

CHƯƠNG IX. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP.

BÀI 27. GÓC NỘI TIẾP

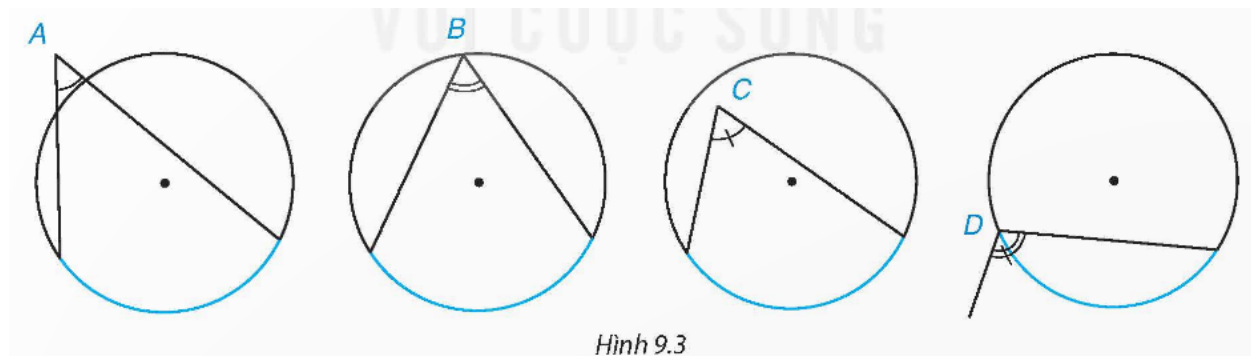
A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Góc nội tiếp và cung bị chắn

Định nghĩa

Góc nội tiếp của đường tròn là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó. Cung nằm bên trong góc được gọi là cung bị chắn.

Ví dụ 1. Trong các góc A, B, C, D ở Hình 9.3, góc nào là góc nội tiếp, góc nào không phải góc nội tiếp của đường tròn vẽ trong hình? Vì sao?



Hình 9.3

Lời giải

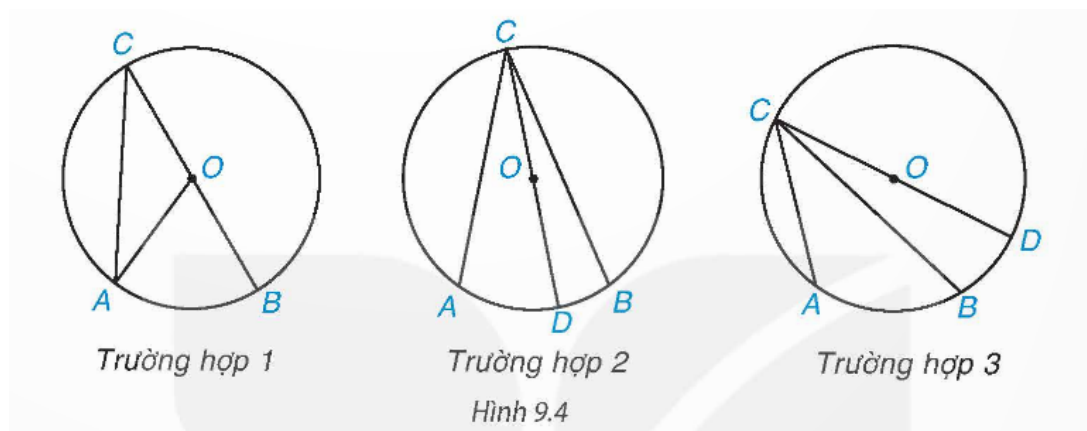
Các góc A và C không phải góc nội tiếp của đường tròn vì đỉnh không nằm trên đường tròn. Góc D có một cạnh không chứa dây cung của đường tròn nên cũng không là góc nội tiếp của đường tròn. Góc B có đỉnh B nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn nên là góc nội tiếp của đường tròn.

2. Định lý sau cho biết mối liên hệ giữa góc nội tiếp với cung bị chắn:

Định lý: Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

GT	$A, B, C \in (O).$
KL	$\widehat{ACB} = \frac{1}{2} sđ \widehat{AB}$ (cung AB không chứa C).

Chứng minh. Ta xét ba trường hợp sau (H.9.4).



Trường hợp 1: Tâm O nằm trên một cạnh của góc ACB . Giả sử $O \in CB$. Do tam giác OAC cân tại O và có tổng các góc bằng 180° nên: $2\widehat{ACB} = \widehat{ACO} + \widehat{CAO} = 180^\circ - \widehat{AOC} = \widehat{AOB}$.

Do $\widehat{AOB} = sđ \widehat{AB}$ (vì $\widehat{AOB}$ là góc ở tâm chắn cung AB) nên $\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = \frac{1}{2} sđ \widehat{AB}$.

Trường hợp 2: Tâm O nằm bên trong góc ACB . Vẽ đường kính CD . Áp dụng Trường hợp 1 cho các góc nội tiếp ACD và DCB với cạnh CD đi qua O , ta được: $\widehat{ACD} = \frac{1}{2}s\widehat{AD}$ và $\widehat{DCB} = \frac{1}{2}s\widehat{DB}$

$$\text{Suy ra } \widehat{ACB} = \widehat{ACD} + \widehat{DCB} = \frac{1}{2}s\widehat{AD} + \frac{1}{2}s\widehat{DB} = \frac{1}{2}s\widehat{AB}.$$

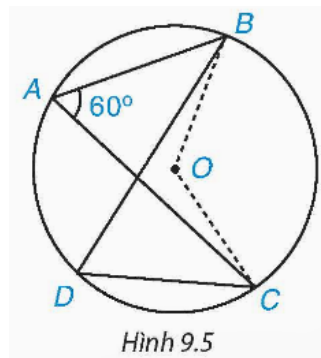
Trường hợp 3: Tâm O nằm ngoài góc ACB . Vẽ đường kính CD . Áp dụng Trường hợp 1 cho các góc nội tiếp ACD và BCD với cạnh CD đi qua O , tương tự như trên ta được:

$$\widehat{ACB} = \widehat{ACD} - \widehat{BCD} = \frac{1}{2}s\widehat{AD} - \frac{1}{2}s\widehat{BD} = \frac{1}{2}s\widehat{AB}$$

Nhận xét. Từ định lý trên ta có các khẳng định sau đối với các góc nội tiếp của một đường tròn hoặc của hai đường tròn bằng nhau:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.
- Các góc nội tiếp chắn cung nhỏ thì có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm chắn cùng một cung.
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) và các điểm A, B, C, D trên (O) như Hình 9.5. Biết rằng $\widehat{BAC} = 60^\circ$, hãy tính số đo của các góc BOC và BDC .



Hình 9.5

Lời giải

Xét đường tròn (O) , ta có:

- Do hai góc nội tiếp $\widehat{BDC}$ và $\widehat{BAC}$ cùng chắn cung nhỏ BC nên $\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = 60^\circ$;
- Vì góc nội tiếp $\widehat{BAC}$ và góc ở tâm $\widehat{BOC}$ cùng chắn cung nhỏ BC nên $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 120^\circ$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. TÍNH SỐ ĐO GÓC, CUNG

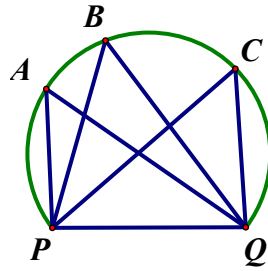
1. Phương pháp

Trong một đường tròn:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau và ngược lại.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau
- Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90°) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

2. Ví dụ

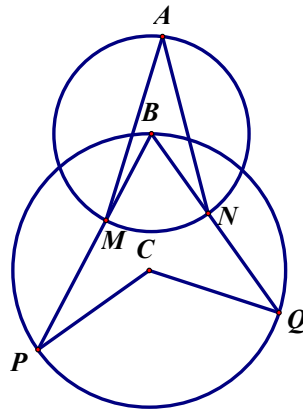
Ví dụ 1. Một huấn luyện viên cho cầu thủ tập sút bóng vào cầu môn PQ. Bóng được đặt ở các vị trí A, B, C trên một cung tròn như hình 22.



