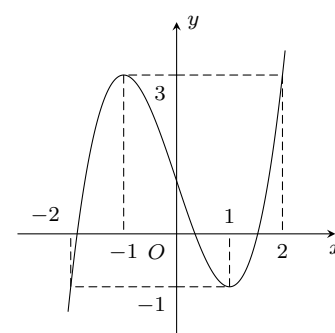


**Ví dụ 46.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(x) = m - 3$  có 4 nghiệm phân biệt.

|      |           |      |      |     |           |
|------|-----------|------|------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$  | $1$ | $+\infty$ |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$ | $-$       |
| $y$  | $-\infty$ | $3$  | $-1$ | $3$ | $+\infty$ |

**A.** 4.**B.** 0.**C.** 2.**D.** 1.**Ví dụ 47.**

Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình vẽ bên. Số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và trục hoành là

**A.** 3.**B.** 1.**C.** 2.**D.** 0.

**Ví dụ 48.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  và có bảng biến thiên như sau

|      |           |      |           |     |           |     |
|------|-----------|------|-----------|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $-1$      | $0$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ |           | $+$  | $0$       | $-$ | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ | $2$ | $+\infty$ |     |

Khi đó

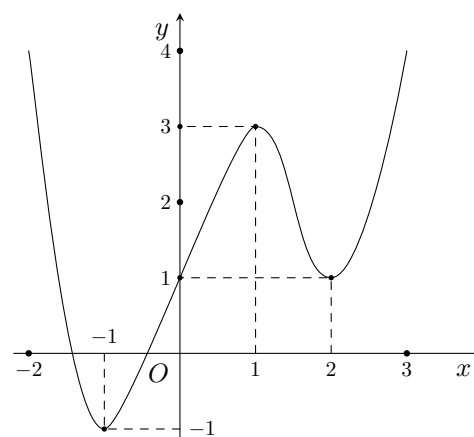
| Phát biểu                                                                         | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.                           |   |   |
| b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng.                                                |   |   |
| c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$ .                                     |   |   |
| d) Phương trình $f(x) = m - 2$ có hai nghiệm phân biệt khi $m < 0$ hoặc $m > 4$ . |   |   |

**Ví dụ 49.** Tìm tất cả các giá trị thực của  $m$  để phương trình  $x + 1 = m\sqrt{2x^2 + 1}$  có hai nghiệm phân biệt.

**Ví dụ 50.**

Cho đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  như hình vẽ. Tìm số giá trị nguyên của  $m$  để phương trình  $f(x) = m$  có đúng 3 nghiệm phân biệt.

KQ:



## 2

## Bài tập tự luận

**Bài 21.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  cắt đường thẳng  $d: y = m(x - 1)$  tại ba điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2, x_3$  thỏa mãn  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 5$ .

**A.**  $m = -4$ .

**B.**  $m = -3$ .

**C.**  $m = -1$ .

**D.**  $m = -2$ .

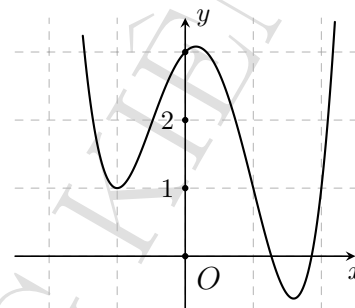
**Bài 22.** Cho bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Tìm tất cả các giá trị  $m$  để phương trình  $|f(x)| = m$  có 4 nghiệm phân biệt thỏa mãn  $x_1 < x_2 < x_3 < \frac{1}{2} < x_4$ ?

|      |           |     |     |           |     |     |           |
|------|-----------|-----|-----|-----------|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |     |     |           |
| $y'$ |           | $+$ | $0$ | $-$       | $0$ | $+$ |           |
| $y$  | $-\infty$ |     | $1$ |           | $0$ |     | $+\infty$ |

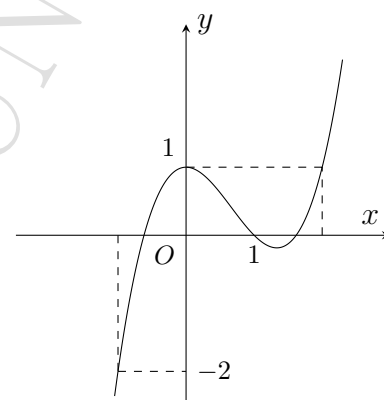


**Bài 23.**

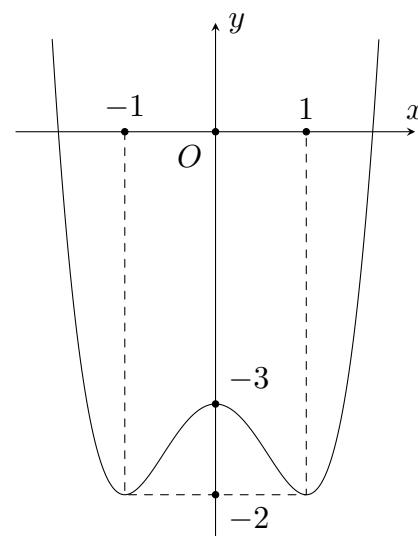
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như đường cong hình bên. Phương trình  $f(x) = 2$  có bao nhiêu nghiệm?

**Bài 24.**

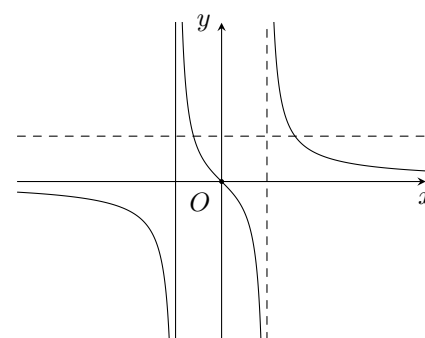
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(x) = m$  có 3 nghiệm phân biệt.

**Bài 25.**

Cho đồ thị hàm số  $y = f(x)$  như hình bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $f(x) - m = 0$  có 4 nghiệm phân biệt.

**Bài 26.**

Cho đồ thị hàm số  $y = f(x)$  như hình bên dưới. Hỏi phương trình  $f(x) = x$  có bao nhiêu nghiệm?



3

Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

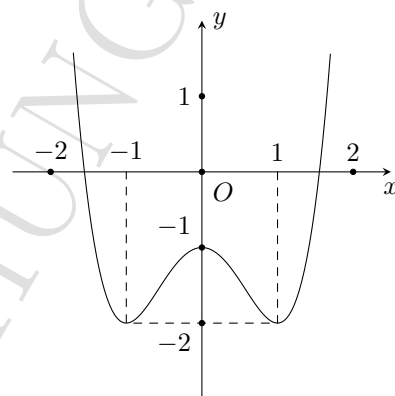
**Câu 127.** Cho hàm số  $y = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 1$  có đồ thị  $(C)$  và đường thẳng  $d: y = -m$ . Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để  $d$  cắt  $(C)$  tại ba điểm phân biệt.

- A.  $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$ . B.  $\left[-1; -\frac{1}{3}\right]$ . C.  $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ . D.  $\left(-1; -\frac{1}{3}\right)$ .

**Câu 128.**

Cho hàm số có đồ thị là đường cong trong hình bên. Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và trục tung là

- A.  $(0; -2)$ . B.  $(-1; 0)$ . C.  $(0; -1)$ . D.  $(-2; 0)$ .



**Câu 129.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

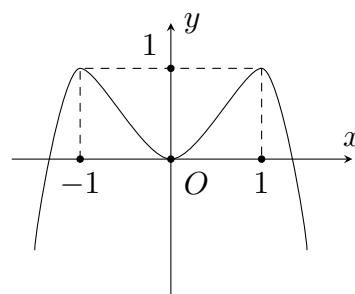
|         |           |      |     |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$ | $-$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $0$  | $2$ | $0$ | $+\infty$ |

Hỏi phương trình  $f(x) = 1$  có bao nhiêu nghiệm?

- A. 5. B. 4. C. 3. D. 2.

**Câu 130 (THPT QG 2018 - Mã 102).**

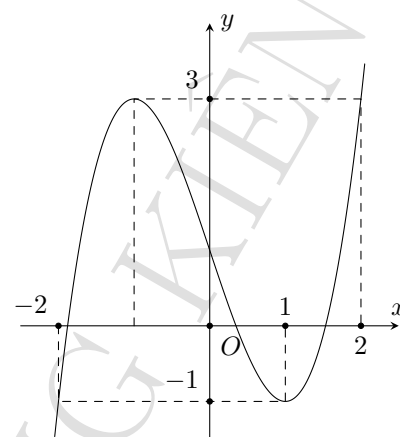
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình. Tìm số nghiệm của phương trình  $4f(x) - 3 = 0$ .



- A. 4. B. 3. C. 2. D. 0.

**Câu 131 (THPT QG 2018 - Mã 103).**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình. Tìm số nghiệm của phương trình  $3f(x) - 4 = 0$ .



A. 2.

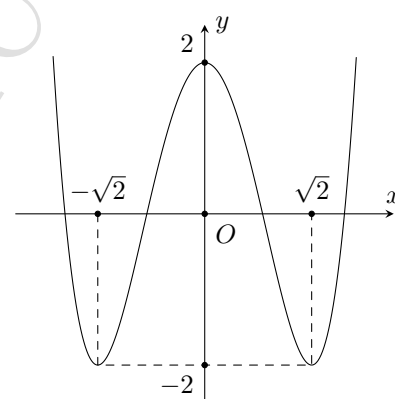
B. 3.

C. 4.

D. 1.

**Câu 132.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình. Tìm số nghiệm của phương trình  $2f(x) + 3 = 0$ .



A. 4.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

**Câu 133.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|      |           |      |      |           |     |
|------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $3$  | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $4$  | $-2$ | $+\infty$ |     |

Số nghiệm phương trình  $f(x) + 2 = 0$  là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

**Câu 134.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|      |           |      |     |      |           |
|------|-----------|------|-----|------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $-2$ | $+\infty$ |
| $y'$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$  | $+$       |
| $y$  | $+\infty$ |      | $1$ |      | $+\infty$ |

Diagram illustrating the phase portrait of the system  $y'' + y = 0$  in the  $(x, y)$  plane. The horizontal axis is  $x$  and the vertical axis is  $y$ . The phase portrait shows trajectories in the  $(x, y)$  plane, with critical points at  $(-\infty, 0)$ ,  $(-2, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, -2)$ ,  $(2, 0)$ , and  $(+\infty, 0)$ . The trajectories are curves that pass through these points, indicating a periodic motion around the center  $(0, 1)$ .

Số nghiệm của phương trình  $2f(x) + 3 = 0$  là

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

**Câu 135.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên sau

|      |           |      |     |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $-$  | $0$ | $-$ | $+$       |
| $y$  | $-\infty$ |      | $0$ |     | $-\infty$ |

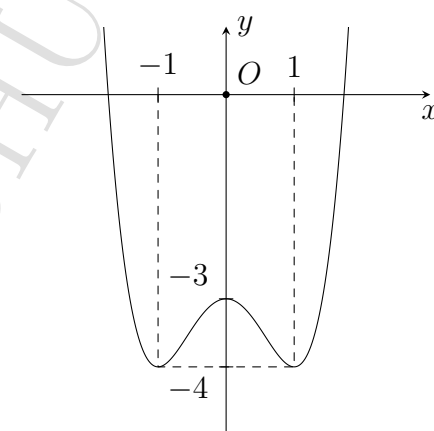
Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $f(x) - 1 = m$  có đúng hai nghiệm.

- A.**  $m = -2, m > -1$ .    **B.**  $m = -2, m \geq -1$ .    **C.**  $-2 < m < -1$ .    **D.**  $m > 0, m = -1$ .

**Câu 136.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên cạnh. Tìm  $m$  để phương trình  $f(x) = m$  có bốn nghiệm phân biệt.

- A.**  $-4 < m \leq -3$ .    **B.**  $-4 < m < -3$ .  
**C.**  $-4 \leq m < -3$ .    **D.**  $m > -4$ .



**Câu 137.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên dưới. Tìm số nghiệm của phương trình  $f(x) + 3 = 0$ .

|      |           |      |      |           |     |     |
|------|-----------|------|------|-----------|-----|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $1$  | $+\infty$ |     |     |
| $y'$ |           | $+$  | $0$  | $-$       | $0$ | $+$ |
| $y$  |           | $2$  |      | $+\infty$ |     |     |
|      | $-\infty$ |      | $-3$ |           |     |     |

$\swarrow$        $\searrow$        $\nearrow$

- A.** 0.    **B.** 3.    **C.** 1.    **D.** 2.

**Câu 138.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên dưới. Tìm số nghiệm của phương trình  $f^2(x) - 4 = 0$ .

|      |           |      |     |           |           |     |
|------|-----------|------|-----|-----------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $3$ | $+\infty$ |           |     |
| $y'$ |           | $+$  | $0$ | $-$       | $0$       | $+$ |
| $y$  |           |      | $4$ |           | $+\infty$ |     |
|      | $-\infty$ |      |     | $-2$      |           |     |

$\swarrow$        $\searrow$        $\nearrow$   
 $-\infty$        $-2$

- A.** 3.    **B.** 5.    **C.** 1.    **D.** 2.

**Câu 139.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên dưới. Tìm số nghiệm của phương trình  $2f^2(x) - 3f(x) + 1 = 0$ .

|      |           |      |               |           |     |
|------|-----------|------|---------------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $1$           | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$           | $0$       | $+$ |
| $y$  |           |      | $3$           |           | $1$ |
|      | $1$       |      | $\frac{1}{3}$ |           |     |

A. 6.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

## 4

## Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 140.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên dưới. Khi đó

|      |           |      |     |               |     |
|------|-----------|------|-----|---------------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$     |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$           | $+$ |
| $y$  |           |      | $3$ |               | $1$ |
|      | $1$       |      |     | $\frac{1}{3}$ |     |

| Phát biểu                                              | Đ | S |
|--------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 3)$ .             |   |   |
| b) Hàm số có giá trị nhỏ nhất là 1.                    |   |   |
| c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = 1$ .  |   |   |
| d) Phương trình $2f^2(x) - 3f(x) + 1 = 0$ có 3 nghiệm. |   |   |

**Câu 141.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

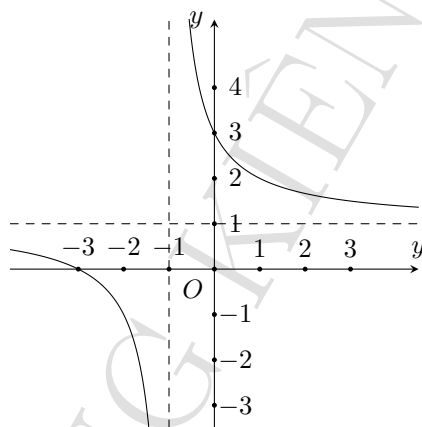
|      |           |      |           |           |
|------|-----------|------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $1$       | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $-$  | $0$       | $+$       |
| $y$  | $1$       |      | $+\infty$ | $-1$      |

Khi đó

| Phát biểu                                                   | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số chỉ có hai đường tiệm cận ngang.           |   |   |
| b) Đồ thị hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ .    |   |   |
| c) Phương trình $f(x) = -1$ có ba nghiệm phân biệt.         |   |   |
| d) Phương trình $f^2(x) + 4f(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt. |   |   |

**Câu 142.**

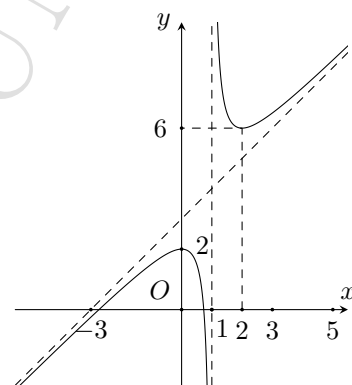
Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{x+3}{x+1}$  có đồ thị (C) như hình vẽ. Khi đó



| Phát biểu                                                                                          | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số có đường tiệm cận đứng là $y = 1$ .                                                      |   |   |
| b) Hàm số đồng biến trên khoảng là $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$ .                            |   |   |
| c) Phương trình $f(x) = x$ có hai nghiệm phân biệt.                                                |   |   |
| d) Đường thẳng $d: y = 2x + m$ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB$ khi $m = 4$ . |   |   |

**Câu 143.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Khi đó



| Phát biểu                                                                     | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = x + 2$ .                      |   |   |
| b) Đồ thị hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ .                       |   |   |
| c) Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm duy nhất khi bằng $m = 2$ hoặc $m = 6$ . |   |   |
| d) Phương trình $f^2(x) - 8f(x) + 7 = 0$ có đúng hai nghiệm.                  |   |   |

**Câu 144.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ. Khi đó

|      |           |      |     |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $3$ | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $-$  | $0$ | $+$ |           |
| $y$  |           | $2$  |     | $1$ |           |

The graph shows a curve starting from the bottom-left, passing through the point  $(-1, 2)$ , reaching a local maximum at  $(-1, 2)$ , then decreasing to a local minimum at  $(3, 1)$ , and finally increasing towards the top-right. The region between the curve and the x-axis from  $x = -1$  to  $x = 3$  is shaded with diagonal lines.

| Phát biểu                                                                     | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số có 1 điểm cực trị.                                           |   |   |
| b) Hàm số có 3 đường tiệm cận.                                                |   |   |
| c) Phương trình $f(x) = 1$ có đúng một nghiệm.                                |   |   |
| d) Phương trình $f(x) = m - 2$ hai nghiệm khi $3 < m < 4$ hoặc $-2 < m < 3$ . |   |   |

5

Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 145.** Tìm tất cả các giá trị nguyên của  $m$  để phương trình  $x + 1 = m\sqrt{2x^2 + 1}$  có hai nghiệm phân biệt.  
KQ:

**Câu 146.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  có bảng biến thiên như sau

|      |           |      |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $2$ | $+\infty$ |
| $y'$ | $-$       | $+$  | $-$ |           |
| $y$  | $+\infty$ | $-3$ | $2$ | $-4$      |

Tìm các giá trị nguyên của  $m$  để phương trình  $f(x) - m = 0$  có ba nghiệm phân biệt.

KQ:

**Câu 147.** Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để đồ thị  $(C_m) : y = (x - 2)(x^2 - mx + m^2 - 3)$  cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt?

KQ:

**Câu 148.** Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để phương trình  $3x^5 - 15x^3 - 60x + m = 0$  có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

KQ:

**Câu 149.** Cho hàm số bậc bốn  $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ ) có bảng biến thiên như hình bên dưới. Phương trình  $f(1 - 2f(x)) = f(c)$  có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt? KQ:

|      |           |      |     |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$ | $-$       |
| $y$  | $-\infty$ | $2$  | $1$ | $2$ | $-\infty$ |

## DẠNG 6

### Tương giao của hai đồ thị (liên quan đến tọa độ giao điểm)

#### ☑ Số giao điểm của hai đồ thị

- Muốn tìm số giao điểm giữa đồ thị hàm  $y = f(x)$  và đường thẳng  $y = a$  ta chỉ việc vẽ đường thẳng  $y = a$  (là đường thẳng song song với trục  $Ox$  và đi qua điểm có tọa độ  $(0; a)$ ) và xác định số giao điểm.
- Chú ý: Phương trình của trục hoành (hay trục  $Ox$ ) là  $y = 0$ .
- Cho hai hàm số  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$ , khi đó số giao điểm giữa hai đồ thị hàm số trên bằng số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm  $f(x) = g(x)$ .
- Trường hợp đề cho bảng biến thiên của hàm  $y = f(x)$ , để biểu diễn đường  $y = a$  ta vẽ một đường ngang sao cho hợp lý với đề bài.

#### ☑ Tìm giao điểm của hai đồ thị

- Dựa vào đồ thị để tìm tọa độ giao điểm.
- Tìm nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm, ta được hoành độ của giao điểm sau đó thay vào hàm số để tìm tung độ.
- Muốn tìm nghiệm của phương trình  $f(u(x)) = a$ , ta đi giải phương trình  $u(x) = x_0$  (trong đó  $x_0$  là nghiệm của phương trình  $f(x) = a$ ).

## 1 Ví dụ mẫu

**Ví dụ 51.** Tìm giao điểm của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x^2 + 1}{x - 1}$  với đường thẳng  $y = 5x - 1$ .

**Ví dụ 52.** Cho hàm số  $y = \frac{x - 1}{x - 2}$  có đồ thị  $(C)$ . Tìm số giao điểm của  $(C)$  và trục hoành.

**Ví dụ 53.** Đồ thị của hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 2$  và đồ thị của hàm số  $y = -x^2 + 4$  có tất cả bao nhiêu điểm chung?

**Ví dụ 54.** Tìm tọa độ giao điểm (nếu có) của hai đồ thị hàm số  $y = 3x + 4$  và  $y = x^3 + 2x + 4$ .

**Ví dụ 55.** Gọi  $A, B$  là giao điểm của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x - 1}{x + 2}$  với đường thẳng  $y = x - 2$ . Tính độ dài  $AB$ .

**Ví dụ 56.** Gọi  $M, N$  là giao điểm của đường thẳng  $(d): y = 4x - 4$  và đường cong  $(C): y = \frac{2x^2 + 4}{x - 1}$ . Tìm hoành độ trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $MN$ .

**Ví dụ 57.** Cho hàm số  $y = \frac{2x + 1}{x + 1}$  có đồ thị  $(C)$  và đường thẳng  $d: y = x + m$ . Tìm giá trị của tham số  $m$  để  $d$  cắt  $(C)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho  $AB = \sqrt{10}$ .

**Ví dụ 58.** Cho hàm số  $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$ . Xét tính đúng, sai trong các khẳng định sau

| Phát biểu                                                                                                                                                        | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$ cắt trục $Ox$ tại điểm có hoành độ bằng 1.                                                                           |   |   |
| b) Đường thẳng $y = x - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$ tại hai điểm phân biệt $A, B$ có hoành độ lần lượt $x_A, x_B$ và $x_A + x_B = 5$ .       |   |   |
| c) Không có giá trị nào của $m$ để đường thẳng $y = m$ và đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$ có điểm chung.                                                |   |   |
| d) Có 17 giá trị nguyên của $m$ thuộc đoạn $[-14; 15]$ sao cho đường thẳng $y = mx + 3$ cắt đồ thị của hàm số $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$ tại hai điểm phân biệt. |   |   |

**Ví dụ 59.** Cho hàm số đa thức bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị đi qua các điểm  $A(2; 4), B(3; 9), C(4; 16)$ . Các đường thẳng  $AB, AC, BC$  lại cắt đồ thị tại lần lượt tại các điểm  $D, E, F$  ( $D$  khác  $A$  và  $B$ ;  $E$  khác  $A$  và  $C$ ;  $F$  khác  $B$  và  $C$ ). Biết rằng tổng các hoành độ của  $D, E, F$  bằng 24. Tính  $f(0)$ .

KQ:

**Ví dụ 60.** Cho đường thẳng  $d: y = mx + m + 2$  ( $m$  là tham số) và đường cong  $(C): y = \frac{2x - 1}{x + 1}$ . Biết rằng khi  $m = m_0$  thì  $(C)$  cắt  $d$  tại hai điểm  $A, B$  thỏa mãn độ dài  $AB$  ngắn nhất. Tìm  $m_0$ .

KQ:

## 2 Bài tập tự luận

**Bài 27.** Cho đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$  ( $C$ ). Tìm tọa độ giao điểm của  $(C)$  với các trục tọa độ.

**Bài 28.** Tìm tung độ giao điểm của đồ thị hàm số  $y = -3x + 4$  và đồ thị hàm số  $y = x^3 + 2x + 4$ .



**Bài 29.** Gọi  $A, B$  lần lượt là giao điểm của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x-3}{x+1}$  với các trục  $Ox, Oy$ . Tính diện tích tam giác  $OAB$ .

**Bài 30.** Cho hàm số  $y = \frac{x+1}{x-2}$  có đồ thị  $(C)$  và đường thẳng  $d: y = 2x + m$ . Tìm  $m$  để đường thẳng  $d$  cắt  $(C)$  tại hai điểm phân biệt.

### 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 150.** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đường thẳng  $y = -2x + m$  tiếp xúc với đồ thị hàm số  $y = \frac{x+1}{x-1}$  là

- A.  $m \in \{6; -1\}$ . B.  $m \in \{7; -1\}$ . C.  $m = -1$ . D.  $m = 6$ .

**Câu 151.** Số giao điểm của đường cong  $y = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$  và đường thẳng  $y = 1 - x$  bằng.

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

**Câu 152.** Tọa độ giao điểm của đồ thị các hàm số  $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 2}$  và  $y = x + 1$  là

- A.  $(3; 1)$ . B.  $(-1; 0)$ . C.  $(2; 2)$ . D.  $(2; -3)$ .

**Câu 153.** Số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = (x-1)(x^2 - 3x + 2)$  và trục hoành là

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

**Câu 154.** Đường thẳng  $y = -3x + 1$  cắt đồ thị hàm số  $y = x^3 - 2x^2 - 1$  tại điểm duy nhất có tọa độ  $(x_0; y_0)$ . Chọn câu trả lời **sai** trong các câu trả lời sau đây.

- A.  $y_0 + 3x_0 - 1 = 0$ . B.  $x_0 + y_0 + 2 = 0$ .  
C.  $x_0^3 - 2 = 2x_0^3 - 3x_0$ . D.  $x_0^3 - 2x_0^2 - 1 - y_0 = 0$ .

**Câu 155.** Cho hàm số  $y = x^4 - 4x^2 - 2$  có đồ thị  $(C)$  và đồ thị  $(P): y = 1 - x^2$ . Số giao điểm của  $(P)$  và đồ thị  $(C)$  là

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

**Câu 156.** Số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-1}$  với đường thẳng  $y = 2x + 3$  là

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

**Câu 157.** Tìm  $m$  để đường thẳng  $y = 2mx + m + 1$  cắt đồ thị hàm số  $y = \frac{2x-1}{2x+1}$  tại hai điểm phân biệt.

- A.  $m = 0$ . B.  $m > 1$ . C.  $m < 0$ . D.  $m = 1$ .

**Câu 158.** Cho hàm số  $y = \frac{2x-1}{x-1}$  có đồ thị là  $(C)$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đường thẳng  $d: y = x + m$  cắt đồ thị  $(C)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho  $AB = 4$ .

- A.  $m = 4$ . B.  $\begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$ . C.  $m = -1$ . D.  $\begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \end{cases}$ .

**Câu 159.** Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để đường thẳng  $y = -2x + m$  cắt đồ thị hàm số  $y = \frac{2x}{x+1}$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho diện tích tam giác  $OAB$  bằng  $\sqrt{5}$ .

- A.  $m = 2$  hoặc  $m = -2$ . B.  $m = -2$  hoặc  $m = -2\sqrt{2}$ .  
C.  $m = 2\sqrt{2}$  hoặc  $m = 2$ . D.  $m = 2\sqrt{2}$  hoặc  $m = 2\sqrt{2}$ .

**Câu 160.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + (3m - 1)x + 6m$  có đồ thị là  $(C)$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để  $(C)$  cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2, x_3$  thỏa mãn điều kiện  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2x_3 = 20$ .

A.  $m = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{3}$ .

B.  $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{3}$ .

C.  $m = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{3}$ .

D.  $m = \frac{2 \pm \sqrt{22}}{3}$ .

#### 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 161.** Cho hàm số  $y = \frac{x+3}{x+1}$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                                                | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ .                                                                                      |   |   |
| b) Đường thẳng $d: y = -1$ cắt đồ thị $y = \frac{x+3}{x+1}$ tại 1 điểm.                                                                                  |   |   |
| c) Đường thẳng $d: x = 1$ cắt đồ thị $y = \frac{x+3}{x+1}$ tại điểm có tọa độ $(1;2)$ .                                                                  |   |   |
| d) Biết đường thẳng $d: y = 2x + m$ ( $m$ là tham số) cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt $M$ và $N$ . Khi đó $m \in (3;4)$ . |   |   |

**Câu 162.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 2mx + m}{x-1}$  ( $m$  là tham số). Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                                                                                 | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Với $m = 0$ thì đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2mx + m}{x-1}$ đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ .                                                                                             |   |   |
| b) Với $m = 0$ thì đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2mx + m}{x-1}$ và đồ thị hàm số $y = x^2$ có 2 điểm chung.                                                                              |   |   |
| c) Với $m = 0$ thì đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2mx + m}{x-1}$ và đường thẳng $y = -x + 1$ có điểm chung.                                                                               |   |   |
| d) Biết đường thẳng $y = -m$ ( $m$ là tham số) cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2mx + m}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt, trong đó có 1 điểm có hoành độ dương. Khi đó $m \in (-\infty;0)$ . |   |   |

**Câu 163.** Cho hàm số  $y = x^3 + x^2 + (m+1)x + 1$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                                          | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + (m+1)x + 1$ cắt trục $Oy$ tại điểm có tung độ bằng $-1$ .                                                        |   |   |
| b) Đường thẳng $y = (m+1)x + 1$ và đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + (m+1)x + 1$ có 3 điểm chung.                                                     |   |   |
| c) Đường thẳng $y = 1$ và đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + (m+1)x + 1$ có 4 điểm chung phân biệt.                                                    |   |   |
| d) Với $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right)$ thì đường thẳng $y = 1$ và đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + (m+1)x + 1$ có 3 điểm chung phân biệt. |   |   |

**Câu 164.** Cho hàm số  $y = x^4 - (m-1)x^2 + m^2 - m - 1$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                               | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Với $m = 1$ thì đồ thị hàm số $y = x^4 - (m - 1)x^2 + m^2 - m - 1$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.                              |   |   |
| b) Với $m = 1$ thì đồ thị hàm số $y = x^4 - (m - 1)x^2 + m^2 - m - 1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $-1$ .                     |   |   |
| c) Biết đồ thị hàm số $y = x^4 - (m - 1)x^2 + m^2 - m - 1$ cắt trục hoành tại đúng 3 điểm phân biệt. Khi đó $m$ thuộc khoảng $(2; 3)$ . |   |   |
| d) Với $m \in \left(1; \frac{5}{3}\right)$ thì đồ thị hàm số $y = x^4 - (m - 1)x^2 + m^2 - m - 1$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.  |   |   |

**Câu 165.** Cho hàm số  $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                                               | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$ cắt trục $Ox$ tại 2 điểm phân biệt.                                                                         |   |   |
| b) Có 6 số nguyên dương $m$ sao cho đường thẳng $y = x + m$ và đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$ không có điểm chung.                            |   |   |
| c) Có 8 số nguyên $m$ thuộc $[-7; 7]$ sao cho đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$ tại 2 điểm phân biệt.                |   |   |
| d) Có 5 số nguyên dương $m$ sao cho đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$ tại hai điểm phân biệt $A, B$ và $AB \leq 4$ . |   |   |

## 5

## Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 166.** Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$  với trục  $Ox$ . KQ:

**Câu 167.** Gọi  $S = (-\infty; a) \cup (b; +\infty)$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$  là tập các giá trị của tham số  $m$  sao cho đường thẳng  $y = x + m$  cắt đồ thị hàm số  $y = \frac{x - 3}{x + 1}$  tại hai điểm phân biệt. Tính  $a + b$ . KQ:

**Câu 168.** Tập tất giá trị thực của  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$  ( $C$ ) cắt đường thẳng  $d: y = mx + 3$  tại hai điểm phân biệt là  $S = (-\infty; a) \cup (b; +\infty) \setminus \{0\}$ . Tính  $a + b$ . KQ:

**Câu 169.** Tìm số giao điểm của hai đồ thị hàm số  $f(x) = 2(m + 1)x^3 + 2mx^2 - 2(m + 1)x - 2m$ , ( $m$  là tham số khác  $-\frac{3}{4}$ ) và  $g(x) = -x^4 + x^2$ . KQ:

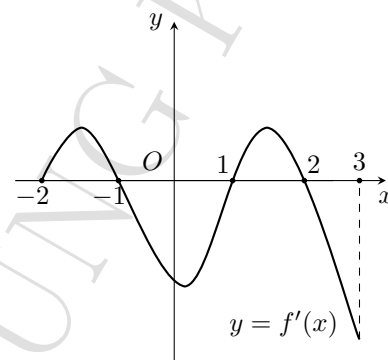
**Câu 170.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2m + 1$  cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt cách đều nhau. KQ:

DẠNG 7 Đồ thị của đạo hàm

1 Ví dụ mẫu

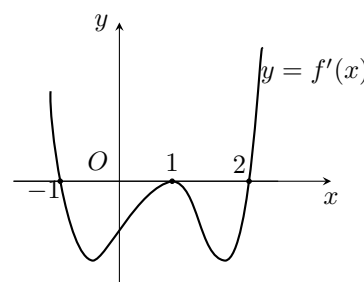
Ví dụ 61.

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $[-2; 3]$  đồng thời hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.



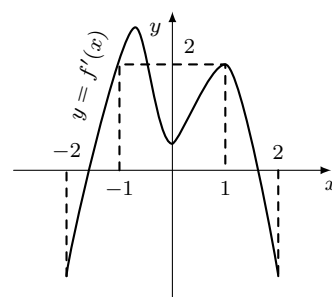
Ví dụ 62.

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ  $x = 1$  và cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ lần lượt là  $x = -1$ ,  $x = 2$  như hình vẽ bên. Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.



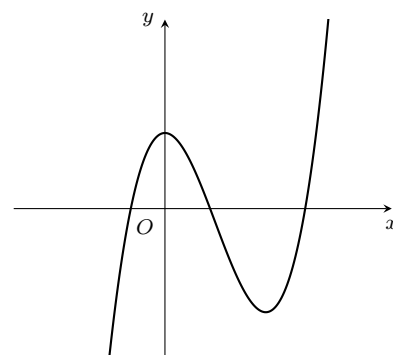
Ví dụ 63.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[-2; 2]$  và  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình bên. Trên khoảng  $(-2; 2)$ , hàm số  $y = f(x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?



Ví dụ 64.

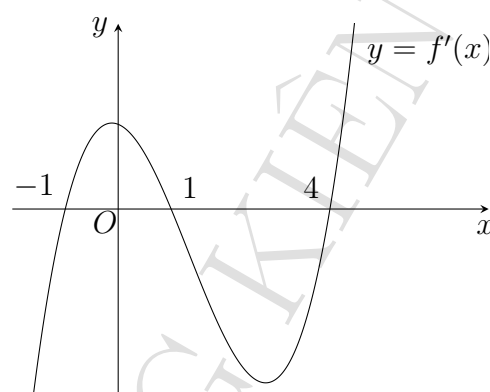
Cho hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  cắt trục hoành tại tối đa bao nhiêu điểm?



Ví dụ 65.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm, liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó

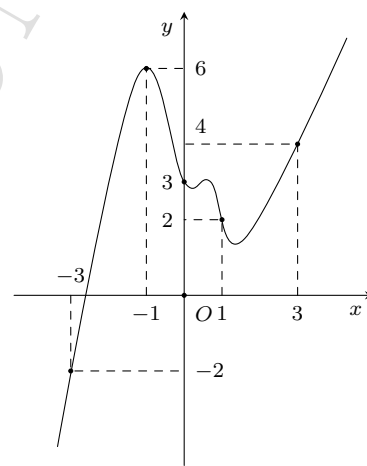
| Phát biểu                                            | Đ | S |
|------------------------------------------------------|---|---|
| a) Trên $(1; 4)$ hàm số $f(x)$ nghịch biến.          |   |   |
| b) Phương trình $f(x) = 0$ có tối đa 3 nghiệm.       |   |   |
| c) GTLN của hàm số $f(x)$ trên $(-1; 4)$ là $f(1)$ . |   |   |
| d) Hàm số $g(x) = f(2 - x)$ có 3 cực trị.            |   |   |



### Ví dụ 66.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm, liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên, biết  $f(-3) = 0$ . Khi đó

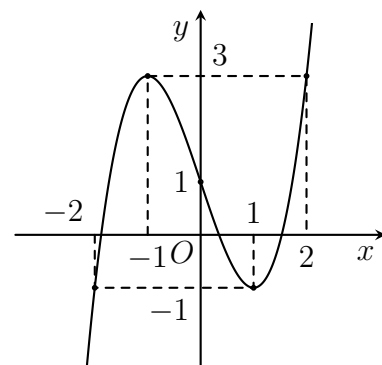
| Phát biểu                                                              | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục $Oy$ tại $M(0; 3)$ .             |   |   |
| b) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 1$ có 1 điểm chung.    |   |   |
| c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -3$ .                                  |   |   |
| d) GTLN của hàm số $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$ trên $[-3; 3]$ là $g(3)$ . |   |   |



### Ví dụ 67.

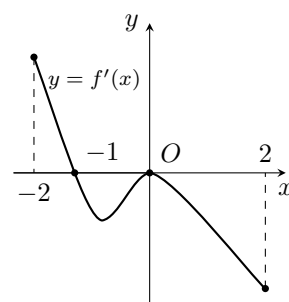
Cho hàm số  $f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số  $g(x) = f(x+1) - \frac{x^2 + 4x + 3}{2}$  đồng biến trên  $(a; b)$  và  $(c; +\infty)$ . Tính  $a + b + c$ .

KQ:



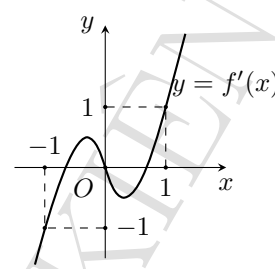
### Ví dụ 68.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[-2; 2]$  và đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-2; 2]$ , biết  $f(-1) = 4$ ,  $f(-2) = -5$ ,  $f(2) = -3$ .



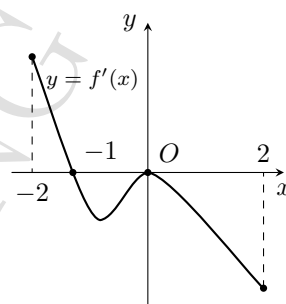
### Ví dụ 69.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  chỉ cắt trục hoành tại ba điểm như hình vẽ bên. Xét tính đơn điệu của hàm số  $g(x) = 2f(x) - x^2$  trên khoảng  $(-1; 1)$ .



**Ví dụ 70.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[-2; 2]$  và đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $g(x) = f^2(x) - 4f(x)$  trên đoạn  $[-2; 2]$ , biết  $f(-1) = 1$ ,  $f(-2) = -1$ ,  $f(2) = -2$ .

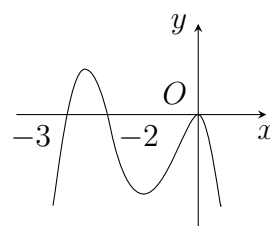


**2**

**Bài tập tự luận**

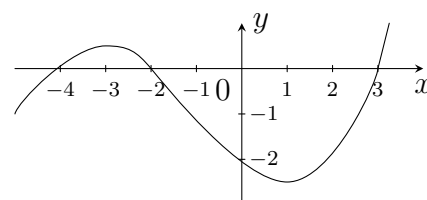
**Bài 31.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x)$ . Biết rằng hàm số  $f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đồng biến trên khoảng nào?



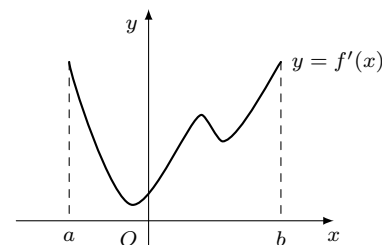
**Bài 32.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị của đạo hàm  $y = f'(x)$  như hình bên. Hàm số nghịch biến trên khoảng nào?



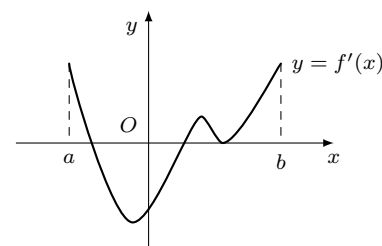
**Bài 33.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $(a, b)$  và  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Trên khoảng  $(a, b)$ , hàm số  $y = f(x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?



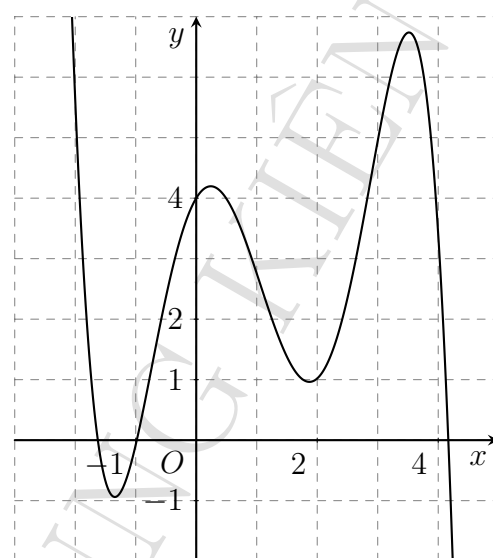
**Bài 34.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $(a, b)$  và  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Trên khoảng  $(a, b)$ , hàm số  $y = f(x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?



**Bài 35.**

Cho hàm số  $f(x)$ , đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  là đường cong trong hình vẽ bên. Xét hàm số  $g(x) = f(2x+1) - 2x^2$  trên đoạn  $[-2; 5]$ . Hãy so sánh các giá trị  $g\left(\frac{3}{2}\right)$ ,  $g\left(\frac{1}{2}\right)$  và  $g(-2)$ .



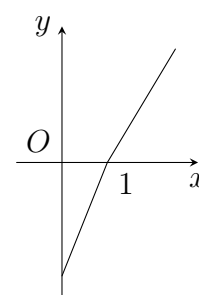
## 3

## Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

## Câu 171.

Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

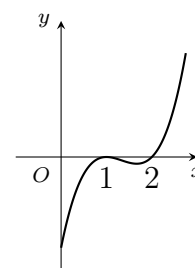
- A. Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên  $(-\infty; 1)$ .
- B. Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên  $(-\infty; 1)$  và  $(1; +\infty)$ .
- C. Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên  $(1; +\infty)$ .
- D. Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .



## Câu 172.

Hình bên là đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$ . Hỏi hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

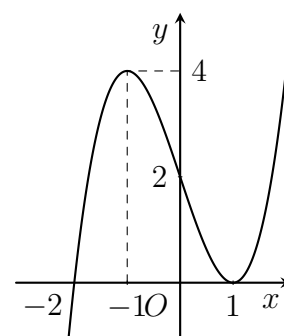
- A.  $(2; +\infty)$ .
- B.  $(1; 2)$ .
- C.  $(0; 1)$ .
- D.  $(0; 1)$  và  $(2; +\infty)$ .



## Câu 173.

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và có đạo hàm  $f'(x)$ . Biết rằng hình vẽ bên là đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số  $y = f(x)$  đạt cực đại tại  $x = -1$ .
- B. Hàm số  $y = f(x)$  đạt cực đại tại  $x = -2$ .
- C. Hàm số  $y = f(x)$  đạt cực tiểu tại  $x = -1$ .
- D. Hàm số  $y = f(x)$  đạt cực tiểu tại  $x = -2$ .

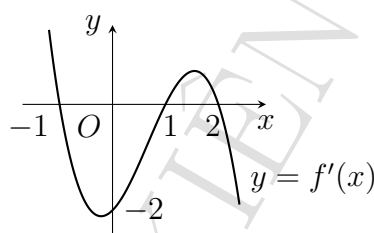


## Câu 174.



Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên và đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên  $(-\infty; 2)$  là

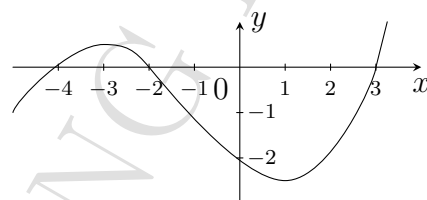
- A.  $f(0)$ . B.  $f(2)$ . C.  $f(-1)$ . D.  $f(1)$ .



**Câu 175.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị của đạo hàm  $y = f'(x)$  như hình bên. Chọn phát biểu đúng khi nói về hàm số  $y = f(x)$ .

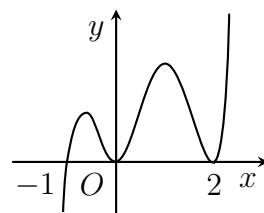
- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-3; 0)$ .  
 B.  $f(0) > f(3)$ .  
 C.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  và  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .  
 D. Hàm số  $y = f(x)$  có hai điểm cực trị.



**Câu 176.**

Hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số  $f'(x)$  trên khoảng  $K$  như hình bên. Hỏi hàm số  $f(x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

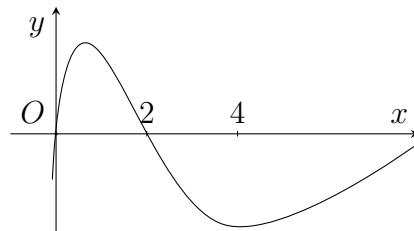
- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.



**Câu 177.**

Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$ . Đồ thị hàm số  $f'(x)$  như hình vẽ bên. Biết rằng  $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $m$  và giá trị lớn nhất  $M$  của  $f(x)$  trên đoạn  $[0; 4]$

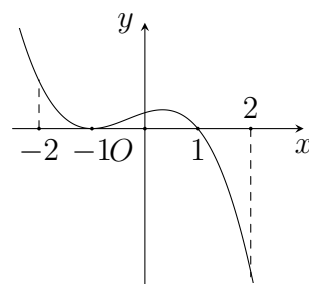
- A.  $m = f(4), M = f(2)$ . B.  $m = f(1), M = f(2)$ .  
 C.  $m = f(4), M = f(1)$ . D.  $m = f(0), M = f(2)$ .



**Câu 178.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $[-2; 2]$ , có đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình bên. Tìm giá trị  $x_0$  để hàm số  $y = f(x)$  đạt giá trị lớn nhất trên  $[-2; 2]$ .

- A.  $x_0 = 1$ . B.  $x_0 = 2$ . C.  $x_0 = -2$ . D.  $x_0 = -1$ .



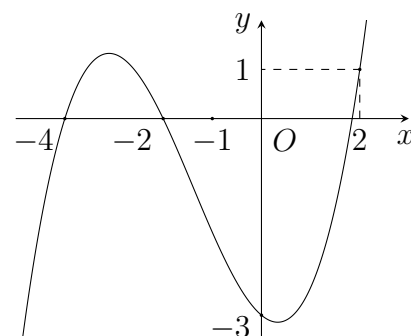
**Câu 179.**

Cho hàm số bậc bốn  $y = f(x)$  có đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Hàm số

$$g(x) = 3f(x) + x^3 - 6x^2 + 9x$$

nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

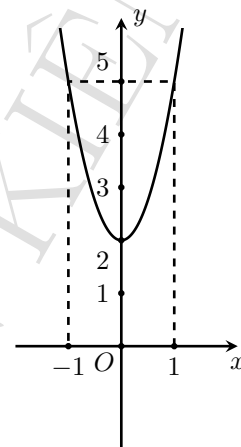
- A.  $(0; 2)$ . B.  $(-1; 1)$ . C.  $(1; +\infty)$ . D.  $(-2; 0)$ .



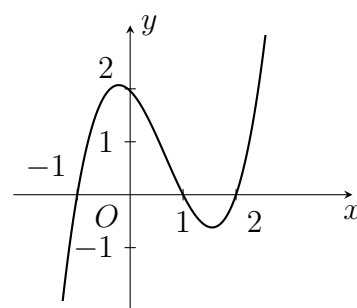


**Câu 180.**

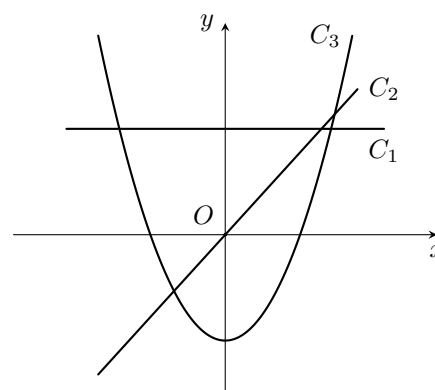
Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $C$ ) với  $a, b, c \in \mathbb{R}$  và  $a \neq 0$ . Biết đồ thị ( $C$ ) đi qua gốc tọa độ và có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  cho bởi hình vẽ bên. Tính giá trị  $f(3) - f(1)$ .

**A.** 28.**B.** 24.**C.** 30.**D.** 26.**Câu 181.**

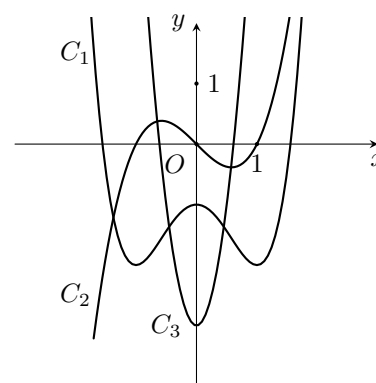
Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$ , hàm số  $y = f'(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số  $g(x) = f(3 - e^x)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây.

**A.**  $(2; 5)$ .**B.**  $(-1; 0)$ .**C.**  $(0; 1)$ .**D.**  $(1; 2)$ .**Câu 182.**

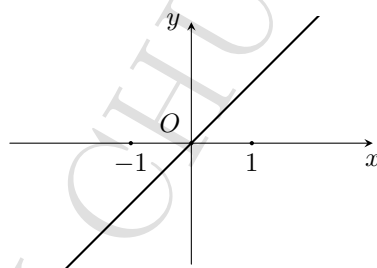
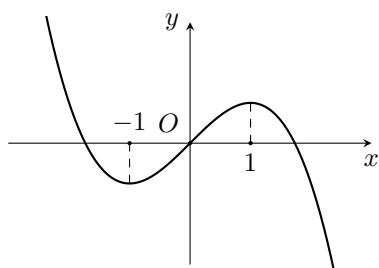
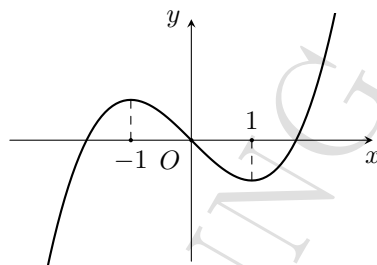
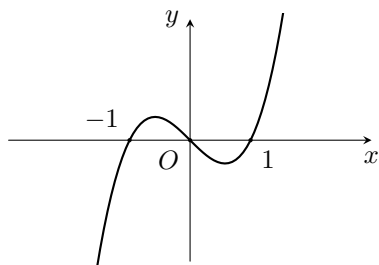
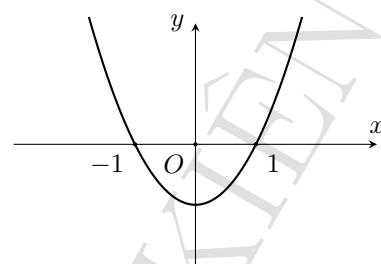
Cho đồ thị của ba hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f'(x)$ ,  $y = f''(x)$  được vẽ mô tả ở hình bên. Hỏi đồ thị các hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f'(x)$  và  $y = f''(x)$  theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

**A.**  $(C_3), (C_2), (C_1)$ .**B.**  $(C_2), (C_1), (C_3)$ .**C.**  $(C_2), (C_3), (C_1)$ .**D.**  $(C_1), (C_3), (C_2)$ .**Câu 183.**

Cho đồ thị của ba hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f'(x)$ ,  $y = f''(x)$  được vẽ mô tả ở hình bên. Hỏi đồ thị các hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f'(x)$  và  $y = f''(x)$  theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

**A.**  $(C_3), (C_2), (C_1)$ .**B.**  $(C_2), (C_1), (C_3)$ .**C.**  $(C_2), (C_3), (C_1)$ .**D.**  $(C_1), (C_2), (C_3)$ .**Câu 184.**

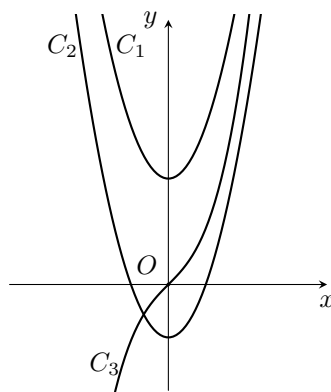
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ , sao cho đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  là parabol có dạng như trong hình bên. Hỏi đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị nào trong bốn đáp án sau?



**Câu 185.**

Cho đồ thị của ba hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f'(x)$ ,  $y = f''(x)$  được vẽ mô tả ở hình bên. Hỏi đồ thị các hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f'(x)$  và  $y = f''(x)$  theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

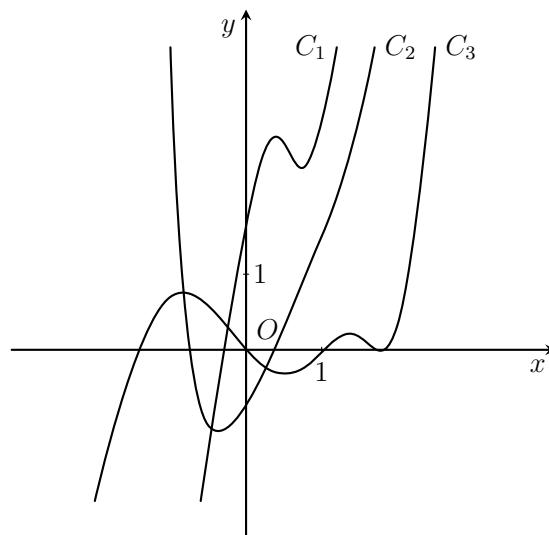
- A.**  $(C_3), (C_2), (C_1)$ . **B.**  $(C_2), (C_1), (C_3)$ .  
**C.**  $(C_2), (C_3), (C_1)$ . **D.**  $(C_1), (C_2), (C_3)$ .



**Câu 186.**

Cho đồ thị của ba hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f'(x)$ ,  $y = f''(x)$  được vẽ mô tả ở hình bên. Hỏi đồ thị các hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f'(x)$  và  $y = f''(x)$  theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

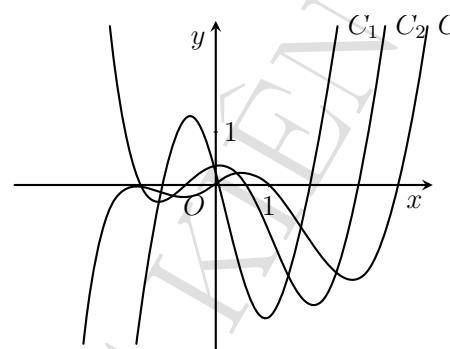
- A.**  $(C_1), (C_2), (C_3)$ . **B.**  $(C_2), (C_1), (C_3)$ .  
**C.**  $(C_2), (C_3), (C_1)$ . **D.**  $(C_3), (C_2), (C_1)$ .



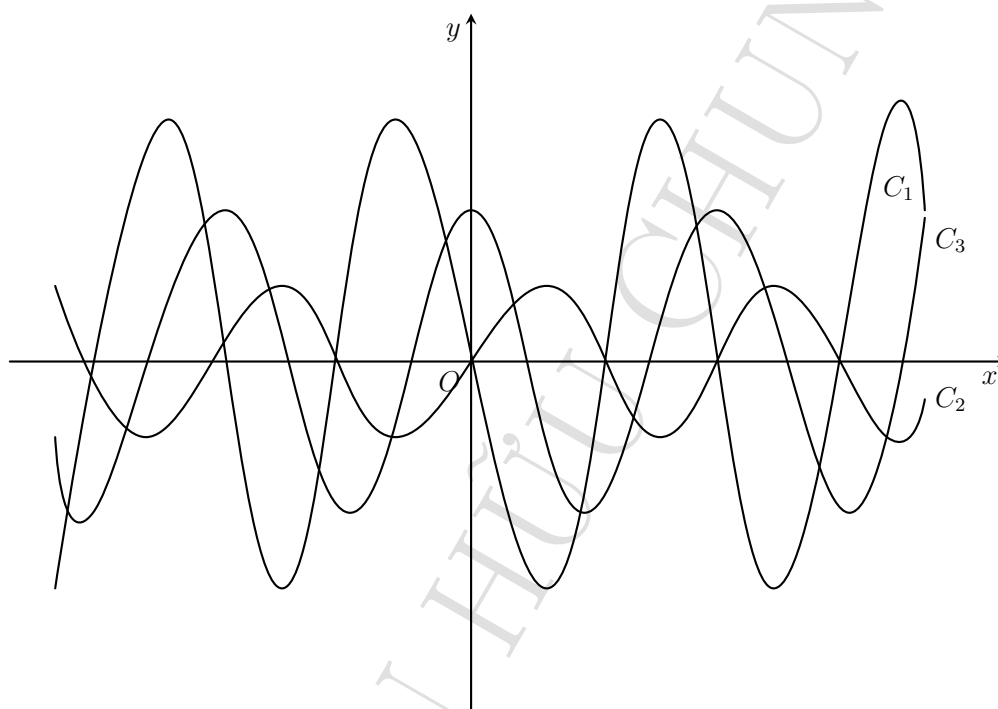
**Câu 187.**

Cho đồ thị của ba hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f'(x)$ ,  $y = f''(x)$  được vẽ mô tả ở hình bên. Hỏi đồ thị các hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f'(x)$  và  $y = f''(x)$  theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

- A.  $(C_2), (C_1), (C_3)$ .  
 B.  $(C_3), (C_2), (C_1)$ .  
 C.  $(C_2), (C_3), (C_1)$ .  
 D.  $(C_1), (C_2), (C_3)$ .



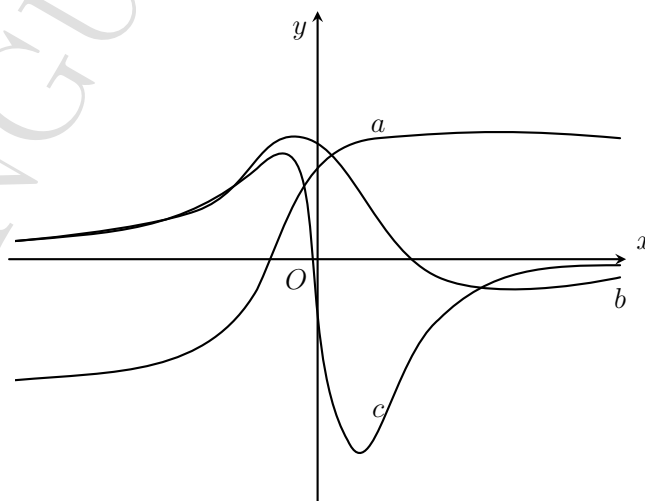
**Câu 188.** Cho đồ thị của ba hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f'(x)$ ,  $y = f''(x)$  được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f'(x)$  và  $y = f''(x)$  theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

- A.  $(C_1), (C_2), (C_3)$ .  
 B.  $(C_2), (C_3), (C_2)$ .  
 C.  $(C_3), (C_2), (C_1)$ .  
 D.  $(C_2), (C_3), (C_1)$ .

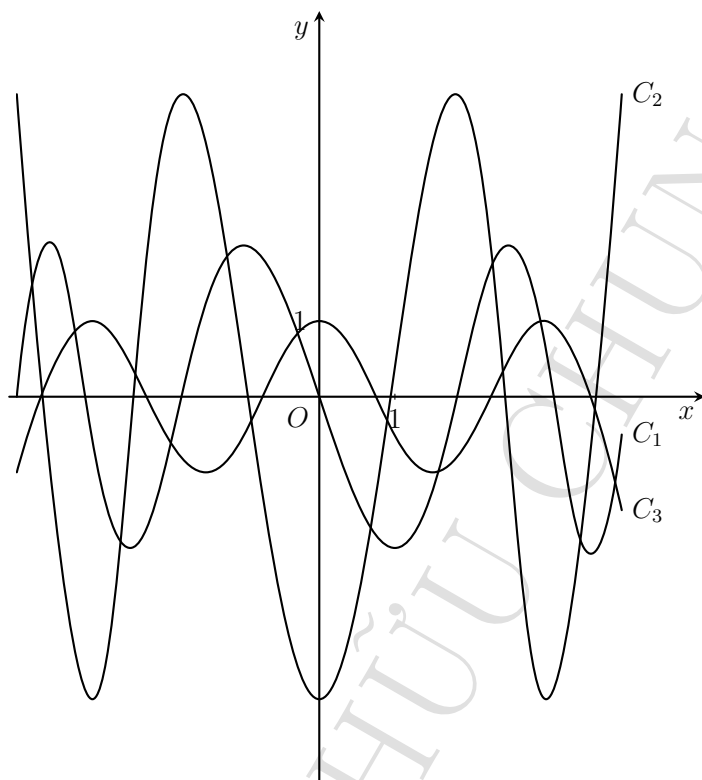
**Câu 189.** Cho đồ thị của ba hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f'(x)$ ,  $y = f''(x)$  được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f'(x)$  và  $y = f''(x)$  theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

- A.**  $a, b, c$ . **B.**  $b, a, c$ . **C.**  $a, c, b$ . **D.**  $b, c, a$ .

**Câu 190.** Cho đồ thị của ba hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f'(x)$ ,  $y = f''(x)$  được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



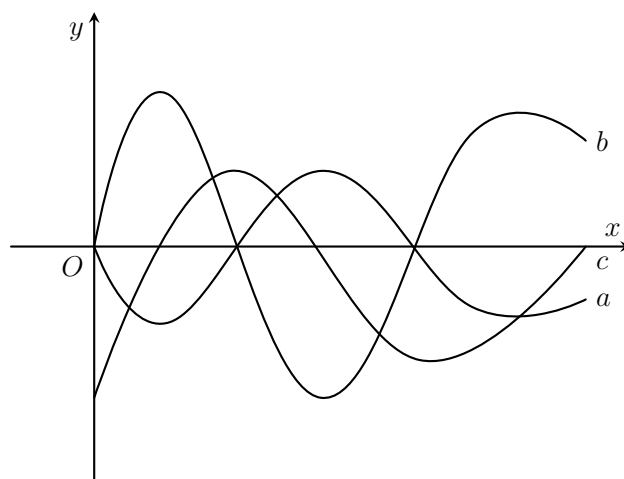
Hỏi đồ thị các hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f'(x)$  và  $y = f''(x)$  theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

- A.**  $(C_1), (C_2), (C_3)$ . **B.**  $(C_2), (C_1), (C_3)$ . **C.**  $(C_3), (C_2), (C_1)$ . **D.**  $(C_3), (C_1), (C_2)$ .

**Câu 191.**

Cho đồ thị của ba hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f'(x)$ ,  $y = f''(x)$  được vẽ mô tả ở hình bên. Hỏi đồ thị các hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f'(x)$  và  $y = f''(x)$  theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

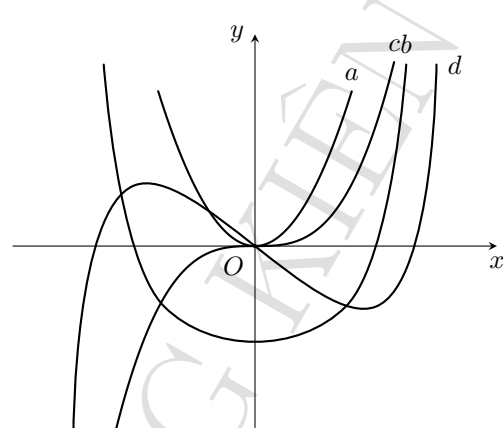
- A.**  $a, b, c$ . **B.**  $b, a, c$ . **C.**  $a, c, b$ . **D.**  $b, c, a$ .



**Câu 192.**

Cho đồ thị của bốn hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f'(x)$ ,  $y = f''(x)$ ,  $y = f'''(x)$  được vẽ mô tả ở hình bên. Hỏi đồ thị các hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f'(x)$ ,  $y = f''(x)$  và  $y = f'''(x)$  theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

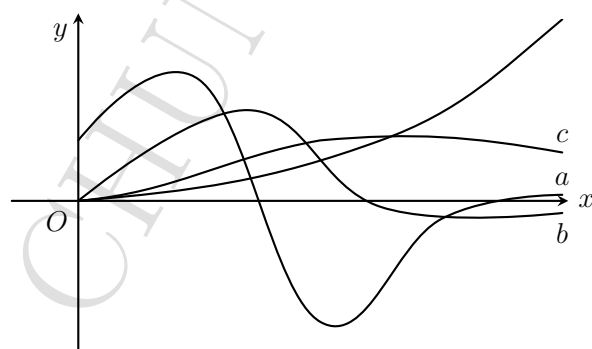
- A.**  $c, d, b, a.$     **B.**  $d, c, b, a.$     **C.**  $d, c, a, b.$     **D.**  $d, b, c, a.$



**Câu 193.**

Cho đồ thị của bốn hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f'(x)$ ,  $y = f''(x)$ ,  $y = f'''(x)$  được vẽ mô tả ở hình bên. Hỏi đồ thị các hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f'(x)$ ,  $y = f''(x)$ ,  $y = f'''(x)$  theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

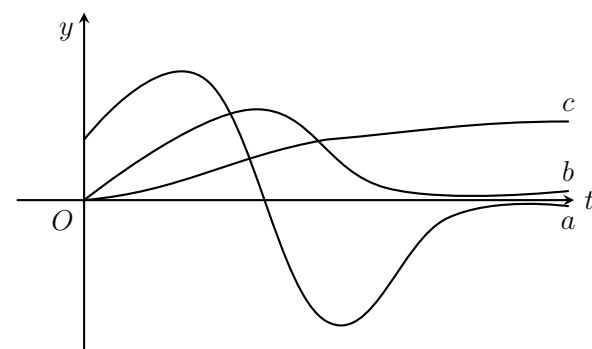
- A.**  $b, c, a.$     **B.**  $c, a, b.$     **C.**  $a, c, b.$     **D.**  $c, b, a.$



**Câu 194.**

Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường, hàm vận tốc và hàm gia tốc theo thời gian  $t$  được mô tả ở hình bên. Hỏi đồ thị các hàm số trên theo thứ tự là các đường cong nào?

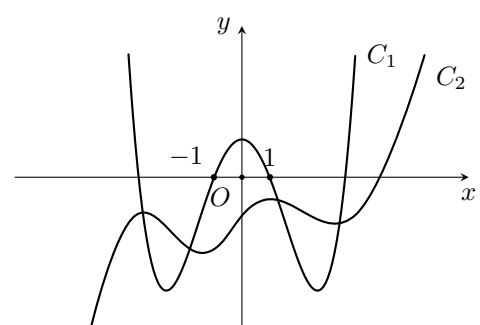
- A.**  $b, c, a.$     **B.**  $c, a, b.$     **C.**  $a, c, b.$     **D.**  $c, b, a.$



**Câu 195.**

Cho đồ thị của hàm số  $f(x)$  và  $f'(x)$  như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

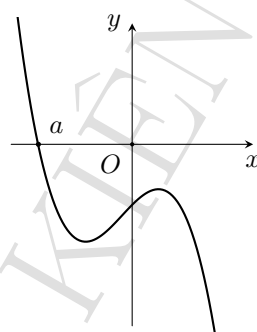
- A.**  $f'(-1) < f''(1).$     **B.**  $f'(-1) > f''(1).$   
**C.**  $f'(-1) = f''(1).$     **D.**  $f''(0) \neq f''(1).$



**Câu 196.**

Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ , đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như trong hình vẽ bên. Biết  $f(a) < 0$ , hỏi phương trình  $f(x) = 0$  có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

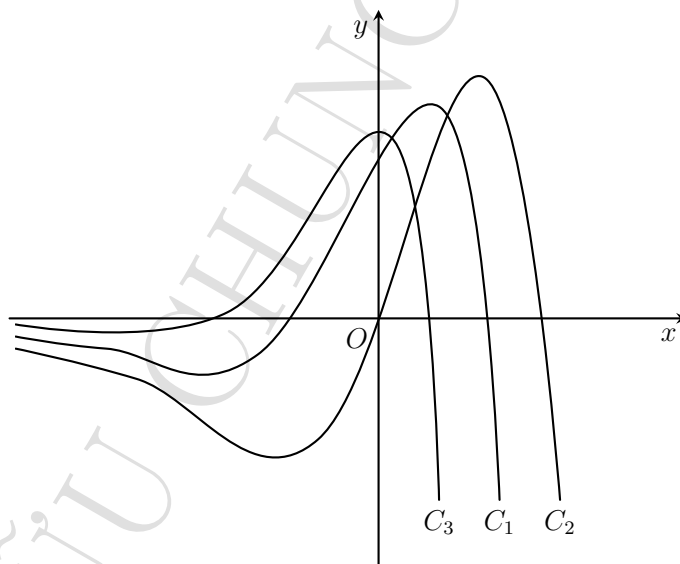
- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.



**Câu 197.**

Cho đồ thị của ba hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f'(x)$ ,  $y = f''(x)$  được vẽ mô tả ở hình bên. Hỏi đồ thị các hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f'(x)$  và  $y = f''(x)$  theo thứ tự lần lượt tương ứng với đường cong nào?

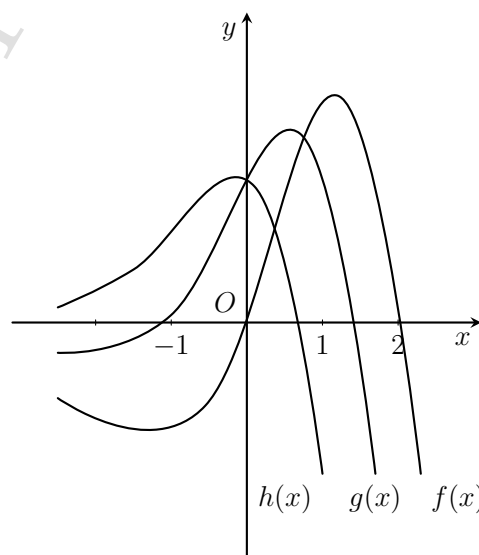
- A.  $(C_3)$ ,  $(C_2)$ ,  $(C_1)$ . B.  $(C_2)$ ,  $(C_1)$ ,  $(C_3)$ .  
C.  $(C_2)$ ,  $(C_3)$ ,  $(C_1)$ . D.  $(C_1)$ ,  $(C_3)$ ,  $(C_2)$ .



**Câu 198.**

Cho 3 hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = g(x) = f'(x)$ ,  $y = h(x) = g'(x)$  có đồ thị là 3 đường cong trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

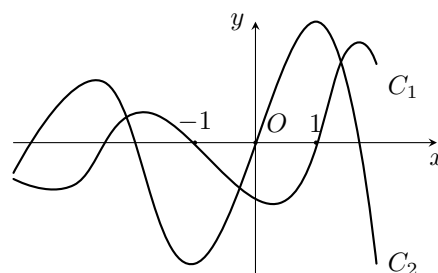
- A.  $g(-1) > h(-1) > f(-1)$ .  
B.  $h(-1) > g(-1) > f(-1)$ .  
C.  $h(-1) > f(-1) > g(-1)$ .  
D.  $f(-1) > g(-1) > h(-1)$ .



**Câu 199.**

Cho đồ thị của hàm số  $f(x)$  và  $f'(x)$  như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

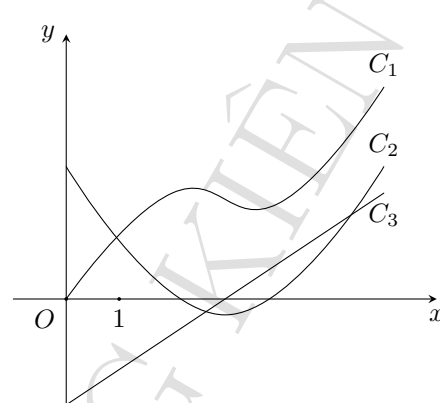
- A.  $f'(-1) < f''(1)$ . B.  $f'(-1) > f''(1)$ .  
C.  $f'(-1) = f''(1)$ . D.  $f''(-1) = 2f''(1)$ .



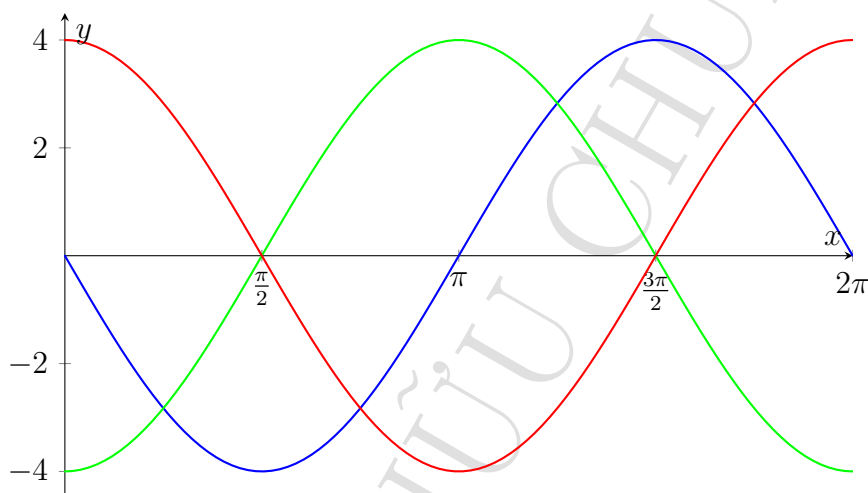
**Câu 200.**

Cho 3 hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = g(x) = f'(x)$ ,  $y = h(x) = g'(x)$  có đồ thị là 3 đường cong trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $g(1) > h(1) > f(1)$ .      B.  $h(1) > g(1) > f(1)$ .  
C.  $h(1) > f(1) > g(1)$ .      D.  $f(1) > g(1) > h(1)$ .

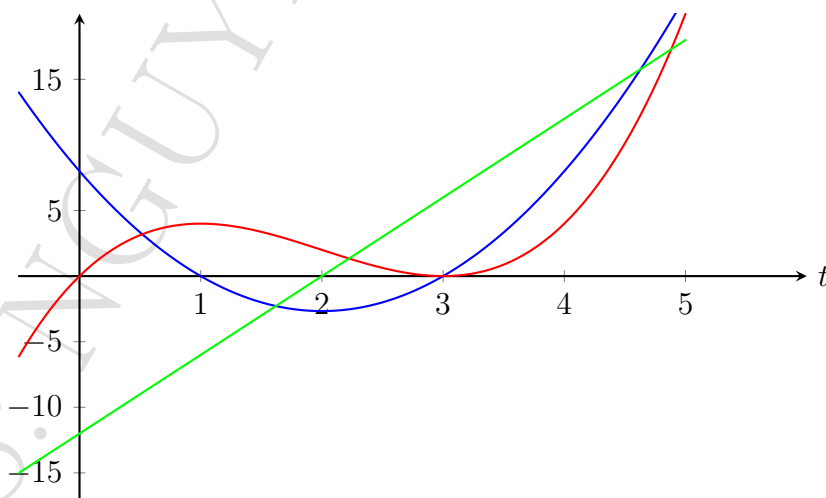


**Câu 201.** Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường  $s(t)$ , hàm vận tốc  $v(t)$  và hàm gia tốc  $a(t)$  theo thời gian  $t$  được mô tả ở hình dưới đây. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?



- A.  $s(\pi) < v(\pi) < a(\pi)$ .      B.  $a(\pi) < v(\pi) < s(\pi)$ .  
C.  $s(\pi) < a(\pi) < v(\pi)$ .      D.  $v(\pi) < a(\pi) < s(\pi)$ .

**Câu 202.** Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường  $s(t)$ , hàm vận tốc  $v(t)$  và hàm gia tốc  $a(t)$  theo thời gian  $t$  được mô tả ở hình dưới đây. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

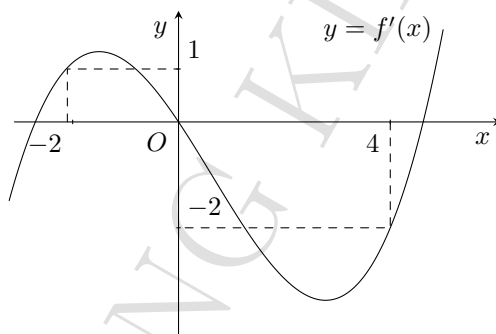


- A.  $s(4) < v(4) < a(4)$ .      B.  $a(4) < v(4) < s(4)$ .      C.  $s(4) < a(4) < v(4)$ .      D.  $v(4) < a(4) < s(4)$ .

# 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

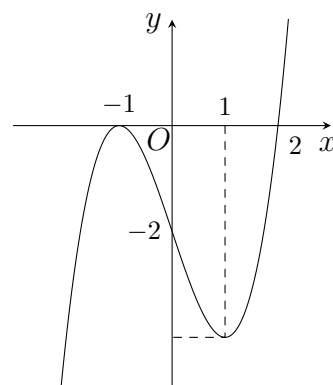
**Câu 203.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ, biết  $f(0) = 0$  và  $f(1) \neq 0$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                            | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Điểm $O(0; 0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(1 - x)$ .                               |   |   |
| b) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 1$ có 3 điểm chung.                  |   |   |
| c) Hàm số $y = f(x)$ không có GTNN trên $(0; +\infty)$ .                             |   |   |
| d) Trên $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ hàm số $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x$ đồng biến. |   |   |



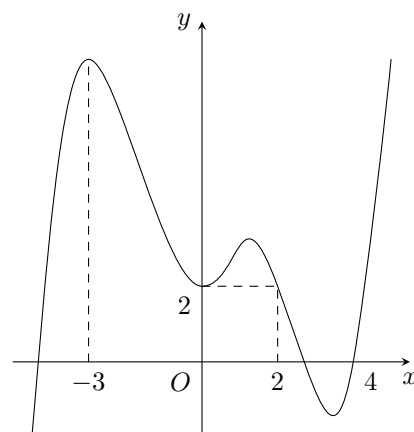
**Câu 204.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị  $y = f'(x)$  là đường cong trong hình. Khi đó

| Phát biểu                                                 | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------|---|---|
| a) Phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.        |   |   |
| b) Hàm số $f(x)$ có 2 cực trị.                            |   |   |
| c) Hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2$ .       |   |   |
| d) Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên $(0; 2)$ . |   |   |



**Câu 205.** Cho hàm số  $f(x)$ , đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  là đường cong như hình vẽ. Khi đó

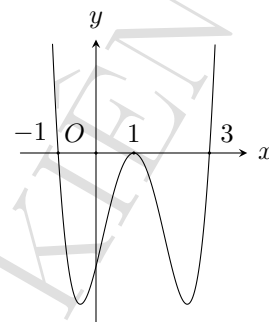
| Phát biểu                                                                                                     | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Phương trình $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.                                                            |   |   |
| b) Phương trình $f(x) = m + 2025$ có tối đa 4 nghiệm phân biệt.                                               |   |   |
| c) Hàm số $f(x)$ có 2 cực đại và 1 cực tiểu.                                                                  |   |   |
| d) Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - 4x$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$ bằng $f(2) - 4$ . |   |   |



**Câu 206.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Khi đó

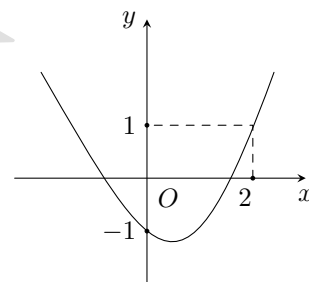


| Phát biểu                                                             | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục $Oy$ tại 1 điểm có tung độ âm.      |   |   |
| b) Hàm số $f(x)$ có 2 cực tiểu và 1 cực đại.                          |   |   |
| c) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $(-\infty; 3)$ là $f(3)$ . |   |   |
| d) Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f( x^3  + 1)$ là 3.             |   |   |



**Câu 207.** Cho hàm số  $y = f(x)$ , hàm số  $y = f'(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ. Khi đó

| Phát biểu                                                                                                | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục $Oy$ tại 1 điểm..                                                      |   |   |
| b) Hàm số $f(x)$ chỉ có 1 cực đại không có cực tiểu.                                                     |   |   |
| c) Hàm số $f(x)$ không có GTLN và GTNN trên $(-\infty; +\infty)$ .                                       |   |   |
| d) Bất phương trình $f(x) < x + m$ ( $m$ là tham số) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi $m < f(0)$ . |   |   |

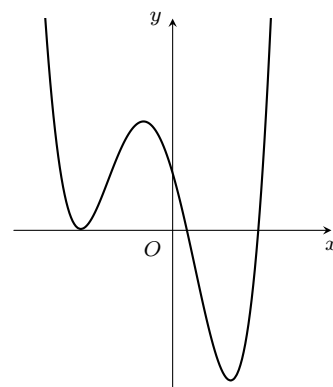


## 5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 208.**

Cho hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số  $y = f(x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

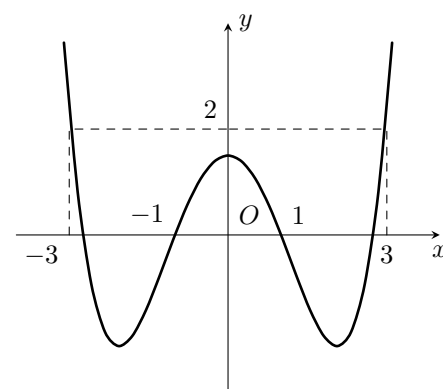
KQ:



**Câu 209.**

Cho hàm số  $y = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$  với  $a, b, c, d, e, f$  là các số thực, đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Hàm số  $y = f(1 - 2x) - 2x^2 + 1$  đồng biến trên  $(a; b)$ . Tính  $a + b$ .

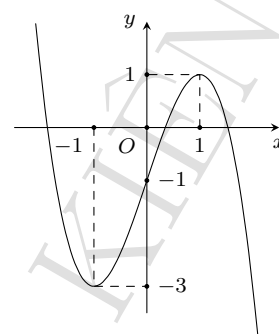
KQ:



**Câu 210.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ . Biết rằng hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số  $y = f(2x - 3)$  cắt đường thẳng  $y = -3x + 2$  tại nhiều nhất bao nhiêu điểm?

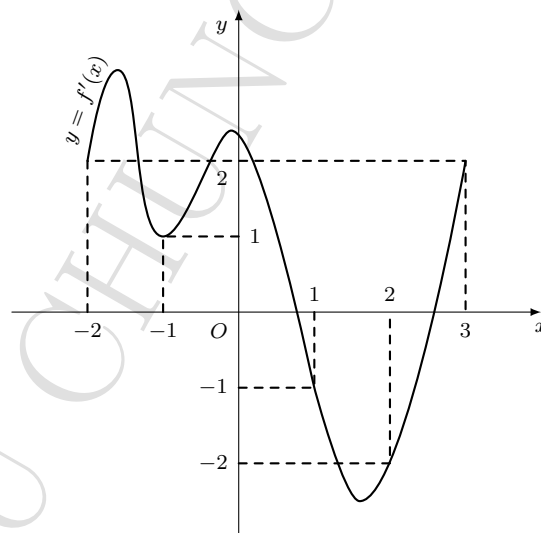
KQ:



**Câu 211.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[-2; 3]$  và  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Tổng số cực đại và cực tiểu của hàm số  $h(x) = f(x) + \frac{x^2}{4} - x$  trên khoảng  $(-2; 3)$  bằng bao nhiêu?

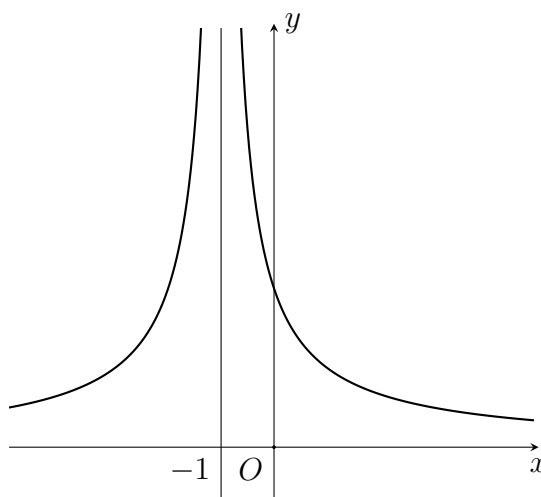
KQ:



**Câu 212.**

Cho hàm số  $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$  (với  $a, b, c, d$  là các số thực) có đồ thị hàm số  $f'(x)$  như hình vẽ. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-3; -2]$  bằng 7. Tính giá trị  $f(2)$ ?

KQ:



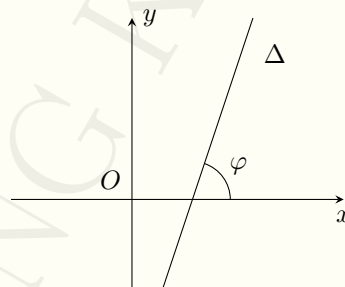
## DẠNG 8

## Tiếp tuyến của đồ thị

- ☑ Đường thẳng đi qua điểm  $M(x_0; y_0)$  có hệ số góc  $k$  có phương trình là  $y = k(x - x_0) + y_0$ .

Lưu ý:

- ☑  $k = \tan \varphi$ , với  $\varphi$  là góc hợp bởi đường thẳng  $\Delta$  với chiều dương của trục  $Ox$  và  $\varphi \neq 90^\circ$ .
- ☑ Cho hai đường thẳng  $\Delta_1: y = k_1x + m_1$  và  $\Delta_2: y = k_2x + m_2$ .
  - $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$  và  $m_1 \neq m_2$ .
  - $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$ .

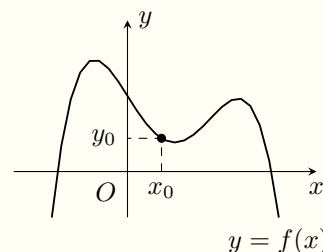


- ☑ Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm  $M(x_0; y_0)$ :

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị  $(C)$ . Tiếp tuyến  $d$  của đồ thị hàm số tại điểm  $M(x_0; y_0)$  có phương trình là  $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$  (lúc này  $k = f'(x_0)$ ).

Trong đó

- ☑  $x_0$  gọi là hoành độ tiếp điểm;
- ☑  $y_0$  là tung độ tiếp điểm, với  $y_0 = f(x_0)$ ;
- ☑  $f'(x_0)$  gọi là hệ số góc của tiếp tuyến.



## 1

## Ví dụ mẫu

**Ví dụ 71.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 1$  tại điểm  $A(3; 1)$ .

**Ví dụ 72.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 2x + 5$  tại điểm có hoành độ  $x_0 = 1$  có phương trình là

**Ví dụ 73.** Cho hàm số  $y = x^3 - x - 1$  có đồ thị  $(C)$ . Viết phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  tại giao điểm của  $(C)$  với trục tung.

**Ví dụ 74.** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = \frac{x+1}{x-5}$  tại điểm  $A(-1; 0)$  có hệ số góc bằng

- A.  $\frac{1}{6}$ .      B.  $-\frac{1}{6}$ .      C.  $\frac{6}{25}$ .      D.  $-\frac{6}{25}$ .

**Ví dụ 75.** Hàm số  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$  có đồ thị  $(C)$ . Viết phương trình tiếp tuyến với  $(C)$  tại điểm  $A$  có hoành độ  $x_A = 1$ .

- A.  $y = -3x + 5$ .      B.  $y = -5x + 3$ .      C.  $y = 3x - 5$ .      D.  $y = 5x - 3$ .

**Ví dụ 76.** Cho hàm số  $y = x^3 - x - 1$  có đồ thị  $(C)$ . Phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  tại giao điểm của  $(C)$  với trục tung là

- A.  $y = 2x - 1$ .      B.  $y = 2x + 2$ .      C.  $y = -x - 1$ .      D.  $y = -x + 1$ .

**Ví dụ 77.** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{x+1}{x-2}$  có đồ thị  $(C)$ . Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị  $(C)$  tại điểm  $M$  thuộc đồ thị có hoành độ  $x = 3$ .

A.  $y = 3x + 5$ .

B.  $y = -3x + 13$ .

C.  $y = 3x + 13$ .

D.  $y = 3x - 5$ .

**Ví dụ 78.** Cho hàm số  $y = f(x) = 2x^3$  có đồ thị  $(C)$  và điểm  $M$  thuộc  $(C)$  có hoành độ  $x_0 = -1$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hệ số góc của tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm $M$ bằng 6.                               |   |   |
| b) Tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ đi qua điểm $A(0; 4)$ .                                  |   |   |
| c) Tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ cắt đường thẳng $d: y = 3x$ tại điểm có hoành độ bằng 4. |   |   |
| d) Tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = -\frac{1}{6}x$ .  |   |   |

**Ví dụ 79.** Cho hàm số  $y = x^2 + 3x + 1$  có đồ thị  $(C)$ . Viết phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  tại giao điểm của  $(C)$  với trục tung. Khi đó

| Phát biểu                                                               | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3.                                     |   |   |
| b) Tiếp tuyến đi qua điểm $A(1; 3)$ .                                   |   |   |
| c) Tiếp tuyến cắt đường thẳng $y = 2x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng 0. |   |   |
| d) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + 1$ .       |   |   |

**Ví dụ 80.** Cho hàm số  $y = \frac{ax+b}{x-1}$  có đồ thị cắt trục tung tại điểm  $A(0; 1)$ , tiếp tuyến tại  $A$  có hệ số góc bằng  $-3$ . Khi đó, giá trị  $a + b$  có giá trị bằng bao nhiêu? KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

## 2 Bài tập tự luận

**Bài 36.** Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong  $y = x^3 + 3x^2 - 2$  tại điểm có hoành độ  $x_0 = 1$ .

**Bài 37.** Gọi  $M$  là giao điểm của đồ thị hàm số  $y = \frac{x+1}{x-2}$  với trục hoành. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số trên tại điểm  $M$ .

**Bài 38.** Cho hàm số  $y = \frac{x+2}{x+1}$  có đồ thị  $(C)$ . Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại giao điểm của đồ thị  $(C)$  với trục tung.

**Bài 39.** Tìm điểm  $M$  có hoành độ âm trên đồ thị  $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$  sao cho tiếp tuyến tại  $M$  vuông góc với đường thẳng  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ .

**Bài 40.** Cho hàm số  $y = \frac{x+2}{2x+3}$ , có đồ thị  $(H)$ . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $(H)$ , biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt  $A, B$  và tam giác  $OAB$  cân tại gốc tọa độ  $O$ .

## 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 213.** Cho hàm số  $y = x^4 - 3x^2 + 2023$  có đồ thị  $(C)$ . Hệ số góc của tiếp tuyến của  $(C)$  tại điểm có hoành độ bằng  $-1$  là

- A. -2. B. 10. C. 2. D. -10.

**Câu 214.** Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = \frac{x}{x+1}$  tại  $x = 1$  bằng

- A.  $k = \frac{1}{4}$ . B.  $k = 2$ . C.  $k = -1$ . D.  $k = -\frac{1}{4}$ .

**Câu 215.** Phương trình tiếp tuyến của đường cong  $y = x^3 + 3x^2 - 2$  tại điểm có hoành độ  $x_0 = 1$  là

- A.  $y = 9x - 7$ . B.  $y = 9x + 7$ . C.  $y = -9x - 7$ . D.  $y = -9x + 7$ .

**Câu 216.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = -x^3 + 2x - 1$  tại điểm  $M(1; 0)$  là

- A.  $y = x + 1$ . B.  $y = x - 1$ . C.  $y = -x + 1$ . D.  $y = -x - 1$ .

**Câu 217.** Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số  $y = \frac{3x+1}{x-2}$  tại điểm  $M(3; 10)$  là

- A.  $y = -7x - 31$ . B.  $y = 7x - 31$ . C.  $y = 7x + 31$ . D.  $y = -7x + 31$ .

**Câu 218.** Cho hàm số  $y = \frac{x+2}{x+1}$  có đồ thị  $(C)$ . Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại giao điểm của đồ thị  $(C)$  với trục tung là

- A.  $y = -x - 2$ . B.  $y = x - 2$ . C.  $y = -x + 2$ . D.  $y = -x + 1$ .

**Câu 219.** Cho hàm số  $y = \frac{x+2}{x+1}$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $d$  là khoảng cách từ giao điểm hai tiệm cận của đồ thị  $(C)$  đến một tiếp tuyến của  $(C)$ . Giá trị lớn nhất của  $d$  có thể đạt được là

- A.  $\sqrt{3}$ . B.  $\sqrt{2}$ . C.  $3\sqrt{3}$ . D.  $2\sqrt{2}$ .

**Câu 220.** Tìm điểm  $M$  có hoành độ âm trên đồ thị  $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$  sao cho tiếp tuyến tại  $M$  vuông góc với đường thẳng  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ .

- A.  $M\left(2; \frac{4}{3}\right)$ . B.  $M(-2; -4)$ . C.  $M\left(-1; \frac{4}{3}\right)$ . D.  $M(-2; 0)$ .

**Câu 221.** Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = x^3 - x^2 + x + 1$  song song với đường thẳng  $y = 6x + 4$ ?

- A. 2. B. 4. C. 1. D. 3.

**Câu 222.** Trên đồ thị của hàm số  $y = \frac{3x}{x-2}$  có điểm  $M(x_0; y_0)$  (với  $x_0 < 0$ ) sao cho tiếp tuyến tại điểm đó cùng với các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng  $\frac{3}{4}$ . Khi đó  $x_0 + 2y_0$  bằng

- A.  $\frac{1}{2}$ . B. -1. C.  $-\frac{1}{2}$ . D. 1.

## 4

## Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 223.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = \frac{4}{x-1}$  tại điểm có hoành độ  $x_0 = -1$ . Khi đó

| Phát biểu                              | Đ | S |
|----------------------------------------|---|---|
| a) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 1.    |   |   |
| b) Tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1; 2)$ . |   |   |

| Phát biểu                                                                             | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| c) Tiếp tuyến cắt đường thẳng $y = 2x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng $-\frac{4}{3}$ . |   |   |
| d) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = x + 1$ .                                 |   |   |

**Câu 224.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = \frac{x+9}{x+1}$  biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng  $d: x - 2y + 2 = 0$ . Khi đó

| Phát biểu                                   | Đ | S |
|---------------------------------------------|---|---|
| a) Có một phương trình tiếp tuyến thỏa mãn. |   |   |
| b) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-2$ .     |   |   |
| c) Tiếp tuyến đi qua điểm $A(1; 5)$ .       |   |   |
| d) Tiếp tuyến đi qua điểm $B(1; -7)$ .      |   |   |

**Câu 225.** Cho hàm số  $y = x^4 - 4x^2 + 3\sqrt{x} + 2 - \frac{1}{x}$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                                                                                            | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $y'(1) = -\frac{3}{2}$ .                                                                                                                                                                          |   |   |
| b) Đồ thị của hàm số $y'$ đi qua điểm $A\left(1; \frac{3}{2}\right)$ .                                                                                                                               |   |   |
| c) $y'(4) = \frac{3597}{16}$ .                                                                                                                                                                       |   |   |
| d) Điểm $M$ thuộc đồ thị $(C)$ của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3\sqrt{x} + 2 - \frac{1}{x}$ có hoành độ $x_0 = 1$ . Khi đó, tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ vuông góc với đường thẳng $y = \frac{2}{3}x$ . |   |   |

**Câu 226.** Cho hàm số  $y = \frac{x-3}{2x+1}$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                                                                              | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $y'(0) = 7$ .                                                                                                                                                                       |   |   |
| b) Đồ thị của hàm số $y'$ đi qua điểm $A\left(1; \frac{7}{3}\right)$ .                                                                                                                 |   |   |
| c) $y'(1) < y'(2)$ .                                                                                                                                                                   |   |   |
| d) Điểm $M$ thuộc đồ thị $(C)$ của hàm số $y = \frac{x-3}{2x+1}$ có hoành độ $x_0 = 0$ . Khi đó, phương trình tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ song song với đường thẳng $y = 7x + 2024$ . |   |   |

**Câu 227.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{2}{1-x}$  có đồ thị  $(C)$  và điểm  $M(3; -1) \in (C)$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                     | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hệ số góc của tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm $M$ bằng $\frac{1}{2}$ .                       |   |   |
| b) Tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ song song với đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ . |   |   |
| c) Tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ vuông với đường thẳng $y = -2x - \frac{5}{2}$ .               |   |   |

| Phát biểu                                                                     | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| d) Tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ đi qua điểm $A\left(0; -\frac{5}{2}\right)$ . |   |   |

## 5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 228.** Cho hàm số  $y = \frac{2x-1}{x+1}$  có đồ thị là  $(C)$ . Biết rằng trên  $(C)$  có 2 điểm phân biệt mà các tiếp tuyến của  $(C)$  tại các điểm đó song song với đường thẳng  $y = x$ . Tính tổng hoành độ của 2 điểm đó.

KQ:

**Câu 229.** Gọi  $(C)$  là đồ thị của hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ . Tìm số đường tiếp tuyến của  $(C)$  song song với đường thẳng  $y = -9x$ ?

KQ:

**Câu 230.** Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = x^3 - x^2 + x + 1$  song song với đường thẳng  $y = 6x + 4$ ?

KQ:

**Câu 231.** Cho hàm số  $y = \frac{2x-1}{x-1}$  có đồ thị  $(C)$ ,  $M$  là điểm di động trên  $(C)$  có hoành độ  $x_M > 1$ . Tiếp tuyến của  $(C)$  tại  $M$  lần lượt cắt hai đường tiệm cận của  $(C)$  tại  $A, B$ . Gọi  $S$  là diện tích tam giác  $OAB$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $S$  (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm). KQ:

**Câu 232.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2$  có đồ thị  $(C)$ . Tiếp tuyến tại điểm  $A$  thuộc  $(C)$  cắt  $(C)$  tại hai điểm phân biệt  $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$  ( $M, N$  khác  $A$ ) thỏa mãn  $y_1 - y_2 = 6(x_1 - x_2)$ . Các điểm  $A$  thỏa mãn có tổng các hoành độ là bao nhiêu? KQ:

### DẠNG

9

### Điểm đặc biệt của đồ thị

Một số bài toán về điểm đặc biệt thường gặp:

☑ Bài toán tìm điểm cố định của họ đường cong.

— **Bước 1:** Đặt phương trình  $y = f(x, m)$  về dạng phương trình theo ẩn  $m$  về dạng  $Am + B = 0$  hoặc  $Am^2 + Bm + C = 0$ .

— **Bước 2:** Cho các hệ số bằng 0, ta thu được hệ phương trình và giải hệ phương trình

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0. \end{cases}$$

— **Bước 3:** Kết luận điểm cố định.

☑ Bài toán tìm điểm có tọa độ nguyên.

Cho đường cong  $(C)$  có phương trình  $y = f(x)$  (hàm phân thức). Hãy tìm những điểm có tọa độ nguyên của đường cong?

Những điểm có tọa độ nguyên là những điểm sao cho cả hoành độ và tung độ của điểm đó đều là số nguyên.

— **Bước 1:** Thực hiện phép chia đa thức chia tử số cho mẫu số.

— **Bước 2:** Lí luận để giải bài toán.

☑ Bài toán tìm điểm có tính chất đối xứng.



Cho đường cong  $(C)$  có phương trình  $y = f(x)$ . Tìm những điểm đối xứng nhau qua một điểm, qua đường thẳng.

- Đối xứng qua điểm thường áp dụng 
$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$
- Đối xứng qua đường thẳng  $d$  thường ta áp dụng  $\begin{cases} I \in d \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_d = 0 \end{cases}$  (với  $I$  là trung điểm của  $MN$  và  $\vec{u}_d$  là vectơ chỉ phương của đường thẳng  $d$ ).

☑ Một số bài toán tìm điểm đặc biệt khác sử dụng kiến thức sau

- Cho hai điểm  $P(x_1; y_1); Q(x_2; y_2) \Rightarrow PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .
- Cho điểm  $M(x_0; y_0)$  và đường thẳng  $d: Ax + By + C = 0$ , thì khoảng cách từ  $M$  đến  $d$  là  $h(M; d) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ .

**Chú ý:** Những điểm cần tìm thường là hai điểm cực đại, cực tiểu hoặc là giao của một đường thẳng với một đường cong  $(C)$  nào đó. Vì vậy trước khi áp dụng công thức, ta cần phải tìm điều kiện tồn tại rồi tìm tọa độ của chúng.

## 1 Ví dụ mẫu

**Ví dụ 81.** Điểm nào dưới đây thuộc đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x + 2$ ?

- A.  $M(4; -1)$ . B.  $P(0; 3)$ . C.  $N(1; 0)$ . D.  $Q(1; 4)$ .

**Ví dụ 82.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-1}$  cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

- A. 1. B.  $-\frac{1}{2}$ . C. -1. D. 2.

**Ví dụ 83.** Đồ thị hàm số  $y = x^3 + 2x - 3$  cắt trục hoành tại điểm có tọa độ là

- A.  $(-1; 0)$ . B.  $(0; -3)$ . C.  $(0; -1)$ . D.  $(1; 0)$ .

**Ví dụ 84.** Tìm tâm đối xứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{x-2}{-x+2}$ .

**Ví dụ 85.** Trên đồ thị hàm số  $y = \frac{x+1}{2x-1}$  có bao nhiêu điểm mà tung độ bằng  $\frac{1}{2}$ ?

**Ví dụ 86.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{x-1}{x+1}$  có bao nhiêu điểm mà tọa độ của nó đều là các số nguyên?

**Ví dụ 87.** Đồ thị của hàm số  $y = \frac{4x-3}{x-2}$  nhận điểm  $I(a; b)$  làm tâm đối xứng. Tính giá trị của  $a + b$ .

**Ví dụ 88.** Cho hàm số  $y = 3x^3 - m^2x - m + 2$  có đồ thị  $(C_m)$ . Khi đó

| Phát biểu                                                  | Đ | S |
|------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Điều kiện để $(C_m)$ có hai điểm cực trị là $m > 0$ .   |   |   |
| b) Điểm đối xứng của $(C_m)$ là $I(0; 2 + m)$ .            |   |   |
| c) Khi $m = 1$ thì điểm đối xứng của đồ thị là $I(0; 1)$ . |   |   |



| Phát biểu                                                                                              | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| d) Đồ thị $(C_m)$ có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta : y = x + 2$ khi $m = 0$ . |   |   |

**Ví dụ 89.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x - 2$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $A, B$  lần lượt là hai điểm cực trị của đồ thị  $(C)$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                          | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hai điểm cực trị là $A(1; -4), B(-1; 0)$ .                                      |   |   |
| b) Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận.                                            |   |   |
| c) Điểm đối xứng của đồ thị là $I(0; -2)$ .                                        |   |   |
| d) Có 3 điểm $M$ nằm trên đồ thị $(C)$ sao cho tam giác $MAB$ có diện tích bằng 6. |   |   |

**Ví dụ 90.** Cho hàm số  $y = -x^3 + mx^2 - x - 4m$  có đồ thị  $(C_m)$  và  $A$  là điểm cố định có hoành độ âm nằm trên đồ thị  $(C_m)$ . Tìm các giá trị của  $m$  để tiếp tuyến tại  $A$  của đồ thị  $(C_m)$  vuông góc với đường thẳng  $x - y = 0$ .

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

## 2 Bài tập tự luận

**Bài 41.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  có đồ thị  $(C)$ . Tìm các cặp điểm  $M, N$  nằm trên  $(C)$  đối xứng nhau qua điểm  $I(1; 0)$

**Bài 42.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{3}{2x-1}$  có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên dương?

**Bài 43.** Đồ thị của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + mx + m$  với  $m$  là tham số luôn đi qua một điểm  $M$  cố định. Tính độ dài của đoạn  $OM$  với  $O$  là gốc tọa độ.

**Bài 44.** Xác định tọa độ điểm  $M$  có hoành độ dương nằm trên đồ thị hàm số  $(C): y = \frac{x+1}{x-2}$  sao cho khoảng cách từ  $M$  đến tiệm cận ngang của  $(C)$  bằng 1.

**Bài 45.** Đồ thị của hàm số  $y = \frac{x-m}{x+m}$  với  $m$  là tham số ( $m \neq 0$ ) luôn đi qua một điểm  $M$  cố định. Tính khoảng cách từ  $M$  đến đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

## 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 233.** Điểm nào dưới đây **không** thuộc đồ thị của hàm số  $y = 2x^3 + x^2 - 5$ ?

- A.**  $P(-1; -1)$ .      **B.**  $M(-2; -17)$ .      **C.**  $Q(0; -5)$ .      **D.**  $N(1; -2)$ .

**Câu 234.** Cho đồ thị hàm số  $y = \frac{2x-1}{x+2}$  có đồ thị  $(C)$ . Tọa độ điểm  $I$  là tâm đối xứng của đồ thị hàm số là

- A.**  $I(-2; 2)$ .      **B.**  $I\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$ .      **C.**  $I(2; 2)$ .      **D.**  $I\left(2; \frac{1}{2}\right)$ .

**Câu 235.** Cho hàm số  $y = \frac{2x-1}{x-1}$  có đồ thị  $(C)$ . Có bao nhiêu cặp điểm  $M, N$  nằm trên  $(C)$  đối xứng nhau qua điểm  $I(1; 2)$ ?

- A.** 0.      **B.** 1.      **C.** 2.      **D.** Vô số.

**Câu 236.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{2}{x+2}$  có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

**Câu 237.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 + 2m$  đi qua điểm  $N(-2; 0)$ .

- A.  $m = \frac{1}{3}$ . B.  $m = \frac{16}{6}$ . C.  $m = -1$ . D.  $m = \frac{3}{8}$ .

**Câu 238.** Đồ thị của hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 - x + 3m$  với  $m$  là tham số đi qua bao nhiêu điểm cố định?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

**Câu 239.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x+1}$  cắt các trục tọa độ tại hai điểm  $A, B$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AB$ .

- A.  $AB = \frac{1}{2}$ . B.  $AB = \frac{5}{4}$ . C.  $AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . D.  $AB = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

**Câu 240.** Có bao nhiêu điểm  $M$  nằm trên đồ thị hàm số  $(C): y = \frac{2x-1}{x-1}$  sao cho khoảng cách từ điểm  $M$  đến tiệm cận đứng bằng 1?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

**Câu 241.** Cho hàm số  $y = \frac{2x+m}{x-1}$ , có đồ thị là  $(S)$ . Hỏi có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị  $(S)$  sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến hai tiệm cận đạt giá trị nhỏ nhất là 12?

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

**Câu 242.** Cho hàm số  $y = \frac{2x-3}{x-2}$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $M$  là một điểm thuộc đồ thị  $(C)$  và  $d$  là tổng khoảng cách từ  $M$  đến hai tiệm cận của  $(C)$ . Tính giá trị nhỏ nhất của  $d$ .

- A. 6. B. 10. C. 2. D. 5.

#### 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 243.** Cho hàm số  $y = \frac{x-3}{x+2}$  có đồ thị  $(C)$ . Biết  $A, B$  là hai điểm nằm trên  $(C)$  đối xứng nhau qua điểm  $I(1; -2)$ . Khi đó

| Phát biểu                                   | Đ | S |
|---------------------------------------------|---|---|
| a) Tiệm cận đứng của đồ thị $x = -2$ .      |   |   |
| b) Tiệm cận ngang của đồ thị $y = 3$ .      |   |   |
| c) Điểm đối xứng của đồ thị là $I(1; -2)$ . |   |   |
| d) Độ dài đoạn $AB = 4\sqrt{2}$ .           |   |   |

**Câu 244.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2+x+2}{x+1}$  có đồ thị  $(C)$ . Giả sử  $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$  là hai điểm nằm trên  $(C)$  đối xứng nhau qua điểm  $I(-\frac{1}{2}; -1)$ . Khi đó

| Phát biểu                                          | Đ | S |
|----------------------------------------------------|---|---|
| a) Tiệm cận đứng của đồ thị là $x = 1$ .           |   |   |
| b) Tiệm cận xiên của đồ thị là $y = x$ .           |   |   |
| c) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $I(-1; -1)$ . |   |   |
| d) Giá trị của $x_A x_B + y_A y_B = -10$ .         |   |   |

**Câu 245.** Cho hàm số  $y = \frac{x+1}{x-1}$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $M, N$  là hai điểm nằm trên  $(C)$  đối xứng nhau qua đường thẳng  $y = 3 - \frac{1}{2}x$ . Khi đó

| Phát biểu                                                              | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tiệm cận đứng của đồ thị $(C)$ là $x = -1$ .                        |   |   |
| b) Điểm đối xứng của đồ thị $I(1; -1)$ .                               |   |   |
| c) Điều kiện để $\Delta$ cắt $(C)$ tại hai điểm phân biệt là $m > 0$ . |   |   |
| d) Độ dài đoạn $MN = 2\sqrt{10}$ .                                     |   |   |

**Câu 246.** Cho điểm  $M$  thuộc đồ thị  $(C)$  của hàm số  $y = \frac{x-7}{x+1}$ . Biết  $M$  có hoành độ  $a$  nhận giá trị âm và khoảng cách từ  $M$  đến trục  $Ox$  bằng ba lần khoảng cách từ  $M$  đến trục  $Oy$ . Khi đó

| Phát biểu                                                      | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận xiên $y = 1$ . |   |   |
| b) Đồ thị có 2 đường tiệm cận.                                 |   |   |
| c) Điểm đối xứng của đồ thị $I(-1; 1)$ .                       |   |   |
| d) Giá trị của $a = -\frac{7}{3}$ .                            |   |   |

**Câu 247.** Cho đồ thị hàm số  $y = \frac{x+2}{x-2}$  và điểm  $M$  có hoành độ dương nằm trên đồ thị sao cho tổng khoảng cách từ  $M$  đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó

| Phát biểu                      | Đ | S |
|--------------------------------|---|---|
| a) Tiệm cận đứng $x = 1$ .     |   |   |
| b) Đồ thị có 2 đường tiệm cận. |   |   |

| Phát biểu                              | Đ | S |
|----------------------------------------|---|---|
| c) Tâm đối xứng của đồ thị $I(2; 1)$ . |   |   |
| d) Tọa độ điểm $M(4; 3)$ .             |   |   |

## 5

## Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 248.** Tính tổng các hoành độ các điểm có tọa độ nguyên của đồ thị hàm số  $y = \frac{4}{3x-2}$ .

KQ:

**Câu 249.** Tính tổng hoành độ các điểm  $M$  thuộc đồ thị  $(C)$  của hàm số  $y = \frac{x^2+5x+15}{x+3}$  cách đều hai trục tọa độ.

KQ:

**Câu 250.** Tính tổng hoành độ các điểm có tọa độ nguyên của đồ thị hàm số  $y = \frac{x+10}{x+1}$ .

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 251.** Giả sử  $S$  là tập hợp các đường thẳng cắt đồ thị  $(C)$  của hàm số  $y = \frac{x+2}{2x-1}$  tại hai điểm có tọa độ nguyên. Tính số phần tử của  $S$ .

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 252.** Cho hàm số  $y = \frac{x+2}{x-1}$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $I$  là giao điểm hai đường tiệm cận của  $(C)$ . Biết tọa độ điểm  $M(a; b)$  có hoành độ dương thuộc đồ thị  $(C)$  sao cho  $MI$  ngắn nhất. Tính giá trị của  $ab - 2\sqrt{3}$ .

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**DẠNG 10**

**Bài toán thực tế ứng dụng đồ thị hàm số**

- ☑ Sử dụng đồ thị của hàm số hoặc công thức của hàm số để giải quyết yêu cầu của bài toán.
- ☑ Sử dụng bảng biến thiên của hàm số để giải quyết yêu cầu của bài toán.

**1 Ví dụ mẫu**

**Ví dụ 91.** Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm  $t$  (giây) là  $y = t^3 - 12t + 3, t \geq 0$ . Tìm vận tốc của hạt sau 3 giây.

**Ví dụ 92.** Để loại bỏ  $x\%$  chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là  $C(x) = \frac{300x}{100-x}$  (triệu đồng),  $0 \leq x < 100$ . Tính chi phí cần bỏ ra để loại bỏ được 90% chất gây ô nhiễm không khí.

**Ví dụ 93.** Giả sử chi phí  $C(x)$  (nghìn đồng) để sản xuất  $x$  đơn vị của một loại hàng hoá nào đó được cho bởi hàm số  $C(x) = 30\,000 + 300x - 2,5x^2 + 0,125x^3$ . Tính chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201.

**Ví dụ 94.**

Kính viễn vọng Hubble được tàu không gian Discovery đưa vào sử dụng ngày 24/4/1990. Mô hình vận tốc của tàu trong sứ mệnh này, từ lúc rời bệ phóng ( $t = 0$  giây) cho đến khi được tên lửa đẩy nhanh khỏi bệ tại thời điểm  $t = 126$  giây, được xác định bởi công thức:  
 $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083$  (feet/giây).

(nguồn: James Stewart, J. (2015). *Calculus. Cengage Learning 8th edition*, p. 282)

Tính gia tốc lớn nhất của tàu trong khoảng thời gian này (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

**Ví dụ 95.** Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu  $P$  (tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số  $P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}, 0 \leq t \leq 10$ , trong đó thời gian  $t$  được tính bằng giây. Tính tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây kể từ khi máu rời tim.



**Ví dụ 96.** Một cốc chứa 30ml dung dịch KOH (potassium hydroxide) với nồng độ 100mg/ml. Một bình chứa dung dịch KOH khác với nồng độ 8mg/ml được trộn vào cốc. Tính nồng độ KOH trong cốc sau khi trộn 10(ml) từ bình chứa.

**Ví dụ 97.** Một chất điểm chuyển động theo quy luật  $s(t) = -t^3 + 2t^2 - t$ , với  $t$  (đơn vị: giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (đơn vị: mét) là quãng đường chất điểm di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Trong khoảng thời gian 2 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, chất điểm đạt được vận tốc lớn nhất là bao nhiêu?

**Ví dụ 98.** Dân số của một thị trấn sau  $t$  năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức  $f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5}$  (nghìn người). Biết đạo hàm của hàm số  $y = f(t)$  biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn.

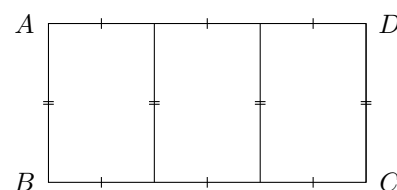
(Nguồn: Giải tích 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020)

| Phát biểu                                                                                          | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Dân số của thị trấn vào năm 2022 là 23 895 (nghìn người).                                       |   |   |
| b) Tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm) là $f'(t) = \frac{120t}{(t+5)^2}$ . |   |   |
| c) Tốc độ tăng dân số vào năm 2022 của thị trấn là $f'(52) = \frac{40}{1083}$ .                    |   |   |
| d) Năm 1990 có tốc độ tăng dân số là 0,192 nghìn người/năm.                                        |   |   |

**Ví dụ 99.**

Người ta cần rào một mảnh đất hình chữ nhật  $ABCD$  có diện tích là  $600 \text{ m}^2$ . Trên mảnh đất này, người ta chia làm ba miếng đất hình chữ nhật có diện tích bằng nhau. Giá tiền để xây dựng hàng rào bên trong và bao bên ngoài là 60 000 đồng mỗi mét, biết rằng chiều dài hình chữ nhật  $ABCD$  không vượt quá 60 m. Tìm chiều dài của hình chữ nhật  $ABCD$  sao cho chi phí xây dựng hàng rào là thấp nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KQ:



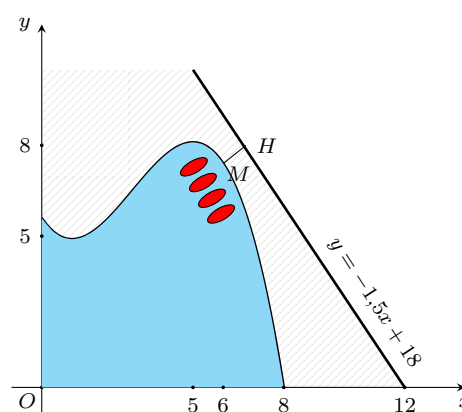
**Ví dụ 100.**

Cho hồ nước trong công viên (mô hình minh họa), nó được giới hạn bởi các trục tọa độ và đồ thị của hàm số

$$y = \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56).$$

Đơn vị độ dài trên mỗi trục là 100 m.

(Nguồn: A. Bigalke et al, Mathematik, Grundkurs ma-I, Cornelsen 2016)



| Phát biểu                                                                                             | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đường dạo ven hồ chạy dọc theo trục $Ox$ dài 800 m.                                                |   |   |
| b) Vật thể có tọa độ $(3; 7)$ ở ngoài phạm vi hồ nước.                                                |   |   |
| c) Khoảng cách xa nhất, tính theo phương thẳng đứng, giữa phần cong và phần thẳng của bờ hồ là 810 m. |   |   |

| Phát biểu                                                                                                                                                     | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| d) Trong công viên, người chọn vị trí điểm $M(6; 7)$ để xây dựng bến thuyền đập nước sao cho khoảng cách từ đó đến đường thẳng $d: y = -1,5x + 18$ ngắn nhất. |   |   |

## 2 Bài tập tự luận

**Bài 46.** Một chất điểm chuyển động theo quy luật  $s(t) = -t^3 + 2t^2 - t$ , với  $t$  (đơn vị: giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (đơn vị: mét) là quãng đường chất điểm di chuyển được trong khoảng thời gian đó.

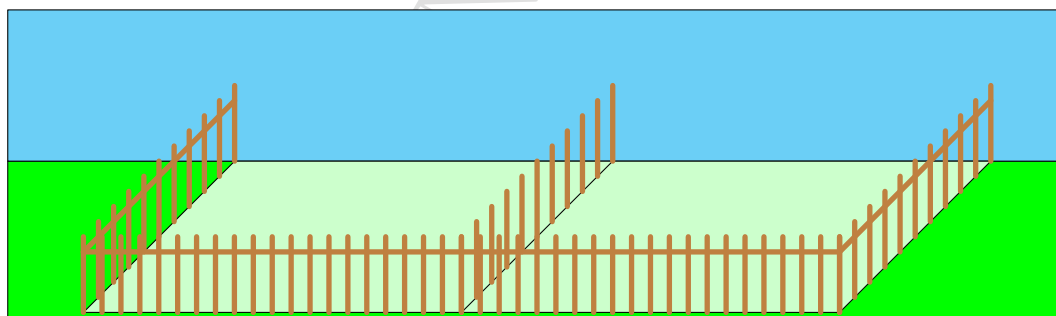
- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số  $s = s(t)$  trên hệ trục tọa độ  $tOs$ .
- Trong khoảng thời gian 2 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, chất điểm đạt được vận tốc lớn nhất là bao nhiêu?

**Bài 47.** Một trang sách có dạng hình chữ nhật với diện tích là  $384 \text{ cm}^2$ . Sau khi để lề trên và lề dưới đều là 3 cm, để lề trái và lề phải đều là 2 cm. Phần còn lại của trang sách được in chữ. Kích thước tối ưu của trang sách là bao nhiêu để phần in chữ trên trang sách có diện tích lớn nhất?

**Bài 48.** Trong một nhà hàng, mỗi tuần để chế biến  $x$  phần ăn ( $x$  lấy giá trị trong khoảng từ 30 đến 120) thì chi phí trung bình (đơn vị: nghìn đồng) của một phần ăn được cho bởi công thức  $C(x) = 2x - 230 + \frac{7200}{x}$ .

- Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số  $C(x)$  trên  $[30; 120]$ .
- Từ kết quả trên, tìm số phần ăn sao cho chi phí trung bình của một phần ăn là thấp nhất.

**Bài 49.** Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ  $E$  dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.



**Bài 50.** Một công ty kinh doanh bất động sản có 20 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng/1 tháng thì tất cả các căn hộ đều có người thuê. Nhưng cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 200 nghìn đồng/1 tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi công ty nên cho thuê mỗi căn hộ bao nhiêu tiền một tháng để tổng số tiền thu được là lớn nhất?

## 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 253.** Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm  $t$  (giây) là  $y = t^3 - 12t + 3, t \geq 0$ . Khi nào thì hạt chuyển động lên trên?

- A.  $t \geq 2$ .      B.  $t > 2$ .      C.  $t < 2$ .      D.  $t \leq 2$ .



**Câu 254.** Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 2 m với vận tốc ban đầu 24,5 m/s là  $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$  (theo *Vật lý đại cương*, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016). Vật đạt độ cao lớn nhất là bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần nghìn)?

- A.  $h(2,5) = 32,6$ . B.  $h(2,5) = 32,625$ . C.  $h(2,5) = 32,624$ . D.  $h(2,5) = 32,63$ .

**Câu 255.** Một chất điểm chuyển động có phương trình  $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t + 2$ , trong đó  $t > 0$ ,  $t$  tính bằng giây và  $s(t)$  tính bằng mét. Hỏi tại thời điểm nào thì vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất?

- A.  $t = 1$  s. B.  $t = 2$  s. C.  $t = 3$  s. D.  $t = 6$  s.

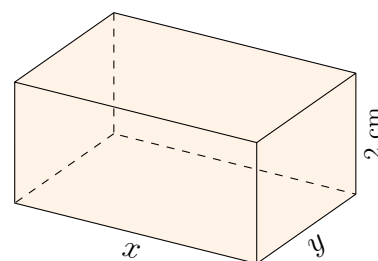
**Câu 256.** Trong Vật lý, điện trở tương đương  $R_{td}$  của hai điện trở  $R_1, R_2$  mắc song song được xác định bởi công thức  $\frac{1}{R_{td}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ , biết rằng  $R_2 = 3(\Omega)$ . Đặt  $R_1 = x(\Omega)$ ,  $x > 0$ . Khi  $x$  tăng, điện trở  $R_{td}$  không thể vượt qua giá trị bao nhiêu?

- A. 3. B.  $\frac{1}{2}$ . C. 2. D. 1.

**Câu 257.**

Người ta muốn chế tạo một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có thể tích 500  $\text{cm}^3$ . Chiều cao hộp phải là 2 cm, các kích thước khác là  $x, y$  với  $x > 0$  và  $y > 0$ . Công thức xác định diện tích toàn phần  $S(x)$  của chiếc hộp theo  $x$  là

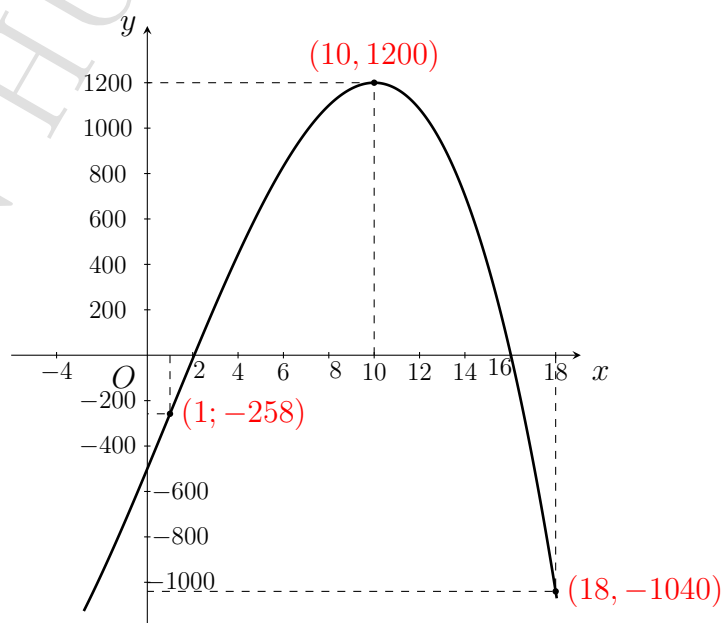
- A.  $S(x) = 500 + 4x - \frac{1000}{x}$ . B.  $S(x) = 500 + 4x + \frac{1000}{x}$ .  
C.  $S(x) = 250 + 4x + \frac{1000}{x}$ . D.  $S(x) = 500 + 2x + \frac{1000}{x}$ .



**Câu 258.**

Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được  $x$  mét vải lụa ( $1 \leq x \leq 18$ ). Tổng chi phí sản xuất  $x$  mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng. Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét.  $L(x)$  là lợi nhuận thu được khi bán  $x$  mét vải lụa và có đồ thị như hình bên. Hộ làm nghề dệt này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày bao nhiêu mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa?

- A. 1200. B. 10. C. 18. D. 16.



Hình 8

**Câu 259.** Người quản lý của một khu chung cư có 100 căn hộ cho thuê nhận thấy rằng tất cả các căn hộ sẽ có người thuê nếu giá thuê một căn hộ là 8 triệu đồng một tháng. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thuê căn hộ thêm 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Người quản lý nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là bao nhiêu để doanh thu là lớn nhất?

- A. 10 triệu đồng. B. 81 triệu đồng. C. 11 triệu đồng. D. 9 triệu đồng.

**Câu 260.** Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên

tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu  $P$  (tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số  $P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}$ , ( $0 \leq t \leq 10$ ), trong đó thời gian  $t$  được tính bằng giây. Tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây kể từ khi máu rời tim là

A.  $\frac{375}{13}$ .

B.  $\frac{125}{13}$ .

C.  $\frac{250}{169}$ .

D.  $\frac{375}{169}$ .

**Câu 261.**

Người ta cần rào một mảnh đất hình chữ nhật  $ABCD$  có diện tích là  $600 \text{ m}^2$ . Trên mảnh đất này, người ta chia làm ba miếng đất hình chữ nhật có diện tích bằng nhau (Hình bên). Giá tiền để xây dựng hàng rào bên trong và bao bên ngoài là 60000 đồng mỗi mét, biết rằng chiều dài hình chữ nhật  $ABCD$  không vượt quá 60 m. Chi phí cần để xây dựng hàng rào được tính theo chiều dài  $x$  của hình chữ nhật là

A.  $120000 \cdot \left(x + \frac{600}{x}\right)$ .

B.  $120000 \cdot \left(x + \frac{1200}{x}\right)$ .

C.  $60000 \cdot \left(x + \frac{1800}{x}\right)$ .

D.  $120000 \cdot \left(x + \frac{900}{x}\right)$ .

**Câu 262.**

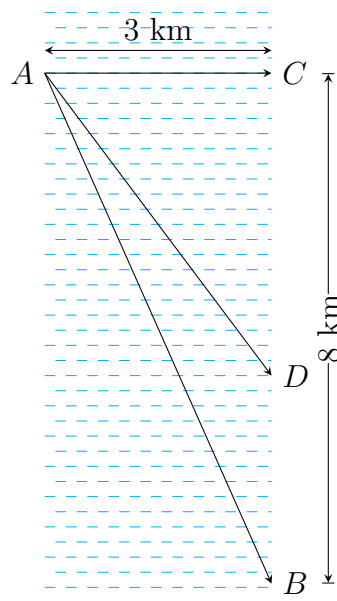
Một người chèo thuyền từ điểm  $A$  trên bờ một con sông thẳng, rộng 3 km và muốn đến điểm  $B$ , cách bờ đối diện 8 km về phía hạ lưu, càng nhanh càng tốt như hình bên. Người ấy có thể chèo thuyền qua sông đến điểm  $C$  rồi chạy bộ đến  $B$ , hoặc anh ta có thể chèo thẳng đến  $B$ , hoặc có thể chèo thuyền đến điểm  $D$  nào đó giữa  $C$  và  $B$  rồi chạy bộ đến  $B$ . Biết rằng tốc độ chèo thuyền của người này là 6 km/h và tốc độ chạy bộ là 8 km/h. Tìm thời gian ngắn nhất mà người này có thể đi từ  $A$  đến  $B$  (bỏ qua vận tốc của nước và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

A. 1,32 h.

B. 1,33 h.

C. 1,34 h.

D. 1,35 h.



**Câu 263.**

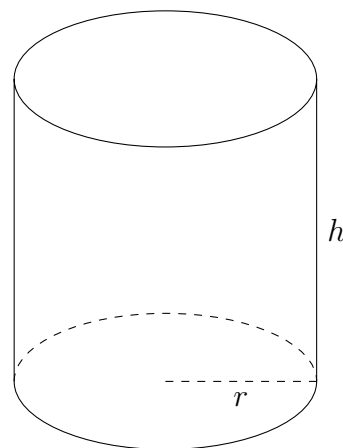
Người ta cần thiết kế một cái lon có dạng hình trụ có thể tích là 1 lít. Tính tỉ lệ chiều cao và bán kính đáy hình trụ này để tổng chi phí làm vỏ lon (bao gồm cả hai đáy) là nhỏ nhất.

A. 3.

B.  $\frac{1}{2}$ .

C. 2.

D. 1.



**Câu 264.** Người quản lí của một khu chung cư có 100 căn hộ cho thuê nhận thấy rằng tất cả các căn hộ sẽ có người thuê nếu giá thuê một căn hộ là 8 triệu đồng một tháng. Một cuộc khảo sát thị trường



cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thuê căn hộ thêm 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Người quản lí nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là bao nhiêu để doanh thu là lớn nhất?

- A.** 800 000 000 (đồng). **B.** 8 100 000 (đồng). **C.** 8 000 000 (đồng). **D.** 9 000 000 (đồng).

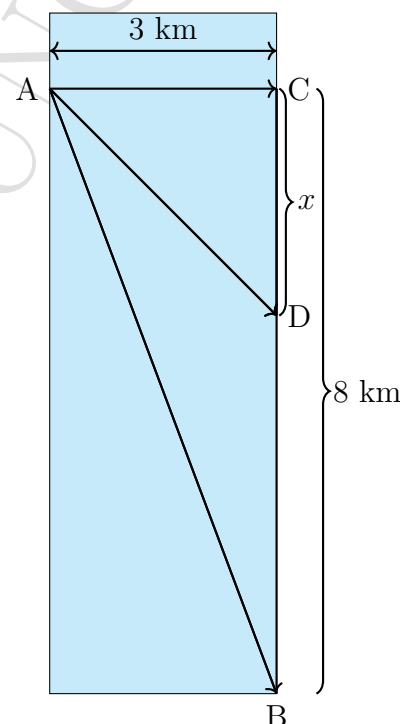
**Câu 265.** Một đội bóng đá thi đấu trong một sân vận động có sức chứa 55000 khán giả. Với giá mỗi vé là 100 nghìn đồng, số khán giả trung bình là 27000 người. Qua thăm dò dư luận, người ta thấy rằng mỗi khi giá vé giảm thêm 10 nghìn đồng, sẽ có thêm khoảng 3000 khán giả. Hỏi ban tổ chức nên đặt giá vé là bao nhiêu để doanh thu từ tiền bán vé là lớn nhất?

- A.** 100000 (đồng). **B.** 80000 (đồng). **C.** 90000 (đồng). **D.** 95000 (đồng).

**Câu 266.**

Anh An chèo thuyền từ điểm  $A$  trên bờ một con sông thẳng rộng 3 km và muốn đến điểm  $B$  ở bờ đối diện cách 8 km về phía hạ lưu càng nhanh càng tốt (hình vẽ). Anh An có thể chèo thuyền trực tiếp qua sông đến điểm  $C$  rồi chạy bộ đến  $B$ , hoặc anh có thể chèo thuyền thẳng đến  $B$ , hoặc anh cũng có thể chèo thuyền đến một điểm  $D$  nào đó giữa  $C$  và  $B$  rồi chạy bộ đến  $B$ . Nếu vận tốc chèo thuyền là 6 km/h và vận tốc chạy bộ là 8 km/h thì anh An phải chèo thuyền sang bờ ở điểm nào để đến được  $B$  càng sớm càng tốt? (Giả sử rằng vận tốc của nước là không đáng kể so với vận tốc chèo thuyền của anh An).

- A.** Anh An phải chèo thuyền đến điểm  $D$  cách  $C$  một đoạn 8 km thì sẽ đến  $B$  sớm nhất.
- B.** Anh An phải chèo thuyền đến điểm  $D$  cách  $C$  một đoạn  $\frac{9\sqrt{7}}{7}$  km thì sẽ đến  $B$  sớm nhất.
- C.** Anh An phải chèo thuyền đến điểm  $D$  cách  $C$  một đoạn  $3\sqrt{7}$  km thì sẽ đến  $B$  sớm nhất.
- D.** Anh An phải chèo thuyền đến điểm  $D$  cách  $C$  một đoạn  $\frac{\sqrt{73}}{6}$  km thì sẽ đến  $B$  sớm nhất.



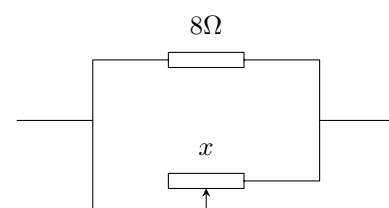
## 4

## Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 267.**

Trong Vật lí, ta biết rằng khi mắc song song hai điện trở  $R_1$  và  $R_2$  thì điện trở tương đương  $R$  của mạch điện được tính theo công thức  $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$  (theo Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).

Giả sử một điện trở  $8\Omega$  được mắc song song với một điện trở như hình vẽ. Nếu điện trở đó được kí hiệu là  $x\Omega$  thì điện trở tương đương  $R$  là hàm số của  $x$ . Khi đó



| Phát biểu                                                                       | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Điện trở tương đương $R$ là hàm số của $x$ có dạng $R(x) = \frac{8x}{x+8}$ . |   |   |
| b) Điện trở của toàn mạch là $0,6\Omega$ khi $x = 2$ .                          |   |   |
| c) Khi $x$ tăng thì điện trở toàn mạch tăng.                                    |   |   |
| d) Điện trở toàn mạch không bao giờ vượt quá $8\Omega$ .                        |   |   |

**Câu 268.** Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa

hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng. Trong khoảng 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao  $h$  của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm  $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$ , trong đó  $t$  là thời gian tính bằng giây và  $h$  là độ cao tính bằng kilômét.

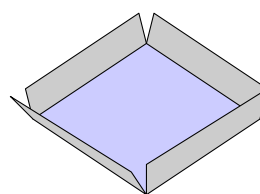
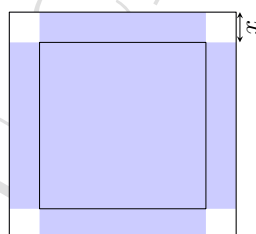
(Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016)

Khi đó

| Phát biểu                                                                                                     | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Độ cao $h$ của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng sau 10 giây là 50 kilômét.                              |   |   |
| b) Tốc độ tức thời của con tàu lúc bắt đầu hãm phanh là $-30$ km/s.                                           |   |   |
| c) Tại thời điểm $t = 25$ (giây), vận tốc tức thời của con tàu tiếp tục giảm đi so với lúc bắt đầu hãm phanh. |   |   |
| d) Khoảng cách giữa con tàu và Mặt Trăng nhỏ nhất sau 18 giây.                                                |   |   |

**Câu 269.**

Bạn Việt muốn dùng tấm bìa hình vuông cạnh 6 dm làm một chiếc hộp không nắp, có đáy là hình vuông bằng cách cắt bỏ đi 4 hình vuông nhỏ ở bốn góc của tấm bìa (Hình bên). Khi đó



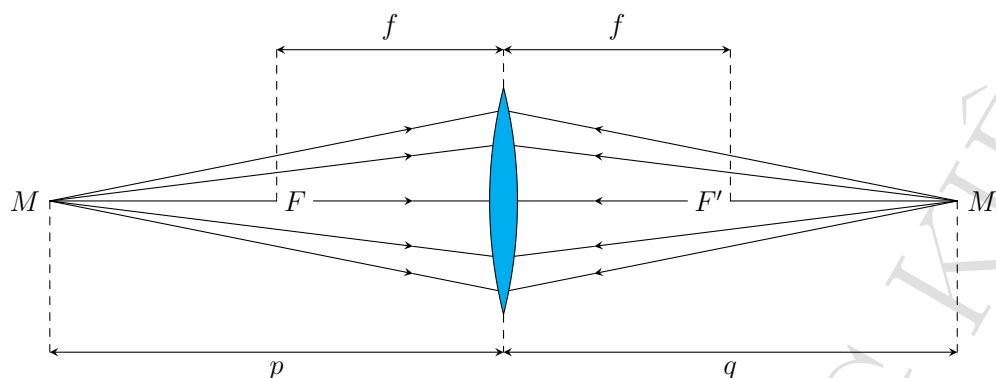
Hình 11

| Phát biểu                                                                                                       | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Khi cắt hình vuông có cạnh bằng 1 dm thì diện tích của đáy hộp là $16 \text{ dm}^2$ .                        |   |   |
| b) Thể tích hộp Khi cắt hình vuông có cạnh bằng 1 dm là $16 \text{ dm}^3$ .                                     |   |   |
| c) Hàm số biểu thị thể tích hộp theo $x$ với $x$ là độ dài cạnh hình vuông cần cắt đi là $4x^3 - 24x^2 + 36x$ . |   |   |
| d) Cắt bỏ hình vuông có cạnh bằng 1 dm thì chiếc hộp đạt thể tích lớn nhất.                                     |   |   |

**Câu 270.** Giả sử chi phí để xuất bản  $x$  cuốn tạp chí (gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,...) được cho bởi công thức sau:  $C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 10000$  trong đó  $C(x)$  được tính theo đơn vị là vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Khi đó

| Phát biểu                                                                                                  | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Chi phí để xuất bản 100 cuốn tạp chí là 980 vạn đồng.                                                   |   |   |
| b) Tổng chi phí $T(x)$ (xuất bản và phát hành) cho 100 cuốn tạp chí là 1200 vạn đồng.                      |   |   |
| c) Chi phí trung bình $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ khi xuất bản 10000 cuốn là 2,2 vạn đồng.                     |   |   |
| d) Nếu nhu cầu xuất bản không quá 30000 cuốn thì khi xuất bản 10000 cuốn, chi phí trung bình là thấp nhất. |   |   |

**Câu 271.** Xét một thấu kính hội tụ có tiêu cự  $f$ . Khoảng cách  $p$  từ vật đến thấu kính liên hệ với khoảng cách  $q$  từ ảnh đến thấu kính bởi hệ thức:  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$ .



Hình 1.39

Khi đó

| Phát biểu                                                                                                       | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Với tiêu cự bằng 3 và khoảng cách từ vật đến thấu kính bằng 5 thì khoảng cách từ ảnh đến thấu kính bằng 7,5. |   |   |
| b) $q = g(p) = \frac{pf}{p-f}$ với $p \in (f; +\infty)$ .                                                       |   |   |
| c) Hàm số $q = g(p)$ đồng biến trên $(f; +\infty)$ .                                                            |   |   |
| d) Khoảng cách từ vật đến thấu kính tiến ra vô cùng thì khoảng cách từ ảnh đến thấu kính xấp xỉ tiêu cự.        |   |   |

**Câu 272.** Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm  $t$  (giây) là  $y = t^3 - 12t + 3$  ( $t \geq 0$ ). Khi đó

| Phát biểu                                                                                              | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm vận tốc là $v(t) = y' = 3t^2 - 12$ ( $t \geq 0$ ) và hàm gia tốc là $a(t) = 6t$ ( $t \geq 0$ ). |   |   |
| b) Hạt chuyển động lên trên khi $t > 2$ và hạt chuyển động xuống dưới khi $t < 2$ .                    |   |   |
| c) Quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian $0 < t < 3$ là 9m.                                   |   |   |
| d) Hạt tăng tốc khi $t > 2$ và hạt giảm tốc $0 < t < 2$ .                                              |   |   |

**Câu 273.** Một nhà sản xuất trung bình bán được 1000 ti vi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 14 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng, số lượng ti vi bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 ti vi mỗi tuần. Gọi  $p$  (triệu đồng) là giá của mỗi ti vi,  $x$  là số ti vi. Khi đó

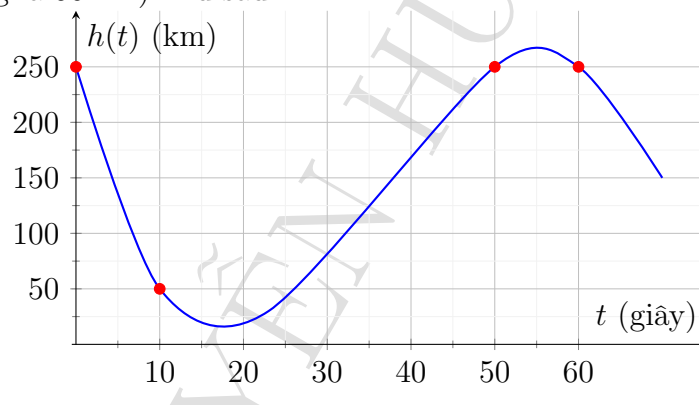
| Phát biểu                                                                                                                                                                          | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm cầu là $p = -\frac{1}{200}x + 19$ (triệu đồng).                                                                                                                             |   |   |
| b) Tổng doanh thu từ tiền bán ti vi là $200p^2 + 3800p$ (triệu đồng).                                                                                                              |   |   |
| c) Công ty giảm giá 4,5 triệu đồng cho người mua thì doanh thu của công ty sẽ lớn nhất.                                                                                            |   |   |
| d) Nếu hàm chi phí hằng tuần là $C(x) = 12000 - 3x$ (triệu đồng), trong đó $x$ là số ti vi bán ra trong tuần, nhà sản xuất nên đặt giá bán 8 triệu đồng thì lợi nhuận là lớn nhất. |   |   |

**Câu 274.** Dân số của một quốc gia sau  $t$  (năm) kể từ năm 2023 được ước tính bởi công thức  $N(t) =$

$100 \cdot e^{0,012t}$  ( $N(t)$  được tính bằng triệu người,  $0 \leq t \leq 50$ ). Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                                                                     | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Ước tính dân số của quốc gia này vào năm 2030 là 108,763 triệu người. (Kết quả làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba).                                              |   |   |
| b) Ước tính dân số của quốc gia này vào năm 2035 là 145,488 triệu người. (Kết quả làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba).                                              |   |   |
| c) Xem $N(t)$ là hàm số của biến số $t$ xác định trên đoạn $[0; 50]$ . Hàm số $N(t)$ luôn nghịch biến trên đoạn $[0; 50]$ .                                                   |   |   |
| d) Đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/năm). Vào năm 2046 tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm. |   |   |

**Câu 275.** Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng. Trong khoảng 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao  $h$  của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm  $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$ , trong đó  $t$  là thời gian tính bằng giây và  $h$  là độ cao tính bằng kilômét. Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                                                                                                 | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Xét thời điểm $0 \leq t \leq 50$ thì tại thời điểm $t \approx 18$ giây thì con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng và khoảng cách nhỏ nhất này bằng 8,08 km.                      |   |   |
| b) Đồ thị của hàm số $y = h(t)$ với $0 \leq t \leq 70$ (đơn vị trên trục hoành là 10 giây, đơn vị trên trục tung là 50 km) như sau                                                                        |   |   |
|                                                                                                                       |   |   |
| c) Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm $t$ (giây) kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với $0 \leq t \leq 50$ . Vận tốc tức thời của con tàu tại thời điểm $t = 25$ (giây) là 5,25 km/s. |   |   |
| d) Tại thời điểm $t = 25$ (giây), vận tốc tức thời của con tàu vẫn giảm.                                                                                                                                  |   |   |

## 5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 276.** Dân số của một quốc gia sau  $t$  (năm) kể từ năm 2023 được ước tính bởi công thức  $N(t) = 100e^{0,012t}$  ( $N(t)$  được tính bằng triệu người,  $0 \leq t \leq 50$ ). Ước tính dân số của quốc gia này vào năm 2030 (kết quả tính bằng triệu người, làm tròn kết quả lấy phần nguyên). KQ:

**Câu 277.** Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 2 m với vận tốc ban đầu 24,5 m/s là  $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$  (theo Vật lý đại

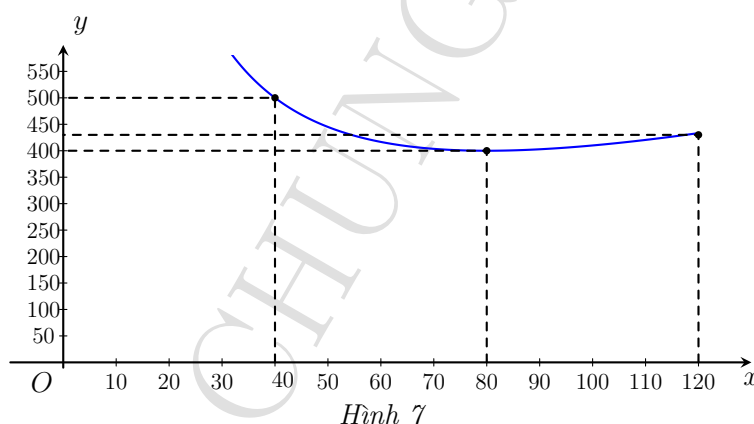
cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016). Tìm vận tốc của vật sau 2 giây. KQ:

**Câu 278.** Mỗi đợt xuất khẩu gạo của tỉnh A thường kéo dài trong 60 ngày. Người ta nhận thấy lượng gạo xuất khẩu tính theo ngày thứ  $t$  được xác định bởi công thức:  $S(t) = \frac{2}{5}t^3 - 63t^2 + 3\,240t - 3\,100$  (tấn) ( $1 \leq t \leq 60$ ). Hỏi trong 60 ngày đó, ngày thứ mấy có lượng gạo xuất khẩu cao nhất? KQ:

**Câu 279.** Giả sử chi phí (tính bằng trăm nghìn đồng) để sản xuất  $x$  đơn vị hàng hóa nào đó là  $C(x) = 23000 + 50x - 0,5x^2 + 0,00175x^3$ . Biết hàm chi phí biên là  $C'(x)$ . Tính  $C'(100)$ . KQ:

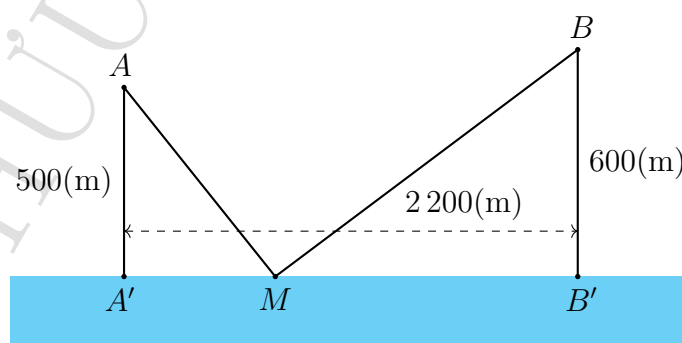
**Câu 280.**

Giả sử chi phí tiền xăng  $C$  (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình  $v$  (km/h) theo công thức:  $C(v) = \frac{16000}{v} + \frac{5}{2}v$  ( $0 < v \leq 120$ ). Để biểu diễn trực quan sự thay đổi của  $C(v)$  theo  $v$ , người ta đã vẽ đồ thị hàm số  $C(v)$  như hình bên. Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình là bao nhiêu để tiết kiệm tiền xăng nhất? KQ:



**Câu 281.**

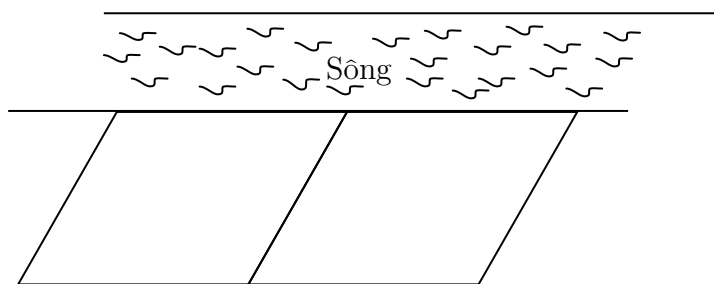
Có hai xã  $A, B$  cùng ở một bên bờ sông Lam, khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông lần lượt là  $AA' = 500$  m,  $BB' = 600$  m và người ta đo được  $A'B' = 2\,200$  m (Hình bên). Các kĩ sư muốn xây một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông Lam cho dân hai xã. Để tiết kiệm chi phí, các kĩ sư cần phải chọn vị trí  $M$  của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn  $A'B'$  sao cho tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí  $M$  là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó. KQ:



**Câu 282.** Một trang sách có dạng hình chữ nhật với diện tích là  $384 \text{ cm}^2$ . Sau khi để lề trên và lề dưới đều là 3 cm, để lề trái và lề phải đều là 2 cm. Phần còn lại của trang sách được in chữ. Chiều rộng tối ưu của trang sách là bao nhiêu cm để phần in chữ trên trang sách có diện tích lớn nhất? KQ:

**Câu 283.**

Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (Hình vẽ). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào bằng bao nhiêu  $\text{m}^2$ . KQ:



**Câu 284.** Một công ty kinh doanh bất động sản có 20 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng một tháng thì tất cả các căn hộ đều có người thuê. Nhưng cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 200 nghìn đồng/1 tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi công ty nên cho thuê mỗi căn hộ bao nhiêu triệu một tháng để tổng số tiền thu được là lớn nhất?

KQ: 

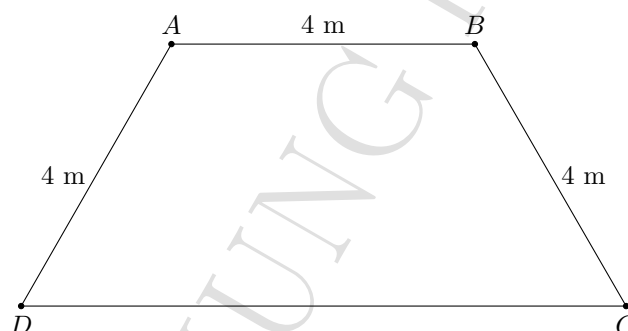
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 285.**

Một bác nông dân có ba tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài 4 m và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân  $ABCD$  như hình vẽ (bờ sông là đường thẳng  $CD$  không phải rào). Hỏi bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông? (Làm tròn đến hàng phần chục)

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|



**Câu 286.** Một cửa hàng bán lẻ bán 2500 cái ti vi mỗi năm. Để bán được số ti vi đó, cửa hàng đặt hàng từ nhà máy sản xuất theo nhiều lần trong một năm, số ti vi đặt cho nhà máy sản xuất là như nhau cho các lần đặt hàng. Mỗi lần lấy hàng từ nhà máy sản xuất về, cửa hàng chỉ để trưng bày một nửa, một nửa số ti vi còn lại phải lưu ở kho. Chi phí gửi trong kho là 10\$ một cái ti vi. Chi phí cố định cho mỗi lần đặt hàng là 20\$ cộng thêm 9\$ mỗi cái ti vi. Cửa hàng mỗi lần đặt hàng bao nhiêu cái ti vi để chi phí mà cửa hàng phải trả là nhỏ nhất?

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 287.** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ  $t$  là  $f(t) = 15t^2 - t^3$  (theo kết quả khảo sát các năm vừa qua). Nếu xem  $f'(t)$  là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm  $t$ , hỏi vào ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn nhất, số người nhiễm bệnh là bao nhiêu?

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 288.** Khi xây nhà, chủ nhà cần làm một bồn nước thể tích là  $\frac{4}{3} \text{ m}^3$  bằng gạch và xi măng có dạng hình hộp đứng không có nắp, đáy là hình chữ nhật có chiều rộng là  $x(\text{m})$ , chiều dài gấp 2 lần chiều rộng, chiều cao là  $h(\text{m})$ . Để chi phí xây dựng là thấp nhất thì giá trị  $x$  bằng bao nhiêu? KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|



THẦY KIÊN TOÁN: DẠY THẬT - HỌC THẬT - GIÁ TRỊ THẬT

K12 – CHƯƠNG 1

§6. ĐỀ ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG I

## A. ĐỀ ÔN TẬP SỐ 1

## 1 Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1 (Mức độ N).** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như bảng dưới đây. Khẳng định nào sau đây đúng?

|         |           |   |   |           |    |   |           |
|---------|-----------|---|---|-----------|----|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 1 | 2 | $+\infty$ |    |   |           |
| $f'(x)$ |           | + | 0 | −         | 0  | + |           |
| $f(x)$  | $-\infty$ |   | 5 |           | −4 |   | $+\infty$ |

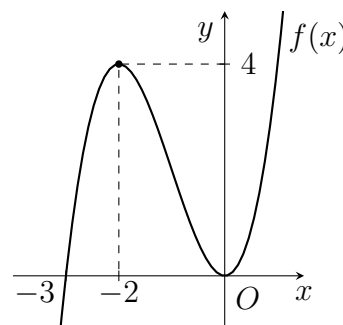
- A. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(1; 2)$ .  
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(1; 2)$ .

- B. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-5; 4)$ .  
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-5; 4)$ .

**Câu 2 (Mức độ N).**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên. Hàm số đạt cực đại tại

- A.  $x = -3$ .  
B.  $x = -2$ .  
C.  $y = 0$ .  
D.  $y = 4$ .



**Câu 3 (Mức độ H).** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$  đạt cực tiểu tại  $x = 2$ .

- A.  $m = 0$ .  
B.  $m > 4$ .  
C.  $0 \leq m < 4$ .  
D.  $0 < m \leq 4$ .

**Câu 4 (Mức độ N).** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên trên  $[-5; 7]$  như sau

|         |    |   |   |
|---------|----|---|---|
| $x$     | -5 | 1 | 7 |
| $f'(x)$ | +  | 0 | – |
| $f(x)$  | 6  | 2 | 9 |

- A.  $\min_{[-5;7]} f(x) = 6$ .  
B.  $\max_{[-5;7]} f(x) = 9$ .  
C.  $\max_{[-5;7]} f(x) = 6$ .  
D.  $\min_{[-5;7]} f(x) = 2$ .



**Câu 5 (Mức độ H).** Tìm giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $y = x^2 + \frac{2}{x}$  trên đoạn  $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ .

- A.  $m = 5$ . B.  $m = 3$ . C.  $m = \frac{17}{3}$ . D.  $m = 10$ .

**Câu 6 (Mức độ N).** Cho hàm số thỏa mãn  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ .

Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. Đường thẳng  $x = 2$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.  
 B. Đường thẳng  $y = 2$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.  
 C. Đường thẳng  $y = 1$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.  
 D. Đường thẳng  $x = 2$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

**Câu 7 (Mức độ H).** Tìm tất cả giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x+m^2}{x+4}$  đồng biến trên các khoảng mà nó xác định?

- A.  $m < 2$ . B.  $m > -2$ . C.  $-2 \leq m \leq 2$ . D.  $-2 < m < 2$ .

**Câu 8 (Mức độ N).** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|         |           |           |           |
|---------|-----------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 1         | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           |           |           |
| $f(x)$  | 3         | $+\infty$ | 3         |
|         |           | $-\infty$ |           |

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho có phương trình là

- A.  $x = -1$ . B.  $x = -3$ . C.  $x = 3$ . D.  $x = 1$ .

**Câu 9 (Mức độ H).** Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1}$  là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

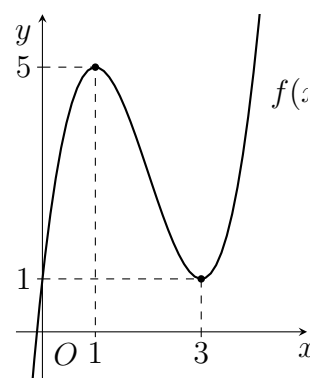
**Câu 10 (Mức độ V).** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 + 3x^2 - mx + 1$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .

- A.  $m \leq 0$ . B.  $m \geq -2$ . C.  $m \leq -3$ . D.  $m \leq -1$ .

**Câu 11 (Mức độ V).**

Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

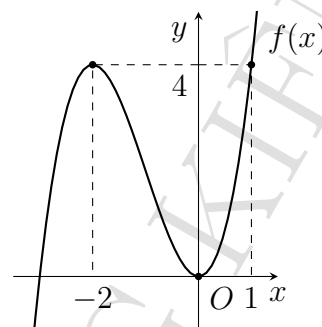
- A.  $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ . B.  $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$ .  
 C.  $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$ . D.  $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$ .



**Câu 12 (Mức độ C).**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $f(x^2 + 2x - 2) = 3m + 1$  có nghiệm thuộc khoảng  $[0; 1]$ .

- A.  $[0; 4]$ .      B.  $[-1; 0]$ .      C.  $[0; 1]$ .      D.  $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$ .

**2****Câu trắc nghiệm đúng sai**

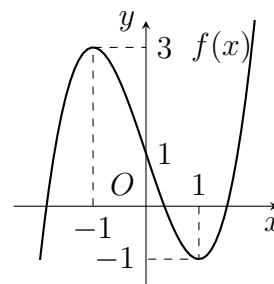
**Câu 13.** Cho hàm số  $y = f(x) = -x^3 + 2x^2 - x - 7$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                     | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ .                                                        |   |   |
| b) Hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.                                                                                           |   |   |
| c) Hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{1}{3}$ .                                                                                 |   |   |
| d) Hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - (1 + m)x - 7$ (với $m$ là tham số) đồng biến trên $(0; 1)$ khi và chỉ khi $m \leq \frac{1}{3}$ . |   |   |

**Câu 14.**

Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) đường cong trong hình vẽ bên. Khi đó

| Phát biểu                                                                  | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số đã cho có hệ số $d = 1$ .                                        |   |   |
| b) Hàm số đạt cực trị tại $x = -1$ và $x = 1$ .                            |   |   |
| c) Đường cong trên là đồ thị của hàm số $y = f(x) = -x^3 - 3x + 1$ .       |   |   |
| d) Phương trình $x^3 - 3x - 1 - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khi $m = 0$ . |   |   |



**Câu 15.** Cho hàm số  $y = \frac{3x - m^2}{x + 3}$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                                                 | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $y$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ .                                                                                                        |   |   |
| b) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng $y = 3$ .                                                                                              |   |   |
| c) Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$ là $\max_{[0,2]} y = \frac{6 - m^2}{5}$ và $\min_{[0,2]} y = -\frac{m^2}{3}$ . |   |   |

| Phát biểu                                                                                                                                                          | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| d) Gọi $m_1, m_2$ ( $m_1 < m_2$ ) là các giá trị của tham số $m$ thỏa mãn $5 \cdot \max_{[0,2]} y + 3 \cdot \min_{[0,2]} y = -8$ . Tổng $2m_1 + 3m_2 = \sqrt{7}$ . |   |   |

**Câu 16.** Cho hàm số  $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - mx + 1$ . Khi đó

| Phát biểu                                                          | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Với $m = -3$ thì hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ .      |   |   |
| b) Với $m = -3$ thì hàm số đạt cực trị tại $x = 1$ .               |   |   |
| c) Với $m \leq -3$ thì hàm số luôn đồng biến trên $(-\infty; 0)$ . |   |   |
| d) Với $m < 0$ thì hàm số $y = f( x )$ có 5 cực trị.               |   |   |

### 3 Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 17 (Mức độ N).** Cho hàm số  $y = \frac{mx - 1}{x + m}$ . Với giá trị nào của  $m$  thì hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên  $[1; 4]$  bằng 2. KQ:

**Câu 18 (Mức độ N).** Trong một nhà hàng, mỗi tuần để chế biến  $x$  phần ăn ( $x$  lấy giá trị trong khoảng 30 đến 120) thì chi phí trung bình (đơn vị: nghìn đồng) của một phần ăn được cho bởi công thức  $C(x) = 2x - 230 + \frac{7200}{x}$ . Tìm số phần ăn sao cho chi phí trung bình một phần ăn là thấp nhất. KQ:

**Câu 19 (Mức độ H).** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ  $t$  là  $H(t) = 45t^2 - t^3$ ,  $t \in [0; 25]$  và  $t \in \mathbb{R}$ . Coi  $H(t)$  là hàm số xác định trên đoạn  $[0; 25]$  thì  $H'(t)$  được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm  $t$ . Ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn nhất là ngày thứ mấy. KQ:

**Câu 20 (Mức độ H).** Đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 3x + 2}$  có bao nhiêu tiệm cận đứng? KQ:

**Câu 21 (Mức độ V).** Cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 27x + 3m - 2$  đạt cực trị tại  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $|x_1 - x_2| \leq 5$ . Biết  $S = [a; b) \cup (c; d]$ . Tính  $T = a + b - c + d$ . KQ:

**Câu 22 (Mức độ C).** Ông A muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng  $288\text{cm}^3$ . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Hỏi tổng diện tích bể bằng bao nhiêu để chi phí thuê nhân công xây dựng là thấp nhất? KQ:

## B. ĐỀ ÔN TẬP SỐ 2

## 1 Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1 (Mức độ N).** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ . B. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-1; 1)$ .  
C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ . D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .

**Câu 2 (Mức độ N).** Hàm số nào dưới đây không có cực trị?

- A.  $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ . B.  $y = \frac{2x - 2}{x + 1}$ . C.  $y = x^2 - 2x + 1$ . D.  $y = -x^3 + x + 1$ .

**Câu 3 (Mức độ N).** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{3 \sin x + 2}{\sin x + 1}$  trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

- A.  $\frac{5}{2}$ . B.  $\frac{11}{2}$ . C.  $\frac{31}{2}$ . D. 2.

**Câu 4 (Mức độ N).** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|        |           |           |           |
|--------|-----------|-----------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-2$      | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $+\infty$ | 3         |

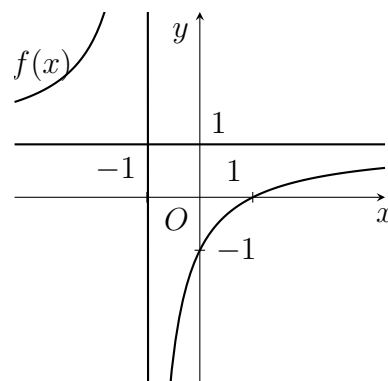
Tổng tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

**Câu 5 (Mức độ N).**

Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- A.  $y = \frac{x-1}{x+1}$ . B.  $y = \frac{-2x+1}{2x+2}$ .  
C.  $y = x^4 - 3x^2$ . D.  $y = x^3 - 3x^2$ .



**Câu 6 (Mức độ H).** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x(x-2)^3, \forall x \in \mathbb{R}$ . Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(1; 3)$ . B.  $(-1; 0)$ . C.  $(0; 2)$ . D.  $(-2; 0)$ .

**Câu 7 (Mức độ H).** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng  $-3$ . B. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng 1.  
C. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng  $-6$ . D. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng 2.

**Câu 8 (Mức độ H).** Gọi  $m, M$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \sqrt{4 - x^2}$ . Tổng  $m + M$  bằng

A. 2.

B. 0.

C. 4.

D. 1.

**Câu 9 (Mức độ H).** Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$  là

A.  $y = x + 1$ .

B.  $y = x$ .

C.  $y = -x$ .

D.  $y = -1$ .

**Câu 10 (Mức độ V).** Biết đường thẳng  $y = x - 1$  cắt đồ thị hàm số  $y = \frac{-x + 5}{x - 2}$  tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2$ . Giá trị  $x_1 + x_2$  bằng

A. -1.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

**Câu 11 (Mức độ V).**

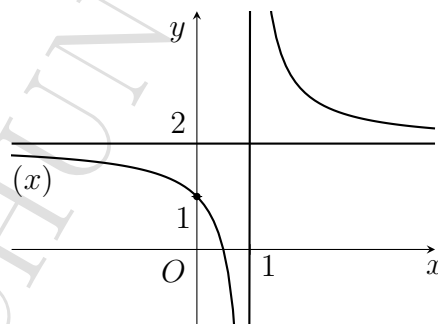
Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{ax + 2}{bx + c}$ , ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A.  $b < a < 0 < c$ .

B.  $b < 0 < a < c$ .

C.  $a < b < 0 < c$ .

D.  $b < 0 < c < a$ .



**Câu 12 (Mức độ C).** Tìm tất cả các giá trị thực của  $m$  để phương trình  $|x^4 - 2x^2 - 3| = 2m - 1$  có đúng 6 nghiệm thực phân biệt.

A.  $1 < m < \frac{1}{3}$ .

B.  $4 < m < 5$ .

C.  $3 < m < 4$ .

D.  $2 < m < \frac{5}{2}$ .

2

**Câu trắc nghiệm đúng sai**

**Câu 13.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 7}{x - 4}$ . Khi đó

| Phát biểu                                                            | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị $f(x)$ có tiệm cận đứng là $x = 4$ .                       |   |   |
| b) Đồ thị $f(x)$ có hai điểm cực trị.                                |   |   |
| c) Đồ thị $f(x)$ có tiệm cận xiên là $y = x + 2$ .                   |   |   |
| d) Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x) - 5}$ có 4 đường tiệm cận đứng. |   |   |

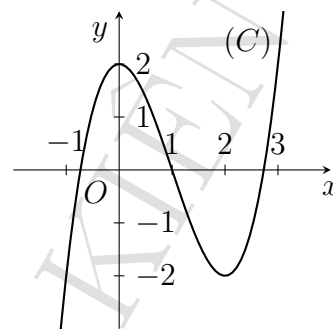
**Câu 14.** Cho hàm số  $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                                       | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ .                                                                                                  |   |   |
| b) Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại $x = \frac{3 + \sqrt{6}}{3}$ .                                                                                 |   |   |
| c) Với $m = 1$ thì phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt.                                                                              |   |   |
| d) Với $m > -2$ thì đường thẳng $y = mx - m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ tại ba điểm $A, B, C$ phân biệt sao cho $AB = BC$ . |   |   |

**Câu 15.**

Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị  $(C)$  như hình vẽ bên. Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                                         | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ .                                                                                                 |   |   |
| b) Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại $x = 0$ .                                                                                                        |   |   |
| c) Hàm số $f( x )$ có 3 điểm cực trị.                                                                                                             |   |   |
| d) Cho đường thẳng $(d): y = x - 1$ và đồ thị $(C)$ . Biết phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm $x_1 < x_2 < x_3$ . Khi đó $x_1 \cdot x_3 = -2$ . |   |   |



**Câu 16.** Cho hàm số  $f(x) = mx^4 + 2(m - 1)x^2$  với  $m$  là tham số thực. Khi đó

| Phát biểu                                                               | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Với $m = 1$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ . |   |   |
| b) Với $m \neq 0$ hàm số $f(x)$ không có cực trị.                       |   |   |
| c) Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$ khi $m < 0$ .                  |   |   |
| d) Nếu $\min_{[0;2]} f(x) = f(1)$ thì $\max_{[0;2]} f(x) = f(2) = 4$ .  |   |   |

## 3

## Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 17 (Mức độ N).** Nếu trong một ngày, một đội công nhân sản xuất được  $x$  sản phẩm thì chi phí trung bình cho một sản phẩm (tính bằng nghìn đồng) được cho bởi công thức  $C(x) = \frac{24x + 2024}{x}$ . Đồ thị hàm số  $C(x)$  có bao nhiêu đường tiệm cận?

KQ:

**Câu 18 (Mức độ N).** Khối lượng  $q$  (kg) của một mặt hàng mà cửa tiệm bán được trong một ngày phụ thuộc vào giá bán  $q$  (nghìn đồng/kg) theo công thức  $p = 15 - \frac{1}{2}q$ . Doanh thu từ việc bán mặt hàng trên của cửa tiệm được tính theo công thức  $R = pq$ . Tìm giá bán mỗi kilogram sản phẩm để đạt được doanh thu cao nhất.

KQ:

**Câu 19 (Mức độ H).** Một tiệm trà sữa  $Y$  bán mỗi ngày được  $x$  ly trà sữa ( $1\,000 \leq x \leq 1\,800$ ). Tổng chi phí sản xuất  $x$  ly trà sữa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí  $A(x) = x^3 - 30x^2 - 2350x + 35\,000$ . Giả sử cửa hàng bán hết hàng mỗi ngày. Gọi  $B(x)$  là số tiền bán được và  $C(x)$  là lợi nhuận thu được khi bán  $x$  ly trà sữa. Hỏi cửa hàng  $Y$  phải bán bao nhiêu ly để lợi nhuận của cửa hàng đó cao nhất.

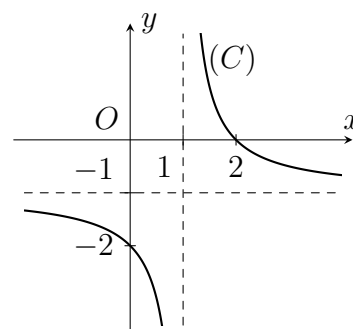
KQ:

**Câu 20 (Mức độ H).**

Cho hàm số  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$  (với  $a, b, c, d$  là số thực) có đồ thị như hình bên.

Tính giá trị biểu thức  $T = \frac{a - 2b + 3d}{c}$ .

KQ:



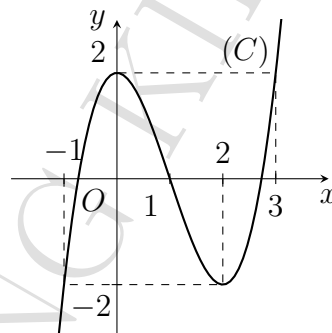
**Câu 21 (Mức độ V).** Gọi  $S$  là tập tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $2x^3 - 3x^2 = 2m + 1$  có đúng hai nghiệm phân biệt. Tính tổng các phần tử của  $S$ . KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 22 (Mức độ C).**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Đặt  $g(x) = f(x - m) - \frac{1}{2}(x - m - 1)^2 + 2024$ , với  $m$  là tham số thực. Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị nguyên dương của  $m$  để hàm số  $y = g(x)$  đồng biến trên khoảng  $(5; 6)$ . Tổng tất cả các phần tử trong  $S$  bằng bao nhiêu? KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|



### C. ĐỀ ÔN TẬP SỐ 3

#### 1 Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Cho các hằng số  $a, b, c, d$  khác 0 thỏa mãn  $ad - bc \neq 0$ . Đồ thị của hàm số  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$  có đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là

**A.**  $x = \frac{d}{c}, y = \frac{a}{c}$ .

**B.**  $x = \frac{-d}{c}, y = \frac{a}{c}$ .

**C.**  $x = \frac{-d}{c}, y = \frac{b}{d}$ .

**D.**  $x = \frac{-b}{a}, y = \frac{b}{d}$ .

**Câu 2.** Cho các hằng số  $a, b, c, d, m$  khác 0 thỏa mãn  $ad - bc \neq 0$ . Đồ thị hàm số  $y = ax + b + \frac{m}{cx + d}$  có đường tiệm cận xiên là

**A.**  $y = cx + d$ .

**B.**  $y = a + bx$ .

**C.**  $y = c + dx$ .

**D.**  $y = ax + b$ .

**Câu 3.**

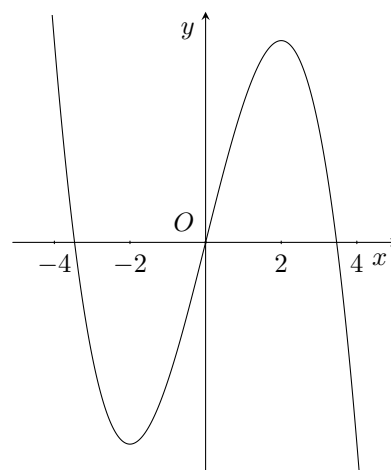
Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.**  $(-4; 2)$ .

**B.**  $(0; 4)$ .

**C.**  $(-2; 0)$ .

**D.**  $(-4; 4)$ .



**Câu 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f'(x) > 0, \forall x \in (0; 1), f'(x) < 0, \forall x \in (1; 2)$ . Phát biểu nào sau đây **đúng**?

**A.** Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên các khoảng  $(0; 1)$  và  $(1; 2)$ .

**B.** Hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên các khoảng  $(0; 1)$  và  $(1; 2)$ .

**C.** Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(0; 1)$  và nghịch biến trên khoảng  $(1; 2)$ .

**D.** Hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(0; 1)$  và đồng biến trên khoảng  $(1; 2)$ .

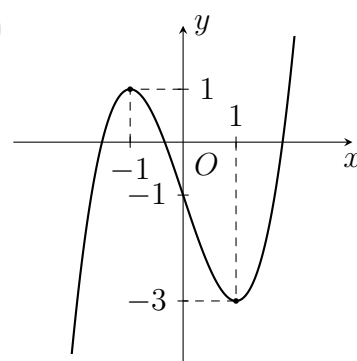
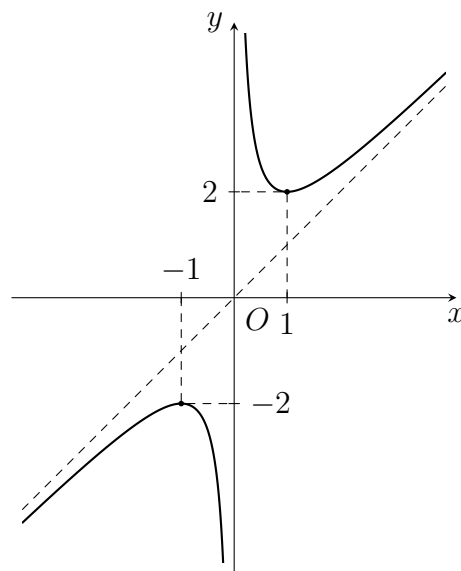
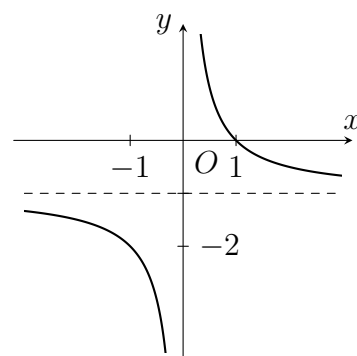
**Câu 5.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f'(x) = x^2 - 5x - 6, \forall x \in \mathbb{R}$ . Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?



**A.**  $(0; 3)$ .**B.**  $(-6; 1)$ .**C.**  $(-\infty; -1)$ .**D.**  $(6; +\infty)$ .**Câu 6.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau.

|         |           |   |   |   |   |   |           |
|---------|-----------|---|---|---|---|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |   | 0 |   | 2 |   | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | + | 0 | - | 0 | + |           |
| $f(x)$  | $-\infty$ |   | 4 |   | 0 |   | $+\infty$ |

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.**  $(0; 2)$ .**B.**  $(0; +\infty)$ .**C.**  $(-\infty; 0)$ .**D.**  $(-\infty; 2)$ .**Câu 7.**Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình bên. Phát biểu nào sau đây là đúng?**A.**  $x_{CT} = -1, x_{CD} = 1$ .**B.**  $x_{CT} = -3, x_{CD} = 1$ .**C.**  $x_{CT} = 1, x_{CD} = -3$ .**D.**  $x_{CT} = 1, x_{CD} = -1$ .**Câu 8.**Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên. Phát biểu nào sau đây là đúng?**A.**  $y_{CT} = 1, y_{CD} = 2$ .**B.**  $y_{CT} = 2, y_{CD} = -1$ .**C.**  $y_{CT} = -2, y_{CD} = 2$ .**D.**  $y_{CT} = 2, y_{CD} = -2$ .**Câu 9.**Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên.**A.** Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng  $x = -1$ , đường tiệm cận ngang  $y = 0$ .**B.** Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng  $x = -1$ , đường tiệm cận ngang  $y = -1$ .**C.** Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng  $x = 0$ , đường tiệm cận ngang  $y = 0$ .**D.** Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng  $x = 0$ , đường tiệm cận ngang  $y = -1$ .

**Câu 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(x) < f(0), \forall x \in (-1; 1) \setminus \{0\}$  và  $f(x) > f(2), \forall x \in (1; 3) \setminus \{2\}$ . Phát biểu nào sau đây **đúng**?

- A.**  $x_{CT} = 0, x_{CD} = 2$ . **B.**  $x_{CT} = 2, x_{CD} = 0$ . **C.**  $x_{CT} = -1, x_{CD} = 3$ . **D.**  $x_{CT} = 3, x_{CD} = -1$ .

**Câu 11.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau.

|      |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $2$       | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $-$       | $-$       |
| $y$  | $1$       | $+\infty$ | $1$       |

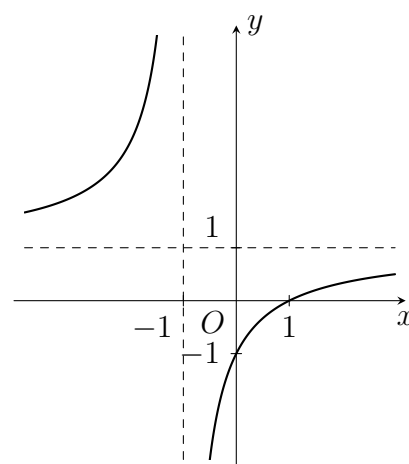
Đường tiệm cận ngang, tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A.**  $x = 1, y = 1$ . **B.**  $x = 1, y = 2$ . **C.**  $x = 2, y = 1$ . **D.**  $x = 2, y = 2$ .

**Câu 12.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị ở hình bên. Đường thẳng nào sau đây là trục đối xứng của đồ thị hàm số đã cho?

- A.**  $y = x$ . **B.**  $y = -x$ . **C.**  $y = 0$ . **D.**  $x = 0$ .

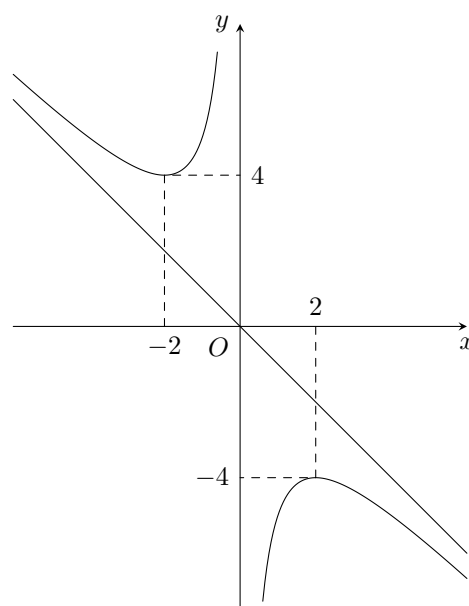


**Câu 13.**

Cho hàm số  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x}, (ac \neq 0)$  có đồ thị như hình bên.

Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng

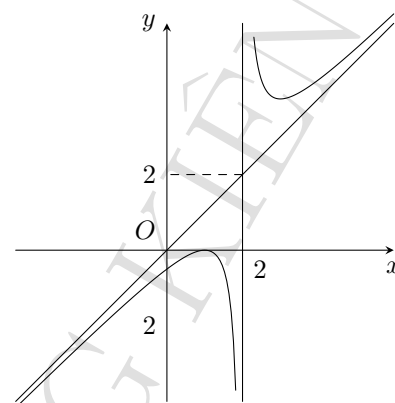
- A.** Đường thẳng  $y = x$ . **B.** Đường thẳng  $y = -x$ . **C.** Đường thẳng  $x = 0$ . **D.** Đường thẳng  $y = 2x$ .



**Câu 14.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị ở hình bên. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số có tọa độ là

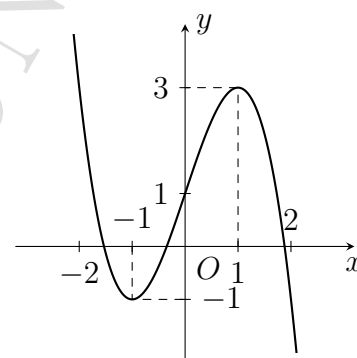
- A.**  $(2; 2)$ .      **B.**  $(-2; -2)$ .      **C.**  $(-2; 2)$ .      **D.**  $(2; -2)$ .



**Câu 15.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình bên. Gọi  $m$ ,  $M$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[-2; 2]$ . Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A.**  $m = -2, M = 2$ .      **B.**  $m = 1, M = 3$ .  
**C.**  $m = 3, M = 1$ .      **D.**  $m = -1, M = 3$ .



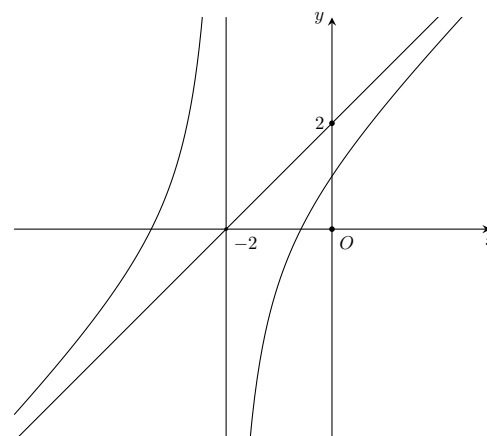
## 2 Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 16.** Cho hàm số  $f(x) = x - \sin 2x$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                             | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $f'(x) = 1 + 2 \cos 2x$ .                                                                          |   |   |
| b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$ .                                               |   |   |
| c) Trên đoạn $[0; \pi]$ phương trình $f'(x) = 0$ có đúng một nghiệm $\frac{5\pi}{6}$ .                |   |   |
| d) Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; \pi]$ là $\frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ . |   |   |

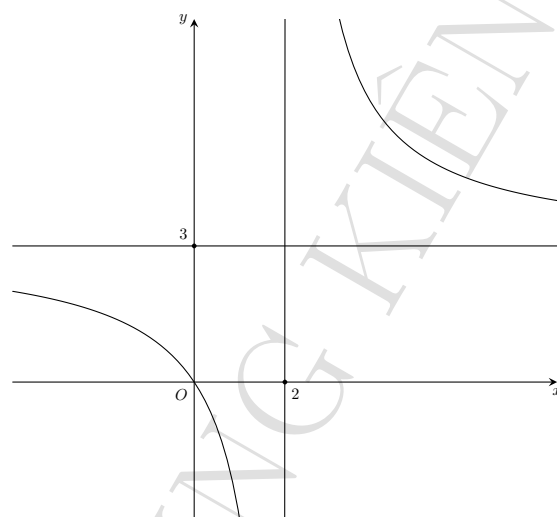
**Câu 17.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{x + 2}$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                             | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $f(x) = x + 2 - \frac{2}{x + 2}, \forall x \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$ . |   |   |
| b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường $x = 2$ .                                  |   |   |
| c) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường $y = x + 2$ .                              |   |   |
| d) Hàm số đã cho có đồ thị như hình bên.                                              |   |   |



**Câu 18.**

Cho hàm số  $y = \frac{3x+a}{x+b}$  có đồ thị như hình bên. Khi đó



| Phát biểu                                         | Đ | S |
|---------------------------------------------------|---|---|
| a) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 2$ . |   |   |
| b) $b = 2$ .                                      |   |   |
| c) Đồ thị hàm số không đi qua gốc tọa độ.         |   |   |
| d) $a = 0$ .                                      |   |   |

**Câu 19.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau

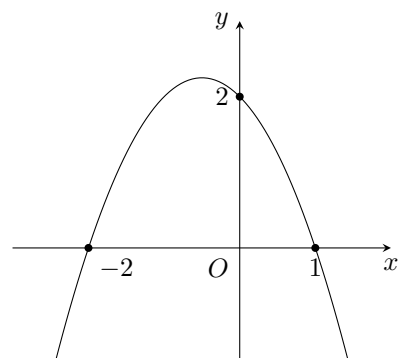
|         |           |     |      |     |     |     |           |
|---------|-----------|-----|------|-----|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |     | $-1$ |     | $1$ |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$ | $0$  | $+$ | $0$ | $-$ |           |
| $f(x)$  | 142       |     |      |     | 38  |     |           |
|         |           |     |      | 8   |     | 14  |           |

Khi đó

| Phát biểu                                            | Đ | S |
|------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(8; 14)$ . |   |   |
| b) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 8.               |   |   |
| c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 38.              |   |   |
| d) Hàm số đã cho đồng biến trên $(8; 14)$ .          |   |   |

**Câu 20.** Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , ( $a, b, c, d$  là các số thực và  $a \neq 0$ ) có đồ thị hàm số  $f'(x)$  như hình vẽ. Khi đó

| Phát biểu                                                 | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------|---|---|
| a) Điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là $x_{CT} = -2$ . |   |   |
| b) Điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ là $x_{CD} = 1$ .   |   |   |
| c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; 1)$ .            |   |   |
| d) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(2025; 2026)$ .    |   |   |



**Câu 21.** Trong 9 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình  $s(t) = -t^3 + 9t^2 + 21t + 1$ , trong đó  $t$  tính bằng giây và  $s$  tính bằng mét. Khi đó

| Phát biểu                       | Đ | S |
|---------------------------------|---|---|
| a) $s'(t) = -3t^2 + 18t + 21$ . |   |   |

| Phát biểu                                                                   | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------|---|---|
| b) $s''(t) = -3t + 18$ .                                                    |   |   |
| c) Phương trình $s'(t) = 0$ có đúng một nghiệm dương là $t = 7$ .           |   |   |
| d) Gia tốc của chất điểm tại thời điểm vật dừng lại là $36 \text{ m/s}^2$ . |   |   |

**Câu 22.** Trong 200 gam dung dịch muối nồng độ 15%, giả sử thêm vào dung dịch  $x$  gam muối tinh khiết và được dung dịch có nồng độ  $f(x)\%$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                      | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số $f(x) = \frac{100(x+200)}{x+30}$ .                                                   |   |   |
| b) Đạo hàm của hàm số luôn nhận giá trị âm trên khoảng $(0; +\infty)$ .                        |   |   |
| c) Thêm càng nhiều gam muối tinh khiết thì nồng độ phần trăm càng tăng và không vượt quá 100%. |   |   |
| d) Giới hạn của $f(x)$ khi $x$ dần đến dương vô cực bằng 100.                                  |   |   |

**Câu 23.** Một chất điểm chuyển động theo phương trình  $s = f(t) = 0,5 \cos(2\pi t)$  trong đó  $s$  tính bằng mét,  $t$  tính bằng giây. Khi đó

| Phát biểu                                                                                | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t$ là $-\pi \sin(2\pi t) \text{ m/s}$ . |   |   |
| b) Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t$ là $-2 \cos(2\pi t) \text{ m/s}^2$ . |   |   |
| c) Vận tốc lớn nhất của chất điểm bằng $\pi \text{ m/s}$ .                               |   |   |
| d) Gia tốc lớn nhất của chất điểm bằng $2\pi^2 \text{ m/s}^2$ .                          |   |   |

**Câu 24.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(1) \leq f(x) \leq f(-1), \forall x \in \mathbb{R}$ . Khi đó

| Phát biểu                                                     | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là $f(1)$ .  |   |   |
| b) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là $f(-1)$ . |   |   |
| c) Điểm cực tiểu của hàm số là $x_{CT} = -1$ .                |   |   |
| d) Điểm cực đại của hàm số là $x_{CD} = 1$ .                  |   |   |

**Câu 25.** Một công ty sản xuất một sản phẩm. Bộ phận tài chính của công ty đưa ra hàm giá bán là  $p(x) = 1000 - 25x$ , trong đó  $p(x)$  (triệu đồng) là giá bán của mỗi sản phẩm mà tại giá bán này có  $x$  sản phẩm được bán ra. Khi đó

| Phát biểu                                                                                         | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm doanh thu của công ty là $f(x) = x \cdot p(x)$ .                                           |   |   |
| b) Hàm số $f(x) = -25x^2 + 1000x$ có đạo hàm $f'(x) = -50x + 1000$ .                              |   |   |
| c) Nếu $f(x) = x \cdot p(x)$ là hàm doanh thu thì phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm là $x = 2$ . |   |   |
| d) Hàm doanh thu đạt giá trị lớn nhất bằng 10 000.                                                |   |   |

### 3 Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 26.** Giả sử hàm số  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$  đạt cực đại tại  $x = a$  và đạt cực tiểu tại  $x = b$ . Giá trị của biểu thức  $A = 2a + b$  là bao nhiêu?

KQ:

**Câu 27.** Cho đồ thị hàm số  $f(x) = \frac{3x+5}{-x+7}$  có tâm đối xứng là  $I(a; b)$ . Giá trị của biểu thức  $B = -4a - b$  là bao nhiêu?

KQ:

**Câu 28.** Cho đồ thị hàm số  $f(x) = 5x - 1 + \frac{8}{x-1}$  có tâm đối xứng là  $I(a; b)$ . Giá trị của biểu thức  $C = a + 3b$  là bao nhiêu?

KQ:

**Câu 29.** Cho  $a \neq 0$ ,  $b^2 - 3ac > 0$ . Hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

KQ:

**Câu 30.** Cho các hằng số  $a, b, c, d$  khác 0 thỏa mãn  $ad - bc \neq 0$ . Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  là bao nhiêu?

KQ:

**Câu 31.** Số dân của một thị trấn sau  $t$  năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức  $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$  ( $f(t)$  được tính bằng nghìn người).

(Nguồn: Giải tích 12 nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020)

Xem  $y = f(t)$  là một hàm số xác định trên nửa khoảng  $[0; +\infty)$ . Đồ thị hàm số  $y = f(t)$  có đường tiệm cận ngang là  $y = a$ . Giá trị của  $a$  là bao nhiêu?

KQ:

**Câu 32.** Trong 18 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình  $s(t) = -t^3 + 18t^2 + t + 3$ , trong đó  $t$  tính bằng giây và  $s$  tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu mét trên giây trong 18 giây đầu tiên đó?

KQ:

### D. ĐỀ ÔN TẬP SỐ 4

### 1 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau.

|      |           |      |     |           |     |
|------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $2$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $4$  | $3$ | $+\infty$ |     |

Giá trị cực tiểu của hàm số bằng

- A. 4. B. 2. C. -1. D. 3.