Hình 22

Hãy so sánh các góc $\widehat{PAQ}, \widehat{PBQ}, \widehat{PCQ}$.

Ví dụ 2. Xem hình 24 (hai đường tròn có tâm là B, C và điểm B nằm trên đường tròn tâm C)

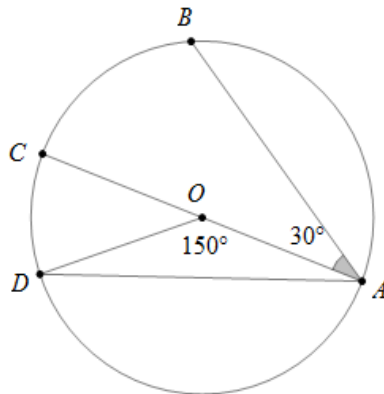


Hình 24

a) Biết $\widehat{MAN} = 30^\circ$. Tính $\widehat{PCQ}$.

b) Nếu $\widehat{PCQ} = 136^\circ$ thì $\widehat{MAN}$ có số đo là bao nhiêu?

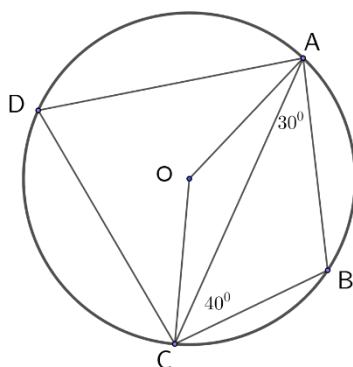
Ví dụ 3. Dựa vào hình vẽ sau:



a) Tính số đo cung nhỏ CD.

b) Tính số đo cung nhỏ BD.

Ví dụ 4. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), biết $\widehat{BAC} = 30^\circ, \widehat{BCA} = 40^\circ$ (như hình vẽ bên).



Tính số đo các góc $\widehat{ABC}$, $\widehat{ADC}$, $\widehat{AOC}$.

DẠNG 2. CHỨNG MINH CÁC GÓC BẰNG NHAU, CÁC CUNG BẰNG NHAU. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

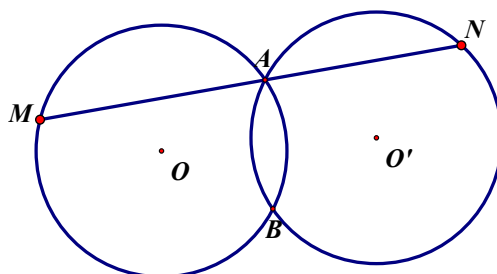
1. Phương pháp

Trong một đường tròn:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau và ngược lại.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau
- Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90°) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ đường thẳng qua A cắt (O) tại M và cắt (O') tại N (A nằm giữa M và N). Hỏi MBN là tam giác gì? Tại sao?



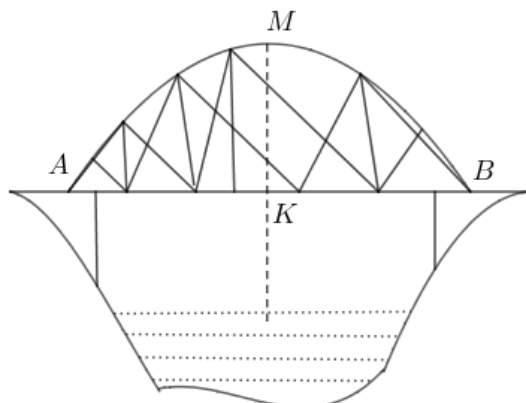
Hình 23

Ví dụ 2. Trên đường tròn (O) đường kính AB, lấy điểm M (khác A và B). Vẽ tiếp tuyến của (O) tại A. Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến đó tại C. Chứng minh rằng ta luôn có: $MA^2 = MB.MC$

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O) và một điểm M cố định không nằm trên đường tròn. Qua M kẻ hai đường thẳng. Đường thẳng thứ nhất cắt (O) tại A và B. Đường thẳng thứ hai cắt (O) tại C và D. Chứng minh: $MA.MB = MC.MD$

Hướng dẫn: Xét cả hai trường hợp điểm M nằm bên trong và bên ngoài đường tròn. Trong mỗi trường hợp, xét hai tam giác đồng dạng.

Ví dụ 4. Một chiếc cầu được thiết kế như hình 30 có độ dài $AB = 40m$, chiều cao $MK = 3m$. Hãy tính bán kính của đường tròn chứa cung AMB.



Hình 30

Ví dụ 5. Cho AB, BC, CA là ba dây của đường tròn (O) Từ điểm chính giữa M của cung AB vẽ dây MN song song với dây BC. Gọi giao điểm của MN và AC là S. Chứng minh $SM = SC$ và $SN = SA$.

Ví dụ 6. Cho ΔABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^\circ$). Vẽ đường tròn đường kính AB cắt BC tại D, cắt AC tại E.

a) Chứng minh $\widehat{BD} = \widehat{DE}$.

b) Chứng minh $\widehat{CBE} = \frac{1}{2} \widehat{BAC}$.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH và nội tiếp đường tròn tâm O, đường kính AM

a) Tính $\widehat{ACM}$.

b) Chứng minh $\widehat{BAH} = \widehat{OCA}$.

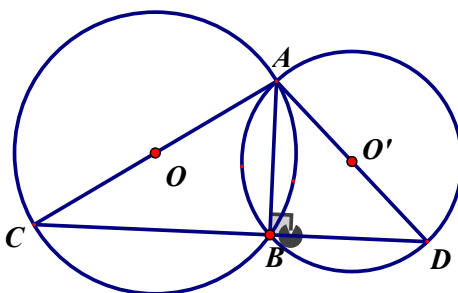
c) Gọi N là giao điểm của AH với (O). Tứ giác BCMN là hình gì? Vì sao?

Ví dụ 8. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Từ đỉnh A ta kẻ đường cao AH (H thuộc BC). Chứng minh rằng $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R), AH là đường cao ($H \in BC$). Chứng minh rằng: $AB.AC = 2R.AH$.

DẠNG 3. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, VUÔNG GÓC, BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ các đường kính AC và AD của hai đường tròn. Chứng minh rằng ba điểm C, B, D thẳng hàng.



Hình 26

Ví dụ 2. Cho đường tròn tâm (O), đường kính AB và S là một điểm nằm bên ngoài đường tròn, SA và SB lần lượt cắt đường tròn tại M, N. Gọi H là giao điểm của BM và AN. Chứng minh rằng SH vuông góc với AB.

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm D thuộc (O). Gọi E là điểm đối xứng với A qua D

a) $\triangle ABE$ là tam giác gì?

b) Gọi K là giao điểm của EB với (O), Chứng minh rằng: $OD \perp AK$.

Ví dụ 4. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$ và điểm C nằm ngoài nửa đường tròn. CA cắt nửa đường tròn tại M, CB cắt nửa đường tròn tại N. Gọi H là giao điểm của AN và BM.

a) Chứng minh rằng $CH \perp AB$.

b) Gọi I là trung điểm của CH. Chứng minh rằng MI là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O).

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

9.1. Những khẳng định nào sau đây là đúng?

a) Hai góc nội tiếp bằng nhau thì chắn cùng một cung.

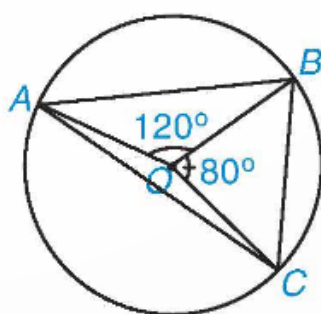
b) Góc nội tiếp nhỏ hơn 90° có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm chắn cùng một cung.

c) Góc nội tiếp chắn cung nhỏ có số đo bằng số đo của góc ở tâm chắn cùng một cung.

d) Hai góc nội tiếp bằng nhau thì chắn hai cung bằng nhau.