**Câu 2.** Hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 - 1$  đồng biến trên khoảng

- A.  $(-\infty; 0)$  và  $(2; +\infty)$ . B.  $(0; 3)$ .  
C.  $(0; 2)$ . D.  $(1; +\infty)$ .

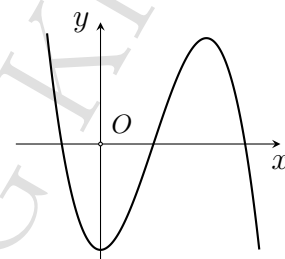
**Câu 3.** Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x-4}{x+2}$  là

- A.  $y = 2$ . B.  $x = 2$ . C.  $x = -2$ . D.  $y = -2$ .

**Câu 4.**

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- A.  $y = -x^3 - 3x^2 + 2$ . B.  $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ .  
C.  $y = x^4 - x^2 - 2$ . D.  $y = -x^4 + x^2 - 2$ .



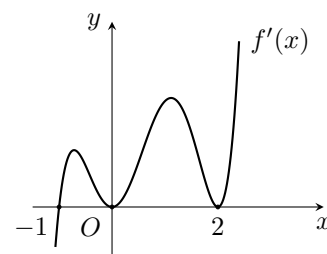
**Câu 5.** Tìm các giá trị  $m$  để hàm số  $y = x^3 - mx - 2$  đạt cực đại tại  $x = -2$ .

- A. 4. B. 12. C. -4. D. -12.

**Câu 6.**

Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số  $y = f(x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.



**Câu 7.** Tìm số điểm cực trị của hàm số  $f$  có đạo hàm  $f'(x) = (x+1)^2(x-2)^3(2x+3)$ .

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

**Câu 8.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{2x-1}{x-1}$  cắt đường thẳng  $y = x - 1$  tại mấy điểm phân biệt?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

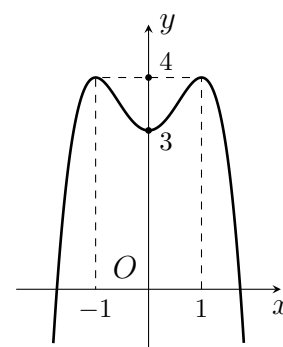
**Câu 9.** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên  $\mathbb{R}$ ?

- A.  $y = x^4 - x^2$ . B.  $y = x^3 - x$ . C.  $y = \frac{x-1}{x+2}$ . D.  $y = x^3 + x$ .

**Câu 10.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình bên. Phương trình  $f(x) = \pi$  có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.



**Câu 11.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  sao cho ứng với mỗi  $m$ , hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 - 3mx + \frac{5}{3}$  có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng  $(-2; 5)$ ?

- A. 16. B. 6. C. 17. D. 7.

**Câu 12.** Cho hàm số  $y = \frac{x+1}{x^2-2mx+4}$ . Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị có ba đường tiệm cận.



A.  $\begin{cases} m < -2; m \neq -\frac{5}{2} \\ m > 2 \end{cases}$  B.  $m > 2$ .

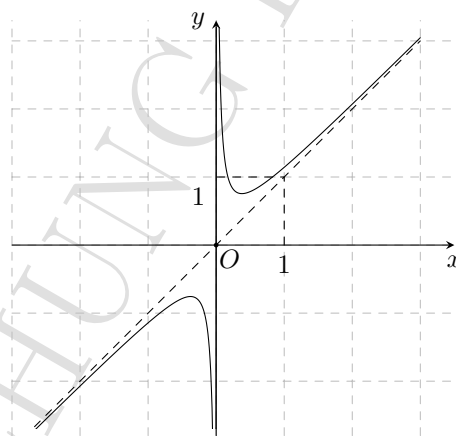
C.  $\begin{cases} m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$

D.  $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$

## 2 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 13.

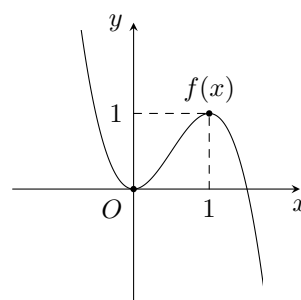
Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + b'}$  (với  $a, b, c, b'$  là các số thực) có đồ thị như hình bên. Khi đó



| Phát biểu                                                | Đ | S |
|----------------------------------------------------------|---|---|
| a) $x = 0$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số. |   |   |
| b) Hàm số đã cho có một điểm cực trị.                    |   |   |
| c) $y = x$ là một đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số. |   |   |
| d) Các hệ số $a, b, c, b'$ có tất cả là 3 số dương.      |   |   |

Câu 14.

Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó



| Phát biểu                                   | Đ | S |
|---------------------------------------------|---|---|
| a) Phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm.     |   |   |
| b) Phương trình $f(x) = 1$ vô nghiệm.       |   |   |
| c) Phương trình $f(x) + 1 = 0$ có 2 nghiệm. |   |   |
| d) Phương trình $f(x) = x$ có 3 nghiệm.     |   |   |

Câu 15. Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                        | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .                       |   |   |
| b) $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$ .                                                 |   |   |
| c) Đường thẳng $y = x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.                                       |   |   |
| d) Số giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $ f(x)  - m = 0$ có 4 nghiệm bé hơn 1 là 3. |   |   |

Câu 16. Cho hàm số  $y = \frac{-4x + 5}{2x + 3}$  có đồ thị  $(C)$ . Khi đó

| Phát biểu                                     | Đ | S |
|-----------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số không có cực trị.                   |   |   |
| b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -3$ .  |   |   |
| c) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$ . |   |   |

| Phát biểu                                                                                       | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| d) Các đường tiệm cận của đồ thị tạo với hai trục toạ độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 3. |   |   |

### 3 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 17.** Hàm số  $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1}$  có tâm đối xứng là  $I(a; b)$ . Giá trị  $2a + b$  bằng bao nhiêu?

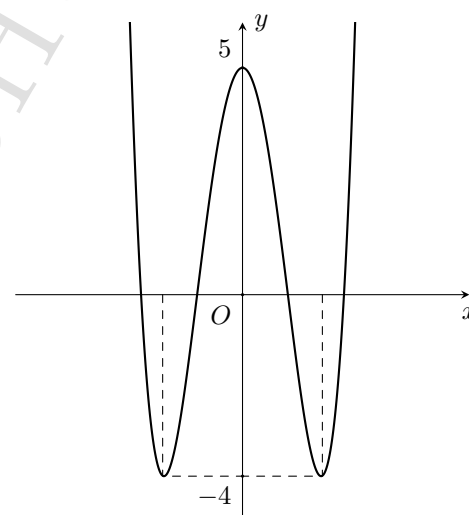
KQ:

**Câu 18.** Cho hàm số  $y = \frac{mx - 2m - 3}{x - m}$  với  $m$  là tham số. Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của  $m$  để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của  $S$ . KQ:

**Câu 19.**

Cho hàm số bậc bốn  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  sao cho ứng với mỗi  $m$ , phương trình  $2f(x) = m$  có 4 nghiệm thực phân biệt?

KQ:



**Câu 20.** Một vật chuyển động theo quy luật  $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$  với  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu m/s?

KQ:

**Câu 21.** Thể tích  $V$  của 1 kg nước (tính bằng  $\text{cm}^3$ ) ở nhiệt độ  $T$  (đơn vị:  $^{\circ}\text{C}$ ) khi  $T$  thay đổi từ  $^{\circ}\text{C}$  đến  $30^{\circ}\text{C}$  được cho xấp xỉ bởi công thức  $V = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000769T^3$ .

(Nguồn: James Stewart, J. (2015). Calculus. Cengage Learning 8th edition, p.284)

Tìm nhiệt độ  $T_0 \in (0; 30)$  để kể từ nhiệt độ  $T_0$  trở lên thì thể tích  $V$  tăng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

KQ:

**Câu 22.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2 - 82x$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(x^4 - 18x^2 + m)$  có đúng 7 cực trị.

KQ:

## E. ĐỀ ÔN TẬP SỐ 5

### 1 Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số  $y = \frac{x+2}{x-1}$  và đường thẳng  $y = 2x$  là

A.  $(2; -4)$  và  $(2; 3)$ .

B.  $(\frac{1}{2}; 1)$ .

C.  $(2; 4)$  và  $(-\frac{1}{2}; 1)$ .

D.  $(2; 4)$  và  $(-\frac{1}{2}; -1)$ .

**Câu 2.**

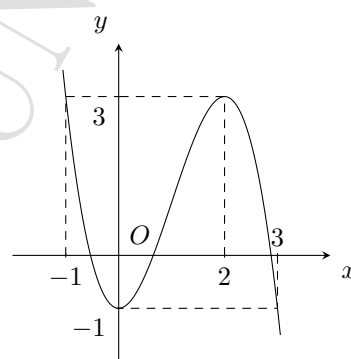
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên  $(-1; 3)$ .

B. Hàm số  $y = f(x)$  chỉ nghịch biến trên  $(-\infty; -1)$ .

C. Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên  $(0; +\infty)$ .

D. Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên  $(0; 2)$ .



**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2(x-1)(x^2-4)$ . Số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x)$  là

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = -x^4 + 2x^2 + 3$  có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu lần lượt là  $y_1$  và  $y_2$ . Khi đó khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $y_1 + 3y_2 = 15$ .

B.  $2y_1 - y_2 = 5$ .

C.  $y_2 - y_1 = 2\sqrt{3}$ .

D.  $y_1 + y_2 = 12$ .

**Câu 5.** Tại trường THPT Y, để giảm nhiệt độ trong các phòng học từ nhiệt độ ban đầu là  $28^\circ\text{C}$ , một hệ thống điều hòa làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi  $T$  (đơn vị  $^\circ\text{C}$ ) là nhiệt độ phòng ở phút thứ  $t$  (tính từ thời điểm bật máy) được cho bởi công thức  $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$  ( $t \in [0; 10]$ ). Nhiệt độ thấp nhất trong phòng có thể đạt được trong khoảng thời gian 10 phút đó gần đúng là

A.  $27,832^\circ\text{C}$ .

B.  $18,4^\circ\text{C}$ .

C.  $26,2^\circ\text{C}$ .

D.  $25,312^\circ\text{C}$ .

**Câu 6.** Số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$  với trục  $Ox$  là

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

**Câu 7.** Tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị của hàm số  $y = \frac{2x-1}{2x+3}$  là

A.  $(1; -\frac{2}{3})$ .

B.  $(-\frac{3}{2}; 1)$ .

C.  $(1; -\frac{3}{2})$ .

D.  $(-\frac{2}{3}; 1)$ .

**Câu 8.** Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x + 2}$  là

A.  $y = -2$ .

B.  $y = 1$ .

C.  $y = x + 2$ .

D.  $y = x$ .

**Câu 9.** Hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  với  $a, b, c, d$  là các số thực và  $a \neq 0$  có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

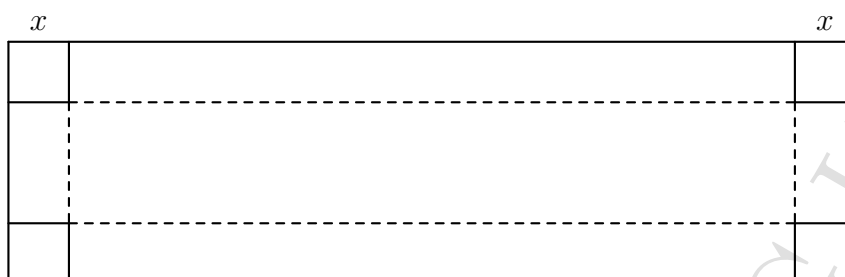
A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

**Câu 10.** Một tấm bìa cứng hình chữ nhật có kích thước 3 m x 8 m. Người ta cắt mỗi góc của tấm bìa một hình vuông có cạnh là  $x$  để tạo ra hình hộp chữ nhật không nắp.



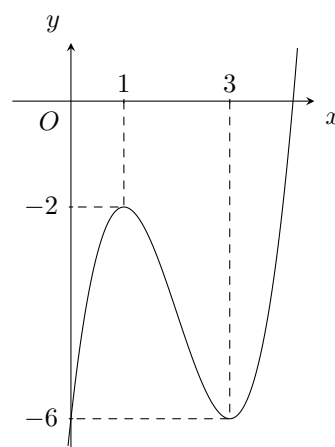
Với giá trị nào của  $x$  thì thể tích của khối hộp chữ nhật đạt giá trị lớn nhất?

- A.**  $x = 1$  m.      **B.**  $x = \frac{2}{3}$  m.      **C.**  $x = \frac{1}{3}$  m.      **D.**  $x = \frac{4}{3}$  m.

**Câu 11.**

Đường cong cho trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong 4 hàm số sau đây?

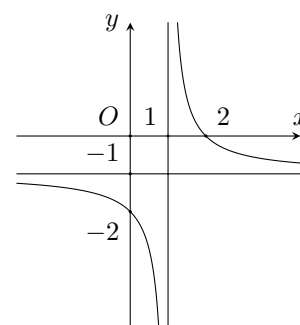
- A.**  $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 6$ .      **B.**  $y = \frac{2x - 6}{x + 1}$ .  
**C.**  $y = x^4 - 2x^2 - 6$ .      **D.**  $y = -x^3 + 14x^2 - 9x - 6$ .



**Câu 12.**

Cho hàm số  $y = \frac{ax + b}{x + c}$  có đồ thị như hình vẽ, với  $a, b, c$  là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức  $T = a - 3b + 2c$ .

- A.**  $T = -9$ .      **B.**  $T = 12$ .      **C.**  $T = 10$ .      **D.**  $T = 7$ .



## 2

### Câu trắc nghiệm đúng sai

**Câu 13.** Dân số của một quốc gia sau  $t$  (năm) kể từ năm 2023 được ước tính bởi công thức  $N(t) = 100e^{0,012t}$  ( $N(t)$  được tính bằng triệu người,  $0 \leq t \leq 50$ ). Đạo hàm của hàm số  $N(t)$  biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/năm). Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                                              | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tốc độ tăng dân số của quốc gia $N'(t) = 1,2e^{0,012t}$ .                                                                                           |   |   |
| b) Ước tính dân số của quốc gia này vào năm 2030 là 108,763 triệu người (kết quả tính bằng triệu người, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba). |   |   |

| Phát biểu                                                                   | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------|---|---|
| c) Hàm số $N(t)$ đồng biến trên đoạn $[0; 50]$ .                            |   |   |
| d) Vào năm 2045 tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/ năm. |   |   |

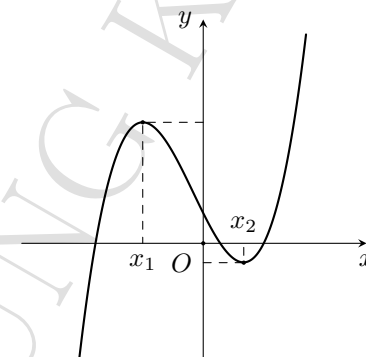
**Câu 14.**

Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , ( $a \neq 0$ ) có đồ thị như hình vẽ bên.

Khi đó

| Phát biểu          | Đ | S |
|--------------------|---|---|
| a) Hệ số $a > 0$ . |   |   |
| b) Hệ số $d > 0$ . |   |   |

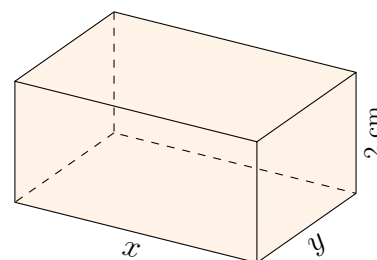
| Phát biểu          | Đ | S |
|--------------------|---|---|
| c) Hệ số $c > 0$ . |   |   |
| d) Hệ số $b < 0$ . |   |   |



**Câu 15.**

Người ta muốn chế tạo một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có thể tích  $500\text{cm}^3$  với yêu cầu dùng ít vật liệu nhất. Chiều cao hộp phải là 2 cm, các kích thước khác là  $x, y$  với  $x > 0$  và  $y > 0$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                                     | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Biểu thị $y$ theo $x$ là $y = \frac{500}{x}$ .                                                             |   |   |
| b) Diện tích toàn phần của chiếc hộp là $S(x) = 500 + 4x + \frac{1000}{x}$ .                                  |   |   |
| c) Hàm số $S(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ .                                                       |   |   |
| d) Vật liệu ít nhất khi hộp có các kích thước 14,2 cm, 14,2 cm và 2 cm (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười). |   |   |



**Câu 16.** Cho hàm số  $y = 2x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x - 3$  có đồ thị ( $C$ ). Khi đó

| Phát biểu                                                                                                   | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ .                                                                      |   |   |
| b) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$ .                                                             |   |   |
| c) Hàm số không có cực trị.                                                                                 |   |   |
| d) Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = m$ tại 3 điểm khi và chỉ khi $-\frac{329}{108} < m < -\frac{11}{4}$ . |   |   |

**3**

**Câu trắc nghiệm trả lời ngắn**

**Câu 17.** Sau những ngày mưa lớn, ở Thành phố Hồ Chí Minh thường xuyên bị ngập. Mức nước ngập trung bình tại một vị trí bất kì (nếu có) được tính theo hàm số  $y = -3x^4 + 2\sqrt{5}x^3 - 6x^2 + 6\sqrt{5}x + 7$ , với  $|x|$  (km) là khoảng cách tính từ cổng trường ĐH Y Dược Tp HCM đến điểm đó. Nhà bạn An ở nơi có mực nước ngập cao nhất của TP, mỗi ngày An đến trường ĐH Y Dược bằng cách đi bộ với vận tốc 60 mét/phút. Thời gian An đi từ nhà đến trường là bao nhiêu phút? (Làm tròn đến hàng đơn vị)

KQ:

**Câu 18.** Đồ thị của hàm số  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$  có đường tiệm cận xiên  $y = ax + b$  với  $a, b \in \mathbb{N}$ . Tính  $2023a + 2024b$ . KQ:

**Câu 19.** Hàm số  $y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$  đạt cực tiểu tại điểm  $x = a$  và đạt cực đại tại  $x = b$ . Tính  $T = a + 2b$ . KQ:

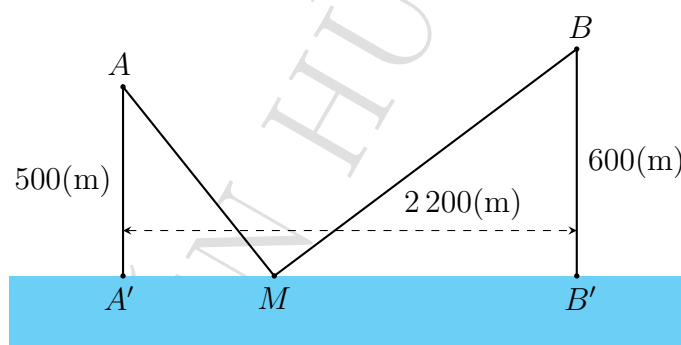
**Câu 20.** Kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam trong các năm từ 2010 đến 2017 có thể được tính xấp xỉ bằng công thức  $f(x) = 0,01x^3 - 0,04x^2 + 0,25x + 0,44$  (tỉ USD) với  $x$  là số năm tính từ 2010 đến 2017 ( $0 \leq x \leq 7$ ).

(Theo: <https://infographics.vn/interactive-xuat-khau-rau-qua-du-bao-bung-no-dat-4-ty-usd-trong-nam-2023/116220.vna>)

Kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến năm nào?

KQ:

**Câu 21.** Có hai xã  $A, B$  cùng ở một bên bờ sông Lam, khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông lần lượt là  $AA' = 500$  m,  $BB' = 600$  m và người ta đo được  $A'B' = 2\,200$  m. Các kĩ sư muốn xây một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông Lam cho dân hai xã. Để tiết kiệm chi phí, các kĩ sư cần phải chọn vị trí  $M$  của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn  $A'B'$  sao cho tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí  $M$  là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó. KQ:



**Câu 22.** Một công ty kinh doanh bất động sản có 20 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng/1 tháng thì tất cả các căn hộ đều có người thuê. Nhưng cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 200 nghìn đồng/1 tháng thì có thêm một căn hộ bỏ trống. Hỏi công ty nên cho thuê mỗi căn hộ giá bao nhiêu triệu để tổng số tiền thu được là lớn nhất? KQ:

TRUNG TÂM THIÊN AN – 134 THỐNG NHẤT, TÂN THÀNH, TÂN PHÚ, TP HCM

ThS: NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN



PHẦN

# HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG

TRUNG TÂM THIÊN AN – 134 THỐNG NHẤT, TÂN THÀNH, TÂN PHÚ, TP HCM

ThS: NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

12

## CÁC DẠNG BÀI TẬP TOÁN 12

Chương 2

## VECTƠ VÀ HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

THẦY KIÊN TOÁN: ————— DẠY THẬT - HỌC THẬT - GIÁ TRỊ THẬT —————

K12 – CHƯƠNG 2

## §1. VECTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRONG KHÔNG GIAN

## A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

## 1 Vectơ trong không gian

**Định nghĩa 7** Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

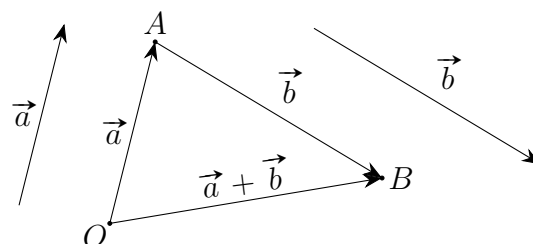
- ⚠️ **Chú ý:**
- ☑️ Ký hiệu  $\overrightarrow{AB}$  chỉ vectơ có điểm đầu  $A$ , điểm cuối  $B$ .
  - ☑️ Nếu không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối thì vectơ còn được ký hiệu là  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$

**Định lý 10** Trong không gian, các khái niệm có liên quan vectơ như giá của vectơ, độ dài của vectơ, hai vectơ cùng phương, cùng hướng, ngược hướng, bằng nhau, đối nhau; vectơ-không được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng.

- ⚠️ Trong không gian, cho điểm  $O$  và vectơ  $\vec{a}$ , tồn tại duy nhất điểm  $M$  để  $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ .

## 2 Tổng và hiệu của hai vectơ

**Định nghĩa 8** Trong không gian, cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Lấy ba điểm  $O, A, B$  sao cho  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ . Ta gọi  $\overrightarrow{OB}$  là **tổng của hai vectơ**  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , ký hiệu  $\vec{a} + \vec{b}$ . Phép lấy tổng của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là **phép cộng vectơ**.



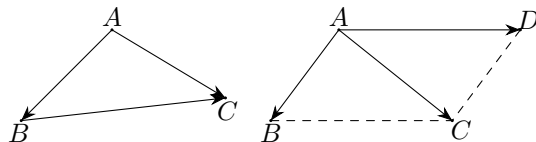
⚡ **NHẬN XÉT.** Phép cộng vectơ trong không gian cũng có các tính chất như phép cộng vectơ trong mặt phẳng.

- ☑️ Tính chất giao hoán:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ;
  - ☑️ Tính chất kết hợp:  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ;
  - ☑️ Với mọi vectơ  $\vec{a}$ , ta luôn có:  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ .
- ⚠️ Từ tính chất kết hợp, ta có thể xác định được tổng của ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  là

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}.$$

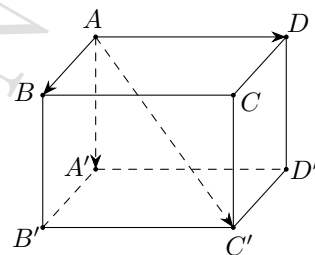
**Định lý 11** Quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành vẫn đúng với các vectơ trong không gian.

- Với ba điểm  $A, B, C$  ta luôn có  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .
- Nếu  $ABCD$  là hình bình hành thì ta có  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .



**Định lý 12** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  ta luôn có

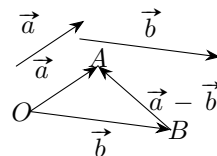
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}.$$



**Định nghĩa 9** Trong không gian, cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$ .

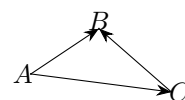
Ta gọi  $\vec{a} + (-\vec{b})$  là **hiệu của hai vectơ**  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , ký hiệu  $\vec{a} - \vec{b}$ .

Phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là **phép trừ vectơ**.



**Định lý 13** Trong không gian, với ba điểm  $A, B, C$  ta có

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}.$$



### 3 Tích của một số với một vectơ

**Định nghĩa 10** Trong không gian, cho số  $k \neq 0$  và vectơ  $\vec{a} \neq \vec{0}$ .

Tích của số  $k$  với vectơ  $\vec{a}$  là một vectơ, ký hiệu  $k\vec{a}$ , cùng hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k > 0$ , ngược hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k < 0$  và có độ dài bằng  $|k| \cdot |\vec{a}|$ .

Phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là **phép nhân một số với một vectơ**.

Quy ước:  $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$  và  $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$ .



a) Với hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bất kỳ, với mọi số  $h$  và  $k$ , ta luôn có

- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ ;
- $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$ ;
- $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$ ;
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ ;
- $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ .

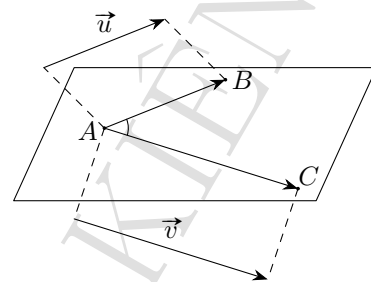
b)  $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$  hoặc  $k = 0$ .

c) Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ( $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ ) cùng phương khi và chỉ khi có số  $k$  sao cho  $\vec{a} = k\vec{b}$ .

d) Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi có số  $k \neq 0$  để  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ .

## 4 Góc giữa hai vectơ

**Định nghĩa 11** Trong không gian, cho  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  là hai vectơ khác  $\vec{0}$ . Lấy một điểm  $A$  bất kỳ, gọi  $B$  và  $C$  là hai điểm sao cho  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ . Khi đó, ta gọi  $\widehat{BAC}$  là góc giữa hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ , ký hiệu  $(\vec{u}, \vec{v})$ .



- ⚠️  $0^\circ \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq 180^\circ$ ;  
 ⚡ Nếu  $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$  thì ta nói  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  vuông góc với nhau, ký hiệu  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

## 5 Tích vô hướng của hai vectơ

**Định nghĩa 12** Trong không gian, cho hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  khác  $\vec{0}$ . Tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  là một số, ký hiệu  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , được xác định bởi công thức  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$

- ⚠️ a) Trong trường hợp  $\vec{u} = \vec{0}$  hoặc  $\vec{v} = \vec{0}$ , ta quy ước  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .  
 b)  $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$ ;  $\vec{u}^2 \geq 0$ ,  $\vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ .  
 c) Với hai vectơ  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  khác  $\vec{0}$ , ta có  $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$   
 d) Với hai vectơ  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  khác  $\vec{0}$ , ta có  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

⚡ **NHẬN XÉT.** Tương tự như trong mặt phẳng, tích vô hướng của hai vectơ trong không gian cũng có các tính chất sau:

Với ba vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  và số  $k$ , ta có:

- ⚡  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ;  
 ⚡  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ ;  
 ⚡  $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$ .

## B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

### DẠNG 1 Câu hỏi lý thuyết

Nắm vững và sử dụng các định nghĩa, tính chất về các vectơ trong không gian.

## 1 Ví dụ mẫu

**Ví dụ 1 (Mức độ 1).** Cho tứ diện  $ABCD$ . Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu là  $A$  và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện.

**Ví dụ 2 (Mức độ 1).** Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$ . Hãy chỉ ra tất cả những vectơ có điểm đầu và điểm cuối là hai điểm phân biệt lấy trong các điểm  $S, A, B, C, D$ .

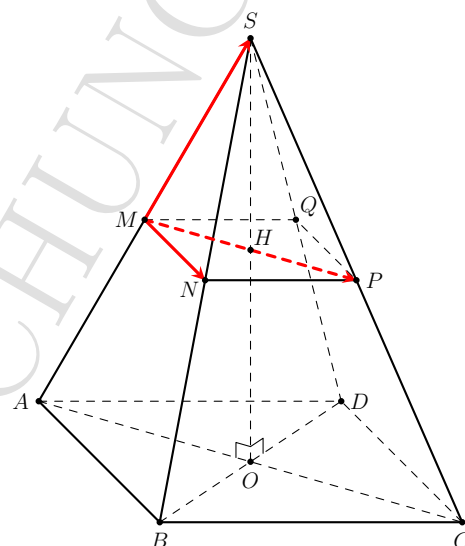
**Ví dụ 3 (Mức độ 2).** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ .

- a) Trong các vectơ khác  $\vec{0}$ , có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp, hãy chỉ ra những vectơ:
- Cùng phương với vectơ  $\vec{AB}$ ;
  - Bằng vectơ  $\vec{AB}$ ;
  - Ngược hướng với vectơ  $\vec{AA'}$ .
- b) Tính độ dài của vectơ  $\vec{AC'}$  trong trường hợp  $ABCD.A'B'C'D'$  là hình hộp đứng, có  $AA' = a$ ,  $AB = b$ ,  $BC = c$  và  $\widehat{ABC} = 120^\circ$ .

**Ví dụ 4 (Mức độ 2).**

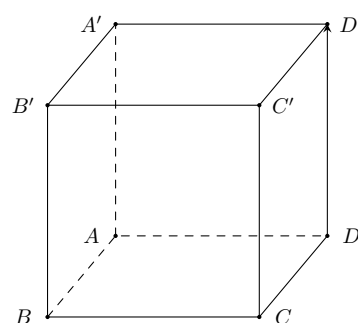
Cho hình chóp đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy  $a$  và đường cao  $h$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của các cạnh bên  $SA, SB, SC, SD$  và  $O, H$  lần lượt là tâm của các hình vuông  $ABCD, MNPQ$ .

- a) Trong những vectơ khác  $\vec{0}$ , có điểm đầu và điểm cuối là những điểm cho trên hình, hãy liệt kê các vectơ
- ☑ Cùng hướng với  $\vec{MN}$ .
  - ☑ Bằng  $\vec{MN}$ .
- b) Tìm độ dài các vectơ  $\vec{MP}, \vec{MS}$  theo  $a$  và  $h$ .



**Ví dụ 5 (Mức độ 2).**

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có độ dài mỗi cạnh bằng 1 (hình bên). Xác định và tính độ dài của vectơ  $\vec{BC} + \vec{DD'}$ .

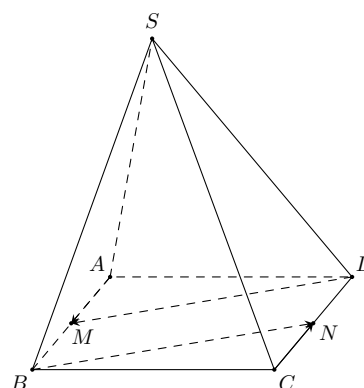


**Ví dụ 6 (Mức độ 2).** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Chứng minh rằng  $\vec{BC} + \vec{DC} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$ .

**Ví dụ 7 (Mức độ 2).**

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$  (hình bên). Chứng minh rằng

- a)  $\vec{AM}$  và  $\vec{CN}$  là hai vectơ đối nhau;
- b)  $\vec{SC} - \vec{AM} - \vec{AN} = \vec{SA}$ .



**Ví dụ 8 (Mức độ 1).** Trong không gian, cho ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  phân biệt và đều khác  $\vec{0}$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                           | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.   |   |   |
| b) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.  |   |   |
| c) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.  |   |   |
| d) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng. |   |   |

**Ví dụ 9 (Mức độ 2).** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai?

| Phát biểu                                                                    | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và vectơ $\overrightarrow{AB}$ cùng phương.  |   |   |
| b) Vectơ $\overrightarrow{B'C'}$ và vectơ $\overrightarrow{DA}$ ngược hướng. |   |   |
| c) Vectơ $\overrightarrow{CC'}$ và vectơ $\overrightarrow{DD'}$ cùng hướng.  |   |   |
| d) Vectơ $\overrightarrow{A'C'}$ và vectơ $\overrightarrow{AC}$ bằng nhau.   |   |   |

**Ví dụ 10 (Mức độ 2).** Trong không gian, cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                  | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AC'}$ .  |   |   |
| b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{A'C'}$ . |   |   |

| Phát biểu                                                                                                              | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'}$ .                       |   |   |
| d) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'C'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AB}$ . |   |   |

**Ví dụ 11 (Mức độ 2).** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu và điểm cuối được lấy từ hai đỉnh của hình lập phương? KQ:

**Ví dụ 12 (Mức độ 2).** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $ABCD$  là hình chữ nhật thỏa mãn  $AB = 6$ ,  $BC = 8$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Biết  $SA = SB = SC = SD = 13$ , tính độ dài của vectơ  $\overrightarrow{SO}$ . KQ:

**Ví dụ 13 (Mức độ 2).** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh 1. Độ dài của vectơ  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{D'C'}$  có dạng  $\sqrt{a}$  với  $a$  nguyên dương. Tìm  $a$ . KQ:

**Ví dụ 14 (Mức độ 2).** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh bằng 3. Tìm độ dài của vectơ  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{SC}$ . KQ:

**Ví dụ 15 (Mức độ 2).** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh 1. Độ dài của vectơ  $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AA'}$  có dạng  $\sqrt{a}$  với  $a$  nguyên dương. Tìm  $a$ . KQ:

## 2

## Bài tập tự luận

**Bài 1 (Mức độ 1).** Cho tứ diện  $ABCD$ .

- Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu là  $B$  và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện.
- Hãy chỉ ra các vectơ có điểm cuối là  $D$  và điểm đầu là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện.
- Hãy chỉ ra các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là một trong các đỉnh của tứ diện.



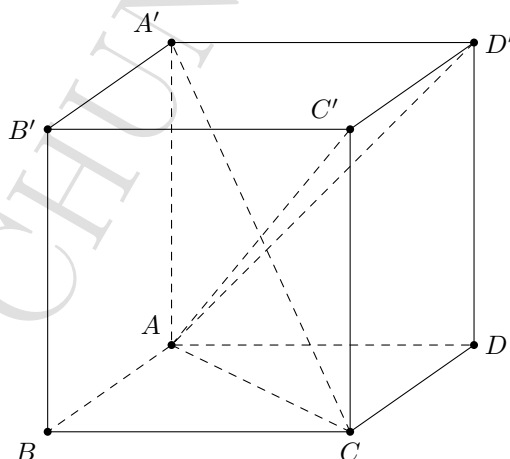
**Bài 2 (Mức độ 2).** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ .

- a) Trong các vectơ khác  $\vec{0}$ , có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp, hãy chỉ ra những vectơ
- cùng phương với vectơ  $\vec{C'D'}$ ;
  - bằng vectơ  $\vec{AC}$ ;
  - ngược hướng với vectơ  $\vec{BB'}$ .
- b) Tính độ dài của vectơ  $\vec{AC'}$  trong trường hợp  $ABCD.A'B'C'D'$  là hình hộp đứng, có  $AA' = a$ ,  $AB = b$ ,  $BC = c$  và  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ .

**Bài 3 (Mức độ 2).**

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có độ dài mỗi cạnh bằng 1 (hình bên). Xác định và tính độ dài của các vectơ

- a)  $\vec{AB} + \vec{BC}$ ;                      b)  $\vec{AB} + \vec{AD}$ ;  
c)  $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'}$ ;              d)  $\vec{AD} + \vec{BB'}$ ;  
e)  $\vec{C'D'} - \vec{BC}$ ;                      f)  $\vec{A'D'} - \vec{CC'} + \vec{AB}$ .



**Bài 4 (Mức độ 3,4).** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh bằng 1. Xác định và tính độ dài của các vectơ

- a)  $2\vec{AB}$ ;                      b)  $3\vec{AD}$ ;                      c)  $2\vec{AB} + 3\vec{AD}$ ;                      d)  $2\vec{AB} + 3\vec{AD} + \vec{AS}$ .

### 3

### Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 1 (Mức độ 1).** Cho hình chóp ngũ giác đều  $S.ABCDE$ . Số vectơ có điểm đầu là  $A$ , điểm cuối là một trong những điểm còn lại là

- A. 5.                      B. 4.                      C. 3.                      D. 2.

**Câu 2 (Mức độ 1).** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$ . Số vectơ có điểm đầu là  $A$ , điểm cuối là một trong những điểm còn lại là

- A. 2.                      B. 3.                      C. 4.                      D. 5.

**Câu 3 (Mức độ 1).** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Số vectơ có điểm cuối là  $D'$ , điểm đầu là một trong những điểm còn lại là

- A. 5.                      B. 6.                      C. 7.                      D. 8.

**Câu 4 (Mức độ 1).** Cho tứ diện  $ABCD$ . Số vectơ khác vectơ-không, có điểm đầu và điểm cuối là hai trong các đỉnh của tứ diện là

- A. 6.                      B. 12.                      C. 8.                      D. 24.

**Câu 5 (Mức độ 1).** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Số vectơ khác vectơ-không lập từ các đỉnh của hình lập phương và cùng phương với vectơ  $\vec{AB}$  là

- A. 8.                      B. 7.                      C. 6.                      D. 5.

**Câu 6 (Mức độ 2).** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh 1. Độ dài của vectơ  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}$  là

A.  $\sqrt{2}$ .

B. 2.

C.  $\sqrt{3}$ .

D. 3.

**Câu 7 (Mức độ 3).** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh 1. Độ dài của vectơ  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$  là

A.  $\sqrt{2}$ .

B.  $\sqrt{5}$ .

C.  $\sqrt{3}$ .

D.  $\sqrt{6}$ .

## 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 8 (Mức độ 2).** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Khi đó

| Phát biểu                                                        | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{CC'}$ cùng phương. |   |   |
| b) $\overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{DC'}$ cùng hướng.  |   |   |

| Phát biểu                                                       | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------|---|---|
| c) $\overrightarrow{B'D}$ và $\overrightarrow{DB}$ ngược hướng. |   |   |
| d) $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{A'C}$ bằng nhau.  |   |   |

**Câu 9 (Mức độ 2).** Cho các điểm  $A, B, C, D$  phân biệt. Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                  | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Từ $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{CA}$ .               |   |   |
| b) Nếu $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ thì $B$ là trung điểm đoạn $AC$ .                            |   |   |
| c) Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ thì $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ . |   |   |
| d) Từ $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ ta suy $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AC}$ .                  |   |   |

**Câu 10 (Mức độ 2).** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$  và  $G$  là trung điểm của  $MN$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                                           | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$ . |   |   |
| b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$ .                        |   |   |
| c) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ .              |   |   |
| d) $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$ .                                                          |   |   |

## 5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 11 (Mức độ 1).** Trong không gian cho 18 điểm phân biệt. Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu và điểm cuối là 2 trong 18 điểm nói trên? KQ:

**Câu 12 (Mức độ 2).** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB = 3, AD = 4, AA' = 12$ . Tìm độ dài của vectơ  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ . KQ:

**Câu 13 (Mức độ 2).** Cho hình lăng trụ đều  $ABC.A'B'C'$  có cạnh đáy là 3, đường cao là 4. Tính độ dài của vectơ  $\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{C'A'}$ . KQ:

**Câu 14 (Mức độ 2).** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh 1. Độ dài của vectơ  $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA}$  là  $\sqrt{a}$  với  $a$  là số nguyên. Tìm  $a$ . KQ:

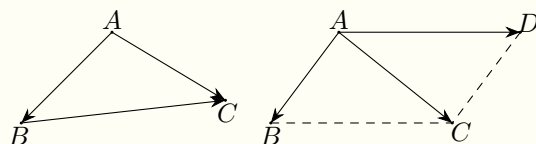
**Câu 15 (Mức độ 3).** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh 1. Độ dài của vectơ  $3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AA'}$  có dạng  $\sqrt{a}$  với  $a$  nguyên dương. Tìm  $a$ . KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

## DẠNG 2 Đẳng thức vectơ

**Quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành**

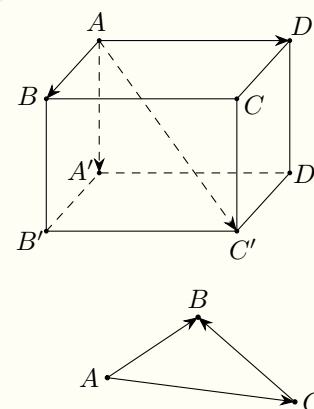
- ☑ Với ba điểm  $A, B, C$  ta luôn có  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .
- ☑ Nếu  $ABCD$  là hình bình hành thì ta có  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .



**Quy tắc hình hộp**

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  ta luôn có

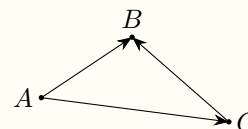
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}.$$



**Quy tắc hiệu**

Trong không gian, với ba điểm  $A, B, C$  ta có

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}.$$

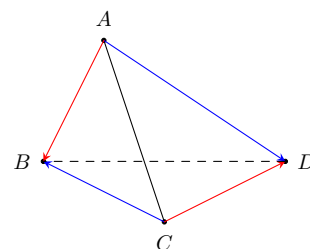


## 1 Ví dụ mẫu

**Ví dụ 16 (Mức độ 1).**

Cho tứ diện  $ABCD$ . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$



**Ví dụ 17 (Mức độ 1).** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$ .

**Ví dụ 18 (Mức độ 2).** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $M, N$  lần lượt là trung điểm cạnh  $AB$  và  $CD$ . Hãy thực hiện các phép toán sau đây:

a)  $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{ND}$ ;

b)  $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NC}$ .

**Ví dụ 19 (Mức độ 2).** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AD, BC$ ;  $G$  là trọng tâm của tam giác  $BCD$ . Chứng minh rằng

a)  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ ;

b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$ .

**Ví dụ 20 (Mức độ 3).** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AC$  và  $BD$ . Gọi  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $MN$  và  $P$  là một điểm bất kỳ trong không gian. Chứng minh rằng  $\overrightarrow{PI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$ .

**Ví dụ 21 (Mức độ 1).** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Vectơ  $\vec{u} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'}$  bằng vectơ nào sau đây?

- A.  $\overrightarrow{A'C}$ . B.  $\overrightarrow{CA'}$ . C.  $\overrightarrow{AC'}$ . D.  $\overrightarrow{C'A}$ .

**Ví dụ 22 (Mức độ 2).** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Khi đó  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'}$  bằng vectơ nào sau đây?

- A.  $\overrightarrow{BC}$ . B.  $\vec{0}$ . C.  $\overrightarrow{AC}$ . D.  $\overrightarrow{BC'}$ .

**Ví dụ 23 (Mức độ 2).** Cho hình hộp  $ABCD.EFGH$ . Khi đó  $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG}$  bằng vectơ nào sau đây?

- A.  $\overrightarrow{CF}$ . B.  $\overrightarrow{CE}$ . C.  $\overrightarrow{CH}$ . D.  $\overrightarrow{CA}$ .

**Ví dụ 24 (Mức độ 1).** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Khi đó  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA'}$  bằng vectơ nào sau đây?

- A.  $\overrightarrow{BA'}$ . B.  $\overrightarrow{BA}$ . C.  $\overrightarrow{CA}$ . D.  $\overrightarrow{BC'}$ .

**Ví dụ 25 (Mức độ 2).** Cho hình hộp  $ABCD.EFGH$ . Khi đó  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EH}$  bằng vectơ nào sau đây?

- A.  $\overrightarrow{AH}$ . B.  $\overrightarrow{CE}$ . C.  $\overrightarrow{AE}$ . D.  $\overrightarrow{AG}$ .

**Ví dụ 26 (Mức độ 1).** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành. Khi đó

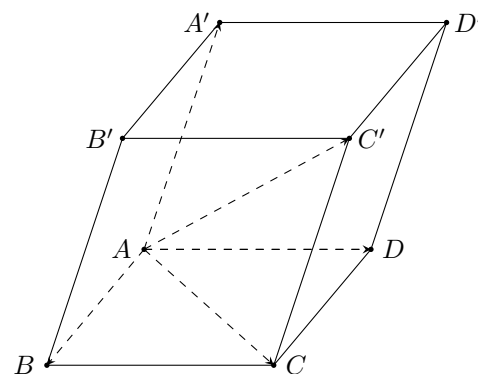
| Phát biểu                                                              | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\overrightarrow{AS} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BS}$ . |   |   |
| b) $\overrightarrow{CS} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BS}$ . |   |   |

| Phát biểu                                                              | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------|---|---|
| c) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC}$ . |   |   |
| d) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{AC}$ . |   |   |

**Ví dụ 27 (Mức độ 2).**

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                        | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{A'C}$ . |   |   |
| b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{BD'}$ . |   |   |
| c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{AC'}$ . |   |   |
| d) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{A'C}$ .   |   |   |



**Ví dụ 28 (Mức độ 2).** Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Gọi  $I$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  và  $J$  là trọng tâm tam giác  $ADC$ . Biết rằng  $2\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = a\overrightarrow{SI} + b\overrightarrow{SJ}$  với  $a, b$  là các số nguyên. Tính giá trị  $a + b$ .

KQ:

**Ví dụ 29.** Cho hình chóp  $S.ABC$ . Trên cạnh  $SA$ , lấy điểm  $M$  sao cho  $SM = 2AM$ . Trên cạnh  $BC$ , lấy điểm  $N$  sao cho  $CN = 2BN$ . Biết rằng  $\overrightarrow{MN} = k(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AB}$ , với  $k$  là số hữu tỉ. Tìm giá trị của  $k$  (quy tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

## 2

### Bài tập tự luận

**Bài 5 (Mức độ 2).** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $M, N$  lần lượt là trung điểm cạnh  $AB$  và  $CD$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $MN$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ .

**Bài 6 (Mức độ 2).** Cho tứ diện  $ABCD$ . Chứng minh rằng

a)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ .

b)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$ .

**Bài 7 (Mức độ 2).** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $AB'D'$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{A'C} = 3\overrightarrow{A'G}$ .

**Bài 8 (Mức độ 2).** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Chứng minh rằng

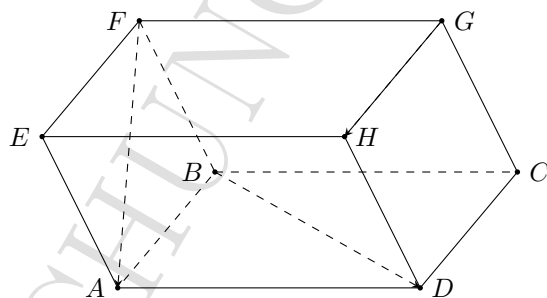
$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}.$$

**Bài 9 (Mức độ 2).**

Cho hình hộp  $ABCD.EFGH$ . Hãy tìm

a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EH}$ ;

b)  $\overrightarrow{FA} - \overrightarrow{BD}$ .



### 3

### Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 16 (Mức độ 1).** Trong không gian, cho ba điểm  $A, B, C$  tùy ý. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

- A.**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ . **B.**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ . **C.**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ . **D.**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$ .

**Câu 17 (Mức độ 2).** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ . Vectơ  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB}$  bằng vectơ nào sau đây?

- A.**  $\overrightarrow{B'C}$ . **B.**  $\overrightarrow{BC'}$ . **C.**  $\overrightarrow{AB}$ . **D.**  $\overrightarrow{AC'}$ .

**Câu 18 (Mức độ 2).** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ . Vectơ  $\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  bằng vectơ nào sau đây?

- A.**  $\overrightarrow{B'C}$ . **B.**  $\overrightarrow{BC'}$ . **C.**  $\overrightarrow{AB}$ . **D.**  $\overrightarrow{CA'}$ .

**Câu 19 (Mức độ 2).** Cho tứ diện  $ABCD$ . Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.**  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ . **B.**  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ .  
**C.**  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ . **D.**  $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ .

**Câu 20 (Mức độ 2).** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $M, N$  lần lượt là trung điểm cạnh  $AB$  và  $CD$ . Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.**  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$ . **B.**  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d} - \vec{c})$ .  
**C.**  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c} - \vec{d})$ . **D.**  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$ .

**Câu 21.** Cho  $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}$ ;  $\vec{y} = -6\vec{a} - 3\vec{b}$ . Chọn mệnh đề đúng nhất?

- A.** Hai vectơ  $\vec{x}$  và  $\vec{y}$  là cùng phương.  
**B.** Hai vectơ  $\vec{x}$  và  $\vec{y}$  là cùng phương và cùng hướng.  
**C.** Hai vectơ  $\vec{x}$  và  $\vec{y}$  là cùng phương và ngược hướng.  
**D.** Hai vectơ  $\vec{x}$  và  $\vec{y}$  là không cùng phương.

**Câu 22.** Cho ba vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  không đồng phẳng. Xét các vectơ  $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$ ;  $\vec{y} = -4\vec{a} + 2\vec{b}$ ;  $\vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$ . Chọn khẳng định đúng?

- A. Hai vectơ  $\vec{y}$ ;  $\vec{z}$  cùng phương. B. Hai vectơ  $\vec{x}$ ;  $\vec{y}$  cùng phương.  
C. Hai vectơ  $\vec{x}$ ;  $\vec{z}$  cùng phương. D.  $\vec{y} = 2\vec{x}$ .

**Câu 23.** Cho tứ diện  $ABCD$  và điểm  $G$  thỏa mãn  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$  ( $G$  là trọng tâm của tứ diện). Gọi  $G_0$  là giao điểm của  $GA$  và mp  $(BCD)$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A.  $\vec{GA} = -2\vec{G_0G}$ . B.  $\vec{GA} = 4\vec{G_0G}$ . C.  $\vec{GA} = 3\vec{G_0G}$ . D.  $\vec{GA} = 2\vec{G_0G}$ .

**Câu 24.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $G$  là điểm thỏa mãn  $\vec{GS} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A.  $G$ ,  $S$ ,  $O$  không thẳng hàng. B.  $\vec{GS} = 4\vec{OG}$ .  
C.  $\vec{GS} = 5\vec{OG}$ . D.  $\vec{GS} = 3\vec{OG}$ .

## 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 25 (Mức độ 2).** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Khi đó

| Phát biểu                             | Đ | S |
|---------------------------------------|---|---|
| a) $\vec{BC} + \vec{DA} = \vec{BA}$ . |   |   |
| b) $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{0}$ .  |   |   |

| Phát biểu                             | Đ | S |
|---------------------------------------|---|---|
| c) $\vec{BC} + \vec{BA} = \vec{BD}$ . |   |   |
| d) $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{BD}$ . |   |   |

**Câu 26 (Mức độ 2).** Cho hình vuông  $MNPQ$  tâm  $O$ . Khi đó

| Phát biểu                             | Đ | S |
|---------------------------------------|---|---|
| a) $\vec{MO} + \vec{PN} = \vec{QO}$ . |   |   |
| b) $\vec{MN} + \vec{MQ} = \vec{MO}$ . |   |   |

| Phát biểu                             | Đ | S |
|---------------------------------------|---|---|
| c) $\vec{OM} - \vec{ON} = \vec{PQ}$ . |   |   |
| d) $\vec{MN} - \vec{OP} = \vec{MO}$ . |   |   |

**Câu 27.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Người ta định nghĩa “ $G$  là trọng tâm tứ diện  $ABCD$  khi  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$ ”.

| Phát biểu                                                                          | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $G$ là trung điểm của đoạn $IJ$ ( $I, J$ lần lượt là trung điểm $AB$ và $CD$ ). |   |   |
| b) $G$ là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của $AC$ và $BD$ .              |   |   |
| c) $G$ là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của $AD$ và $BC$ .              |   |   |
| d) Chưa thể xác định được.                                                         |   |   |

**Câu 28 (Mức độ 2).** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Khi đó

| Phát biểu                                            | Đ | S |
|------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\vec{AB} + \vec{B'C'} + \vec{DD'} = \vec{AC'}$ . |   |   |
| b) $\vec{DB'} + \vec{D'D} + \vec{BD'} = \vec{BB'}$ . |   |   |

| Phát biểu                                                    | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------|---|---|
| c) $\vec{AC} + \vec{BA'} + \vec{DB} + \vec{C'D} = \vec{0}$ . |   |   |
| d) $\vec{AC} + \vec{BB'} = \vec{AB}$ .                       |   |   |

**Câu 29 (Mức độ 2).** Cho tứ diện  $ABCD$ . Khi đó



| Phát biểu                                                                                                                        | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ .                                     |   |   |
| b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$ .                                     |   |   |
| c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG}$ với $G$ là trọng tâm tam giác $BCD$ . |   |   |
| d) $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{HK}$ với $H, K$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $AC$ .                             |   |   |

**Câu 30 (Mức độ 2).** Cho hình hộp  $ABCD.EFGH$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                    | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GF}$ . |   |   |
| b) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$ . |   |   |

| Phát biểu                                                                                    | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| c) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GF}$ . |   |   |
| d) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AH}$ . |   |   |

**Câu 31.** Cho hai điểm phân biệt  $A, B$  và một điểm  $O$  bất kỳ không thuộc đường thẳng  $AB$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                                      | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Điểm $M$ thuộc đường thẳng $AB$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ .                          |   |   |
| b) Điểm $M$ thuộc đường thẳng $AB$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{BA}$ .                         |   |   |
| c) Điểm $M$ thuộc đường thẳng $AB$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + (1 - k)\overrightarrow{OB}$ .                  |   |   |
| d) Điểm $M$ thuộc đường thẳng $AB$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$ . |   |   |

**Câu 32.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có tâm  $O$ . Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ;  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ .  $M$  là điểm xác định bởi  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$ . Khi đó

| Phát biểu                               | Đ | S |
|-----------------------------------------|---|---|
| a) $M$ là tâm hình bình hành $ABB'A'$ . |   |   |
| b) $M$ là tâm hình bình hành $BCC'B'$ . |   |   |
| c) $M$ là trung điểm $BB'$ .            |   |   |
| d) $M$ là trung điểm $CC'$ .            |   |   |

## 5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 33 (Mức độ 2).** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Tìm số nguyên  $k$  thích hợp sao cho  $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = k\overrightarrow{BB'}$ . KQ:

**Câu 34 (Mức độ 3).** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $M, N$  lần lượt là trung điểm cạnh  $AB$  và  $CD$ . Tìm giá trị của số  $k$  sao cho  $\overrightarrow{MN} = k(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ . KQ:

**Câu 35 (Mức độ 2).** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $O$  là tâm hình lập phương. Tìm số nguyên  $k$  sao cho  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = k\overrightarrow{AO}$ . KQ:

**Câu 36 (Mức độ 3).** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Tìm số nguyên  $k$  thích hợp sao cho

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + k(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D}) = \vec{0}.$$



KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 37 (Mức độ 2).** Cho hình lập phương  $ABCD.EFGH$  có cạnh bằng 1. Đặt  $\vec{x} = \vec{CB} + \vec{CD} + \vec{CG}$ . Tính độ dài  $\vec{x}$  với kết quả được quy tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 38.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ .  $M$  là điểm trên  $AC$  sao cho  $AC = 3MC$ . Lấy  $N$  trên đoạn  $C'D$  sao cho  $x C'D = C'N$ . Với giá trị nào của  $x$  thì  $MN \parallel BD'$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 39.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Xác định vị trí các điểm  $M, N$  lần lượt trên  $AC$  và  $DC'$  sao cho  $MN \parallel BD'$ . Tính tỉ số  $\frac{MN}{BD'}$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 40.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Một đường thẳng  $\Delta$  cắt các đường thẳng  $AA', BC, C'D'$  lần lượt tại  $M, N, P$  sao cho  $\vec{NM} = 2\vec{NP}$ . Tính  $\frac{MA}{MA'}$ .

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 41.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  và các điểm  $M, N, P$  xác định bởi  $\vec{MA} = k\vec{MB'}$  ( $k \neq 0$ ),  $\vec{NB} = x\vec{NC'}$ ,  $\vec{PC} = y\vec{PD'}$ . Cho biết ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng. Tính  $xy + x - y$ .

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 42.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ ,  $G$  là trung điểm của  $IJ$ . Giả sử  $a\vec{IJ} = \vec{AC} + \vec{BD}$  thì giá trị của  $a$  bằng bao nhiêu?

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**DẠNG 3****Phân tích (biểu diễn) vector theo các vector cho trước, ba vector đồng phẳng**

☑ Để chứng minh ba vector đồng phẳng, ta có thể chứng minh bằng một trong các cách sau:

- Chứng minh các giá của ba vector cùng song song với một mặt phẳng.
- **Dựa vào điều kiện để ba vector đồng phẳng:** Nếu có  $m, n \in \mathbb{R} : \vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$  thì  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng.

☑ Để phân tích một vector  $\vec{x}$  theo ba vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  không đồng phẳng, ta tìm các số  $m, n, p$  sao cho  $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ .

☑ Để tính độ dài của một đoạn thẳng theo phương pháp vector ta sử dụng cơ sở

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}.$$

Vì vậy để tính độ dài của đoạn  $MN$  ta thực hiện theo các bước sau:

- Chọn ba vector không đồng phẳng  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  so cho độ dài của chúng có thể tính được và góc giữa chúng có thể tính được.
- Phân tích  $\vec{MN} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ .
- Khi đó

$$\begin{aligned} MN &= |\vec{MN}| = \sqrt{\vec{MN}^2} = \sqrt{(m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c})^2} \\ &= \sqrt{m^2|\vec{a}|^2 + n^2|\vec{b}|^2 + p^2|\vec{c}|^2 + 2mn \cos(\vec{a}, \vec{b}) + 2np \cos(\vec{b}, \vec{c}) + 2mp \cos(\vec{c}, \vec{a})} \end{aligned}$$

☑ Sử dụng điều kiện đồng phẳng của bốn điểm để giải bài toán hình không gian.

- $A, B, C, D$  là bốn điểm đồng phẳng  $\Leftrightarrow \vec{DA} = m\vec{DB} + n\vec{DC}$
- $A, B, C, D$  là bốn điểm đồng phẳng khi và chỉ khi với mọi điểm  $O$  bất kì ta có

$$\vec{OD} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}, \quad (x + y + z = 1).$$

# 1 Ví dụ mẫu

**Ví dụ 30 (Mức độ 1).** Cho hình hộp  $ABCD.EFGH$ . Thực hiện các phép toán sau đây:

a)  $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG}$ ;

b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EH}$ .

**Ví dụ 31 (Mức độ 2).** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có  $M$  là trung điểm của  $BB'$ . Đặt  $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{CC'} = \vec{c}$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$ .

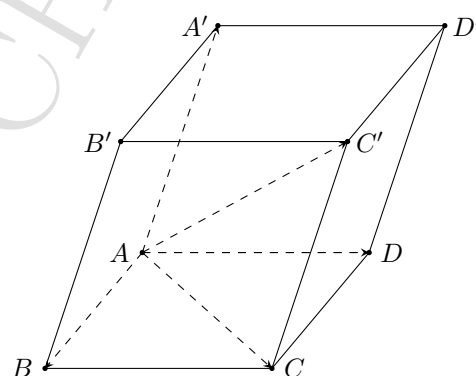
**Ví dụ 32 (Mức độ 3).** Ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc  $100^\circ$  và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4 N. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên.

**Ví dụ 33.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$ .

**Ví dụ 34 (Mức độ 2).**

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  như hình vẽ. Tìm vectơ

$$\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D'A'}.$$

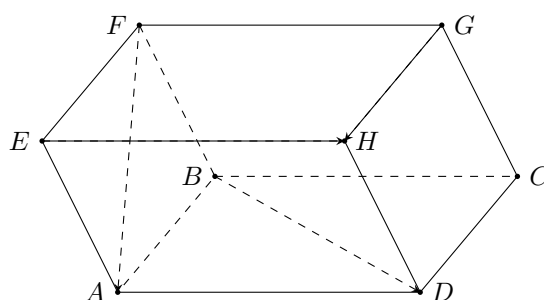


**Ví dụ 35 (Mức độ 2).**

Cho hình hộp  $ABCD.EFGH$  như hình vẽ. Hãy tìm

a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EH}$ ;

b)  $\overrightarrow{FA} - \overrightarrow{BD}$ .

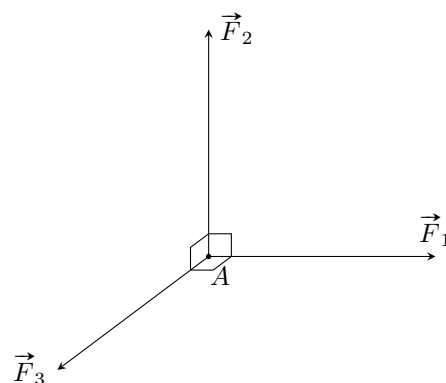


**Ví dụ 36 (Mức độ 3).**

Một chất điểm chịu tác động bởi 3 lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  có chung điểm đặt  $A$  và có giá vuông góc với nhau từng đôi một. Biết cường độ của các lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  lần lượt là 10 N, 8 N và 5 N, xác định hợp lực của 3 lực và tính cường độ của hợp lực (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

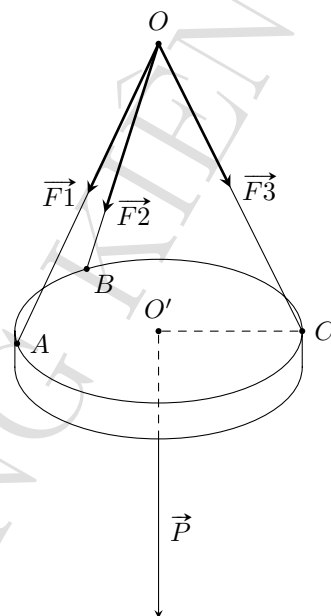
KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|



**Ví dụ 37.**

Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn, xuất phát từ điểm  $O$  trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm  $A, B, C$  trên đèn tròn sao cho các lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  lần lượt trên mỗi dây  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc với nhau và  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15$  (N). Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.



## 2 Bài tập tự luận

**Bài 10.** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có  $\vec{AA'} = \vec{a}$ ,  $\vec{AB} = \vec{b}$  và  $\vec{AC} = \vec{c}$ . Hãy biểu diễn các vectơ sau qua các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

- a)  $\vec{AB'}$ ;                      b)  $\vec{B'C'}$ ;                      c)  $\vec{BC'}$ .

**Bài 11.** Cho hình chóp  $S.ABC$ . Trên cạnh  $SA$ , lấy điểm  $M$  sao cho  $SM = 2AM$ . Trên cạnh  $BC$ , lấy điểm  $N$  sao cho  $CN = 2BN$ . Chứng minh rằng  $\vec{MN} = \frac{1}{3}(\vec{SA} + \vec{BC}) + \vec{AB}$ .

**Bài 12.** Cho hình hộp  $ABCD.EFGH$ . Thực hiện các phép toán sau đây:

- a)  $\vec{DA} + \vec{DC} + \vec{DH}$ ;                      b)  $\vec{HE} + \vec{GC} + \vec{AB}$ .

**Bài 13.** Cho tứ diện  $ABCD$ .  $G$  là trọng tâm của tam giác  $BCD$ . Chứng minh rằng  $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 3\vec{AG}$ .

**Bài 14.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Chứng minh rằng:

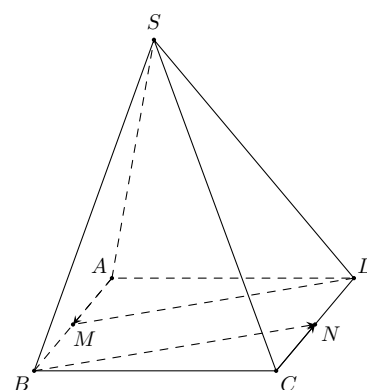
- a)  $\vec{AB} + \vec{B'C'} + \vec{DD'} = \vec{AC'}$ ;                      b)  $\vec{DB'} + \vec{D'D} + \vec{BD'} = \vec{BB'}$ ;                      c)  $\vec{AC} + \vec{BA'} + \vec{DB} + \vec{C'D} = \vec{0}$ .

**Bài 15.** Cho hình hộp  $ABCD.EFGH$ . Đặt  $\vec{AB} = \vec{a}$ ,  $\vec{AD} = \vec{b}$ ,  $\vec{AE} = \vec{c}$ . Gọi  $M$  là trung điểm của đoạn  $BG$ . Hãy biểu diễn  $\vec{AM}$  theo  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .

**Bài 16.**

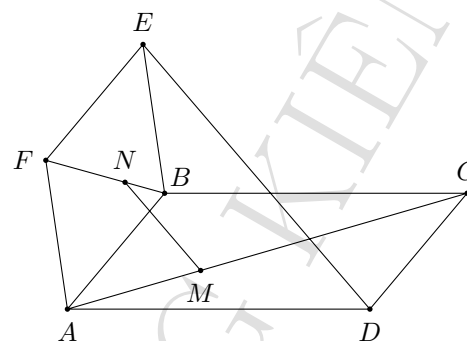
Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$  (hình bên). Chứng minh rằng

- a)  $\vec{AM}$  và  $\vec{CN}$  là hai vectơ đối nhau;  
b)  $\vec{SC} - \vec{AM} - \vec{AN} = \vec{SA}$ .



**Bài 17.**

Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $ABEF$  không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên các đường chéo  $AC$  và  $BF$  lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $MC = 2MA, NF = 2NB$  (Hình bên).

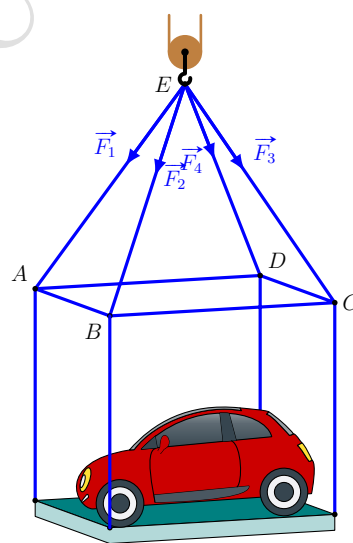


- Biểu diễn các vectơ  $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{DE}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}$ .
- Từ đó suy ra  $MN \parallel DE$ .

**Bài 18.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Gọi  $I$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  và  $J$  là trọng tâm tam giác  $ADC$ . Chứng minh rằng  $2\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 3(\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{SJ})$ .

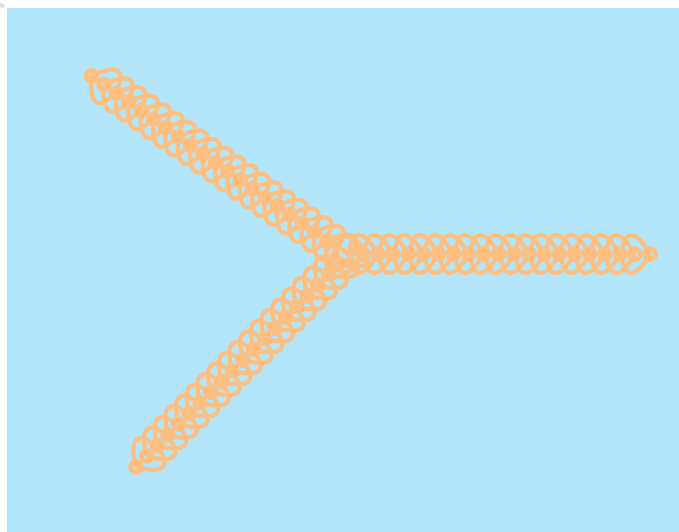
**Bài 19.**

Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật  $ABCD$ , mặt phẳng  $(ABCD)$  song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc  $E$  của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp  $EA, EB, EC, ED$  có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng  $(ABCD)$  một góc bằng  $60^\circ$ . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng các lực căng  $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$  đều có cường độ là 4700 N và trọng lượng của khung sắt là 3000 N.



**Bài 20.**

Ba sợi dây không giãn với khối lượng không đáng kể được buộc chung một đầu và được kéo căng về ba hướng khác nhau (hình bên). Nếu các lực kéo làm cho ba sợi dây ở trạng thái đứng yên thì khi đó ba sợi dây nằm trên cùng một mặt phẳng. Hãy giải thích vì sao.



**Bài 21.** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{B'C} = \vec{c} - \vec{a} - \vec{b}$  và  $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ .

**Bài 22.** Cho tứ diện  $ABCD$ , lấy hai điểm  $M, N$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MA} = \vec{0}$  và  $\overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{DN}$ . Hãy biểu diễn  $\overrightarrow{MN}$  theo  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{BC}$ .

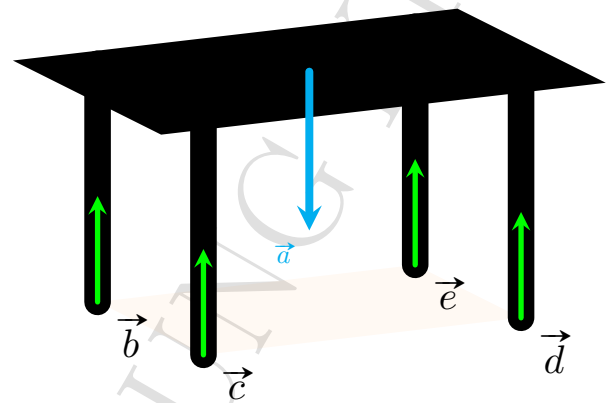
**Bài 23.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ , gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $BDA'$ .

- a) Biểu diễn  $\overrightarrow{AG}$  theo  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{AA'}$ .
- b) Từ câu a), hãy chứng tỏ ba điểm  $A$ ,  $G$  và  $C'$  thẳng hàng.

**Bài 24.**

Một chiếc bàn cân đối hình chữ nhật được đặt trên mặt sàn nằm ngang, mặt bàn song song với mặt sàn và bốn chân bàn vuông góc với mặt sàn như bên dưới. Trọng lực tác dụng lên bàn (biểu thị bởi vectơ  $\vec{a}$ ) phân tán đều qua bốn chân bàn và gây nên các phản lực từ mặt sàn lên các chân bàn (biểu thị bởi các vectơ  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$ ,  $\vec{e}$ ).

- a) Hãy chỉ ra mối quan hệ về phương và hướng của các vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$  và  $\vec{e}$ .
- b) Giải thích vì sao các vectơ  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$ ,  $\vec{e}$  đôi một bằng nhau.

**3****Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn**

**Câu 43 (Mức độ 1).** Cho tứ diện  $ABCD$ . Khi đó, vectơ  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$  bằng

- A.  $\overrightarrow{BC}$ . B.  $\overrightarrow{AD}$ . C.  $\overrightarrow{CB}$ . D.  $\overrightarrow{DA}$ .

**Câu 44.** Cho ba điểm  $A$ ,  $B$ ,  $C$  tùy ý. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A.  $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$ . B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .  
C.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ . D.  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ .

**Câu 45.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Khi đó  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'}$  bằng

- A.  $\overrightarrow{A'C}$ . B.  $\overrightarrow{AC'}$ . C.  $\overrightarrow{CA'}$ . D.  $\overrightarrow{C'A}$ .

**Câu 46 (Mức độ 2).** Cho tứ diện  $ABCD$ . Lấy  $G$  là trọng tâm của tam giác  $BCD$ . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A.  $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG} = \vec{0}$ . B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$ .  
C.  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BG}$ . D.  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ .

**Câu 47.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$ . B.  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$ .  
C.  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$ . D.  $\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$ .

**Câu 48.** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Chọn khẳng định đúng.

- A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB}$ . B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$ .  
C.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB'}$ . D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC}$ .

**Câu 49.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Chọn khẳng định đúng.

- A.  $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BB'}$ . B.  $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{AC'}$ .  
C.  $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{CD}$ . D.  $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{AC}$ .

**Câu 50.** Cho hình hộp  $ABCD.MNPQ$ . Tổng  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MA}$  bằng

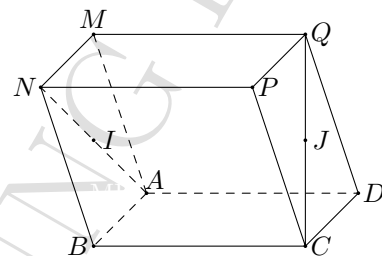
- A.  $\overrightarrow{MC}$ . B.  $\overrightarrow{MD}$ . C.  $\overrightarrow{MB}$ . D.  $\overrightarrow{MMP}$ .

**Câu 51 (Mức độ 2).** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Lấy  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $CC'$ . Vectơ  $\overrightarrow{AM}$  bằng

- A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ .  
 B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ .  
 C.  $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ .  
 D.  $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ .

**Câu 52.**

Cho hình hộp  $ABCD.MNPQ$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AN$  và  $CQ$ . Khẳng định nào dưới đây là đúng?



- A.  $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{JC}$ .  
 B.  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CJ}$ .  
 C.  $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{IJ}$ .  
 D.  $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{QJ}$ .

**Câu 53.** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ ,  $M$  là trung điểm của  $BB'$ . Đặt  $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$ .  
 B.  $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$ .  
 C.  $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$ .  
 D.  $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$ .

**Câu 54.** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  với  $G$  là trọng tâm của tam giác  $A'B'C'$ . Đặt  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ . Khi đó  $\overrightarrow{AG}$  bằng

- A.  $\vec{a} + \frac{1}{4}(\vec{b} + \vec{c})$ .  
 B.  $\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$ .  
 C.  $\vec{a} + \frac{1}{6}(\vec{b} + \vec{c})$ .  
 D.  $\vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c})$ .

**Câu 55.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $P, Q$  là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Chọn khẳng định đúng?

- A.  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$ .  
 B.  $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$ .  
 C.  $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD})$ .  
 D.  $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$ .

**Câu 56.** Cho lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $B'C'$ . Đặt  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ .  
 | Hãy biểu thị vectơ  $\overrightarrow{AM}$  theo ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .

- A.  $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ .  
 B.  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ .  
 C.  $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ .  
 D.  $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$ .

**Câu 57.** Cho hình lập phương  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ . Gọi  $O$  là tâm của hình lập phương. Chọn đẳng thức đúng?

- A.  $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$ .  
 B.  $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$ .  
 C.  $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$ .  
 D.  $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$ .

**Câu 58 (Mức độ 2).** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Khẳng định nào dưới đây sai?

- A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB'}$ .  
 B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$ .  
 C.  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AD'}$ .  
 D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'}$ .

**Câu 59.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ , gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $BCD$ . Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?



A.  $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ .

B.  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ .

C.  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ .

D.  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ .

**Câu 60.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ , gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A.  $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})$ .

B.  $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ .

C.  $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c})$ .

D.  $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})$ .

**Câu 61.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M$  và  $P$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b})$ .

B.  $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{b} - \vec{c})$ .

C.  $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d})$ .

D.  $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$ .

**Câu 62.** Cho hình lập phương  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ . Gọi  $O$  là tâm của hình lập phương. Chọn đẳng thức đúng?

A.  $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$ .

B.  $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$ .

C.  $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$ .

D.  $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$ .

**Câu 63.** Cho lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ . Hãy phân tích (biểu thị) vectơ  $\overrightarrow{BC'}$  qua các vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ .

A.  $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ .

B.  $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ .

C.  $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ .

D.  $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ .

**Câu 64.** Cho lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ . Hãy phân tích (biểu thị) vectơ  $\overrightarrow{B'C}$  qua các vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ .

A.  $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ .

B.  $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ .

C.  $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ .

D.  $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ .

**Câu 65.** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ ,  $M$  là trung điểm của  $BB'$ . Đặt  $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$ .

B.  $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$ .

C.  $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$ .

D.  $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$ .

**Câu 66.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có tâm  $O$ . Gọi  $I$  là tâm hình bình hành  $ABCD$ . Đặt  $\overrightarrow{AC'} = \vec{u}$ ,  $\overrightarrow{CA'} = \vec{v}$ ,  $\overrightarrow{BD'} = \vec{x}$ ,  $\overrightarrow{DB'} = \vec{y}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$ .

B.  $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$ .

C.  $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$ .

D.  $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$ .

**Câu 67.** Cho hình hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $AD$ . Chọn đẳng thức đúng.

A.  $\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1}$ .

B.  $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$ .

C.  $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$ .

D.  $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = 2\overrightarrow{B_1D}$ .



**Câu 68.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**.

- A.** Ba vectơ đồng phẳng là ba vectơ cùng nằm trong một mặt phẳng.
- B.** Ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng thì có  $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$  với  $m, n$  là các số duy nhất.
- C.** Ba vectơ không đồng phẳng khi có  $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$  với  $\vec{d}$  là vectơ bất kì.
- D.** Ba vectơ đồng phẳng là ba vectơ có giá cùng song song với một mặt phẳng.

**Câu 69.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A.** Nếu giá của ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  cắt nhau từng đôi một thì ba vectơ đó đồng phẳng.
- B.** Nếu trong ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  có một vectơ  $\vec{0}$  thì ba vectơ đó đồng phẳng.
- C.** Nếu giá của ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  cùng song song với một mặt phẳng thì ba vectơ đó đồng phẳng.
- D.** Nếu trong ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  có hai vectơ cùng phương thì ba vectơ đó đồng phẳng. .

**Câu 70.** Cho ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  không đồng phẳng. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A.** Các vectơ  $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}; \vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 6\vec{c}; \vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 6\vec{c}$  đồng phẳng.
- B.** Các vectơ đồng phẳng.
- C.** Các vectơ  $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}; \vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}; \vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 3\vec{c}$  đồng phẳng.
- D.** Các vectơ  $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}; \vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}; \vec{z} = -\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$  đồng phẳng. .

**Câu 71.** Cho ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . Điều kiện nào sau đây khẳng định  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng?

- A.** Tồn tại ba số thực  $m, n, p$  thỏa mãn  $m + n + p = 0$  và  $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ .
- B.** Tồn tại ba số thực  $m, n, p$  thỏa mãn  $m + n + p \neq 0$  và  $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ .
- C.** Tồn tại ba số thực  $m, n, p$  sao cho  $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ .
- D.** Giá của  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng qui. .

**Câu 72.** Cho ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  không đồng phẳng. Xét các vectơ  $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}; \vec{y} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}; \vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$ . Chọn khẳng định **đúng**?

- A.** Ba vectơ  $\vec{x}; \vec{y}; \vec{z}$  đồng phẳng.
- B.** Hai vectơ  $\vec{x}; \vec{a}$  cùng phương.
- C.** Hai vectơ  $\vec{x}; \vec{b}$  cùng phương.
- D.** Ba vectơ  $\vec{x}; \vec{y}; \vec{z}$  đôi một cùng phương..

**Câu 73.** Hãy chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

- A.** Ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng nếu có hai trong ba vectơ đó cùng phương.
- B.** Ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng nếu có một trong ba vectơ đó bằng vectơ  $\vec{0}$ .
- C.** vectơ luôn luôn đồng phẳng với hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .
- D.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  ba vectơ  $\vec{AB'}, \vec{C'A'}, \vec{D'A'}$  đồng phẳng.

**Câu 74.** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là **sai**?

- A.** Từ hệ thức  $\vec{AB} = 2\vec{AC} - 8\vec{AD}$  ta suy ra ba vectơ  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$  đồng phẳng.
- B.** Vì  $\vec{NM} + \vec{NP} = \vec{0}$  nên  $N$  là trung điểm của đoạn  $MP$ .
- C.** Vì  $I$  là trung điểm của đoạn  $AB$  nên từ một điểm  $O$  bất kì ta có  $\vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$ .
- D.** Vì  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$  nên bốn điểm  $A, B, C, D$  cùng thuộc một mặt phẳng. .

**Câu 75.** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

- A.** Vì  $I$  là trung điểm đoạn  $AB$  nên từ  $O$  bất kì ta có:  $\vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$ .
- B.** Vì  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$  nên bốn điểm  $A, B, C, D$  đồng phẳng.
- C.** Vì  $\vec{NM} + \vec{NP} = \vec{0}$  nên  $N$  là trung điểm đoạn  $NP$ .
- D.** Từ hệ thức  $\vec{AB} = 2\vec{AC} - 8\vec{AD}$  ta suy ra ba vectơ  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$  đồng phẳng. .

**Câu 76.** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

- A. Ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng khi và chỉ khi ba vectơ đó có giá thuộc một mặt phẳng.
- B. Ba tia  $Ox, Oy, Oz$  vuông góc với nhau từng đôi một thì ba tia đó không đồng phẳng.
- C. Cho hai vectơ không cùng phương  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Khi đó ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số  $m, n$  sao cho  $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ , ngoài ra cặp số  $m, n$  là duy nhất.
- D. Nếu có và một trong ba số  $m, n, p$  khác 0 thì ba vectơ  $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$  đồng phẳng.

**Câu 77.** Cho ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Nếu  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  không đồng phẳng thì từ  $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$  ta suy ra  $m = n = p = 0$ .
- B. Nếu có  $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ , trong đó  $m^2 + n^2 + p^2 > 0$  thì  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng.
- C. Với ba số thực  $m, n, p$  thỏa mãn  $m + n + p \neq 0$  ta có  $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$  thì  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng.
- D. Nếu giá của  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng qui thì  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng.

**Câu 78.** Cho hình hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ . Chọn khẳng định **Đúng**.

- A.  $\vec{BD}, \vec{BD_1}, \vec{BC_1}$  đồng phẳng.
- B.  $\vec{BA_1}, \vec{BD_1}, \vec{BD}$  đồng phẳng.
- C.  $\vec{BA_1}, \vec{BD_1}, \vec{BC}$  đồng phẳng.
- D.  $\vec{BA_1}, \vec{BD_1}, \vec{BC_1}$  đồng phẳng.

**Câu 79.** Cho hình hộp  $ABCD.EFGH$ . Gọi  $I$  là tâm hình bình hành  $ABEF$  và  $K$  là tâm hình bình hành  $BCGF$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

- A.  $\vec{BD}, \vec{AK}, \vec{GF}$  đồng phẳng.
- B.  $\vec{BD}, \vec{IK}, \vec{GF}$  đồng phẳng.
- C.  $\vec{BD}, \vec{EK}, \vec{GF}$  đồng phẳng.
- D.  $\vec{BD}, \vec{IK}, \vec{GC}$  đồng phẳng.

**Câu 80.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $I$  và  $K$  lần lượt là tâm của hình bình hành  $ABBA$  và  $BCC'B'$ . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Bốn điểm  $I, K, C, A$  đồng phẳng.
- B.  $\vec{IK} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{A'C'}$ .
- C. Ba vectơ  $\vec{BD}, \vec{IK}, \vec{B'C'}$  không đồng phẳng.
- D.  $\vec{BD} + 2\vec{IK} = 2\vec{BC}$ .

**Câu 81.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD, BC$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. Các vectơ  $\vec{AB}, \vec{DC}, \vec{MN}$  đồng phẳng.
- B. Các vectơ  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{MN}$  không đồng phẳng.
- C. Các vectơ  $\vec{AN}, \vec{CM}, \vec{MN}$  đồng phẳng.
- D. Các vectơ  $\vec{BD}, \vec{AC}, \vec{MN}$  đồng phẳng.

**Câu 82.** Cho hình hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ . Chọn khẳng định **đúng**?

- A.  $\vec{BD}, \vec{BD_1}, \vec{BC_1}$  đồng phẳng.
- B.  $\vec{CD_1}, \vec{AD}, \vec{A_1B_1}$  đồng phẳng.
- C.  $\vec{CD_1}, \vec{AD}, \vec{A_1C}$  đồng phẳng.
- D.  $\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{C_1A}$  đồng phẳng.

**Câu 83.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Trên các cạnh  $AD$  và  $BC$  lần lượt lấy  $M, N$  sao cho  $AM = 3MD, BN = 3NC$ . Gọi  $P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. Các vectơ  $\vec{BD}, \vec{AC}, \vec{MN}$  đồng phẳng.
- B. Các vectơ  $\vec{MN}, \vec{DC}, \vec{PQ}$  đồng phẳng.
- C. Các vectơ  $\vec{AB}, \vec{DC}, \vec{PQ}$  đồng phẳng.
- D. Các vectơ  $\vec{AB}, \vec{DC}, \vec{MN}$  đồng phẳng.

**Câu 84.** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **đúng**?

- A. Từ  $\vec{AB} = 3\vec{AC}$  ta suy ra  $\vec{BA} = -3\vec{CA}$ .
- B. Nếu  $\vec{AB} = -\frac{1}{2}\vec{BC}$  thì  $B$  là trung điểm đoạn  $AC$ .
- C. Vì  $\vec{AB} = -2\vec{AC} + 5\vec{AD}$  nên bốn điểm  $A, B, C, D$  đồng phẳng.
- D. Từ  $\vec{AB} = -3\vec{AC}$  ta suy ra  $\vec{CB} = 2\vec{AC}$ .

**Câu 85.** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

- A.** Nếu  $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$  thì  $B$  là trung điểm của đoạn  $AC$ .  
**B.** Từ  $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$  ta suy ra  $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}$ .  
**C.** Vì  $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AD}$  nên bốn điểm  $A, B, C, D$  cùng thuộc một mặt phẳng.  
**D.** Từ  $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$  ta suy ra  $\overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{CA}$ .

**Câu 86.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $E, F$  là các điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{EA} = k\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{FD} = k\overrightarrow{FC}$  còn  $P, Q, R$  là các điểm xác định bởi  $\overrightarrow{PA} = l\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{QE} = l\overrightarrow{QF}, \overrightarrow{RB} = l\overrightarrow{RC}$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.**  $P, Q, R$  thẳng hàng. **B.**  $P, Q, R$  không đồng phẳng.  
**C.**  $P, Q, R$  không thẳng hàng. **D.** Cả A, B, C đều sai.

**Câu 87.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Lấy các điểm  $M, N, P, Q$  lần lượt thuộc  $AB, BC, CD, DA$  sao cho  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DP} = k\overrightarrow{DC}$ . Hãy xác định  $k$  để  $M, N, P, Q$  đồng phẳng.

- A.**  $k = \frac{1}{2}$ . **B.**  $k = \frac{1}{3}$ . **C.**  $k = \frac{1}{4}$ . **D.**  $k = \frac{1}{5}$ .

**Câu 88.** Cho hình chóp  $S.ABC$ , mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt các tia  $SA, SB, SC, SG$  ( $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ ) lần lượt tại các điểm  $A', B', C', G'$ . Ta có  $\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = k \frac{SG}{SG'}$ . Hỏi  $k$  bằng bao nhiêu?

- A.** 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

**Câu 89.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Một mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt các cạnh  $SA, SB, SC, SD$  lần lượt tại  $A', B', C', D'$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.**  $\frac{SA}{SA'} + 2\frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + 2\frac{SD}{SD'}$ . **B.**  $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$ .  
**C.**  $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$ . **D.**  $\frac{SA}{SA'} - \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} - \frac{SD}{SD'}$ .

**Câu 90.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = a, SB = b, SC = c$ . Một mặt phẳng  $(\alpha)$  luôn đi qua trọng tâm của tam giác  $ABC$ , cắt các cạnh  $SA, SB, SC$  lần lượt tại  $A', B', C'$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $\frac{1}{SA'^2} + \frac{1}{SB'^2} + \frac{1}{SC'^2}$ .

- A.**  $\frac{3}{a^2 + b^2 + c^2}$ . **B.**  $\frac{\sqrt{2}}{a^2 + b^2 + c^2}$ . **C.**  $\frac{2}{a^2 + b^2 + c^2}$ . **D.**  $\frac{9}{a^2 + b^2 + c^2}$ .

**Câu 91.** Cho tứ diện  $ABCD$ ,  $M$  là một điểm nằm trong tứ diện. Các đường thẳng  $AM, BM, CM, DM$  cắt các mặt  $(BCD), (CDA), (DAB), (ABC)$  lần lượt tại  $A', B', C', D'$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua  $M$  và song song với  $(BCD)$  lần lượt cắt  $A'B', A'C', A'D'$  tại các điểm  $B_1, C_1, D_1$ . Khẳng định nào sau đây là đúng nhất.

- A.**  $M$  là trọng tâm của tam giác  $B_1C_1D_1$ .  
**B.**  $M$  là trực tâm của tam giác  $B_1C_1D_1$ .  
**C.**  $M$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $B_1C_1D_1$ .  
**D.**  $M$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $B_1C_1D_1$ .

**Câu 92.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $BC = DA = a, CA = DB = b, AB = DC = c$ . Gọi  $S$  là diện tích toàn phần (tổng diện tích tất cả các mặt). Tính giá trị lớn nhất của  $\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2}$ .

- A.**  $\frac{9}{S^2}$ . **B.**  $\frac{3}{S}$ . **C.**  $\frac{2}{S^2}$ . **D.**  $\frac{\sqrt{2}}{S}$ .

**Câu 93.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = SB = SC = a, \widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = \alpha$ . Gọi  $(\beta)$  là mặt phẳng đi qua  $A$  và các trung điểm của  $SB, SC$ . Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng  $(\beta)$ .

**A.**  $S = \frac{a^2}{2} \sqrt{7\cos^2\alpha - 16\cos\alpha + 9}.$

**C.**  $S = \frac{a^2}{8} \sqrt{7\cos^2\alpha - 6\cos\alpha + 9}.$

**B.**  $S = \frac{a^2}{2} \sqrt{7\cos^2\alpha - 6\cos\alpha + 9}.$

**D.**  $S = \frac{a^2}{8} \sqrt{7\cos^2\alpha - 16\cos\alpha + 9}.$

#### 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 94.** Trong không gian, cho ba vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  phân biệt và đều khác  $\vec{0}$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                           | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.   |   |   |
| b) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.  |   |   |
| c) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.  |   |   |
| d) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng. |   |   |

**Câu 95.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Khi đó

| Phát biểu                                          | Đ | S |
|----------------------------------------------------|---|---|
| a) $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$ . |   |   |
| b) $\vec{BC} + \vec{CD} + \vec{BB'} = \vec{BD'}$ . |   |   |

| Phát biểu                                          | Đ | S |
|----------------------------------------------------|---|---|
| c) $\vec{CB} + \vec{CD} + \vec{CC'} = \vec{CA'}$ . |   |   |
| d) $\vec{AD} + \vec{AB} + \vec{AA'} = \vec{A'C}$ . |   |   |

**Câu 96.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Khi đó

| Phát biểu                                        | Đ | S |
|--------------------------------------------------|---|---|
| a) $\vec{SA} + \vec{SD} = \vec{SC} + \vec{SB}$ . |   |   |
| b) $\vec{SA} + \vec{SC} = \vec{SD} + \vec{SB}$ . |   |   |

| Phát biểu                                                  | Đ | S |
|------------------------------------------------------------|---|---|
| c) $\vec{SA} + \vec{SC} = \vec{SA} + \vec{SB}$ .           |   |   |
| d) $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = \vec{0}$ . |   |   |

**Câu 97.** Cho hình chóp  $S.ABC$ . Điểm  $M$  thuộc cạnh  $SA$  và  $SM = \frac{2}{3}SA$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                               | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\vec{SM} = \frac{2}{3}\vec{SA}$ .                                                                   |   |   |
| b) $\vec{MA} = \frac{1}{3}\vec{AS}$ .                                                                   |   |   |
| c) Điểm $N$ nằm trên cạnh $SB$ sao cho $SN = \frac{2}{3}SB$ . Khi đó $\vec{SN} = \frac{2}{3}\vec{SB}$ . |   |   |
| d) $\vec{MN} = -\frac{2}{3}\vec{BA}$ .                                                                  |   |   |

**Câu 98.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Khi đó

| Phát biểu                                            | Đ | S |
|------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\vec{AB} = \vec{CD}$ .                           |   |   |
| b) $\vec{AB} + \vec{DD'} + \vec{C'D'} = \vec{CC'}$ . |   |   |

| Phát biểu                                          | Đ | S |
|----------------------------------------------------|---|---|
| c) $\vec{AB} + \vec{CD'} - \vec{CC'} = \vec{0}$ .  |   |   |
| d) $\vec{BC} - \vec{CC'} + \vec{DC} = \vec{A'C}$ . |   |   |

## 5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

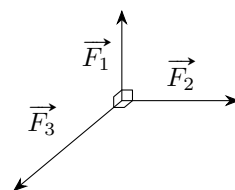
**Câu 99.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng đơn vị. Tìm độ dài vectơ  $\vec{b} = \vec{BC} - \vec{BA} + \vec{C'A}$ . KQ:

**Câu 100.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng đơn vị. Tìm độ dài vectơ  $\vec{a} = \vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'}$  (làm tròn đến hàng phần mười). KQ:

**Câu 101.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có tất cả các cạnh đều bằng 1 và  $\widehat{BAA'} = \widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$ . Độ dài đường chéo  $AC'$  bằng bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười) KQ:

**Câu 102.**

Ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc nhau và có độ lớn lần lượt là 2 N, 3 N, 4 N. Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho (làm tròn đến hàng phần trăm). KQ:



**Câu 103.** Ba lực có điểm đặt tại một đỉnh của hình lập phương, cùng phương với ba cạnh và cùng có cường độ là 5 N. Tính cường độ của hợp lực (làm tròn đến hàng phần trăm). KQ:

**Câu 104.** Cho tứ diện  $ABCD$  và  $I$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Biết  $\vec{SI} = a\vec{SA} + b\vec{SB} + c\vec{SC}$ . Tính  $a + b + c$ . KQ:

**Câu 105.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Đặt  $\vec{x} = \vec{AB}$ ;  $\vec{y} = \vec{AC}$ ;  $\vec{z} = \vec{AD}$ . Biết  $\vec{AG} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$ . Tính  $a + b + c$ . KQ:

**Câu 106.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M$  và  $P$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Đặt  $\vec{AB} = \vec{b}$ ,  $\vec{AC} = \vec{c}$ ,  $\vec{AD} = \vec{d}$ . Biết  $\vec{MP} = x\vec{d} + y\vec{b} - z\vec{c}$ . Tính  $x + y - 2z$ . KQ:

**Câu 107.** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ ,  $M$  là trung điểm của  $BB'$ . Đặt  $\vec{CA} = \vec{a}$ ,  $\vec{CB} = \vec{b}$ ,  $\vec{AA'} = \vec{c}$ . Biết  $\vec{AM} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ . Tính  $x + y + 2z$ . KQ:

### DẠNG 4

### Góc giữa hai vectơ

Áp dụng định nghĩa xác định góc giữa hai vectơ. Nếu  $\vec{u} = \vec{a}$ ,  $\vec{v} = \vec{b}$  thì  $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{a}, \vec{b})$ .

## 1 Ví dụ mẫu

**Ví dụ 38 (Mức độ 2).** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Xác định góc  $(\vec{AB}, \vec{A'D'})$ ,  $(\vec{AB}, \vec{A'C'})$ .

**Ví dụ 39 (Mức độ 2).** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Xác định góc  $(\vec{AC}, \vec{B'D'})$ ,  $(\vec{A'A}, \vec{CB'})$ .

**Ví dụ 40 (Mức độ 2).** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Tính các góc  $(\vec{A'D}, \vec{B'C'})$ ;  $(\vec{AD'}, \vec{BD'})$ .

**Ví dụ 41.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành và mặt bên  $SAB$  là tam giác đều. Tính góc giữa hai vectơ  $\vec{DC}$  và  $\vec{BS}$ . KQ:

**Ví dụ 42.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Tìm góc giữa vectơ  $\vec{A'C'}$  và vectơ  $\vec{AB}$ .



KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

- A.  $\widehat{AB'C}$ . B.  $\widehat{BDB'}$ . C.  $\widehat{A'C'D}$ . D.  $\widehat{DB'B}$ .

**Câu 114.** Cho ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  lần lượt có cường độ  $2N, 4N, 5N$  được đặt vào chất điểm  $M$ . Biết rằng góc tạo bởi hai lực bất kì trong ba lực đều bằng  $60^\circ$ . Cường độ của hợp lực tác dụng lên  $M$  là

- A.  $45N$ . B.  $\sqrt{45}N$ . C.  $\sqrt{83}N$ . D.  $83N$ .

**Câu 115.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = AC = AD$  và  $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$ . Hãy xác định góc giữa cặp vectơ  $\vec{AB}$  và  $\vec{CD}$ ?

- A.  $60^\circ$ . B.  $45^\circ$ . C.  $120^\circ$ . D.  $90^\circ$ .

**Câu 116.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$ ,  $SA = SB = SC$ . Tính góc hợp bởi  $\vec{SA}$  và  $\vec{BC}$ .

- A.  $120^\circ$ . B.  $90^\circ$ . C.  $60^\circ$ . D.  $45^\circ$ .

**Câu 117.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông  $ABCD$  cạnh bằng  $a$  và các cạnh bên đều bằng  $a$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $SD$ . Số đo của góc  $(MN, SC)$  bằng bao nhiêu?

- A.  $45^\circ$ . B.  $30^\circ$ . C.  $90^\circ$ . D.  $60^\circ$ .

**Câu 118.** Cho tứ diện  $ABCD$  đều cạnh bằng  $a$ . Gọi  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BCD$ . Góc giữa  $AO$  và  $CD$  bằng bao nhiêu?

- A.  $0^\circ$ . B.  $30^\circ$ . C.  $90^\circ$ . D.  $60^\circ$ .

**Câu 119.** Cho tứ diện  $ABCD$  với  $AB \perp AC, AB \perp BD$ . Gọi  $P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Góc giữa  $PQ$  và  $AB$  là

- A.  $90^\circ$ . B.  $60^\circ$ . C.  $30^\circ$ . D.  $45^\circ$ .

**Câu 120.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = AC = AD$  và  $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ, \widehat{CAD} = 90^\circ$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Hãy xác định góc giữa cặp vectơ  $\vec{AB}$  và  $\vec{IJ}$ .

- A.  $120^\circ$ . B.  $90^\circ$ . C.  $60^\circ$ . D.  $45^\circ$ .

**Câu 121.** Cho tứ diện  $ABCD$  có hai mặt  $ABC$  và  $ABD$  là các tam giác đều. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $AB$  và  $CD$  chéo nhau. B.  $AB$  và  $CD$  vuông góc với nhau.  
C.  $AB$  và  $CD$  đồng phẳng. D.  $AB$  và  $CD$  cắt nhau.

**Câu 122.** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC \cdot A'B'C'$  có  $AB = a$  và  $AA' = \sqrt{2}a$ . Góc giữa hai đường thẳng  $AB'$  và  $BC'$  bằng bao nhiêu?

- A.  $60^\circ$ . B.  $45^\circ$ . C.  $90^\circ$ . D.  $30^\circ$ .

**Câu 123.** Cho hình lập phương  $ABCD \cdot A_1B_1C_1D_1$  có cạnh  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $AD$ . Giá trị  $\vec{B_1M} \cdot \vec{BD_1}$  là

- A.  $\frac{1}{2}a^2$ . B.  $a^2$ . C.  $\frac{3}{4}a^2$ . D.  $\frac{3}{2}a^2$ .

**Câu 124.** Cho hình lập phương  $ABCD.EFGH$ . Hãy xác định góc giữa cặp vectơ  $\vec{AB}$  và  $\vec{EG}$ .

- A.  $90^\circ$ . B.  $60^\circ$ . C.  $45^\circ$ . D.  $120^\circ$ .

**Câu 125.** Cho hình lập phương  $ABCD \cdot A'B'C'D'$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD, BB'$ . Cosin của góc hợp bởi  $MN$  và  $AC'$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . B.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ . C.  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ . D.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ .



**Câu 126.** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ , tam giác  $A'BC$  đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với  $(ABC)$ .  $M$  là trung điểm cạnh  $CC'$ . Tính cosin góc  $\alpha$  giữa hai đường thẳng  $AA'$  và  $BM$ .

- A.  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{22}}{11}$ . B.  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{33}}{11}$ . C.  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{11}$ . D.  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{22}}{11}$ .

**Câu 127.** Cho tam giác  $ABC$ , thì công thức tính diện tích nào sau đây là đúng?

- A.  $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - BC^2}$ . B.  $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 \cdot AC^2 + \frac{1}{2}(\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$ .  
C.  $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 AC^2 - \frac{1}{2}(\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$ . D.  $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 AC^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$ .

**Câu 128.** Trong không gian cho ba điểm  $A, B, C$  bất kỳ, chọn đẳng thức đúng.

- A.  $2\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$ . B.  $2\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB^2 + AC^2 - 2BC^2$ .  
C.  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB^2 + AC^2 - 2BC^2$ . D.  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$ .

**Câu 129.** Cho hình lập phương  $ABCD.EFGH$  có cạnh bằng  $a$ . Khi đó  $\vec{AB} \cdot \vec{EG}$  bằng

- A.  $a^2\sqrt{2}$ . B.  $a^2$ . C.  $a^2\sqrt{3}$ . D.  $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ .

**Câu 130.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Hãy tìm mệnh đề sai trong những mệnh đề sau đây.

- A.  $2\vec{AB} + \vec{B'C'} + \vec{CD} + \vec{D'A'} = \vec{0}$ . B.  $\vec{AD'} \cdot \vec{AB'} = a^2$ .  
C.  $\vec{AB'} \cdot \vec{CD'} = 0$ . D.  $|\vec{AC'}| = a\sqrt{3}$ .

**Câu 131.** Cho tứ diện  $ABCD$  với  $AC = \frac{3}{2}AD$ ,  $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ$ ,  $CD = AD$ . Gọi  $\varphi$  là góc giữa  $AB$  và  $CD$ . Chọn khẳng định đúng.

- A.  $\cos \varphi = \frac{3}{4}$ . B.  $\varphi = 60^\circ$ . C.  $\varphi = 30^\circ$ . D.  $\cos \varphi = \frac{1}{4}$ .

**Câu 132.** Cho tứ diện đều  $ABCD$ ,  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Khi đó  $\cos(AB, DM)$  bằng

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . B.  $\frac{\sqrt{3}}{6}$ . C.  $\frac{1}{2}$ . D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 133.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Chứng minh rằng nếu  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AC} \cdot \vec{AD} = \vec{AD} \cdot \vec{AB}$  thì  $AB \perp CD$ ,  $AC \perp BD$ ,  $AD \perp BC$ . Điều ngược lại đúng không?

Sau đây là lời giải.

**Bước 1.**  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AC} \cdot \vec{AD} \Leftrightarrow \vec{AC} \cdot (\vec{AB} - \vec{AD}) = 0 \Leftrightarrow \vec{AC} \cdot \vec{DB} = 0 \Leftrightarrow AC \perp BD$ .

**Bước 2.** Chứng minh tương tự, từ  $\vec{AC} \cdot \vec{AD} = \vec{AD} \cdot \vec{AB}$  ta được  $AD \perp BC$  và  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AD} \cdot \vec{AB}$  ta được  $AB \perp CD$ .

**Bước 3.** Ngược lại đúng, vì quá trình chứng minh ở bước 1 và 2 là quá trình biến đổi tương đương. Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở đâu?

- A. Sai ở bước 3. B. Đúng ba bước. C. Sai ở bước 2. D. Sai ở bước 1.

**Câu 134.** Trong không gian cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Chọn hệ thức đúng?

- A.  $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 2(GA^2 + GB^2 + GC^2)$ . B.  $AB^2 + AC^2 + BC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2$ .  
C.  $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 4(GA^2 + GB^2 + GC^2)$ . D.  $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$ .

**Câu 135.** Cho tứ diện  $ABCD$  có trọng tâm  $G$ . Chọn khẳng định đúng.

- A.  $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$ .  
B.  $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 4(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$ .

**C.**  $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 6(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2).$

**D.**  $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 2(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2).$

#### 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 136.** Cho  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                     | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $0^\circ$ nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.      |   |   |
| b) Góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ lớn hơn $0^\circ$ và nhỏ hơn $90^\circ$ .                  |   |   |
| c) Góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $90^\circ$ nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc nhau. |   |   |
| d) Góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ lớn nhất khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.           |   |   |

**Câu 137.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Khi đó

| Phát biểu                                                       | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Góc giữa $\vec{AC}$ và $\vec{BB'}$ là góc $\widehat{ADC}$ .  |   |   |
| b) Góc giữa $\vec{AC}$ và $\vec{BB'}$ là góc $\widehat{AA'C}$ . |   |   |
| c) Góc giữa $\vec{AC}$ và $\vec{BB'}$ là góc $\widehat{A'AC}$ . |   |   |
| d) Góc giữa $\vec{AC}$ và $\vec{BB'}$ là góc $\widehat{ABD'}$ . |   |   |

**Câu 138.** Cho tứ diện  $ABCD$  với đáy  $BCD$  là tam giác vuông cân tại  $C$ . Các điểm  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC, BC, CD$ . Khi đó

| Phát biểu                                  | Đ | S |
|--------------------------------------------|---|---|
| a) Góc giữa $MN$ và $PQ$ bằng $45^\circ$ . |   |   |
| b) Góc giữa $MN$ và $PQ$ bằng $60^\circ$ . |   |   |

| Phát biểu                                  | Đ | S |
|--------------------------------------------|---|---|
| c) Góc giữa $MN$ và $PQ$ bằng $30^\circ$ . |   |   |
| d) Góc giữa $MN$ và $PQ$ bằng $0^\circ$ .  |   |   |

**Câu 139.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Khi đó

| Phát biểu                                | Đ | S |
|------------------------------------------|---|---|
| a) $(\vec{AB}, \vec{A'C'}) = 45^\circ$ . |   |   |
| b) $(\vec{AB}, \vec{A'C'}) = 60^\circ$ . |   |   |

| Phát biểu                                | Đ | S |
|------------------------------------------|---|---|
| c) $(\vec{AB}, \vec{A'C'}) = 30^\circ$ . |   |   |
| d) $(\vec{AB}, \vec{A'C'}) = 90^\circ$ . |   |   |

**Câu 140.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Khi đó

| Phát biểu                                                          | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Góc giữa hai vectơ $\vec{AD'}$ và $\vec{BD}$ bằng $45^\circ$ .  |   |   |
| b) Góc giữa hai vectơ $\vec{AD'}$ và $\vec{BD}$ bằng $30^\circ$ .  |   |   |
| c) Góc giữa hai vectơ $\vec{AD'}$ và $\vec{BD}$ bằng $60^\circ$ .  |   |   |
| d) Góc giữa hai vectơ $\vec{AD'}$ và $\vec{BD}$ bằng $120^\circ$ . |   |   |

**Câu 141.** Cho tứ diện đều  $ABCD$ . Khi đó

| Phát biểu                                                        | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Số đo góc giữa hai đường thẳng $AB$ và $CD$ bằng $90^\circ$ . |   |   |
| b) Số đo góc giữa hai đường thẳng $AB$ và $CD$ bằng $60^\circ$ . |   |   |
| c) Số đo góc giữa hai đường thẳng $AB$ và $CD$ bằng $45^\circ$ . |   |   |
| d) Số đo góc giữa hai đường thẳng $AB$ và $CD$ bằng $30^\circ$ . |   |   |

**Câu 142.** Cho hình lập phương  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  có cạnh bằng  $a$ . Khi đó

| Phát biểu                                                        | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{C_1D}) = 90^\circ$ . |   |   |
| b) $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{CC_1} = -a^2$ .  |   |   |

| Phát biểu                                                                                                | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{A_1D_1}$ . |   |   |
| d) $\overrightarrow{A_1D} \cdot \overrightarrow{C_1B} = 0$ .                                             |   |   |

**Câu 143.** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  có  $AB = a$ ,  $BC = 2a$ ,  $AA_1 = 3a$ . Khi đó

| Phát biểu                                                        | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{C_1D}) = 45^\circ$ . |   |   |
| b) $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{D_1D} = 9a^2$ .  |   |   |

| Phát biểu                                                                                                    | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{C_1A_1} \cdot \overrightarrow{C_1B_1}$ . |   |   |
| d) $\overrightarrow{A_1D_1} \cdot \overrightarrow{C_1C} = 0$ .                                               |   |   |

**Câu 144.** Cho tứ diện  $ABCD$  có các cạnh đều bằng  $a$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                              | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ . |   |   |
| b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$ .                                  |   |   |

| Phát biểu                                                                                            | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$ . |   |   |
| d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ .                                             |   |   |

**Câu 145.** Cho hình lập phương  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ . Khi đó

| Phát biểu                                        | Đ | S |
|--------------------------------------------------|---|---|
| a) Góc giữa $AC$ và $BD$ bằng $90^\circ$ .       |   |   |
| b) Góc giữa $B_1D_1$ và $AA_1$ bằng $60^\circ$ . |   |   |

| Phát biểu                                      | Đ | S |
|------------------------------------------------|---|---|
| c) Góc giữa $AD$ và $B_1C$ bằng $45^\circ$ .   |   |   |
| d) Góc giữa $BD$ và $A_1C_1$ bằng $90^\circ$ . |   |   |

**Câu 146.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Khi đó

| Phát biểu            | Đ | S |
|----------------------|---|---|
| a) $A'C' \perp BD$ . |   |   |
| b) $BB' \perp BD$ .  |   |   |

| Phát biểu            | Đ | S |
|----------------------|---|---|
| c) $A'B \perp DC'$ . |   |   |
| d) $BC' \perp A'D$ . |   |   |

**Câu 147.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Trên các cạnh  $DC$  và  $BB'$  lấy các điểm  $M$  và  $N$  sao cho  $MD = NB = x$  ( $0 \leq x \leq a$ ). Khi đó

| Phát biểu             | Đ | S |
|-----------------------|---|---|
| a) $AC'$ cắt $MN$ .   |   |   |
| b) $AC' \perp B'D'$ . |   |   |

| Phát biểu            | Đ | S |
|----------------------|---|---|
| c) $A'B \perp A'D$ . |   |   |
| d) $AC' \perp MN$ .  |   |   |

## 5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 148.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = 2a$ ,  $CD = 2a\sqrt{3}$ . Hai điểm  $M$  và  $N$  theo thứ tự là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Biết rằng  $MN = a\sqrt{7}$ , góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$  bằng bao nhiêu độ?

KQ:

**Câu 149.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Tính góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{BD}$ ,  $\overrightarrow{B'C}$ .

KQ:

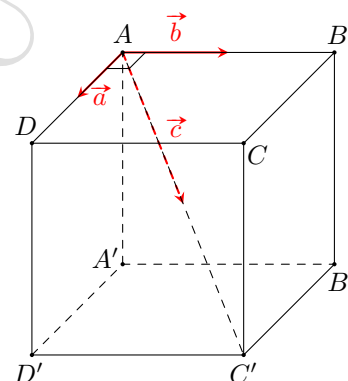
**Câu 150.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{A'B}$  và  $\overrightarrow{B'D'}$  bằng bao nhiêu?

KQ:

**Câu 151.**

Một chất điểm ở vị trí đỉnh  $A$  của hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Chất điểm chịu tác động bởi ba lực  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  lần lượt cùng hướng với  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC'}$  như hình vẽ. Cường độ của các lực  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$  tương ứng là 10 N, 10 N và 20 N. Tính cường độ hợp lực của  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

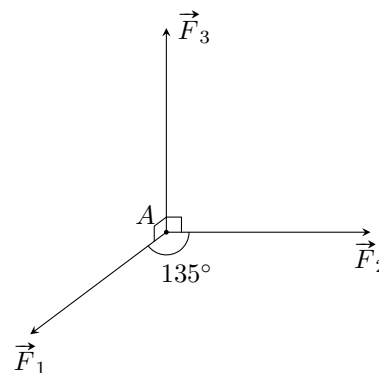
KQ:



**Câu 152.**

Một chất điểm  $A$  nằm trên mặt phẳng nằm ngang ( $\alpha$ ), chịu tác động bởi ba lực  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$ . Các lực  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  có giá nằm trong ( $\alpha$ ) và  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 135^\circ$ , còn lực  $\vec{F}_3$  có giá vuông góc với ( $\alpha$ ) và hướng lên trên. Xác định cường độ hợp lực của các lực  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$  biết rằng độ lớn của ba lực đó lần lượt là 20 N, 15 N và 10 N (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

KQ:



**Câu 153.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Tìm giá trị  $k$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = k$ .

KQ:

**Câu 154.** Cho hình lập phương  $ABCD.EFGH$  cạnh bằng 5. Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$ .

KQ:

**Câu 155.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có tất cả các cạnh đều bằng  $a$  và các góc  $\widehat{BAD} = \widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = 60^\circ$ . Khi đó góc giữa các đường thẳng  $AB$  và  $A'D$  bằng bao nhiêu độ?

KQ:

## DẠNG 5

## Tích vô hướng và ứng dụng

Trong không gian, cho hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  khác  $\vec{0}$ .

Tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  là một số, kí hiệu  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , được xác định bởi công thức

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$



a) Trong trường hợp  $\vec{u} = \vec{0}$  hoặc  $\vec{v} = \vec{0}$ , ta quy ước  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

b)  $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$ ;  $|\vec{u}|^2 \geq 0$ ;  $|\vec{u}|^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ .

c) Với hai vectơ  $\vec{u}, \vec{v}$  khác  $\vec{0}$ , ta có  $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

d) Với hai vectơ  $\vec{u}, \vec{v}$  khác  $\vec{0}$ , ta có  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

**⚡ NHẬN XÉT.** Với ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  và số  $k$ , ta có

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ;
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ ;
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$ .

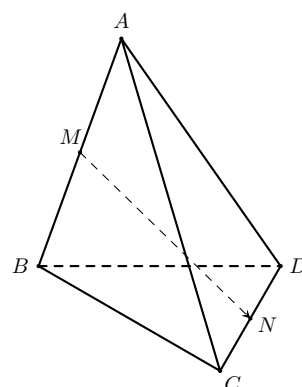
## 1

## Ví dụ mẫu

**Ví dụ 44 (Mức độ 2).**

Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AC$  và  $BD$  cùng vuông góc với  $AB$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của hai cạnh  $AB, CD$  (hình bên). Chứng minh rằng

- a)  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ ;      b)  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ .



**Ví dụ 45 (Mức độ 2).** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$  và  $M$  là trung điểm của  $CD$ .

- a) Tính các tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ .      b) Tính góc  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ .

**Ví dụ 46 (Mức độ 2).** Cho tứ diện  $OABC$  có các cạnh  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc và  $OA = OB = OC = 1$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $AB$ . Tính góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{OM}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .

**Ví dụ 47 (Mức độ 2).** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = SB = SC = AB = AC = a$  và  $BC = a\sqrt{2}$ . Tính góc giữa các vectơ  $\overrightarrow{SC}$  và  $\overrightarrow{AB}$ .

**Ví dụ 48 (Mức độ 2).** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $DA = DB = a, BC = \frac{a}{2}, AB \perp BC$  và  $\widehat{CBD} = 45^\circ$ . Tính góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{BC}$ .

**Ví dụ 49 (Mức độ 1).** Trong không gian, khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng** với mọi  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  khác  $\vec{0}$ ?

- A.**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$ .      **B.**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$ .  
**C.**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \tan(\vec{u}, \vec{v})$ .      **D.**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ .

**Ví dụ 50 (Mức độ 2).** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Tính  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{A'C'}$  theo  $a$ .

- A.**  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{A'C'} = 0$ . **B.**  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{A'C'} = \frac{a^2}{2}$ . **C.**  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{A'C'} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ . **D.**  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{A'C'} = a^2$ .

**Ví dụ 51 (Mức độ 2).** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = AC = AD$ ,  $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, CD$ . Số đo góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{IJ}$  và  $\overrightarrow{CD}$  là

- A.**  $45^\circ$ . **B.**  $90^\circ$ . **C.**  $60^\circ$ . **D.**  $120^\circ$ .

**Ví dụ 52 (Mức độ 2).** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Tính  $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD'}$  theo  $a$ .

- A.**  $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD'} = a^2$ . **B.**  $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD'} = \frac{a^2}{2}$ . **C.**  $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD'} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ . **D.**  $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD'} = 2a^2$ .

**Ví dụ 53 (Mức độ 2).** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có tất cả các cạnh đều bằng 2. Giá trị  $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'}$  bằng

- A.** 1. **B.**  $\frac{1}{2}$ . **C.** 2. **D.** 4.

**Ví dụ 54 (Mức độ 3).** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Mặt bên  $ASB$  là tam giác vuông cân tại  $S$  và có cạnh  $AB = a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Khi đó

| Phát biểu                                                             | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BS} = -\frac{a^2}{2}$ . |   |   |
| b) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AS} = \frac{a^2}{2}$ .  |   |   |

| Phát biểu                                                            | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------|---|---|
| c) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{MS} = \frac{a^2}{2}$ . |   |   |
| d) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SM} = \frac{a^2}{4}$ . |   |   |

**Ví dụ 55 (Mức độ 3).** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Khi đó

| Phát biểu                                                      | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = 2a^2$ . |   |   |
| b) $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BD} = a^2$ .    |   |   |

| Phát biểu                                                    | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------|---|---|
| c) $\overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{BB'} = 0$ .  |   |   |
| d) $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{CC'} = a^2$ . |   |   |

**Ví dụ 56 (Mức độ 2).** Trong không gian, cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai vectơ đó là  $45^\circ$ , khi đó

| Phát biểu                                                                        | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .                                |   |   |
| b) $\vec{a}(\vec{a} + \vec{b}) = 2$ .                                            |   |   |
| c) $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = -5 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ . |   |   |
| d) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = 2 - \sqrt{2}$ .                                      |   |   |

**Ví dụ 57 (Mức độ 2).** Cho tứ diện  $ABCD$  có tất cả các cạnh đều bằng  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Lấy các điểm  $I, J$  lần lượt thuộc các đường thẳng  $BC, AC$  sao cho  $\overrightarrow{IB} = h\overrightarrow{IC}$  và  $\overrightarrow{JA} = h\overrightarrow{JC}$ ; trong đó,  $h$  là số thực khác 0 cho trước. Tính  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{IJ}$ . KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Ví dụ 58 (Mức độ 3).** Cho hình chóp tam giác  $S.ABC$  có  $SA = SB = SC = AB = AC = 2a$  và  $BC = 2\sqrt{2}a$ . Tính góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{SB}$ . KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|



**Ví dụ 59 (Mức độ 2).** Cho tứ diện  $ABCD$  có hai mặt  $ABC$  và  $ABD$  là các tam giác đều. Tính góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$ .

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

## 2 Bài tập tự luận

**Bài 28 (Mức độ 3).** Cho tứ diện  $ABCD$ . Hai điểm  $M$  và  $N$  theo thứ tự là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Cho biết  $AB = 10$ ,  $CD = 6$ ,  $MN = 7$ .

- a) Chứng minh rằng  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ .      b) Từ kết quả câu a), hãy tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$ .
- c) Tính  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC})$ .

**Bài 29 (Mức độ 3).** Cho tứ diện  $ABCD$ . Chứng minh rằng

- a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$ ;      b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ .

**Bài 30 (Mức độ 3).** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Tính  $\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{D'C'}$ ;  $\overrightarrow{D'A} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

**Bài 31 (Mức độ 3).** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ , tam giác  $A'BC$  đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với  $(ABC)$ . Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $CC'$ . Tính  $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BM}$ .

**Bài 32 (Mức độ 3).** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng  $a$  và  $ABCD$  là hình vuông. Gọi  $M$  là trung điểm của  $CD$ . Tính  $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{CB}$ .

## 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 156 (Mức độ 3).** Cho hai vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = 26$ ,  $|\vec{b}| = 28$ ,  $|\vec{a} + \vec{b}| = 48$ . Độ dài vectơ  $\vec{a} - \vec{b}$  bằng

- A. 25.      B.  $\sqrt{616}$ .      C. 9.      D.  $\sqrt{618}$ .

**Câu 157 (Mức độ 2).** Cho hai vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $|\vec{a} - \vec{b}| = 4$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $\cos \alpha = \frac{3}{8}$ .      B.  $\alpha = 30^\circ$ .      C.  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ .      D.  $\alpha = 60^\circ$ .

**Câu 158 (Mức độ 3).** Trong không gian cho ba điểm  $A, B, C$  bất kỳ. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$ .      B.  $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2BC^2$ .
- C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2BC^2$ .      D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$ .

**Câu 159 (Mức độ 3).** Cho tứ diện  $ABCD$ . Tìm giá trị của  $k$  thích hợp thỏa mãn  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = k$ .

- A.  $k = 1$ .      B.  $k = 2$ .      C.  $k = 0$ .      D.  $k = 4$ .

**Câu 160 (Mức độ 3).** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $BC = a\sqrt{2}$ , các cạnh còn lại đều bằng  $a$ . Giá trị của  $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC}$  bằng

- A.  $\frac{a^2}{2}$ .      B.  $-\frac{a^2}{2}$ .      C.  $-a^2$ .      D.  $a^2$ .

**Câu 161 (Mức độ 3).** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Giá trị tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA})$  bằng

- A.  $\frac{a^2}{2}$ .      B.  $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ .      C.  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .      D.  $\frac{3a^2}{2}$ .



**Câu 162.** Cho  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ  $\vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ . B.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ . C.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ . D.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

**Câu 163.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ . Xác định góc  $\alpha$  giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khi  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

- A.  $\alpha = 180^\circ$ . B.  $\alpha = 0^\circ$ . C.  $\alpha = 90^\circ$ . D.  $\alpha = 45^\circ$ .

**Câu 164.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 2$  và  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$ . Xác định góc  $\alpha$  giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

- A.  $\alpha = 30^\circ$ . B.  $\alpha = 45^\circ$ . C.  $\alpha = 60^\circ$ . D.  $\alpha = 120^\circ$ .

**Câu 165.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$  và hai vectơ  $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$  và  $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$  vuông góc với nhau. Xác định góc  $\alpha$  giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

- A.  $\alpha = 90^\circ$ . B.  $\alpha = 180^\circ$ . C.  $\alpha = 60^\circ$ . D.  $\alpha = 45^\circ$ .

**Câu 166.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa mãn điều kiện  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$  và  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ . Độ dài vectơ  $3\vec{a} + 5\vec{b}$  là

- A.  $5\sqrt{5}$ . B.  $\sqrt{124}$ . C. 8. D. 124.

**Câu 167.** Cho  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  có  $(\vec{a} + 2\vec{b})$  vuông góc với vectơ  $(5\vec{a} - 4\vec{b})$  và  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . B.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ . C.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . D.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$ .

**Câu 168.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  thỏa mãn:  $|\vec{a}| = 4$ ;  $|\vec{b}| = 3$ ;  $|\vec{a} - \vec{b}| = 4$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ . Chọn khẳng định đúng?

- A.  $\cos \alpha = \frac{3}{8}$ . B.  $\alpha = 30^\circ$ . C.  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ . D.  $\alpha = 60^\circ$ .

**Câu 169.**  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  là 2 vectơ đều khác  $\vec{0}$ . Khi đó  $|\vec{u} + 2\vec{v}|^2$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\vec{u}^2 + 2\vec{v}^2 - 4\vec{u} \cdot \vec{v}$ . B.  $\vec{u}^2 + 4\vec{v}^2 + 4\vec{u} \cdot \vec{v}$ . C.  $\vec{u}^2 + 4\vec{v}^2$ . D.  $4\vec{u} \cdot \vec{v}(\vec{u} - \vec{v})$ .

**Câu 170.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  có  $|\vec{a}| = 5$ ,  $|\vec{b}| = 12$  và  $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$ . Khi đó cosin của góc giữa hai vectơ  $\vec{a} - \vec{b}$  và  $\vec{a} + \vec{b}$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{12}{13}$ . B.  $\frac{5}{12}$ . C.  $-\frac{119}{169}$ . D.  $\frac{119}{169}$ .

**Câu 171.** Cho  $\vec{u} = \vec{a} + 3\vec{b}$  vuông góc với  $\vec{v} = 7\vec{a} - 5\vec{b}$  và  $\vec{x} = \vec{a} - 4\vec{b}$  vuông góc với  $\vec{y} = 7\vec{a} - 2\vec{b}$ . Khi đó góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng.

- A.  $75^\circ$ . B.  $60^\circ$ . C.  $120^\circ$ . D.  $45^\circ$ .

**Câu 172.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  thỏa mãn:  $|\vec{a}| = 4$ ;  $|\vec{b}| = 3$ ;  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$ . Xét hai vectơ  $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$ ;  $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai vectơ  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ . Chọn khẳng định đúng.

- A.  $\cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{15}}$ . B.  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$ . C.  $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{15}}$ . D.  $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{15}}$ .

**Câu 173.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  thỏa mãn:  $|\vec{a}| = 26$ ;  $|\vec{b}| = 28$ ;  $|\vec{a} + \vec{b}| = 48$ . Độ dài vectơ  $\vec{a} - \vec{b}$  bằng bao nhiêu?

- A. 9. B. 25. C.  $\sqrt{616}$ . D.  $\sqrt{618}$ .

4

Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 174 (Mức độ 1).** Trong không gian, cho hai vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  khác vectơ không và số thực  $k$ . Khi đó

| Phát biểu                                                     | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}  \cdot  \vec{b} $ .      |   |   |
| b) $(k\vec{a}) \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ . |   |   |

| Phát biểu                                                                               | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| c) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a}  \cdot  \vec{b} }$ . |   |   |
| d) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ .                  |   |   |

**Câu 175 (Mức độ 2).** Trong không gian, cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$  và  $G$  là trọng tâm. Khi đó

| Phát biểu                                              | Đ | S |
|--------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\vec{AG} \cdot \vec{BC} = 0$ .                     |   |   |
| b) $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ . |   |   |

| Phát biểu                                                | Đ | S |
|----------------------------------------------------------|---|---|
| c) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2}{2}$ .           |   |   |
| d) $\vec{GB} \cdot \vec{GC} = -\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$ . |   |   |

**Câu 176 (Mức độ 3).** Cho  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 5$ , góc giữa  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng  $120^\circ$ . Khi đó

| Phát biểu                              | Đ | S |
|----------------------------------------|---|---|
| a) $ \vec{a} + \vec{b}  = \sqrt{19}$ . |   |   |
| b) $ \vec{a} - \vec{b}  = 7$ .         |   |   |

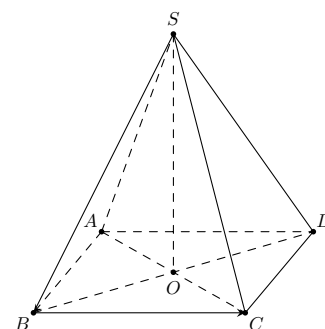
| Phát biểu                                | Đ | S |
|------------------------------------------|---|---|
| c) $ \vec{a} - 2\vec{b}  = \sqrt{139}$ . |   |   |
| d) $ \vec{a} + 2\vec{b}  = 9$ .          |   |   |

**Câu 177 (Mức độ 3).**

Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có độ dài tất cả các cạnh bằng  $a$  (Hình bên). Khi đó

| Phát biểu                                      | Đ | S |
|------------------------------------------------|---|---|
| a) $\vec{AS} \cdot \vec{BC} = \frac{a^2}{2}$ . |   |   |
| b) $\vec{AS} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2}{2}$ . |   |   |

| Phát biểu                            | Đ | S |
|--------------------------------------|---|---|
| c) $\vec{SA} \cdot \vec{SC} = 0$ .   |   |   |
| d) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = a^2$ . |   |   |



**Câu 178 (Mức độ 3).** Cho hình lập phương  $ABCD.EFGH$  có cạnh bằng  $a$ . Khi đó

| Phát biểu                             | Đ | S |
|---------------------------------------|---|---|
| a) $\vec{BC} \cdot \vec{AH} = -a^2$ . |   |   |
| b) $\vec{AF} \cdot \vec{EG} = a^2$ .  |   |   |

| Phát biểu                             | Đ | S |
|---------------------------------------|---|---|
| c) $\vec{AC} \cdot \vec{FE} = -a^2$ . |   |   |
| d) $\vec{AE} \cdot \vec{HD} = a^2$ .  |   |   |

**Câu 179.** Cho  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 5$  góc giữa  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng  $120^\circ$ . Khi đó

| Phát biểu                              | Đ | S |
|----------------------------------------|---|---|
| a) $ \vec{a} + \vec{b}  = \sqrt{19}$ . |   |   |
| b) $ \vec{a} - \vec{b}  = 8$ .         |   |   |

| Phát biểu                                | Đ | S |
|------------------------------------------|---|---|
| c) $ \vec{a} - 2\vec{b}  = \sqrt{139}$ . |   |   |
| d) $ \vec{a} + 2\vec{b}  = 9$ .          |   |   |

**Câu 180.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                      | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} ( \vec{a} + \vec{b} ^2 -  \vec{a} ^2 -  \vec{b} ^2)$ . |   |   |
| b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} ( \vec{a} ^2 +  \vec{b} ^2 -  \vec{a} - \vec{b} ^2)$ . |   |   |
| c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} ( \vec{a} + \vec{b} ^2 -  \vec{a} - \vec{b} ^2)$ .     |   |   |
| d) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} ( \vec{a} + \vec{b} ^2 -  \vec{a} - \vec{b} ^2)$ .     |   |   |

## 5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 181 (Mức độ 2).** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ$ ,  $AB = AD = AC$ . Giá trị của  $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$  bằng bao nhiêu? KQ:

**Câu 182 (Mức độ 3).** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC, AD$ . Biết  $AB = 2$ ,  $CD = 2\sqrt{2}$  và  $MN = \sqrt{5}$ . Giá trị của  $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$  bằng bao nhiêu? KQ:

**Câu 183 (Mức độ 3).** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = SB = SC = AB = AC = 1$  và góc  $\widehat{CAB} = 30^\circ$ . Giá trị của  $\vec{AB} \cdot \vec{SC}$  làm tròn đến chữ số hàng phần trăm bằng bao nhiêu? KQ:

**Câu 184 (Mức độ 3).** Cho hình chóp  $O.ABC$  có ba cạnh  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc và  $OA = OB = OC = 1$ . Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $AB$ . Giá trị của  $\vec{BC} \cdot \vec{OM}$  bằng bao nhiêu? KQ:

**Câu 185.** Cho 2 vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 3$  và  $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 2\sqrt{7}$ . Tính  $(\vec{a}, \vec{b})$ . KQ:

**Câu 186.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  tạo với nhau góc  $120^\circ$  và  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 5$ . Tính  $|\vec{a} + 2\vec{b}|$ . (Làm tròn đến hàng phần trăm) KQ:

**Câu 187.** Cho ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, |\vec{a} - \vec{b}| = 3$ . Tính  $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b})$ . KQ:

**Câu 188.** Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  có  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ . Xác định  $x > 0$  sao cho thỏa mãn  $|x\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$ . KQ:

**Câu 189.** Cho ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  thỏa mãn:  $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 1, |\vec{c}| = 5$  và  $5(\vec{b} - \vec{a}) + 3\vec{c} = \vec{0}$ . Khi đó biểu thức  $M = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$  có giá trị bao nhiêu? KQ:

**Câu 190.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa mãn các điều kiện  $|\vec{a}| = \frac{1}{2}|\vec{b}| = 1, |\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{15}$ . Đặt  $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$  và  $\vec{v} = 2k\vec{a} - \vec{b}, k \in \mathbb{R}$ . Tìm tất cả các giá trị của  $k$  sao cho  $(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ$  (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm). KQ:

## THẦY KIÊN TOÁN: ————— DẠY THẬT - HỌC THẬT - GIÁ TRỊ THẬT —————

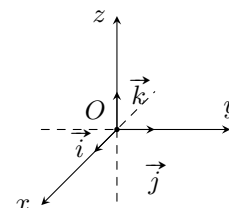
## K12 – CHƯƠNG 2

## §2. TỌA ĐỘ CỦA VECTO TRONG KHÔNG GIAN

## A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

## 1 Hệ tọa độ trong không gian

**Định nghĩa 13** Trong không gian, cho ba trục  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  đôi một vuông góc. Gọi  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  lần lượt là ba vectơ đơn vị trên các trục  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ . Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc  $Oxyz$  trong không gian hay gọi là đơn giản là hệ tọa độ  $Oxyz$ .



⚡ **NHẬN XÉT.** Trong  $Oxyz$

a) Điểm  $O$  được gọi là **gốc tọa độ**.

Các trục  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  được gọi là các trục tọa độ. Các mặt phẳng  $(Oxy)$ ,  $(Oyz)$ ,  $(Ozx)$  đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng tọa độ.

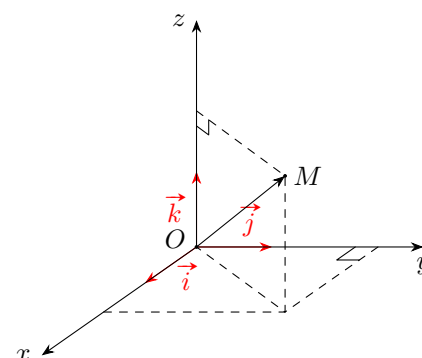
Không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  còn được gọi là không gian  $Oxyz$ .

b) Vì  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  là ba vectơ đơn vị đôi một vuông góc với nhau nên ta có  $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$  và  $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$ .

## 2 Tọa độ của điểm và vectơ

a) Tọa độ của điểm

**Định nghĩa 14** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M$ . Nếu  $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  thì ta gọi bộ ba số  $(x; y; z)$  là tọa độ của điểm  $M$  đối với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  và viết  $M = (x; y; z)$  hoặc  $M(x; y; z)$ ;  $x$  là hoành độ,  $y$  là tung độ,  $z$  là cao độ của điểm  $M$ .



b) Tọa độ của vectơ

**Định nghĩa 15** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{a}$ . Nếu  $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$  thì ta gọi bộ ba số  $(a_1; a_2; a_3)$  là tọa độ vectơ  $\vec{a}$  đối với hệ tọa độ  $Oxyz$  và viết  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  hoặc  $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ ;  $a_1$  là hoành độ,  $a_2$  là tung độ,  $a_3$  là cao độ của  $\vec{a}$ .

⚡ **NHẬN XÉT.** Trong không gian  $Oxyz$ , ta có:

📍 Tọa độ của điểm  $M$  là tọa độ của vectơ  $\vec{OM}$ , tức là

Điều kiện để hai vectơ bằng nhau:

$$\text{Cho } \vec{a} = (x; y; z), \vec{b} = (x'; y'; z'). \text{ Khi đó } \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

## B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

### DẠNG 1 Tìm tọa độ vectơ trong không gian Oxyz

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $A(x_A; y_A; z_A)$ ,  $B(x_B; y_B; z_B)$  và  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ . Khi đó, ta có

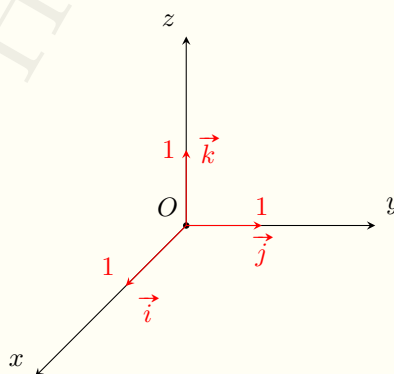
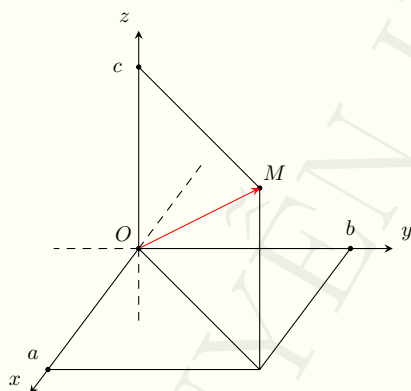
☑  $\vec{OA} = x_A \cdot \vec{i} + y_A \cdot \vec{j} + z_A \cdot \vec{k} \Leftrightarrow A(x_A; y_A; z_A)$ . Trong đó

- Vectơ đơn vị  $\vec{i}$  trên trục  $Ox$  có tọa độ là  $\vec{i} = (1; 0; 0)$ ;
- Vectơ đơn vị  $\vec{j}$  trên trục  $Oy$  có tọa độ là  $\vec{j} = (0; 1; 0)$ ;
- Vectơ đơn vị  $\vec{k}$  trên trục  $Oz$  có tọa độ là  $\vec{k} = (0; 0; 1)$ .

☑  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k}$ .

☑  $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ .

☑  $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$ .



### 1 Ví dụ mẫu

**Ví dụ 1.** Cho tứ diện  $OABC$  có  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc và có độ dài bằng 1. Vẽ hệ trục tọa độ  $Oxyz$  có gốc là  $O$ , các điểm  $A, B, C$  lần lượt nằm trên các tia  $Ox, Oy, Oz$  và chỉ ra các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ.

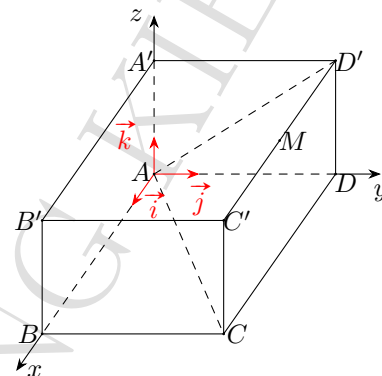
**Ví dụ 2.** Cho hình hộp chữ nhật  $OABC.O'B'C'$  có cạnh  $OA = 4, OC = 6, OO' = 3$ . Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  có gốc tọa độ  $O$ ; các điểm  $A, C, O'$  lần lượt nằm trên các tia  $Ox, Oy, Oz$ . Xác định tọa độ các điểm  $A, B, B'$ .

**Ví dụ 3 (Mức độ 1).** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $M(-4; 3; -1)$  và  $N(2; -1; -3)$ . Tìm tọa độ của các vectơ  $\vec{OM}, \vec{ON}$ .

**Ví dụ 4 (Mức độ 1).** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \frac{3}{4}\vec{k}$  và vectơ  $\vec{v} = \left(3; -\frac{5}{4}; 2\right)$ .

a) Tìm tọa độ của  $\vec{u}$ .b) Biểu diễn  $\vec{v}$  theo các vectơ đơn vị  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ .**Ví dụ 5.**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có đỉnh  $A$  trùng với gốc  $O$ , các vectơ  $\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AA'}$  theo thứ tự cùng hướng với  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  và có  $AB = 8, AD = 6, AA' = 4$ . Tìm tọa độ các vectơ  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AC'}$  và  $\vec{AM}$  với  $M$  là trung điểm của cạnh  $C'D'$ .



**Ví dụ 6.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; 2; 3)$ . Tọa độ của vectơ  $\vec{OA}$  là

- A.**  $(1; 2; 3)$ . **B.**  $(1; 0; 3)$ . **C.**  $(0; 2; 3)$ . **D.**  $(1; 2; 0)$ .

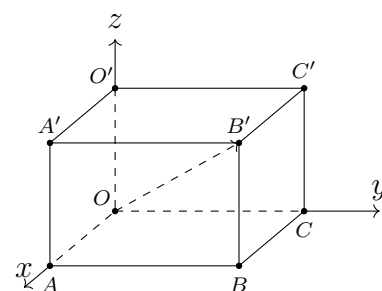
**Ví dụ 7.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{u} = (4; 2; -1)$  và điểm  $A$ . Biết  $\vec{OA} = \vec{u}$ . Tọa độ của điểm  $A$  là

- A.**  $(4; 1; 2)$ . **B.**  $(4; 2; 1)$ . **C.**  $(4; 2; -1)$ . **D.**  $(-4; 2; 1)$ .

**Ví dụ 8.**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp chữ nhật  $OABC.O'A'B'C'$  có ba đỉnh  $A, C, O'$  lần lượt nằm trên ba tia  $Ox, Oy, Oz$  và có ba cạnh  $OA = 6, OC = 8, OO' = 5$  (tham khảo hình vẽ minh họa). Điểm  $B'$  có tọa độ là

- A.**  $(8; 6; 5)$ . **B.**  $(5; 6; 8)$ . **C.**  $(6; 5; 8)$ . **D.**  $(6; 8; 5)$ .



**Ví dụ 9.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(4; 2; 1)$  và  $B(2; 0; 5)$  và  $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{k} - \vec{j}$ . Khi đó

| Phát biểu                                       | Đ | S |
|-------------------------------------------------|---|---|
| a) $\vec{OA} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ . |   |   |
| b) $\vec{OB} = 2\vec{j} + \vec{j} + 5\vec{k}$ . |   |   |

| Phát biểu                     | Đ | S |
|-------------------------------|---|---|
| c) $\vec{AB} = (-2; -2; 4)$ . |   |   |
| d) $\vec{u} = (4; 3; -1)$ .   |   |   |

**Ví dụ 10.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp chữ nhật  $OBCD.O'B'C'D'$  có  $B(2; 0; 0), D(0; 1; 0), O'(0; 0; 1)$ . Khi đó

| Phát biểu          | Đ | S |
|--------------------|---|---|
| a) $C(2; 1; 0)$ .  |   |   |
| b) $B'(2; 0; 1)$ . |   |   |

| Phát biểu                                        | Đ | S |
|--------------------------------------------------|---|---|
| c) $\vec{OC'} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ . |   |   |
| d) $\vec{OD'} = (1; 1; 1)$ .                     |   |   |

**Ví dụ 11.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{u} = (1; -2; 3)$  và điểm  $M(2; 3; -1)$ . Tọa độ điểm  $C(a; b; c)$  thỏa mãn  $\vec{MC} = \vec{u}$ . Tính giá trị  $a + b + c$

KQ: 

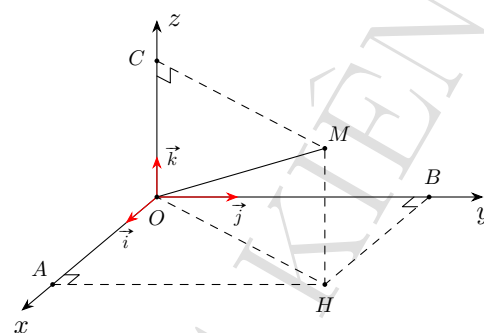
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Ví dụ 12.**

Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm  $M$  trong không gian  $Oxyz$  như hình bên. Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  xuống mặt phẳng  $(Oxy)$ . Cho biết  $OM = 50$ ,  $(\vec{i}, \overrightarrow{OH}) = 64^\circ$ ,  $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}) = 48^\circ$ . Gọi tọa độ của điểm là  $M(a; b; c)$ , tính  $a + b + c$ . (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|



## 2 Bài tập tự luận

**Bài 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , biết  $\vec{a} = 5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{k}$ . Tìm tọa độ các vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ .

**Bài 2.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; 2; -3)$  và vectơ  $\vec{u} = (3; -4; 2)$ .  
Hãy biểu diễn theo các vectơ  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  và  $\vec{k}$  mỗi vectơ sau

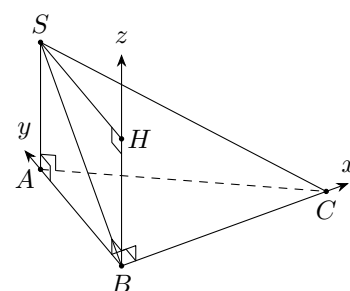
a)  $\overrightarrow{OA}$ ;

b)  $\vec{u}$ .

**Bài 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp chữ nhật  $OABC.O'A'B'C'$ . Các đỉnh  $A, C, O'$  tương ứng thuộc các tia  $Ox, Oy, Oz$  và  $OA = 3, OC = 4, OO' = 2$ . Tìm tọa độ của vectơ  $\overrightarrow{O'B}$ .

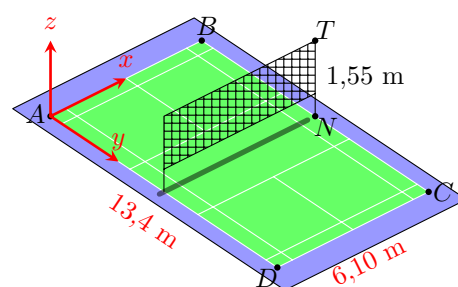
**Bài 4.**

Cho tứ diện  $SABC$  được đặt vào một hệ tọa độ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ ,  $BA = 2, BC = 4, SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  và có độ dài bằng 2. Tìm tọa độ của vectơ  $\overrightarrow{CS}$ .



**Bài 5.**

Sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế có chiều dài 13,4 mét, chiều rộng 6,10 mét, chiều cao lưới 1,55 mét. Ta chọn hệ trục  $Oxyz$  cho sân đó như hình bên dưới (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử  $NT$  là một trụ cầu lông để căng lưới. Hãy xác định tọa độ của vectơ  $\overrightarrow{NT}$ .



## 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 1.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(-2; \sqrt{3}; 6)$ . Tọa độ của vectơ  $\overrightarrow{OA}$  là

- A.**  $(-2; \sqrt{3}; 6)$ . **B.**  $(-2; 0; 6)$ . **C.**  $(0; \sqrt{3}; 6)$ . **D.**  $(-2; \sqrt{3}; 0)$ .

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 1; -1)$  và  $B(2; 3; 2)$ . Vectơ  $\overrightarrow{AB}$  có tọa độ là

- A.**  $(3; 5; 1)$ . **B.**  $(-1; -2; 3)$ . **C.**  $(3; 4; 1)$ . **D.**  $(1; 2; 3)$ .

**Câu 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 1; -2)$  và  $B(2; 2; 1)$ . Tọa độ  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  là

- A.**  $(3; 3; -1)$ . **B.**  $(-1; -1; -3)$ . **C.**  $(3; 1; 1)$ . **D.**  $(1; 1; 3)$ .



**Câu 4.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(-1; 0; 1)$  và  $\overrightarrow{AB} = (2; -1; 1)$ . Tọa độ điểm  $B$  là

- A.  $(1; -1; 2)$ . B.  $(2; -1; 1)$ . C.  $(-2; 1; -1)$ . D.  $(1; 1; 2)$ .

**Câu 5.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{u} = (-1; 4; 2)$  và điểm  $A$ . Biết  $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ . Tọa độ của điểm  $A$  là

- A.  $(1; 4; 2)$ . B.  $(-1; 4; 2)$ . C.  $(1; -4; -2)$ . D.  $(-1; -4; -2)$ .

**Câu 6.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{u} = (4; 2; 3)$  và điểm  $A(1; 1; 1)$ . Tọa độ điểm  $C$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$  là

- A.  $(4; 2; 3)$ . B.  $(1; 1; 1)$ . C.  $(5; 3; 4)$ . D.  $(3; 1; 2)$ .

**Câu 7.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{u} = -2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ . Tọa độ của vectơ  $\vec{u}$  là

- A.  $(-2; -1; 3)$ . B.  $(2; 1; 3)$ . C.  $(-2; 0; 3)$ . D.  $(-2; -1; -3)$ .

**Câu 8.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho vectơ  $\overrightarrow{AO} = 3(\vec{i} + 4\vec{j}) - 2\vec{k} + 5\vec{j}$ . Tọa độ của điểm  $A$  là

- A.  $(3; 17; -2)$ . B.  $(-3; -17; 2)$ . C.  $(3; -2; 5)$ . D.  $(3; 5; -2)$ .

**Câu 9.** Trong không gian cho  $Oxyz$  vectơ  $\overrightarrow{OM} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ . Gọi  $M'$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$ . Khi đó tọa độ của điểm  $M'$  trong hệ tọa độ  $Oxyz$  là

- A.  $(1; -3; 4)$ . B.  $(1; 4; -3)$ . C.  $(0; 0; 4)$ . D.  $(1; -3; 0)$ .

**Câu 10.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình bình hành  $ABCD$  có  $A(1; 0; 3)$ ,  $B(2; 3; -4)$ ,  $C(-3; 1; 2)$ . Tọa độ của điểm  $D$  là

- A.  $(-4; -2; 9)$ . B.  $(2; -4; 5)$ . C.  $(-2; 4; -5)$ . D.  $(4; 2; -9)$ .

#### 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 11.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho vectơ  $\overrightarrow{OA} = -2\vec{i} + 3\vec{k}$  và  $B(0; -1; 6)$ . Khi đó

| Phát biểu                     | Đ | S |
|-------------------------------|---|---|
| a) $A(-2; 0; 3)$ .            |   |   |
| b) Điểm $A$ thuộc trục hoành. |   |   |

| Phát biểu                                        | Đ | S |
|--------------------------------------------------|---|---|
| c) $\overrightarrow{OB} = -\vec{j} + 6\vec{k}$ . |   |   |
| d) $\overrightarrow{AB} = (-2; 3; 0)$ .          |   |   |

**Câu 12.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(4; 6; -5)$ ,  $B(5; 7; -4)$ ,  $C(5; 6; -4)$ ,  $D'(2; 0; 2)$ . Khi đó

| Phát biểu             | Đ | S |
|-----------------------|---|---|
| a) $D(4; 5; -5)$ .    |   |   |
| b) $A' = (2; 1; 2)$ . |   |   |

| Phát biểu                                 | Đ | S |
|-------------------------------------------|---|---|
| c) $\overrightarrow{DD'} = (-2; -5; 7)$ . |   |   |
| d) $C'(3; 1; 3)$ .                        |   |   |

**Câu 13.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(2; 1; -3)$ ,  $C(-3; 5; 1)$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                 | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -2)$ .                                  |   |   |
| b) $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ .                |   |   |
| c) $\overrightarrow{OC} = -3\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ .               |   |   |
| d) Điểm $D$ sao cho $ABCD$ là hình bình hành có tọa độ là $D(-4; 6; 3)$ . |   |   |

**Câu 14.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có  $A(1; 0; 2)$ ,  $B(3; 2; 5)$ ,  $C(7; -3; 9)$  và  $A'(5; 0; 1)$ . Khi đó

| Phát biểu                                | Đ | S |
|------------------------------------------|---|---|
| a) $\overrightarrow{AA'} = (4; 0; -1)$ . |   |   |
| b) $\overrightarrow{AB} = (2; 2; 2)$ .   |   |   |

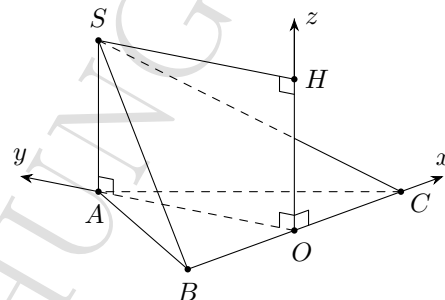
| Phát biểu                                 | Đ | S |
|-------------------------------------------|---|---|
| c) $\overrightarrow{A'C'} = (6; -3; 7)$ . |   |   |
| d) $B'(7; 2; 4)$ .                        |   |   |

**Câu 15.**

Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh bằng 2,  $SA$  vuông góc với đáy và  $SA = 1$ . Thiết lập hệ tọa độ như hình vẽ bên. Khi đó

| Phát biểu                               | Đ | S |
|-----------------------------------------|---|---|
| a) $C(2; 0; 0)$ .                       |   |   |
| b) $\overrightarrow{OB} = (-1; 0; 0)$ . |   |   |

| Phát biểu                                     | Đ | S |
|-----------------------------------------------|---|---|
| c) $\overrightarrow{HS} = (1; \sqrt{3}; 0)$ . |   |   |
| d) $S(0; \sqrt{3}; 1)$ .                      |   |   |

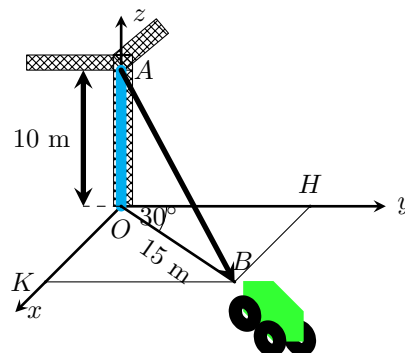


## 5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 16.** Trong không gian  $Oxyz$ , biết  $\vec{a} = 5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}$ . Tính hoành độ của  $\vec{a}$ ? KQ:

**Câu 17.**

Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp  $AB$  trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ  $Oxyz$  như hình bên với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng 1 (m). Biết  $\overrightarrow{AB} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ . Hỏi giá trị của  $b$  bằng bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) KQ:



**Câu 18.** Cho hai điểm  $M(1; -2; 3)$  và  $N(3; 4; -5)$ . Tọa độ của vectơ  $\vec{u} = (a; b; c)$  thỏa mãn  $\vec{u} = \overrightarrow{NM}$ . Tính giá trị  $a + b + c$ ? KQ:

**Câu 19.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $A(2; 0; -3)$ ,  $B(0; -4; 5)$  và  $C(-1; 2; 0)$ . Biết rằng  $D$  là đỉnh thứ tư của hình bình hành  $ABCD$ . Hỏi cao độ của điểm  $D$  bằng bao nhiêu? KQ:

**Câu 20.** Cho hình bình hành  $BMDA$  có  $A(1; 1; 1)$ ,  $\overrightarrow{BM} = (4; 0; -2)$ ,  $D(x; y; z)$ . Tính tổng  $S = \frac{9}{x} + \frac{3}{y} - \frac{27}{z}$ ? KQ:

## DẠNG 2

## Tìm tọa độ hình chiếu của điểm trên trục tọa độ, các mặt phẳng tọa độ

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , xét điểm  $M$  có tọa độ  $(x_0; y_0; z_0)$ .

- ☑ Hình chiếu của điểm  $M$  lên các trục  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  lần lượt là các điểm có tọa độ là  $(x_0; 0; 0)$ ,  $(0; y_0; 0)$  và  $(0; 0; z_0)$ .
- ☑ Hình chiếu của điểm  $M$  lên các mặt phẳng  $(Oxy)$ ,  $(Oyz)$ ,  $(Ozx)$  lần lượt là các điểm có tọa độ  $(x_0; y_0; 0)$ ,  $(0; y_0; z_0)$  và  $(x_0; 0; z_0)$ .
- ☑ Khoảng cách từ điểm  $M$  đến  $Oz$  là  $OM_1 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ .
- ☑ Khoảng cách từ điểm  $M$  đến mặt phẳng  $Oxy$  là  $MM_1 = |z_0|$ .
- ☑ Điểm đối xứng của  $M$  qua trục  $Ox$  giữ nguyên  $x$  và đổi dấu  $y, z$  là  $M'_1(x_0; -y_0; -z_0)$ .
- ☑ Điểm đối xứng với  $M$  qua mặt phẳng  $(Oxy)$  giữ nguyên  $x, y$  và đổi dấu  $z$  là  $M'_2(x_0; y_0; -z_0)$ .

## 1 Ví dụ mẫu

**Ví dụ 13 (Mức độ 1).** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(3; 2; 4)$ . Gọi  $A_1, A_2, A_3$  lần lượt là hình chiếu của điểm  $A$  trên các trục  $Ox, Oy, Oz$ . Tìm tọa độ các điểm  $A_1, A_2, A_3$ .

**Ví dụ 14 (Mức độ 1).** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(4; 5; 3)$ . Gọi  $A_1, A_2, A_3$  lần lượt là hình chiếu của điểm  $A$  trên các mặt phẳng tọa độ  $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ . Tìm tọa độ các điểm  $A_1, A_2, A_3$ .

**Ví dụ 15 (Mức độ 2).** Cho hình hộp chữ nhật  $OABC.O'A'B'C'$  có cạnh  $OA = 4, OC = 6, OO' = 3$ . Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  có gốc tọa độ  $O$ ; các điểm  $A, C, O'$  lần lượt nằm trên các tia  $Ox, Oy, Oz$ . Xác định tọa độ các điểm  $A, B, B'$ .

**Ví dụ 16 (Mức độ 2).** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; 4; 5)$ . Tìm tọa độ điểm  $A'$  đối xứng với  $A$  qua mặt phẳng  $(Oxz)$ .

**Ví dụ 17 (Mức độ 2).** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(2; 4; 3)$ . Tính khoảng cách từ điểm  $A$  đến trục  $Ox$ .

**Ví dụ 18.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(3; -4; -5)$ . Khi đó

| Phát biểu                                                            | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hình chiếu của $A$ trên mặt phẳng $(Oyz)$ là $A_3(0; -4; -5)$ .   |   |   |
| b) Khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(Oyz)$ bằng 5.                  |   |   |
| c) Khoảng cách từ $A$ đến trục $Ox$ bằng 3.                          |   |   |
| d) Tọa độ điểm $A'$ đối xứng với $A$ qua trục $Ox$ là $(-3; 0; 0)$ . |   |   |

**Ví dụ 19.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(3; 4; 2)$ . Tìm khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(Oxy)$ .

KQ:

## 2 Bài tập tự luận

**Bài 6 (Mức độ 1).** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(3; -2; -1)$ .

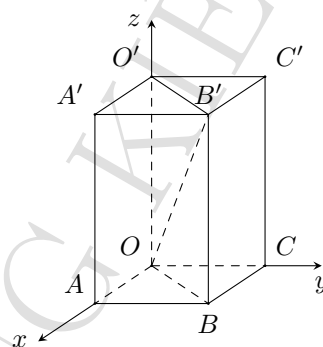
- a) Tìm tọa độ hình chiếu của điểm  $A$  trên các mặt phẳng  $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$ .

b) Tìm tọa độ hình chiếu của điểm  $A$  trên các trục  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

### Bài 7 (Mức độ 2).

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hình hộp chữ nhật  $OABC.O'A'B'C'$  như hình vẽ bên, biết  $B'(2; 3; 5)$ .

- a) Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.  
b) Tính độ dài đường chéo  $OB'$  của hình hộp chữ nhật đó.



## 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 21 (Mức độ 1).** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $M(2; 1; 5)$ . Hình chiếu của điểm  $M$  lên trục  $Ox$  có tọa độ là

- A.  $(0; 1; 5)$ . B.  $(2; 0; 0)$ . C.  $(0; 1; 0)$ . D.  $(0; 0; 5)$ .

**Câu 22 (Mức độ 1).** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $M(2; -1; 4)$ . Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  lên mặt phẳng  $(Oxy)$ . Tọa độ điểm  $H$  là

- A.  $H(0; -1; 0)$ . B.  $H(0; -1; 4)$ . C.  $H(2; -1; 0)$ . D.  $H(2; 0; 4)$ .

**Câu 23 (Mức độ 1).** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(-2; 1; 3)$ . Hình chiếu vuông góc của  $A$  trên trục  $Oy$  có tọa độ là

- A.  $(-2; 1; 0)$ . B.  $(0; 1; 0)$ . C.  $(0; 0; 3)$ . D.  $(0; 1; 3)$ .

**Câu 24 (Mức độ 1).** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , điểm nào sau đây có hình chiếu trên mặt phẳng tọa độ  $(Oyz)$  là điểm  $A(0; 4; -1)$ ?

- A.  $M(3; -4; -1)$ . B.  $P(-2; 4; 1)$ . C.  $Q(2; -4; 1)$ . D.  $N(3; 4; -1)$ .

**Câu 25 (Mức độ 1).** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(2; 4; 3)$ . Khoảng cách từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(Oyz)$  là

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.

**Câu 26 (Mức độ 2).** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(3; -1; 1)$ . Điểm đối xứng của  $A$  qua mặt phẳng  $(Oyz)$  là điểm

- A.  $M(-3; -1; 1)$ . B.  $N(0; -1; 1)$ . C.  $P(0; -1; 0)$ . D.  $Q(0; 0; 1)$ .

**Câu 27 (Mức độ 2).** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho điểm  $A(-3; 1; 2)$ . Tọa độ điểm  $A'$  đối xứng với điểm  $A$  qua trục  $Oy$  là

- A.  $(-3; -1; 2)$ . B.  $(3; 1; -2)$ . C.  $(3; -1; -2)$ . D.  $(3; -1; 2)$ .

**Câu 28 (Mức độ 2).** Cho ba điểm  $M(2; 0; 0)$ ,  $N(0; -3; 0)$ ,  $P(0; 0; 4)$ . Điểm nào sau đây có hình chiếu trên các trục  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  lần lượt là  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ?

- A.  $Q(3; 4; 2)$ . B.  $Q(2; -3; 4)$ . C.  $Q(-2; 3; -4)$ . D.  $Q(2; 3; 4)$ .

**Câu 29 (Mức độ 2).** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Tìm tọa độ đỉnh  $A'$  biết tọa độ các điểm  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(1; 0; 0)$ ,  $C(1; 2; 0)$ ,  $D'(0; 2; 5)$ .

- A.  $A'(0; 0; 3)$ . B.  $A'(0; 5; 1)$ . C.  $A'(-2; 2; 5)$ . D.  $A'(0; 0; 5)$ .

**Câu 30 (Mức độ 2).** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(3; 0; 0)$ ,  $D(0; 3; 0)$ ,  $D'(0; 3; 3)$ . Tọa độ điểm  $B'$  là

- A.**  $(3; 0; -3)$ . **B.**  $(3; 2; 3)$ . **C.**  $(3; 3; 0)$ . **D.**  $(3; 0; 3)$ .

**Câu 31.** Trong không gian  $Oxyz$ , hình chiếu vuông góc của điểm  $A(3; 5; 2)$  trên trục  $Ox$  có tọa độ là

- A.**  $(0; 5; 2)$ . **B.**  $(0; 5; 0)$ . **C.**  $(3; 0; 0)$ . **D.**  $(0; 0; 2)$ .

**Câu 32.** Trong không gian  $Oxyz$ , hình chiếu vuông góc của điểm  $M(3; 1; -1)$  trên trục  $Oy$  có tọa độ là

- A.**  $(3; 0; -1)$ . **B.**  $(0; 1; 0)$ . **C.**  $(3; 0; 0)$ . **D.**  $(0; 0; -1)$ .

**Câu 33.** Trong không gian  $Oxyz$ , hình chiếu vuông góc của điểm  $M(3; -1; 1)$  trên trục  $Oz$  có tọa độ là

- A.**  $(3; -1; 0)$ . **B.**  $(0; 0; 1)$ . **C.**  $(0; -1; 0)$ . **D.**  $(3; 0; 0)$ .

**Câu 34.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; 2; -3)$ . Hình chiếu vuông góc của  $A$  lên mặt phẳng  $(Oxy)$  có tọa độ là

- A.**  $(0; 2; -3)$ . **B.**  $(1; 0; -3)$ . **C.**  $(1; 2; 0)$ . **D.**  $(1; 0; 0)$ .

**Câu 35.** Trong không gian  $Oxyz$ , hình chiếu vuông góc của điểm  $M(2; 1; -1)$  trên mặt phẳng  $(Oxz)$  có tọa độ là

- A.**  $(0; 1; 0)$ . **B.**  $(2; 1; 0)$ . **C.**  $(0; 1; -1)$ . **D.**  $(2; 0; -1)$ .

**Câu 36.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(3; -1; 1)$ . Hình chiếu vuông góc của điểm  $A$  trên mặt phẳng  $(Oyz)$  là điểm

- A.**  $M(3; 0; 0)$ . **B.**  $N(0; -1; 1)$ . **C.**  $P(0; -1; 0)$ . **D.**  $Q(0; 0; 1)$ .

**Câu 37.** Trong không gian  $Oxyz$ , điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng tọa độ  $(Oyz)$ ?

- A.**  $M(3; 4; 0)$ . **B.**  $P(-2; 0; 3)$ . **C.**  $Q(2; 0; 0)$ . **D.**  $N(0; 4; -1)$ .

**Câu 38.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  cho  $M(4; 5; 6)$ . Hình chiếu của  $M$  xuống mặt phẳng  $(Oyz)$  là  $M'$ . Xác định tọa độ  $M'$ .

- A.**  $M'(4; 5; 0)$ . **B.**  $M'(4; 0; 6)$ . **C.**  $M'(4; 0; 0)$ . **D.**  $M'(0; 5; 6)$ .

**Câu 39.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  cho điểm  $M(x; y; z)$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A.** Nếu  $M'$  đối xứng với  $M$  qua mặt phẳng  $(Oxz)$  thì  $M'(x; y; -z)$ .  
**B.** Nếu  $M'$  đối xứng với  $M$  qua  $Oy$  thì  $M'(x; y; -z)$ .  
**C.** Nếu  $M'$  đối xứng với  $M$  qua mặt phẳng  $(Oxy)$  thì  $M'(x; y; -z)$ .  
**D.** Nếu  $M'$  đối xứng với  $M$  qua gốc tọa độ  $O$  thì  $M'(2x; 2y; 0)$ .

**Câu 40.** Trong không gian  $Oxyz$ , tọa độ điểm đối xứng của  $M(1; 2; 3)$  qua mặt phẳng  $(Oyz)$  là

- A.**  $(0; 2; 3)$ . **B.**  $(-1; -2; -3)$ . **C.**  $(-1; 2; 3)$ . **D.**  $(1; 2; -3)$ .

**Câu 41.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(2; -3; 5)$ . Tìm tọa độ  $A'$  là điểm đối xứng với  $A$  qua trục  $Oy$ .

- A.**  $A'(2; 3; 5)$ . **B.**  $A'(2; -3; -5)$ . **C.**  $A'(-2; -3; 5)$ . **D.**  $A'(-2; -3; -5)$ .

**Câu 42.** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$  cho điểm  $M(1; -\sqrt{2}; \sqrt{3})$ . Tìm điểm  $M' \in Ox$  sao cho độ dài đoạn thẳng  $MM'$  ngắn nhất.

- A.**  $M'(-1; 0; 0)$ . **B.**  $M'(1; 0; 0)$ . **C.**  $M'(1; 0; \sqrt{3})$ . **D.**  $M'(1; -\sqrt{2}; 0)$ .

**Câu 43.** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$  cho điểm  $M(\sqrt{2}; 0; \sqrt{3})$ . Tìm điểm  $M' \in Oy$  sao cho độ dài đoạn thẳng  $MM'$  ngắn nhất.

- A.**  $M'(0; -\sqrt{2}; 0)$ . **B.**  $M'(\sqrt{2}; 0; 0)$ . **C.**  $M'(0; 0; \sqrt{3})$ . **D.**  $M'(0; 0; 0)$ .

**Câu 44.** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$  cho điểm  $M(1; 2; -\sqrt{3})$ . Tìm điểm  $M' \in Oz$  sao cho độ dài đoạn thẳng  $MM'$  ngắn nhất.

- A.  $M'(1; 0; -\sqrt{3})$ . B.  $M'(0; 2; -\sqrt{3})$ . C.  $M'(0; 0; -\sqrt{3})$ . D.  $M'(0; 0; \sqrt{3})$ .

**Câu 45.** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$  cho điểm  $A(1; 1; 2)$ . Tìm điểm  $A' \in (Oxy)$  sao cho độ dài đoạn thẳng  $AA'$  ngắn nhất.

- A.  $A'(-1; 1; 0)$ . B.  $A'(1; 1; 0)$ . C.  $A'(2; 2; 0)$ . D.  $A'(2; -1; 2)$ .

**Câu 46.** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$  cho điểm  $M(1; 1 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{5})$ . Tìm điểm  $M' \in (Oxz)$  sao cho độ dài đoạn thẳng  $MM'$  ngắn nhất.

- A.  $M'(1; 1 + \sqrt{2}; 2 - \sqrt{5})$ . B.  $M'(1; 1 - \sqrt{2}; 0)$ .  
C.  $M'(1; 0; 2 + \sqrt{5})$ . D.  $M'(0; 1 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{5})$ .

**Câu 47.** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$  cho điểm  $M(1 + \sqrt{2}; 2; 1 - \sqrt{2})$ . Tìm điểm  $M' \in (Oyz)$  sao cho độ dài đoạn thẳng  $MM'$  ngắn nhất.

- A.  $M'(1 + \sqrt{2}; 0; 1 - \sqrt{2})$ . B.  $M'(0; 2; 1 - \sqrt{2})$ .  
C.  $M'(0; -2; 1 - \sqrt{2})$ . D.  $M'(0; -2; 1 + \sqrt{2})$ .

**Câu 48.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(1; 0; 3)$ ,  $B(2; 3; -4)$ ,  $C(-3; 1; 2)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho  $ABCD$  là hình bình hành.

- A.  $D(-4; -2; 9)$ . B.  $D(-4; 2; 9)$ . C.  $D(4; -2; 9)$ . D.  $D(4; 2; -9)$ .

**Câu 49.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình bình hành  $ABCD$ .  $A = (1; 0; 1)$ ,  $B = (2; 1; 2)$  và  $D = (1; -1; 1)$ . Tọa độ điểm  $C$  là

- A.  $(2; 0; 2)$ . B.  $(2; 2; 2)$ . C.  $(2; -2; 2)$ . D.  $(0; -2; 0)$ .

**Câu 50.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có  $A(1; 0; 1)$ ,  $B(2; 1; 2)$ ,  $D(1; -1; 1)$ ,  $C'(4; 5; -5)$ . Tính tọa độ đỉnh  $A'$  của hình hộp.

- A.  $A'(4; 6; -5)$ . B.  $A'(2; 0; 2)$ . C.  $A'(3; 5; -6)$ . D.  $A'(3; 4; -6)$ .

**Câu 51.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$ , biết rằng  $A(-3; 0; 0)$ ,  $B(0; 2; 0)$ ,  $D(0; 0; 1)$ ,  $A'(1; 2; 3)$ . Tìm tọa độ điểm  $C'$

- A.  $C'(10; 4; 4)$ . B.  $C'(-13; 4; 4)$ . C.  $C'(13; 4; 4)$ . D.  $C'(7; 4; 4)$ .

**Câu 52.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$ . Biết  $A(2; 4; 0)$ ,  $B(4; 0; 0)$ ,  $C(-1; 4; -7)$  và  $D'(6; 8; 10)$ . Tọa độ điểm  $B'$  là

- A.  $B'(8; 4; 10)$ . B.  $B'(6; 12; 0)$ . C.  $B'(10; 8; 6)$ . D.  $B'(13; 0; 17)$ .

## 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 53.** Trong không gian với hệ trục  $Oxyz$ , cho điểm  $A(3; 5; -7)$ . Khi đó

| Phát biểu                                                          | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\vec{OA} = (-3; -5; 7)$ .                                      |   |   |
| b) Tọa độ hình chiếu của điểm $A$ trên trục $Oz$ là $(0; 0; -7)$ . |   |   |
| c) Tọa độ trung điểm của $OA$ là $(6; 10; -14)$ .                  |   |   |
| d) $OA = \sqrt{83}$ .                                              |   |   |



**Câu 54.** Trong không gian với hệ trục  $Oxyz$ , cho điểm  $A(2; 3; -4)$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                         | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $d(A; (Oxy)) = 4$ .                                                                            |   |   |
| b) $d(A; Ox) = 5$ .                                                                               |   |   |
| c) Tọa độ hình chiếu của điểm $A$ trên mặt phẳng $(Oxy)$ có tọa độ là $(0; 0; -4)$ .              |   |   |
| d) Tọa độ hình chiếu của điểm $A$ trên các trục $Ox, Oy, Oz$ là $B, C, D$ khi đó $V_{OBCD} = 4$ . |   |   |

**Câu 55.** Trong không gian với hệ trục  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(0; 1; 0)$ ,  $C(0; 0; 2)$ . Khi đó

| Phát biểu                                                        | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\overrightarrow{OA} = (1; 0; 0)$ .                           |   |   |
| b) $\overrightarrow{BA} = (-1; 1; 0)$ .                          |   |   |
| c) $V_{OABC} = 2$ .                                              |   |   |
| d) Dựng lăng trụ đứng $AB'C'.OBC$ , tọa độ $B'$ là $(1; 1; 0)$ . |   |   |

**Câu 56.** Trong không gian với hệ trục  $Oxyz$ , cho điểm  $A(2; 5; -2)$ . Khi đó

| Phát biểu                                                           | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k}$ .         |   |   |
| b) $d(A, Oz) = 2$ .                                                 |   |   |
| c) Tọa độ hình chiếu của điểm $A$ trên trục $Oz$ là $(0; 0; -2)$ .  |   |   |
| d) Tọa độ điểm của $A'$ đối xứng với $A$ qua $Oz$ là $(2; 5; -2)$ . |   |   |

**Câu 57.** Trong không gian với hệ trục  $Oxyz$ , cho điểm  $A(-3; 3; -4)$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                        | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tọa độ hình chiếu của điểm $A$ trên trục $Ox$ là $(3; 0; 0)$ .                |   |   |
| b) $d(A, Ox) = 5$ .                                                              |   |   |
| c) $d(A, (Oxy)) = 4$ .                                                           |   |   |
| d) Tọa độ điểm của $A'$ đối xứng với $A$ qua mặt phẳng $(Oxy)$ là $(3; -3; 4)$ . |   |   |

**Câu 58.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình bình hành  $ABCD$ . Biết  $A(-1; 1; 2)$ ,  $B(1; 0; 3)$ ,  $C(0; 2; -2)$ . Khi đó

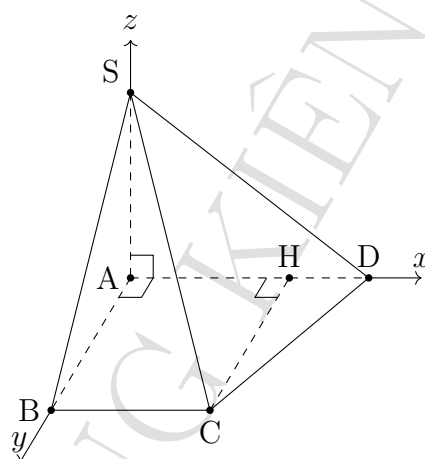
| Phát biểu                                                                | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tọa độ vectơ $\overrightarrow{BC} = (-1; 2; -5)$ .                    |   |   |
| b) Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ .   |   |   |
| c) Tọa độ điểm $D$ là $D(-2; 3; -3)$ .                                   |   |   |
| d) Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AD} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$ . |   |   |

**Câu 59.**



Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$ ,  $AD = 2AB = 2BC = 2a$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy  $(ABCD)$ ,  $SA = 2a$ . Gọi  $H$  là hình chiếu điểm  $C$  trên cạnh  $AD$ . Khi đó

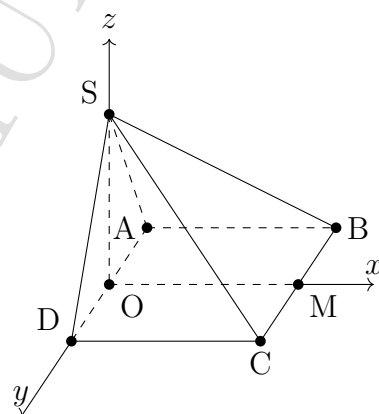
| Phát biểu                                                   | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tọa độ các điểm $A, B$ là $A(0; 0; 0)$ , $B(a; a; 0)$ .  |   |   |
| b) Tọa độ các điểm $C, D$ là $C(a; a; 0)$ , $D(2a; 0; 0)$ . |   |   |
| c) Tọa độ điểm $S$ là $S(0; 0; 2a)$ .                       |   |   |
| d) Tọa độ điểm $H$ là $H(a; 0; 0)$ .                        |   |   |



**Câu 60.**

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông có các cạnh bằng 1,  $SAD$  là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi  $O, M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AD, BC$  và  $CD$ . Thiết lập hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ. Khi đó

| Phát biểu                                                                           | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tọa độ $A\left(0; -\frac{1}{2}; 0\right)$ , $B\left(1; -\frac{1}{2}; 0\right)$ . |   |   |
| b) Tọa độ $C\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$ , $D\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$ .   |   |   |
| c) Tọa độ $S\left(0; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .                                |   |   |
| d) Tọa độ $M(1; 0; 0)$ , $N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ .              |   |   |



**Câu 61.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình bình hành  $ABCD$ . Biết  $A(0; 1; -2)$ ,  $C(0; -2; 1)$ ,  $D(1; 0; -1)$ . Khi đó

| Phát biểu                                                     | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tọa độ vectơ $\vec{OC} = (0; -2; 1)$ .                     |   |   |
| b) Tọa độ vectơ $\vec{DA} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ .   |   |   |
| c) Tọa độ điểm $B$ là $B(-1; -1; 0)$ .                        |   |   |
| d) Tọa độ vectơ $\vec{AB} = -\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$ . |   |   |

**Câu 62.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ , biết rằng  $A(2; 1; 0)$ ,  $C(0; 3; 0)$ ,  $C'(-1; 2; 1)$ ,  $D'(0; -2; 0)$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                   | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tọa độ các điểm $A', B'$ là $A'(1; 0; -1)$ , $B'(0; 4; 2)$ .             |   |   |
| b) Tọa độ các điểm $B, D$ là $B(1; 5; 1)$ , $D(1; -1; -1)$ .                |   |   |
| c) Tọa độ vectơ $\vec{AB}$ là $\vec{AB} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ .   |   |   |
| d) Tọa độ vectơ $\vec{AB}$ là $\vec{B'D} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$ . |   |   |

## 5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 63 (Mức độ 1).** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M(2; 5; 4)$ . Điểm  $M'(a; b; c)$  đối xứng với  $M$  qua mặt phẳng  $(Oyz)$ . Tính giá trị  $a + b + c$ ? KQ:

**Câu 64 (Mức độ 1).** Trong không gian với hệ trục  $Oxyz$ , gọi  $A'(a; b; c)$  là điểm đối xứng với  $A(3; 5; 2)$  qua trục  $Oz$ . Tính giá trị  $a + b + c$ ? KQ:

**Câu 65 (Mức độ 3).** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(2; 1; -1)$ ,  $C(0; 4; 6)$ . Điểm  $M(m; 0; 0)$  sao cho  $P = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$  có giá trị nhỏ nhất. Khi giá trị của  $m$  bằng bao nhiêu? KQ:

**Câu 66 (Mức độ 3).** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 2; 1)$ ,  $B(2; -1; 3)$ . Điểm  $M(a; b; 0)$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho  $MA^2 - 2MB^2$  lớn nhất. Tính  $a + b$ ? KQ:

**Câu 67 (Mức độ 4).** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(5; 0; 0)$  và  $B(3; 4; 0)$ . Với  $C$  là một điểm trên trục  $Oz$ , gọi  $H$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Khi  $C$  di động trên trục  $Oz$  thì  $H$  luôn thuộc một đường tròn cố định có bán kính  $R = \sqrt{\frac{a}{b}}$  với  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản và  $a, b \in \mathbb{N}$ . Tính giá trị  $a^2 + b^2$ ? KQ:

### DẠNG 3

#### Tọa độ các điểm, đỉnh đặc biệt của tam giác, tứ giác, lăng trụ ...

☑ Tọa độ điểm  $M(x; y; z)$  được xác định thông qua  $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$

☑ Các biểu thức vectơ đặc biệt của điểm đặc biệt.

— Tọa độ trung điểm  $M$  của  $AB$  thỏa

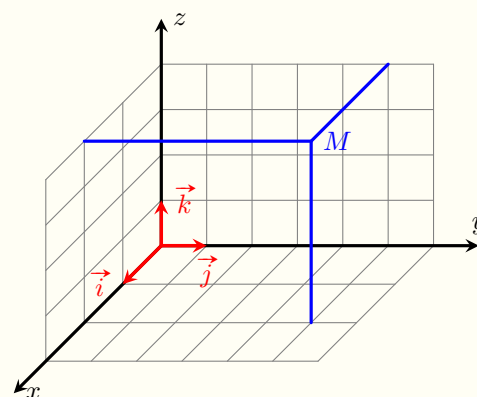
$$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

— Tọa độ  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  thỏa

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

— Tọa độ các đỉnh hình bình hành  $ABCD$  thỏa

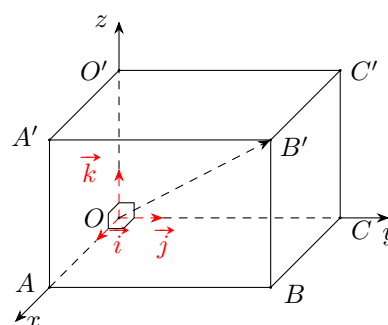
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}.$$



## 1 Ví dụ mẫu

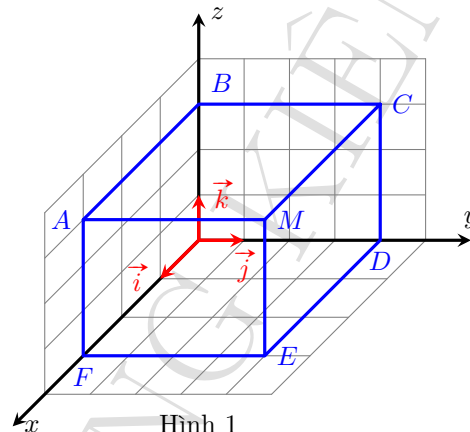
### Ví dụ 20 (Mức độ 1).

Cho hình hộp chữ nhật  $OABC.O'B'C'$  có cạnh  $OA = 4$ ,  $OC = 6$ ,  $OO' = 3$ . Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  có gốc tọa độ  $O$ ; các điểm  $A, C, O'$  lần lượt nằm trên các tia  $Ox, Oy, Oz$ . Xác định tọa độ các điểm  $A, B, B'$ .



**Ví dụ 21 (Mức độ 1).**

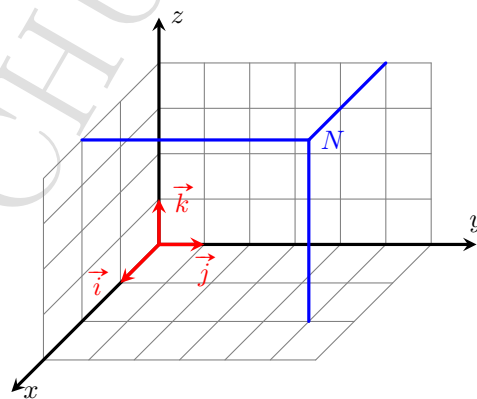
Hình 1 minh họa một hệ tọa độ  $Oxyz$  trong không gian cùng với các hình vuông có cạnh bằng 1 đơn vị. Tìm tọa độ của điểm  $M$ .



Hình 1

**Ví dụ 22 (Mức độ 1).**

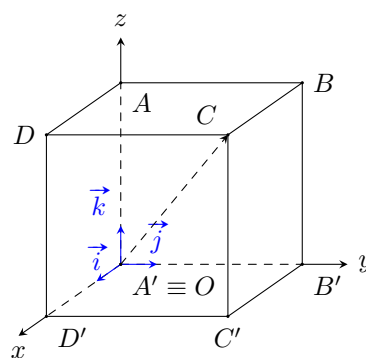
Tìm tọa độ của điểm  $N$  trong Hình 2.



Hình 2

**Ví dụ 23 (Mức độ 1).**

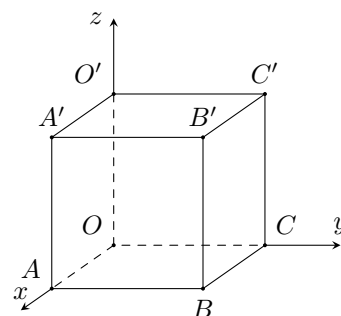
Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có đỉnh  $A'$  trùng với gốc  $O$  và các đỉnh  $D', B', A$  lần lượt thuộc các tia  $Ox, Oy, Oz$  (Hình vẽ). Giả sử đỉnh  $C$  có tọa độ là  $(2; 3; 5)$  đối với hệ tọa độ  $Oxyz$ , hãy tìm tọa độ của các đỉnh  $D', B', A$  đối với hệ tọa độ đó.



**Ví dụ 24 (Mức độ 1).**

Cho hình hộp chữ nhật  $OABC.O'A'B'C'$  có cạnh  $OA = a, OC = b, OO' = c$ . Hệ tọa độ  $Oxyz$  được chọn sao cho các tia  $Ox, Oy, Oz$  lần lượt chứa các điểm  $A, C, O'$ . Phát biểu nào dưới đây **sai**?

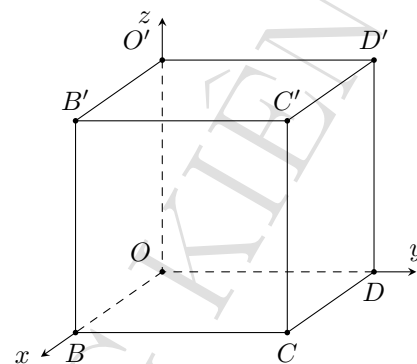
- A. Mặt bên  $OCC'O'$  nằm trong mặt phẳng tọa độ  $(Oyz)$ .
- B.  $Ox \perp (OCC'O')$ .
- C.  $(OAA'O') \perp (Oxy)$ .
- D.  $B'(a; b; 0)$ .



**Ví dụ 25 (Mức độ 1).**

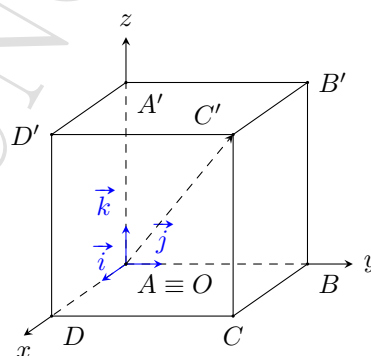
Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp chữ nhật  $OB CD.O'B'C'D'$  có  $B(2; 0; 0)$ ,  $D(0; 1; 0)$ ,  $O'(0; 0; 1)$ . Tọa độ các đỉnh còn lại nào dưới đây là **sai**?

- A.**  $C(2; 1; 0)$ . **B.**  $B'(2; 0; 1)$ . **C.**  $C'(1; 1; 1)$ . **D.**  $D'(0; 1; 1)$ .



### Ví dụ 26 (Mức độ 1).

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có đỉnh  $A$  trùng với gốc  $O$  và các đỉnh  $D$ ,  $B$ ,  $A'$  có tọa độ lần lượt là  $(2; 0; 0)$ ,  $(0; 4; 0)$ ,  $(0; 0; 3)$  (Hình vẽ). Khi đó

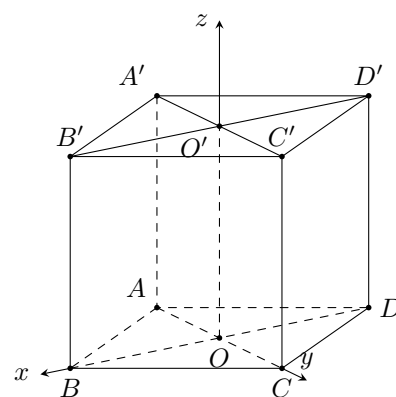


| Phát biểu          | Đ | S |
|--------------------|---|---|
| a) $C(2; 4; 0)$ .  |   |   |
| b) $D'(3; 0; 2)$ . |   |   |

| Phát biểu          | Đ | S |
|--------------------|---|---|
| c) $C'(0; 4; 3)$ . |   |   |
| d) $B'(0; 4; 3)$ . |   |   |

### Ví dụ 27 (Mức độ 3).

Cho hình hộp đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình thoi. Hai đường chéo  $AC$ ,  $BD$  của đáy có chiều dài lần lượt là  $a$ ,  $b$ . Cạnh bên  $AA' = c$ . Hệ tọa độ  $Oxyz$  có gốc trùng với giao điểm  $O$  của hai đường chéo hình thoi  $ABCD$ , có tia  $Ox$  trùng với tia  $OB$  và tia  $Oy$  trùng với tia  $OC$  (Hình vẽ). Khi đó

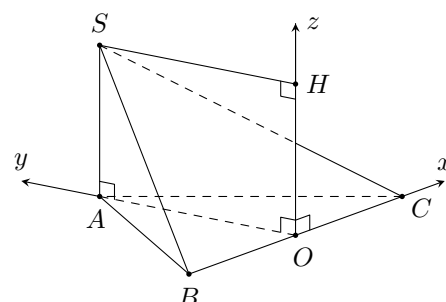


| Phát biểu                                                                   | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Mặt phẳng $(ABCD)$ vuông góc trục $Oz$ .                                 |   |   |
| b) Trục $Oy \perp B'D'$ .                                                   |   |   |
| c) $B\left(-\frac{b}{2}; 0; 0\right)$ , $D\left(\frac{b}{2}; 0; 0\right)$ . |   |   |
| d) $C'\left(0; \frac{a}{2}; c\right)$ , $\left(-\frac{b}{2}; 0; c\right)$ . |   |   |

### Ví dụ 28 (Mức độ 3).

Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh bằng 2,  $SA$  vuông góc với đáy và  $SA = 1$ . Cho thiết lập hệ tọa độ như hình vẽ bên, hãy vẽ các vectơ đơn vị trên các trục  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  và tọa độ  $I(a, b, c)$  tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle SAC$ . Tích  $ab^2c$  có giá trị bằng bao nhiêu? (kết quả viết dưới dạng số thập phân)

KQ:

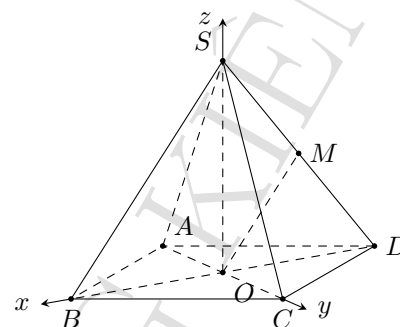


**Ví dụ 29 (Mức độ 3).**

Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Biết  $SA = 5, SO = 4$ . Xét hệ tọa độ  $Oxyz$  với các tia  $Ox, Oy, Oz$  tương ứng trùng với các tia  $OB, OC, OS$  như ở hình vẽ. Tọa độ đỉnh  $M(a, b, c)$  là trung điểm  $SD$ . Tính giá trị biểu thức  $2a + 3b - c$ .