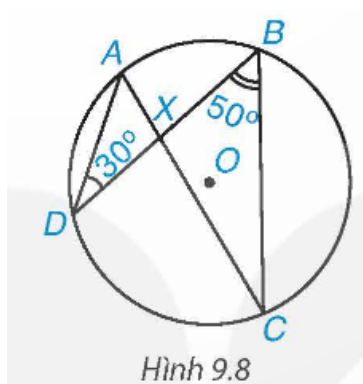
9.2. Cho các điểm như Hình 9.7. Tính số đo các góc của tam giác ABC , biết rằng

$$\widehat{AOB} = 120^\circ, \widehat{BOC} = 80^\circ.$$



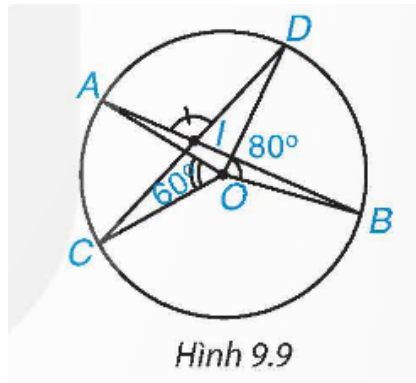
Hình 9.7

9.3. Cho đường tròn (O) và hai dây cung AC, BD cắt nhau tại X (H.9.8). Tính số đo góc $\angle AXB$ biết rằng $\widehat{ADB} = 30^\circ$ và $\widehat{DBC} = 50^\circ$.



Hình 9.8

9.4. Cho đường tròn (O) và hai dây cung AB, CD cắt nhau tại điểm I nằm trong (O) (H.9.9)

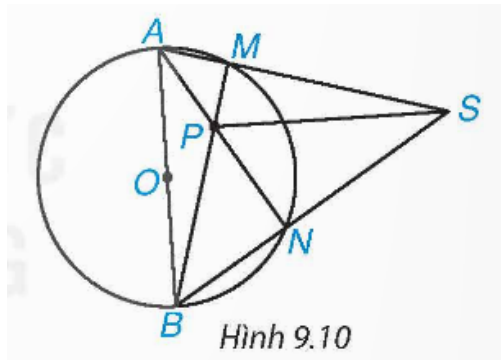


Hình 9.9

a) Biết rằng $\widehat{AOC} = 60^\circ$, $\widehat{BOD} = 80^\circ$. Tính số đo của góc AID .

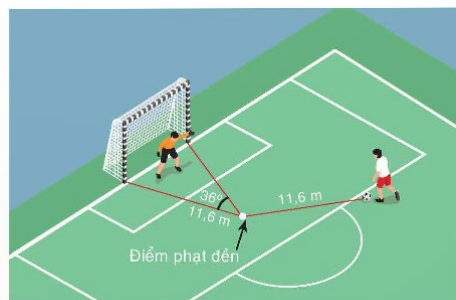
b) Chứng minh rằng $IA \cdot IB = IC \cdot ID$.

9.5. Cho đường tròn (O) , đường kính AB và điểm S nằm ngoài (O) . Cho hai đường thẳng SA, SB lần lượt cắt (O) tại M (khác A) và N (khác B). Gọi P là giao điểm của BM và AN (H.9.10). Chứng minh rằng SP vuông góc với AB .



Hình 9.10

9.6. Trên sân bóng, khi quả bóng được đặt tại điểm phạt đền thì có góc sút bằng 36° và quả bóng cách mỗi cọc gôn $11,6m$ (H.9.11). Hỏi khi quả bóng đặt ở vị trí cách điểm phạt đền $11,6m$ thì góc sút bằng bao nhiêu?



Hình 9.11

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và dây AC căng cung AC có số đo bằng 60° .

a) So sánh các góc của $\triangle ABC$.

b) Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của các cung AC và BC , hai dây AN và BM cắt nhau tại I . Chứng minh rằng CI là tia phân giác của $\widehat{ACB}$.

Bài 2. Trên cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC về phía ngoài ta dựng hình vuông với tâm tại điểm O . Chứng minh rằng AO là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Vẽ AD là đường cao của tam giác ABC . Chứng minh rằng $\widehat{BAD} = \widehat{OAC}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) . Đường phân giác trong góc A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại D . Gọi I là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh $DB = DC = DI$

Bài 5. Cho tam giác ABC ($\widehat{A} = 90^\circ$) và $AB < AC$. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AB cắt BC tại D , cắt AC tại E . Chứng minh rằng $DB \cdot CB = EB^2$.

Bài 6. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}$ nhọn nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$. Chứng minh rằng:
 $BC = 2R \sin \widehat{BAC}$.

Bài 7. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Lấy M là điểm tùy ý trên nửa đường tròn (M khác A và B). Kẻ MH vuông góc với AB ($H \in AB$). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn (O) vẽ hai nửa đường tròn tâm O_1 , đường kính AH và tâm O_2 , đường kính BH . Đoạn MA và MB cắt hai nửa đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại P và Q . Chứng minh rằng:

- a) $MH = PQ$.
- b) $\triangle MPQ \sim \triangle MBA$.
- c) PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1) và (O_2) .

Bài 8. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và dây AC căng cung AC có số đo bằng 60° .

- a) So sánh các góc của $\triangle ABC$;
- b) Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của các cung AC và BC . Hai dây AN và BM cắt nhau tại điểm I . Chứng minh rằng CI là tia phân giác của góc ACB .

Bài 9. Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^\circ$). Vẽ đường tròn đường kính AB cắt BC tại D , cắt AC tại E . Chứng minh rằng:

- a) Tam giác DBE cân;
- b) $\widehat{CBE} = \frac{1}{2} \widehat{BAC}$

Bài 10. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Vẽ đường kính $MN \perp BC$ (điểm M thuộc cung BC không chứa A). Chứng minh rằng các tia AM , AN lần lượt là các tia phân giác trong và ngoài tại đỉnh A của $\triangle ABC$.

Bài 11. Cho đường tròn (O) và hai dây MA , MB vuông góc với nhau. Gọi I và K lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ MA , MB . Gọi P là giao điểm của AK và BI .

- a) Chứng minh rằng ba điểm A , O , B thẳng hàng.
- b) Chứng minh rằng P là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$.
- c*) Giả sử $MA = 12\text{cm}$, $MB = 16\text{cm}$, tính bán kính của đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$.

Bài 12. Cho đường tròn (O) đường kính AB và một điểm C di động trên nửa đường tròn đó. Vẽ đường tròn (I) tiếp xúc với đường tròn (O) tại C và tiếp xúc với đường kính AB tại D , đường tròn này cắt CA và CB lần lượt tại các điểm thứ hai là M và N .

Chứng minh rằng:

- a) Ba điểm M , I , N thẳng hàng.
- b) $ID \perp MN$.
- c) Đường thẳng CD đi qua một điểm cố định, từ đó suy ra cách dựng đường tròn I nói trên.

Bài 13. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H . Vẽ đường kính AF .

- a) Tứ giác $BFCH$ là hình gì?

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm H, M, F thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng: $OM = \frac{1}{2} AH$

Bài 14. Cho đường tròn (O) đường kính AB, M là điểm chính giữa của một nửa đường tròn, C là điểm bất kì trên nửa đường tròn kia, CM cắt AB tại D. Vẽ dây AE vuông góc với CM tại F.

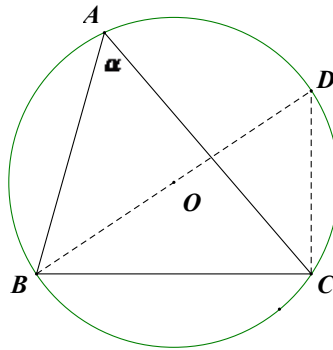
a) Chứng minh rằng tứ giác ACEM là hình thang cân.

b) Vẽ $CH \perp AB$, chứng minh rằng tia CM là phân giác của góc HCO.

c) Chứng minh rằng $CD \leq \frac{1}{2} AE$

Bài 15. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O;R). Biết $\hat{A} = \alpha < 90^\circ$. Tính độ dài BC

Hướng dẫn giải



Hình 181

Vẽ đường kính BD , được $\widehat{BCD} = 90^\circ$ và $\widehat{BDC} = \hat{A} = \alpha$.