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

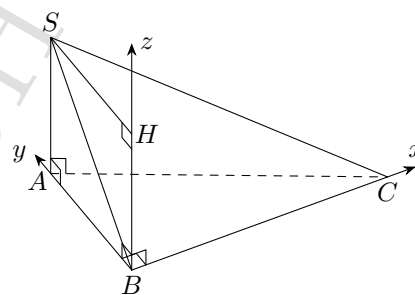


**2 Bài tập tự luận**

**Bài 1 (Mức độ V).**

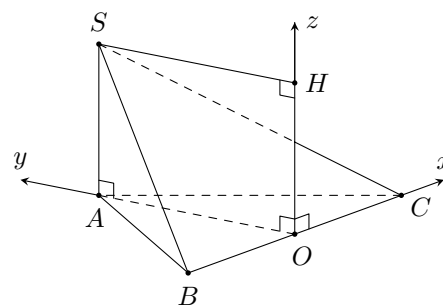
Cho tứ diện  $SABC$  có  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ ,  $BC = 3$ ,  $BA = 2$ ,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  và có độ dài bằng 2.

- Xác định một hệ tọa độ dựa trên gợi ý của hình vẽ và chỉ ra các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ.
- Tìm tọa độ các điểm  $A, B, C, S$ .



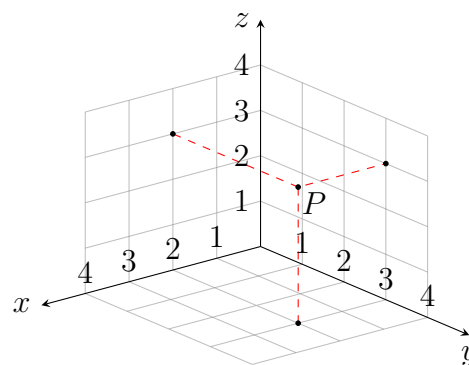
**Bài 2 (Mức độ V).**

Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh bằng 2,  $SA$  vuông góc với đáy và  $SA = 1$ . Thiết lập hệ tọa độ như hình vẽ bên, hãy vẽ các vectơ đơn vị trên các trục  $Ox, Oy, Oz$  và tìm tọa độ các điểm  $A, B, C, S$ .



**Bài 3 (Mức độ H).**

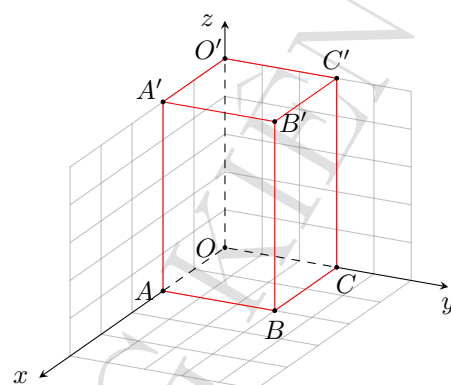
Tìm tọa độ của điểm  $P$  được biểu diễn trong hình bên và tính khoảng cách  $OP$ .



**Bài 4 (Mức độ H).**

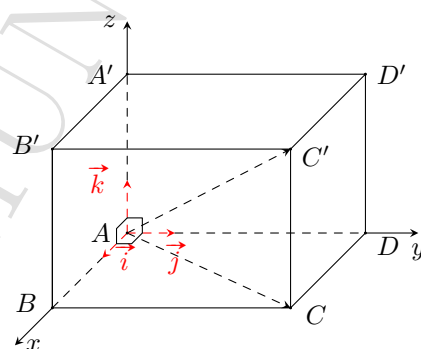
Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp chữ nhật  $OABC.O'A'B'C'$  như hình bên, biết  $B'(2; 3; 5)$ .

- Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.
- Tính độ dài đường chéo  $OB'$  của hình hộp chữ nhật đó.



### Bài 5 (Mức độ H).

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng 5. Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  có gốc tọa độ  $O$  trùng với  $A$ ; các điểm  $B, D, A'$  lần lượt nằm trên các tia  $Ox, Oy, Oz$ . Xác định tọa độ các điểm  $B, C, C'$ .



## 3

### Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 68 (Mức độ N).** Trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , tọa độ trung điểm  $M$  của  $AB$  thỏa hệ thức vectơ nào sau đây?

- $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB}$ .
- $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{OM}$ .
- $\vec{OM} = 2\vec{OA} + 2\vec{OB}$ .
- $2\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB}$ .

**Câu 69 (Mức độ N).** Trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , tọa độ  $I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  thỏa hệ thức vectơ nào sau đây?

- $\vec{OI} = 2\vec{OB} + 2\vec{OC}$ .
- $2\vec{OI} = \vec{OA} + \vec{OB}$ .
- $2\vec{OI} = \vec{OB} + \vec{OC}$ .
- $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{OI}$ .

**Câu 70 (Mức độ N).** Trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$ , tọa độ  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  thỏa mãn hệ thức nào sau đây?

- $3\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ .
- $\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ .
- $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 3\vec{OG}$ .
- $\vec{OG} - \vec{OA} = \vec{OB} + \vec{OC}$ .

**Câu 71 (Mức độ H).** Trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hình bình hành  $ABCD$ , tọa độ các đỉnh hình bình hành  $ABCD$  thỏa mãn hệ thức nào sau đây?

- $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}$ .
- $\vec{OA} - \vec{OC} = \vec{OB} - \vec{OD}$ .
- $\vec{OB} + \vec{OA} = \vec{OC} + \vec{OD}$ .
- $\vec{AB} = \vec{CD}$ .

**Câu 72 (Mức độ H).** Trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 0; 2)$  và  $B(3; -2; 4)$ , tọa độ trung điểm  $M$  của  $AB$  là

- $M(2; -1; 3)$ .
- $M(2; 1; 3)$ .
- $M(4; -2; 6)$ .
- $M(2; -2; 2)$ .

**Câu 73 (Mức độ H).** Trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 0; 2)$ ,  $B(3; -2; 4)$  và  $C(2; -1; 3)$ , tọa độ trọng tâm  $G$  của  $\triangle ABC$  là

- $G(6; -3; 9)$ .
- $G(2; 1; 3)$ .
- $G(4; -2; 6)$ .
- $G(2; -1; 3)$ .

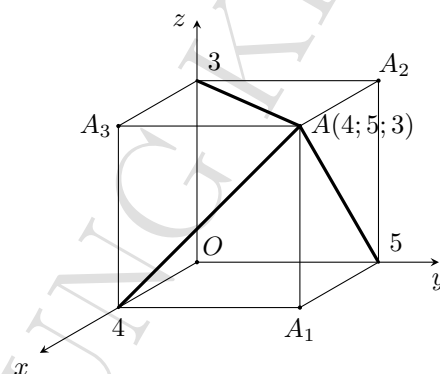
**Câu 74 (Mức độ H).** Trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hình bình hành  $ABCD$ , tọa độ các đỉnh  $A(1; 0; 2)$ ,  $B(3; -2; 4)$  và  $C(2; -1; 3)$ . Tìm tọa độ đỉnh  $D$ ?

- A.**  $D(2; -1; 3)$ . **B.**  $D(1; -3; 5)$ . **C.**  $D(0; 1; 1)$ . **D.**  $D(0; -1; 1)$ .

**Câu 75 (Mức độ H).**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(4; 5; 3)$ . Gọi  $A_1, A_2, A_3$  lần lượt là hình chiếu của điểm  $A$  trên các mặt phẳng tọa độ  $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$  (tham khảo hình vẽ). Phát biểu nào sau đây **sai**?

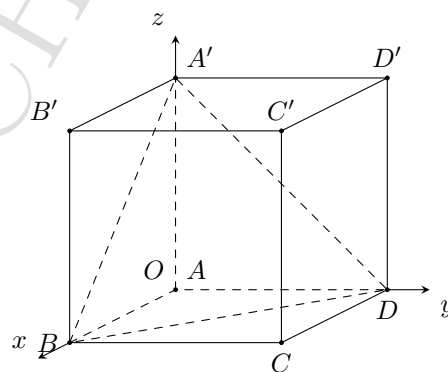
- A.**  $A_1(4; 0; 5)$ . **B.**  $A_2(0; 5; 3)$ .  
**C.**  $A_3(4; 0; 3)$ . **D.**  $AA_1 \perp (Oxy)$ .



**Câu 76 (Mức độ V).**

Xét hệ tọa độ  $Oxyz$  gắn với hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  như hình vẽ, đơn vị của mỗi trục bằng độ dài cạnh của hình lập phương. Biết  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(1; 0; 0)$ ,  $D(0; 1; 0)$ ,  $A'(0; 0; 1)$ . Xác định tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $A'BD$ .

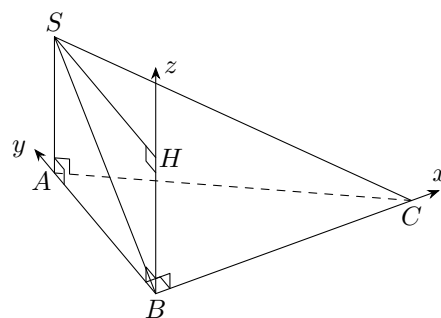
- A.**  $G(1; 1; 1)$ . **B.**  $G(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ .  
**C.**  $G(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ . **D.**  $G(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3})$ .



**Câu 77 (Mức độ V).**

Cho tứ diện  $SABC$  có  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ ,  $BC = 3$ ,  $BA = 2$ ,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  và có độ dài bằng 2. Tứ diện được đặt vào hệ tọa độ  $Oxyz$  với gốc tọa độ  $O$  trùng  $B$  như hình vẽ. Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $ABHS$ .

- A.**  $I(1; 0; 1)$ . **B.**  $I(0; 1; 1)$ . **C.**  $I(0; -1; 1)$ . **D.**  $I(1; -1; 1)$ .

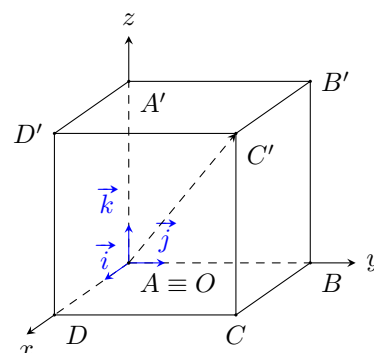


#### 4

#### Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 78.**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có đỉnh  $A$  trùng với gốc  $O$  và các đỉnh  $C, A'$  có tọa độ lần lượt là  $(2; 4; 0)$ ,  $(0; 0; 3)$  (Hình vẽ).



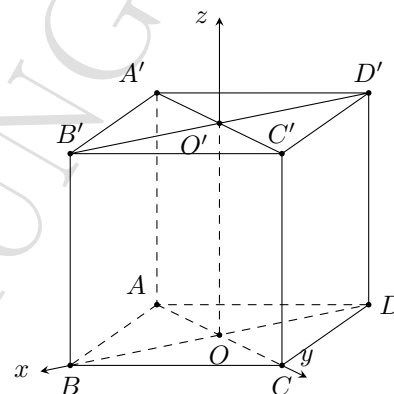


| Phát biểu                                                             | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $D'$ là hình chiếu của $C'$ lên $(Oxz)$ .                          |   |   |
| b) $D'(2; 0; 3)$ .                                                    |   |   |
| c) $AC \perp (Oyz)$ .                                                 |   |   |
| d) Tọa độ trung điểm của $D'B$ là $I\left(1; 2; \frac{3}{2}\right)$ . |   |   |

**Câu 79.**

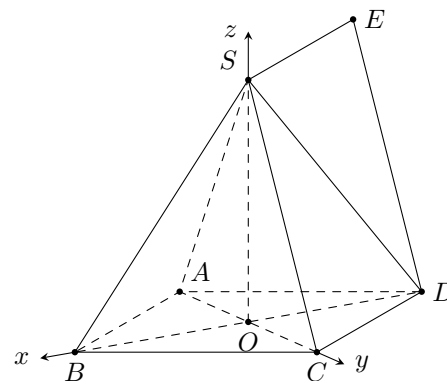
Cho hình hộp đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình thoi cạnh  $a$ ,  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ . Cạnh bên  $AA' = b$ . Hệ tọa độ  $Oxyz$  có gốc trùng với giao điểm  $O$  của hai đường chéo hình thoi  $ABCD$ , có tia  $Ox$  trùng với tia  $OB$  và tia  $Oy$  trùng với tia  $OC$  (Hình vẽ).

| Phát biểu                                                                                          | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $BD$ vuông góc mặt phẳng $Oyz$ .                                                                |   |   |
| b) Tọa độ $B\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right)$ , $D\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right)$ . |   |   |
| c) Tọa độ trọng tâm $G$ của $\triangle A'B'D$ thỏa $\vec{OG} = \vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{OD}$ . |   |   |
| d) Tọa độ trọng tâm $G$ của $\triangle A'B'D$ là $\left(0; -\frac{a}{6}; \frac{2b}{3}\right)$ .    |   |   |

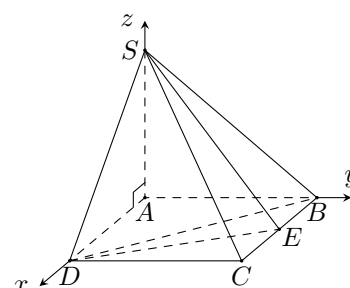
**Câu 80.**

Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Biết đáy hình vuông cạnh  $AB = a$ ,  $SO = b$ . Xét hệ tọa độ  $Oxyz$  với các tia  $Ox, Oy, Oz$  tương ứng trùng với các tia  $OB, OC, OS$  như ở hình vẽ.

| Phát biểu                                                                                          | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $Oy \perp (SBD)$ .                                                                              |   |   |
| b) Trục $Oz \perp AB$ .                                                                            |   |   |
| c) Tọa độ $A\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$ , $C\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$ . |   |   |
| d) $SCDE$ là hình thoi thì $E\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; b\right)$ .         |   |   |

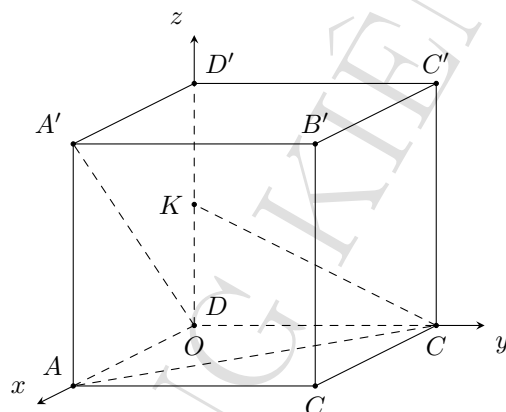
**5****Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn****Câu 81 (Mức độ V).**

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ . Cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy. Góc giữa  $SC$  và mặt đáy bằng  $45^\circ$ . Gọi  $E$  là trung điểm  $BC$ . Đặt hình vào hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ, tọa độ trọng tâm tứ diện  $SCDE$  là  $G(x; y; z)$ . Tính  $16^2 \cdot \frac{xyz^2}{a^4}$  bằng bao nhiêu?

KQ: 

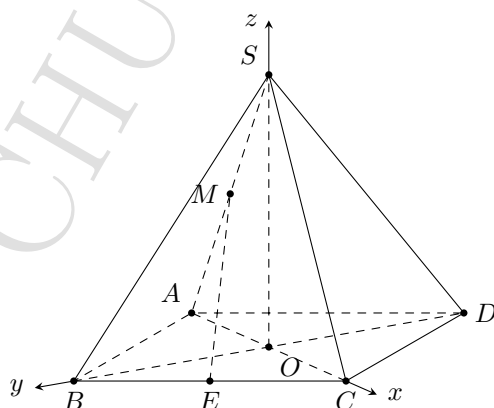
**Câu 82 (Mức độ H).**

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng 1. Gọi  $K$  là trung điểm của  $DD'$ . Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ, khi đó tọa độ  $\overrightarrow{CK}$  và  $\overrightarrow{DA'}$  lần lượt là  $(a; b; c)$ ,  $(d; e; f)$ . Giá trị của tổng  $a + b + c + d + e + f$  bằng bao nhiêu? (kết quả viết dưới dạng số thập phân) KQ:



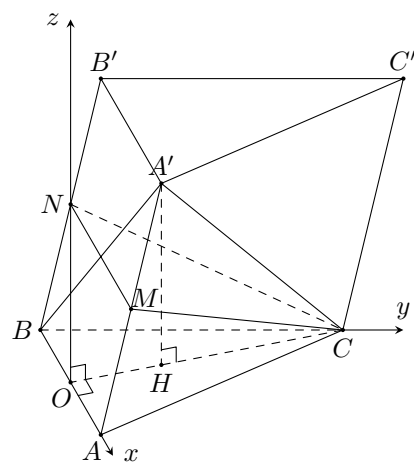
**Câu 83 (Mức độ V).**

Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh bằng  $\sqrt{2}$ . Gọi  $E, M$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $BC, SA$ . Đặt hình vào hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ, ta có độ dài đoạn  $ME = \frac{\sqrt{a}}{b}$  với  $a$  và  $b$  là các số nguyên dương. Tích  $ab$  bằng bao nhiêu? KQ:



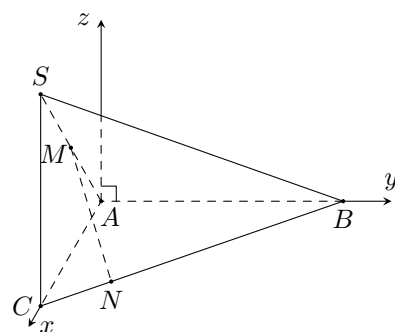
**Câu 84 (Mức độ C).**

Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có  $A'.ABC$  là tứ diện đều cạnh 1. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AA'$  và  $BB'$ . Đặt hình vào hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ, gọi tọa độ điểm  $E(x; y; z)$  để  $CNME$  là hình bình hành. Tính  $x^2 + y^2 + z^2$  bằng bao nhiêu? (kết quả viết dưới dạng số thập phân) KQ:



**Câu 85 (Mức độ C).**

Cho tứ diện  $S.ABC$  trong hệ trục  $Oxyz$  như hình vẽ, có  $SC = CA = AB = a\sqrt{2}$ ,  $SC \perp (ABC)$ , tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Các điểm  $M \in SA$ ,  $N \in BC$  sao cho  $AM = CN = t$  ( $0 < t < 2a$ ). Tìm giá trị  $\frac{t}{a} = \frac{m}{n}$  để  $MN$  ngắn nhất. Khi đó  $m + n$  bằng bao nhiêu? (kết quả viết dưới dạng số thập phân) KQ:



## THẦY KIÊN TOÁN: ————— DẠY THẬT - HỌC THẬT - GIÁ TRỊ THẬT —————

## K12 – CHƯƠNG 2

## §3. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO

## A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

## 1 Biểu thức tọa độ của tổng, hiệu hai vectơ và tích của một số với một vectơ

**Định nghĩa 16** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  và số  $k$ . Khi đó

$$a) \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3);$$

$$b) \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3);$$

$$c) k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3).$$

**Nhận xét 1** Cho hai vectơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$ . Hai vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  cùng phương khi và chỉ khi tồn tại một số thực  $k$  sao cho

$$\begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3. \end{cases}$$

⚠ Từ nay trở đi, các bài tập liên quan đến tọa độ đều được xét trong không gian  $Oxyz$ .

## 2 Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

**Định nghĩa 17** Trong không gian  $Oxyz$ , tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  được xác định bởi công thức

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

**Nhận xét 2**

$$\odot \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0;$$

$$\odot |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2};$$

$$\odot \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \text{ (với } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ và } \vec{b} \neq \vec{0}).$$

## 3 Xác định tọa độ của vectơ khi biết tọa độ điểm đầu và điểm cuối

**Định nghĩa 18** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(x_A; y_A; z_A)$ ,  $B(x_B; y_B; z_B)$ . Ta có

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$$

**Nhận xét 3**

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

## 4 Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác

**Định nghĩa 19** Trong không gian  $Oxyz$

- ☑ Cho hai điểm  $A(x_A; y_A; z_A)$ ,  $B(x_B; y_B; z_B)$ . Tọa độ trung điểm  $M$  của đoạn thẳng  $AB$  là

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

- ☑ Cho tam giác  $ABC$  có  $A(x_A; y_A; z_A)$ ,  $B(x_B; y_B; z_B)$ ,  $C(x_C; y_C; z_C)$ . Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  là

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

## 5 Cách tìm tọa độ của một vectơ vuông góc với hai vectơ cho trước

**Định nghĩa 20** Cho hai vectơ  $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$  và  $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$  không cùng phương.

Khi đó, vectơ  $\vec{w} = (y_1z_2 - y_2z_1; z_1x_2 - z_2x_1; x_1y_2 - x_2y_1)$  vuông góc với cả hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ .

### Nhận xét 4

- ☑ Vectơ  $\vec{w}$  trong định lí trên còn được gọi là *tích có hướng* của hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ , kí hiệu là  $\vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}]$ .

- ☑ Để thuận tiện trong cách viết, ta quy ước  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ , với  $a, b, c, d$  là các số thực.

Khi đó, hai vectơ  $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$  và  $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$ , ta có

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \left( \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) = (y_1z_2 - y_2z_1; z_1x_2 - z_2x_1; x_1y_2 - x_2y_1).$$

- ☑ Hai vectơ  $\vec{u}, \vec{v}$  không cùng phương khi và chỉ khi  $\vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}] \neq \vec{0}$ .

## B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

### DẠNG 1 Tìm vectơ tổng, hiệu, tích với một số

#### 1 Ví dụ mẫu

**Ví dụ 1.** Cho  $\vec{a} = (-2; 3; 2)$ ,  $\vec{b} = (2; 1; -1)$ ,  $\vec{c} = (1; 2; 3)$ . Tính tọa độ của mỗi vectơ sau

- a)  $3\vec{a}$ ;                      b)  $2\vec{a} - \vec{b}$ ;                      c)  $\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c}$ .

**Ví dụ 2.** Cho ba điểm  $A(0; -1; 1)$ ,  $B(1; 0; 5)$ ,  $G(1; 2; 0)$ .

- a) Chứng minh rằng ba điểm  $A, B, G$  không thẳng hàng.  
b) Tìm tọa độ điểm  $C$  sao cho  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ .

**Ví dụ 3.** Cho các điểm  $A(-1; -1; 0)$ ,  $B(0; 3; -1)$ ,  $C(-1; 14; 0)$ ,  $D(-3; 6; 2)$ . Chứng minh rằng  $ABCD$  là hình thang.

**Ví dụ 4.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(5; -3; 0)$ ,  $B(2; 1; -1)$ ,  $C(4; 1; 2)$ .

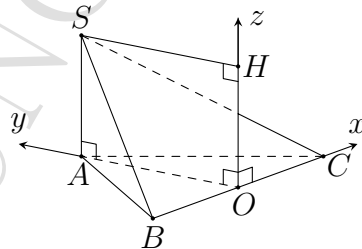
a) Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{u} = 2\vec{AB} + \vec{AC} - 5\vec{BC}$ .

b) Tìm điểm  $N$  sao cho  $2\vec{NA} = -\vec{NB}$ .

**Ví dụ 5.**

Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA \perp (ABC)$ ,  $SA = a$  và đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ ,  $O$  là trung điểm của  $BC$ . Bằng cách thiết lập hệ tọa độ như hình vẽ, hãy tìm tọa độ

- Các điểm  $A, S, B, C$ ;
- Trung điểm  $M$  của  $SB$  và trung điểm  $N$  của  $SC$ ;
- Trọng tâm  $G$  của tam giác  $SBC$ .



## 2 Bài tập tự luận

**Bài 1.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (-1; 2; 3)$ ,  $\vec{b} = (3; 1; -2)$ ,  $\vec{c} = (4; 2; -3)$ .

- Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$ .
- Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{v}$  sao cho  $\vec{v} + 2\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$ .

**Bài 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho bốn điểm  $A(0; 1; -2)$ ,  $B(2; -1; 3)$ ,  $C(1; 3; -2)$ ,  $D(5; -1; 8)$ .

- Ba điểm  $A, B, C$  có thẳng hàng không?
- Chứng minh rằng hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  song song nhau.

**Bài 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 3; -5)$ ,  $M\left(\frac{3}{2}; 2; \frac{1}{2}\right)$ ,  $G\left(2; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ .

- Tìm tọa độ điểm  $B$  sao cho  $M$  là trung điểm  $AB$ .
- Tìm tọa độ điểm  $C$  sao cho  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .

**Bài 4.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $M(-4; 3; 3)$ ,  $N(4; -4; 2)$  và  $P(3; 6; -1)$ .

- Tìm tọa độ của các vectơ  $\vec{MN}$ ,  $\vec{MP}$ , từ đó chứng minh rằng ba điểm  $M, N, P$  không thẳng hàng.
- Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{NM} + \vec{NP}$ , từ đó suy ra tọa độ của điểm  $Q$  sao cho tứ giác  $MNPQ$  là hình bình hành.
- Tính chu vi của hình bình hành  $MNPQ$ .

### 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

- Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , gọi  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  là các vectơ đơn vị, khi đó với  $M(x; y; z)$  thì  $\overrightarrow{OM}$  bằng  
**A.**  $x\vec{i} + y\vec{j} + k\vec{z}$ . **B.**  $x\vec{i} - y\vec{j} - k\vec{z}$ . **C.**  $x\vec{j} + y\vec{i} + k\vec{z}$ . **D.**  $-x\vec{i} - y\vec{j} - k\vec{z}$ .
- Câu 2.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (2; 3; -2)$  và  $\vec{b} = (3; 1; -1)$ . Tọa độ của vectơ  $\vec{a} - \vec{b}$  là  
**A.**  $(1; -2; 1)$ . **B.**  $(5; 4; -3)$ . **C.**  $(-1; 2; -1)$ . **D.**  $(-1; 2; -3)$ .
- Câu 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (2; -1; 1)$  và  $\vec{b} = (-6; 3; x)$ . Tìm  $x$  để hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương.  
**A.**  $x = \frac{1}{3}$ . **B.**  $x = 3$ . **C.**  $x = -\frac{1}{3}$ . **D.**  $x = -3$ .
- Câu 4.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , vectơ đơn vị cùng hướng với vectơ  $\vec{a} = (1; 2; 2)$  có tọa độ là  
**A.**  $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ . **B.**  $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ . **C.**  $\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ . **D.**  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .
- Câu 5.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba vectơ:  $\vec{a} = (2; -5; 3)$ ,  $\vec{b} = (0; 2; -1)$ ,  $\vec{c} = (1; 7; 2)$ . Tọa độ vectơ  $\vec{d} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$  là  
**A.**  $(0; 27; 3)$ . **B.**  $(1; 2; -7)$ . **C.**  $(0; -27; 3)$ . **D.**  $(0; 27; -3)$ .
- Câu 6.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(3; -2; 5)$ ,  $B(-2; 1; -3)$  và  $C(5; 1; 1)$ . Trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  có tọa độ là  
**A.**  $G(2; 0; -1)$ . **B.**  $G(2; 1; -1)$ . **C.**  $G(-2; 0; 1)$ . **D.**  $G(2; 0; 1)$ .
- Câu 7.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hình bình hành  $OABD$  có  $\overrightarrow{OA} = (-1; 1; 0)$ ,  $\overrightarrow{OB} = (1; 10)$  ( $O$  là gốc tọa độ). Tọa độ tâm hình bình hành  $OABD$  là  
**A.**  $(1; 0; 0)$ . **B.**  $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ . **C.**  $(1; 0; 1)$ . **D.**  $(1; 1; 0)$ .
- Câu 8.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $G(-1; 1; 3)$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ ,  $M(2; -5; 1)$  là trung điểm  $AC$ . Nếu  $B(a; b; c)$  thì  $2a + b - 3c$  bằng  
**A.** 24. **B.** -22. **C.** -20. **D.** 17.
- Câu 9.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho 3 điểm  $M(2; 0; 0)$ ,  $N(0; -3; 0)$ ,  $P(0; 0; 4)$ . Nếu  $MNPQ$  là hình bình hành thì tọa độ của điểm  $Q$  là  
**A.**  $(-2; -3; 4)$ . **B.**  $(3; 4; 2)$ . **C.**  $(2; 3; 4)$ . **D.**  $(-2; -3; -4)$ .
- Câu 10.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 1; 0)$ ,  $B(2; 0; -3)$ . Điểm  $M$  chia đoạn  $AB$  theo tỉ số  $k = -\frac{1}{2}$  có tọa độ là  
**A.**  $M\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; -1\right)$ . **B.**  $M\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -2\right)$ . **C.**  $M\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; 1\right)$ . **D.**  $M\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -2\right)$ .

### 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

- Câu 11.** Trong không gian  $Oxyz$ , hai điểm  $M$  và  $M'$  phân biệt và đối xứng nhau qua mặt phẳng  $(Oxy)$ .

| Phát biểu                              | Đ | S |
|----------------------------------------|---|---|
| a) $M, M'$ có cùng hoành độ và cao độ. |   |   |

| Phát biểu                                | Đ | S |
|------------------------------------------|---|---|
| b) $M, M'$ có hoành độ đối nhau.         |   |   |
| c) $M, M'$ có cùng hoành độ và tung độ.  |   |   |
| d) Nếu $M(1; 2; 3)$ thì $M'(1; 2; -3)$ . |   |   |

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\overrightarrow{OM} = (1; 5; 2)$  và  $\overrightarrow{ON} = (3; 7; -4)$ .

| Phát biểu                                                       | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $M(1; 5; 2)$ .                                               |   |   |
| b) $N(-3; -7; 4)$ .                                             |   |   |
| c) $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = (2; 2; -6)$ .   |   |   |
| d) Gọi $P$ là điểm đối xứng của $M$ qua $N$ thì $P(5; 9; 10)$ . |   |   |

**Câu 13.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$ ,  $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{k}$ ,  $\vec{c} = \vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}$ .

| Phát biểu                                                                                               | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\vec{a} = (2; -1; 0)$ .                                                                             |   |   |
| b) $\vec{a} + \vec{c} = (3; 4; 7)$ .                                                                    |   |   |
| c) $3\vec{b} = (9; 3; -12)$ .                                                                           |   |   |
| d) Nếu $\vec{u} = (m; n; p)$ sao cho $\vec{u} - \vec{a} = 3\vec{b} + \vec{c}$ thì $n^2 - m - p = -15$ . |   |   |

**Câu 14.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(3; 0; 0)$ ,  $D(0; 3; 0)$  và  $D'(0; 3; -3)$ .

| Phát biểu                                               | Đ | S |
|---------------------------------------------------------|---|---|
| a) $A'(0; 0; -3)$ .                                     |   |   |
| b) $B'(3; 0; 3)$ .                                      |   |   |
| c) $B(3; 3; 2)$ .                                       |   |   |
| d) $G(2; 1; -2)$ với $G$ là trọng tâm $\triangle ABC$ . |   |   |

**Câu 15.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(2; -1; 3)$ ,  $C(-4; 7; 5)$ .

| Phát biểu                                                                                                  | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\overrightarrow{BC} = (-6; 8; 2)$ .                                                                    |   |   |
| b) Ba điểm $A, B, C$ không thẳng hàng.                                                                     |   |   |
| c) Nếu $B$ là trung điểm $AM$ thì $M(3; 4; -7)$ .                                                          |   |   |
| d) Gọi $D(a; b; c)$ là chân đường phân giác kẻ từ $B$ của $\triangle ABC$ thì $a + b + c = -\frac{1}{2}$ . |   |   |



## 5

**Câu 16.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tứ diện  $ABCD$  có  $A(1; 0; 2)$ ,  $B(-2; 1; 3)$ ,  $C(3; 2; 4)$ ,  $D(6; 9; -5)$ . Gọi  $G(x; y; z)$  là tọa độ trọng tâm của tứ diện  $ABCD$ . Tính  $x - y + z$ . KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 17.** Cho  $\vec{a} = (2; -1; 5)$ ,  $\vec{b} = (0; 3; -3)$  và  $\vec{c} = (1; 4; -2)$ . Gọi  $\vec{d} = (x; y; z)$  thỏa  $\vec{d} = 2\vec{a} - \frac{1}{5}\vec{b} + 3\vec{c}$ . Tính  $y - z + x^2$  (làm tròn đến hàng đơn vị). KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 18.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(2; -1; 3)$ ,  $C(-2; 3; 3)$ . Điểm  $M(a; b; c)$  là đỉnh thứ tư của hình bình hành  $ABCM$ , tính  $P = a^2 + b^2 - c^2$  KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 19.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (2; m - 1; 3)$  và  $\vec{b} = (1; 3; -2n)$ . Gọi  $m, n$  là các giá trị để  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng hướng và  $m > n$ . Tính  $m - n^2$  (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

**Câu 20.** Trong không gian với hệ toạ độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(2; -3; 4)$ ,  $B(1; y; -1)$ ,  $C(x; 4; 3)$ . Để ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng thì tổng giá trị  $25x + y$  bằng bao nhiêu?      KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

## Biểu thức tọa độ của tích vô hướng và áp dụng tính góc, độ dài

## 1

**Ví dụ 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (2; 1; -2)$  và  $\vec{b} = (-2; 3; -2)$ .

- $$\text{a) } \text{Tim } \vec{a} \cdot \vec{b} \qquad \text{b) } \text{Tim } (\vec{a}; \vec{b})$$

**Ví dụ 7.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (1; 4; 2)$  và  $\vec{b} = (-4; 1; 0)$ .

- a) Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  và cho biết hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  có vuông góc với nhau hay không.
- b) Tính độ dài của vectơ  $\vec{a}$ .

**Ví dụ 8.** Trong không gian  $Oxyz$ , hình chóp  $S.ABC$  có  $S(3; 1; 3)$ ,  $A(2; 3; 1)$ ,  $B(4; 3; 3)$ ,  $C(2; 3; 1)$ .  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{SM}$ .

**Ví dụ 9.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (3; 2; -1)$ ,  $\vec{b} = (-2; 1; 2)$ . Tính  $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ .

**Ví dụ 10.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(0; 2; 1)$ ,  $B(3; -2; 1)$  và  $C(-2; 5; 7)$ .

- a) Tính chu vi của tam giác  $ABC$ .                      b) Tính  $\widehat{BAC}$ .

## 2

**Bài 5.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 0; 1)$ ,  $B(0; -3; 1)$  và  $C(4; -1; 4)$ .

- a) Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác  $ABC$ .      b) Chứng minh rằng  $\widehat{BAC} = 90^\circ$ .
- c) Tính  $\widehat{ABC}$ .

**Bài 6.** Trong không gian  $Oxyz$  (đơn vị trên các trục là km), một máy bay đang ở độ cao 10 km, tại vị trí  $A(500; 200; 10)$ . Theo hành trình dự định, máy bay sẽ phải bay qua vị trí  $B(700; 200; 10)$ . Tuy nhiên do thời tiết xấu, máy bay phải chuyển hướng bay đến vị trí  $C(600; 300; 8)$ .

- Tính khoảng cách từ  $A$  đến  $C$ .
- Hỏi trong quãng thời gian tránh vùng thời tiết xấu, máy bay đã phải bay chệch hướng dự định một góc bao nhiêu độ.

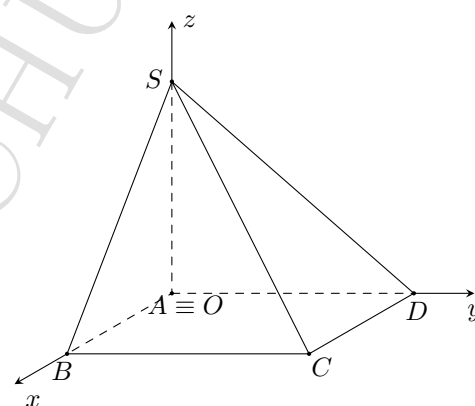
**Bài 7.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tứ diện  $ABCD$  với  $A(1; 3; -2)$ ,  $B(3; 2; -4)$ ,  $C(2; 1; 0)$ ,  $D(3; 5; -1)$ .

- Chứng minh rằng  $AB \perp CD$ .
- Chứng minh rằng  $BCD$  là tam giác đều.
- Tính số đo  $\widehat{AMD}$  với  $M$  là trung điểm  $BC$ .

### Bài 8.

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật và  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ . Giả sử  $SA = 2$ ,  $AB = 3$ ,  $AD = 4$ . Xét hệ tọa độ  $Oxyz$  với  $O$  trùng  $A$  và các tia  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  lần lượt trùng với các tia  $AB$ ,  $AD$ ,  $AS$  (Hình bên).

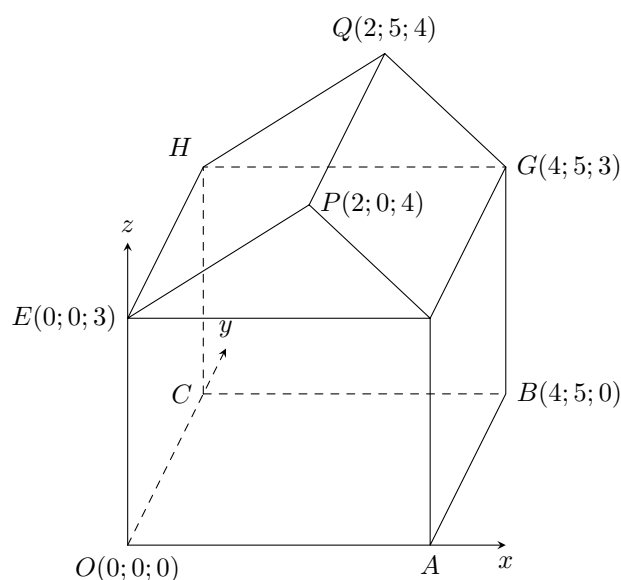
- Xác định tọa độ của các điểm  $S$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ .
- Tính  $BD$  và  $SC$ .
- Tính  $(\vec{BD}, \vec{SC})$ .



### Bài 9.

Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.

- Tìm tọa độ của các điểm  $A$ ,  $H$  và  $F$ .
- Tính góc dốc của mái nhà, tức là tìm số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng  $FG$ , hai mặt lần lượt là  $(FGQP)$  và  $(FGHE)$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).



## 3

### Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 21.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(-2; 1; -3)$ ,  $B(1; 0; 2)$ . Độ dài đoạn thẳng  $AB$  là

- A.  $3\sqrt{3}$ .      B. 11.      C.  $\sqrt{11}$ .      D. 27.

**Câu 22.** Trong không gian  $Oxyz$ , tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{a} = (-2; 2; 5)$  và  $\vec{b} = (0; 1; 2)$  bằng

- A. 10.      B. 12.      C. 13.      D. 14.

**Câu 23.** Cho hai vectơ  $\vec{a} = (1; -2; 3)$  và  $\vec{b} = (-2; 1; 2)$ . Khi đó  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$  bằng

- A. 12. B. 2. C. 11. D. 10.

**Câu 24.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (0; 1; 1)$  và  $\vec{b} = (-1; 1; 0)$ . Góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng

- A.  $60^\circ$ . B.  $120^\circ$ . C.  $150^\circ$ . D.  $30^\circ$ .

**Câu 25.** Trong không gian  $Oxyz$  cho hai vectơ  $\vec{a} = (2; -1; 4)$  và  $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{k}$ . Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

- A. -13. B. 5. C. -10. D. -11.

**Câu 26.** Trong không gian  $Oxyz$ , góc giữa vectơ  $\vec{i}$  và  $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$  là

- A.  $30^\circ$ . B.  $120^\circ$ . C.  $60^\circ$ . D.  $150^\circ$ .

**Câu 27.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba vectơ  $\vec{a} = (-1; 1; 0)$ ,  $\vec{b} = (1; 1; 0)$ ,  $\vec{c} = (1; 1; 1)$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A.  $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ . B.  $|\vec{c}| = \sqrt{3}$ . C.  $\vec{a} \perp \vec{b}$ . D.  $\vec{c} \perp \vec{b}$ .

**Câu 28.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(-1; 2; 4)$ ,  $B(-1; 1; 4)$ ,  $C(0; 0; 4)$ . Tìm số đo  $\widehat{ABC}$ .

- A.  $45^\circ$ . B.  $60^\circ$ . C.  $135^\circ$ . D.  $120^\circ$ .

**Câu 29.** Cho  $\vec{u} = (1; 1; 1)$  và  $\vec{v} = (0; 1; m)$ . Để góc giữa hai vectơ  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  có số đo bằng  $45^\circ$  thì  $m$  bằng

- A.  $1 \pm \sqrt{3}$ . B.  $\pm \sqrt{3}$ . C.  $2 \pm \sqrt{3}$ . D.  $\sqrt{3}$ .

**Câu 30.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho hai vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  thỏa mãn  $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$ ;  $|\vec{a}| = 2$ ;  $|\vec{b}| = 3$ . Tính  $|\vec{a} - 2\vec{b}|$ .

- A.  $\frac{\sqrt{13}}{2}$ . B.  $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ . C.  $\sqrt{13}$ . D.  $2\sqrt{13}$ .

#### 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 31.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho 3 điểm  $A(1; 2; 0)$ ,  $B(1; 0; -1)$ ,  $C(0; -1; 2)$ . Khi đó

| Phát biểu                                     | Đ | S |
|-----------------------------------------------|---|---|
| a) $AB = \sqrt{5}$ .                          |   |   |
| b) Tam giác $ABC$ là tam giác cân đỉnh $A$ .  |   |   |
| c) Tam giác $ABC$ là tam giác đều.            |   |   |
| d) Tam giác $ABC$ là tam giác có ba góc nhọn. |   |   |

**Câu 32.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (1; -2; 3)$  và  $\vec{b} = (1; 1; -1)$ .

| Phát biểu                      | Đ | S |
|--------------------------------|---|---|
| a) $ \vec{a} + \vec{b}  = 3$ . |   |   |
| b) $ \vec{a} - \vec{b}  = 4$ . |   |   |

| Phát biểu                                            | Đ | S |
|------------------------------------------------------|---|---|
| c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$ .                     |   |   |
| d) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{4}{\sqrt{42}}$ . |   |   |

**Câu 33.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\triangle ABC$  có  $A(0; 0; 1)$ ,  $B(-1; -2; 0)$  và  $C(2; 1; -1)$ .

| Phát biểu                                                                                         | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\overrightarrow{BC} = (3; -3; -1)$ .                                                          |   |   |
| b) $\triangle ABC$ cân tại $A$ .                                                                  |   |   |
| c) $AB \perp BC$ .                                                                                |   |   |
| d) Gọi $H(a, b, c)$ là chân đường cao hạ từ $A$ xuống $BC$ . Khi đó $a + b + c = \frac{17}{19}$ . |   |   |

**Câu 34.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba vectơ  $\vec{a} = (-1; 1; 0)$ ,  $\vec{b} = (1; 1; 0)$ ,  $\vec{c} = (1; 1; 1)$ .

| Phát biểu                            | Đ | S |
|--------------------------------------|---|---|
| a) $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1$ .     |   |   |
| b) $\vec{a}$ cùng phương $\vec{c}$ . |   |   |

| Phát biểu                                          | Đ | S |
|----------------------------------------------------|---|---|
| c) $\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{2}{\sqrt{6}}$ . |   |   |
| d) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ .       |   |   |

**Câu 35.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\triangle ABC$  có  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(0; 0; 1)$ ,  $C(2; 1; 1)$ .

| Phát biểu                                                      | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\overrightarrow{AB} = (-1; 0; 1)$ .                        |   |   |
| b) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương. |   |   |

| Phát biểu                                   | Đ | S |
|---------------------------------------------|---|---|
| c) $AB \perp AC$ .                          |   |   |
| d) Diện tích tam giác $ABC$ là $\sqrt{6}$ . |   |   |

## 5

## Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 36.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (2; 1; -1)$ ,  $\vec{b} = (1; 3; m)$ . Tìm giá trị của  $m$  để  $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ .

KQ:

**Câu 37.** Giá trị của  $m$  để  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , biết  $\vec{a} = (1; \log_3 6; m)$  và  $\vec{b} = (3; \log_6 3; 4)$ .

KQ:

**Câu 38.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho tam giác  $ABC$  có  $A(2; -1; 3)$ ,  $B(3; 0; -2)$ ,  $C(5; -1; -6)$ . Tính  $\cos \widehat{BAC}$  (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

**Câu 39.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (5; 3; -2)$ ,  $\vec{b} = (m; -1; m+3)$ . Tính tổng các giá trị nguyên dương của  $m$  để góc giữa  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là góc tù.

KQ:

**Câu 40.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-2; 0; -3)$ ,  $B(-4; 1; -1)$ ,  $C(-4; -4; 1)$ . Gọi  $D(x; y; z)$  là chân đường phân giác trong góc  $A$  của tam giác  $ABC$ . Tính giá trị của  $x$ .

KQ:

**Câu 41.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$  và  $B(m; m-1; -4)$ . Tính tổng bình phương các giá trị của tham số  $m$  để độ dài đoạn  $AB = 3$ .

KQ:

**Câu 42.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $\triangle ABC$  có  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(0; 0; 1)$ ,  $C(2; 1; 1)$ . Tính độ dài đường cao của tam giác  $ABC$  kẻ từ đỉnh  $A$  (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

KQ:

**Câu 43.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho hai vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  thỏa mãn  $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$ ;  $|\vec{a}| = 2$ ;  $|\vec{b}| = 3$ . Tính góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{x} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ .

KQ:

**DẠNG 3** Tìm tọa độ các điểm đặc biệt trong tam giác, tứ giác, hình hộp

Trong không gian  $Oxyz$

- ☑ Cho hai điểm  $A(x_A; y_A; z_A)$ ,  $B(x_B; y_B; z_B)$ . Tọa độ trung điểm  $M$  của đoạn thẳng  $AB$  là

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

- ☑ Cho tam giác  $ABC$  có  $A(x_A; y_A; z_A)$ ,  $B(x_B; y_B; z_B)$ ,  $C(x_C; y_C; z_C)$ . Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  là

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

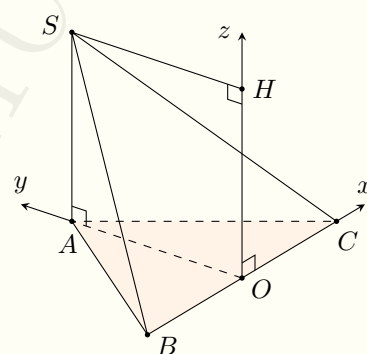
- ☑ Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .

- ☑ Đáy là tam giác đều

Gọi  $O$  là trung điểm  $BC$ . Chọn hệ trục như hình vẽ,  $AB = a =$

1. Tọa độ các điểm là  $O(0; 0; 0)$ ,  $A\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ ,  $B\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ ,

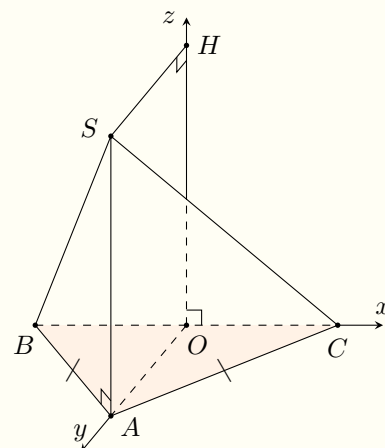
$C\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ ,  $S\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; \underbrace{OH}_{=SA}\right)$ .



- ☑ Đáy là tam giác cân tại  $A$

Gọi  $O$  là trung điểm  $BC$ . Chọn hệ trục như hình vẽ. Tọa độ các điểm là  $O(0; 0; 0)$ ,  $A(0; OA; 0)$ ,  $B(-OB; 0; 0)$ ,  $C(OC; 0; 0)$ ,

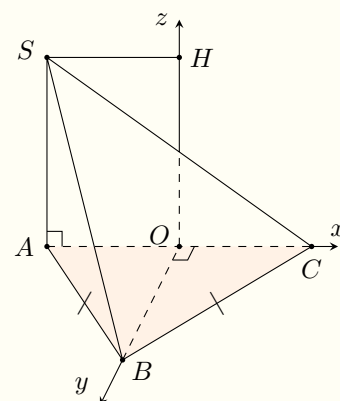
$S\left(0; OA; \underbrace{OH}_{=SA}\right)$ .



- ☑ Đáy là tam giác cân tại  $B$

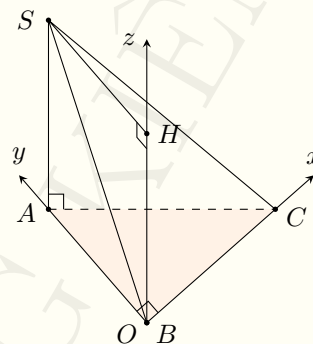
Gọi  $O$  là trung điểm  $AC$ . Chọn hệ trục như hình vẽ,  $a = 1$ . Tọa độ các điểm là  $O(0; 0; 0)$ ,  $A(-OA; 0; 0)$ ,  $B(0; OB; 0)$ ,  $C(OC; 0; 0)$ ,

$S\left(-OA; 0; \underbrace{OH}_{=SA}\right)$ .



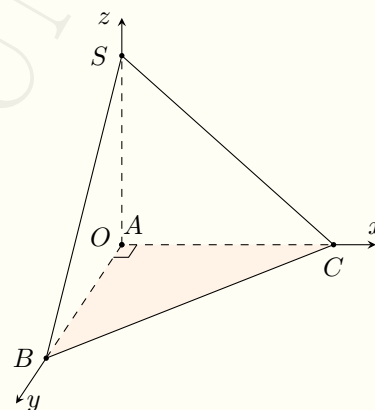
☑ Đáy là tam giác vuông tại  $B$

Chọn hệ trục như hình vẽ. Tọa độ các điểm là  $B \equiv O(0;0;0)$ ,  
 $A(0;AB;0)$ ,  $C(BC;0;0)$ ,  $S\left(0;AB;\underbrace{BH}_{=SA}\right)$ .



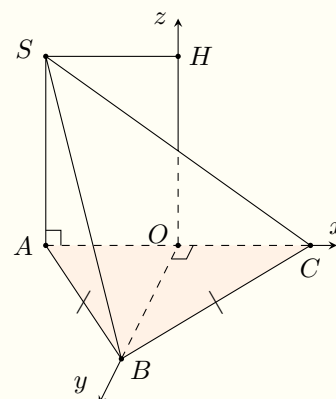
☑ Đáy là tam giác vuông tại  $A$

Chọn hệ trục như hình vẽ. Tọa độ các điểm  $A \equiv O(0;0;0)$ ,  
 $B(0;OB;0)$ ,  $C(AC;0;0)$ ,  $S(0;0;SA)$ .



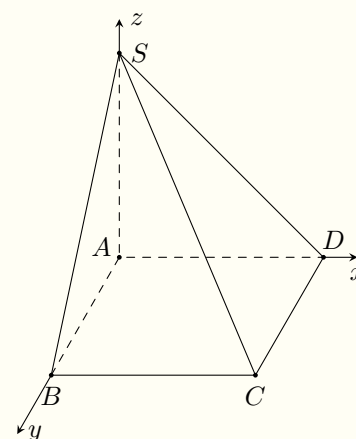
☑ Đáy là tam giác thường

Dựng đường cao  $BO$  của  $\triangle ABC$ . Chọn hệ trục như hình vẽ. Tọa độ các điểm là  $O(0;0;0)$ ,  $A(-OA;0;0)$ ,  $B(0;OB;0)$ ,  
 $C(OC;0;0)$ ,  $S\left(-OA;0;\underbrace{QH}_{=SA}\right)$ .



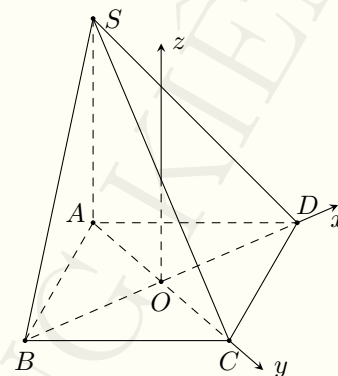
☑ Đáy hình vuông, hình chữ nhật

Chọn hệ trục như hình vẽ và chọn  $a = 1$ . Tọa độ  $A \equiv O(0;0;0)$ ,  
 $B(0;AB;0)$ ,  $C(AD;AB;0)$ ,  $D(AD;0;0)$ ,  $S(0;0;SA)$ .



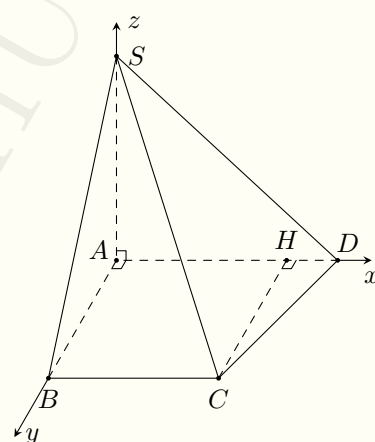
☑ Đáy là hình thoi

Chọn hệ trục như hình vẽ và chọn  $a = 1$ . Tọa độ  $O(0; 0; 0)$ ,  $A(-OA; 0; 0)$ ,  $B(0; OB; 0)$ ,  $C(OC; 0; 0)$ ,  $D(0; -OD; 0)$ ,  $S(OA; 0; \underbrace{OH}_{=SA})$ .



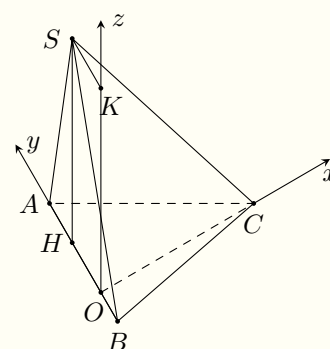
☑ Đáy là hình thang vuông

Chọn hệ trục như hình vẽ và chọn  $a = 1$ . Tọa độ  $A \equiv O(0; 0; 0)$ ,  $B(0; AB; 0)$ ,  $C(AH; AB; 0)$ ,  $D(AD; 0; 0)$ ,  $S(0; 0; SA)$ .



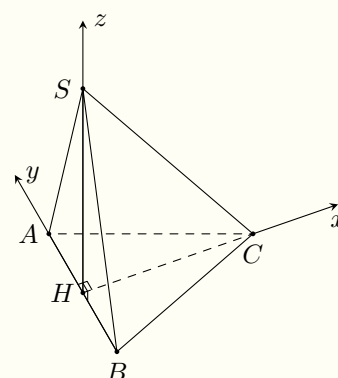
☑ Đáy là tam giác, mặt bên là tam giác thường

Vẽ đường cao  $CO$  trong  $\triangle ABC$ . Chọn hệ trục như hình vẽ,  $a = 1$ . Ta có  $O(0; 0; 0)$ ,  $A(0; OA; 0)$ ,  $B(0; -OB; 0)$ ,  $C(OC; 0; 0)$ ,  $S(0; OH; \underbrace{OK}_{=SH})$ .



☑ Đáy là tam giác cân tại C (hoặc đều), mặt bên là tam giác cân tại S (hoặc đều)

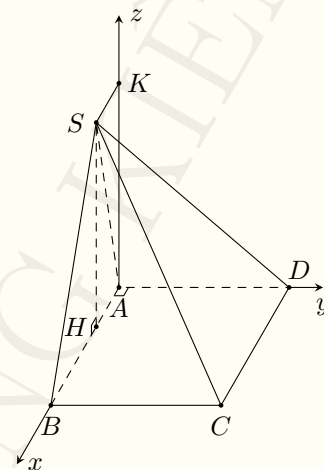
Gọi  $O$  là trung điểm  $BC$ , Chọn hệ trục như hình vẽ,  $a = 1$ . Ta có  $O(0; 0; 0)$ ,  $A(0; OA; 0)$ ,  $B(0; -OB; 0)$ ,  $C(OC; 0; 0)$ ,  $S(0; 0; SC)$ .





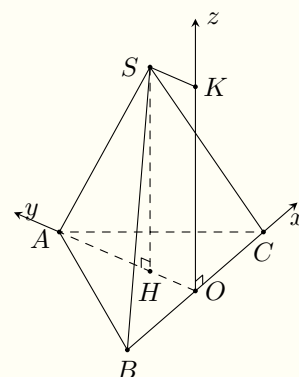
☑ Đáy là hình vuông – hình chữ nhật

Chọn hệ trục như hình vẽ,  $a = 1$ . Ta có  $A \equiv O(0; 0; 0)$ ,  
 $B(AB; 0; 0)$ ,  $C(AB; AD; 0)$ ,  $D(0; AD; 0)$ ,  $S\left(AH; 0; \underbrace{AK}_{=SH}\right)$ .



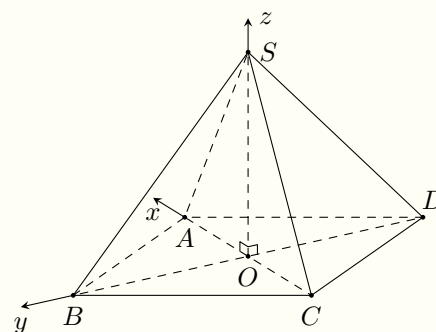
☑ Hình chóp tam giác đều

Gọi  $O$  là trung điểm một cạnh đáy. Dựng hệ trục như hình vẽ và  
 $a = 1$ . Tọa độ điểm  $O(0; 0; 0)$ ,  $A\left(0; \frac{AB\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ ,  $B\left(-\frac{BC}{2}; 0; 0\right)$ ,  
 $C\left(\frac{BC}{2}; 0; 0\right)$ ,  $S\left(0; \underbrace{\frac{AB\sqrt{3}}{6}}_{=OH}; \underbrace{OK}_{=SH}\right)$ .



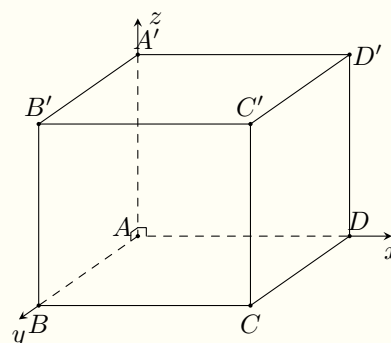
☑ Hình chóp tứ giác đều

Chọn hệ trục như hình với  $a = 1$ . Tọa độ  
điểm  $O(0; 0; 0)$ ,  $A\left(\underbrace{\frac{AB\sqrt{2}}{2}}_{=OA}; 0; 0\right)$ ,  $B\left(0; \underbrace{\frac{AB\sqrt{2}}{2}}_{=OB}; 0\right)$ ,  
 $C\left(\underbrace{-\frac{AB\sqrt{2}}{2}}_{=-OA}; 0; 0\right)$ ,  $D\left(0; \underbrace{-\frac{AB\sqrt{2}}{2}}_{=-OB}; 0\right)$ ,  $S(0; 0; SO)$ .



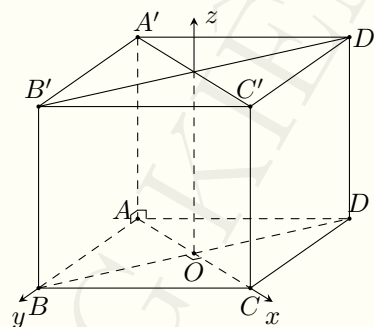
☑ Hình lập phương, hình hộp chữ nhật

Dựng hệ trục như hình vẽ với  $a = 1$ .  $A \equiv O(0; 0; 0)$ ,  
 $B(0; AB; 0)$ ,  $D(AD; 0; 0)$ ,  $B'(0; AB; AA')$ ,  
 $C(AD; AB; 0)$ ,  $D'(AD; 0; AA')$ ,  $A'(0; 0; AA')$ ,  $B'(0; AB; AA')$ ,  
 $C'(AD; AB; AA')$ ,  $D'(AD; 0; AA')$ .



☑ **Lăng trụ đứng đáy là hình thoi**

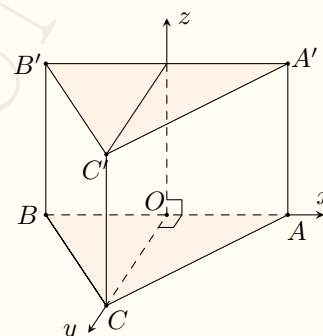
Gọi  $O$  là tâm hình thoi đáy, dựng hệ trục như hình vẽ.  $O(0; 0; 0)$ ,  $A(-OA; 0; 0)$ ,  $B(0; OB; 0)$ ,  $C(OC; 0; 0)$ ,  $D(0; -OD; 0)$ ,  $A'(-OA; 0; AA')$ ,  $B'(0; OB; AA')$ ,  $C'(OC; 0; AA')$ ,  $D'(0; -OD; AA')$ .



☑ **Lăng trụ tam giác đều**

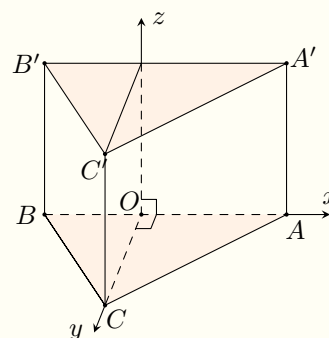
Gọi  $O$  là trung điểm một cạnh đáy, chọn hệ trục như hình vẽ với  $a =$

1. Ta có  $O(0; 0; 0)$ ,  $A\left(\frac{AB}{2}; 0; 0\right)$ ,  $B\left(-\frac{AB}{2}; 0; 0\right)$ ,  $C(0; OC; 0)$ ,  $A'(OA; 0; AA')$ ,  $B\left(-\frac{AB}{2}; 0; BB'\right)$ ,  $C'(0; OC; CC')$ .



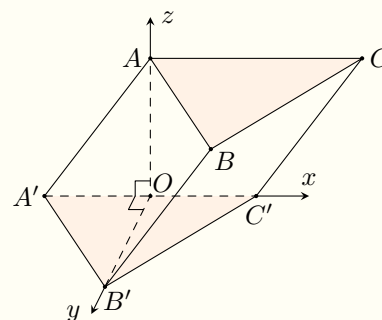
☑ **Lăng trụ đứng có đáy tam giác thường**

Vẽ đường cao  $CO$  trong tam giác  $ABC$  và chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ với  $a = 1$ . Tọa độ điểm là  $O(0; 0; 0)$ ,  $A(OA; 0; 0)$ ,  $B(-OB; 0; 0)$ ,  $C(0; OC; 0)$ ,  $A'(OA; 0; AA')$ ,  $B(-OB; 0; BB')$ ,  $C'(0; OC; CC')$ .



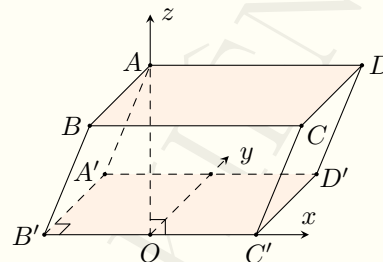
☑ **Lăng trụ xiên có đáy là tam giác đều, hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đối diện là trung điểm một cạnh tam giác đáy**

Dựng hệ trục như hình vẽ, ta xác định các điểm  $O$ ,  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $A$ . Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vectơ bằng nhau  $\vec{AA'} = \vec{BB'} = \vec{CC'}$ .



☑ **Lăng trụ xiên có đáy là hình vuông hoặc hình chữ nhật, hình chiếu của một đỉnh là một điểm thuộc cạnh đáy không chứa đỉnh đó**

Dựng hệ trục như hình vẽ, ta xác định các điểm  $O, A', B', C', D', A$ . Tìm toạ độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vectơ bằng nhau  $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$ .



## 1 Ví dụ mẫu

**Ví dụ 11.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; -1; 1)$ ,  $B(0; 1; 2)$ ,  $C(1; 0; 1)$ . Tìm tọa độ

- a) Trung điểm  $M$  của  $AB$ ;                      b) Trong tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ .

**Ví dụ 12.** Cho tam giác  $MNP$  có  $M(2; 1; 3)$ ,  $N(1; 2; 3)$ ,  $P(-3; -1; 0)$ . Tìm tọa độ

- a) Các điểm  $M', N', P'$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $NP, MP, MN$ ;  
b) Trong tâm  $G$  của tam giác  $M'N'P'$ .

**Ví dụ 13.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm không thẳng hàng  $A(2; -1; 4)$ ,  $B(3; 5; -1)$ ,  $C(-1; 1; 2)$ .

- a) Tìm tọa độ của  $\overrightarrow{AB}$ .
- b) Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho  $ABCD$  là hình bình hành.

**Ví dụ 14.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $OABC.O'A'B'C'$  và các điểm  $A(2; 3; 1)$ ,  $C(-1; 2; 3)$  và  $O'(1; -2; 2)$ . Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

**Ví dụ 15.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(7; 3; 3)$ ,  $B(1; 2; 4)$ ,  $C(2; 3; 5)$ . Tìm tọa độ điểm  $H$  là chân đường cao kẻ từ  $A$  của tam giác  $ABC$ .

**Ví dụ 16.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Biết  $A(-3; 2; 1)$ ,  $C(4; 2; 0)$ ,  $B'(-2; 1; 1)$ ,  $D'(3; 5; 4)$ . Toa độ  $A'$  của hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  là

- A.**  $(-3; -3; -3)$ .      **B.**  $(-3; 3; 3)$ .      **C.**  $(-3; 3; 1)$ .      **D.**  $(-3; -3; 3)$ .

**Ví dụ 17.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; -2; 0)$ ,  $B(-3; 2; 4)$ ,  $C(-4; 3; 2)$ .

| Phát biểu                                                                                   | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $M(-1; 0; 2)$ là trung điểm của $AB$ .                                                   |   |   |
| b) $G(-2; 1; 1)$ là trọng tâm tam giác $ABC$ .                                              |   |   |
| c) Khi tọa độ điểm $D(2; -3; 2)$ thì $ABCD$ là hình bình hành .                             |   |   |
| d) $H$ là chân đường cao kẻ từ đỉnh $A$ của $ABC$ thì tung độ điểm $H$ bằng $\frac{2}{3}$ . |   |   |

**Ví dụ 18.** Trong không gian với hệ tọa độ  $(Oxyz)$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(2; -1; 3)$ ,  $C(-4; 7; 5)$ . Tọa độ chân đường phân giác trong góc  $B$  của tam giác  $ABC$  là  $D(x; y; z)$ . Tính  $x + y + z$ .

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

## 2 Bài tập tự luận

**Bài 10.** Trong không gian  $Oxyz$ , tam giác  $MNP$  có  $M(3; 7; 2)$ ,  $N(5; 1; -1)$ ,  $P(4; -4; -2)$ . Tìm tọa độ

- a) trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $MN$ ;                      b) trọng tâm  $G$  của tam giác  $MNP$ .

**Bài 11.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(-2; 1; 0)$ ,  $B(0; 2; 5)$ ,  $C(5; 0; 2)$ . Tìm tọa độ trung điểm  $M$  của đoạn thẳng  $AB$  và trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ .

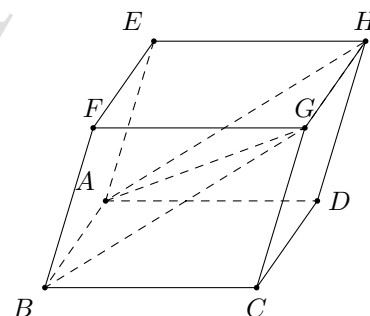
**Bài 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 3; -5)$ ,  $M\left(\frac{3}{2}; 2; \frac{1}{2}\right)$ ,  $G\left(2; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ .

- a) Tìm tọa độ điểm  $B$  sao cho  $M$  là trung điểm  $AB$ .  
b) Tìm tọa độ điểm  $C$  sao cho  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .

**Bài 13.**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.EFGH$  có  $A(1; 0; -1)$ ,  $B(2; 1; 3)$  và  $H(4; 3; 4)$

- a) Tìm tọa độ của đỉnh  $G$ .  
b) Tìm tọa độ của  $\vec{AG}$ .



**Bài 14.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  biết  $A(0; 1; 3)$ ,  $B(-1; 2; 1)$ ,  $B'(-2; 1; 0)$ ,  $C'(5; 3; 2)$ . Tìm tọa độ các đỉnh  $A'$  và  $C$ .

**Bài 15.** Cho ba điểm  $A(0; -1; 1)$ ,  $B(1; 0; 5)$ ,  $G(1; 2; 0)$ .

- a) Chứng minh rằng ba điểm  $A$ ,  $B$ ,  $G$  không thẳng hàng.  
b) Tìm tọa độ điểm  $C$  sao cho  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ .

**Bài 16.** Cho tam giác  $MNP$  có  $M(0; 1; 2)$ ,  $N(5; 9; 3)$ ,  $P(7; 8; 2)$ . Tìm tọa độ điểm  $K$  là chân đường cao kẻ từ  $M$  của tam giác  $MNP$ .

## 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 44.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(0; 4; 2)$ ,  $B(2; 0; 1)$ ,  $C(1; -1; 0)$ . Trọng tâm của tam giác  $ABC$  là

- A.  $G\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .                      B.  $G(3; 3; 3)$ .                      C.  $G(-1; -1; -1)$ .                      D.  $G(1; 1; 1)$ .

**Câu 45.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 0; 1)$ ,  $B(0; 2; 3)$ ,  $C(2; 1; 0)$ . Độ dài đường trung tuyến  $AM$  là

- A.  $\frac{1}{2}$ .                      B.  $\frac{\sqrt{11}}{2}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{12}}{2}$ .                      D.  $\frac{\sqrt{10}}{2}$ .

**Câu 46.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $M(1; 1; 1)$ ,  $N(2; 3; 4)$ ,  $P(7; 7; 5)$ . Để tứ giác  $MNPQ$  là hình bình hành thì tọa độ điểm  $Q$  là

- A.  $(-6; -5; -2)$ .                      B.  $(6; -5; 2)$ .                      C.  $(6; 5; 2)$ .                      D.  $(-6; 5; 2)$ .

**Câu 47.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình lập phương  $OABC.O'A'B'C'$  có  $A(a; 0; 0)$ ,  $C(0; a; 0)$ ,  $O'(0; 0; a)$ ,  $M$  là trung điểm đoạn  $AC'$ . Toạ độ của điểm  $M$  là

- A.  $\left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$ . B.  $\left(-\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}\right)$ . C.  $\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$ . D.  $\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; -\frac{a}{2}\right)$ .

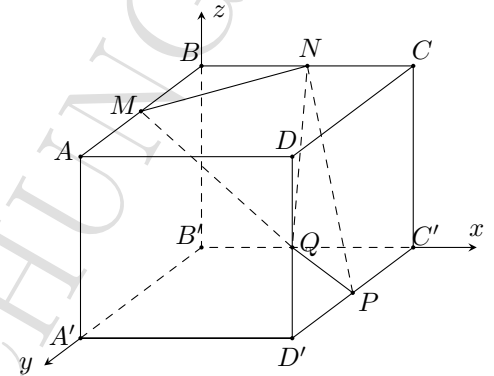
**Câu 48.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(3; 0; 0)$ ,  $D(0; 3; 0)$  và  $D'(0; 3; -3)$ . Toạ độ trọng tâm của tam giác  $A'B'C'$  là

- A.  $(1; 1; -2)$ . B.  $(1; 2; -1)$ . C.  $(2; 1; -1)$ . D.  $(2; 1; -2)$ .

**Câu 49.**

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có độ dài cạnh bằng 1. Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, C'D', DD'$ . Chọn hệ tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ, xác định tọa độ các điểm  $M, N, P, Q$ .

- A.  $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$ ,  $N\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ ,  $P\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$ ,  $Q\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$ .  
 B.  $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$ ,  $N\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ ,  $P(1; 1; 0)$ ,  $Q\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$ .  
 C.  $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$ ,  $N\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ ,  $P\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$ ,  $Q\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$ .  
 D.  $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$ ,  $N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ,  $P\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$ ,  $Q\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$ .



**Câu 50.** Cho tứ diện  $OABC$ , có  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc và  $OA = 5, OB = 2, OC = 4$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $OB$  và  $OC$ . Gọi  $G, K$  lần lượt là trọng tâm của tam giác  $ABC$  và  $AMN$ . Khoảng cách từ  $G$  đến  $K$  là

- A.  $GK = \frac{\sqrt{5}}{3}$ . B.  $GK = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . C.  $GK = \frac{1}{2}$ . D.  $GK = \frac{\sqrt{2}}{3}$ .

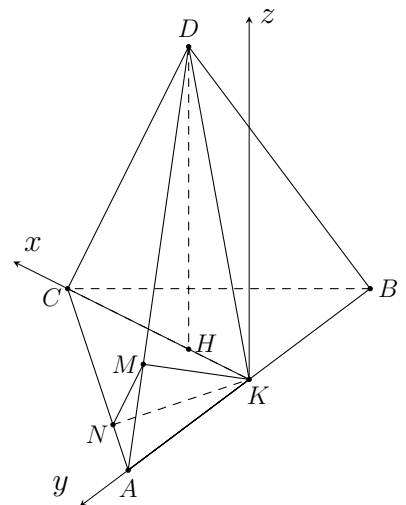
**Câu 51.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình thang vuông tại  $A$  và  $D$ ,  $SA \perp (ABCD)$ . Góc giữa  $SB$  và mặt phẳng đáy bằng  $45^\circ$ ,  $E$  là trung điểm của  $SD$ ,  $AB = 2a, AD = DC = a$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ACE$ . Độ dài  $BG$  bằng

- A.  $BG = \frac{a\sqrt{89}}{6}$ . B.  $BG = \frac{a\sqrt{113}}{6}$ . C.  $BG = \frac{a\sqrt{89}}{2}$ . D.  $BG = \frac{a\sqrt{89}}{3}$ .

**Câu 52.**

Cho tứ diện đều  $ABCD$  cạnh  $a$ . Gọi  $K$  là trung điểm  $AB$ , gọi  $M, N$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $K$  lên  $AD, AC$ . Chọn hệ tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ, xác định tọa độ các điểm  $K, M, N$  theo  $a$ .

- A.  $K(0; 0; 0)$ ,  $M\left(\frac{a\sqrt{3}}{24}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{12}\right)$ ,  $N\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{3a}{2}; 0\right)$ .  
 B.  $K(0; 0; 0)$ ,  $M\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{3}\right)$ ,  $N\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}; \frac{3a}{8}; 0\right)$ .  
 C.  $K(0; 0; 0)$ ,  $M\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{3}\right)$ ,  $N\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{3a}{2}; 0\right)$ .  
 D.  $K(0; 0; 0)$ ,  $M\left(\frac{a\sqrt{3}}{24}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{12}\right)$ ,  $N\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}; \frac{3a}{8}; 0\right)$ .



**Câu 53.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hình chóp  $S.ABCD$ , đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật. Biết  $A(0; 0; 0)$ ,  $D(2; 0; 0)$ ,  $B(0; 4; 0)$ ,  $S(0; 0; 4)$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $SB$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác  $SCD$ . Độ dài  $MG$  bằng

A.  $MG = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .

B.  $MG = \frac{\sqrt{6}}{2}$ .

C.  $MG = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

D.  $MG = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ .

**Câu 54.** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có các kích thước  $AB = 4$ ,  $AD = 3$ ,  $AA' = 5$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ACB'$ . Độ dài  $BG$  là

A.  $BG = \frac{\sqrt{2}}{3}$ .

B.  $BG = \frac{2\sqrt{5}}{3}$ .

C.  $BG = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ .

D.  $BG = \frac{5\sqrt{2}}{3}$ .

**Câu 55.**

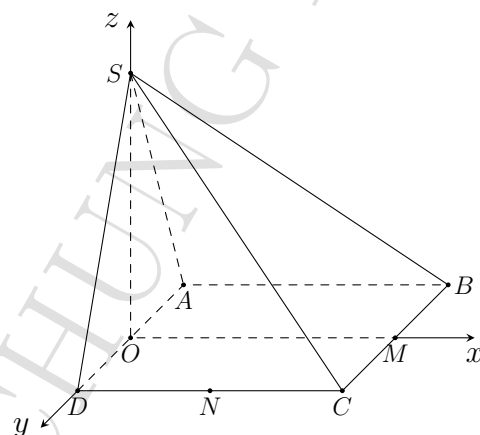
Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SAD$  là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $CD$ . Chọn hệ tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ bên. Xác định tọa độ các điểm  $S$ ,  $M$ ,  $N$  theo  $a$ .

A.  $S\left(0; 0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ ;  $M(a; 0; 0)$ ;  $N\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$ .

B.  $S(0; 0; a\sqrt{3})$ ;  $M(a; 0; 0)$ ;  $N\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$ .

C.  $S\left(0; 0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ ;  $M(a; 0; 0)$ ;  $N\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{a}{2}\right)$ .

D.  $S\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right)$ ;  $M(a; 0; 0)$ ;  $N\left(0; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$ .



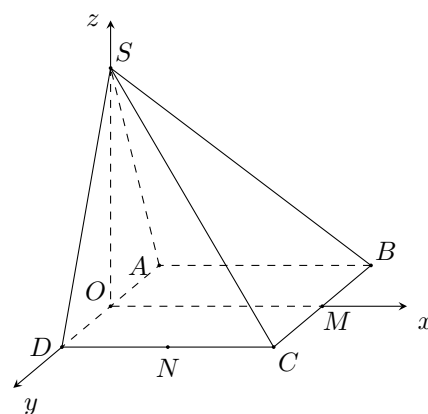
**Câu 56.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SAD$  là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $CD$ . Chọn hệ tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ. Xác định tọa độ các điểm  $S$ ,  $M$ ,  $N$  theo  $a$ .

A.  $S\left(0; 0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ ;  $M(a; 0; 0)$ ;  $N\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$ .

B.  $S(0; 0; a\sqrt{3})$ ;  $M(a; 0; 0)$ ;  $N\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$ .

C.  $S\left(0; 0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ ;  $M(a; 0; 0)$ ;  $N\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{a}{2}\right)$ .

D.  $S\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right)$ ;  $M(a; 0; 0)$ ;  $N\left(0; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$ .



#### 4

#### Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 57.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(2, -2, 1)$ ,  $B(-4, 2, 4)$ ,  $C(-4, 0, 1)$ . Khi đó

| Phát biểu                                                             | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $M\left(-1, 0, \frac{5}{2}\right)$ là trung điểm của $BC$ .        |   |   |
| b) $G(-2, 0, 2)$ là trọng tâm tam giác $ABC$ .                        |   |   |
| c) $N(8; -6; -2)$ là điểm đối xứng của $B$ qua $A$ .                  |   |   |
| d) Tọa độ điểm $E(-14; 8; 11)$ thỏa $B$ là trọng tâm tam giác $AOE$ . |   |   |

**Câu 58.** Trong không gian  $Oxyz$  cho ba điểm  $A(1; 2; -3)$ ,  $B(-2; 4; 5)$ ,  $C(7; -3; -5)$ . Khi đó



| Phát biểu                                                       | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Ba điểm $A, B, C$ không thẳng hàng.                          |   |   |
| b) $A'(-1; -2; 3)$ là điểm đối xứng của $A$ qua $O$ .           |   |   |
| c) Điểm $G(2; 1; -1)$ là trọng tâm của tam giác $ABC$ .         |   |   |
| d) Điểm $D(10; -5; -13)$ thỏa tứ giác $ABCD$ là hình bình hành. |   |   |

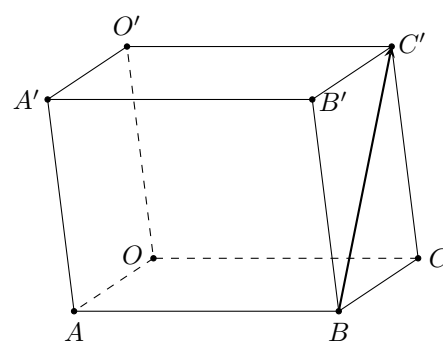
**Câu 59.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Biết  $A(-3; 2; 1)$ ,  $C(4; 2; 0)$ ,  $B'(-2; 1; 1)$ ,  $D'(3; 5; 4)$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                 | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $E\left(\frac{1}{2}; 3; \frac{5}{2}\right)$ là trung điểm của $B'D'$ . |   |   |
| b) $F\left(\frac{1}{2}; 2; \frac{1}{2}\right)$ là trung điểm của $AC$ .   |   |   |
| c) Tọa độ điểm $A'(-3; 3; 3)$ .                                           |   |   |
| d) Tọa độ điểm $B(-2; 0; 1)$ .                                            |   |   |

### Câu 60.

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $OABC.O'A'B'C'$  có  $A(1; 1; -1)$ ,  $B(0; 3; 0)$ ,  $\overrightarrow{BC'} = (2; -6; 6)$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là trọng tâm của tam giác  $OA'O'$  và  $CB'C'$ . Khi đó

| Phát biểu                                               | Đ | S |
|---------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tọa độ điểm $C'$ là $(2; -3; 6)$ .                   |   |   |
| b) Tọa độ điểm $O'$ là $(3; -5; 5)$ .                   |   |   |
| c) Tọa độ véc tơ $\overrightarrow{AB'} = (-2; 3; -6)$ . |   |   |
| d) Tọa độ véc tơ $\overrightarrow{HK} = (-1; 2; -1)$ .  |   |   |



## 5

### Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 61.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1; 2; 3)$ ,  $B(2; 4; 2)$  và tọa độ trọng tâm  $G(0; 2; 1)$ . Biết tọa độ điểm  $C(a; b; c)$ . Tính  $a + b + c$ . KQ:

**Câu 62.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(2; -1; 3)$ ,  $C(-3; 5; 1)$ . Tọa độ điểm  $D(a; b; c)$  thỏa tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành. Tính  $a - b + c$ . KQ:

**Câu 63.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$ , biết  $A(4; 0; -1)$ ,  $B(2; 4; 3)$ ,  $C(0; 2; -3)$ . Tính độ dài đường trung tuyến vẽ từ  $A$  của tam giác  $ABC$  (làm tròn đến hàng phần trăm). KQ:

**Câu 64.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(0; 0; 1)$ ,  $B(-1; -2; 0)$ ,  $C(2; 1; -1)$ . Khi đó hoành độ chân đường cao  $H$  hạ từ  $A$  xuống  $BC$  có dạng phân số tối giản  $\frac{a}{b}$  với  $a, b$  là các số nguyên dương. Tính  $a - b$ . KQ:



**Câu 65.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(-2; 3; 1)$ ,  $B\left(\frac{1}{4}; 0; 1\right)$ ,  $C(2; 0; 1)$ . Gọi  $D(x; y; z)$  là tọa độ chân đường phân giác trong của góc  $A$  của tam giác  $ABC$ . Tính  $xyz$ .

KQ:

**Câu 66.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB, AC, AD$  đôi một vuông góc với nhau và  $AD = 2$ ,  $AB = AC = 1$ . Gọi  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABD$ . Tính độ dài  $BI$ .

KQ:

**Câu 67.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ , cạnh bên  $SA = a$  và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SB$  và  $SD$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác  $AMN$ . Biết tọa độ  $G$  là  $(xa; ya; za)$ , tính  $x + y + z$ ?

KQ:

**Câu 68.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $A'BD$ . Biết  $C'G = \frac{ma}{3}$ , tính giá trị  $m$ ?

KQ:

**Câu 69.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật,  $AB = 1$ ,  $BC = \sqrt{3}$ ,  $SA = 1$  và  $SA$  vuông góc với đáy  $ABCD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $SBD$ . Tính độ dài  $CG$ .

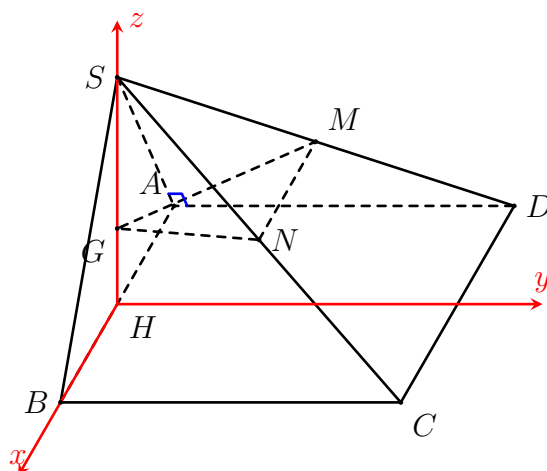
KQ:

**Câu 70.** Cho hình chóp  $O.ABC$  có ba cạnh  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc và  $OA = OB = OC = a$ . Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $AB$ . Tính góc tạo bởi hai vectơ  $\overrightarrow{BC}$  và  $\overrightarrow{OM}$ .

KQ:

**Câu 71.**

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ , mặt bên  $SAB$  là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $SAB$  và  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SC, SD$ . Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ dưới, Tính tọa độ các điểm  $G, M, N$  theo  $a$ . Tổng các hoành độ của ba điểm  $M, N, G$  bằng bao nhiêu? KQ:



**Câu 72.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có  $AB = a$ ,  $SA = a\sqrt{2}$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $SCD$ . Tính cosin góc giữa đường thẳng  $BG$  với đường thẳng  $SA$ .

KQ:

**Câu 73.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy hình vuông. Cho tam giác  $SAB$  vuông tại  $S$  và góc  $SBA$  bằng  $30^\circ$ . Mặt phẳng  $(SAB)$  vuông góc mặt phẳng đáy. Gọi  $M, N$  là trung điểm  $AB, BC$ . Tìm cosin góc tạo bởi hai đường thẳng  $(SM, DN)$ .

KQ:

## DẠNG 4

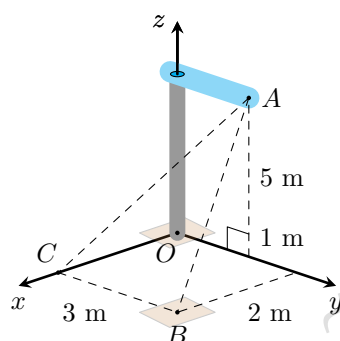
## Vận dụng tọa độ của vectơ trong một số bài toán có liên quan đến thực tiễn

- ☑ Lý thuyết của dạng toán, có minh họa bằng hình ảnh (nếu có).
- ☑ Phương pháp giải dạng toán.

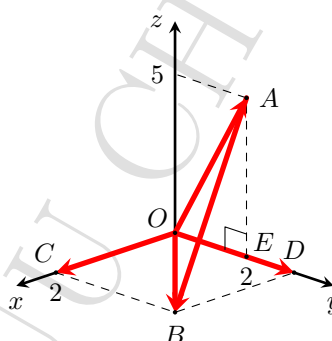
## 1 Ví dụ mẫu

**Ví dụ 19.** Một thiết kế cơ khí trong Hình a được biểu diễn trong không gian  $Oxyz$  như Hình b.

- a) Hãy vẽ ba vectơ đơn vị  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  lần lượt trên ba trục tọa độ  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  (mỗi vectơ đơn vị có độ dài bằng 1 m).
- b) Biểu diễn các vectơ  $\vec{OC}$ ,  $\vec{OB}$ ,  $\vec{OA}$ ,  $\vec{AB}$  theo  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ .



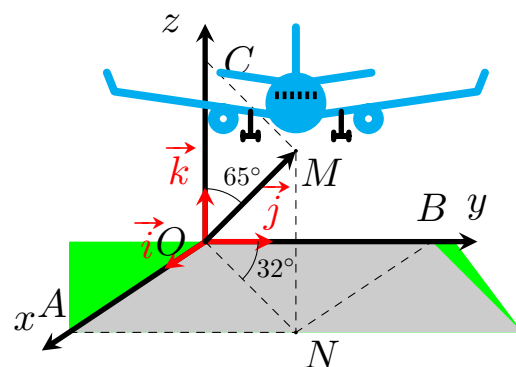
Hình a



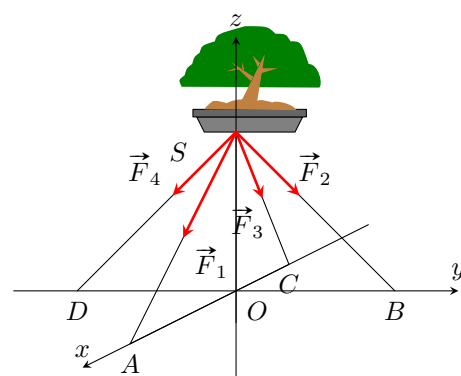
Hình b

**Ví dụ 20 (Mức độ 3).**

Một máy bay đang cất cánh từ phi trường. Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên, cho biết  $M$  là vị trí của máy bay,  $OM = 14$ ,  $\widehat{NOB} = 32^\circ$ ,  $\widehat{MOC} = 65^\circ$ . Tính tọa độ điểm  $M$ .

**Ví dụ 21.**

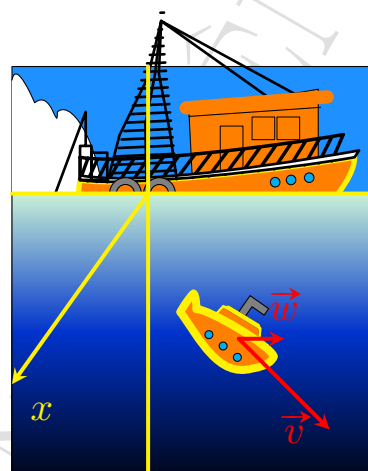
Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt  $S(0; 0; 20)$  và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là  $A(20; 0; 0)$ ,  $B(0; 20; 0)$ ,  $C(-20; 0; 0)$ ,  $D(0; -20; 0)$  (đơn vị cm). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn 40(N) và được phân bố thành bốn lực  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$ ,  $\vec{F}_4$  có độ lớn bằng nhau như hình bên. Tìm tọa độ của các lực nói trên (mỗi centimet biểu diễn 1 N).



**Ví dụ 22.**

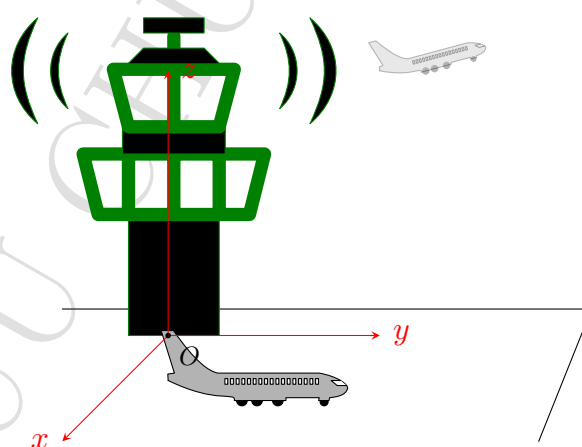
Một thiết bị thăm dò đáy biển đang lặn với vận tốc  $\vec{v} = (10; 8; -3)$  (hình vẽ bên). Cho biết vận tốc của dòng hải lưu của vùng biển là  $\vec{w} = \left(\frac{7}{2}; 1; 0\right)$ .

- Tìm tọa độ của vectơ tổng hai vận tốc  $\vec{v}$  và  $\vec{w}$ .
- Giả sử thiết bị thăm dò lặn với vận tốc  $\vec{u} = (7; 2; 0)$ , hãy nêu nhận xét về vectơ vận tốc của nó so với vectơ vận tốc của dòng hải lưu.



**Ví dụ 23.**

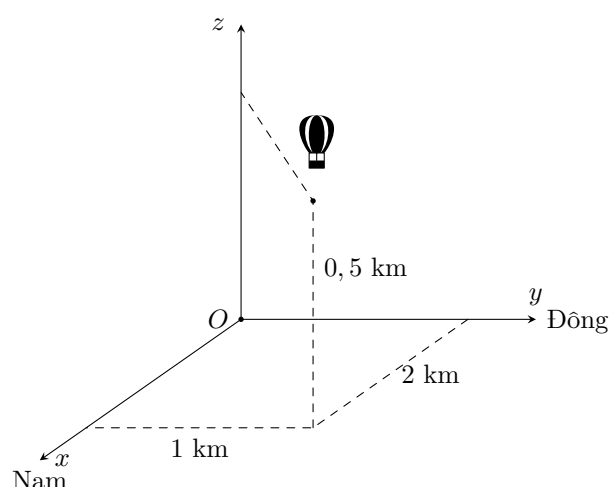
Để theo dõi hành trình của một chiếc máy bay, ta có thể lập hệ tọa độ  $Oxyz$  có gốc  $O$  trùng với vị trí của trung tâm kiểm soát không lưu, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất (được coi là phẳng) với trục  $Ox$  hướng về phía tây, trục  $Oy$  hướng về phía nam và trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên trời (Hình bên). Sau khi cất cánh và đạt độ cao nhất định, chiếc máy bay duy trì hướng bay về phía nam với tốc độ không đổi là 890 km/h trong nửa giờ. Xác định tọa độ của vectơ biểu diễn độ dịch chuyển của chiếc máy bay trong nửa giờ đó đối với hệ tọa độ đã chọn, biết rằng đơn vị đo trong không gian  $Oxyz$  được lấy theo kilômét.



**Ví dụ 24.** Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômet), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm  $A(800; 500; 7)$  đến điểm  $B(940; 550; 8)$  trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là gì?

**Ví dụ 25.**

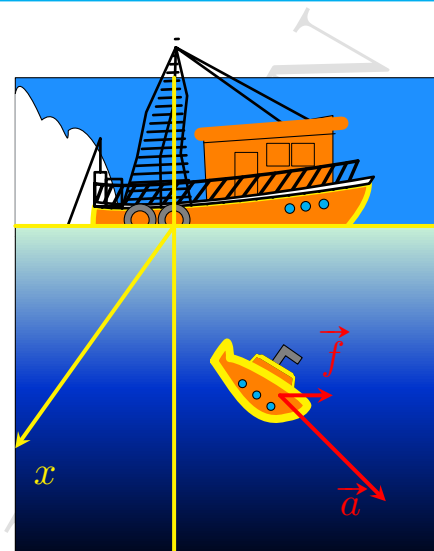
Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km. Chọn hệ trục  $Oxyz$  với gốc  $O$  đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất với trục  $Ox$  hướng về phía nam, trục  $Oy$  hướng về phía đông và trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên trời (Hình bên), đơn vị đo lấy theo kilômet.



- Tìm tọa độ của mỗi chiếc khinh khí cầu đối với hệ tọa độ đã chọn.
- Xác định khoảng cách giữa hai khinh khí cầu (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

**Ví dụ 26.**

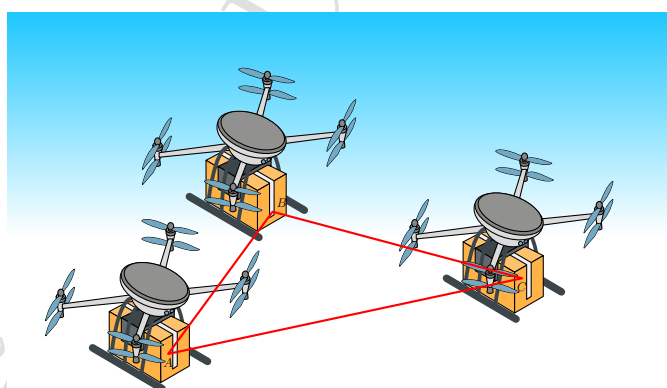
Một thiết bị thăm dò đáy biển (Hình bên) được đẩy bởi một lực  $\vec{f} = (5; 4; -2)$  (đơn vị: N) giúp thiết bị thực hiện độ dời  $\vec{a} = (70; 20; -40)$  (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực  $\vec{f}$ .



### Ví dụ 27.

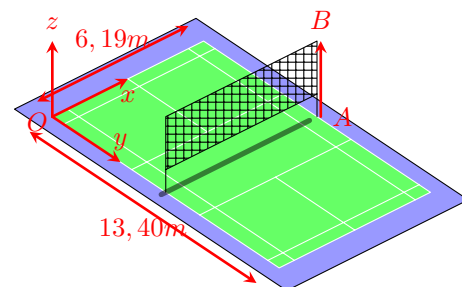
Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian  $Oxyz$ , một đội gồm ba drone giao hàng  $A, B, C$  đang có tọa độ là  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(5; 7; 9)$ ,  $C(9; 11; 4)$ . Tính:

- Các khoảng cách giữa mỗi cặp drone giao hàng.
- Góc  $\widehat{BAC}$ .



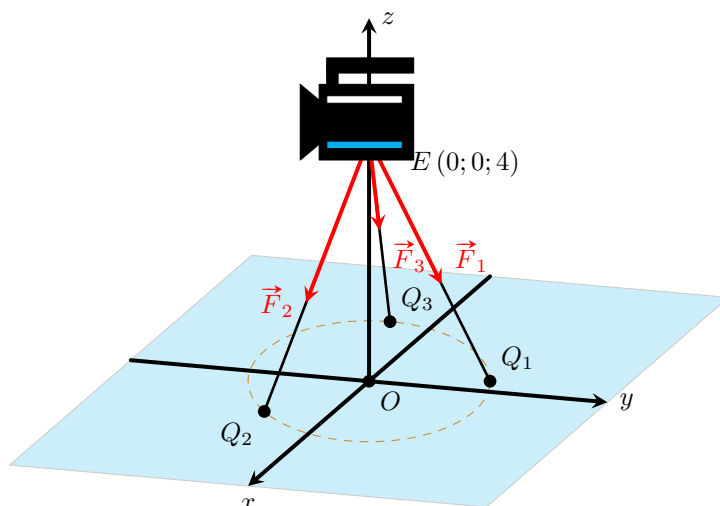
### Ví dụ 28.

Hình bên mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Ta chọn hệ trục  $Oxyz$  cho sân đó như ở hình bên (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử  $AB$  là một trụ cầu lông để căng lưới. Hãy xác định tọa độ của vectơ  $\overrightarrow{AB}$ .



### Ví dụ 29.

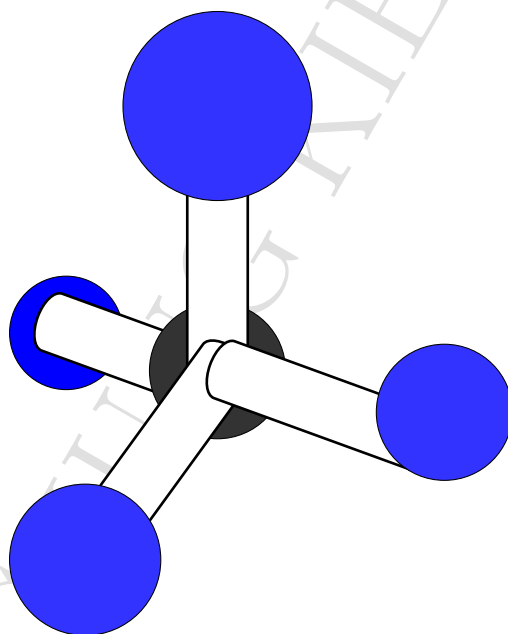
Một chiếc máy quay phim ở đài truyền hình được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt  $P(0; 0; 4)$  và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là  $Q_1(0; -1; 0)$ ,  $Q_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ ,  $Q_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ . Biết trọng lượng của máy quay là 360 N. Tìm tọa độ các lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  tác dụng lên giá đỡ.



## 2 Bài tập tự luận

### Bài 17.

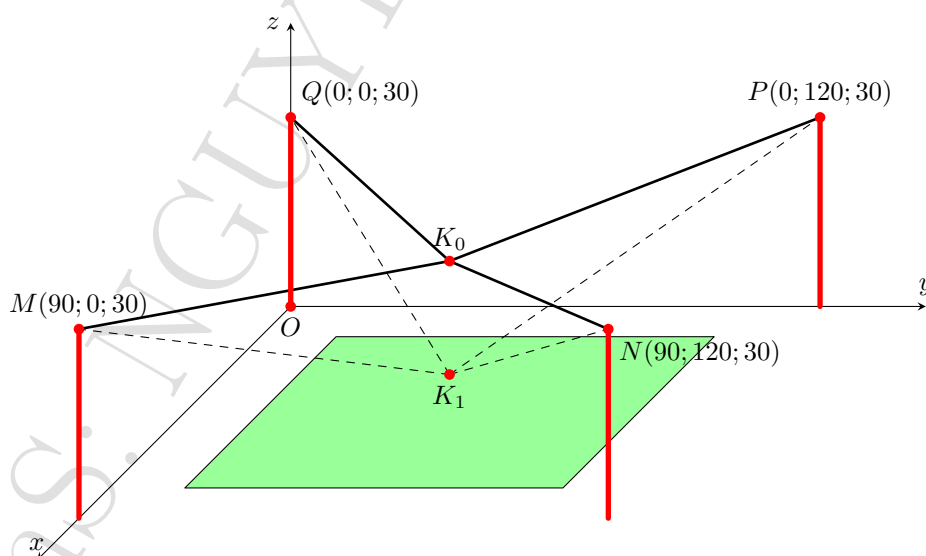
Cho biết bốn đoạn thẳng nối từ một đỉnh của tứ diện đến trọng tâm mặt đối diện luôn cắt nhau tại một điểm gọi là trọng tâm của tứ diện đó. Một phân tử metan  $\text{CH}_4$  được cấu tạo bởi bốn nguyên tử hydrogen ở các đỉnh của một tứ diện đều và một nguyên tử carbon ở trọng tâm của tứ diện. Góc liên kết là góc tạo bởi liên kết  $\text{H} - \text{C} - \text{H}$  là góc giữa các đường nối nguyên tử carbon với hai trong số các nguyên tử hydrogen. Chứng minh rằng góc liên kết này gần bằng  $109,5^\circ$ .



**Bài 18.** Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn. Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$  (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm  $M(90; 0; 30)$ ,  $N(90; 120; 30)$ ,  $P(0; 120; 30)$ ,  $Q(0; 0; 30)$  (Hình dưới). Giả sử  $K_0$  là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và  $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$ . Để theo dõi quả bóng đến vị trí  $A$ , camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm  $K_1$  cao độ bằng 19.

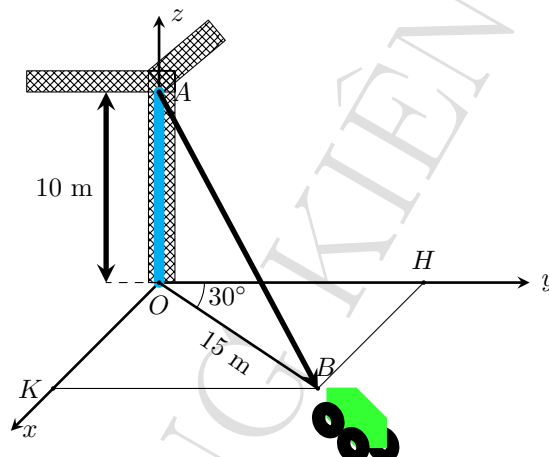
(Nguồn: <https://www.abiturloesung.de>; Abitur Bayern 2016 Geometrie VI)

Tìm tọa độ của các điểm  $K_0, K_1$  và của vectơ  $\overrightarrow{K_0K_1}$ .



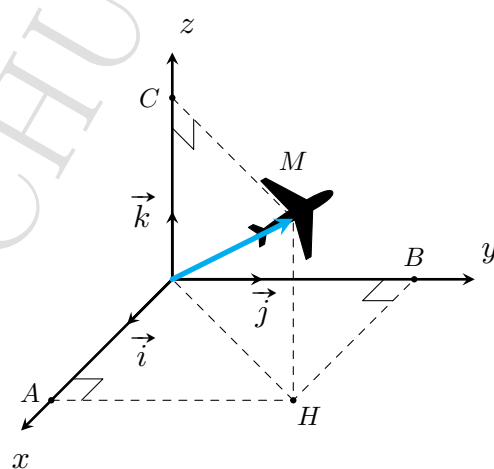
### Bài 19.

Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp  $AB$  trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ  $Oxyz$  như hình bên với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng 1(m). Tìm tọa độ của vectơ  $\overrightarrow{AB}$ .



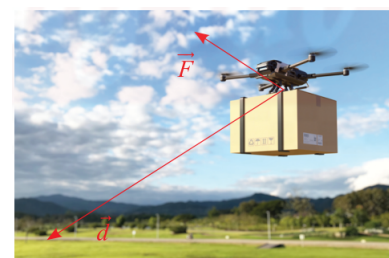
### Bài 20.

Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm  $M$  trong không gian  $Oxyz$  như hình bên. Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  xuống mặt phẳng  $(Oxy)$ . Cho biết  $OM = 50$ ,  $(\vec{i}, \overrightarrow{OH}) = 64^\circ$ ,  $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}) = 48^\circ$ . Tìm tọa độ của điểm  $M$ .



### Bài 21.

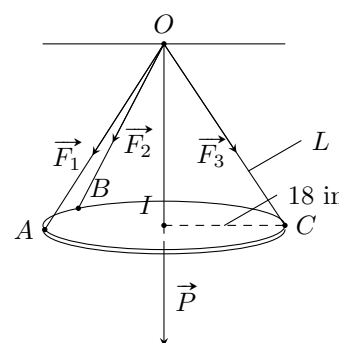
Tính công sinh bởi lực  $\vec{F} = (20; 30; -10)$  (đơn vị: N) tạo bởi một drone giao hàng (Hình 7) khi thực hiện một độ dịch chuyển  $\vec{d} = (150; 200; 100)$  (đơn vị: m).



Hình 7

### Bài 22.

Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm  $O$  trên trần nhà lần lượt buộc vào ba điểm  $A, B, C$  trên đèn tròn sao cho tam giác  $ABC$  đều (Hình vẽ bên). Độ dài của ba đoạn dây  $OA, OB, OC$  đều bằng  $L$ . Trọng lượng của chiếc đèn là 24 N và bán kính của chiếc đèn là 18 in (1 inch = 2,54 cm). Gọi  $F$  là độ lớn của các lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  trên mỗi sợi dây. Khi đó  $F = F(L)$  là một hàm số với biến số là  $L$ .

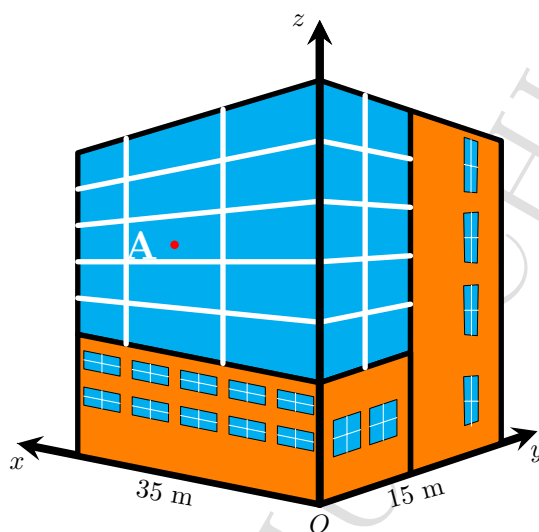


- Xác định công thức tính hàm số  $F = F(L)$ .
- Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số  $F = F(L)$ .
- Tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây, biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 10 N.



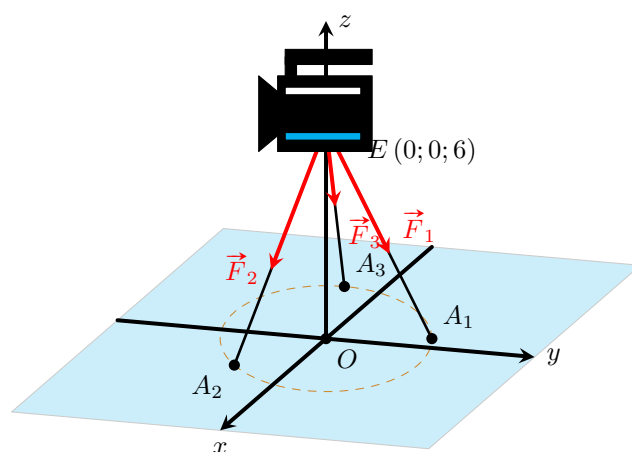
**Bài 23.** Một tòa nhà có dạng hình hộp chữ nhật với kích thước chiều dài 35 m, chiều rộng 15 m, chiều cao 28 m. Người ta định vị các vị trí trong tòa nhà dựa vào một hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ.

- Chị Hương đang đứng ở vị trí  $A(20; 5; 20)$  và di chuyển đến thang máy để xuống sảnh chờ đón khách. Biết vị trí vào thang máy có hoành độ  $x = 15$  và tung độ  $y = 3$ . Hỏi chị Hương mất bao nhiêu giây để di chuyển, nếu từ vị trí  $A$  có thể đi thẳng đến cửa thang máy và chị ấy đi bộ với tốc độ 1,5m/s?
- Chị Hương vừa đặt một bộ phát sóng wifi trong phòng làm việc của mình tại vị trí có tọa độ  $(20; 5; 20)$ . Do yêu cầu của công việc, sáng nay chị Hương phải đứng ở bàn lễ tân có tọa độ  $(5; 0; 0)$  để đón khách thì điện thoại của chị có bắt được sóng wifi phát ra từ phòng làm việc của mình hay không? Biết vùng phủ sóng bộ phát wifi nói trên có bán kính 30 mét.



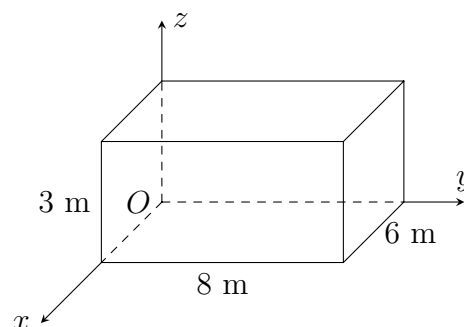
**Bài 24.**

Một chiếc máy quay được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt  $E(0; 0; 6)$  và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là  $A_1(0; 1; 0)$ ,  $A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$ ,  $A_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$ . Biết rằng trọng lượng của chiếc máy là 300 N (hình vẽ). Tìm tọa độ của các lực tác dụng lên giá đỡ  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ .



**Bài 25.**

Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 8 m, chiều rộng là 6 m và chiều cao là 3 m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ  $Oxyz$  có gốc  $O$  trùng với một góc phòng và mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét (Hình bên). Hãy tìm tọa độ của điểm treo đèn.

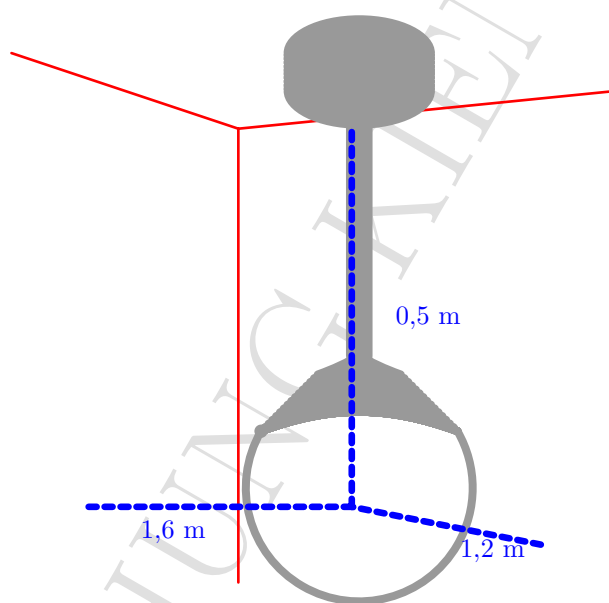




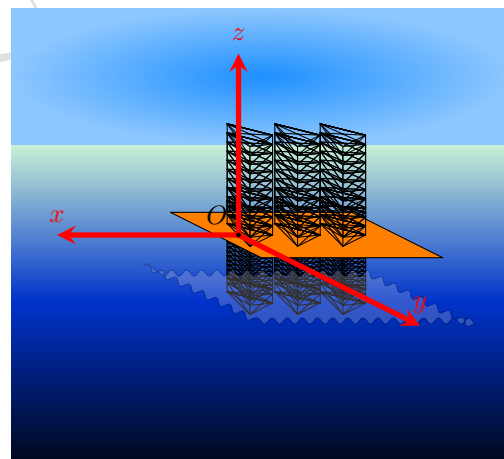
**Bài 26.**

Hình bên minh họa một chiếc đèn được treo cách trần nhà là 0,5 m, cách hai tường lần lượt là 1,2 m và 1,6 m. Hai bức tường vuông góc với nhau và cùng vuông góc với trần nhà. Người ta di chuyển chiếc đèn đó đến vị trí mới các trần nhà là 0,4 m, cách hai tường đều là 1,5 m.

- Lập một hệ trục tọa độ  $Oxyz$  phù hợp và xác định tọa độ của bóng đèn lúc đầu và sau khi di chuyển.
- Vị trí mới của bóng đèn cách vị trí ban đầu là bao nhiêu mét? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

**Bài 27.**

Trong không gian, xét hệ tọa độ  $Oxyz$  có gốc  $O$  trùng với vị trí của một giàn khoan trên biển, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt biển (được coi là phẳng) với trục  $Ox$  hướng về phía tây, trục  $Oy$  hướng về phía nam và trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên trời (Hình bên). Đơn vị đo trong không gian  $Oxyz$  lấy theo ki-lô-mét. Một chiếc ra-đa đặt tại giàn khoan có phạm vi theo dõi là 30 km. Hỏi ra-đa có thể phát hiện được một chiếc tàu thám hiểm có tọa độ là  $(25; 15; -10)$  đối với hệ tọa độ nói trên hay không? Hãy giải thích vì sao.

**3****Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn****Câu 74.**

Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng  $m = 5$  kg được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích  $SA, SB, SC, SD$  sao cho  $SABCD$  là hình chóp tứ giác đều có  $\widehat{ASC} = 60^\circ$ .

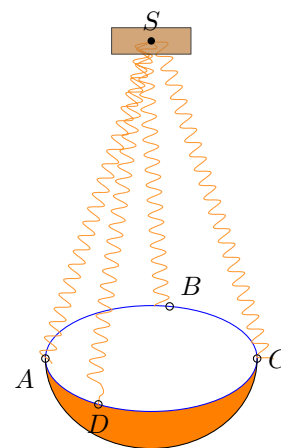
- Sử dụng công thức  $\vec{P} = m\vec{g}$  trong đó  $\vec{g}$  là vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn  $10 \text{ m/s}^2$ , tìm độ lớn của trọng lực  $\vec{P}$  tác động lên chiếc đèn chùm.
- Tìm độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích.

**A.** 60 N và  $\frac{5\sqrt{3}}{3}$  N.

**B.** 45 N và  $\frac{55\sqrt{3}}{3}$  N.

**C.** 40 N và  $\frac{35\sqrt{3}}{3}$  N.

**D.** 50 N và  $\frac{25\sqrt{3}}{3}$  N.



**Câu 75.** Ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc  $100^\circ$  và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4 N. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên.

- A.  $F = OE \approx 26 \text{ N}$ . B.  $F = OE \approx 24 \text{ N}$ . C.  $F = OE \approx 22 \text{ N}$ . D.  $F = OE \approx 28 \text{ N}$ .

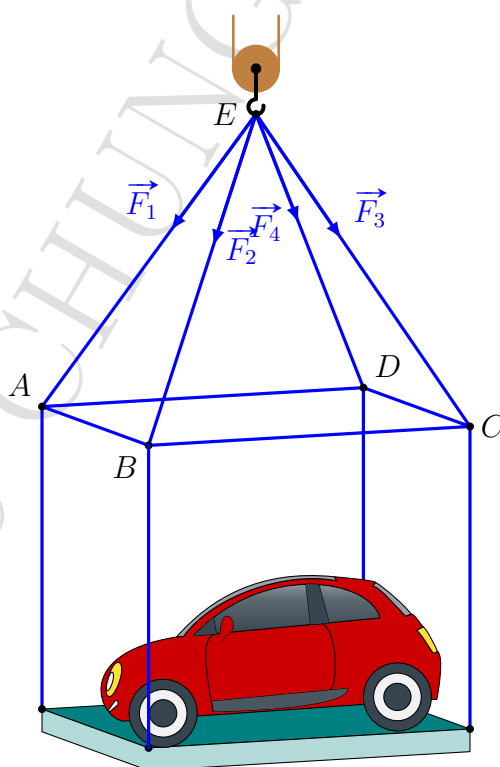
**Câu 76.** Theo định luật II Newton (Vật lý 10 - Chân trời sáng tạo, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2023, trang 60): Gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật  $\vec{F} = m\vec{a}$ , trong đó  $\vec{a}$  là vectơ gia tốc ( $\text{m/s}^2$ ),  $\vec{F}$  là vectơ lực (N) tác dụng lên vật,  $m$  (kg) là khối lượng của vật. Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng 0,5 kg một gia tốc  $50 \text{ m/s}^2$  thì cần một lực đá có độ lớn là bao nhiêu?

- A. 5 N. B. 15 N. C. 25 N. D. 35 N.

**Câu 77.**

Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật  $ABCD$ , mặt phẳng  $(ABCD)$  song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc  $E$  của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp  $EA, EB, EC, ED$  có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng  $(ABCD)$  một góc bằng  $60^\circ$ . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng các lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  đều có cường độ là 4700 N và trọng lượng của khung sắt là 3000 N.

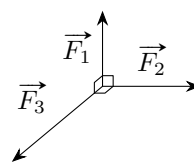
- A. 13821 N. B. 12381 N. C. 13281 N. D. 13218 N.



**Câu 78.**

Ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc nhau và có độ lớn lần lượt là 2 N, 3 N, 4 N. Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho.

- A.  $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3| = \sqrt{19} \text{ N}$ . B.  $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3| = \sqrt{29} \text{ N}$ .  
C.  $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3| = \sqrt{59} \text{ N}$ . D.  $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3| = \sqrt{37} \text{ N}$ .



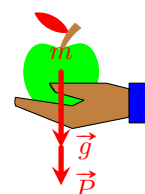
## 4

### Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 79.**

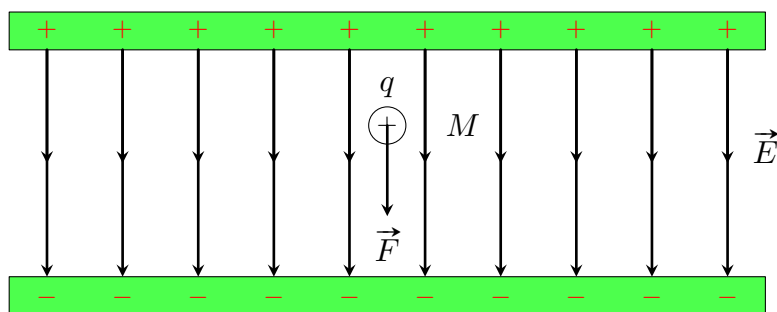
Nếu một vật có khối lượng  $m$  (kg) thì lực hấp dẫn  $\vec{P}$  của Trái Đất tác dụng lên vật được xác định theo công thức  $\vec{P} = m\vec{g}$ , trong đó  $\vec{g}$  là gia tốc rơi tự do có độ lớn  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Tính độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên một quả táo có khối lượng 102 gam (Hình bên).

KQ:

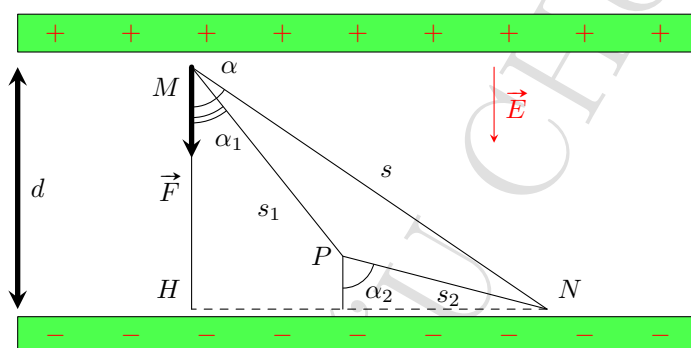


**Câu 80.** Trong điện trường đều, lực tĩnh điện  $\vec{F}$  (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích  $q$  (đơn vị: C) được tính theo công thức  $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ , trong đó  $\vec{E}$  là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi  $q = 10^{-9} \text{ C}$  và độ lớn điện trường  $E = 10^5 \text{ N/C}$ .

KQ:



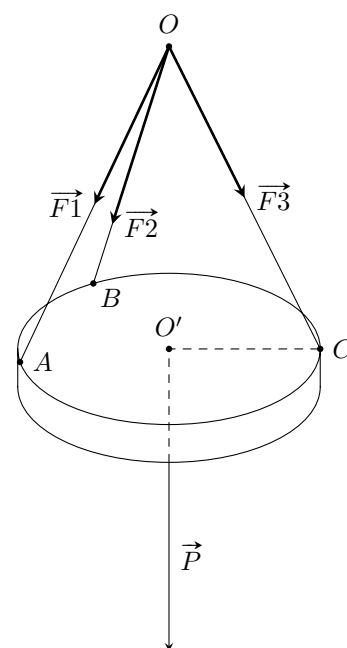
**Câu 81.** Một lực tĩnh điện  $\vec{F}$  tác động lên điện tích điểm  $M$  trong điện trường đều làm cho  $M$  dịch chuyển theo đường gấp khúc  $MNP$ . Biết  $q = 2 \cdot 10^{-12}$  C, vectơ điện trường có độ lớn  $E = 1,8 \cdot 10^5$  N/C và  $d = MH = 5$  mm. Công sinh bởi lực tĩnh điện  $\vec{F}$  là  $A = a \cdot 10^{-7}$  J. Tìm  $a$ . KQ:



**Câu 82.**

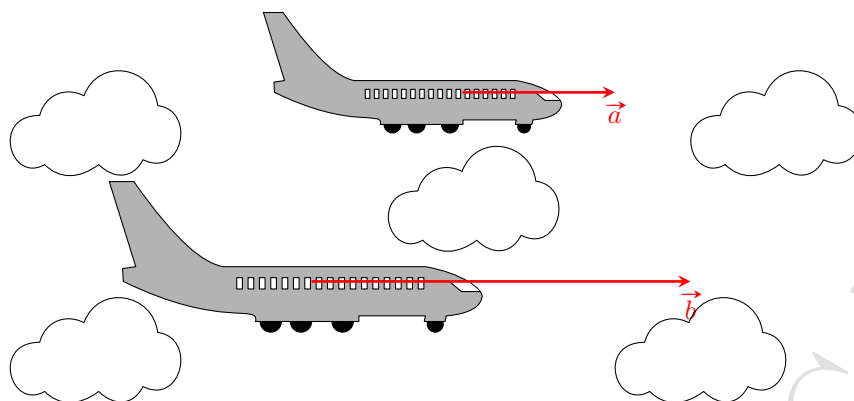
Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn, xuất phát từ điểm  $O$  trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm  $A, B, C$  trên đèn tròn sao cho các lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  lần lượt trên mỗi dây  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc với nhau và  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15$  (N). Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó. (Làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ:



**Câu 83.** Cho biết máy bay  $A$  đang bay với vectơ vận tốc  $\vec{a} = (300; 200; 400)$  (đơn vị: km/h). Máy bay  $B$  bay cùng hướng và có tốc độ gấp ba lần tốc độ của máy bay  $A$ .

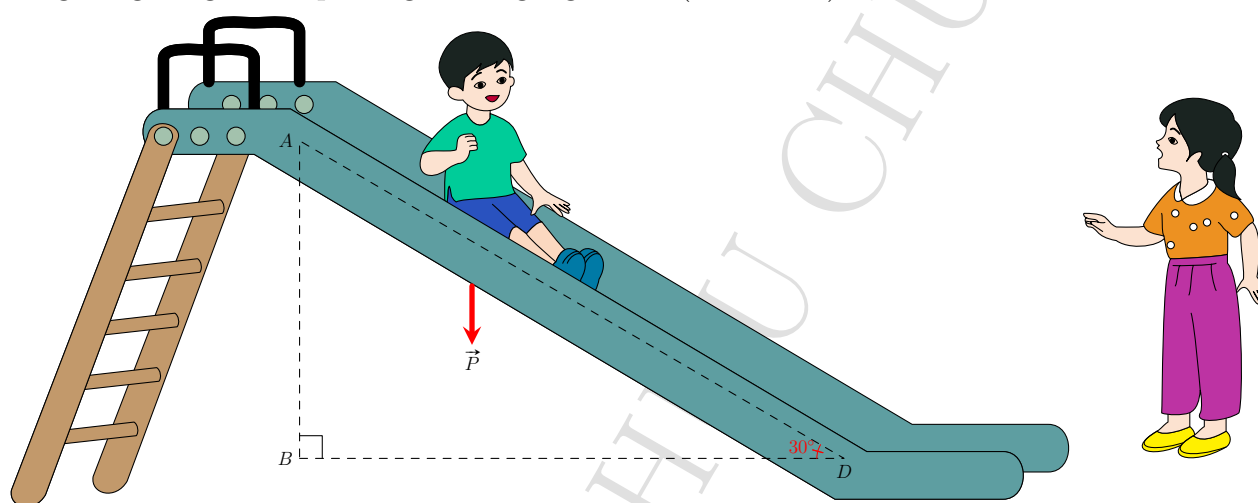
- a) Tìm toạ độ vectơ vận tốc  $\vec{b}$  của máy bay  $B$ .    b) Tính tốc độ của máy bay  $B$ .



KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 84 (Mức độ 1).** Một em nhỏ cân nặng  $m = 25$  kg trượt trên cầu trượt dài 3,5 m. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là  $30^\circ$  (Hình dưới).



- Tính độ lớn của trọng lực  $\vec{P} = m\vec{g}$  tác dụng lên em nhỏ, cho biết vectơ gia tốc rơi tự do  $\vec{g}$  có độ lớn là  $g = 9,8\text{m/s}^2$ .
- Cho biết công  $A(J)$  sinh bởi một lực  $\vec{F}$  có độ dịch chuyển  $\vec{d}$  được tính bởi công thức  $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$ . Hãy tính công sinh bởi trọng lực  $\vec{P}$  khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt.

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

## THẦY KIÊN TOÁN: ————— DẠY THẬT - HỌC THẬT - GIÁ TRỊ THẬT —————

## K12 – CHƯƠNG 2

## §4. ĐỀ ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG II

## A. ĐỀ ÔN TẬP SỐ 1

## 1 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ là  $\vec{u} = (2; 1; -1)$  và  $\vec{v} = (1; 3; 1)$ . Toạ độ của vectơ  $\vec{u} + 2\vec{v}$  tương ứng là

- A.  $(3; 4; 0)$ . B.  $(1; -2; -2)$ . C.  $(4; 7; 1)$ . D.  $(5; 5; -1)$ .

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A$  thỏa mãn  $\vec{OA} = 2\vec{i} + \vec{j}$ , với  $\vec{i}, \vec{j}$  là hai vectơ đơn vị trên hai trục toạ độ  $Ox, Oy$ . Toạ độ điểm  $A$  là

- A.  $A(2; 1; 0)$ . B.  $A(0; 2; 1)$ . C.  $A(0; 1; 1)$ . D.  $A(1; 1; 1)$ .

**Câu 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $I(2; 3; -4)$ . Khoảng cách từ  $I$  đến trục  $Ox$  bằng

- A. 2. B. 5. C.  $\sqrt{13}$ . D.  $2\sqrt{5}$ .

**Câu 4.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (1; 0; -1)$ ,  $\vec{v} = (2; 1; -2)$ . Tích vô hướng  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  bằng

- A. 0. B. 1. C. 4. D. 2.

**Câu 5.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(2; -1; 0)$  và điểm  $B(3; 1; 1)$ . Toạ độ điểm đối xứng với  $A$  qua  $B$  là

- A.  $(1; -2; -4)$ . B.  $(0; 3; -1)$ . C.  $(4; 3; 2)$ . D.  $(0; -1; 3)$ .

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(1; 2; 1)$ ,  $B(-3; 0; 3)$ ,  $C(2; 4; -1)$ . Tìm toạ độ điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.

- A.  $D(6; -6; 3)$ . B.  $D(6; 6; 3)$ . C.  $D(6; -6; -3)$ . D.  $D(6; 6; -3)$ .

**Câu 7.** Cho tam giác  $ABC$  biết  $A(2; -1; 3)$  và trọng tâm của tam giác có toạ độ là  $G(2; 1; 0)$ . Khi đó  $\vec{AB} + \vec{AC}$  có toạ độ là

- A.  $(0; -9; 9)$ . B.  $(0; 6; 9)$ . C.  $(0; 9; -9)$ . D.  $(0; 6; -9)$ .

**Câu 8.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(2; -1; 6)$ ,  $B(-3; -1; -4)$ ,  $(5; -1; 0)$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $\triangle ABC$  cân. B.  $\triangle ABC$  có 3 góc nhọn.  
C.  $\triangle ABC$  vuông. D.  $\triangle ABC$  đều.

**Câu 9.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (2; m + 1; -1)$  và  $\vec{b} = (1; -3; 2)$ . Với giá trị nào của  $m$  sau đây thì  $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = 3$ ?

- A. 4. B. 0. C. 2. D. -3.

**Câu 10.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(-1; -2; 3)$ ,  $B(0; 3; 1)$ ,  $C(4; 2; 2)$ . Cosin của góc  $\widehat{BAC}$  bằng

- A.  $\frac{9}{2\sqrt{35}}$ . B.  $-\frac{9}{\sqrt{35}}$ . C.  $-\frac{9}{2\sqrt{35}}$ . D.  $\frac{9}{\sqrt{35}}$ .

**Câu 11.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(2; -1; 3)$ ,  $C(-4; 7; 5)$ . Toạ độ chân đường phân giác trong góc  $B$  của tam giác  $ABC$  là

- A.  $(-2; 11; 1)$ . B.  $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$ . C.  $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$ . D.  $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$ .

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(0; 0; -1)$ ,  $B(-1; 1; 0)$ ,  $C(1; 0; 1)$ . Tìm điểm  $M$  sao cho  $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

- A.  $M\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right)$ . B.  $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right)$ . C.  $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; 2\right)$ . D.  $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{2}; -1\right)$ .

## 2 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 13.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vectơ  $\overrightarrow{OA} = (2; -1; 5)$  và điểm  $B(5; -5; 7)$ .

| Phát biểu                                                                                                 | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tọa độ của điểm $A$ là $(2; -1; 5)$ .                                                                  |   |   |
| b) Gọi $C(a; b; c)$ thỏa mãn $\triangle ABC$ nhận $G(1; 1; 1)$ làm trọng tâm. Khi đó $a + b + c = -4$ .   |   |   |
| c) Nếu $A, B, M(x; y; 1)$ thẳng hàng thì tổng $x + y = 3$ .                                               |   |   |
| d) Cho $N \in (Oxy)$ để $\triangle ABN$ vuông cân tại $A$ . Tổng hoành độ và tung độ của điểm $N$ bằng 3. |   |   |

**Câu 14.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 3; 4)$  và  $B(2; 3; -1)$ .

| Phát biểu                                                                                                                                                                                                            | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Trọng tâm của tam giác $OAB$ là $G(1; 2; 1)$ .                                                                                                                                                                    |   |   |
| b) Khoảng cách giữa hai điểm $A$ và $B$ là $\sqrt{29}$ .                                                                                                                                                             |   |   |
| c) Biết $C(a; b; c)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $OABC$ . Khi đó giá trị $a + b + c = -4$ .                                                                                                                    |   |   |
| d) Gọi $S$ là tập hợp các giá trị của tham số $m$ để $D(m; m + 2; 1)$ thỏa mãn góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{BD}$ là $45^\circ$ . Khi đó tổng các phần tử của $S$ là $\frac{51}{5}$ . |   |   |

**Câu 15.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\triangle ABC$  có  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(-2; 4; 4)$  và  $C(4; 0; 5)$ .

| Phát biểu                                                                                                                                                        | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB} = (-3; 2; 1)$ .                                                                                                             |   |   |
| b) Trung điểm $I$ của đoạn thẳng $BC$ có tọa độ là $(1; 2; 4)$ .                                                                                                 |   |   |
| c) Điểm $N$ thỏa mãn $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NC}$ có tọa độ là $(-11; 10; 4)$ .                                            |   |   |
| d) Cho $G$ là trọng tâm $\triangle ABC$ . Biết điểm $M$ nằm trên mặt phẳng $(Oxy)$ sao cho độ dài đoạn thẳng $GM$ ngắn nhất. Khi đó độ dài đoạn thẳng $GM = 4$ . |   |   |

**Câu 16.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $M(2; 3; -1)$ ,  $N(-1; 1; 1)$ .

| Phát biểu                                                                                 | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hình chiếu của điểm $M$ trên trục $Oy$ có tọa độ là $(-2; 3; 1)$ .                     |   |   |
| b) Gọi $E$ là điểm đối xứng của điểm $M$ qua $N$ . Tọa độ của điểm $E$ là $(-4; -1; 3)$ . |   |   |
| c) Cho $P(1; m - 1; 3)$ . Tam giác $MNP$ vuông tại $N$ khi và chỉ khi $m = 1$ .           |   |   |



| Phát biểu                                                                                                                                                   | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| d) Điểm $I(a; b; c)$ nằm trên mặt phẳng $(Oxy)$ thỏa mãn $T =  3\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IN} $ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $2a + b + c = 9$ . |   |   |

### 3 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 17.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $MNPQ.M'N'P'Q'$  với  $M(1; 0; 0)$ ,  $N(2; -1; 1)$ ,  $Q(0; 1; 0)$ ,  $M'(1; 2; 1)$ . Biết tọa độ điểm  $P'(a; b; c)$ . Khi đó giá trị tổng  $a + b + c$  bằng bao nhiêu?

KQ:

**Câu 18.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho 3 điểm  $M(2; 3; -1)$ ,  $N(-1; 1; 1)$ ,  $P(1; m - 1; 2)$ . Với giá trị nào của  $m$  thì tam giác  $MNP$  vuông tại  $N$ ?

KQ:

**Câu 19.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{u} = (1; 1; -2)$ ,  $\vec{v} = (1; 0; m)$ . Với  $m = m_0$  thì góc giữa hai vectơ  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  bằng  $45^\circ$ . Khi đó giá trị  $10m_0$  bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?

KQ:

**Câu 20.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(3; 1; 0)$ ,  $B(2; 1; -1)$ ,  $C(x; y; -1)$  sao cho tam giác  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $A$ . Khi đó tổng  $x + y$  bằng bao nhiêu?

KQ:

**Câu 21.** Trong không gian  $Oxyz$  cho các điểm  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(3; 2; 4)$ ,  $C(0; 5; 4)$ . Xét điểm  $M$  thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho  $P = MA^2 + MB^2 + 2MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  đó.

KQ:

**Câu 22.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{a} = (1; -1; 0)$  và hai điểm  $A(-4; 7; 3)$ ,  $B(4; 4; 5)$ . Hai điểm  $M$ ,  $N$  thay đổi thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho  $\overrightarrow{MN}$  cùng hướng với  $\vec{a}$  và  $MN = 5\sqrt{2}$ . Giá trị lớn nhất của  $|AM - BN|$  bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

KQ:

## B. ĐỀ ÔN TẬP SỐ 2

### 1 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ là  $\vec{a} = (1; 2; 3)$  và  $\vec{b} = (4; 5; 6)$ . Tọa độ của vectơ  $\vec{a} + \vec{b}$  tương ứng là

- A.  $(5; 7; 9)$ . B.  $(3; 7; 9)$ . C.  $(5; 3; 9)$ . D.  $(3; 5; 9)$ .

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ là  $\vec{a} = (2; -1; 4)$ . Tọa độ của vectơ  $-\vec{a}$  là

- A.  $(-2; 1; -4)$ . B.  $(2; -1; -4)$ . C.  $(-2; -1; 4)$ . D.  $(2; 1; 4)$ .

**Câu 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ là  $\vec{u} = (1; 2; 3)$  và  $\vec{v} = (4; -5; 6)$ . Tìm tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ .

- A. 12. B. 20. C. 14. D. 28.

**Câu 4.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; 2; 3)$  và điểm  $B(3; 4; 5)$ . Tọa độ điểm  $C$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  là

- A.  $(2; 3; 4)$ . B.  $(1; 3; 5)$ . C.  $(2; 4; 3)$ . D.  $(2; 2; 3)$ .

**Câu 5.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(3; 2; -5)$ ,  $B(1; 2; 4)$ ,  $C(2; 5; -2)$ . Tọa độ trọng tâm  $G$  của  $\triangle ABC$  là

- A.  $G(6; 9; -3)$ . B.  $G(2; 3; -1)$ . C.  $G(2; 3; 1)$ . D.  $G(6; 9; 3)$ .



**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ là  $\vec{a} = (1; 2; 3)$  và  $\vec{b} = (2; -1; 1)$ . Tìm biểu thức tọa độ của vectơ  $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ .

- A.  $(-1; 8; 7)$ . B.  $(3; 4; 5)$ . C.  $(-1; 7; 7)$ . D.  $(4; 5; 6)$ .

**Câu 7.** Trong không gian  $Oxyz$ , điểm đối xứng với điểm  $M(2; 2; -1)$  qua mặt phẳng  $(Oyz)$  là

- A.  $M'(2; -2; 1)$ . B.  $M'(-2; 0; 0)$ . C.  $M'(-2; -2; 1)$ . D.  $M'(-2; 2; -1)$ .

**Câu 8.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M(1; -2; 3)$ . Điểm đối xứng với  $M$  qua trục  $Oy$  là

- A.  $M_2(1; 2; 3)$ . B.  $M_3(-1; 2; -3)$ . C.  $M_4(-1; -2; -3)$ . D.  $M_1(1; -2; -3)$ .

**Câu 9.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  cho tam giác  $ABC$ , với  $A(1; 2; 1)$ ,  $B(-3; 0; 3)$ ,  $C(2; 4; -1)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.

- A.  $D(6; 6; -3)$ . B.  $D(6; -6; 3)$ . C.  $D(6; 6; 3)$ . D.  $D(6; -6; -3)$ .

**Câu 10.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ là  $\vec{a} = (1; -2; 3)$  và  $\vec{b} = (-2; 1; 2)$ . Tích vô hướng  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$  bằng

- A. 12. B. 2. C. 11. D. 10.

**Câu 11.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ là  $\vec{a} = (1; 0; 0)$  và  $\vec{b} = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ . Góc giữa hai vectơ này là

- A.  $30^\circ$ . B.  $45^\circ$ . C.  $60^\circ$ . D.  $90^\circ$ .

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 2; 1)$ ;  $B(2; -1; 3)$  và điểm  $M(a; b; 0)$  sao cho  $MA^2 + MB^2$  nhỏ nhất. Giá trị của  $a + b$  là

- A. 3. B. -2. C. 1. D. 2.

## 2 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 13.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(1; -2; 3)$ ,  $B(-2; 1; 2)$ ,  $C(3; -1; 2)$ .

| Phát biểu                                                                                                  | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\vec{AB} = (-3; 3; 1)$ .                                                                               |   |   |
| b) $\vec{AB} = 3\vec{AC}$ .                                                                                |   |   |
| c) Ba điểm $A, B, C$ không thẳng hàng.                                                                     |   |   |
| d) Tọa độ chân đường cao vẽ từ $A$ của tam giác $ABC$ là $\left(-\frac{47}{29}; \frac{13}{29}; 2\right)$ . |   |   |

**Câu 14.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(1; 3; 5)$ ,  $B(1; 1; 3)$ ,  $C(4; -2; 3)$ .

| Phát biểu                                                                                                                                 | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tọa độ trung điểm của $BC$ là $\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}; 3\right)$ .                                                            |   |   |
| b) Độ dài đoạn thẳng $BC$ là $3\sqrt{2}$ .                                                                                                |   |   |
| c) Côsin $\widehat{BAC}$ bằng $\frac{7\sqrt{19}}{38}$ .                                                                                   |   |   |
| d) Gọi $D$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$ . Tọa độ hình chiếu của trọng tâm tam giác $ABD$ lên mặt phẳng $Oyz$ là $(2; 0; 0)$ . |   |   |

**Câu 15.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho  $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} - \vec{k}$ , với  $\vec{i}, \vec{k}$  là hai vectơ đơn vị trên hai trục tọa độ  $Ox, Oz$ , hai điểm  $B(-1; 2; 3), C(1; 4; 1)$ .

| Phát biểu                                                                                                                    | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $A(3; 0; -1)$ .                                                                                                           |   |   |
| b) Ba điểm $A, B, C$ thẳng hàng.                                                                                             |   |   |
| c) Điểm $D(a; b; c)$ là điểm đối xứng của với $A$ qua $B$ . Khi đó $a + b + c = 6$ .                                         |   |   |
| d) Điểm $M(m; n; p)$ trên mặt phẳng $(Oxy)$ sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $2m - n + 2024p = 0$ . |   |   |

**Câu 16.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 2; 3), B(2; 1; 5), C(2; 4; 2)$ .

| Phát biểu                                                                                                                                                     | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Tọa độ trung điểm của $AB$ là $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 4\right)$ .                                                                                 |   |   |
| b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (5; 7; 10)$ .                                                                           |   |   |
| c) Góc giữa hai đường thẳng $AB$ và $AC$ bằng $30^\circ$ .                                                                                                    |   |   |
| d) Điểm $I(a; b; c)$ nằm trên mặt phẳng $(Oxz)$ thỏa mãn $T =  3\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} $ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $a - 2b + 2c = 15$ . |   |   |

### 3 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 17.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-1; -1; 1)$  và  $B(3; -1; 1)$ . Điểm  $M(a; b; c)$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$ . Tính  $a - 2b + c$ .

KQ:

**Câu 18.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(0; 1; 3), B(3; 2; 8)$  và  $C(-2; m; 4)$ . Tìm  $m$  để tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

KQ:

**Câu 19.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(-2; 3; 1), B\left(\frac{1}{4}; 0; 1\right), C(2; 0; 1)$ . Điểm  $D(a; b; c)$  là chân đường phân giác trong góc  $A$  của tam giác  $ABC$ . Tính  $2022a + 2023b - 2024c$ .

KQ:

**Câu 20.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(1; 2; 5), B(2; 4; -3), C(3; 3; 1)$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  và  $M$  là điểm thay đổi trên mặt phẳng  $(Oxy)$ . Độ dài  $GM$  ngắn nhất bằng bao nhiêu?

KQ:

**Câu 21.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho các điểm  $E(3; -2; 1), F(7; 18; -7)$ . Điểm  $M(a; b; c)$  thỏa mãn  $\overrightarrow{FM} = 3\overrightarrow{ME}$ . Khi đó  $a - b + c$  bằng bao nhiêu?

KQ:

**Câu 22.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  biết  $A(1; 2; 3), B(0; -1; 4), C(2; 2; 5)$ . Điểm  $M(x_M; y_M; z_M)$  thuộc mặt phẳng  $Oxy$  sao cho biểu thức  $S = MA^2 + MB^2 + MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tính  $P = x_M + y_M + z_M$ .

KQ:

### C. ĐỀ ÔN TẬP SỐ 3

#### 1 Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Khi đó, vectơ  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'}$  bằng

- A.  $\overrightarrow{A'C}$ . B.  $\overrightarrow{AC'}$ . C.  $\overrightarrow{CA'}$ . D.  $\overrightarrow{C'A}$ .

**Câu 2.** Cho điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{OM} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ . Tọa độ của điểm  $M$  là

- A.  $(2; 3; 4)$ . B.  $(3; 4; 2)$ . C.  $(4; 2; 3)$ . D.  $(3; 2; 4)$ .

**Câu 3.** Cho hai điểm  $M(1; -2; 3)$  và  $N(3; 4; -5)$ . Tọa độ của vectơ  $\overrightarrow{NM}$  là

- A.  $(-2; 6; 8)$ . B.  $(2; 6; -8)$ . C.  $(-2; 6; -8)$ . D.  $(-2; -6; 8)$ .

**Câu 4.** Cho hai vectơ  $\vec{u} = (3; -4; 5)$ ,  $\vec{v} = (5; 7; -1)$ . Tọa độ của vectơ  $\vec{u} + \vec{v}$  là

- A.  $(8; 3; 4)$ . B.  $(-2; -11; 6)$ . C.  $(2; 11; -6)$ . D.  $(-8; -3; -4)$ .

**Câu 5.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M(1; 2; 3)$ . Tìm tọa độ hình chiếu  $M$  lên trục  $Ox$

- A.  $(2; 0; 0)$ . B.  $(1; 0; 0)$ . C.  $(3; 0; 0)$ . D.  $(0; 2; 3)$ .

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M(4; -1; 7)$ , Gọi  $M'$  là điểm đối xứng với  $M$  qua trục  $Ox$ . Tính độ dài đoạn  $MM'$ .

- A.  $MM' = 10\sqrt{2}$ . B.  $MM' = 2\sqrt{65}$ . C.  $MM' = 8$ . D.  $MM' = 2\sqrt{17}$ .

**Câu 7.** Cho tam giác  $MNP$  có  $M(0; 2; 1)$ ,  $N(-1; -2; 3)$  và  $P(1; 3; 2)$ . Trọng tâm của tam giác  $MNP$  có tọa độ là

- A.  $(0; 1; 2)$ . B.  $(0; 3; 6)$ . C.  $(0; -3; -6)$ . D.  $(0; -1; -2)$ .

**Câu 8.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 0; 1)$ ,  $B(0; 2; 3)$ ,  $C(2; 1; 0)$ . Độ dài đường trung tuyến  $AM$  là

- A.  $\frac{1}{2}$ . B.  $\frac{\sqrt{11}}{2}$ . C.  $\frac{\sqrt{12}}{2}$ . D.  $\frac{\sqrt{10}}{2}$ .

**Câu 9.** Tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{u} = (1; -2; 3)$  và  $\vec{v} = (3; 4; -5)$  là

- A.  $\sqrt{14} \cdot \sqrt{50}$ . B.  $-\sqrt{14} \cdot \sqrt{50}$ . C. 20. D. -20.

**Câu 10.** Trong không gian  $Oxyz$ , nếu  $\vec{a} = (1; 1; 0)$ ,  $\vec{b} = (1; 1; -3)$  thì  $\cos(\vec{a}, \vec{b})$  bằng

- A.  $\frac{\sqrt{22}}{11}$ . B.  $\frac{11}{2}$ . C.  $\frac{11}{\sqrt{22}}$ . D.  $\frac{2}{11}$ .

**Câu 11.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình bình hành  $ABCD$  có  $A(1; 0; 3)$ ,  $B(2; 3; -4)$ ,  $C(-3; 1; 2)$ . Tọa độ của điểm  $D$  là

- A.  $(-4; -2; 9)$ . B.  $(2; -4; 5)$ . C.  $(-2; 4; -5)$ . D.  $(4; 2; -9)$ .

**Câu 12.** Cho ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  lần lượt có cường độ 2N, 4N, 5N được đặt vào chất điểm  $M$ . Biết rằng góc tạo bởi hai lực bất kỳ trong ba lực đều bằng  $60^\circ$ . Cường độ của hợp lực tác dụng lên  $M$  là

- A. 45N. B.  $\sqrt{45}$ N. C.  $\sqrt{83}$ N. D. 83N.

#### 2 Câu trắc nghiệm đúng sai

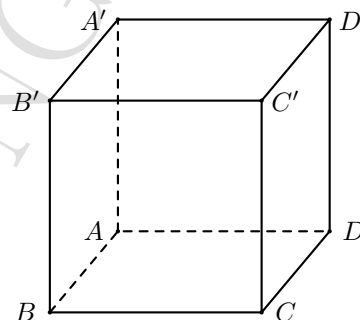
**Câu 13.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $A(2; 0; -3)$ ,  $B(0; -4; 5)$  và  $C(-1; 2; 0)$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                                      | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $G\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ là tọa độ trọng tâm tam giác $ABC$ . |   |   |
| b) Nếu $D$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$ thì $D(-1; 6; 2)$ .                        |   |   |
| c) Chu vi của tam giác $ABC$ nhỏ hơn 20.                                                       |   |   |
| d) Góc $\widehat{BAC}$ là góc tù.                                                              |   |   |

**Câu 14.**

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  như hình vẽ bên. Khi đó

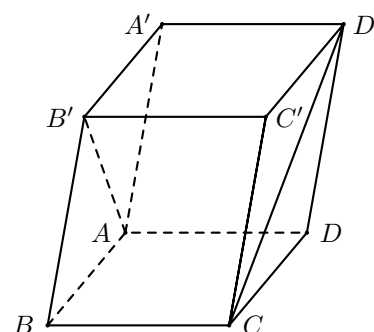
| Phát biểu                                                                                          | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ .     |   |   |
| b) $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ .     |   |   |
| c) $\overrightarrow{B'D} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'B}$ . |   |   |
| d) $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ .     |   |   |

**Câu 15.**

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có tất cả các cạnh đều bằng  $a$  và  $\widehat{ABC} = \widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = 60^\circ$ . Khi đó

| Phát biểu                                                   | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{CD'} = 0$ .  |   |   |
| b) $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB} = a^2$ . |   |   |

| Phát biểu                                                            | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------|---|---|
| c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$ . |   |   |
| d) $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$ .          |   |   |



**Câu 16.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M(2; -5; 4)$ . Khi đó

| Phát biểu                                                                      | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Khoảng cách từ $M$ đến mặt phẳng tọa độ $(xOz)$ bằng 5.                     |   |   |
| b) Khoảng cách từ $M$ đến trục $Oz$ bằng $\sqrt{29}$ .                         |   |   |
| c) Tọa độ điểm $M'$ đối xứng với $M$ qua mặt phẳng $(yOz)$ là $M'(2; 5; -4)$ . |   |   |
| d) Tọa độ điểm $M'$ đối xứng với $M$ qua trục $Oy$ là $M'(-2; -5; -4)$ .       |   |   |

**3****Câu trắc nghiệm trả lời ngắn**

**Câu 17.** Trong không gian với hệ trục  $Oxyz$  cho ba điểm  $A(-1; 2; -3)$ ,  $B(1; 0; 2)$ ,  $C(x; y; -2)$  thẳng hàng. Khi đó  $x + y$  bằng bao nhiêu?

KQ:

**Câu 18.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình thang  $ABCD$  vuông tại  $A$  và  $B$ , ba đỉnh  $A(1; 2; 1)$ ,  $B(2; 0; -1)$ ,  $C(6; 1; 0)$ . Hình thang có diện tích bằng  $6\sqrt{2}$ . Giả sử đỉnh  $D(a; b; c)$ , tính  $a + b - 2c$ ?

KQ:

**Câu 19.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1; 0; 2)$ ,  $B(0; 4; 3)$  và  $C(-2; 1; 2)$ . Độ dài

đường phân giác trong  $AD$  của tam giác  $ABC$  bằng bao nhiêu? (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 20.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(5; 1; 5)$ ,  $B(4; 3; 2)$ ,  $C(-3; -2; 1)$ . Điểm  $I(a; b; c)$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Tính  $a + 2b + c$

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 21.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(4; 0; 0)$ ,  $B(a; b; 0)$ ,  $C(0; 0; c)$  với  $(a, b, c > 0)$  thỏa mãn độ dài đoạn  $AB = 2\sqrt{10}$ ,  $\widehat{AOB} = 45^\circ$  và thể tích khối tứ diện  $OABC$  bằng 8. Tính tổng  $T = a + b + c$ .

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 22.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(-1; 2; 1)$ ,  $C(3; 6; -5)$ . Biết điểm  $M$  thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho  $MA^2 + MB^2 + MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất có tọa độ  $(a; b; 0)$ . Khi đó  $a \cdot b$  bằng bao nhiêu?

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

## D. ĐỀ ÔN TẬP SỐ 4

### 1 Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-1; 2; 3)$  và  $B(3; 0; -2)$ . Tìm tọa độ của vectơ  $\overrightarrow{AB}$ .

- A.**  $\overrightarrow{AB} = (-4; 2; 5)$ .      **B.**  $\overrightarrow{AB} = \left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$ .      **C.**  $\overrightarrow{AB} = (2; 2; 1)$ .      **D.**  $\overrightarrow{AB} = (4; -2; -5)$ .

**Câu 2.** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$ . Khi đó vectơ  $\overrightarrow{AD}$  bằng vectơ nào sau đây?

- A.**  $\overrightarrow{CD}$ .      **B.**  $\overrightarrow{B'C'}$ .      **C.**  $\overrightarrow{A'B'}$ .      **D.**  $\overrightarrow{D'A'}$ .

**Câu 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (1; 1; 0)$  và  $\vec{v} = (2; 0; -1)$ . Tính độ dài  $|\vec{u} + 2\vec{v}|$ .

- A.**  $\sqrt{30}$ .      **B.** 2.      **C.**  $2\sqrt{2}$ .      **D.**  $\sqrt{22}$ .

**Câu 4.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (2; 3; -1)$  và  $\vec{v} = (5; -4; m)$ . Tìm  $m$  để  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

- A.**  $m = -2$ .      **B.**  $m = 2$ .      **C.**  $m = 0$ .      **D.**  $m = 4$ .

**Câu 5.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ , biết rằng  $A(-3; 0; 0)$ ,  $B(0; 2; 0)$ ,  $D(0; 0; 1)$ ,  $A'(1; 2; 3)$ . Tìm tọa độ điểm  $C'$ .

- A.**  $C'(10; 4; 4)$ .      **B.**  $C'(-13; 4; 4)$ .      **C.**  $C'(13; 4; 4)$ .      **D.**  $C'(7; 4; 4)$ .

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(8; 9; 2)$ ,  $B(3; 5; 1)$ ,  $C(11; 10; 4)$ . Số đo góc  $A$  của tam giác  $ABC$  là

- A.**  $120^\circ$ .      **B.**  $30^\circ$ .      **C.**  $150^\circ$ .      **D.**  $60^\circ$ .

**Câu 7.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (1; 0; -3)$ ,  $\vec{b} = (-1; -2; 0)$ . Giá trị của  $\cos(\vec{a}, \vec{b})$  là

- A.**  $-\frac{1}{\sqrt{10}}$ .      **B.**  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .      **C.**  $\frac{1}{5\sqrt{2}}$ .      **D.**  $-\frac{1}{5\sqrt{2}}$ .

**Câu 8.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{u} = (x; 0; 1)$ ,  $\vec{v} = (\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 0)$ . Tìm  $x$  để góc giữa  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  bằng  $60^\circ$ .

- A.**  $x = 1$ .      **B.**  $x = \pm 1$ .      **C.**  $x = -1$ .      **D.**  $x = 0$ .

**Câu 9.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M$ ,  $N$  theo thứ tự là trung điểm  $AB$  và  $CD$ . Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

**A.**  $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} = 4\overrightarrow{MN}$ .

**B.**  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}$ .

**C.**  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MN}$ .

**D.**  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{MN}$ .

**Câu 10.**

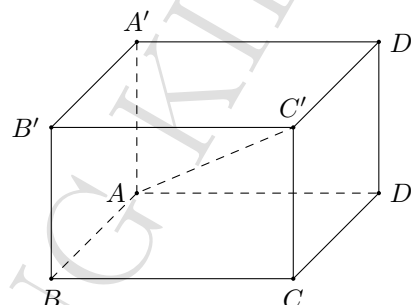
Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Hãy phân tích vectơ  $\overrightarrow{AC'}$  theo các vectơ  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{AA'}$ .

**A.**  $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ .

**B.**  $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'}$ .

**C.**  $\overrightarrow{AC'} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'}$ .

**D.**  $\overrightarrow{AC'} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ .



**Câu 11.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(0; 2; -4)$ ,  $B(-3; 5; 2)$ . Gọi  $M$  là điểm sao cho biểu thức  $MA^2 + 2MB^2$  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó khoảng cách từ  $M$  đến gốc tọa độ là

**A.**  $\sqrt{14}$ .

**B.**  $\frac{3\sqrt{19}}{2}$ .

**C.**  $2\sqrt{5}$ .

**D.**  $\sqrt{62}$ .

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(2; 0; 0)$ ,  $B(0; 3; 1)$ ,  $C(-3; 6; 4)$ . Gọi  $M$  là điểm nằm trên cạnh  $BC$  sao cho  $MC = 2MB$ . Độ dài đoạn  $AM$  bằng

**A.**  $3\sqrt{3}$ .

**B.**  $2\sqrt{7}$ .

**C.**  $\sqrt{30}$ .

**D.**  $\sqrt{29}$ .

**2**

**Bài tập trắc nghiệm đúng sai**

**Câu 13.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $S(4; 2; 2)$  và các điểm  $A(a; 0; 0)$ ,  $B(0; b; 0)$ ,  $C(0; 0; c)$  sao cho hình chóp  $S.ABC$  có các cạnh  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  đôi một vuông góc với nhau. Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                        | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\overrightarrow{SA} = (a - 4; -2; -2)$ , $\overrightarrow{SB} = (-4; b - 2; -2)$ , $\overrightarrow{SC} = (-4; -2; c - 2)$ . |   |   |
| b) $a = -3$ , $b = 6$ , $c = -6$ .                                                                                               |   |   |
| c) $SA = 3$ , $SB = SC = 6$ .                                                                                                    |   |   |
| d) $V_{SABC} = 108$ .                                                                                                            |   |   |

**Câu 14.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 1; 0)$ ,  $B(3; -1; 2)$ ,  $C(-1; 6; 7)$  và điểm  $M(1; 0; m)$ . Đặt  $S = MA^2 + MB^2 + MC^2$ . Khi đó

| Phát biểu                                     | Đ | S |
|-----------------------------------------------|---|---|
| a) Trọng tâm tam giác $ABC$ là $G(1; 2; 3)$ . |   |   |
| b) $GA^2 + GB^2 + GC^2 = 58$ .                |   |   |
| c) $S = MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ .          |   |   |
| d) $S$ nhỏ nhất bằng 1 khi $m = 3$ .          |   |   |

**Câu 15.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 2; 1)$ ,  $B(2; -1; 3)$  và điểm  $M(3; b; 0)$ . Gọi  $I$  là điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ . Đặt  $P = MA^2 - 2MB^2$ . Khi đó

| Phát biểu               | Đ | S |
|-------------------------|---|---|
| a) Điểm $I(3; -4; 5)$ . |   |   |



| Phát biểu                                               | Đ | S |
|---------------------------------------------------------|---|---|
| b) $IA^2 - 2IB^2 = 28$ .                                |   |   |
| c) $P = IM^2 + (IA^2 - 2IB^2)$ .                        |   |   |
| d) $P$ đạt giá trị lớn nhất bằng 53 khi $M(3; -4; 0)$ . |   |   |

**Câu 16.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(-\sqrt{2}; 0; 0)$ ,  $B(\sqrt{2}; 0; 0)$ ,  $C(4; 1; -2)$  và  $D(1; -2; 4)$ . Điểm  $I$  thỏa mãn  $2\vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$ . Điểm  $M$  thay đổi trong mặt phẳng  $Oxy$  thỏa mãn  $MA + MB = 2\sqrt{3}$ . Gọi  $T = 2MC^2 + MD^2$ . Khi đó

| Phát biểu                                            | Đ | S |
|------------------------------------------------------|---|---|
| a) $I(3; 0; 0)$ .                                    |   |   |
| b) Tập hợp các điểm $M$ là một đường elip.           |   |   |
| c) Giá trị nhỏ nhất của đoạn $IM$ bằng 3.            |   |   |
| d) Giá trị nhỏ nhất của $T$ bằng $72 - 18\sqrt{3}$ . |   |   |

### 3 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 17.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (5; 3; -2)$  và  $\vec{b} = (m; -1; m + 3)$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của  $m$  để góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là góc tù? KQ:

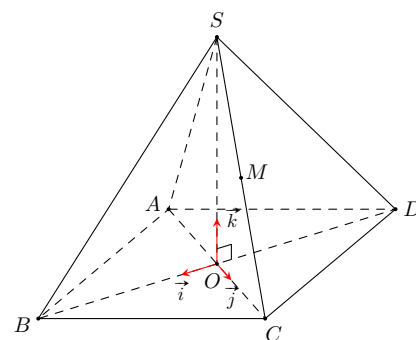
**Câu 18.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2; -3; 5)$ ,  $B(-1; 1; 3)$ . Gọi  $M$  là điểm thuộc đoạn  $AB$  sao cho  $MA = 2MB$ . Tọa độ của  $M(a; b; c)$ , tính  $a + b + c$  (làm tròn kết quả đến hàng phần chục). KQ:

**Câu 19.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(2; 5; 1)$ ,  $B(-2; -6; 2)$ ,  $C(1; 2; -1)$  và điểm  $M(m; m; m)$ . Tìm  $m$  để  $|\vec{MB} - 2\vec{AC}|$  đạt giá trị nhỏ nhất. KQ:

**Câu 20.**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh bằng 5, giao điểm hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  trùng với gốc  $O$ . Các vectơ  $\vec{OB}$ ,  $\vec{OC}$ ,  $\vec{OS}$  lần lượt cùng hướng với  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  và  $OA = OS = 4$  (hình vẽ bên). Giả sử  $\vec{AB} = (a; b; c)$ . Tính  $a + b + c$ .

KQ:



**Câu 21.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(2; 1; 1)$  và  $C(0; 1; 2)$ . Gọi  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ . Tọa độ  $\vec{AH} = (m; n; p)$ . Tính  $m - 2n + 3p$ . KQ:

**Câu 22.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(2; -1; 3)$ ,  $C(-4; 7; 5)$ . Tọa độ chân đường phân giác trong góc  $B$  của tam giác  $ABC$  là  $D(a; b; c)$ . Tính  $-2a + b - 5c$ . KQ:



## E. ĐỀ ÔN TẬP SỐ 5

1

## Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

## Câu 1.

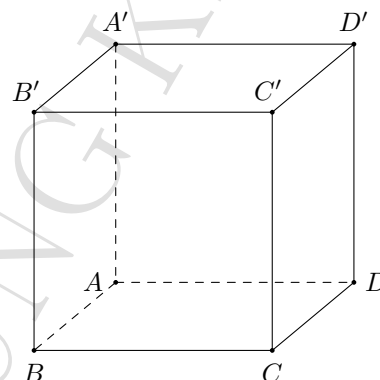
Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh bằng  $a$ , vectơ nào sau đây bằng vectơ  $\overrightarrow{AB}$ ?

A.  $\overrightarrow{D'C'}$ .

B.  $\overrightarrow{AD}$ .

C.  $\overrightarrow{CD}$ .

D.  $\overrightarrow{AA'}$ .



## Câu 2.

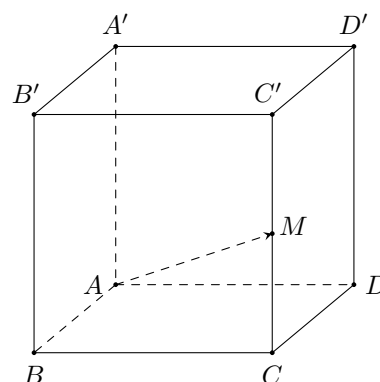
Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Lấy  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $CC'$ . Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A.  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ .

B.  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ .

C.  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ .

D.  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ .



## Câu 3.

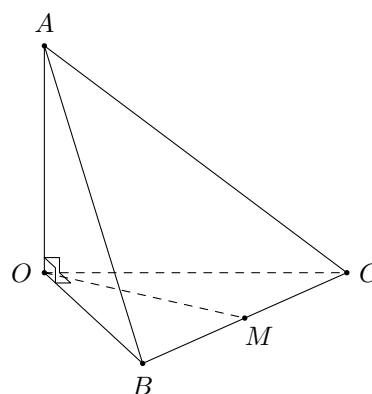
Cho tứ diện  $OABC$  có  $OA = OB = OC = a$  và  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc. Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính tích vô hướng của hai vectơ  $\overrightarrow{OM}$  và  $\overrightarrow{AC}$  theo  $a$ .

A.  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}$ .

B.  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$ .

C.  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$ .

D.  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{3}$ .



Câu 4. Cho tứ diện  $ABCD$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$ .

B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ .

C.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ .

D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ .

Câu 5. Trong không gian, cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$  và góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng  $120^\circ$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ .

B.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$ .

C.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$ .

D.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$ .

Câu 6. Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; 2; 3)$ . Toạ độ của vectơ  $\overrightarrow{OA}$  là

A.  $(0; 2; 3)$ .

B.  $(1; 2; 0)$ .

C.  $(1; 0; 3)$ .

D.  $(1; 2; 3)$ .

**Câu 7.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 3; 5)$ ,  $B(2; 0; 1)$ ,  $C(0; 9; 0)$ . Toạ độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  là

- A.  $G(3; 12; 6)$ . B.  $G(1; 0; 5)$ . C.  $G(1; 5; 2)$ . D.  $G(1; 4; 2)$ .

**Câu 8.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình bình hành  $ABCD$  có  $A(-1; 0; 3)$ ,  $B(2; 1; -1)$  và  $C(3; 2; 2)$ . Toạ độ điểm  $D$  là

- A.  $(0; 1; 6)$ . B.  $(-2; 1; 0)$ . C.  $(2; -1; 0)$ . D.  $(0; -1; -6)$ .

**Câu 9.** Cho hai điểm  $A(-1; 2; 3)$ ,  $B(1; 0; 2)$ . Toạ độ điểm  $M$  thoả mãn  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MA}$  là

- A.  $M\left(-2; -3; \frac{7}{2}\right)$ . B.  $M\left(-2; 3; \frac{7}{2}\right)$ . C.  $M(-2; 3; 7)$ . D.  $M(-4; 6; 7)$ .

**Câu 10.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (2; 1; -3)$ ,  $\vec{b} = (-2; -1; 2)$ . Tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  bằng

- A. 11. B. -11. C. 2. D. -2.

**Câu 11.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (-2; 2; 2)$ ,  $\vec{b} = (1; -1; -2)$ . Cô-sin của góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  bằng

- A.  $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ . B.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ . C.  $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ . D.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ .

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(7; -2; 1)$ ,  $B(1; 5; 2)$ . Biết rằng tích có hướng của hai vectơ  $\overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{OB}$  là một vectơ có toạ độ là  $(a; b; c)$ . Khi đó giá trị của biểu thức  $a + b + c$  bằng

- A. 15. B. -1. C. 48. D.  $18\sqrt{5}$ .

## 2 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 13.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ .

| Phát biểu                                                                                                               | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'}$ .                          |   |   |
| b) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{B'C}$ vuông góc với nhau.                                        |   |   |
| c) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{B'C}$ bằng $60^\circ$ .                                 |   |   |
| d) $\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{A'O}$ . |   |   |

**Câu 14.** Trong không gian, cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai vectơ đó là  $60^\circ$ .

| Phát biểu                                                             | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ .                                      |   |   |
| b) $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = -\frac{9}{2}$ . |   |   |

| Phát biểu                              | Đ | S |
|----------------------------------------|---|---|
| c) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = 4$ .       |   |   |
| d) $ \vec{a} - 2\vec{b}  = \sqrt{3}$ . |   |   |

**Câu 15.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba vectơ  $\vec{p} = (3; -2; 1)$ ,  $\vec{q} = (6; -4; 2)$ ,  $\vec{r} = (2; 1; -3)$ .

| Phát biểu                                                           | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\vec{p} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ .                      |   |   |
| b) Toạ độ vectơ $2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$ là $(-10; 9; -7)$ . |   |   |

| Phát biểu                                                                               | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| c) $\cos(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{1}{2}$ .                                             |   |   |
| d) Nếu $m, n$ là các số thực thỏa mãn $m\vec{p} + n\vec{r} = \vec{q}$ thì $m + n = 2$ . |   |   |

**Câu 16.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $M(-4; 3; 3)$ ,  $N(4; -4; 2)$ ,  $P(3; 6; -1)$  và điểm  $Q$ .

| Phát biểu                                            | Đ | S |
|------------------------------------------------------|---|---|
| a) $\overrightarrow{MP} = (-7; -3; 4)$ .             |   |   |
| b) Ba điểm $M, N, P$ không thẳng hàng.               |   |   |
| c) Nếu $MNPQ$ là hình bình hành thì $Q(-5; 13; 0)$ . |   |   |
| d) Diện tích tam giác $OMN$ bằng 15.                 |   |   |

### 3 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 17.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $M$  là trung điểm cạnh  $AB$ ,  $N$  là điểm nằm trên cạnh  $CD$  sao cho  $DN = 2CN$ . Biết rằng  $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC} + p\overrightarrow{AD}$  (với  $m, n, p$  là các số thực). Giá trị của biểu thức  $m + n + p$  viết dưới dạng thập phân bằng bao nhiêu? KQ:

**Câu 18.** Trong không gian, cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{b}| = 3$  và  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{5}{2}$ . Tính độ dài của vectơ  $\vec{a} + \vec{b}$ . KQ:

**Câu 19.** Cho tứ diện  $ABCD$  có tất cả các cạnh bằng 6. Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $N$  là điểm thuộc cạnh  $AC$  sao cho  $AN = 2NC$ . Tích vô hướng của hai vectơ  $\overrightarrow{CM}$  và  $\overrightarrow{DN}$  bằng bao nhiêu? KQ:

**Câu 20.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(7; 3; 3)$ ,  $B(1; 2; 4)$ ,  $C(2; 3; 5)$ . Gọi  $H$  là chân đường cao kẻ từ  $A$  của tam giác  $ABC$ . Tính độ dài đoạn  $AH$  (kết quả làm tròn đến hàng phần mười). KQ:

**Câu 21.** Cho ba điểm  $A(3; 3; 3)$ ,  $B(1; 1; 2)$  và  $C(5; 3; 1)$ . Gọi  $N(x; y; 0)$  thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho  $N$  cách đều ba điểm  $A, B, C$ . Khi đó giá trị của  $x + y$  viết dưới dạng số thập phân bằng bao nhiêu? KQ:

**Câu 22.** Ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc  $100^\circ$  và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4 N. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên (làm tròn đến hàng đơn vị của N). KQ:

TRUNG TÂM THIÊN AN – 134 THỐNG NHẤT, TÂN THÀNH, TÂN PHÚ, TP HCM

ThS: NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN



PHẦN

# THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

TRUNG TÂM THIÊN AN – 134 THỐNG NHẤT, TÂN THÀNH, TÂN PHÚ, TP HCM

ThS: NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

12

## CÁC DẠNG BÀI TẬP TOÁN 12

Chương 3

## CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU GHEP NHÓM

THẦY KIÊN TOÁN: DẠY THẬT - HỌC THẬT - GIÁ TRỊ THẬT

K12 – CHƯƠNG 3

## §1. KHOẢNG BIẾN THIÊN, KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHEP NHÓM

## A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1

## Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm

**Định nghĩa 21** Khoảng biến thiên, kí hiệu  $R$ , của mẫu số liệu ghép nhóm là hiệu số giữa đầu mút phải của nhóm cuối cùng và đầu mút trái của nhóm đầu tiên có chứa dữ liệu của mẫu số liệu.

⚠ Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho dưới bảng sau

Bảng 1

| Nhóm   | $[u_1; u_2)$ | $[u_2; u_3)$ | ... | $[u_k; u_{k+1})$ |
|--------|--------------|--------------|-----|------------------|
| Tần số | $n_1$        | $n_2$        | ... | $n_k$            |

Nếu  $n_1$  và  $n_k$  cùng khác 0 thì

$$R = u_{k+1} - u_1$$

Đối với mẫu số liệu ghép nhóm mà ta biết mẫu số liệu không ghép nhóm sinh ra nó thì ta cũng có thể chọn khoảng biến thiên của mẫu số liệu không ghép nhóm chính là khoảng biến thiên của số liệu ghép nhóm.

⚡ **NHẬN XÉT.** Ý nghĩa của khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm

- ☑ Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu. Cụ thể, khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán, và ngược lại.
- ☑ Trong các đại lượng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm, khoảng biến thiên là đại lượng dễ hiểu, dễ tính toán nhưng chưa phản ánh được đầy đủ mức độ phân tán của phần lớn các số liệu. Hơn nữa, do khoảng biến thiên chỉ sử dụng hai giá trị  $u_1$  và  $u_{k+1}$  của mẫu số liệu nên đại lượng đó dễ bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường. Do đó, để phản ánh mức độ phân tán của dữ liệu, người ta còn dùng các số đặc trưng khác.



## 2 Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

⚠ (Nhắc lại cách tính tứ phân vị)

Tứ phân vị thứ  $i$ , kí hiệu là  $Q_i$  với  $i = 1, 2, 3$  của mẫu số liệu ghép nhóm (Bảng 1) được xác định như sau

$$Q_i = u_m + \frac{\frac{i \cdot n}{4} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m),$$

trong đó

- ☑  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$  là cỡ mẫu;
- ☑  $[u_m; u_{m+1})$  là nhóm chứa tứ phân vị thứ  $i$ ;
- ☑  $n_m$  là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ  $i$ ;
- ☑  $C = n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1}$ .

**Định nghĩa 22** Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu  $\Delta_Q$ , là hiệu giữa tứ phân vị thứ ba  $Q_3$  và tứ phân vị thứ nhất  $Q_1$  của mẫu số liệu ghép nhóm, tức là

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1$$

👉 **NHẬN XÉT.** Ý nghĩa của khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

- ☑ Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của nửa giữa của mẫu số liệu (tập hợp gồm 50% số liệu nằm chính giữa mẫu số liệu). Cụ thể, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu càng nhỏ thì dữ liệu càng tập trung xung quanh trung vị.
- ☑ Khoảng tứ phân vị được dùng để xác định giá trị bất thường trong mẫu số liệu. Giá trị  $x$  trong mẫu số liệu là giá trị bất thường nếu  $x > Q_3 + 1,5\Delta_Q$  hoặc  $x < Q_1 - 1,5\Delta_Q$ .
- ☑ Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm không bị ảnh hưởng nhiều bởi các giá trị bất thường trong mẫu số liệu, chính vì thế nó thường được sử dụng thay cho khoảng biến thiên.

## B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

### DẠNG 1 Khoảng biến thiên

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

- ☑ Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi bảng bên. Gọi  $a_1, a_{m+1}$  lần lượt là đầu mút trái của nhóm 1, đầu mút phải của nhóm  $m$ .
- ☑ Hiệu  $R = a_{m+1} - a_1$  được gọi là khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

| Nhóm             | Tần số  |
|------------------|---------|
| $[a_1; a_2)$     | $n_1$   |
| $[a_2; a_3)$     | $n_2$   |
| $\dots$          | $\dots$ |
| $[a_m; a_{m+1})$ | $n_m$   |
| $n$              |         |

⚠ Đối với mẫu số liệu ghép nhóm mà ta biết mẫu số liệu không ghép nhóm sinh ra nó thì ta cũng có thể chọn khoảng biến thiên của mẫu số liệu không ghép nhóm chính là khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm.

## 1

## Ví dụ mẫu

## Ví dụ 1 (Mức độ 1).

Bảng bên biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao (đơn vị: centimet) của 36 học sinh nam lớp 12 ở một trường trung học phổ thông. Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

| Nhóm       | Tần số   |
|------------|----------|
| [160; 163) | 6        |
| [163; 166) | 11       |
| [166; 169) | 9        |
| [169; 172) | 7        |
| [172; 175) | 3        |
|            | $n = 36$ |

**Ví dụ 2 (Mức độ 1).** Bạn Trang thống kê lại chiều cao (đơn vị: cm) của các bạn học sinh nữ lớp 12C và lớp 12D ở bảng sau.

| Chiều cao \ Lớp | [155; 160) | [160; 165) | [165; 170) | [170; 175) | [175; 180) | [180; 185) |
|-----------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 12C             | 2          | 7          | 12         | 3          | 0          | 1          |
| 12D             | 5          | 9          | 8          | 2          | 1          | 0          |

Nếu so sánh theo khoảng biến thiên thì chiều cao của học sinh lớp nào có độ phân tán lớn hơn?

## Ví dụ 3 (Mức độ 1).

Bảng bên biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về số tiền (đơn vị: nghìn đồng) mà 60 khách hàng mua sách ở một cửa hàng trong một ngày. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A.** 50.      **B.** 30.      **C.** 6.      **D.** 69,8.

| Nhóm     | Tần số   | Tần số tích lũy |
|----------|----------|-----------------|
| [40; 50) | 3        | 3               |
| [50; 60) | 6        | 9               |
| [60; 70) | 19       | 28              |
| [70; 80) | 23       | 51              |
| [80; 90) | 9        | 60              |
|          | $n = 60$ |                 |

## Ví dụ 4 (Mức độ 1).

Bảng sau biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm thống kê mức lương của một công ty (đơn vị: triệu đồng). Tính khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

KQ:

| Nhóm     | Tần số    | Tần số tích lũy |
|----------|-----------|-----------------|
| [20; 30) | 25        | 25              |
| [30; 40) | 20        | 45              |
| [40; 50) | 20        | 65              |
| [50; 60) | 15        | 80              |
| [60; 70) | 14        | 94              |
| [70; 80) | 6         | 100             |
|          | $n = 100$ |                 |

## Ví dụ 5 (Mức độ 2).

Bảng bên biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về độ tuổi của cư dân trong một khu phố. Khi đó

| Phát biểu                                                  | Đ | S |
|------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Bảng số liệu trên có 7 nhóm.                            |   |   |
| b) Trung vị của mẫu số liệu là 42,5 tuổi.                  |   |   |
| c) Một của mẫu số liệu trên là 26,33 tuổi.                 |   |   |
| d) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là 60 tuổi. |   |   |

| Nhóm     | Tần số    | Tần số tích lũy |
|----------|-----------|-----------------|
| [20; 30) | 25        | 25              |
| [30; 40) | 20        | 45              |
| [40; 50) | 20        | 65              |
| [50; 60) | 15        | 80              |
| [60; 70) | 14        | 94              |
| [70; 80) | 6         | 100             |
|          | $n = 100$ |                 |

## 2 Bài tập tự luận

**Bài 1 (Mức độ 1).** Cô Hà thống kê lại đường kính thân gỗ của một số cây xoan đào 6 năm tuổi được trồng ở một lâm trường ở bảng sau.

| Đường kính (cm) | [40; 45) | [45; 50) | [50; 55) | [55; 60) | [60; 65) |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Tần số          | 5        | 20       | 18       | 7        | 3        |

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

**Bài 2 (Mức độ 1).** Bảng sau thống kê tổng lượng mưa (đơn vị: mm) đo được vào tháng 7 từ năm 2002 đến 2021 tại một trạm quan trắc đặt ở Cà Mau.

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 341,4 | 187,1 | 242,2 | 522,9 | 251,4 | 432,2 | 200,7 | 388,6 | 258,4 | 288,5 |
| 298,1 | 413,5 | 413,5 | 332   | 421   | 475   | 400   | 305   | 520   | 147   |

(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên.

**Bài 3 (Mức độ 1).** Kết quả đo chiều cao của 100 cây keo 3 năm tuổi tại một nông trường được cho ở bảng sau

| Chiều cao (m) | [8,4; 8,6) | [8,6; 8,8) | [8,8; 9,0) | [9,0; 9,2) | [9,2; 9,4) |
|---------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số cây        | 5          | 12         | 25         | 44         | 14         |

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

**Bài 4 (Mức độ 1).** Bảng sau thống kê thành tích nhảy xa của một số học sinh lớp 12. Tìm khoảng biến thiên thành tích nhảy xa của số học sinh này.

| Thành tích (cm) | [150; 180) | [180; 210) | [210; 240) | [240; 270) | [270; 300) |
|-----------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số học sinh     | 3          | 5          | 28         | 14         | 8          |

**Bài 5 (Mức độ 1).** Bảng sau trình bày dữ liệu về tốc độ của 100 xe ô tô lưu thông trên một đoạn đường cao tốc vào giờ cao điểm, được trích xuất từ camera của cơ quan cảnh sát giao thông. Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

| Tốc độ (km/h) | [60; 70) | [70; 80) | [80; 90) | [90; 100) | [100; 110) |
|---------------|----------|----------|----------|-----------|------------|
| Số xe         | 10       | 20       | 20       | 35        | 15         |

**Bài 6 (Mức độ 2).** Bảng sau biểu thị kết quả điều tra thời gian sử dụng Internet hằng ngày của một số người.

| Thời gian (phút) | [30; 60) | [60; 90) | [90; 120) | [120; 150) | [150; 180) |
|------------------|----------|----------|-----------|------------|------------|
| Số người         | 2        | 4        | 10        | 5          | 3          |

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu đã cho. Kết quả cho biết điều gì?

**Bài 7 (Mức độ 2).** Thống kê thời gian sử dụng mạng xã hội trong ngày của các bạn Tổ 1, Tổ 2 lớp 12A, được kết quả như sau:

| Thời gian sử dụng (phút) | [0; 10) | [10; 30) | [30; 60) | [60; 90) |
|--------------------------|---------|----------|----------|----------|
| Số học sinh Tổ 1         | 2       | 4        | 3        | 1        |
| Số học sinh Tổ 2         | 5       | 1        | 3        | 0        |

Tìm khoảng biến thiên cho thời gian sử dụng mạng xã hội của học sinh mỗi tổ và giải thích ý nghĩa.

**Bài 8 (Mức độ 2).** Dưới đây là kết quả điều tra thời gian hoàn thành bài tập ở nhà môn Toán của 30 học sinh lớp 9 (đơn vị: phút):

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 42 | 45 | 47 | 47 | 53 | 54 | 58 | 58 | 58 | 59 |
| 61 | 63 | 64 | 64 | 67 | 68 | 68 | 68 | 70 | 73 |
| 75 | 75 | 77 | 77 | 78 | 78 | 82 | 82 | 82 | 87 |

Lập mẫu số liệu ghép nhóm với các nhóm ghép có độ dài bằng 10 và nhóm đầu tiên là [40; 50). Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm.

**Bài 9 (Mức độ 2).** Thời gian trung bình hằng ngày mà một số nhân viên đi từ nhà đến công ty được thống kê trong bảng bên dưới. Tìm khoảng biến thiên của thời gian di chuyển đến công ty của các nhân viên.

| Thời gian (phút) | [10; 20) | [20; 30) | [30; 40) | [40; 50) | [50; 60) | [60; 70) |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số người         | 8        | 8        | 10       | 6        | 7        | 1        |

**Bài 10 (Mức độ 2).** Để chuẩn bị mở một trung tâm thể dục thể thao, anh Dũng đã tiến hành điều tra tuổi thọ của máy chạy bộ do hai hãng X, Y sản xuất. Bảng sau biểu thị hai mẫu số liệu mà anh thu thập được qua Internet.

*Tuổi thọ của máy chạy bộ (đơn vị: năm)*

| Tuổi thọ          | [2; 4) | [4; 6) | [6; 8) | [8; 10) | [10; 12) |
|-------------------|--------|--------|--------|---------|----------|
| Số máy của hãng X | 7      | 20     | 36     | 20      | 17       |
| Số máy của hãng Y | 0      | 20     | 35     | 35      | 10       |

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu nào lớn hơn? Từ đó có thể nói là máy chạy bộ do hãng nào sản xuất có tuổi thọ phân tán hơn?

**Bài 11 (Mức độ 2).** Người ta tiến hành phỏng vấn hai nhóm khán giả về một bộ phim mới công chiếu. Nhóm A gồm những khán giả thuộc lứa tuổi 20 – 30, nhóm B thuộc lứa tuổi trên 30. Người được hỏi ý kiến phải đánh giá bộ phim bằng cách cho điểm theo một số tiêu chí nêu trong phiếu điều tra và sau đó lấy tổng số điểm (thang điểm 100). Bảng dưới đây trình bày kết quả điều tra hai nhóm khán giả:

Điểm đánh giá của khán giả

| Điểm                | [50; 60) | [60; 70) | [70; 80) | [80; 90) | [90; 100) |
|---------------------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| Số người của nhóm A | 6        | 10       | 14       | 12       | 8         |
| Số người của nhóm B | 0        | 8        | 14       | 28       | 0         |

Ý kiến đánh giá của nhóm khán giả nào phân tán hơn?

**Bài 12 (Mức độ 2).** Điểm kiểm tra cuối khoá môn Tiếng Anh của hai lớp ở một trung tâm ngoại ngữ được thống kê trong các Bảng a và b.

Bảng a. Điểm của lớp A

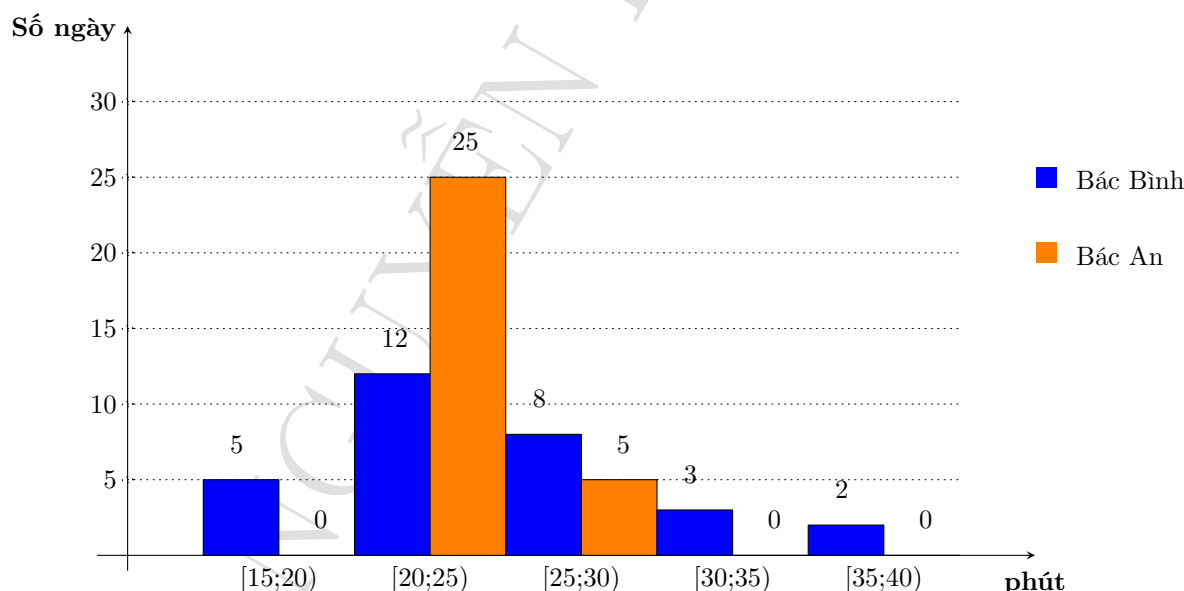
| Điểm      | Số học viên (tần số) |
|-----------|----------------------|
| [50; 60)  | 8                    |
| [60; 70)  | 20                   |
| [70; 80)  | 50                   |
| [80; 90)  | 17                   |
| [90; 100) | 5                    |

Bảng b. Điểm của lớp B

| Điểm      | Số học viên (tần số) |
|-----------|----------------------|
| [50; 60)  | 15                   |
| [60; 70)  | 20                   |
| [70; 80)  | 30                   |
| [80; 90)  | 20                   |
| [90; 100) | 15                   |

Tìm khoảng biến thiên của mỗi mẫu số liệu. Có thể dùng khoảng biến thiên để biết điểm của lớp nào đồng đều hơn không?

**Bài 13 (Mức độ 3).** Biểu đồ dưới đây thống kê thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày trong tháng 9/2022 của bác Bình và bác An. Ai là người có thời gian tập đều hơn?



Sử dụng dữ liệu ở biểu đồ trên chọn số thích hợp thay vào các vị trí được đánh dấu ? ở bảng sau

| Thời gian (phút) | [15; 20) | [20; 25) | [25; 30) | [30; 35) | [35; 40) |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Bác Bình         | ?        | 12       | 8        | 3        | 2        |
| Bác An           | ?        | ?        | ?        | ?        | ?        |

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày của bác Bình và bác An.

**Bài 14 (Mức độ 3).** Thầy Tuấn thống kê lại điểm trung bình cuối năm của các học sinh lớp 11A và 11B ở bảng sau:

| Lớp \ Điểm trung bình | [5; 6) | [6; 7) | [7; 8) | [8; 9) | [9; 10) |
|-----------------------|--------|--------|--------|--------|---------|
|                       |        |        |        |        |         |
| 11 A                  | 1      | 0      | 11     | 22     | 6       |
| 11 B                  | 0      | 6      | 8      | 14     | 12      |

Nếu so sánh theo khoảng biến thiên thì học sinh lớp nào có điểm trung bình ít phân tán hơn?

### 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 1 (Mức độ 1).** Cho bảng số liệu sau đây

| Nhóm   | [1,5; 2,5) | [2,5; 3,5) | [3,5; 4,5) | [4,5; 5,5) | [5,5; 6,5) |
|--------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Tần số | 2          | 3          | 7          | 2          | 1          |

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu cho bởi bảng trên là

- A.** 2.                      **B.** 3.                      **C.** 4.                      **D.** 5.

**Câu 2 (Mức độ 1).** Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau

| Quãng đường (km) | [2,7; 3,0) | [3,0; 3,3) | [3,3; 3,6) | [3,6; 3,9) | [3,9; 4,2) |
|------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số ngày          | 3          | 6          | 5          | 4          | 2          |

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A.** 1,5.                      **B.** 0,9.                      **C.** 0,6.                      **D.** 0,3.

**Câu 3 (Mức độ 1).** Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau

| Thời gian (phút) | [20; 25) | [25; 30) | [30; 35) | [35; 40) | [40; 45) |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số ngày          | 6        | 6        | 4        | 1        | 1        |

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A.** 25.                      **B.** 20.                      **C.** 15.                      **D.** 30.