Xét $\triangle BCD$ vuông tại C , có: $BC = BD \cdot \sin D = 2R \cdot \sin \alpha$.

Bài 3. Cho đường tròn (O), đường kính AB, điểm D thuộc đường tròn. Gọi E là điểm đối xứng với A qua D.

a) Tam giác ABE là tam giác gì?

b) Gọi K là giao điểm của EB với (O). Chứng minh $OD \perp AK$.

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Vẽ đường kính AF.

a) Tứ giác BFCH là hình gì?

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm H, M, F thẳng hàng.

c) Chứng minh $OM = \frac{1}{2} AH$.

Bài 5. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và điểm C di động trên nửa đường tròn đó. Vẽ đường tròn (I) tiếp xúc với đường tròn (O) tại C và tiếp xúc với đường kính AB tại D, đường tròn này cắt CA, CB lần lượt tại các điểm thứ hai là M và N. Chứng minh rằng:

a) M, N, I thẳng hàng.

b) $ID \perp MN$.

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường cao BM, CN cắt nhau tại H và cắt đường tròn lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh rằng A là điểm chính giữa cung FE.

- b) Chứng minh rằng $EF \parallel MN$.
- c) Chứng minh rằng $OA \perp MN$.
- d) Chứng minh rằng AH không đổi khi A di động trên cung lớn BC.
- e) Chứng minh rằng F đối xứng với H qua AB.

Bài 7. *Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) . Trên cung $\widehat{BC}$ không chứa A ta lấy điểm P bất kỳ (P khác B và P khác C). Các đoạn PA và BC cắt nhau tại Q .

- a) Giả sử D là một điểm trên đoạn PA sao cho $PD = PB$. Chứng minh rằng $\triangle PDB$ đều.
- b) Chứng minh rằng $PA = PB + PC$.
- c) Chứng minh hệ thức $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$.

BÀI 28. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP CỦA MỘT TAM GIÁC.

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

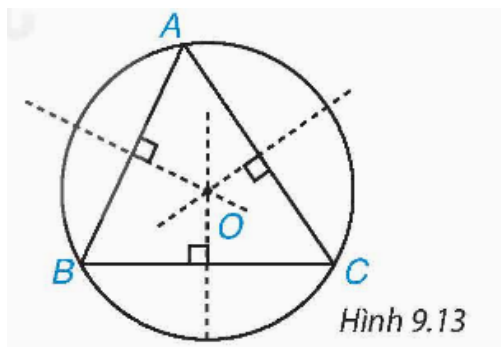
1. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP MỘT TAM GIÁC

Khái niệm đường tròn ngoại tiếp tam giác

Định nghĩa:

Đường tròn ngoại tiếp một tam giác là đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác đó.

Trong Hình 9.13, đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC . Ta cũng nói tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , hay (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tâm O là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác ABC .

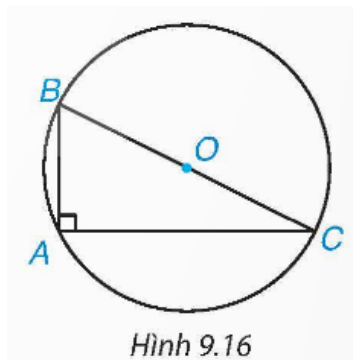


Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông

Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông có tâm là trung điểm của cạnh huyền và bán kính bằng một nửa cạnh huyền.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 2\text{ cm}$, $AC = 4\text{ cm}$. Vẽ đường tròn $(O; R)$ ngoại tiếp tam giác ABC và tính bán kính R .

Lời giải



Lấy O là trung điểm của BC và vẽ đường tròn (O) đi qua A . Khi đó, (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Theo định lý Pythagore, ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4 + 16 = 20$ nên $BC = 2\sqrt{5}(\text{cm})$.

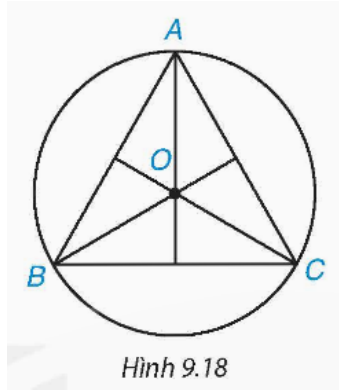
Vậy đường tròn (O) có bán kính $R = \frac{BC}{2} = \sqrt{5}\text{ cm}$.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều

Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh a có tâm là trọng tâm của tam giác đó và bán kính bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

Ví dụ 2. Cho tam giác đều ABC có độ dài cạnh bằng 3 cm . Vẽ đường tròn $(O; R)$ ngoại tiếp tam giác ABC . Tính bán kính R .

Lời giải



Hình 9.18

Lấy O là giao điểm của ba đường trung tuyến của tam giác ABC và vẽ đường tròn (O) đi qua A . Đường tròn (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính $R = \frac{\sqrt{3}}{3} BC = \sqrt{3} \text{ cm}$.

2. ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP MỘT TAM GIÁC

Đường tròn nội tiếp tam giác

Tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác được gọi là đường tròn nội tiếp tam giác. Tam giác đó được gọi là ngoại tiếp đường tròn. Tâm đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm ba đường phân giác của tam giác.

Chú ý:

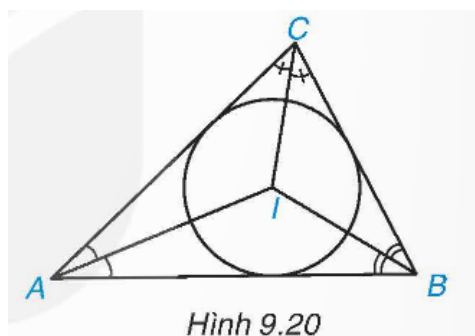
Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác nghĩa là tiếp xúc với đường thẳng chứa cạnh đó và có tiếp điểm nằm trên cạnh đó.

Đường tròn nội tiếp tam giác đều

Đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a có tâm là trọng tâm của tam giác đó và bán kính bằng $\frac{\sqrt{3}}{6} a$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . Biết rằng $\hat{A} = 40^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$. Tính số đo của các góc BIC , CIA và AIB .

Lời giải



Hình 9.20

Vì tổng ba góc của tam giác ABC bằng 180° nên $\widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{BAC} - \widehat{ABC} = 80^\circ$.

Vì tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) nên I là giao điểm các đường phân giác của tam giác ABC .

Do đó, ta có: $\widehat{CAI} = \widehat{BAI} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = 20^\circ$; $\widehat{CBI} = \widehat{ABI} = \frac{\widehat{ABC}}{2} = 30^\circ$; $\widehat{ACI} = \widehat{BCI} = \frac{\widehat{ACB}}{2} = 40^\circ$. Vì tổng các

góc trong tam giác BIC bằng 180° nên $\widehat{BIC} = 180^\circ - \widehat{CBI} - \widehat{BCI} = 180^\circ - 30^\circ - 40^\circ = 110^\circ$.