**Câu 4 (Mức độ 1).** Dũng là học sinh rất giỏi chơi rubik, bạn có thể giải nhiều loại khối rubik khác nhau. Trong một lần tập luyện giải khối rubik  $3 \times 3$ , bạn Dũng đã tự thống kê lại thời gian giải rubik trong 25 lần giải liên tiếp ở bảng sau:

| Thời gian giải rubik (giây) | [8; 10) | [10; 12) | [12; 14) | [14; 16) | [16; 18) |
|-----------------------------|---------|----------|----------|----------|----------|
| Số ngày                     | 4       | 6        | 8        | 4        | 3        |

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A. 6. B. 8. C. 10. D. 12.

**Câu 5 (Mức độ 2).** Thống kê số thẻ vàng của mỗi câu lạc bộ trong giải ngoại hạng Anh mùa giải 2021 – 2022 (Theo *premierleague.com*) cho kết quả sau:

101 79 79 78 75 73 68 67 67 63  
63 61 60 59 57 55 55 50 47 42.

Ghép nhóm dãy số liệu trên thành các nhóm có độ dài bằng nhau với nhóm đầu tiên là  $[40; 50)$ . Khi đó khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm thu được là

- A. 70. B. 100. C. 110. D. 40.

**Câu 6 (Mức độ 2).** Bảng sau đây cho biết chiều cao của các học sinh lớp 12A và 12B.

| Chiều cao (cm)          | $[145; 150)$ | $[150; 155)$ | $[155; 160)$ | $[160; 165)$ | $[165; 170)$ | $[170; 175)$ |
|-------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Số học sinh của lớp 12A | 1            | 0            | 15           | 12           | 10           | 5            |
| Số học sinh của lớp 12B | 0            | 0            | 17           | 10           | 9            | 6            |

Khoảng biến thiên cho các mẫu số liệu ghép nhóm của học sinh lớp 12A, 12B.

- A. 30. B. 175. C. 145. D. 40.

**Câu 7 (Mức độ 2).** Một vườn thú ghi lại tuổi thọ (đơn vị: năm) của 20 con hổ và thu được kết quả:

| Tuổi thọ  | $[14; 15)$ | $[15; 16)$ | $[16; 17)$ | $[17; 18)$ | $[18; 19)$ |
|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số con hổ | 1          | 3          | 8          | 6          | 2          |

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm này là

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

**Câu 8 (Mức độ 2).** Để đánh giá chất lượng một loại pin điện thoại mới, người ta ghi lại thời gian nghe nhạc liên tục của điện thoại được sạc đầy pin cho đến khi hết pin cho kết quả sau

| Thời gian (giờ)              | $[5; 5,5)$ | $[5,5; 6)$ | $[6; 6,5)$ | $[6,5; 7)$ | $[7; 7,5)$ |
|------------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số chiếc điện thoại (tần số) | 2          | 8          | 15         | 10         | 5          |

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A. 7,5. B. 5. C. 2,5. D. 7.

## 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 9 (Mức độ 1).** Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu A và B trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

| Giá đóng cửa | $[120; 122)$ | $[122; 124)$ | $[124; 126)$ | $[126; 128)$ | $[128; 130)$ |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Cổ phiếu A   | 8            | 9            | 12           | 10           | 11           |
| Cổ phiếu B   | 16           | 4            | 3            | 6            | 21           |

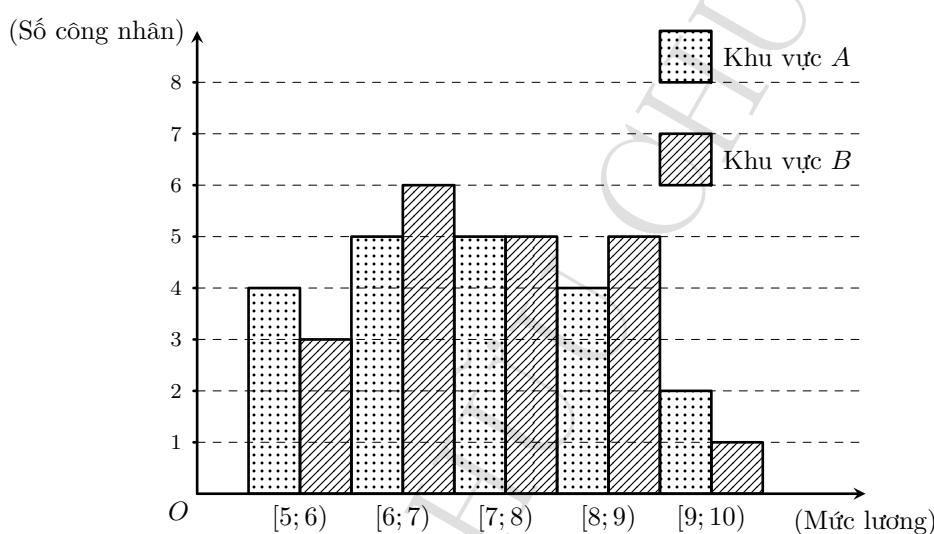


Khi đó

| Phát biểu                                                                             | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Khoảng biến thiên của giá cổ phiếu $A$ là $R = 11 - 8 = 3$ .                       |   |   |
| b) Khoảng biến thiên của giá cổ phiếu $B$ là $R = 21 - 16 = 5$ .                      |   |   |
| c) Khoảng biến thiên của cổ phiếu $A$ và $B$ bằng nhau và bằng $R = 130 - 120 = 10$ . |   |   |
| d) Khoảng biến thiên của giá cổ phiếu là $R = 21 - 8 = 13$ .                          |   |   |

**Câu 10 (Mức độ 2).** Biểu đồ dưới đây mô tả kết quả điều tra về mức lương khởi điểm (đơn vị: triệu đồng) của một số công nhân ở hai khu vực  $A$  và  $B$ .

Mức lương khởi điểm của công nhân ở hai khu vực  $A$  và  $B$



Khi đó

| Phát biểu                                                                                                                                              | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Khoảng biến thiên mức lương là $R = 5$ .                                                                                                            |   |   |
| b) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm ở khu vực $A$ là 1,2875.                                                                                       |   |   |
| c) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm ở khu vực $B$ là 1,5875.                                                                                       |   |   |
| d) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm thì mức lương khởi điểm của công nhân khu vực $B$ đồng đều hơn của công nhân khu vực $A$ . |   |   |

**Câu 11 (Mức độ 1).** Bảng dưới đây thống kê thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày trong tháng 9/2022 của bác Bình và bác An.

| Thời gian (phút) | [15; 20) | [20; 25) | [25; 30) | [30; 35) | [35; 40) |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Bác Bình         | 5        | 12       | 8        | 3        | 2        |
| Bác An           | 0        | 25       | 5        | 0        | 0        |

Khi đó

| Phát biểu                                                                                                    | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng của bác Bình là 25 (phút). |   |   |
| b) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng của bác An là 10 (phút).   |   |   |
| c) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng của bác An là 30 (phút).   |   |   |
| d) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng của bác Bình là 20 (phút). |   |   |

## 5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 12 (Mức độ 1).** Tốc độ của 20 xe hơi khi đi qua một trạm kiểm tra tốc độ (đơn vị: km/h) được thống kê lại như sau

| Tốc độ (km/h) | [42; 46) | [46; 50) | [50; 54) | [54; 58) | [58; 62) |
|---------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số xe         | 3        | 7        | 4        | 3        | 3        |

Khoảng biến thiên là bao nhiêu?

KQ:

**Câu 13 (Mức độ 1).** Thống kê tổng số giờ nắng trong tháng 9 tại một trạm quan trắc đặt ở Cà Mau trong các năm từ 2002 đến 2021 được thống kê như sau

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| 111,6 | 134,9 | 130,3 | 134,2 | 140,9 | 109,3 | 154,4 | 156,3 | 116,1 | 96,7 |
| 105,2 | 80,8  | 80,8  | 110   | 109   | 139   | 145   | 161   | 126   | 114  |

Khoảng biến thiên của bảng số liệu là bao nhiêu?

KQ:

**Câu 14 (Mức độ 2).** Thời gian hoàn thành bài kiểm tra môn Toán của các bạn trong lớp 12C được cho trong bảng sau:

| Thời gian (phút) | [25; 30) | [30; 35) | [35; 40) | [40; 45) |
|------------------|----------|----------|----------|----------|
| Số học sinh Tổ 1 | 8        | 16       | 4        | 2        |

Nếu biết học sinh hoàn thành bài kiểm tra sớm nhất mất 27 phút và muộn nhất mất 43 phút thì khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc là bao nhiêu?

KQ:

**Câu 15 (Mức độ 2).** Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu A và B trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

| Giá đóng cửa | [120; 122) | [122; 124) | [124; 126) | [126; 128) | [128; 130) |
|--------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Cổ phiếu A   | 8          | 9          | 12         | 10         | 11         |
| Cổ phiếu B   | 16         | 4          | 3          | 6          | 21         |

Khoảng biến thiên của cổ phiếu A và B bằng nhau và bằng bao nhiêu?

KQ:

## DẠNG 2

## Khoảng tứ phân vị trong mẫu số liệu ghép nhóm

🔄 Nhắc lại công thức:

Tứ phân vị thứ  $i$ , kí hiệu là  $Q_i$  với  $i = 1, 2, 3$  của mẫu số liệu ghép nhóm (Bảng 1) được xác định như sau

$$Q_i = u_m + \frac{\frac{i \cdot n}{4} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m),$$

trong đó

- $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$  là cỡ mẫu;
- $[u_m; u_{m+1})$  là nhóm chứa tứ phân vị thứ  $i$ ;
- $n_m$  là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ  $i$ ;
- $C = n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1}$ .

## 1

## Ví dụ mẫu

**Ví dụ 6 (Mức độ 1).** Điểm kiểm tra cuối khoá môn Tiếng Anh ở một trung tâm ngoại ngữ được thống kê trong bảng sau

| Điểm                 | [50; 60) | [60; 70) | [70; 80) | [80; 90) | [90; 100) |
|----------------------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| Số học viên (tần số) | 8        | 20       | 50       | 17       | 5         |

a) Hãy lập bảng phân tần số tích lũy của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Biết rằng công thức tính tứ phân vị thứ  $r$  ( $r = 1, 2, 3$ ) là  $Q_r = a_p + \frac{\frac{r \cdot n}{4} - cf_{p-1}}{n_p} \cdot (a_{p+1} - a_p)$ .

Trong đó  $n$  là cỡ mẫu;  $a_p, a_{p+1}, n_p$  lần lượt là đầu mút trái, đầu mút phải, tần số của nhóm thứ  $p$  chứa  $Q_r$ ;  $cf_{p-1}$  là tần số tích lũy của nhóm thứ  $p - 1$ . Tính  $Q_1, Q_3$  và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

**Ví dụ 7 (Mức độ 2).**

Bảng bên biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của 42 mẫu cây ở một vườn thực vật (đơn vị: centimét).

| Nhóm     | Tần số   | Tần số tích lũy |
|----------|----------|-----------------|
| [40; 45) | 5        | 5               |
| [45; 50) | 10       | 15              |
| [50; 55) | 7        | 22              |
| [55; 60) | 9        | 31              |
| [60; 65) | 7        | 38              |
| [65; 70) | 4        | 42              |
|          | $n = 42$ |                 |

a) Gọi  $n$  là số phần tử của mẫu, tìm nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng  $\frac{n}{4}$  và tìm mút trái, độ dài và tần số của nhóm đó. Tìm tứ phân vị  $Q_1$ .

b) Tìm nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng  $\frac{3n}{4}$ , tìm mút trái, độ dài, tứ phân vị  $Q_3$  của nhóm đó.

c) Tính khoảng tứ phân vị (làm tròn đến hàng phần trăm).

**Ví dụ 8 (Mức độ 2).** Bảng sau thống kê cân nặng của 50 quả xoài Thanh Ca được lựa chọn ngẫu nhiên sau khi thu hoạch ở một nông trường như sau:

| Cân nặng (g)         | [250; 290) | [290; 330) | [330; 370) | [370; 410) | [410; 450) |
|----------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số quả xoài (tần số) | 3          | 13         | 18         | 11         | 5          |

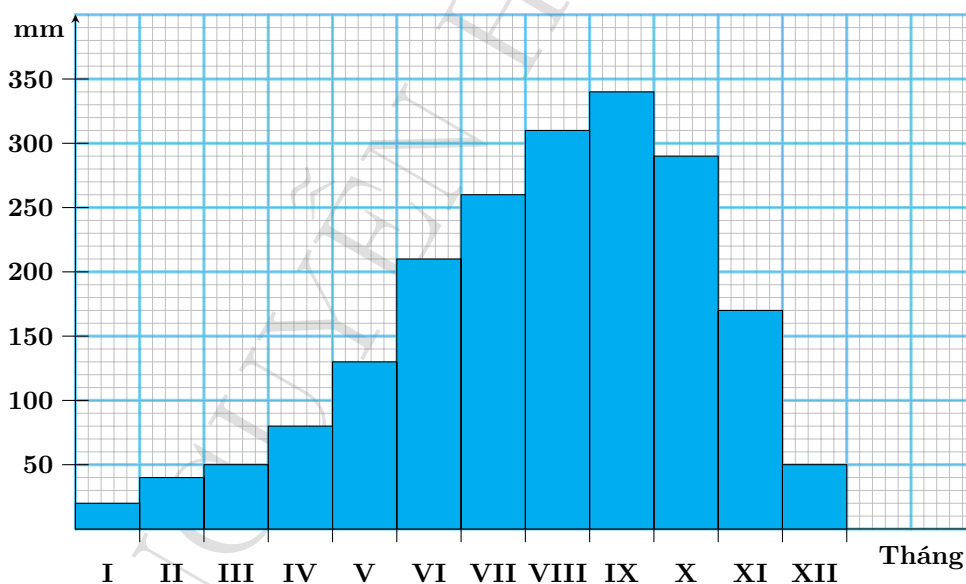
| Phát biểu                                                                                 | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Các nhóm có độ dài bằng nhau và bằng 40.                                               |   |   |
| b) Tứ phân vị $Q_1$ thuộc nhóm $[290; 330)$ .                                             |   |   |
| c) Nếu nhóm thứ $p$ chứa tứ phân vị $Q_3$ thì tần số tích lũy của nhóm thứ $p - 1$ là 18. |   |   |
| d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là $\Delta_Q = \frac{9080}{143}$ .    |   |   |

**Ví dụ 9 (Mức độ 2).** Thời gian chờ khám bệnh của các bệnh nhân tại phòng khám X được cho trong bảng sau:

|                       |          |           |            |            |
|-----------------------|----------|-----------|------------|------------|
| Thời gian (phút)      | $[0; 5)$ | $[5; 10)$ | $[10; 15)$ | $[15; 20)$ |
| Số bệnh nhân (tần số) | 3        | 12        | 15         | 8          |

| Phát biểu                                                                      | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Kích thước mẫu là $n = 15$ .                                                |   |   |
| b) Tần số tích lũy của nhóm thứ hai $[5; 10)$ là $cf_2 = 15$ .                 |   |   |
| c) Khoảng chứa tứ phân vị $Q_3$ là $[10; 15)$ .                                |   |   |
| d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu (làm tròn kết quả đến phần trăm) là 7,21. |   |   |

**Ví dụ 10 (Mức độ 3).** Hình sau là biểu đồ biểu diễn lượng mưa trung bình của các tháng trong năm ở thành phố A.



Bằng cách lập bảng số liệu ghép nhóm về lượng mưa của thành phố A, với độ dài các nhóm là 50, đầu mút trái của nhóm đầu tiên là 0 và đầu mút phải của nhóm cuối cùng là 350. Xác định khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu (kết quả làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

KQ:

**Ví dụ 11 (Mức độ 2).** Bảng dưới biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của 42 mẫu cây ở một vườn thực vật (đơn vị: centimét). Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó (kết quả làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

KQ:

| Nhóm            | [40; 45) | [45; 50) | [50; 55) | [55; 60) | [60; 65) | [65; 70) |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Tần số          | 5        | 10       | 7        | 9        | 7        | 4        |
| Tần số tích lũy | 5        | 15       | 22       | 31       | 38       | 42       |

## 2

## Bài tập tự luận

**Bài 15 (Mức độ 1).** Chiều cao của 500 học sinh của một trường trung học cơ sở được thống kê bởi bảng dưới. Tính khoảng tứ phân vị. Kết quả tìm được cho biết điều gì về chiều cao của 500 học sinh này?

| Chiều cao (cm) | [150; 154) | [154; 158) | [158; 162) | [162; 166) | [166; 170) |
|----------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số học sinh    | 25         | 50         | 200        | 175        | 50         |

**Bài 16 (Mức độ 1).** Một trang trại phân 1 000 quả trứng thành 5 loại, tùy theo khối lượng (đã được làm tròn) của chúng được thống kê bởi bảng dưới đây. Hãy tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu.

| Khối lượng (gam) | [30; 36) | [36; 42) | [42; 48) | [48; 54) | [54; 60) |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số trứng         | 45       | 190      | 500      | 250      | 15       |

**Bài 17 (Mức độ 1).** Dưới đây là kết quả điều tra thời gian hoàn thành bài tập ở nhà môn Toán của 30 học sinh lớp 10 một trường phổ thông A

*Thời gian hoàn thành bài tập môn Toán ở nhà (đơn vị: phút)*

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 42 | 45 | 47 | 47 | 53 | 54 | 58 | 58 | 58 | 59 |
| 61 | 63 | 64 | 64 | 67 | 68 | 68 | 68 | 70 | 73 |
| 75 | 75 | 77 | 77 | 78 | 78 | 82 | 82 | 82 | 87 |

- Lập mẫu số liệu ghép nhóm với các nhóm ghép có độ dài bằng 10 và nhóm đầu tiên là [40; 50). Xác định giá trị đại diện và tần số tích lũy của các nhóm.
- Tìm số trung bình cộng, khoảng biến thiên, các tứ phân vị và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm vừa lập.

**Bài 18 (Mức độ 1).** Thời gian trung bình hằng ngày mà một số nhân viên đi từ nhà đến công ty được thống kê trong bảng sau. Tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của thời gian di chuyển đến công ty của các nhân viên (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*).

| Thời gian (phút)  | [10; 20) | [20; 30) | [30; 40) | [40; 50) | [50; 60) | [60; 70) |
|-------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số người (tần số) | 8        | 8        | 10       | 6        | 7        | 1        |

**Bài 19 (Mức độ 2).** Bảng số liệu sau trình bày dữ liệu về tốc độ của 100 xe ô tô lưu thông trên một đoạn đường cao tốc vào giờ cao điểm, được trích xuất từ camera của cơ quan cảnh sát giao thông. Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*). Nêu ý nghĩa của kết quả tìm được.

| Tốc độ (km/h) | [60; 70) | [70; 80) | [80; 90) | [90; 100) | [100; 110) |
|---------------|----------|----------|----------|-----------|------------|
| Số xe         | 10       | 20       | 20       | 35        | 15         |

**Bài 20 (Mức độ 2).** Một ngân hàng thống kê ở bảng dưới số tiền (nghìn đồng) mà khách hàng rút từ một máy ATM (máy rút tiền tự động) trong một buổi sáng.

| Số tiền rút | [0; 500) | [500; 1 000) | [1 000; 1 500) | [1 500; 2 000) | [2 000; 2 500) | [2 500; 3 000) |
|-------------|----------|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Tần số      | 11       | 16           | 12             | 15             | 10             | 16             |

Tìm khoảng tứ phân vị của số tiền rút (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị). Nêu ý nghĩa của các kết quả tìm được.

**Bài 21 (Mức độ 2).** Hàm lượng protein (trong 100 g) của một số loại thực phẩm được cho trong bảng sau. Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm). Nêu ý nghĩa của các kết quả tìm được.

| Hàm lượng protein(g) | [8; 10) | [10; 12) | [12; 14) | [14; 16) | [16; 18] | [18; 20] |
|----------------------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Tần số               | 4       | 12       | 16       | 14       | 2        | 2        |

### 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 16 (Mức độ 1).** Cho mẫu số liệu ghép nhóm có tứ phân vị thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$ . Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó bằng

- A.**  $2Q_2$ . **B.**  $Q_1 - Q_3$ . **C.**  $Q_3 - Q_1$ . **D.**  $Q_3 + Q_1 - Q_2$ .

**Câu 17 (Mức độ 1).** Một vườn thú ghi lại tuổi thọ (đơn vị: năm) của 20 con hổ và thu được kết quả như sau:

| Tuổi thọ  | [14; 15) | [15; 16) | [16; 17) | [17; 18) | [18; 19) |
|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số con hổ | 1        | 3        | 8        | 6        | 2        |

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là

- A.** [14; 15). **B.** [15; 16). **C.** [16; 17). **D.** [17; 18).

**Câu 18 (Mức độ 1).** Cho bảng số liệu sau đây

| Nhóm   | [1,5; 2,5) | [2,5; 3,5) | [3,5; 4,5) | [4,5; 5,5) | [5,5; 6,5) |
|--------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Tần số | 2          | 3          | 7          | 2          | 1          |

Gọi  $\Delta_Q$  là khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu cho bởi bảng trên. Khi đó

- A.**  $\Delta_Q \in [1; 2)$ . **B.**  $\Delta_Q \in [2; 3)$ . **C.**  $\Delta_Q \in [3; 4)$ . **D.**  $\Delta_Q \in [4; 5)$ .

**Câu 19 (Mức độ 2).** Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau

| Quãng đường (km) | [2,7; 3,0) | [3,0; 3,3) | [3,3; 3,6) | [3,6; 3,9) | [3,9; 4,2) |
|------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số ngày          | 3          | 6          | 5          | 4          | 2          |

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là

- A.** 0,9. **B.** 0,975. **C.** 0,5. **D.** 0,575.

**Câu 20 (Mức độ 2).** Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau. Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm?

| Thời gian (phút) | [20; 25) | [25; 30) | [30; 35) | [35; 40) | [40; 45) |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số ngày          | 6        | 6        | 4        | 1        | 1        |

- A.** 23,75.      **B.** 27,5.      **C.** 31,88.      **D.** 8,125.

**Câu 21 (Mức độ 2).** Bảng số liệu sau biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về số tiền (đơn vị: nghìn đồng) mà 60 khách hàng mua sách ở một cửa hàng trong một ngày.

| Nhóm            | [40; 50) | [50; 60) | [60; 70) | [70; 80) | [80; 90) |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Tần số          | 3        | 6        | 19       | 23       | 9        |
| Tần số tích lũy | 3        | 9        | 28       | 51       | 60       |

Gọi  $R$  là khoảng biến thiên,  $\Delta_Q$  là khoảng tứ phân vị. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.**  $R \in (50; 55)$ .      **B.**  $\Delta_Q \in (14; 14,5)$ .      **C.**  $\Delta_Q \in (14,5; 15)$ .      **D.**  $R \in (55; 60)$ .

**Câu 22 (Mức độ 3).** Để đánh giá chất lượng một loại pin điện thoại mới, người ta ghi lại thời gian nghe nhạc liên tục của điện thoại được sạc đầy pin cho đến khi hết pin cho kết quả sau

| Thời gian (giờ)     | [5; 5,5) | [5,5; 6) | [6; 6,5) | [6,5; 7) | [7; 7,5) |
|---------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số chiếc điện thoại | 2        | 8        | 15       | 10       | 5        |

Gọi  $R$  là khoảng biến thiên,  $\bar{x}$  là số trung bình cộng,  $M_e$  là trung vị và  $\Delta_Q$  là khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm nói trên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.**  $\Delta_Q = 0,75$ .      **B.**  $R = 3$ .      **C.**  $\bar{x} = 7$ .      **D.**  $M_e = 5,5$ .

## 4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 23 (Mức độ 3).** Bảng sau thống kê tổng lượng mưa (đơn vị: mm) đo được vào tháng 7 từ năm 2002 đến 2021 tại một trạm quan trắc đặt ở Cà Mau.

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 341,4 | 187,1 | 242,2 | 522,9 | 251,4 | 432,2 | 200,7 | 388,6 | 258,4 | 288,5 |
| 298,1 | 413,5 | 413,5 | 332   | 421   | 475   | 400   | 305   | 520   | 147   |

(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

Chia mẫu số liệu trên thành 4 nhóm lần lượt là [140; 240), [240; 340), [340; 440) và [440; 540).

| Phát biểu                                                           | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Cỡ mẫu là $n = 18$ .                                             |   |   |
| b) Tần số của nhóm [240; 340) là 7.                                 |   |   |
| c) Tứ phân vị $Q_3$ của mẫu số liệu ghép nhóm là $\frac{2880}{7}$ . |   |   |
| d) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là 162,35.           |   |   |



**Câu 24 (Mức độ 3).** Bảng mẫu số liệu ghép nhóm thống kê mức lương của một công ty (đơn vị: triệu đồng) được cho như sau:

| Nhóm   | [10; 15) | [15; 20) | [20; 25) | [25; 30) | [30; 35) | [35; 40) |
|--------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Tần số | 15       | 18       | 10       | 10       | 5        | 2        |

| Phát biểu                                                           | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Cỡ mẫu là $n = 100$ .                                            |   |   |
| b) Tần số tích lũy của nhóm [30; 35) là 58.                         |   |   |
| c) Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là $M_e \in (24; 25)$ .       |   |   |
| d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là $\Delta_Q = 11$ . |   |   |

**Câu 25 (Mức độ 3).** Kết quả đo chiều cao của 100 cây keo 3 năm tuổi tại một nông trường được cho ở bảng sau

| Chiều cao (m) | [8,4; 8,6) | [8,6; 8,8) | [8,8; 9,0) | [9,0; 9,2) | [9,2; 9,4) |
|---------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số cây        | 5          | 12         | 25         | 44         | 14         |

| Phát biểu                                                    | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm bằng 9.       |   |   |
| b) Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là 9. |   |   |
| c) Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là $M_e = 9,1$ .       |   |   |
| d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm bằng 0,286.   |   |   |

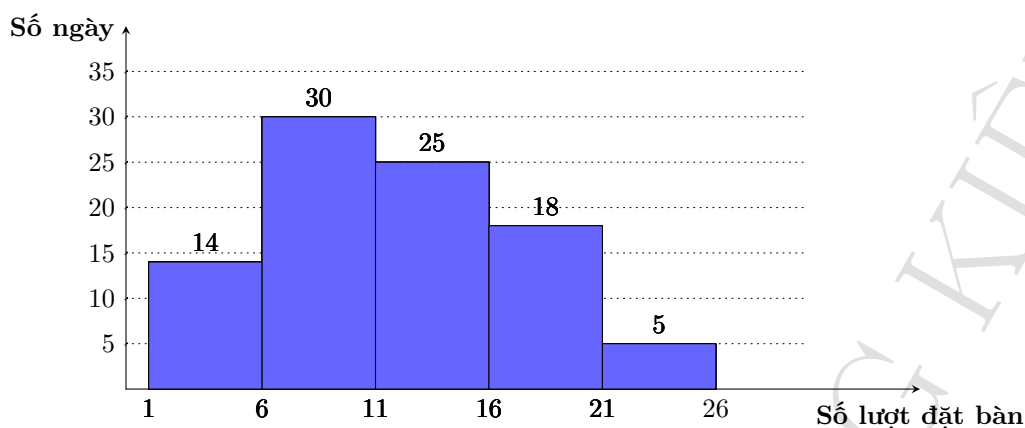
**Câu 26 (Mức độ 3).** Thống kê số thẻ vàng của mỗi câu lạc bộ trong giải ngoại hạng Anh mùa giải 2021 – 2022 cho kết quả sau:

| Nhóm   | [40; 50) | [50; 60) | [60; 70) | [70; 80) | [80; 90) | [90; 100) | [100; 110) |
|--------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|------------|
| Tần số | 2        | 5        | 7        | 5        | 0        | 0         | 1          |

(Theo *premierleague.com*)

| Phát biểu                                                                                 | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là $R = 70$ .                              |   |   |
| b) Nhóm [100; 110) là nhóm có tần số lớn nhất.                                            |   |   |
| c) Trung vị của bảng số liệu ghép nhóm (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị) là $M_e = 64$ . |   |   |
| d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là $\Delta_Q = 6$ .                        |   |   |

**Câu 27 (Mức độ 3).** Biểu đồ dưới đây biểu diễn số lượt khách hàng đặt bàn qua hình thức trực tuyến mỗi ngày trong quý III năm 2022 của một nhà hàng. Cột thứ nhất biểu diễn số ngày có từ 1 đến dưới 6 lượt đặt bàn; cột thứ hai biểu diễn số ngày có từ 6 đến dưới 11 lượt đặt bàn;...



Lập bảng số liệu ghép nhóm với các nhóm cho bởi biểu đồ trên.

| Phát biểu                                                    | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là $R = 25$ . |   |   |
| b) Nhóm $[11; 16)$ có tần số bằng 43.                        |   |   |
| c) Một của mẫu số liệu ghép nhóm là 8,5.                     |   |   |
| d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là 8,5.       |   |   |

## 5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 28 (Mức độ 2).** Cho bảng biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về độ tuổi của cư dân trong một khu phố như sau

| Nhóm            | $[20; 30)$ | $[30; 40)$ | $[40; 50)$ | $[50; 60)$ | $[60; 70)$ | $[70; 80)$ |
|-----------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Tần số          | 25         | 20         | 20         | 15         | 14         | 6          |
| Tần số tích lũy | 25         | 45         | 65         | 80         | 94         | 100        |

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

KQ:

**Câu 29 (Mức độ 2).** Một bác tài xế thống kê lại độ dài quãng đường (đơn vị km) bác đã lái xe mỗi ngày trong một tháng ở bảng sau

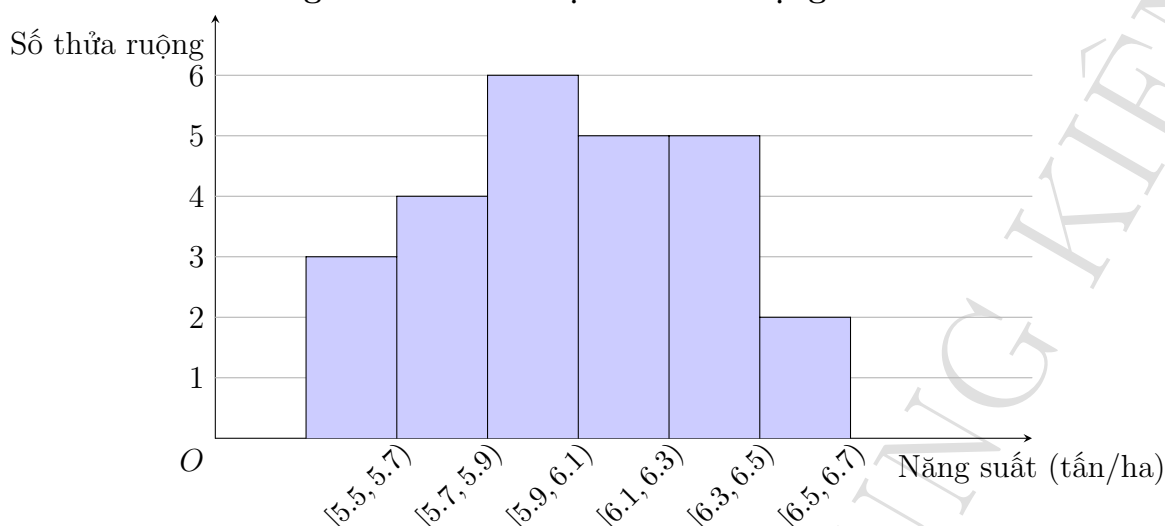
| Quãng đường (km) | $[50; 100)$ | $[100; 150)$ | $[150; 200)$ | $[200; 250)$ | $[250; 300)$ |
|------------------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Số ngày          | 5           | 10           | 9            | 4            | 2            |

Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ:

**Câu 30 (Mức độ 2).** Kết quả khảo sát năng suất (đơn vị tấn/ha) của một số thửa ruộng được minh họa ở biểu đồ sau:

Năng suất lúa của một số thửa ruộng



Với bảng tần số ghép nhóm tương ứng của mẫu số liệu trên. Hãy xác định khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm). KQ:

**Câu 31 (Mức độ 2).** Bảng sau đây cho biết chiều cao của các học sinh lớp 12A và 12B.

| Chiều cao (cm)          | [145; 150) | [150; 155) | [155; 160) | [160; 165) | [165; 170) | [170; 175) |
|-------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số học sinh của lớp 12A | 1          | 0          | 15         | 12         | 10         | 5          |
| Số học sinh của lớp 12B | 0          | 0          | 17         | 10         | 9          | 6          |

Gọi  $\Delta_Q^A$ ,  $\Delta_Q^B$  lần lượt là các khoảng tứ phân vị của các mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của học sinh lớp 12A và chiều cao của học sinh lớp 12B. Tính  $\Delta_Q^B - \Delta_Q^A$  (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm). KQ:

**Câu 32 (Mức độ 3).** Cho hai bảng biểu diễn số liệu ghép nhóm về nhiệt độ không khí trung bình các tháng năm 2021 tại Hà Nội và Huế (đơn vị: độ C) như sau:

☑ Số liệu ghép nhóm về nhiệt độ không khí trung bình các tháng năm 2021 tại Hà Nội:

| Nhóm   | [16,8; 19,8) | [19,8; 22,8) | [22,8; 25,8) | [25,8; 28,8) | [28,8; 31,8) |
|--------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Tần số | 2            | 3            | 2            | 1            | 4            |

☑ Số liệu ghép nhóm về nhiệt độ không khí trung bình các tháng năm 2021 tại Huế:

| Nhóm   | [16,8; 19,8) | [19,8; 22,8) | [22,8; 25,8) | [25,8; 28,8) | [28,8; 31,8) |
|--------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Tần số | 1            | 2            | 3            | 2            | 4            |

Gọi  $\Delta_Q^1$ ,  $\Delta_Q^2$  lần lượt là các khoảng tứ phân vị của các bảng số liệu ghép nhóm về nhiệt độ trung bình các tháng năm 2021 tại Hà Nội và Huế. Tính tỉ số  $\frac{\Delta_Q^1}{\Delta_Q^2}$  (kết quả làm tròn đến hàng phần mười). KQ:

## THẦY KIÊN TOÁN: ————— DẠY THẬT - HỌC THẬT - GIÁ TRỊ THẬT —————

## K12 – CHƯƠNG 3

§2. PHƯƠNG SAI, ĐỘ LỆCH CHUẨN  
CỦA MẪU SỐ LIỆU GHEP NHÓM

## A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

## 1 Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm

Ở lớp 11, ta đã biết giá trị đại diện của nhóm  $[a; b)$  là  $c = \frac{1}{2}(a + b)$ .

Tương tự như cách tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có thể được xác định thông qua giá trị đại diện và tần số của mỗi nhóm.

Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho dưới bảng sau

| Nhóm             | $[u_1; u_2)$ | $[u_2; u_3)$ | ... | $[u_k; u_{k+1})$ |
|------------------|--------------|--------------|-----|------------------|
| Giá trị đại diện | $x_1$        | $x_2$        | ... | $x_k$            |
| Tần số           | $n_1$        | $n_2$        | ... | $n_k$            |

**Định nghĩa 23** Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu  $S^2$ , được tính bởi công thức

$$S^2 = \frac{1}{n} [n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(x_k - \bar{x})^2],$$

trong đó

- ☑  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$  là cỡ mẫu;
- ☑  $\bar{x} = \frac{1}{n}(n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k)$  là số trung bình.

**Độ lệch chuẩn** của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu  $S$ , là căn bậc hai số học của phương sai, nghĩa là  $s = \sqrt{S^2}$ .

⚠ ☑ Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm có thể được tính theo công thức sau

$$S^2 = \frac{1}{n}(n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + \dots + n_kx_k^2) - \bar{x}^2.$$

- ☑ Trong thống kê người ta còn dùng đại lượng sau để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1} [n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(x_k - \bar{x})^2].$$

⚡ **NHẬN XÉT.** Ý nghĩa của phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm

- ☑ Phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu gốc. Chúng được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm xung quanh số trung bình của mẫu số liệu. Cụ thể, phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì dữ liệu càng phân tán.

- ☑ Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với đơn vị của mẫu số liệu.
- ☑ Khi hai mẫu số liệu ghép nhóm có cùng đơn vị đo và có số trung bình bằng nhau (hoặc xấp xỉ nhau), mẫu số liệu nào có độ lệch chuẩn nhỏ hơn thì mức độ phân tán (so với số trung bình cộng) của các số liệu trong mẫu đó sẽ thấp hơn.

## B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

### DẠNG 1 Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu

#### 1. Phương sai

Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi bảng sau.

| Nhóm             | $[u_1; u_2)$ | $[u_2; u_3)$ | $\dots$ | $[u_k; u_{k+1})$ |
|------------------|--------------|--------------|---------|------------------|
| Giá trị đại diện | $x_1$        | $x_2$        | $\dots$ | $x_k$            |
| Tần số           | $n_1$        | $n_2$        | $\dots$ | $n_k$            |

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu  $S^2$ , được tính bởi công thức

$$S^2 = \frac{1}{n} (n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + \dots + n_k x_k^2) - \bar{x}^2.$$

Trong đó

- ☑  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$  là cỡ mẫu.
- ☑  $\bar{x} = \frac{1}{n} (n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k)$  là số trung bình.

#### 2. Độ lệch chuẩn

**Độ lệch chuẩn** của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu  $S$ , là căn bậc hai số học của phương sai, nghĩa là  $S = \sqrt{S^2}$ .

### 1 Ví dụ mẫu

**Ví dụ 1 (Mức độ 2).** Hãy tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm sau

| Chiều cao (cm) | $[160; 164)$ | $[164; 168)$ | $[168; 172)$ | $[172; 176)$ | $[176; 180)$ |
|----------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Số học sinh    | 3            | 5            | 8            | 4            | 1            |

**Ví dụ 2 (Mức độ 2).** Cân nặng của một số quả mít trong một khu vườn được thống kê ở bảng sau

| Cân nặng (kg) | $[4; 6)$ | $[6; 8)$ | $[8; 10)$ | $[10; 12)$ | $[12; 14)$ |
|---------------|----------|----------|-----------|------------|------------|
| Số quả mít    | 6        | 12       | 19        | 9          | 4          |

Hãy tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên. (Kết quả các phép tính làm tròn đến hàng phần trăm)

**Ví dụ 3 (Mức độ 3).** Mai và Ngọc cùng sử dụng vòng đeo tay thông minh để ghi lại số bước chân hai bạn đi mỗi ngày trong một tháng. Kết quả được ghi lại ở bảng sau

| Số bước (đơn vị: nghìn) | [3; 5) | [5; 7) | [7; 9) | [9; 11) | [11; 13) |
|-------------------------|--------|--------|--------|---------|----------|
| Mai                     | 6      | 7      | 6      | 6       | 5        |
| Ngọc                    | 2      | 5      | 13     | 8       | 2        |

- a) Hãy tính số trung bình và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- b) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì bạn nào có số lượng bước chân đi mỗi ngày đều đặn hơn?

**Ví dụ 4 (Mức độ 3).** Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu  $A$  và  $B$  trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

| Giá đóng cửa | [120; 122) | [122; 124) | [124; 126) | [126; 128) | [128; 130) |
|--------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Cổ phiếu $A$ | 8          | 9          | 12         | 10         | 11         |
| Cổ phiếu $B$ | 16         | 4          | 3          | 6          | 21         |

Hãy so sánh độ rủi ro của cổ phiếu  $A$  và cổ phiếu  $B$ .

**Ví dụ 5 (Mức độ 3).** Thống kê lợi nhuận hàng tháng (đơn vị: triệu đồng) trong 20 tháng của hai nhà đầu tư được cho như sau:

| Lợi nhuận | [10; 20) | [20; 30) | [30; 40) | [40; 50) | [50; 60) |
|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số tháng  | 2        | 4        | 8        | 4        | 2        |

Bảng 3.2. Lợi nhuận theo tháng của nhà đầu tư nhỏ

| Lợi nhuận | [510; 520) | [520; 530) | [530; 540) | [540; 550) | [550; 560) |
|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số tháng  | 4          | 3          | 6          | 3          | 4          |

Bảng 3.3. Lợi nhuận theo tháng của nhà đầu tư lớn

Tính độ lệch chuẩn của hai mẫu số liệu ghép nhóm trên. Có nên dựa vào độ lệch chuẩn để so sánh độ rủi ro của hai nhà đầu tư này không?

**Ví dụ 6 (Mức độ 2).** Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau

| Quãng đường (km) | [2,7; 3,0) | [3,0; 3,3) | [3,3; 3,6) | [3,6; 3,9) | [3,9; 4,2) |
|------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số ngày          | 3          | 6          | 5          | 4          | 2          |

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A.** 3,39.      **B.** 11,62.      **C.** 0,1314.      **D.** 0,36.

**Ví dụ 7 (Mức độ 3).** Trong bài thực hành đo hiệu điện thế của mạch điện, An và Bình đã dùng hai vôn kế khác nhau để đo, mỗi bạn tiến hành đo 10 lần cho kết quả như sau

| Hiệu điện thế đo được (vôn) | [3, 85; 3, 90) | [3, 90; 3, 95) | [3, 95; 4, 00) | [4, 00; 4, 05) |
|-----------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Số lần An đo                | 1              | 6              | 2              | 1              |
| Số lần Bình đo              | 1              | 3              | 4              | 2              |

| Phát biểu                                                                | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Giá trị đại diện của hiệu điện thế đo được $[3, 90; 3, 95)$ là 3,915. |   |   |
| b) Độ lệch chuẩn kết quả đo của An xấp xỉ 0,04.                          |   |   |
| c) Độ lệch chuẩn kết quả đo của Bình xấp xỉ 0,01.                        |   |   |
| d) vôn-kế của Bình ổn định hơn.                                          |   |   |

**Ví dụ 8 (Mức độ 3).** Trong 30 ngày, một nhà đầu tư đã theo dõi giá cổ phiếu của hai công ty G và H vào phiên mở cửa mỗi ngày. Thông tin được ghi lại ở hai bảng dưới đây:

Bảng a. Giá cổ phiếu của công ty G

| Giá (nghìn đồng) | $[50; 52)$ | $[52; 54)$ | $[54; 56)$ | $[56; 58)$ | $[58; 60)$ |
|------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Tần số           | 3          | 7          | 9          | 8          | 3          |

Bảng b. Giá cổ phiếu của công ty H

| Giá (nghìn đồng) | $[40; 42)$ | $[42; 44)$ | $[44; 46)$ | $[46; 48)$ | $[48; 50)$ |
|------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Tần số           | 6          | 7          | 5          | 7          | 5          |

| Phát biểu                                                                      | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Công ty G có giá trị trung bình của giá cổ phiếu là 55,1 nghìn đồng.        |   |   |
| b) Phương sai của giá cổ phiếu công ty H là 4,69.                              |   |   |
| c) Giá cổ phiếu trung bình của công ty G cao hơn giá trung bình của công ty H. |   |   |
| d) Giá cổ phiếu của công ty H ít biến động hơn công ty G.                      |   |   |

**Ví dụ 9 (Mức độ 2).** Một vận động viên luyện tập chạy cự li 100 m đã ghi lại kết quả luyện tập như sau:

| Thời gian (giây) | $[10,2; 10,4)$ | $[10,4; 10,6)$ | $[10,6; 10,8)$ | $[10,8; 11)$ |
|------------------|----------------|----------------|----------------|--------------|
| Số vận động viên | 3              | 7              | 8              | 2            |

Tìm phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm này (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KQ:

**Ví dụ 10 (Mức độ 2).**

Bảng bên biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về độ tuổi của cư dân trong một khu phố. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là bao nhiêu?

KQ:

| Nhóm        | Giá trị đại diện | Tần số    |
|-------------|------------------|-----------|
| $[20 ; 30)$ | 25               | 25        |
| $[30 ; 40)$ | 35               | 20        |
| $[40 ; 50)$ | 45               | 20        |
| $[50 ; 60)$ | 55               | 15        |
| $[60 ; 70)$ | 65               | 14        |
| $[70 ; 80)$ | 75               | 6         |
|             |                  | $n = 100$ |



## 2 Bài tập tự luận

**Bài 1 (Mức độ 2).** Số lượng sách đọc của sinh viên trong một tháng được thống kê ở bảng sau:

| Số sách (quyển) | [0; 2) | [2; 4) | [4; 6) | [6; 8) |
|-----------------|--------|--------|--------|--------|
| Số sinh viên    | 8      | 15     | 22     | 5      |

Hãy tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm này.

**Bài 2 (Mức độ 2).** Chiều cao của một số học sinh trong một lớp được thống kê ở bảng sau:

| Chiều cao (cm) | [140; 150) | [150; 160) | [160; 170) | [170; 180) | [180; 190) |
|----------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số học sinh    | 5          | 10         | 15         | 8          | 2          |

Hãy tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm này.

**Bài 3 (Mức độ 2).** Nhiệt độ trung bình hàng ngày trong một tuần được thống kê ở bảng sau:

| Nhiệt độ ( $^{\circ}\text{C}$ ) | [20; 22) | [22; 24) | [24; 26) | [26; 28) | [28; 30) | [30; 32) | [32; 34) |
|---------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số ngày                         | 1        | 1        | 2        | 1        | 0        | 1        | 1        |

Hãy tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm này.

**Bài 4 (Mức độ 2).** Thời gian chạy 100m của các vận động viên trong một giải đấu được thống kê ở bảng sau:

| Thời gian (s)    | [10; 11) | [11; 12) | [12; 13) | [13; 14) |
|------------------|----------|----------|----------|----------|
| Số vận động viên | 3        | 7        | 12       | 8        |

Hãy tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm này.

**Bài 5 (Mức độ 3).** Một loại cây cảnh được trồng tại hai khu vực khác nhau  $C$  và  $D$  trong công viên. Người ta thống kê chiều cao của một số cây cảnh 3 năm tuổi ở bảng sau

| Chiều cao (cm)             | [50; 55) | [55; 60) | [60; 65) | [65; 70) | [70; 75) |
|----------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số cây trồng ở khu vực $C$ | 15       | 25       | 30       | 20       | 10       |
| Số cây trồng ở khu vực $D$ | 10       | 20       | 25       | 35       | 10       |

a) Hãy so sánh chiều cao trung bình của cây cảnh trồng tại khu vực  $C$  và khu vực  $D$ .

b) Nếu so sánh theo phương sai thì cây trồng tại khu vực nào có chiều cao đồng đều hơn?

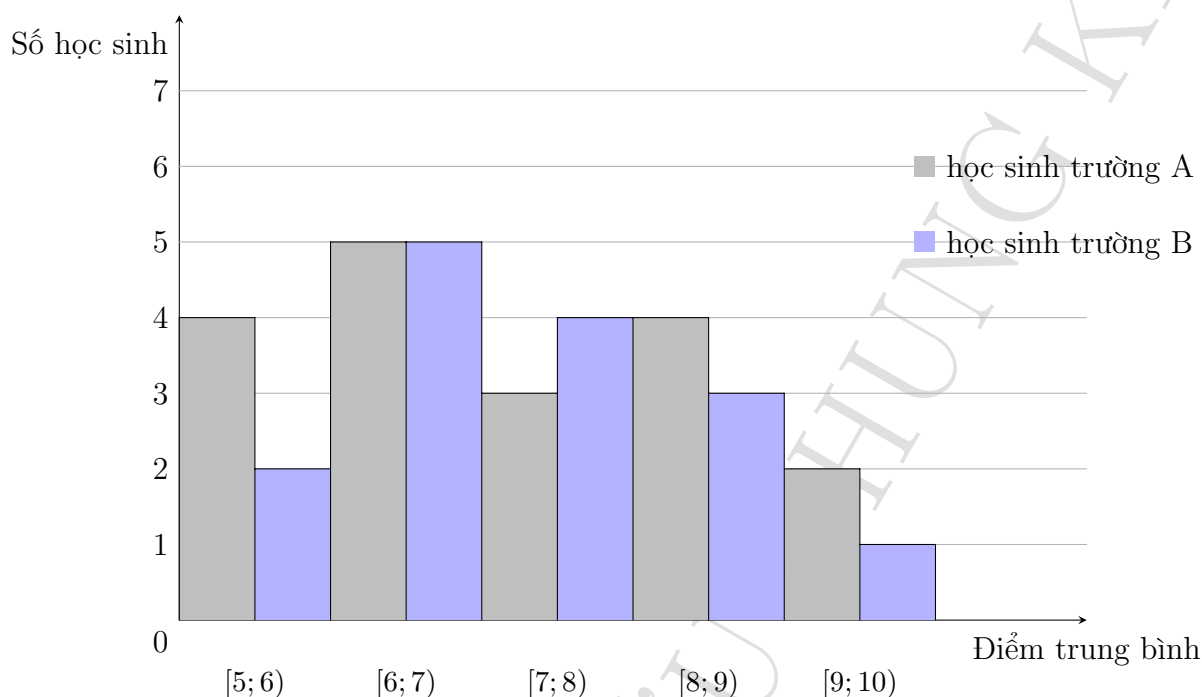
**Bài 6 (Mức độ 3).** Bảng sau thống kê lại tổng số giờ nắng trong tháng 6 của các năm từ 2002 đến 2021 tại hai trạm quan trắc đặt ở Nha Trang và Quy Nhơn

| Số giờ nắng        | [130; 160) | [160; 190) | [190; 220) | [220; 250) | [250; 280) | [280; 310) |
|--------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số năm ở Nha Trang | 1          | 1          | 1          | 8          | 7          | 2          |
| Số năm ở Quy Nhơn  | 0          | 1          | 2          | 4          | 10         | 3          |

Hỏi số giờ nắng trong tháng 6 của địa phương nào đồng đều hơn?

**Bài 7 (Mức độ 3).** Biểu đồ sau mô tả kết quả điều tra về điểm trung bình năm học của học sinh hai trường A và B.

Điểm trung bình năm học của học sinh hai trường A và B



Hỏi học sinh trường nào có điểm trung bình đồng đều hơn?

**Bài 8 (Mức độ 3).**

Kết quả 40 lần nhảy xa của hai vận động viên nam Dũng và Huy được lần lượt thống kê trong các bảng sau (đơn vị: mét)

| Nhóm           | Tần số   | Nhóm           | Tần số   |
|----------------|----------|----------------|----------|
| [6, 22; 6, 46) | 3        | [6, 22; 6, 46) | 2        |
| [6, 46; 6, 70) | 7        | [6, 46; 6, 70) | 5        |
| [6, 70; 6, 94) | 5        | [6, 70; 6, 94) | 8        |
| [6, 94; 7, 18) | 20       | [6, 94; 7, 18) | 19       |
| [7, 18; 7, 42) | 5        | [7, 18; 7, 42) | 6        |
|                | $n = 40$ |                | $n = 40$ |

- Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Dũng cho bởi Bảng thứ nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
- Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Huy cho bởi Bảng thứ hai (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
- Trong hai vận động viên đó, kết quả nhảy xa của vận động viên nào đồng đều hơn?

**Bài 9 (Mức độ 3).** Hai bảng dưới đây trình bày kết quả thống kê lượng cà phê (tính theo  $\text{cm}^3$ ) được pha chế trong mỗi cốc do hai máy bán cà phê tự động A, B thực hiện trong một ngày.

| Hàm lượng cà phê ( $\text{cm}^3$ ) | [242; 246) | [246; 250) | [250; 254) | [254; 258) | [258; 262) |
|------------------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Tần số                             | 6          | 5          | 28         | 7          | 4          |

Lượng cà phê trong mỗi cốc do nhà máy A sản xuất

| Hàm lượng cà phê (cm <sup>3</sup> ) | [242; 246) | [246; 250) | [250; 254) | [254; 258) | [258; 262) |
|-------------------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Tần số                              | 5          | 8          | 17         | 14         | 6          |

Lượng cà phê trong mỗi cốc do nhà máy B sản xuất

- a) Ước tính độ lệch chuẩn của lượng cà phê trong những cốc được pha chế bởi mỗi máy.
- b) Giả sử lượng cà phê mong muốn trong mỗi cốc là 250 cm<sup>3</sup>. Nếu định kinh doanh cà phê bằng hình thức bán hàng tự động thì anh Hùng nên chọn mua loại máy nào?

### 3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 1 (Mức độ 2).** Cho bảng số liệu sau đây

| Nhóm   | [1,5; 2,5) | [2,5; 3,5) | [3,5; 4,5) | [4,5; 5,5) | [5,5; 6,5) |
|--------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Tần số | 2          | 3          | 7          | 2          | 1          |

Phương sai của mẫu số liệu là

**A.**  $s^2 = \frac{8}{15} - \left(\frac{7}{15}\right)^2$     **B.**  $s^2 = \frac{233}{15} - \left(\frac{50}{15}\right)^2$     **C.**  $s^2 = \frac{8}{15} - \left(\frac{57}{15}\right)^2$     **D.**  $s^2 = \frac{233}{15} - \left(\frac{57}{15}\right)^2$

**Câu 2 (Mức độ 2).** Bạn Lan rất thích đọc sách. Thời gian đọc sách mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Lan được thống kê lại ở bảng sau

| Thời gian (phút) | [15; 20) | [20; 25) | [25; 30) | [30; 35) | [35; 40) |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số ngày          | 4        | 5        | 8        | 2        | 1        |

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- A.** 45,12.    **B.** 46.    **C.** 45,88.    **D.** 45,5.

**Câu 3 (Mức độ 2).**

Một siêu thị thống kê số tiền (đơn vị: chục nghìn đồng) mà 44 khách hàng mua hàng ở siêu thị đó trong một ngày. Số liệu được ghi lại trong bảng bên. Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A.** 53,2.    **B.** 46,1.    **C.** 30.    **D.** 11.

| Nhóm     | Giá trị đại diện | Tần số   |
|----------|------------------|----------|
| [40; 45) | 42,5             | 4        |
| [45; 50) | 47,5             | 14       |
| [50; 55) | 52,5             | 8        |
| [55; 60) | 57,5             | 10       |
| [60; 65) | 62,5             | 6        |
| [65; 70) | 67,5             | 2        |
|          |                  | $n = 44$ |

**Câu 4 (Mức độ 2).** Dũng là học sinh rất giỏi chơi rubik, bạn có thể giải nhiều loại khối rubik khác nhau. Trong một lần tập luyện giải khối rubik  $3 \times 3$ , bạn Dũng đã tự thống kê lại thời gian giải rubik trong 25 lần giải liên tiếp ở bảng sau

| Thời gian giải rubik (giây) | [8; 10) | [10; 12) | [12; 14) | [14; 16) | [16; 18) |
|-----------------------------|---------|----------|----------|----------|----------|
| Số ngày                     | 4       | 6        | 8        | 4        | 3        |

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- A. 5,98. B. 6,00. C. 5,95. D. 6,05.

**Câu 5 (Mức độ 2).**

Một siêu thị thống kê số tiền (đơn vị: chục nghìn đồng) mà 44 khách hàng mua hàng ở siêu thị đó trong một ngày. Số liệu được ghi lại trong bảng bên. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) là

- A. 6, 8. B. 7, 3. C. 3, 3. D. 46, 1.

| Nhóm     | Giá trị đại diện | Tần số   |
|----------|------------------|----------|
| [40; 45) | 42,5             | 4        |
| [45; 50) | 47,5             | 14       |
| [50; 55) | 52,5             | 8        |
| [55; 60) | 57,5             | 10       |
| [60; 75) | 62,5             | 6        |
| [65; 70) | 67,5             | 2        |
|          |                  | $n = 44$ |

**Câu 6 (Mức độ 2).**

Cho bảng số liệu bên. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) là

- A. 13,4. B. 13,3. C. 12,1. D. 12,2.

| Nhóm       | Tần số |
|------------|--------|
| [50 ; 60)  | 6      |
| [60 ; 70)  | 12     |
| [70 ; 80)  | 7      |
| [80 ; 90)  | 8      |
| [90 ; 100) | 7      |
| $n = 40$   |        |

**Câu 7 (Mức độ 2).** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. Phương sai luôn luôn là số không âm.  
 B. Phương sai là bình phương của độ lệch chuẩn.  
 C. Phương sai càng lớn thì độ phân tán của các giá trị quanh số trung bình càng lớn.  
 D. Phương sai luôn luôn lớn hơn độ lệch chuẩn.

**4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai**

**Câu 8 (Mức độ 3).** Trong 30 ngày, một nhà khí tượng đã theo dõi lượng mưa tại hai địa điểm P và Q. Thông tin được ghi lại ở hai bảng dưới đây:

Bảng lượng mưa của địa điểm P (mm)

| Lượng mưa | [0; 10) | [10; 20) | [20; 30) | [30; 40) | [40; 50) |
|-----------|---------|----------|----------|----------|----------|
| Số ngày   | 4       | 8        | 10       | 5        | 3        |

Bảng lượng mưa của địa điểm Q (mm)

| Lượng mưa | [5; 15) | [15; 25) | [25; 35) | [35; 45) | [45; 55) |
|-----------|---------|----------|----------|----------|----------|
| Số ngày   | 5       | 7        | 8        | 6        | 4        |

| Phát biểu                                 | Đ | S |
|-------------------------------------------|---|---|
| a) Lượng mưa trung bình tại Q là 25,5 mm. |   |   |

| Phát biểu                                               | Đ | S |
|---------------------------------------------------------|---|---|
| b) Lượng mưa trung bình tại Q cao hơn tại P.            |   |   |
| c) Phương sai của mẫu số liệu lượng mưa tại P là 133,9. |   |   |
| d) Lượng mưa tại Q ít biến động hơn tại P.              |   |   |

**Câu 9 (Mức độ 3).** Trong 30 ngày, một nghiên cứu đã theo dõi thời gian sử dụng internet hàng ngày của hai nhóm người, nhóm T và nhóm U. Thông tin được ghi lại ở hai bảng dưới đây:

Bảng thời gian sử dụng internet của nhóm T (giờ)

| Thời gian | [1; 2) | [2; 3) | [3; 4) | [4; 5) | [5; 6) |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Số người  | 2      | 4      | 8      | 10     | 6      |

Bảng thời gian sử dụng internet của nhóm U (giờ)

| Thời gian | [0; 1) | [1; 2) | [2; 3) | [3; 4) | [4; 5) |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Số người  | 1      | 3      | 5      | 7      | 14     |

| Phát biểu                                                           | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Thời gian sử dụng internet trung bình của nhóm U là 3,2 giờ.     |   |   |
| b) Thời gian sử dụng internet trung bình của nhóm T cao hơn nhóm U. |   |   |
| c) Phương sai của mẫu số liệu nhóm U là 1,33.                       |   |   |
| d) Thời gian sử dụng internet của nhóm T ít biến động hơn nhóm U.   |   |   |

**Câu 10 (Mức độ 3).** Trong 30 ngày, một thư viện đã theo dõi số sách đọc hàng ngày của hai nhóm độc giả, nhóm X và nhóm Y. Thông tin được ghi lại ở hai bảng dưới đây:

Bảng số sách đọc của nhóm X (sách)

| Số sách | [0; 2) | [2; 4) | [4; 6) | [6; 8) | [8; 10) |
|---------|--------|--------|--------|--------|---------|
| Số ngày | 5      | 7      | 10     | 5      | 3       |

Bảng số sách đọc của nhóm Y (sách)

| Số sách | [1; 3) | [3; 5) | [5; 7) | [7; 9) | [9; 11) |
|---------|--------|--------|--------|--------|---------|
| Số ngày | 4      | 8      | 9      | 6      | 3       |

| Phát biểu                                            | Đ | S |
|------------------------------------------------------|---|---|
| a) Số sách đọc trung bình của nhóm Y là 5,73.        |   |   |
| b) Số sách đọc trung bình của nhóm X cao hơn nhóm Y. |   |   |
| c) Phương sai của mẫu số liệu nhóm X là 5,71.        |   |   |
| d) Số sách đọc của nhóm X ít biến động hơn nhóm Y.   |   |   |

**Câu 11 (Mức độ 3).** Hai bảng sau lần lượt biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm thống kê mức lương của hai công ty A, B (đơn vị: triệu đồng).

| Nhóm     | Giá trị đại diện | Tần số   | Nhóm     | Giá trị đại diện | Tần số   |
|----------|------------------|----------|----------|------------------|----------|
| [10; 15) | 12,5             | 15       | [10; 15) | 12,5             | 25       |
| [15; 20) | 17,5             | 18       | [15; 20) | 17,5             | 15       |
| [20; 25) | 22,5             | 10       | [20; 25) | 22,5             | 7        |
| [25; 30) | 27,5             | 10       | [25; 30) | 27,5             | 5        |
| [30; 35) | 32,5             | 5        | [30; 35) | 32,5             | 5        |
| [35; 40) | 37,5             | 2        | [35; 40) | 37,5             | 3        |
|          |                  | $n = 60$ |          |                  | $n = 60$ |

| Phát biểu                                                | Đ | S |
|----------------------------------------------------------|---|---|
| a) Số trung bình công ty A xấp xỉ bằng 20,7.             |   |   |
| b) Phương sai của mẫu số liệu công ty xấp xỉ bằng 62,29. |   |   |
| c) Độ lệch chuẩn công ty xấp xỉ bằng 9.                  |   |   |
| d) Mức lương ở công ty A đồng đều hơn.                   |   |   |

**Câu 12 (Mức độ 3).** Thành tích môn nhảy cao của các vận động viên tại một giải điền kinh dành cho học sinh trung học phổ thông như sau

| Mức xà (cm)      | [170; 172) | [172; 174) | [174; 176) | [176; 180) |
|------------------|------------|------------|------------|------------|
| Số vận động viên | 3          | 10         | 6          | 1          |

| Phát biểu                                                 | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------|---|---|
| a) Giá trị đại diện của [174; 176) là 175.                |   |   |
| b) Giá trị trung bình của mẫu số liệu trên xấp xỉ 173,6.  |   |   |
| c) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên xấp xỉ 1,8.         |   |   |
| d) Các vận động viên tham gia nhảy cao là không đồng đều. |   |   |

**Câu 13 (Mức độ 3).** Người ta ghi lại tiền lãi (đơn vị: triệu đồng) của một số nhà đầu tư (với số tiền đầu tư như nhau), khi đầu tư vào hai lĩnh vực A, B cho kết quả như sau

| Tiền lãi                     | [5; 10) | [10; 15) | [15; 20) | [20; 25) | [25; 30) |
|------------------------------|---------|----------|----------|----------|----------|
| Số nhà đầu tư vào lĩnh vực A | 2       | 5        | 8        | 6        | 4        |
| Số nhà đầu tư vào lĩnh vực B | 8       | 4        | 2        | 5        | 6        |

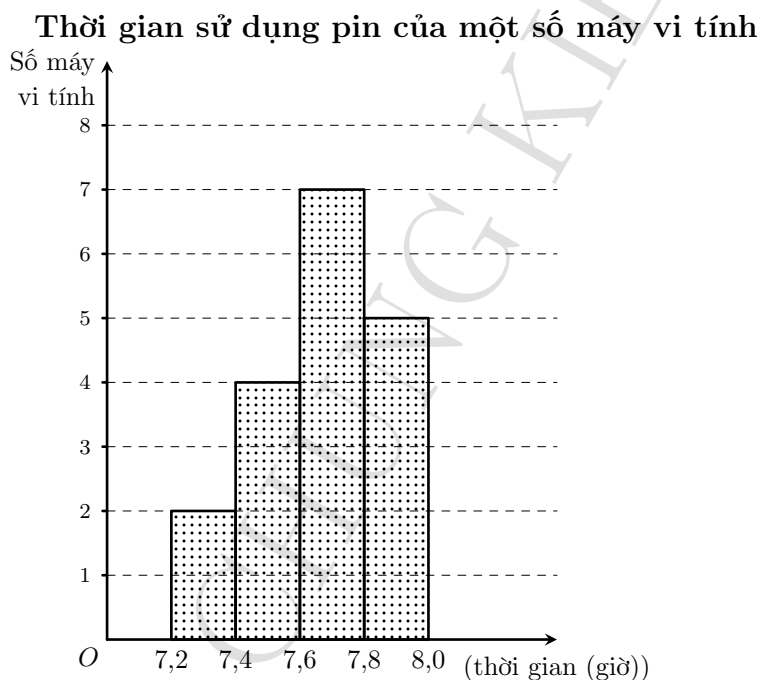
| Phát biểu                                                           | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Giá trị trung bình của lĩnh vực B xấp xỉ bằng 16,9 (triệu đồng). |   |   |
| b) Độ lệch chuẩn của lĩnh vực A xấp xỉ bằng 8,04.                   |   |   |
| c) Độ lệch chuẩn của lĩnh vực B xấp xỉ bằng 5,8.                    |   |   |
| d) Đầu tư vào lĩnh vực B rủi ro hơn.                                |   |   |

## 5

## Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 14 (Mức độ 2).**

Kết quả khảo sát thời gian sử dụng liên tục (đơn vị: giờ) từ lúc sạc đầy cho đến khi hết của pin một số máy vi tính cùng loại được mô tả bằng biểu đồ bên. Hãy xác định số phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm này (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ: 

**Câu 15 (Mức độ 2).** Một vận động viên luyện tập bơi lội 50 m đã ghi lại kết quả luyện tập như sau:

| Thời gian (giây) | [25,0; 25,5) | [25,5; 26,0) | [26,0; 26,5) | [26,5; 27,0) |
|------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Số vận động viên | 4            | 5            | 6            | 5            |

Tìm phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm này (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KQ: 

**Câu 16 (Mức độ 2).** Một nhóm vận động viên chạy marathon đã ghi lại thời gian hoàn thành cự li 42 km như sau:

| Thời gian (giờ)  | [3,0; 3,5) | [3,5; 4,0) | [4,0; 4,5) | [4,5; 5,0) |
|------------------|------------|------------|------------|------------|
| Số vận động viên | 2          | 6          | 8          | 4          |

Tìm phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm này (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

KQ: 

**Câu 17 (Mức độ 2).** Tốc độ của 20 xe hơi khi đi qua một trạm kiểm tra tốc độ (đơn vị: km/h) được thống kê lại như sau

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 42   | 43,4 | 43,4 | 46,5 | 46,7 | 46,8 | 47,5 | 47,7 | 48,1 | 48,4 |
| 50,8 | 52,1 | 52,7 | 53,9 | 54,8 | 55,6 | 57,5 | 59,6 | 60,3 | 61,1 |

Độ lệch chuẩn (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

KQ: 

**Câu 18 (Mức độ 2).** Để đánh giá chất lượng một loại pin điện thoại mới, người ta ghi lại thời gian nghe nhạc liên tục của điện thoại được sạc đầy pin cho đến khi hết pin cho kết quả sau



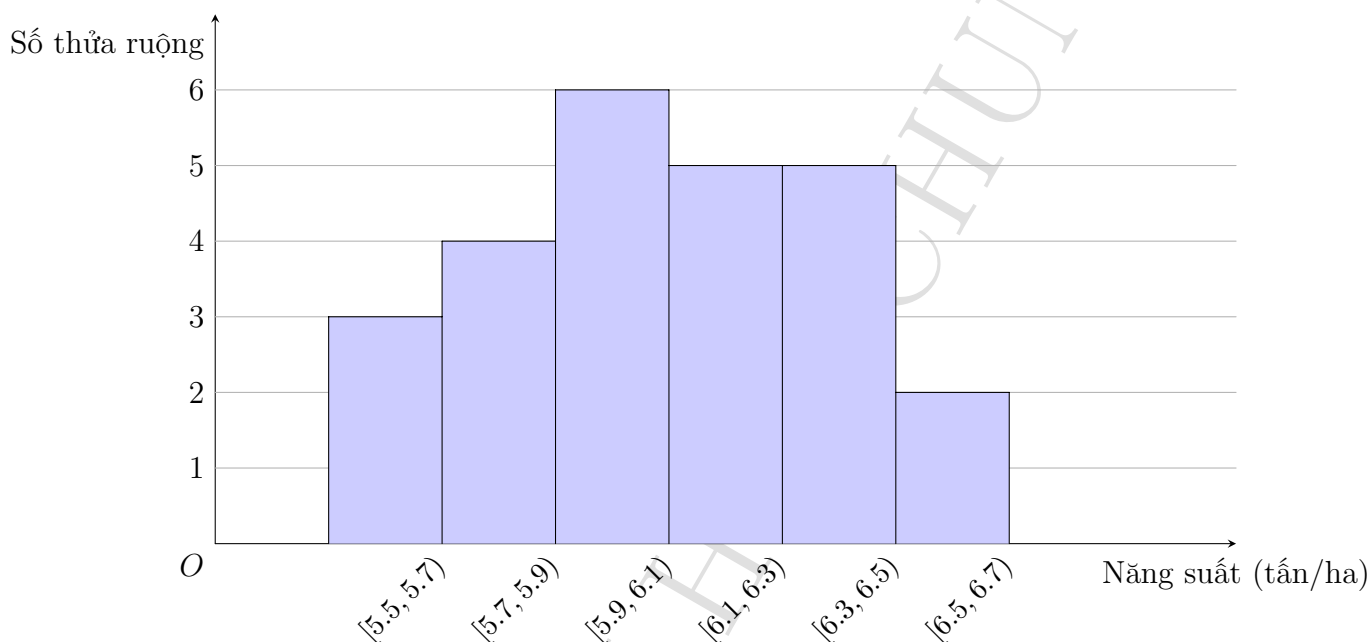
|                              |          |          |          |          |          |
|------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Thời gian (giờ)              | [5; 5,5) | [5,5; 6) | [6; 6,5) | [6,5; 7) | [7; 7,5) |
| Số chiếc điện thoại (tần số) | 2        | 8        | 15       | 10       | 5        |

Độ lệch chuẩn (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

KQ:

**Câu 19 (Mức độ 2).** Kết quả khảo sát năng suất (đơn vị tấn/ha) của một số thửa ruộng được minh họa ở biểu đồ sau:

Năng suất lúa của một số thửa ruộng



Độ lệch chuẩn (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

KQ:

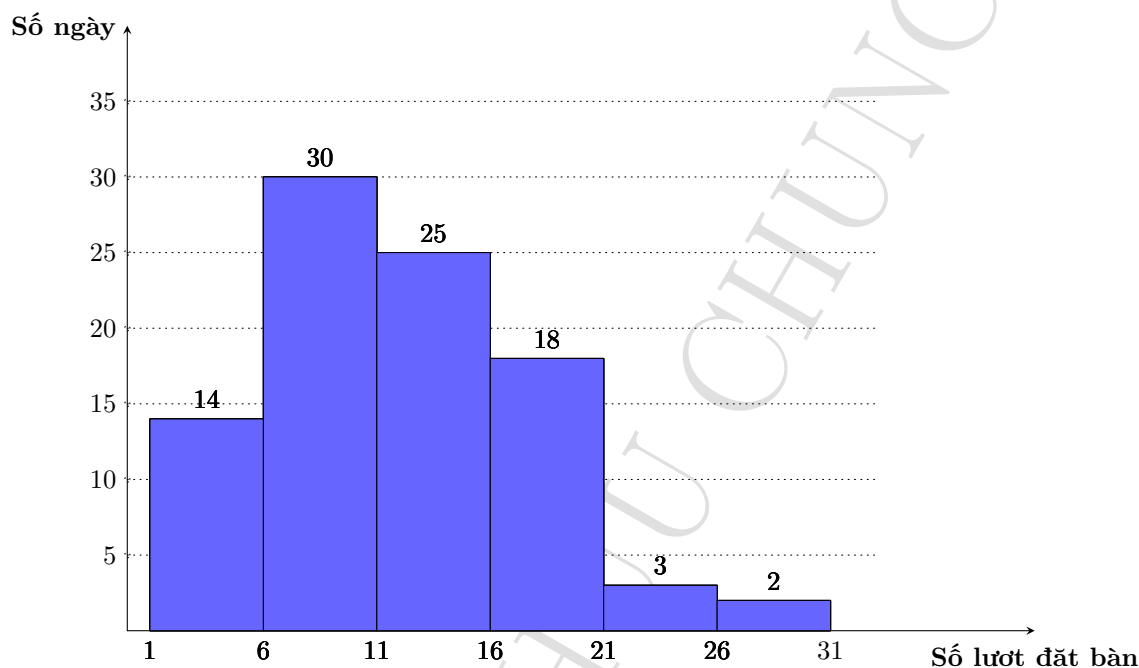
## DẠNG 2

## Giá trị ngoại lệ

☑ Giá trị  $x$  trong mẫu số liệu là giá trị ngoại lệ nếu  $x > Q_3 + 1,5\Delta_Q$  hoặc  $x < Q_1 - 1,5\Delta_Q$ .

## 1 Ví dụ mẫu

**Ví dụ 11 (Mức độ 2).** Biểu đồ dưới đây biểu diễn số lượt khách hàng đặt bàn qua hình thức trực tuyến mỗi ngày trong quý III năm 2022 của một nhà hàng. Cột thứ nhất biểu diễn số ngày có từ 1 đến dưới 6 lượt đặt bàn; cột thứ hai biểu diễn số ngày có từ 6 đến dưới 11 lượt đặt bàn; ...



Nhóm nào sau đây chứa giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi biểu đồ trên?

- A.** [11; 16). **B.** [16; 21). **C.** [21; 26). **D.** [26; 31).

**Ví dụ 12 (Mức độ 2).** Thời gian (phút) truy cập internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau. Tìm nhóm chứa giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu.

| Thời gian (phút) | [7,5; 9,5) | [9,5; 12,5) | [12,5; 15,5) | [15,5; 18,5) | [18,5; 21,5) | [21,5; 24,5) |
|------------------|------------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Số học sinh      | 2          | 3           | 10           | 15           | 24           | 2            |

**Ví dụ 13 (Mức độ 2).** Thời gian chờ khám bệnh của các bệnh nhân tại phòng khám X được cho trong bảng sau. Mẫu số liệu đó có giá trị ngoại lệ không? Vì sao?

| Thời gian (phút) | [0; 5) | [5; 10) | [10; 15) | [15; 20) |
|------------------|--------|---------|----------|----------|
| Số bệnh nhân     | 3      | 12      | 15       | 8        |

## 2 Bài tập tự luận

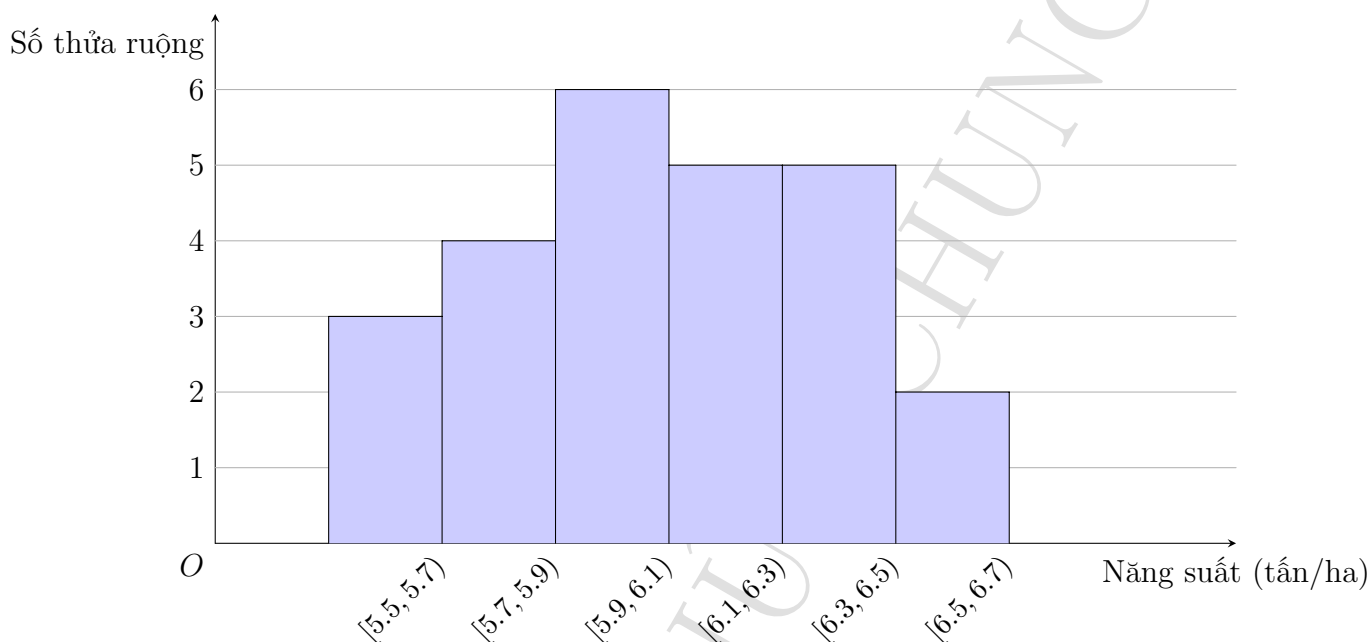
**Bài 10 (Mức độ 2).** Kết quả đo chiều cao của 100 cây keo 3 năm tuổi tại một nông trường được cho ở bảng sau

| Chiều cao (m) | [8,4; 8,6) | [8,6; 8,8) | [8,8; 9,0) | [9,0; 9,2) | [9,2; 9,4) |
|---------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số cây        | 5          | 12         | 25         | 44         | 14         |

- a) Hãy tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- b) Trong 100 cây keo trên có 1 cây cao 8,4 m. Hỏi chiều cao của cây keo này có phải là giá trị ngoại lệ không?

**Bài 11 (Mức độ 2).** Kết quả khảo sát năng suất (đơn vị tấn/ha) của một số thửa ruộng được minh họa ở biểu đồ sau

Năng suất lúa của một số thửa ruộng



- a) Lập bảng tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm tương ứng của mẫu số liệu trên.
- b) Hãy xác định nhóm chứa giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu trên.

**Bài 12 (Mức độ 3).** Hằng ngày ông Thắng đều đi xe buýt từ nhà đến cơ quan. Dưới đây là bảng thống kê thời gian của 100 lần ông Thắng đi xe buýt từ nhà đến cơ quan.

| Thời gian (phút) | [15; 18) | [18; 21) | [21; 24) | [24; 27) | [27; 30) | [30; 33) |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số lượt          | 22       | 38       | 27       | 8        | 4        | 1        |

- a) Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- b) Biết rằng trong 100 lần đi trên, chỉ có đúng một lần ông Thắng đi hết hơn 29 phút. Thời gian của lần đi đó có phải là giá trị ngoại lệ không?
- c) Hãy tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm ở trên sau khi đã loại bỏ các giá trị ngoại lệ. Em có nhận xét gì về khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị vừa tìm được và khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị ban đầu?

## 3

## Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 20 (Mức độ 2).** Điểm thi môn Toán (thang điểm 100, điểm được làm tròn đến 1) của 60 thí sinh được cho trong bảng sau:

| Điểm        | [0; 20) | [20; 40) | [40; 60) | [60; 80) | [80; 100) |
|-------------|---------|----------|----------|----------|-----------|
| Số thí sinh | 3       | 10       | 27       | 16       | 4         |

Giá trị nào dưới đây có thể là giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu trên.

- A.** 4.                                      **B.** 5.                                      **C.** 98.                                      **D.** 99.

**Câu 21 (Mức độ 2).** Một hãng xe ô tô thống kê lại số lần gặp sự cố về động cơ của 100 chiếc xe cùng loại sau 2 năm sử dụng đầu tiên ở bảng sau:

| Số lần gặp sự cố | [1; 2] | [3; 4] | [5; 6] | [7; 8] | [9; 10] | [11; 12] |
|------------------|--------|--------|--------|--------|---------|----------|
| Số xe            | 17     | 33     | 25     | 15     | 5       | 5        |

Nhóm nào sau đây có thể chứa giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu?

- A.** [1; 2] .                                      **B.** [3; 4] .                                      **C.** [9; 10] .                                      **D.** [11; 12] .

## 4

## Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 22 (Mức độ 2).** Bảng sau đây cho biết chiều cao của các học sinh lớp 12A và 12B.

| Chiều cao (cm)          | [145; 150) | [150; 155) | [155; 160) | [160; 165) | [165; 170) | [170; 175) |
|-------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số học sinh của lớp 12A | 1          | 0          | 15         | 12         | 10         | 5          |
| Số học sinh của lớp 12B | 0          | 0          | 17         | 10         | 9          | 6          |

| Phát biểu                                                       | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Hai mẫu số liệu trên đều không có giá trị ngoại lệ.          |   |   |
| b) Mẫu số liệu của lớp 12A có thể chứa giá trị ngoại lệ.        |   |   |
| c) Mẫu số liệu của lớp 12B có thể chứa giá trị ngoại lệ.        |   |   |
| d) Mẫu số liệu của cả hai lớp đều có thể chứa giá trị ngoại lệ. |   |   |

**Câu 23 (Mức độ 2).** Thời gian (phút) truy cập internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau.

| Thời gian (phút) | [9,5; 12,5) | [12,5; 15,5) | [15,5; 18,5) | [18,5; 21,5) | [21,5; 24,5) |
|------------------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Số học sinh      | 3           | 12           | 15           | 24           | 2            |

| Phát biểu                                                     | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Mẫu số liệu trên không có giá trị ngoại lệ.                |   |   |
| b) Mẫu số liệu trên có một nhóm có thể chứa giá trị ngoại lệ. |   |   |

| Phát biểu                                                             | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------|---|---|
| c) Mẫu số liệu trên có hai nhóm có thể chứa giá trị ngoại lệ.         |   |   |
| d) Giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu có thể thuộc nhóm $[9,5; 12,5)$ . |   |   |

## 5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

### Câu 24 (Mức độ 2).

Một người ghi lại thời gian đàm thoại của một số cuộc gọi cho kết quả như bảng bên. Mẫu số liệu trên có bao nhiêu khoảng chứa giá trị ngoại lệ?

KQ:

| Thời gian $t$ (phút) | Số cuộc gọi |
|----------------------|-------------|
| $0 \leq t < 1$       | 8           |
| $1 \leq t < 2$       | 17          |
| $2 \leq t < 3$       | 25          |
| $3 \leq t < 4$       | 20          |
| $4 \leq t < 5$       | 10          |

**Câu 25 (Mức độ 2).** Thống kê số thẻ vàng của mỗi cầu lạc bộ trong giải ngoại hạng Anh mùa giải 2021 – 2022 cho kết quả sau:

| Số lượng thẻ vàng | $[40; 50)$ | $[50; 60)$ | $[60; 70)$ | $[70; 80)$ | $[80; 90)$ | $[90; 100)$ | $[100; 110)$ |
|-------------------|------------|------------|------------|------------|------------|-------------|--------------|
| Tần số            | 2          | 5          | 7          | 5          | 0          | 0           | 1            |

(Theo *premierleague.com*)

Mẫu số liệu trên có bao nhiêu khoảng chứa giá trị ngoại lệ?

KQ:

THẦY KIÊN TOÁN: ————— DẠY THẬT - HỌC THẬT - GIÁ TRỊ THẬT —————

K12 – CHƯƠNG 3

§3. ĐỀ ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG III

## A. ĐỀ ÔN TẬP SỐ 1

## 1 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Sử dụng dữ kiện sau để trả lời câu hỏi trong các câu hỏi từ 1 đến 7.

Một vườn thú ghi lại tuổi thọ (đơn vị: năm) của 20 con hổ và thu được kết quả như sau

| Tuổi thọ  | [14; 15) | [15; 16) | [16; 17) | [17; 18) | [18; 19) |
|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số con hổ | 1        | 3        | 8        | 6        | 2        |

**Câu 1 (Mức độ 1).** Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm này là

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

**Câu 2 (Mức độ 2).** Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là

- A. [14; 15). B. [15; 16). C. [16; 17). D. [17; 18).

**Câu 3 (Mức độ 2).** Tứ phân vị thứ ba là

- A. 16,125. B. 17,5. C. 18,5. D. 18,125.

**Câu 4 (Mức độ 2).** Tuổi thọ trung bình của các con hổ trong mẫu dữ liệu là

- A. 16. B. 17. C. 16,5. D. 16,75.

**Câu 5 (Mức độ 2).** Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là

- A. 1,725. B. 1,375. C. 1. D. 5.

**Câu 6 (Mức độ 2).** Số đặc trưng nào không sử dụng thông tin của nhóm số liệu đầu tiên và nhóm số liệu cuối cùng?

- A. Khoảng biến thiên. B. Khoảng tứ phân vị. C. Phương sai. D. Độ lệch chuẩn.

**Câu 7 (Mức độ 2).** Nếu thay tất cả các tần số trong mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng 4 số thì số đặc trưng nào sau đây không thay đổi?

- A. Khoảng biến thiên. B. Khoảng tứ phân vị. C. Phương sai. D. Độ lệch chuẩn.

Sử dụng dữ kiện sau để trả lời câu hỏi trong các câu hỏi từ 8 đến 9.

Dũng là học sinh rất giỏi chơi rubik, bạn có thể giải nhiều loại khối rubik khác nhau. Trong một lần tập luyện giải khối rubik  $3 \times 3$ , bạn Dũng đã tự thống kê lại thời gian giải rubik trong 25 lần giải liên tiếp ở bảng sau

| Thời gian giải rubik (giây) | [8; 10) | [10; 12) | [12; 14) | [14; 16) | [16; 18) |
|-----------------------------|---------|----------|----------|----------|----------|
| Số ngày                     | 4       | 6        | 8        | 4        | 3        |

**Câu 8 (Mức độ 2).** Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A. 10,75. B. 1,75. C. 3,625. D. 14,38.

**Câu 9 (Mức độ 2).** Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- A. 5,98. B. 6. C. 2,44. D. 2,5.

**Câu 10 (Mức độ 2).** Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau

| Thời gian (phút) | [20; 25) | [25; 30) | [30; 35) | [35; 40) | [40; 45) |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số ngày          | 6        | 6        | 4        | 1        | 1        |

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị bằng?

- A. 31,77. B. 32. C. 31. D. 31,25.

Sử dụng dữ liệu sau để trả lời câu hỏi trong các câu hỏi từ 11 đến 12.

Người ta ghi lại tiền lãi (đơn vị: triệu đồng) của một số nhà đầu tư (với số tiền đầu tư như nhau), khi đầu tư vào hai lĩnh vực  $A$ ,  $B$  cho kết quả như sau

| Tiền lãi                       | [5; 10) | [10; 15) | [15; 20) | [20; 25) | [25; 30) |
|--------------------------------|---------|----------|----------|----------|----------|
| Số nhà đầu tư vào lĩnh vực $A$ | 2       | 5        | 8        | 6        | 4        |
| Số nhà đầu tư vào lĩnh vực $B$ | 8       | 4        | 2        | 5        | 6        |

**Câu 11 (Mức độ 1).** Tiền lãi trung bình của lĩnh vực  $A$  bằng  $1a, b$ . Khi đó  $a \cdot b$  bằng

- A. 40. B. 54. C. 13. D. 45.

**Câu 12 (Mức độ 3).** Hiệu số độ lệch chuẩn của mẫu số liệu  $B$  và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu  $A$  là (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

- A. 1,40. B. 8,04. C. 2,21. D. 0,43.

## 2 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 13 (Mức độ 2).** Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau

| Quãng đường (km) | [2,7; 3,0) | [3,0; 3,3) | [3,3; 3,6) | [3,6; 3,9) | [3,9; 4,2) |
|------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số ngày          | 3          | 6          | 5          | 4          | 2          |

| Phát biểu                                                                | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là 1,5.                   |   |   |
| b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là 0,5.                   |   |   |
| c) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là 0,36.                         |   |   |
| d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với 0,36. |   |   |

**Câu 14 (Mức độ 2).** Xét tính đúng - sai của các mệnh đề dưới đây

| Phát biểu | Đ | S |
|-----------|---|---|
|-----------|---|---|



| Phát biểu                                                                                      | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc.   |   |   |
| b) Khoảng tứ phân vị không là một đại lượng cho biết mức độ phân tán của nửa giữa mẫu số liệu. |   |   |
| c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm giúp xác định các giá trị ngoại lệ của mẫu đó.  |   |   |
| d) Khoảng tứ phân vị bị ảnh hưởng bởi các giá trị ngoại lệ.                                    |   |   |

**Câu 15 (Mức độ 3).** Một giống cây xoan đào được trồng tại hai địa điểm  $A$  và  $B$ . Người ta thống kê đường kính thân của một số cây xoan đào 5 năm tuổi ở bảng sau

| Đường kính (cm)             | [30; 32) | [32; 34) | [34; 36) | [36; 38) | [38; 40) |
|-----------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số cây trồng ở địa điểm $A$ | 25       | 38       | 20       | 10       | 7        |
| Số cây trồng ở địa điểm $B$ | 22       | 27       | 19       | 18       | 14       |

| Phát biểu                                                                                                                                          | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Đường kính trung bình của thân cây xoan đào trồng tại địa điểm $A$ cao hơn đường kính trung bình của thân cây xoan đào trồng tại địa điểm $B$ . |   |   |
| b) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn đường kính của thân cây xoan đào trồng tại địa điểm $A$ bằng 5,4016.                             |   |   |
| c) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn đường kính của thân cây xoan đào trồng tại địa điểm $B$ bằng $\sqrt{7,31}$ .                  |   |   |
| d) Kết quả thân cây xoan đào trồng tại địa điểm $B$ đồng đều hơn kết quả thân cây xoan đào trồng tại địa điểm $A$ .                                |   |   |

**Câu 16 (Mức độ 3).** Anh An đầu tư số tiền bằng nhau vào hai lĩnh vực kinh doanh  $A$ ,  $B$ . Anh An thống kê số tiền thu được mỗi tháng trong vòng 60 tháng theo mỗi lĩnh vực cho kết quả như sau

| Số tiền (triệu đồng)             | [5; 10) | [10; 15) | [15; 20) | [20; 25) | [25; 30) |
|----------------------------------|---------|----------|----------|----------|----------|
| Số tháng đầu tư vào lĩnh vực $A$ | 5       | 10       | 30       | 10       | 5        |
| Số tháng đầu tư vào lĩnh vực $B$ | 20      | 5        | 10       | 5        | 20       |

| Phát biểu                                                               | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Số tiền trung bình đầu tư vào lĩnh vực $A$ là 17,5.                  |   |   |
| b) Phương sai của mẫu số liệu đầu tư vào lĩnh vực $B$ xấp xỉ bằng 70,8. |   |   |
| c) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đầu tư vào lĩnh vực $A$ bằng 5.        |   |   |
| d) Mức độ đầu tư vào lĩnh vực $A$ rủi ro hơn lĩnh vực $B$ .             |   |   |

## 3

## Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

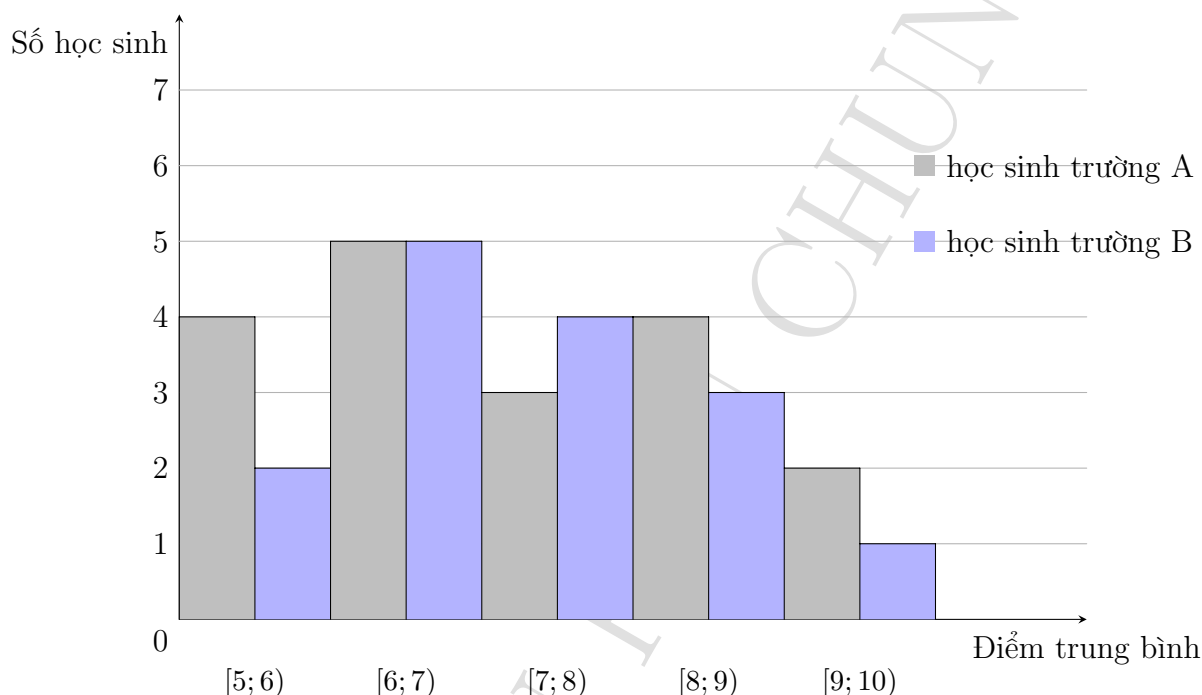
**Câu 17 (Mức độ 2).** Bảng sau thống kê lại tổng số giờ nắng trong tháng 6 của các năm từ 2002 đến 2021 tại hai trạm quan trắc đặt ở Nha Trang

|                    |            |            |            |            |            |            |
|--------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số giờ nắng        | [130; 160) | [160; 190) | [190; 220) | [220; 250) | [250; 280) | [280; 310) |
| Số năm ở Nha Trang | 1          | 1          | 1          | 8          | 7          | 2          |

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu được viết dưới dạng *kết quả làm tròn đến hàng phần mười* là bao nhiêu? KQ:

**Câu 18 (Mức độ 2).** Biểu đồ sau mô tả kết quả điều tra về điểm trung bình năm học của học sinh hai trường A và B.

Điểm trung bình năm học của học sinh hai trường A và B



Hiệu số về độ lệch chuẩn giữa điểm trung bình năm học của trường A so với trường B (*kết quả làm tròn đến hàng phần mười*) là bao nhiêu? KQ:

**Câu 19 (Mức độ 3).** Thống kê lợi nhuận hàng tháng (đơn vị: triệu đồng) trong 20 tháng của hai nhà đầu tư được cho như sau

|           |          |          |          |          |          |
|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Lợi nhuận | [10; 20) | [20; 30) | [30; 40) | [40; 50) | [50; 60) |
| Số tháng  | 2        | 4        | 8        | 4        | 2        |

Lợi nhuận theo tháng của nhà đầu tư nhỏ

|           |            |            |            |            |            |
|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Lợi nhuận | [510; 520) | [520; 530) | [530; 540) | [540; 550) | [550; 560) |
| Số tháng  | 4          | 3          | 6          | 3          | 4          |

Lợi nhuận theo tháng của nhà đầu tư lớn

Hiệu số về độ lệch chuẩn giữa nhà đầu tư lớn so với nhà đầu tư bé (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*) là bao nhiêu? KQ:

**Câu 20 (Mức độ 2).** Thời gian chạy tập luyện cự li 100 m của vận động viên A được cho trong bảng sau

|                   |            |              |              |              |
|-------------------|------------|--------------|--------------|--------------|
| Thời gian (giây)  | [10; 10,3) | [10,3; 10,6) | [10,6; 10,9) | [10,9; 11,2) |
| Số lần chạy của A | 2          | 10           | 5            | 3            |

Độ lệch chuẩn về thời gian chạy của vận động viên A khi kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm bằng bao nhiêu? KQ:

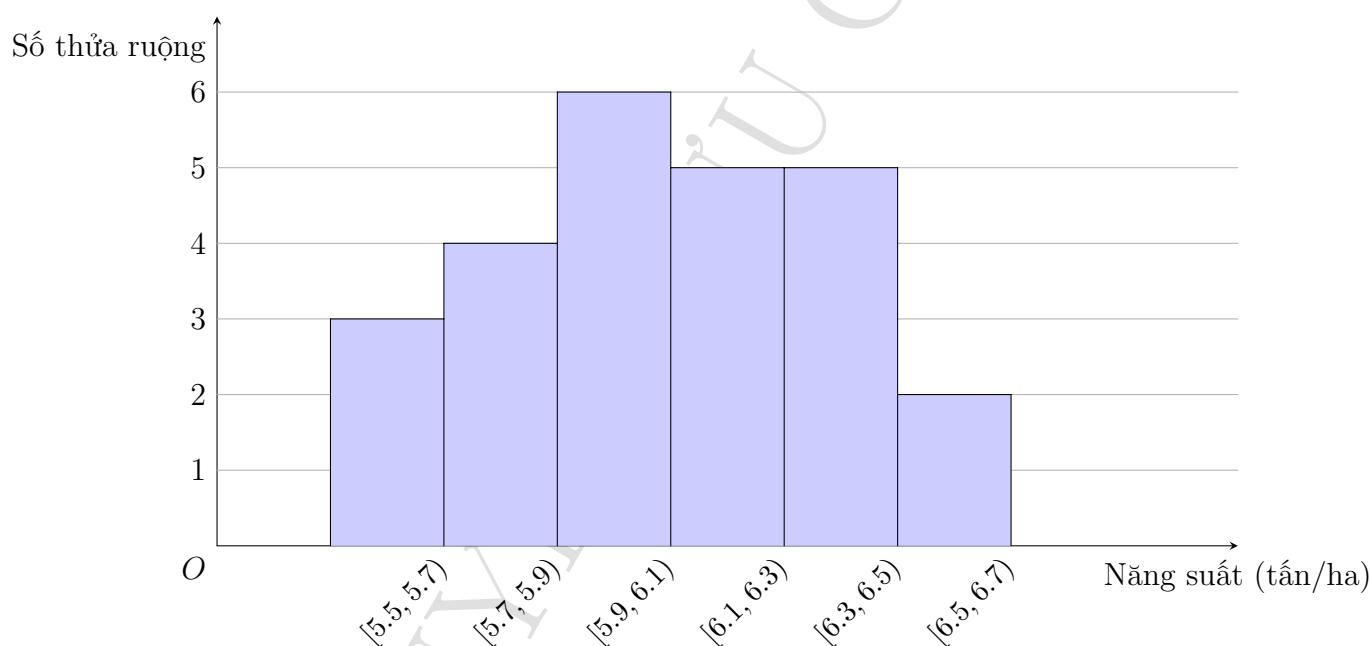
**Câu 21 (Mức độ 2).** Bảng sau đây cho biết chiều cao của các học sinh lớp 12A.

|                         |            |            |            |            |            |            |
|-------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Chiều cao (cm)          | [145; 150) | [150; 155) | [155; 160) | [160; 165) | [165; 170) | [170; 175) |
| Số học sinh của lớp 12A | 1          | 0          | 15         | 12         | 10         | 5          |

Khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của học sinh lớp 12A làm tròn đến hàng phần trăm. KQ:

**Câu 22 (Mức độ 2).** Kết quả khảo sát năng suất (đơn vị tấn/ha) của một số thửa ruộng được minh họa ở biểu đồ sau

Năng suất lúa của một số thửa ruộng



Khoảng tứ phân vị có kết quả là  $0,abcd$ . Tính  $a - b + c + d$ ?

KQ:

## B. ĐỀ ÔN TẬP SỐ 2

### 1 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Sử dụng mẫu số liệu cho ở *Bảng dưới* đây để trả lời câu 1 đến câu 6.

| Nhóm   | [1,5; 2,5) | [2,5; 3,5) | [3,5; 4,5) | [4,5; 5,5) | [5,5; 6,5) |
|--------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Tần số | 2          | 3          | 7          | 2          | 1          |

**Câu 1 (Mức độ 1).** Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

**Câu 2 (Mức độ 1).** Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu thuộc nhóm nào dưới đây?

- A. [1,5; 2,5). B. [2,5; 3,5). C. [3,5; 4,5). D. [4,5; 5,5).

**Câu 3 (Mức độ 2).** Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. (1; 2). B. (3; 4). C. (4; 5). D. (5; 6).

**Câu 4 (Mức độ 2).** Gọi  $\Delta_Q$  là khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu. Khi đó

- A.  $\Delta_Q \in [1; 2)$ . B.  $\Delta_Q \in [2; 3)$ . C.  $\Delta_Q \in [3; 4)$ . D.  $\Delta_Q \in [4; 5)$ .

**Câu 5 (Mức độ 2).** Ước tính trung bình của mẫu số liệu là

- A. 3,8. B. 2,5. C. 1,4. D. 5,9.

**Câu 6 (Mức độ 2).** Phương sai của mẫu số liệu là

- A.  $S^2 = \frac{8}{15} - \left(\frac{7}{15}\right)^2$ . B.  $S^2 = \frac{233}{15} - \left(\frac{50}{15}\right)^2$ . C.  $S^2 = \frac{8}{15} - \left(\frac{57}{15}\right)^2$ . D.  $S^2 = \frac{233}{15} - \left(\frac{57}{15}\right)^2$ .

**Câu 7 (Mức độ 2).** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. Phương sai luôn luôn là số không âm.  
 B. Phương sai là bình phương của độ lệch chuẩn.  
 C. Phương sai càng lớn thì độ phân tán của các giá trị quanh số trung bình càng lớn.  
 D. Phương sai luôn luôn lớn hơn độ lệch chuẩn.

**Câu 8 (Mức độ 1).** Cho mẫu số liệu ghép nhóm có tứ phân vị thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$ . Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó bằng

- A.  $2Q_2$ . B.  $Q_1 - Q_3$ . C.  $Q_3 - Q_1$ . D.  $Q_3 + Q_1 - Q_2$ .

**Câu 9 (Mức độ 1).** Điều tra chi phí thuê nhà ở hàng tháng của một số nhân viên độc thân, công ty X thu được số liệu dưới đây

| Tiền thuê nhà<br>(trăm nghìn đồng) | [3; 6) | [6; 9) | [9; 12) | [12; 15) | [15; 18) |
|------------------------------------|--------|--------|---------|----------|----------|
| Số nhân viên                       | 64     | 40     | 84      | 56       | 16       |

Trung bình chi phí thuê nhà hàng tháng của những nhân viên được điều tra là (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

- A. 9,6 trăm nghìn đồng. B. 6,1 trăm nghìn đồng.  
 C. 5,6 trăm nghìn đồng. D. 10,2 trăm nghìn đồng.

**Câu 10 (Mức độ 3).** Bảng dưới đây tổng hợp thời gian hoàn thành bài kiểm tra IQ của 50 học sinh lớp 9.

| Nhóm   | [0; 6) | [6; 12) | [12; 18) | [18; 24) | [24; 30) |
|--------|--------|---------|----------|----------|----------|
| Tần số | 1      | 11      | 10       | 18       | 10       |

Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- A.** Thời gian hoàn thành bài kiểm tra IQ của 50 học sinh lớp 9 trung bình là 18 phút.
- B.** Phương sai của mẫu số liệu là 43,56.
- C.** Thời gian hoàn thành bài kiểm tra IQ của 50 học sinh lớp 9 chênh lệch so với thời gian trung bình là 6,6 phút.
- D.** Thời gian hoàn thành bài kiểm tra IQ của 50 học sinh lớp 9 chênh lệch so với thời gian trung bình là 43,56 phút.

Sử dụng mẫu số liệu ở bảng dưới để trả lời câu 11 đến câu 12.

Chiều dài của 40 bé trai sơ sinh 12 ngày tuổi chọn ngẫu nhiên ở một bệnh viện được nhà nghiên cứu thống kê trong bảng dưới đây.

Chiều dài của 40 bé trai sơ sinh

| Chiều dài (cm) | [44; 46) | [46; 48) | [48; 50) | [50; 52) | [52; 54) | [54; 56) |
|----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số trẻ         | 3        | 3        | 10       | 15       | 7        | 2        |

**Câu 11 (Mức độ 2).** Trung bình của chiều dài nhóm 40 bé trai sơ sinh (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

- A.** 42,0.
- B.** 38,6.
- C.** 40,1.
- D.** 50,3.

**Câu 12 (Mức độ 1).** Độ lệch chuẩn của chiều dài nhóm 40 bé trai sơ sinh (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

- A.** 2,43.
- B.** 2,11.
- C.** 3,08.
- D.** 3,52.

## 2 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

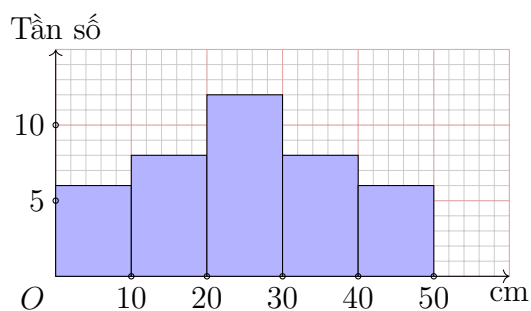
**Câu 13 (Mức độ 3).** Chiều cao của 500 học sinh của một trường trung học cơ sở được thống kê bởi bảng dưới đây

| Chiều cao (cm) | [150; 154) | [154; 158) | [158; 162) | [162; 166) | [166; 170) |
|----------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số học sinh    | 25         | 50         | 200        | 175        | 50         |

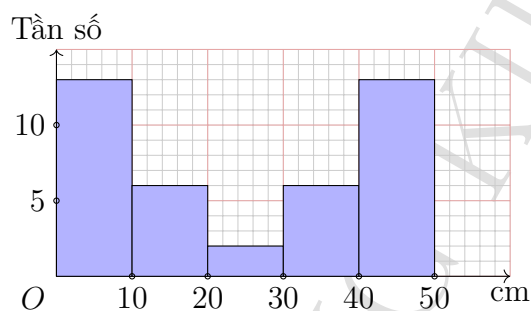
| Phát biểu                                                                                      | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Với $Q_1 = 159$ nên có 125 học sinh có chiều cao trung bình ít nhất đạt 159 cm.             |   |   |
| b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu khi làm tròn kết quả đến hàng phần trăm là 5,29.          |   |   |
| c) Chiều cao trung bình của 500 học sinh là 161,4.                                             |   |   |
| d) So với trung bình của mẫu số liệu thì chiều cao của mỗi học sinh chênh lệch khoảng 3,85 cm. |   |   |

**Câu 14 (Mức độ 3).** Một công ty giống cây trồng đã thử nghiệm hai phương pháp chăm sóc khác nhau

cho cây hướng dương. Sau hai tuần, người ta thấy cây được chăm sóc theo cả hai phương pháp đều thấp hơn 50 cm.



Chiều cao của cây theo phương pháp A



Chiều cao của cây theo phương pháp B

| Phát biểu                                                                                                                    | Đ | S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Chiều cao trung bình của các cây được chăm sóc theo phương án A là 24,8 cm.                                               |   |   |
| b) Độ lệch chuẩn của chiều cao các cây được chăm sóc theo phương án A lớn hơn so với các cây được chăm sóc theo phương án B. |   |   |
| c) Chiều cao trung bình của cây hướng dương ở cả hai cách chăm sóc là như nhau.                                              |   |   |
| d) Chiều cao của các cây được chăm sóc theo phương án A ít bị chênh lệch hơn so với các cây được chăm sóc theo phương án B.  |   |   |

**Câu 15 (Mức độ 3).** Bảng A, Bảng B lần lượt biểu diễn số liệu ghép nhóm về nhiệt độ không khí trung bình các tháng năm 2021 tại Hà Nội và Huế (đơn vị: độ C).

Bảng A

| Nhóm         | Giá trị đại diện | Tần số   |
|--------------|------------------|----------|
| [16,8; 19,8) | 18,3             | 2        |
| [19,8; 22,8) | 21,3             | 3        |
| [22,8; 25,8) | 24,3             | 2        |
| [25,8; 28,8) | 27,3             | 1        |
| [28,8; 31,8) | 30,3             | 4        |
|              |                  | $n = 12$ |

Bảng B

| Nhóm         | Giá trị đại diện | Tần số   |
|--------------|------------------|----------|
| [16,8; 19,8) | 18,3             | 1        |
| [19,8; 22,8) | 21,3             | 2        |
| [22,8; 25,8) | 24,3             | 3        |
| [25,8; 28,8) | 27,3             | 2        |
| [28,8; 31,8) | 30,3             | 4        |
|              |                  | $n = 12$ |

| Phát biểu                                                                                                                                        | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về nhiệt độ không khí trung bình các tháng năm 2021 tại Hà Nội và Huế là $R = 31,8 - 16,8 = 15$ . |   |   |
| b) Giá trị trung bình của nhiệt độ trung bình các tháng năm 2021 tại Huế là 25,8 độ C.                                                           |   |   |
| c) Độ lệch chuẩn về nhiệt độ trung bình các tháng tại Hà Nội nhỏ hơn tại Huế.                                                                    |   |   |
| d) Trong hai thành phố Hà Nội và Huế thì Hà Nội có nhiệt độ trung bình các tháng đồng đều hơn.                                                   |   |   |

**Câu 16 (Mức độ 3).** Một trang trại phân 1000 quả trứng thành 5 loại, tùy theo khối lượng (đã được làm tròn) của chúng được thống kê bởi bảng dưới đây

| Khối lượng (gam) | [30; 36) | [36; 42) | [42; 48) | [48; 54) | [54; 60) |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số trứng         | 45       | 190      | 500      | 250      | 15       |

| Phát biểu                                                                                          | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là $R = 57 - 33 = 24$ .                                  |   |   |
| b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là $\Delta_Q = 6,48$ .                                   |   |   |
| c) Độ lệch chuẩn của khối lượng những quả trứng này (khi làm tròn đến hàng phần trăm) là 3,88 gam. |   |   |
| d) Khối lượng của mỗi quả trứng chênh lệch so với khối lượng trung bình khoảng 4,95 gam.           |   |   |

### 3 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Sử dụng mẫu số liệu dưới đây để trả lời câu 17 đến câu 19.

Hàm lượng protein (trong 100 g) của một số loại thực phẩm được cho trong bảng sau

| Hàm lượng protein (gam) | [8; 10) | [10; 12) | [12; 14) | [14; 16) | [16; 18) | [18; 20] |
|-------------------------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Tần số                  | 4       | 12       | 16       | 14       | 2        | 2        |

**Câu 17 (Mức độ 1).** Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên?

KQ:

**Câu 18 (Mức độ 2).** Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

KQ:

**Câu 19 (Mức độ 2).** Tính độ lệch chuẩn về hàm lượng protein của một số loại thực phẩm được cho trong bảng số liệu trên (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

KQ:

Sử dụng mẫu số liệu dưới đây để trả lời câu 20 đến câu 22.

Bảng thống kê độ ẩm không khí trung bình các tháng tại Đà Lạt và Vũng Tàu (đơn vị: %)

| Độ ẩm/ Tháng | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
|--------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Đà Lạt       | 83 | 79 | 79 | 87 | 87 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 | 88 | 86 |
| Vũng Tàu     | 75 | 77 | 78 | 77 | 79 | 79 | 81 | 79 | 81 | 83 | 80 | 77 |

Hãy lần lượt ghép các số liệu của Đà Lạt, Vũng Tàu thành năm nhóm sau

$[75; 78,3)$ ,  $[78,3; 81,6)$ ,  $[81,6; 84,9)$ ,  $[84,9; 88,2)$ ,  $[88,2; 91,5)$ .

**Câu 20 (Mức độ 1).** Độ ẩm trung bình các tháng của mẫu số liệu ghép nhóm tại Đà Lạt là bao nhiêu?

KQ:

**Câu 21 (Mức độ 3).** Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm tại Đà Lạt?

KQ:

**Câu 22 (Mức độ 3).** Tính chênh lệch về độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm tại Đà Lạt so với Vũng Tàu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

KQ:



### C. ĐỀ ÔN TẬP SỐ 3

#### 1 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 1.** Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau

| Nhóm   | $[u_1; u_2)$ | $[u_2; u_3)$ | $\dots$ | $[u_k; u_{k+1})$ |
|--------|--------------|--------------|---------|------------------|
| Tần số | $n_1$        | $n_2$        | $\dots$ | $n_k$            |

Nếu  $n_1$  và  $n_k$  cùng khác 0 thì khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên được tính theo công thức là

- A.**  $R = n_k - n_1$ .      **B.**  $R = n_k u_{k+1} - n_1 u_1$ .      **C.**  $R = u_{k+1} - u_1$ .      **D.**  $R = u_1 - u_{k+1}$ .

**Câu 2.** Cho bảng số liệu khảo sát về tuổi thọ (đơn vị: nghìn giờ) của một loại bóng đèn

| Tuổi thọ    | $[3; 5)$ | $[5; 7)$ | $[7; 9)$ | $[9; 11)$ | $[11; 13)$ |
|-------------|----------|----------|----------|-----------|------------|
| Số bóng đèn | 5        | 20       | 29       | 40        | 20         |

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là

- A.**  $R = 10$ .      **B.**  $R = 6$ .      **C.**  $R = 8$ .      **D.**  $R = 16$ .

**Câu 3.** Cho bảng số liệu khảo sát về tuổi thọ (đơn vị: nghìn giờ) của hai loại bóng đèn

| Tuổi thọ           | $[3; 5)$ | $[5; 7)$ | $[7; 9)$ | $[9; 11)$ | $[11; 13)$ |
|--------------------|----------|----------|----------|-----------|------------|
| Số bóng đèn loại 1 | 11       | 20       | 29       | 40        | 20         |
| Số bóng đèn loại 2 | 0        | 25       | 39       | 59        | 30         |

Sử dụng bảng số liệu trên, hãy cho biết tuổi thọ loại đèn nào phân tán hơn?

- A.** Đèn loại 1 có tuổi thọ phân tán hơn đèn loại 2.  
**B.** Đèn loại 2 có tuổi thọ phân tán hơn đèn loại 1.  
**C.** Đèn loại 1 và đèn loại 2 có độ phân tán bằng nhau.  
**D.** Không thể so sánh được sự phân tán của hai loại đèn.

**Câu 4.** Cho bảng số liệu khảo sát về tuổi thọ (đơn vị: nghìn giờ) của một loại bóng đèn

| Tuổi thọ    | $[3; 5)$ | $[5; 7)$ | $[7; 9)$ | $[9; 11)$ | $[11; 13)$ |
|-------------|----------|----------|----------|-----------|------------|
| Số bóng đèn | 11       | 20       | 29       | 40        | 30         |

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu.

- A.**  $\Delta_Q = \frac{87}{8}$ .      **B.**  $\Delta_Q = \frac{206}{29}$ .      **C.**  $\Delta_Q = \frac{4171}{232}$ .      **D.**  $\Delta_Q = \frac{875}{232}$ .

**Câu 5.** Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian (phút) đi từ nhà đến nơi làm việc của các nhân viên một công ty như sau:

| Thời gian    | $[15; 20)$ | $[20; 25)$ | $[25; 30)$ | $[30; 35)$ | $[35; 40)$ | $[40; 45)$ | $[45; 50)$ |
|--------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số nhân viên | 6          | 14         | 30         | 25         | 22         | 15         | 8          |

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

- A.** 22, 1.                      **B.** 11, 8.                      **C.** 21.                      **D.** 11, 7.

**Câu 6.** Chọn khẳng định đúng.

- A.** Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm càng nhỏ thì mẫu số liệu càng phân tán.  
**B.** Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc.  
**C.** Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường của mẫu số liệu đó.  
**D.** Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm chỉ phụ thuộc vào nửa giữa của mẫu số liệu, không bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường.

**Câu 7.** Chọn khẳng định đúng.

- A.** Phương sai bằng bình phương số trung bình.  
**B.** Phương sai bằng bình phương độ lệch chuẩn.  
**C.** Phương sai bằng căn bậc hai của số trung bình.  
**D.** Phương sai bằng căn bậc hai của độ lệch chuẩn.

**Câu 8.** Khi hai mẫu số liệu ghép nhóm có cùng đơn vị đo và có số trung bình cộng bằng nhau (hoặc xấp xỉ nhau) thì

- A.** Mẫu số liệu có độ lệch chuẩn nhỏ hơn thì mức độ phân tán của các số liệu trong mẫu đó cao hơn.  
**B.** Mẫu số liệu có độ lệch chuẩn lớn hơn thì mức độ phân tán của các số liệu trong mẫu đó thấp hơn.  
**C.** Mẫu số liệu có độ lệch chuẩn lớn hơn thì mức độ phân tán của các số liệu trong mẫu đó cao hơn.  
**D.** Mẫu số liệu có độ lệch chuẩn nhỏ hơn thì phương sai của mẫu đó lớn hơn.

**Câu 9.** Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau

| Thời gian (phút) | [20; 25) | [25; 30) | [30; 35) | [35; 40) | [40; 45) |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số ngày          | 6        | 6        | 4        | 1        | 1        |

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- A.** 31.                      **B.** 32.                      **C.** 30,25.                      **D.** 33.

**Câu 10.** Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị: km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau

| Quãng đường (km) | [2, 7; 3, 0) | [3, 0; 3, 3) | [3, 3; 3, 6) | [3, 6; 3, 9) | [3, 9; 4, 2) |
|------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Số ngày          | 3            | 6            | 5            | 4            | 2            |

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- A.** 3, 41.                      **B.** 11, 62.                      **C.** 0, 017.                      **D.** 0, 36.

**Câu 11.** Minh Hiền và Minh Nhân cùng sử dụng vòng đeo tay thông minh để ghi lại số bước chân hai bạn đi mỗi ngày trong một tháng. Kết quả được ghi lại ở bảng sau

| Số bước (đơn vị: nghìn) | [3; 5) | [5; 7) | [7; 9) | [9; 11) | [11; 13) |
|-------------------------|--------|--------|--------|---------|----------|
| Số ngày của Minh Hiền   | 6      | 7      | 6      | 6       | 5        |
| Số ngày của Minh Nhân   | 2      | 5      | 13     | 8       | 2        |

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Nếu so sánh theo phương sai thì bạn Minh Hiền có số lượng bước chân đi mỗi ngày đều đặn hơn của bạn Minh Nhân.
- B. Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì bạn Minh Hiền có số lượng bước chân đi mỗi ngày đều đặn hơn của bạn Minh Nhân.
- C. Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm của bạn Minh Hiền là 6, 8.
- D. Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm của bạn Minh Hiền là 5, 23.

**Câu 12.** Một giống cây xoan đào được trồng tại hai địa điểm A và B. Người ta thống kê đường kính thân của một số cây xoan đào 5 năm tuổi ở bảng sau

| Đường kính (cm)           | [30; 32) | [32; 34) | [34; 36) | [36; 38) | [38; 40) |
|---------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số cây trồng ở địa điểm A | 25       | 38       | 20       | 10       | 7        |
| Số cây trồng ở địa điểm B | 22       | 27       | 19       | 18       | 14       |

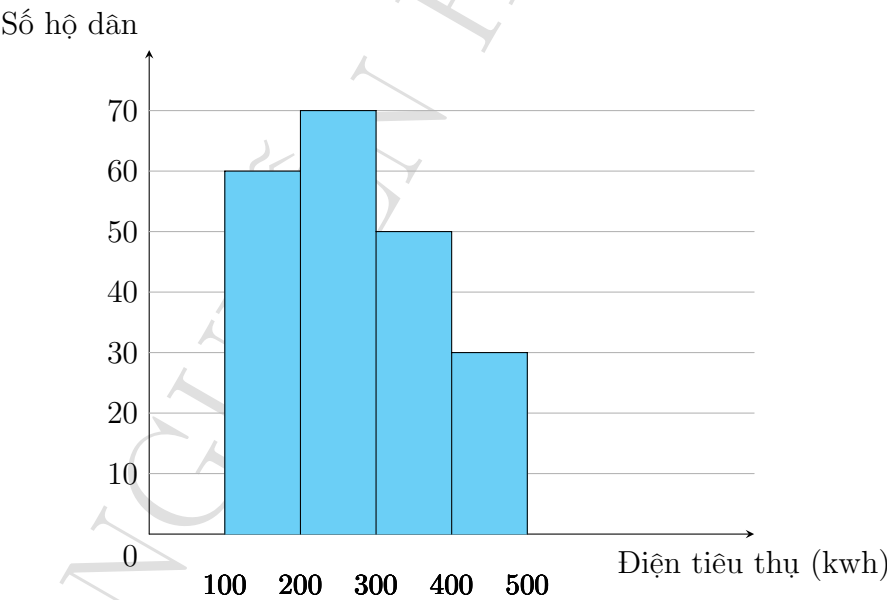
Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì cây trồng tại địa điểm A có đường kính đồng đều hơn.
- B. Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì cây trồng tại địa điểm B có đường kính đồng đều hơn.
- C. Nếu so sánh đường kính trung bình của thân cây xoan đào trồng tại địa điểm A lớn hơn địa điểm.
- D. Nếu so sánh đường kính trung bình của thân cây xoan đào trồng tại địa điểm A bằng địa điểm.

2

Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 13.** Kết quả khảo sát mức tiêu thụ điện trong tháng 6 năm 2024 của các hộ dân được minh hoạ ở biểu đồ sau



| Phát biểu                                                           | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là 400.              |   |   |
| b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là $\frac{335}{2}$ . |   |   |
| c) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm bằng $\frac{458000}{441}$ . |   |   |

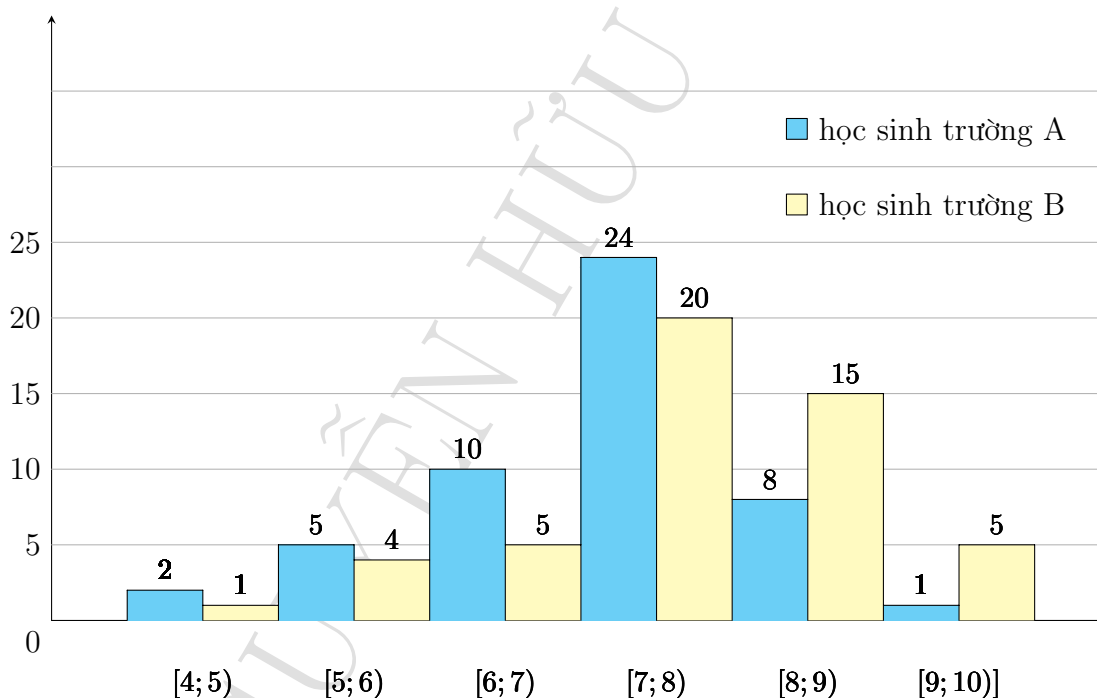
| Phát biểu                                                                             | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm bằng 101,91 (làm tròn đến hàng phần trăm). |   |   |

**Câu 14.** Kết quả đo cân nặng của 100 học sinh lớp 12 ở trường THPT X được cho bởi bảng sau

| Cân nặng (kg) | [35; 40) | [40; 45) | [45; 50) | [50; 55) | [55; 60) |
|---------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số học sinh   | 20       | 40       | 25       | 10       | 5        |

| Phát biểu                                             | Đ | S |
|-------------------------------------------------------|---|---|
| a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là 25. |   |   |
| b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là 7.  |   |   |
| c) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm bằng 28,5.    |   |   |
| d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm bằng 5.    |   |   |

**Câu 15.** Biểu đồ dưới đây thể hiện điểm trung bình môn văn, điểm trung bình môn toán của học sinh lớp 12 của một trường THPT



| Phát biểu                                                                                                                                                             | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Khoảng biến thiên điểm trung bình môn Văn của học sinh lớp 12 là 6.                                                                                                |   |   |
| b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu về điểm trung bình môn Văn của học sinh lớp 12 là $\frac{11}{16}$ .                                                              |   |   |
| c) Phương sai của mẫu số liệu về điểm trung bình môn toán thấp hơn phương sai điểm trung bình môn văn của học sinh lớp 12 (Kết quả lấy chính xác đến hàng phần trăm). |   |   |
| d) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì điểm trung bình môn văn của học sinh lớp 12 ít phân tán hơn điểm trung bình môn toán (tính lấy chính xác đến hàng phần trăm).   |   |   |

**Câu 16.** Một giống cây xoan đào được trồng tại hai địa điểm A và B. Người ta thống kê đường kính thân của một số cây xoan đào 5 năm tuổi ở bảng sau

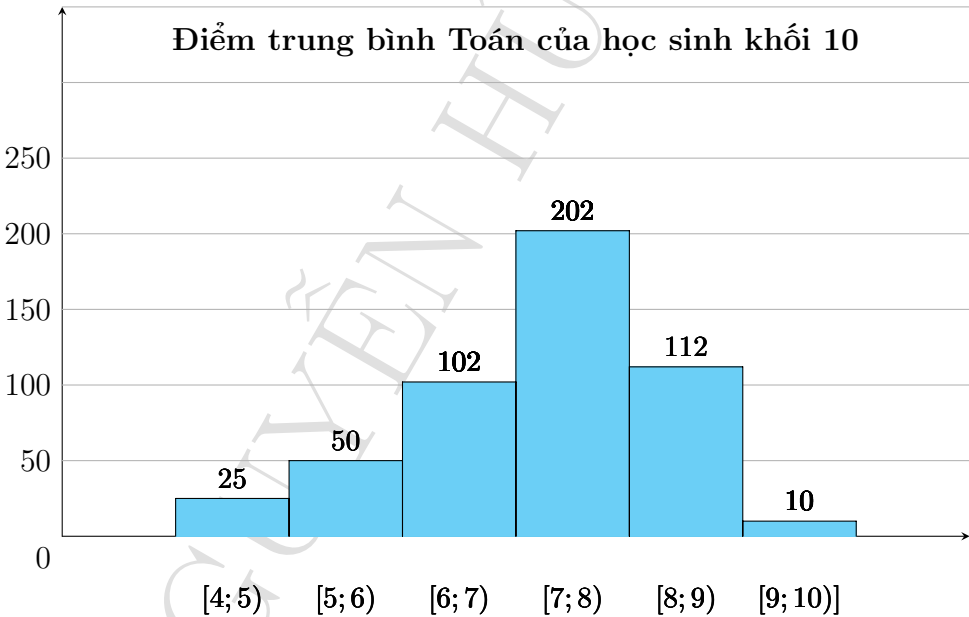
| Đường kính (cm)           | [30; 32) | [32; 34) | [34; 36) | [36; 38) | [38; 40) |
|---------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số cây trồng ở địa điểm A | 24       | 38       | 21       | 17       | 0        |
| Số cây trồng ở địa điểm B | 22       | 27       | 19       | 18       | 14       |

| Phát biểu                                                                                                                                                         | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Nếu so sánh theo khoảng biến thiên thì đường kính của các cây xoan đào trồng tại địa điểm A đồng đều hơn đường kính của các cây xoan đào trồng tại địa điểm B. |   |   |
| b) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị thì đường kính của các cây xoan đào trồng tại địa điểm A đồng đều hơn đường kính của các cây xoan đào trồng tại địa điểm B. |   |   |
| c) Nếu so sánh theo phương sai thì đường kính của các cây xoan đào trồng tại địa điểm B đồng đều hơn đường kính của các cây xoan đào trồng tại địa điểm A.        |   |   |
| d) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì đường kính của các cây xoan đào trồng tại địa điểm B đồng đều hơn đường kính của các cây xoan đào trồng tại địa điểm A.     |   |   |

3

Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 17.** Biểu đồ dưới đây thể hiện điểm trung bình môn Toán của học sinh khối 10 của một trường THPT:



Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên là KQ:

**Câu 18.** Dưới đây là bảng thống kê doanh thu của một cửa hàng cà phê trong một tháng:

| Doanh thu (triệu đồng) | [0; 2) | [2; 4) | [4; 6) | [6; 8) | [8; 10) |
|------------------------|--------|--------|--------|--------|---------|
| Số ngày                | 3      | 15     | 6      | 4      | 2       |

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về doanh thu của một cửa hàng cà phê là bao nhiêu?

KQ:

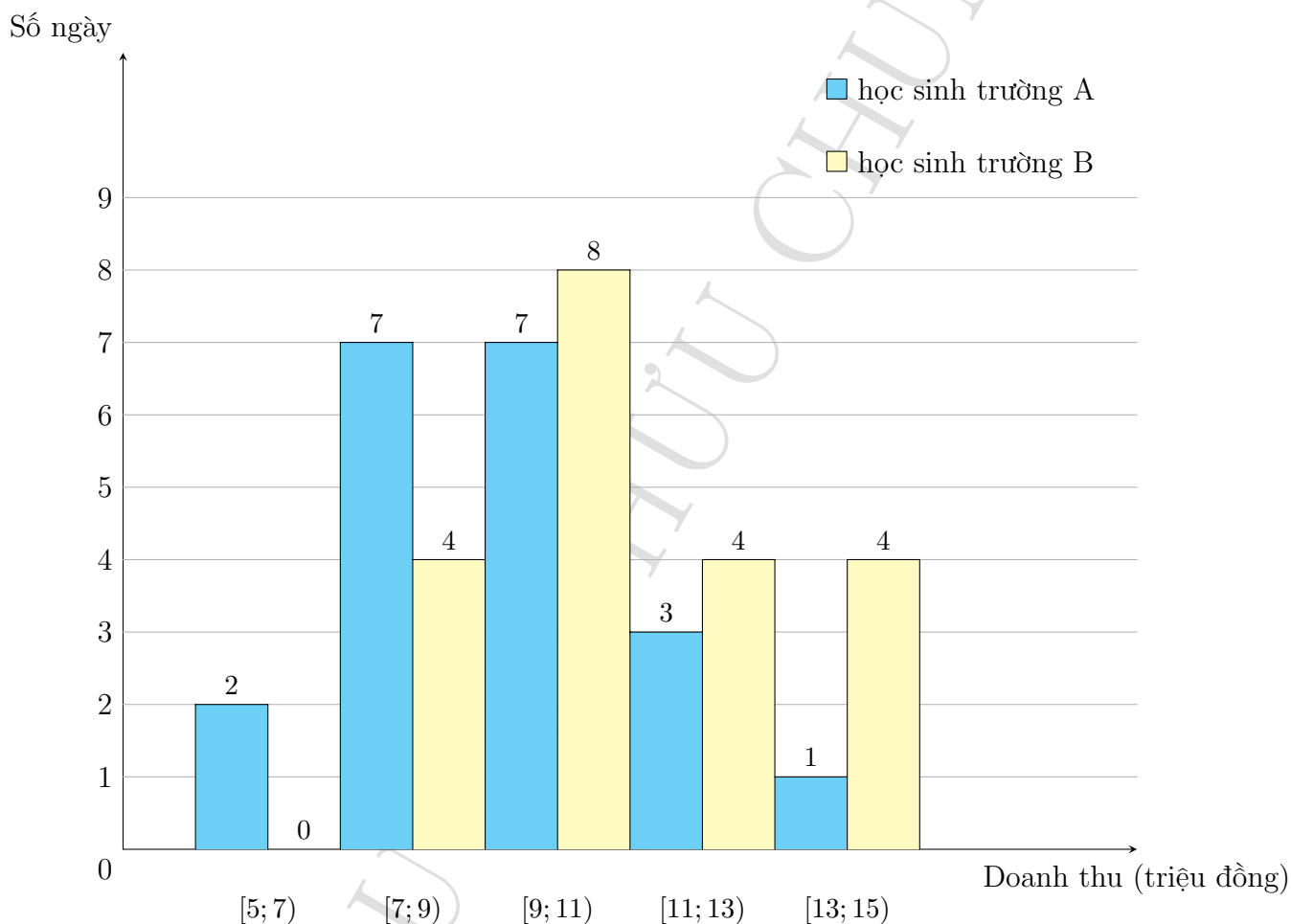
**Câu 19.** Điều tra về thời gian (phút) sử dụng Internet mỗi buổi tối của học sinh ở hai lớp tại một trường học ta có bảng sau

| Thời gian (phút) | [9, 5; 12, 5) | [12, 5; 15, 5) | [15, 5; 18, 5) | [18, 5; 21, 5) | [21, 5; 24, 5) |
|------------------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Số học sinh 10A  | 3             | 12             | 15             | 24             | 2              |
| Số học sinh 10B  | 1             | 11             | 24             | 12             | 8              |

Tính hiệu số giữa khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm lớp 10A và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm lớp 10B.

KQ:

**Câu 20.** Doanh thu bán hàng trong 20 ngày của hai cửa hàng được lựa chọn ngẫu nhiên được cho dưới dạng biểu đồ hình cột sau (đơn vị: triệu đồng)



Xác định độ chênh lệch về độ lệch chuẩn của doanh thu bán hàng của hai cửa hàng trên (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KQ:

**Câu 21.** Thời gian chạy tập luyện cự li 100 (m) của bốn vận động viên được cho trong bảng sau:

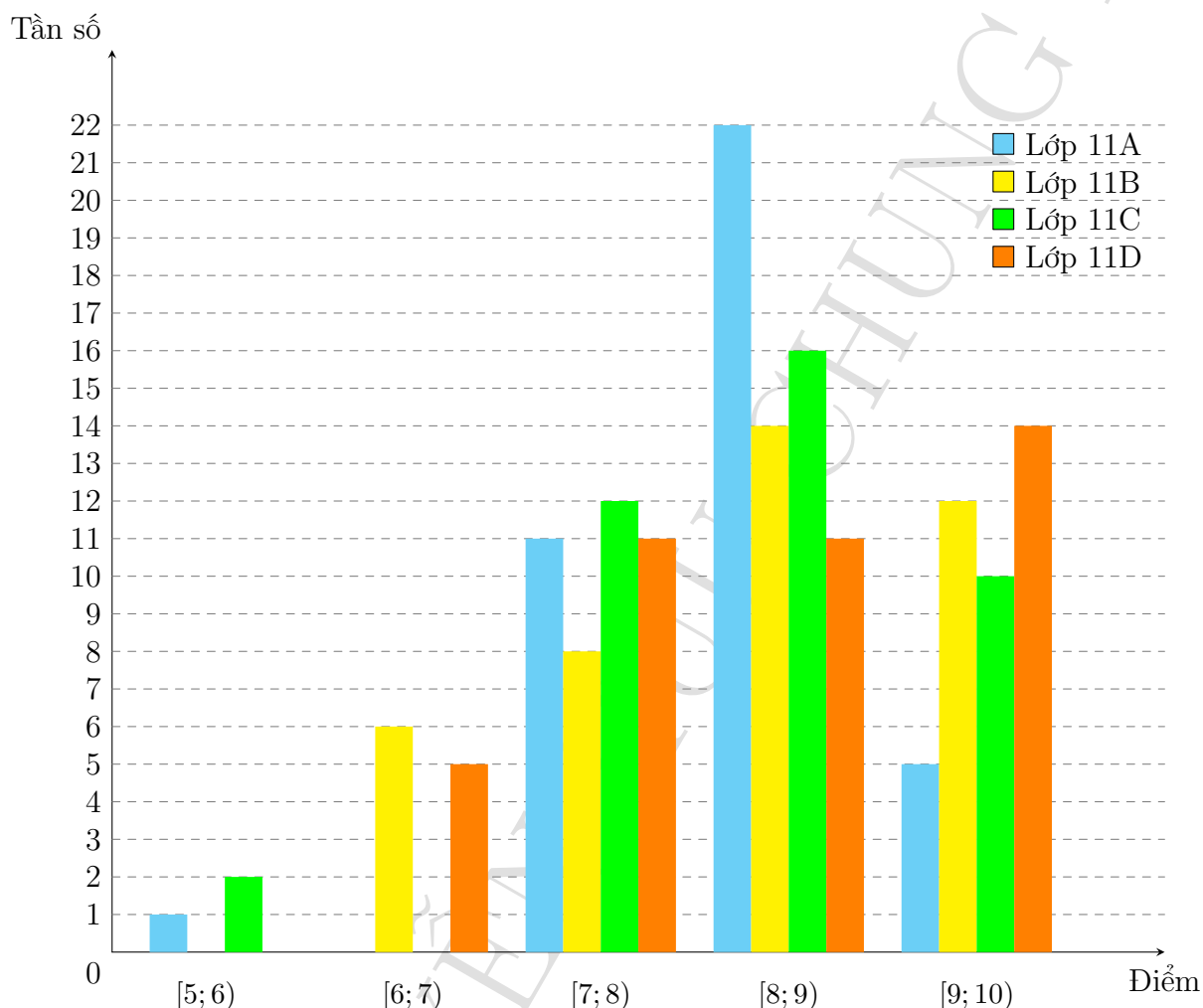
| Thời gian (giây)  | [10; 10, 3) | [10, 3; 10, 6) | [10, 6; 10, 9) | [10, 9; 11, 2) |
|-------------------|-------------|----------------|----------------|----------------|
| Số lần chạy của A | 4           | 9              | 6              | 4              |
| Số lần chạy của B | 3           | 7              | 9              | 6              |
| Số lần chạy của C | 3           | 8              | 10             | 5              |
| Số lần chạy của D | 5           | 7              | 9              | 4              |

Gọi độ lệch chuẩn của các vận động viên  $A, B, C, D$  lần lượt là  $S_A, S_B, S_C, S_D$ . Tìm độ lệch chuẩn cao nhất của thời gian chạy tập luyện của các vận động viên (làm tròn kết quả đến 2 chữ số thập phân).

KQ:

**Câu 22.** Thống kê điểm trung bình cuối năm của các học sinh lớp 11A, 11B, 11C, 11D của trường THPT X được cho bởi biểu đồ sau. Tìm độ lệch chuẩn thấp nhất của điểm trung bình cuối năm của các lớp 11A, 11B, 11C, 11D (làm tròn kết quả đến hai chữ số thập phân).

KQ:



#### D. ĐỀ ÔN TẬP SỐ 4

### 1 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 1.** Tuổi thọ của 35 bóng đèn (đơn vị: giờ) được cho trong bảng sau

|      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|
| 1120 | 1150 | 1121 | 1170 | 1136 | 1150 | 1140 |
| 1130 | 1165 | 1142 | 1133 | 1157 | 1115 | 1132 |
| 1162 | 1179 | 1109 | 1131 | 1147 | 1168 | 1152 |
| 1134 | 1116 | 1177 | 1145 | 1164 | 1111 | 1125 |
| 1144 | 1160 | 1155 | 1103 | 1127 | 1166 | 1101 |

Từ mẫu số liệu không ghép nhóm trên, ghép các số liệu thành 4 nhóm theo các nửa khoảng có độ dài bằng nhau. Khoảng biến thiên là



A. 78.

B. 22.

C. 70.

D. 25.

**Câu 2.**

Cho mẫu số liệu thống kê tiền lãi (nghìn đồng) mỗi ngày trong 14 ngày được khảo sát ở một quầy bán báo. Trong 4 bảng: bảng 1, bảng 2, bảng 3, bảng 4, bảng số liệu ghép nhóm nào đúng?

|    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 69 | 37 | 39 | 65 | 31 | 33 | 63 |
| 51 | 44 | 62 | 33 | 47 | 55 | 42 |

|        |                          |          |          |          |          |
|--------|--------------------------|----------|----------|----------|----------|
|        | Số tiền lãi (nghìn đồng) | [30; 40) | [40; 50) | [50; 60) | [60; 70) |
| Bảng 1 | Số ngày                  | 5        | 3        | 2        | 4        |
|        | Số tiền lãi (nghìn đồng) | [30; 40) | [40; 50) | [50; 60) | [60; 70) |
| Bảng 2 | Số ngày                  | 5        | 3        | 4        | 2        |
|        | Số tiền lãi (nghìn đồng) | [30; 40) | [40; 50) | [50; 60) | [60; 70) |
| Bảng 3 | Số ngày                  | 5        | 2        | 3        | 4        |
|        | Số tiền lãi (nghìn đồng) | [30; 40) | [40; 50) | [50; 60) | [60; 70) |
| Bảng 4 | Số ngày                  | 3        | 5        | 2        | 4        |

A. Bảng 1.

B. Bảng 2.

C. Bảng 3.

D. Bảng 4.

**Câu 3.** Khảo sát thời gian chạy bộ trong một ngày của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

|                  |         |          |          |          |           |
|------------------|---------|----------|----------|----------|-----------|
| Thời gian (phút) | [0; 20) | [20; 40) | [40; 60) | [60; 80) | [80; 100) |
| Số học sinh      | 5       | 9        | 12       | 10       | 6         |

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là nhóm

A. [0; 20).

B. [20; 40).

C. [40; 60).

D. [60; 80).

**Câu 4.** Thời gian luyện tập trong một ngày (tính theo giờ) của một số vận động viên được ghi lại ở bảng sau

|                           |        |        |        |        |         |
|---------------------------|--------|--------|--------|--------|---------|
| Thời gian luyện tập (giờ) | [0; 2) | [2; 4) | [4; 6) | [6; 8) | [8; 10) |
| Số vận động viên          | 3      | 8      | 12     | 12     | 4       |

Hãy xác định tứ phân vị thứ 3 của mẫu số liệu trên.

A. 3,6875.

B. 5,417.

C. 7,042.

D. 7,68.

**Câu 5.** Tìm hiểu thời gian hoàn thành một bài tập (đơn vị: phút) của một số học sinh thu được kết quả sau

|                  |        |        |         |          |          |
|------------------|--------|--------|---------|----------|----------|
| Thời gian (phút) | [0; 4) | [4; 8) | [8; 12) | [12; 16) | [16; 20) |
| Số học sinh      | 2      | 4      | 7       | 4        | 3        |

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm này là

A.  $Q_3 = 13$ .B.  $Q_3 = 14$ .C.  $Q_3 = 15$ .D.  $Q_3 = 12$ .

**Câu 6.** Mức lương hàng tháng ở một công ty được Công đoàn thu thập theo bảng sau (triệu đồng)

|                    |         |          |          |          |          |
|--------------------|---------|----------|----------|----------|----------|
| Mức lương          | [6; 10) | [10; 15) | [15; 20) | [20; 25) | [25; 30) |
| Số lượng nhân viên | 17      | 38       | 27       | 21       | 7        |

Chủ tịch Công đoàn muốn đề nghị hỗ trợ cho nhóm 25% số nhân viên có mức lương thấp nhất và ước lượng rằng số nhân viên này không ít hơn  $a$  người. Khi đó giá trị  $a$  có hợp lí là bao nhiêu?

- A.**  $a = 5$ . **B.**  $a = 7$ . **C.**  $a = 9$ . **D.**  $a = 12$ .

**Câu 7.** Cho mẫu số liệu ghép nhóm như bảng dưới đây

| Nhóm             | $[u_1; u_2)$ | $[u_2; u_3)$ | $\dots$ | $[u_k; u_{k+1})$ |
|------------------|--------------|--------------|---------|------------------|
| Giá trị đại diện | $c_1$        | $c_2$        | $\dots$ | $c_k$            |
| Tần số           | $n_1$        | $n_2$        | $\dots$ | $n_k$            |

Khi đó phương sai của mẫu số liệu trên được xác định theo công thức là

- A.**  $S^2 = \frac{1}{n} [n_1 (c_1 - \bar{x})^2 + n_2 (c_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k (c_k - \bar{x})^2]$ .  
**B.**  $S^2 = \frac{1}{n^2} [n_1 (c_1 - \bar{x})^2 + n_2 (c_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k (c_k - \bar{x})^2]$ .  
**C.**  $S^2 = \frac{1}{n} [n_1 (c_1 - \bar{x}) + n_2 (c_2 - \bar{x}) + \dots + n_k (c_k - \bar{x})]$ .  
**D.**  $S^2 = \frac{1}{n^2} [n_1 (c_1 - \bar{x}) + n_2 (c_2 - \bar{x}) + \dots + n_k (c_k - \bar{x})]$ .

**Câu 8.** Cho mẫu số liệu ghép nhóm như bảng dưới đây

| Nhóm             | $[u_1; u_2)$ | $[u_2; u_3)$ | $\dots$ | $[u_k; u_{k+1})$ |
|------------------|--------------|--------------|---------|------------------|
| Giá trị đại diện | $c_1$        | $c_2$        | $\dots$ | $c_k$            |
| Tần số           | $n_1$        | $n_2$        | $\dots$ | $n_k$            |

Khi đó độ lệch chuẩn của mẫu số liệu được xác định theo công thức là

- A.**  $S = \sqrt{\frac{1}{n} [n_1 c_1^2 + n_2 c_2^2 + \dots + n_k c_k^2] - \bar{x}^2}$ .  
**B.**  $S = \sqrt{\frac{1}{n^2} [n_1 (c_1 - \bar{x})^2 + n_2 (c_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k (c_k - \bar{x})^2]}$ .  
**C.**  $S = \sqrt{\frac{1}{n} [n_1 (c_1 - \bar{x}) + n_2 (c_2 - \bar{x}) + \dots + n_k (c_k - \bar{x})]}$ .  
**D.**  $S = \sqrt{\frac{1}{n^2} [n_1 (c_1 - \bar{x}) + n_2 (c_2 - \bar{x}) + \dots + n_k (c_k - \bar{x})]}$ .

**Câu 9.** Thống kê tổng số giờ nắng trong tháng 9 tại một trạm quan trắc đặt ở Thành phố Hồ Chí Minh trong các năm từ năm 2005 đến năm 2024 được thống kê như sau

| Số giờ nắng | [80; 98) | [98; 116) | [116; 134) | [134; 152) | [152; 170) |
|-------------|----------|-----------|------------|------------|------------|
| Số năm      | 3        | 6         | 3          | 5          | 3          |

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên gần nhất với con số nào sau đây?

- A.** 566,6. **B.** 566. **C.** 566,1. **D.** 566,2.

**Câu 10.** Mỗi ngày thầy  $T$  đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị: km) của thầy  $T$  trong 30 ngày được thống kê lại ở bảng sau. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm này gần nhất với con số nào sau đây?

| Quãng đường (km) | [2, 7; 3, 0) | [3, 0; 3, 3) | [3, 3; 3, 6) | [3, 6; 3, 9) | [3, 9; 4, 2) |
|------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Số ngày          | 5            | 8            | 7            | 6            | 4            |

A. 0,38.

B. 0,39.

C. 0,4.

D.  $\frac{2737}{18000}$ .**Câu 11.** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

- A. Phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị chính xác cho phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu gốc.
- B. Phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu ghép nhóm được dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu ghép nhóm.
- C. Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì dữ liệu càng phân tán.
- D. Phương sai và độ lệch chuẩn càng nhỏ thì dữ liệu càng phân tán.

**Câu 12.** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

- A. Phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu gốc.
- B. Phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu ghép nhóm được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm.
- C. Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì dữ liệu càng phân tán.
- D. Phương sai và độ lệch chuẩn càng nhỏ thì dữ liệu càng phân tán.

## 2

## Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 13.** Thời gian hoàn thành một đề toán của một số học sinh ở hai lớp 12A và 12B của một trường phổ thông được ghi lại ở bảng sau

| Thời gian (phút)    | [20; 25) | [25; 30) | [30; 35) | [35; 40) | [40; 45) |
|---------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số học sinh lớp 12A | 2        | 6        | 13       | 20       | 5        |
| Số học sinh lớp 12B | 3        | 4        | 18       | 14       | 7        |

| Phát biểu                                                                                                     | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Khoảng biến thiên về mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian làm một đề toán của hai lớp 12A và 12B bằng nhau.  |   |   |
| b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm ứng với lớp 12A là $\frac{731}{104}$ .                         |   |   |
| c) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm ứng với lớp 12B là 25, 34.                                            |   |   |
| d) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì học sinh lớp 12A có thời gian làm bài ít phân tán hơn học sinh lớp 12B. |   |   |

**Câu 14.** Thống kê thời gian dùng Facebook trong một ngày của một nhóm học sinh trong lớp 12A1 được kết quả ghép nhóm như sau

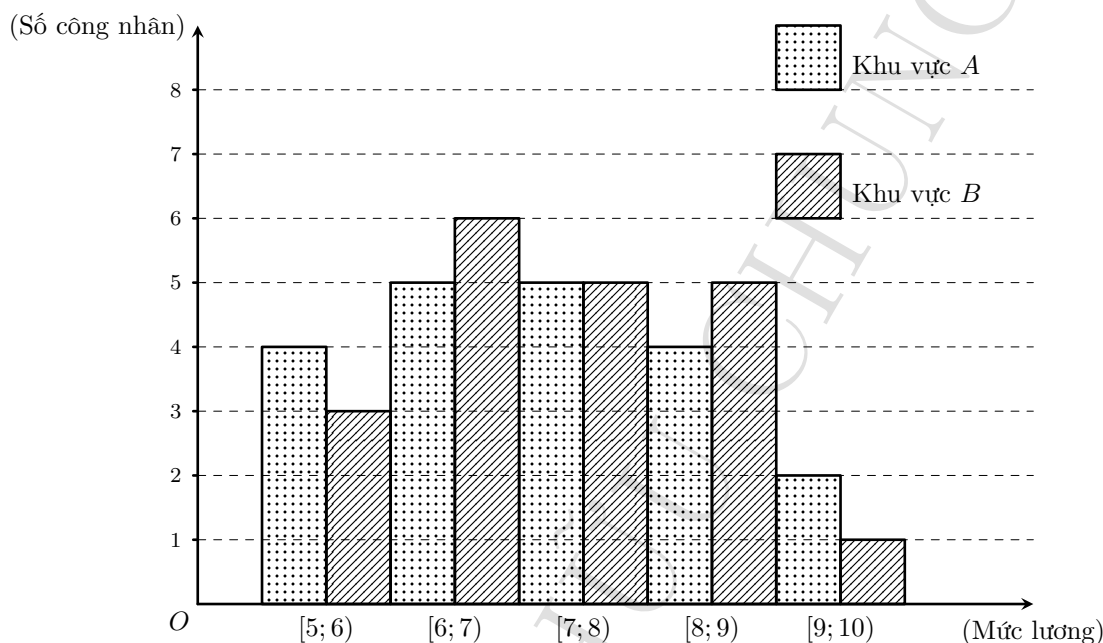
| Thời gian dùng (phút) | [0; 10) | [10; 20) | [20; 30) | [30; 40) |
|-----------------------|---------|----------|----------|----------|
| Số bạn                | 15      | 10       | 5        | 2        |

| Phát biểu                                                                                        | Đ | S |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên bằng 40.                                               |   |   |
| b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm được tính bằng công thức $\Delta Q = Q_3 - Q_1$ . |   |   |

| Phát biểu                                                            | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------|---|---|
| c) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm phụ thuộc vào số trung bình. |   |   |
| d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên là 15.                         |   |   |

**Câu 15.** Biểu đồ dưới đây mô tả kết quả điều tra về mức lương khởi điểm (đơn vị: triệu đồng) của một số công nhân ở hai khu vực A và B.

Mức lương khởi điểm của công nhân ở hai khu vực A và B



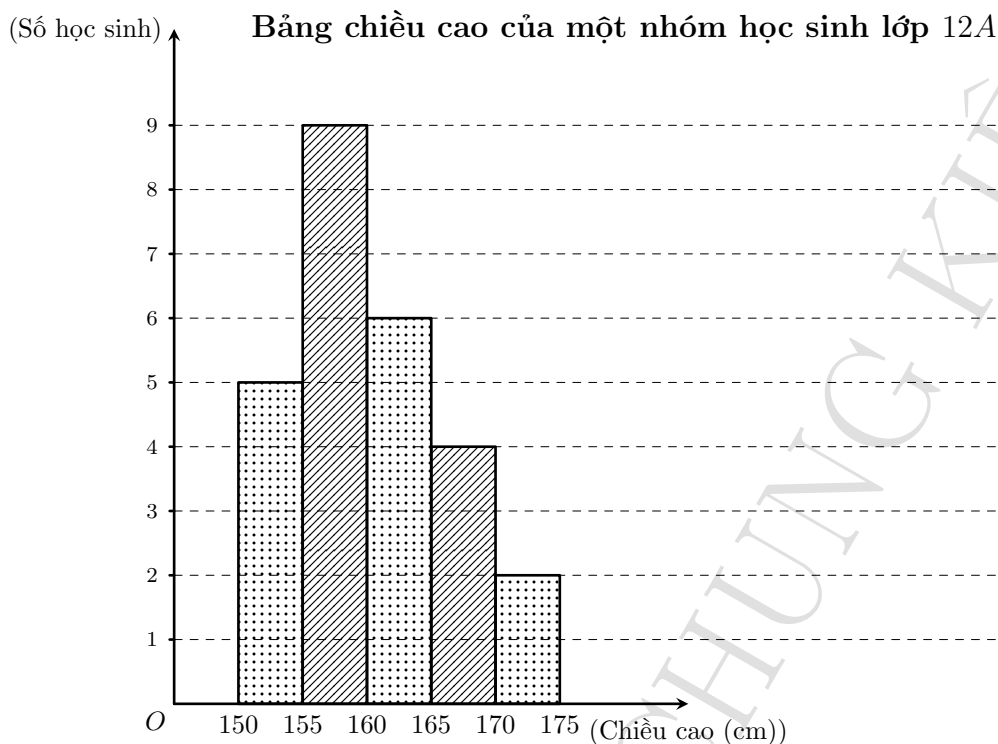
Người ta lập được bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu như sau

| Mức lương                       | [5; 6) | [6; 7) | [7; 8) | [8; 9) | [9; 10) |
|---------------------------------|--------|--------|--------|--------|---------|
| Mức lương đại diện (triệu đồng) | 5,5    | 6,5    | 7,5    | 8,5    | 9,5     |
| Khu vực A                       | 4      | 5      | 5      | 4      | 2       |
| Khu vực B                       | 3      | 6      | 5      | 5      | 1       |

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

| Phát biểu                                                                                                                                         | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là 4.                                                                                              |   |   |
| b) Xét mẫu số liệu của khu vực A ta có khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là 2,05.                                                       |   |   |
| c) Xét mẫu số liệu của khu vực B ta có phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là 1,5875.                                                            |   |   |
| d) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm thì mức lương khởi điểm của công nhân khu vực B đồng đều hơn của công nhân khu vực A. |   |   |

**Câu 16.** Khảo sát chiều cao (cm) của một nhóm HS lớp 12A được cho ở bảng dưới đây



| Phát biểu                                                                                       | Đ | S |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên bằng 5.                                               |   |   |
| b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên phụ thuộc vào tứ phân vị thứ 2.                       |   |   |
| c) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là căn bậc hai số học của phương sai.                |   |   |
| d) Nếu độ lệch chuẩn của mẫu số liệu tăng 4 lần thì phương sai của mẫu số liệu trên tăng 2 lần. |   |   |

### 3 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 17.** Điều tra về cân nặng của 25 học sinh lớp 10A có kết quả như sau

| Cân nặng (kg) | [40; 45) | [45; 50) | [50; 55) | [55; 60) | [60; 65) |
|---------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số học sinh   | 2        | 10       | 6        | 4        | 3        |

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KQ:

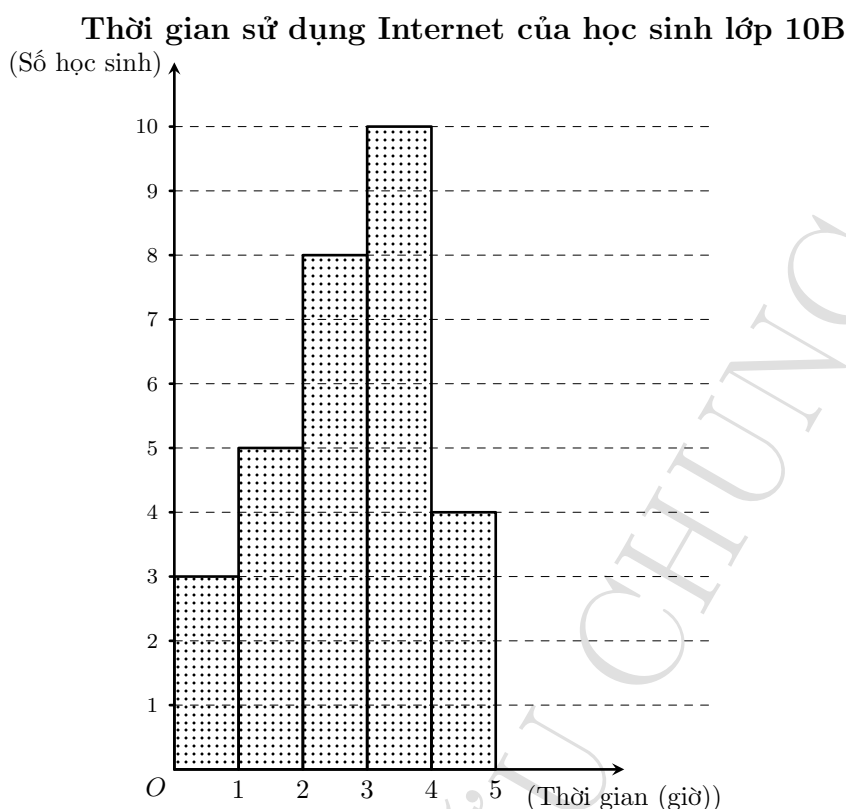
**Câu 18.** Thu nhập theo tháng (đơn vị: triệu đồng) của người lao động ở hai nhà máy như sau

| Thu nhập               | [5; 8) | [8; 11) | [11; 14) | [14; 17) | [17; 20) |
|------------------------|--------|---------|----------|----------|----------|
| Số người của nhà máy A | 20     | 35      | 45       | 35       | 20       |
| Số người của nhà máy B | 17     | 23      | 30       | 23       | 17       |

Tổng khoảng tứ phân vị của mức thu nhập của người lao động ở nhà máy A và B bằng bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

KQ:

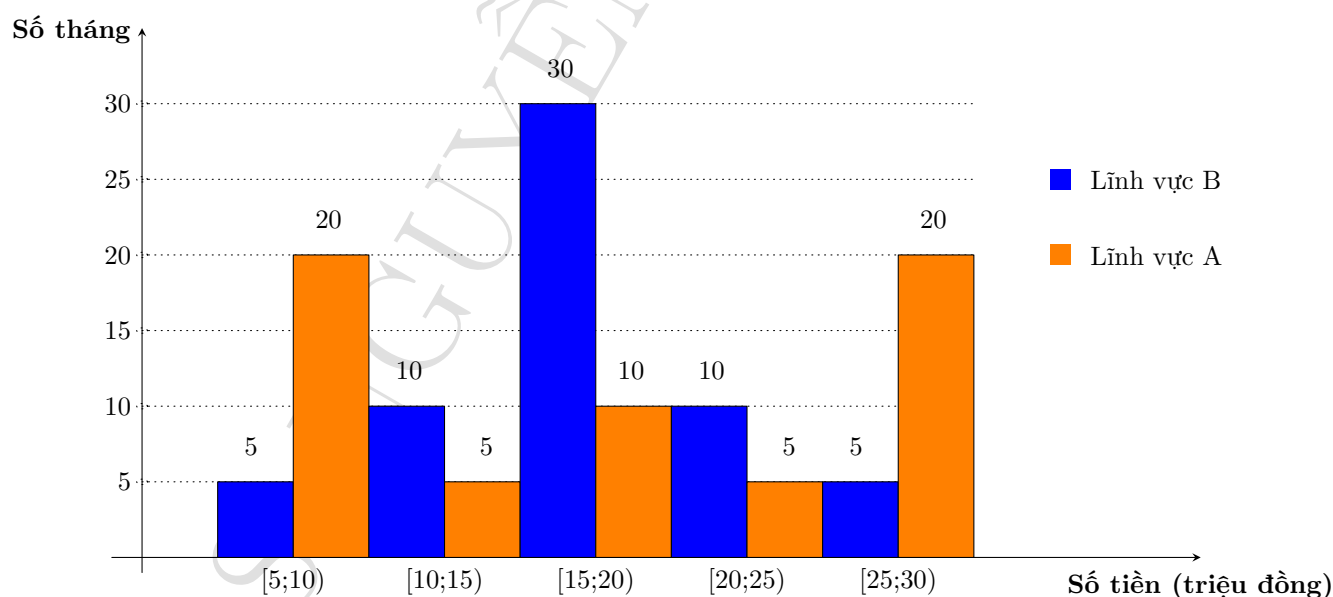
**Câu 19.** Biểu đồ dưới đây mô tả kết quả điều tra về thời gian sử dụng Internet trong một ngày của một số học sinh lớp 10B (đơn vị: giờ).



Tính phương sai của của mẫu số liệu trên (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KQ:

**Câu 20.** Anh Long đầu tư số tiền bằng nhau vào hai lĩnh vực A và B. Biểu đồ dưới đây mô tả số tiền thu được mỗi tháng trong vòng 60 tháng theo mỗi lĩnh vực A và B



Hiệu độ lệch chuẩn của số tiền thu được mỗi tháng khi đầu tư vào lĩnh vực A và B bằng bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến hàng phần chục)

KQ:

**Câu 21.** Kết quả điều tra về cân nặng của các học sinh ở các lớp 11A; 11B; 11C; 11D tại một trường THPT (có sĩ số như nhau) được cho trong bảng số liệu ghép nhóm sau

| Cân nặng        | [40,5; 45,5) | [45,5; 50,5) | [50,5; 55,5) | [55,5; 60,5) | [60,5; 65,5) | [65,5; 70,5) |
|-----------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Số học sinh 11A | 9            | 9            | 15           | 8            | 6            | 3            |
| Số học sinh 11B | 7            | 11           | 11           | 15           | 6            | 0            |
| Số học sinh 11C | 2            | 18           | 11           | 15           | 3            | 1            |
| Số học sinh 11D | 0            | 16           | 16           | 18           | 0            | 0            |

Tính tổng độ lệch chuẩn về cân nặng của học sinh 4 lớp trên (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)

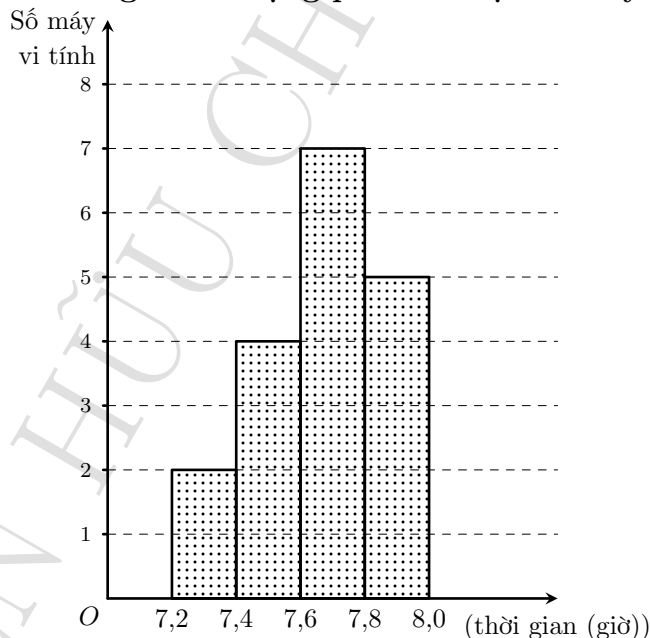
KQ:

**Câu 22.**

Kết quả khảo sát thời gian sử dụng liên tục (đơn vị: giờ) từ lúc sạc đầy cho đến khi hết của pin một số máy vi tính cùng loại được mô tả bằng biểu đồ bên. Hãy xác định độ lệch chuẩn của thời gian sử dụng pin (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

Thời gian sử dụng pin của một số máy vi tính



## E. ĐỀ ÔN TẬP SỐ 5

### 1

### Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

**Câu 1.** Cho mẫu số liệu ghép nhóm

| Nhóm   | $[a_1; a_2)$ | ... | $[a_i; a_{i+1})$ | ... | $[a_k; a_{k+1})$ |
|--------|--------------|-----|------------------|-----|------------------|
| Tần số | $m_1$        | ... | $m_i$            | ... | $m_k$            |

Trong đó các tần số  $m_1 > 0, m_k > 0$  và  $n = m_1 + m_2 + \dots + m_k$  là cỡ mẫu. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A.** Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là  $R = a_{k+1} - a_k$ .
- B.** Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là  $R = a_{k+1} - a_1$ .
- C.** Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là  $R = a_{i+1} - a_i$ .
- D.** Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là  $R = a_{k+1} + a_1$ .



**Câu 2.** Thống kê chiều cao của học sinh lớp 11A theo đơn vị đo cm, ta thu được bảng như sau

|                |            |            |            |            |            |            |
|----------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Chiều cao (cm) | [150; 155) | [155; 160) | [160; 165) | [165; 170) | [170; 175) | [175; 180] |
| Số học sinh    | 8          | 9          | 10         | 9          | 6          | 4          |

Khi đó khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên có khoảng biến thiên là

- A.** 125. **B.** 180. **C.** 30. **D.** 25.

**Câu 3.** Thống kê điểm môn Toán giữa kì của lớp 11A và 11B, ta thu được bảng như sau

|                 |        |        |        |        |         |
|-----------------|--------|--------|--------|--------|---------|
| Điểm            | [0; 2) | [2; 4) | [4; 6) | [6; 8) | [8; 10] |
| Số học sinh 11A | 0      | 0      | 12     | 18     | 11      |
| Số học sinh 11B | 3      | 9      | 15     | 12     | 0       |

Gọi  $R_1, R_2$  là khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về điểm thi môn Toán giữa kì của lớp 11A và 11B. Từ bảng trên, kết luận nào sau đây là đúng:

- A.**  $R_1 < 4$ .  
**B.**  $R_2 = 10$ .  
**C.**  $R_1 > R_2$ .  
**D.** Điểm môn Toán của lớp 11A có độ phân tán lớn hơn điểm môn Toán của lớp 11B.

**Câu 4.** Cho mẫu số liệu ghép nhóm sau

|        |              |     |                  |     |                  |
|--------|--------------|-----|------------------|-----|------------------|
| Nhóm   | $[a_1; a_2)$ | ... | $[a_i; a_{i+1})$ | ... | $[a_k; a_{k+1})$ |
| Tần số | $m_1$        | ... | $m_i$            | ... | $m_k$            |

Trong đó các tần số  $m_1 > 0, m_k > 0$  và  $n = m_1 + m_2 + \dots + m_k$  là cỡ mẫu. Kết luận nào sau đây là đúng:

- A.** Tứ phân vị thứ  $r$  là  $Q_r = a_p + \frac{\frac{r \cdot n}{4} - (m_1 + m_2 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p)$  trong đó  $[a_p; a_{p+1})$  là nhóm chứa tứ phân vị thứ  $r$  với  $r = 1, 2, 3$ .  
**B.** Tứ phân vị thứ  $r$  là  $Q_r = a_p + \frac{\frac{r \cdot n}{4} + (m_1 + m_2 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p)$  trong đó  $[a_p; a_{p+1})$  là nhóm chứa tứ phân vị thứ  $r$  với  $r = 1, 2, 3$ .  
**C.** Tứ phân vị thứ  $r$  là  $Q_r = a_p + \frac{\frac{r \cdot n}{4} - (m_1 + m_2 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} + a_p)$  trong đó  $[a_p; a_{p+1})$  là nhóm chứa tứ phân vị thứ  $r$  với  $r = 1, 2, 3$ .  
**D.** Tứ phân vị thứ  $r$  là  $Q_r = a_p + \frac{\frac{r \cdot n}{4} - (m_1 + m_2 + \dots + m_p)}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p)$  trong đó  $[a_p; a_{p+1})$  là nhóm chứa tứ phân vị thứ  $r$  với  $r = 1, 2, 3$ .

**Câu 5.** Thời gian đọc sách của 32 học sinh lớp 12A1 trong một ngày được thống kê theo bảng số liệu ghép nhóm như sau

|           |          |          |          |          |          |
|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Thời gian | [40; 45) | [45; 50) | [50; 55) | [55; 60) | [60; 65) |
| Tần số    | 3        | 10       | 12       | 6        | 1        |

Tính tứ phân vị thứ nhất.

- A.** 47,5.      **B.** 48.      **C.** 47.      **D.** 46,5.

**Câu 6.** Thời gian đọc sách của 32 học sinh lớp 12A1 trong một ngày được thống kê theo bảng số liệu ghép nhóm như sau

| Thời gian | [40; 45) | [45; 50) | [50; 55) | [55; 60) | [60; 65) |
|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Tần số    | 2        | 7        | 10       | 11       | 2        |

Tính tứ phân vị thứ ba.

- A.**  $\frac{101}{2}$ .      **B.**  $\frac{630}{11}$ .      **C.**  $\frac{523}{7}$ .      **D.**  $\frac{172}{3}$ .

**Câu 7.** Cho bảng số liệu ghép nhóm về chiều cao đo được của 30 học sinh nam lớp 12A2 đầu năm học 2024 – 2025 của trường THPT như sau:

| Chiều cao (cm) | [150; 155) | [155; 160) | [160; 165) | [165; 170) | [170; 175) |
|----------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Tần số         | 3          | 7          | 10         | 7          | 3          |

Tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm.

- A.**  $\frac{97}{3}$ .      **B.**  $\frac{91}{3}$ .      **C.**  $\frac{94}{3}$ .      **D.**  $\frac{95}{3}$ .

**Câu 8.** Cho bảng số liệu ghép nhóm về chiều cao đo được của 30 học sinh nam lớp 12A2 đầu năm học 2024 – 2025 của một trường THPT như sau

| Chiều cao (cm) | [150; 155) | [155; 160) | [160; 165) | [165; 170) | [170; 175) |
|----------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Tần số         | 3          | 7          | 10         | 7          | 3          |

Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm.

- A.**  $\frac{\sqrt{285}}{3}$ .      **B.**  $\frac{\sqrt{287}}{3}$ .      **C.**  $4\sqrt{2}$ .      **D.**  $\sqrt{71}$ .

**Câu 9.**

Tiền lãi (nghìn đồng) trong 30 ngày ở một quầy bán bảo được cho bởi bảng tần số ghép nhóm như hình bên. Tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm đó (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

- A.** 279,78.      **B.** 157,23.      **C.** 264,12.      **D.** 195,12.

| Nhóm          | Giá trị đại diện | Tần số |
|---------------|------------------|--------|
| [29,5 ; 40,5) | 35               | 3      |
| [40,5 ; 51,5) | 46               | 5      |
| [51,5 ; 62,5) | 57               | 7      |
| [62,5 ; 73,5) | 68               | 6      |
| [73,5 ; 84,5) | 79               | 5      |
| [84,5 ; 95,5) | 90               | 4      |
|               |                  | $n=30$ |

**Câu 10.** Một mẫu số liệu ghép nhóm có phương sai bằng 4 thì có độ lệch chuẩn bằng bao nhiêu?

- A.** 2.      **B.** 16.      **C.** 8.      **D.** 4.

**Câu 11.** Chọn đáp án phù hợp để điền vào chỗ trống trong mệnh đề: “Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm ...” ?

- A.** Lớn hơn phương sai của mẫu số liệu gốc.

- B.** Xấp xỉ phương sai của mẫu số liệu gốc và được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm đó.
- C.** Được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm đó.
- D.** Lớn hơn phương sai của mẫu số liệu gốc và được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

**Câu 12.** Hai mẫu số liệu ghép nhóm thống kê điểm kiểm tra môn toán ở hai lớp 12A và 12B lần lượt có độ lệch chuẩn là  $s_1 = 1,8$  và  $s_2 = 2,16$ . Hãy chọn phương án đúng trong các phương án sau

- A.** Điểm của lớp 12A cao hơn lớp 12B.
- B.** Điểm của lớp 12A thấp hơn lớp 12B.
- C.** Điểm của lớp 12A xấp xỉ lớp 12B.
- D.** Điểm của lớp 12A đồng đều hơn lớp 12B.

## 2 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

**Câu 13.**

Bảng biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về nhiệt độ không khí trung bình các tháng năm 2021 tại Hà Nội (đơn vị: độ C).

| Nhóm          | Giá trị đại diện | Tần số   |
|---------------|------------------|----------|
| [16,8 ; 19,8) | 18,3             | 2        |
| [19,8 ; 22,8) | 21,3             | 3        |
| [22,8 ; 25,8) | 24,3             | 2        |
| [25,8 ; 28,8) | 27,3             | 1        |
| [28,8 ; 31,8) | 30,3             | 4        |
|               |                  | $n = 12$ |

| Phát biểu                                                             | Đ | S |
|-----------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là $15^{\circ}\text{C}$ .   |   |   |
| b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là $8,75^{\circ}\text{C}$ . |   |   |
| c) Phương sai của mẫu số liệu trên là $25,8^{\circ}\text{C}$ .        |   |   |
| d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên là $4,8^{\circ}\text{C}$ .      |   |   |

**Câu 14.** Số xe ô tô đi qua một trạm thu phí mỗi phút trong khoảng thời gian từ 10 giờ đến 10 giờ 20 phút sáng được thống kê như bảng sau

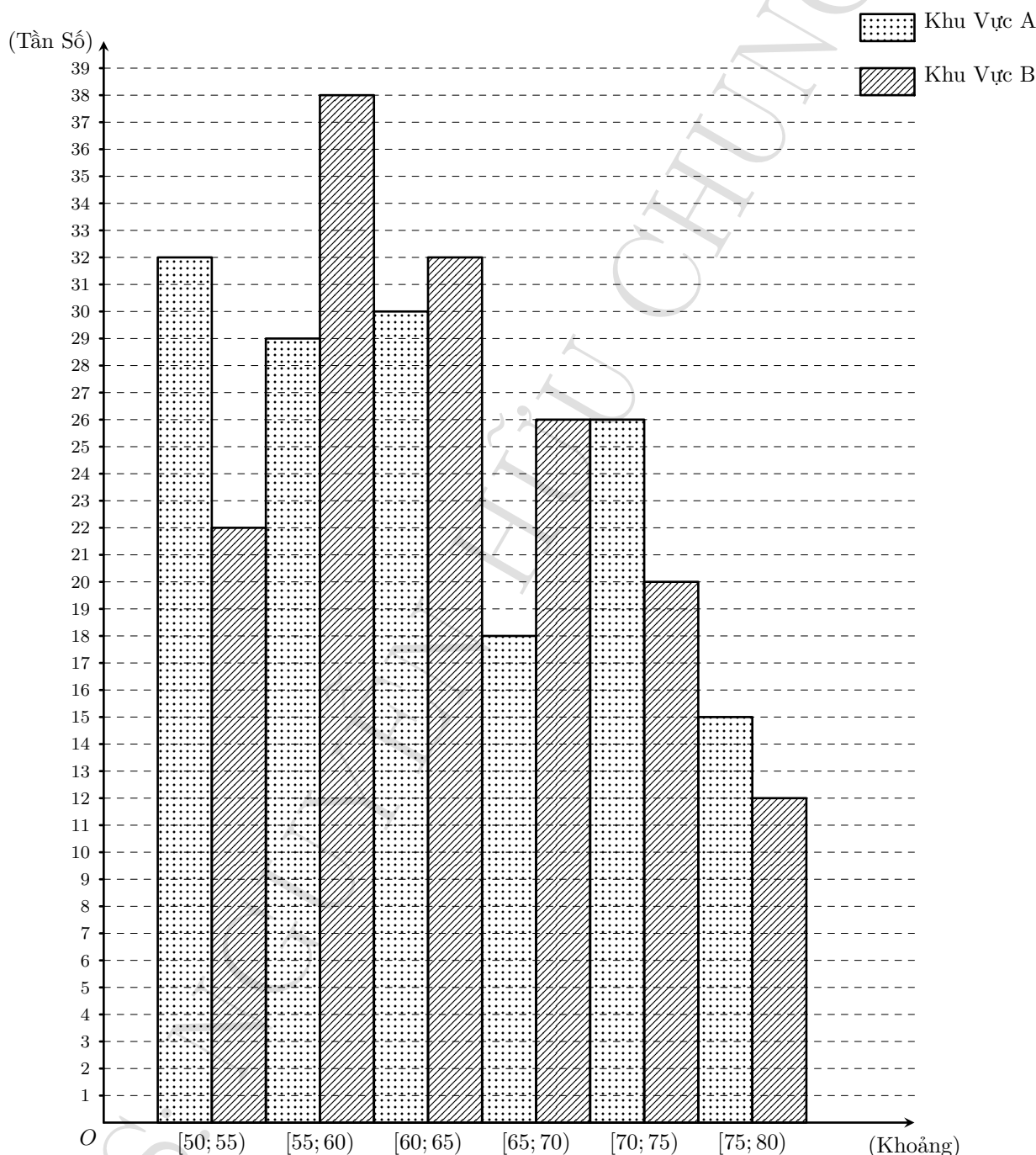
| Số xe    | Giá trị đại diện | Tần số   | Tần số tích lũy |
|----------|------------------|----------|-----------------|
| [6; 10)  | 8                | 5        | 3               |
| [10; 14) | 12               | 9        | 9               |
| [14; 18) | 16               | 3        | 21              |
| [18; 22) | 20               | 9        | 27              |
| [22; 26) | 24               | 4        | 30              |
|          |                  | $n = 30$ |                 |

| Phát biểu                                                      | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là 20.     |   |   |
| b) Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm trên là 15,73. |   |   |

| Phát biểu                                                | Đ | S |
|----------------------------------------------------------|---|---|
| c) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên là 25,73.   |   |   |
| d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên là 4,36. |   |   |

**Câu 15.** Biểu đồ sau mô tả kết quả điều tra đường kính thân của một số cây xoan đào 8 năm tuổi (đơn vị: cm) của một giống cây xoan đào ở hai địa điểm A và B; (Kết quả làm tròn đến chữ số hàng đơn vị).

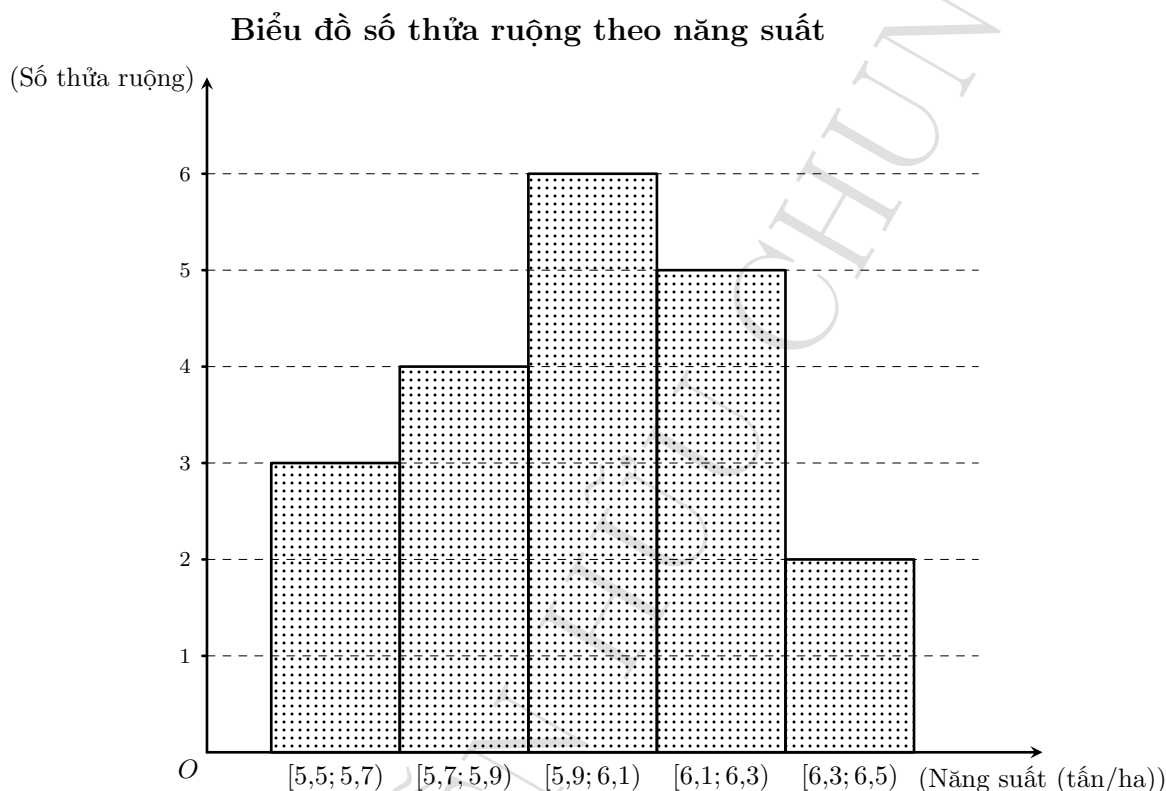
**ĐƯỜNG KÍNH CỦA CÂY XOAN ĐÀO TẠI HAI ĐỊA ĐIỂM A VÀ B**



| Phát biểu                                                                                                            | Đ | S |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về đường kính của cây xoan đào 8 năm tuổi ở khu vực A và B bằng nhau. |   |   |

| Phát biểu                                                                                                                             | Đ | S |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về đường kính của cây xoan đào 8 năm tuổi ở khu vực B lớn hơn khu vực A.               |   |   |
| c) Tổng phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm về đường kính của cây xoan đào 8 năm tuổi ở khu vực A và B là 126.                       |   |   |
| d) Dựa theo độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm thì các cây xoan đào 8 năm tuổi ở khu vực A có đường kính đồng đều hơn khu vực B. |   |   |

**Câu 16.** Kết quả khảo sát năng suất (đơn vị: tấn/ha) của một số thửa ruộng được minh họa ở biểu đồ sau:



| Phát biểu                                                  | Đ | S |
|------------------------------------------------------------|---|---|
| a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là 1,2 (tấn/ha). |   |   |
| b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là 0,4675.       |   |   |
| c) Phương sai của mẫu số liệu trên là 6,088.               |   |   |
| d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên là 0,29.             |   |   |

### 3

### Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 17.** Dưới đây là bảng thống kê số giờ sử dụng smartphone trong 1 ngày nghỉ của học sinh lớp 12A:

|                |        |        |        |        |        |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Số giờ sử dụng | [0; 1) | [1; 2) | [2; 3) | [3; 4) | [4; 5) |
| Số học sinh    | 2      | 15     | 12     | 11     | 6      |

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trong mẫu dữ liệu đã cho là (làm tròn kết quả đến hàng

phần mười).

KQ:

**Câu 18.** Dưới đây là bảng thống kê thời gian tập thể dục của các em học sinh (HS) lớp 8 A tại một trường THCS như sau

| Thời gian (phút) | [0; 10) | [10; 20) | [20; 30) | [30; 40) |
|------------------|---------|----------|----------|----------|
| Số HS            | 25      | 8        | 7        | 2        |

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên, (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

KQ:

**Câu 19.** Kết quả điều tra tổng thu nhập trong năm 2021 của một số hộ gia đình ở thành phố Đà Lạt được ghi lại ở bảng sau:

| Tổng thu nhập (triệu đồng) | [200; 250) | [250; 300) | [300; 350) | [350; 400) | [400; 450) |
|----------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số hộ gia đình             | 24         | 62         | 34         | 21         | 9          |

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trong mẫu dữ liệu đã cho là (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

KQ:

**Câu 20.** Bạn Hùng và Nhiên cùng sử dụng vòng đeo tay thông minh để ghi lại số bước chân hai bạn đi mỗi ngày trong một tháng. Kết quả được ghi lại ở bảng sau:

| Số bước (đơn vị: nghìn) | [3; 5) | [5; 7) | [7; 9) | [9; 11) | [11; 13) |
|-------------------------|--------|--------|--------|---------|----------|
| Số ngày của Hùng        | 6      | 7      | 6      | 6       | 5        |
| Số ngày của Nhiên       | 2      | 5      | 13     | 8       | 2        |

Tổng độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm của hai bạn trên là (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KQ:

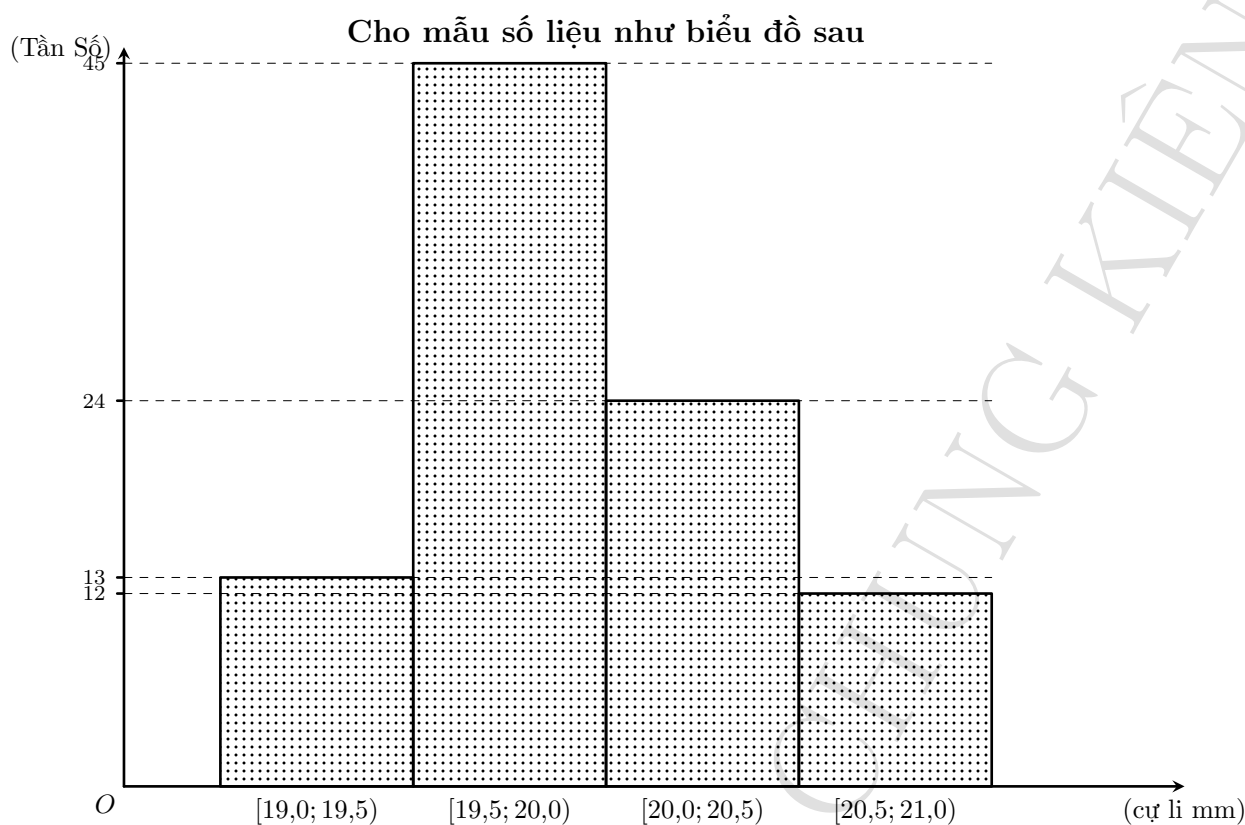
**Câu 21.** Trong thực hành đo hiệu điện thế của mạch điện, An và Bình đã dùng hai vôn kế khác nhau để đo, mỗi bạn tiến hành đo 10 lần và cho kết quả như sau

| Hiệu điện thế đo được (Vôn) | [3,85; 3,90) | [3,90; 3,95) | [3,95; 4,00) | [4,00; 4,05) |
|-----------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Số lần An đo                | 1            | 6            | 2            | 1            |
| Số lần Bình đo              | 1            | 3            | 4            | 2            |

Tính độ lệch chuẩn của các mẫu số liệu ghép nhóm cho kết quả đo của An và Bình. Một trăm lần của hiệu số độ lệch chuẩn của các mẫu số liệu ghép nhóm kết quả đo của Bình và của An là bao nhiêu?

KQ:

**Câu 22.** Biểu đồ dưới đây thống kê cự li ném tạ của vận động viên A như hình sau



Giả sử số lần ném tạ ở các cự li  $[19; 19,5)$ ;  $[19; 19,5)$ ;  $[20; 20,5)$  là không đổi. Hỏi số lần ném tạ đạt được ở Cự li  $[20,5; 21)$  nhỏ nhất bằng bao nhiêu để độ lệch chuẩn lớn hơn độ lệch chuẩn ở bảng 1.

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|