Tương tự, $\widehat{CIA} = 180^\circ - \widehat{ACI} - \widehat{CAI} = 120^\circ$ và $\widehat{AIB} = 180^\circ - \widehat{ABI} - \widehat{BAI} = 130^\circ$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. XÁC ĐỊNH TÂM VÀ TÍNH BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP, NỘI TIẾP TAM GIÁC

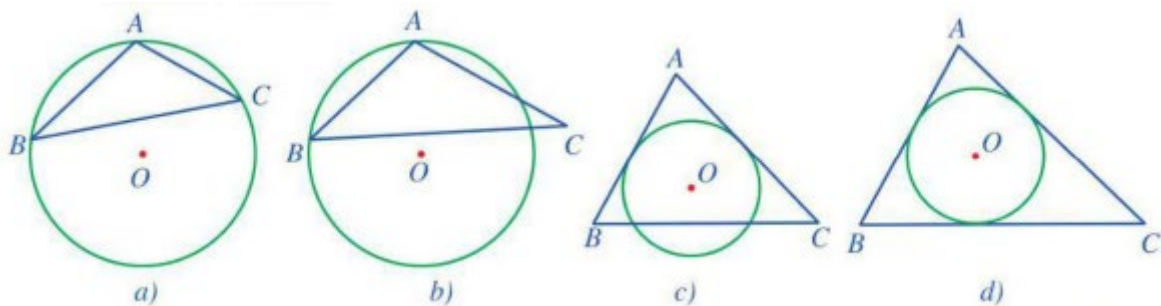
1. Phương pháp

- Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông có tâm là trung điểm cạnh huyền và bán kính bằng nửa cạnh huyền của tam giác vuông đó.
- Trong một tam giác đều, trọng tâm của tam giác đồng thời là tâm của đường tròn ngoại và nội tiếp tam giác đó.

- Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và bán kính đường tròn nội tiếp là $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình vẽ sau :



a) Hình nào có đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC ? Giải thích?

b) Hình nào có đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC ? Giải thích?

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 10\text{cm}$ và $AC = \sqrt{21}\text{cm}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có $AB = 6\text{cm}$ và $AC = 8\text{cm}$ ngoại tiếp đường tròn $(I; r)$. Tính r

Ví dụ 4. Xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC có cạnh bằng a .

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC vuông tại B có $\widehat{C} = 60^\circ$, $BC = 3\text{cm}$ và O là trung điểm AC . Xác định tâm, bán kính và vẽ đường tròn ngoại tiếp của:

a) $\triangle ABC$;

b) $\triangle BCO$.

Ví dụ 6. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC . Tính bán kính của (O) , biết rằng ABC vuông cân tại A và có cạnh bằng $2\sqrt{2}\text{cm}$.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Biết rằng $\widehat{BOC} = 120^\circ$ và $\widehat{OCA} = 20^\circ$. Tính số đo các góc của tam giác ABC .

DẠNG 2. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP, NỘI TIẾP TAM GIÁC

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ cân tại A nội tiếp đường tròn (O) . Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu của (O) lên AB và AC . Chứng minh rằng AO là tia phân giác của $\widehat{BAC}$

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A $\widehat{BAC} = 90^\circ$ ($AB \leq AC$). Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D . Chứng minh rằng:

a) $BD = \frac{BC + AB - AC}{2}$

b) $S_{ABC} = BD \cdot DC$

Ví dụ 3. Cho tứ giác $ABCD$ có các tam giác ABC và ADC lần lượt ngoại tiếp các đường tròn (I) và (K) sao cho hai đường tròn này tiếp xúc với đường thẳng AC tại điểm H thuộc đoạn thẳng AC . Giả sử đường tròn (I) tiếp xúc với cạnh AB tại M , đường tròn (K) tiếp xúc với cạnh AD tại N (Hình vẽ). Chứng minh:

a) Ba điểm I, H, K thẳng hàng;

b) $AM = AN$;

c) $\widehat{IAK} = \frac{1}{2} \widehat{BAD}$.

Ví dụ 4. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC với các tiếp điểm trên các cạnh AB, AC lần lượt là E, F . Chứng minh rằng $\widehat{EIF} + \widehat{BAC} = 180^\circ$.

Ví dụ 5. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) đường kính $AD = 2R$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và H là trực tâm của tam giác ABC . Chứng minh:

a) $DB \perp AB$ và $CD \perp AC$;

b) Tứ giác $BHCD$ là hình bình hành;

c) $AC^2 + BH^2 = 4R^2$;

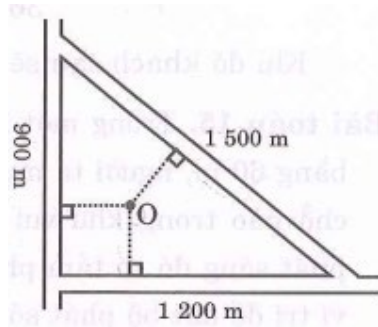
d) Ba điểm H, M, D thẳng hàng và $AH = 2OM$.

DẠNG 3. TOÁN THỰC TẾ

Ví dụ 1. Một mảnh vườn có dạng tam giác đều ABC cạnh 12 cm. Người ta muốn trồng hoa ở phần đất bên trong đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tính diện tích phần đất trồng hoa đó.

Ví dụ 2. Ba vị trí A, B, C ở một công viên là ba đỉnh của một tam giác đều cạnh 15 m. Người ta cần chọn vị trí O cách đều ba vị trí A, B, C để làm một cột đèn. Tính khoảng cách từ vị trí O đến mỗi vị trí A, B, C .

Ví dụ 3. Người ta vẽ bản quy hoạch của một khu định cư được bao xung quanh bởi ba con đường thẳng lập thành một tam giác với độ dài các cạnh là 900 m, 1200 m và 1500 m (Hình vẽ).



a) Tính chu vi và diện tích của phần đất giới hạn bởi tam giác trên.

b) Họ muốn xây dựng một khách sạn bên trong khu dân cư cách đều cả ba con đường đó. Hỏi khi đó khách sạn sẽ cách mỗi con đường một khoảng là bao nhiêu?

Ví dụ 4. Trong một khu vui chơi có dạng hình tam giác đều với cạnh bằng 60 m , người ta muốn tìm một vị trí đặt bộ phát sóng wifi sao cho ở chỗ nào trong khu vui chơi đó đều có thể bắt được sóng. Biết rằng bộ phát sóng đó có tầm phát sóng tối đa là 50 m . Hỏi rằng có thể tìm được vị trí để đặt bộ phát sóng như vậy hay không?

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

9.7. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC . Tính bán kính của (O) , biết rằng ABC là tam giác vuông cân tại A và có độ dài cạnh bên bằng $2\sqrt{2}$ cm .

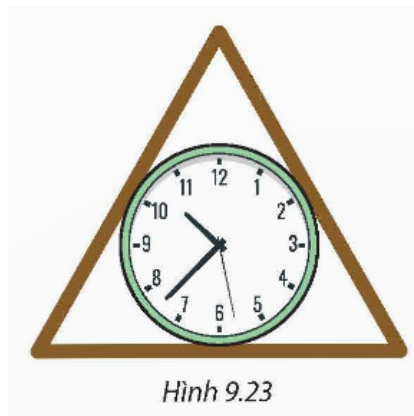
9.8. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) . Biết rằng đường tròn (O) có bán kính bằng 3 cm . Tính diện tích tam giác ABC .

9.9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

9.10. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC với các tiếp điểm trên các cạnh AB, AC lần lượt là E, F . Chứng minh rằng $\widehat{EIF} + \widehat{BAC} = 180^\circ$.

9.11. Cho tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC biết rằng bán kính của (I) bằng 1cm .

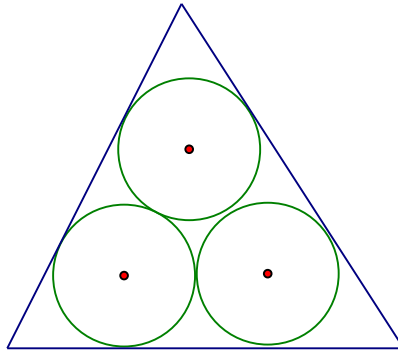
9.12. Người ta muốn làm một khung gỗ hình tam giác đều để đặt vừa khít một chiếc đồng hồ hình tròn có đường kính 30cm (H.9.23). Hỏi độ dài các cạnh (phía bên trong) của khung gỗ phải bằng bao nhiêu?



D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

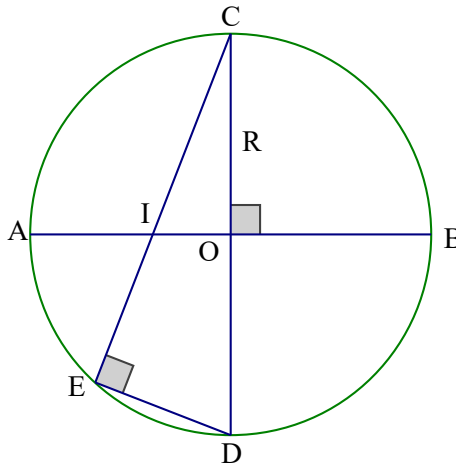
Bài 1. Một đường tròn có bán kính 3 cm. Tính diện tích hình vuông nội tiếp đường tròn đó.

Bài 2. Ba đường tròn tiếp xúc với nhau từng đôi một và tiếp xúc với các cạnh của tam giác như hình bên. Nếu mỗi đường tròn có bán kính là 3, thì chu vi của tam giác sẽ bằng bao nhiêu?



Bài 3. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có $AB = 9\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp, G là trọng tâm của tam giác. Tính độ dài IG

Bài 4. Cho đường tròn $(O; R)$ và hai đường kính vuông góc AB, CD . Trên bán kính AO lấy đoạn $AI = \frac{2AO}{3}$, vẽ tia CI cắt (O) tại E . Tính R theo CE



Bài 5. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ngoại tiếp đường tròn (O) . Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của (O) với các cạnh AB, AC và BC . Đường thẳng BO cắt đường thẳng EF tại I . Tính $\widehat{BIF}$

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$. Xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Bài 7. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông tại A , biết $AB = 5\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$.

Bài 8. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) . Biết rằng đường tròn (O) có bán kính bằng 3cm . Tính diện tích tam giác ABC .

Bài 9. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 3cm và nội tiếp đường tròn (O) như hình vẽ.

a) Tính bán kính R của đường tròn (O) .

b) Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây cung BC và cung nhỏ BC .

Bài 10. Xác định tâm và bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC có độ dài cạnh bằng a .

Bài 11. Cho tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC biết rằng bán kính của (I) bằng 1cm .

Bài 12. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

Bài 13. Cho tam giác ABC có diện tích S và ngoại tiếp đường tròn (I; r). Chứng minh rằng

$$S = \frac{1}{2}r(BC + CA + AB).$$

LUYỆN TẬP CHUNG

A. VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Biết rằng $\widehat{OAB} = 30^\circ$, $\widehat{OAC} = 40^\circ$. Hãy tính số đo của các góc ABC và ACB .

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có diện tích S và ngoại tiếp đường tròn $(I; r)$. Chứng minh rằng

$$S = \frac{1}{2}r(BC + CA + AB).$$

BÀI TẬP

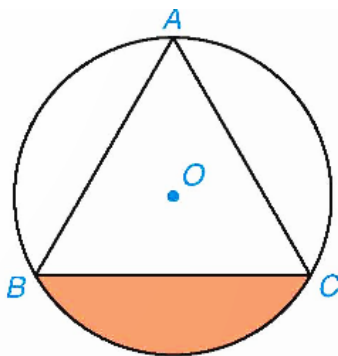
9.13. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Biết rằng $\widehat{BOC} = 120^\circ$ và $\widehat{OCA} = 20^\circ$. Tính số đo các góc của tam giác ABC .

9.14. Cho tam giác đều ABC có độ dài cạnh bằng 4cm . Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

9.15. Cho tam giác đều ABC có độ dài cạnh bằng 3cm và nội tiếp đường tròn (O) như Hình 9.26.

a) Tính bán kính R của đường tròn (O) .

b) Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây cung BC và cung nhỏ BC .



Hình 9.26

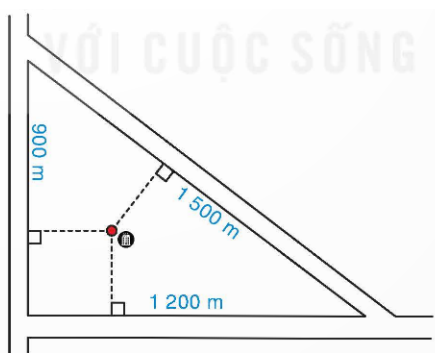
9.16. Trong một khu vui chơi có dạng hình tam giác đều với độ dài cạnh bằng 60m , người ta muốn tìm một vị trí đặt bộ phát sóng wifi sao cho ở chỗ nào trong khu vui chơi đó đều có thể bắt được sóng. Biết rằng bộ phát sóng đó có tầm phát sóng tối đa là 50m , hỏi có thể tìm được vị trí để đặt bộ phát sóng như vậy hay không?

9.17. Người ta vẽ bản quy hoạch của một khu dân cư được bao xung quanh bởi ba con đường thẳng lập thành một tam giác với độ dài các cạnh là 900m , 1200m và 1500m (H.9.27).

a) Tính chu vi và diện tích của phần đất giới hạn bởi tam giác trên.

b) Họ muốn xây dựng một khách sạn bên trong khu dân cư cách đều cả ba con đường đó. Hỏi khi đó khách sạn

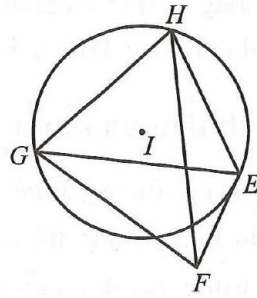
sẽ cách mỗi con đường một khoảng là bao nhiêu?



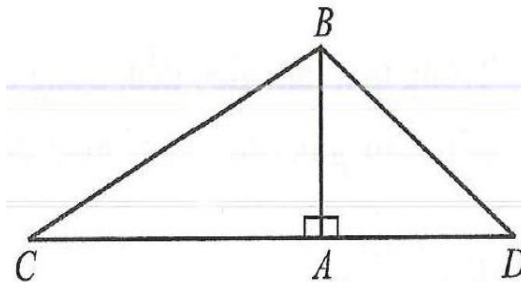
Hình 9.27

B. BÀI TẬP THÊM

Bài 1: Quan sát Hình 3 và cho biết một tam giác nội tiếp đường tròn (I) và ba tam giác không nội tiếp đường tròn (I).



Bài 2: Cho hai tam giác ABC và ABD (Hình 4) có $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$, $AB = 3\text{ cm}$, $AD = 4\text{ cm}$, $AC = 6\text{ cm}$.



- Xác định các điểm O, I lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và ABD .
- Tính bán kính của các đường tròn (O) và (I).

Bài 3: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn bán kính 5 dm . Tính độ dài cạnh của tam giác đều ABC đó.

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A có bán kính đường tròn nội tiếp là r . Chứng minh rằng:

$$r = \frac{AB + AC - BC}{2}.$$

Bài 5: Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn ($I; r$). Các cạnh AB, AC lần lượt tiếp xúc với (I) tại D và E . Chứng minh rằng nếu $AB < AC$ thì $BE < CD$.

Bài 6. Cho tam giác ABC cân tại A , có O, I lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

- Chứng minh rằng:
 - Ba điểm A, O, I cùng thuộc một đường thẳng;
 - Đường thẳng OI vuông góc với BC và đi qua điểm chính giữa D (khác điểm A) của cung BC .
- Cho $BC = 24\text{ cm}$, $AC = 20\text{ cm}$. Tính độ dài bán kính R của đường tròn ngoại tiếp và bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

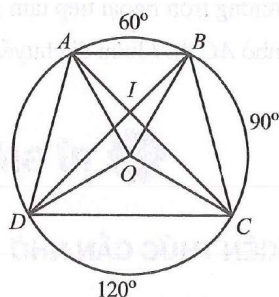
Bài 7. Cho tam giác nhọn ABC . Các đường cao BE, CD của tam giác ABC cắt nhau tại K . Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp mỗi tam giác sau:

- Tam giác BDE ;
- Tam giác DEC ;
- Tam giác ADE .

Bài 8. Cho tam giác nhọn ABC ($\hat{B} > \hat{C}$), phân giác AM . Gọi O, O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, AMB, AMC . Chứng minh rằng:

- a) OO_1, OO_2, O_1O_2 lần lượt là các đường trung trực của AB, AC, AM ;
b) Tam giác OO_1O_2 cân.

Bài 9. Trên đường tròn (O) bán kính R , lấy các điểm A, B, C, D sao cho số đo $\widehat{AB} = 60^\circ$, số đo $\widehat{BC} = 90^\circ$, số đo $\widehat{CD} = 120^\circ$ (Hình 7).



- a) Xác định tâm và tính theo R bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác OAB, OBC, OAD, ODC
b) Gọi I là giao điểm của AC và BD . Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác IAB, IBC, IAD, IDC .

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6, AC = 8$, bán kính đường tròn nội tiếp là r , bán kính đường tròn ngoại tiếp là R . Tính $\frac{r}{R}$.

Bài 11. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính R .

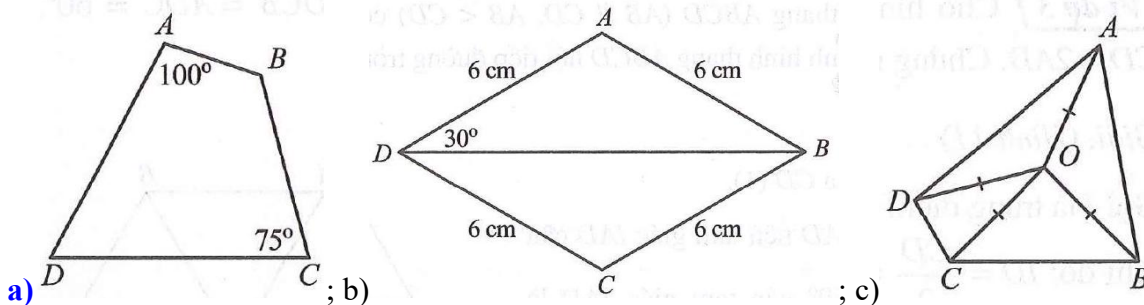
- a) Chứng minh rằng O cũng là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .
b) Vẽ tam giác IJK ngoại tiếp đường tròn $(O; R)$ với $JK \parallel BC, IJ \parallel AC, IK \parallel AB$. Chứng minh tam giác IJK đều.
c) Gọi R' là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác IJK và r là bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tính $\frac{r}{R'}$.

Bài 12. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B . Đường thẳng AO cắt (O) và (O') lần lượt tại hai điểm C, E (khác điểm A). Đường thẳng AO' cắt (O) và (O') lần lượt tại hai điểm D, F (khác điểm A). Chứng minh:

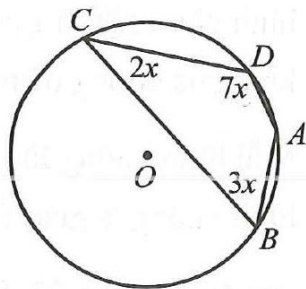
- a) C, B, F thẳng hàng;
b) Bốn điểm C, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn;
c) A là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BDE .

Bài 13. Cho tam giác ABC vuông cân tại C và nội tiếp đường tròn $(O; R)$. E là điểm tùy ý trên cung nhỏ AC của đường tròn đó. Gọi F là giao điểm của EB và CO, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ECF . Chứng minh rằng khi E di chuyển trên cung nhỏ AC thì I luôn di chuyển trên một đoạn thẳng cố định.

Bài 14: Trong các hình 9a, 9b, 9c, ở hình nào ta có tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp?



Bài 15: Tính số đo góc DAB trong Hình 10.



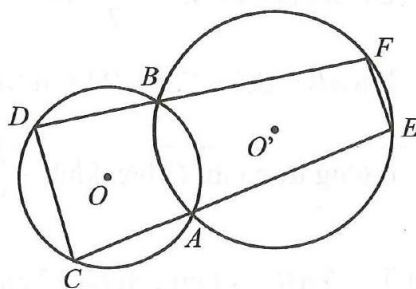
Bài 16: Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB < CD$) có $\widehat{DCB} = \widehat{ADC} = 60^\circ$, $CD = 2AD$. Chứng minh hình thang $ABCD$ nội tiếp đường tròn.

Bài 17: Cho hình thoi $ABCD$, có $AB = 13$ cm, $AO = 12$ cm (O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD). M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA .

a) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ nội tiếp đường tròn.

b) Tính tỉ số diện tích hình thoi $ABCD$ và diện tích hình tròn ngoại tiếp tứ giác $MNPQ$ (lấy $\pi \approx 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Bài 19. Cho hai đường tròn $(O), (O')$ giao nhau tại A, B và CD là một dây cung của (O) . Tia CA cắt (O') tại E và tia DB cắt (O') tại F . Chứng minh EF song song với CD .



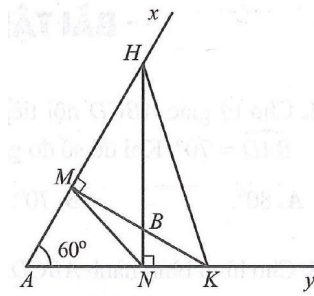
Bài 20. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác đều ABC . Điểm E nằm trên cung nhỏ BC (E khác B và C). ED là tia đối của tia EB . Chứng minh EC là phân giác của góc AED và EA là phân giác của góc BEC .

Bài 21. Cho tam giác ABC cân ở A , H là trung điểm của BC và $\widehat{BAC} < 90^\circ$. Đường vuông góc với AB tại A cắt đường thẳng BC ở D . Kẻ DE vuông góc với AC . Chứng minh:

a) $AH = EH$;

b) $\widehat{DCE} = \widehat{ABD}$.

Bài 22. Cho $\widehat{xAy} = 60^\circ$ và điểm B nằm trong góc xAy . Kẻ đường thẳng BN vuông góc với Ay cắt Ax tại H ; kẻ đường thẳng BM vuông góc với Ax cắt Ay tại K . Chứng minh:



- a) Các tứ giác $AMBN, HMNK$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn;
b) $HK = 2MN$.

Bài 23. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm M . Đường thẳng qua C vuông góc với CM cắt các tia AB, AD lần lượt tại E và F . Tia CM cắt đường thẳng AD tại N . Chứng minh rằng:

- a) $\widehat{NCA} = \widehat{MFN}$ và $\widehat{NEA} = \widehat{NCA}$;
b) $CM + CN = EF$.

Bài 24. Chứng minh rằng mỗi hình thang cân là một tứ giác nội tiếp đường tròn.

Bài 25. Cho tam giác ABC vuông cân tại C và nội tiếp đường tròn $(O; R)$. E là điểm tùy ý trên cung nhỏ AC . Gọi I là giao điểm của EB và AC . Kẻ IK vuông góc với AB . Chứng minh rằng khi E di chuyển trên cung nhỏ AC thì EK luôn đi qua một điểm cố định.

BÀI 29. TỨ GIÁC NỘI TIẾP.

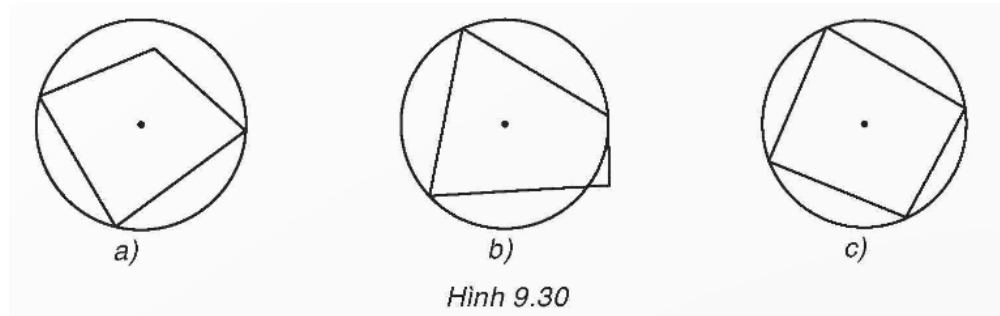
A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Đường tròn ngoại tiếp một tứ giác

Đường tròn đi qua bốn đỉnh của một tứ giác

Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (hoặc đơn giản là tứ giác nội tiếp) và đường tròn được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

Ví dụ 1. Trong các hình sau (H.9.30), hình nào vẽ một tứ giác nội tiếp một đường tròn?



Hình 9.30

Lời giải

Hình a và b không vẽ tứ giác nội tiếp đường tròn vì mỗi tứ giác có ba đỉnh nằm trên đường tròn và đỉnh còn lại không nằm trên đường tròn.

Hình c vẽ tứ giác nội tiếp đường tròn vì tứ giác có bốn đỉnh nằm trên đường tròn.

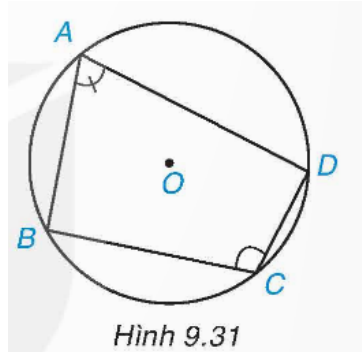
Tổng quát, chúng ta có định lý sau đây về tổng số đo các góc đối nhau của một tứ giác nội tiếp.

Định lý

Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối nhau bằng 180° .

GT	Tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) .
KL	$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ; \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$.

Chứng minh



Hình 9.31

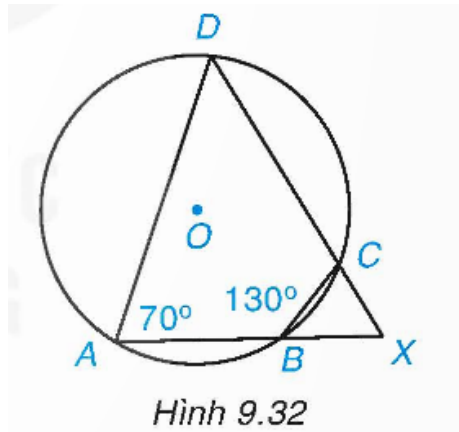
Do hai điểm B, D chia đường tròn (O) thành hai cung $\widehat{BCD}$ và $\widehat{BAD}$ nên $s\widehat{BCD} + s\widehat{BAD} = 360^\circ$.

Do $\hat{A}$ và $\hat{C}$ là các góc nội tiếp của đường tròn (O) lần lượt chắn cung $\widehat{BCD}$ và $\widehat{BAD}$ nên

$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{1}{2}s\widehat{BCD} + \frac{1}{2}s\widehat{BAD} = 180^\circ. \text{ Tương tự, } \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ.$$

Ví dụ 2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) như Hình 9.32. Hai đường thẳng AB và DC cắt nhau tại X . Biết rằng $\widehat{DAB} = 70^\circ, \widehat{ABC} = 130^\circ$. Tính số đo của các góc BCD và BXC .

Lời giải



Hình 9.32

Vì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn (O) nên các góc đối diện có tổng số đo bằng 180° .

Do đó $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180^\circ$, hay $\widehat{BCD} = 180^\circ - \widehat{DAB} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

Tương tự, ta có: $\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = 180^\circ$, hay $\widehat{CDA} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.

Vì tổng các góc trong tam giác AXD bằng 180° nên:

$$\widehat{BXC} = \widehat{AXD} = 180^\circ - \widehat{DAB} - \widehat{CDA} = 180^\circ - 70^\circ - 50^\circ = 60^\circ.$$

2. Đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật và hình vuông

Đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật và hình vuông

Ta có khẳng định sau:

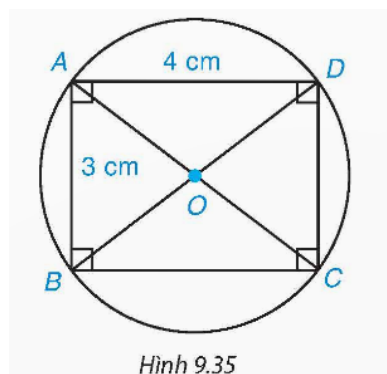
Hình chữ nhật và hình vuông là các tứ giác nội tiếp. Đường tròn ngoại tiếp của chúng có tâm là giao điểm của hai đường chéo và bán kính bằng một nửa độ dài đường chéo.

Ví dụ 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3\text{ cm}$, $AD = 4\text{ cm}$. Vẽ đường tròn $(O; R)$ ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ và tính bán kính R .

Lời giải

Gọi O là giao điểm của AC và BD . Vẽ đường tròn tâm O bán kính $R = OA$. Đường tròn $(O; R)$ vừa vẽ

tiếp hình chữ nhật $ABCD$ (H.9.35).



Hình 9.35

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác ABD vuông tại A , ta có:

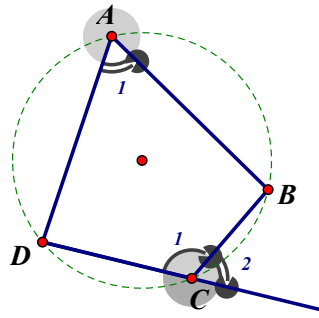
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \text{ nên } BD = 5(\text{cm}). \text{ Do đó, ta có } R = \frac{BD}{2} = 2,5 \text{ cm}.$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. TÍNH GÓC CỦA TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

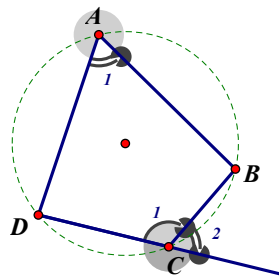
1. Phương pháp

- Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn thì có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° .



$ABCD$ nội tiếp được đường tròn nên $\widehat{A_1} + \widehat{C_1} = 180^\circ$ và $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$

□ Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn thì có góc bằng góc kề của góc đối của nó.



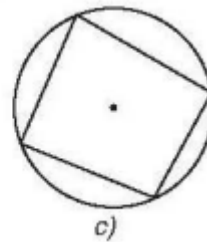
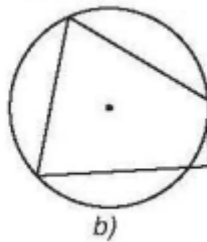
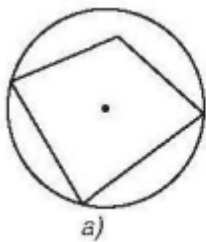
$ABCD$ nội tiếp được đường tròn nên $\widehat{A_1} + \widehat{C_1} = 180^\circ$ mà $\widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 180^\circ$ (hai góc kề bù) $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C_2}$

Chú ý: Cần nắm lại kiến thức góc nội tiếp và góc ở tâm

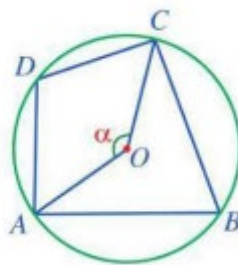
- Góc nội tiếp có số đo bằng nửa số đo cung bị chắn.
- Góc ở tâm có số đo bằng cung bị chắn.
- Góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung thì góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Trong các tứ giác sau, tứ giác nào nội tiếp được đường tròn? Giải thích.



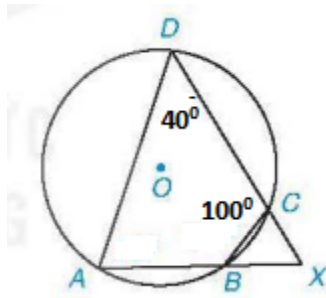
Ví dụ 2. Trong hình vẽ dưới đây, cho $\alpha = 140^\circ$.



a) Tính các góc $\widehat{ABC}$, $\widehat{ADC}$ của tứ giác $ABCD$.

b) Tính $\widehat{BAD} + \widehat{BCD}$.

Ví dụ 3. Trong hình vẽ dưới đây, cho $\widehat{ADC} = 40^\circ$, $\widehat{BCD} = 100^\circ$.



a) Tính các góc $\widehat{ABC}, \widehat{BAD}$ của tứ giác $ABCD$.

b) Tính $\widehat{BXC}$.

Ví dụ 4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn. Tính số đo các góc còn lại của tứ giác đó trong các trường hợp sau:

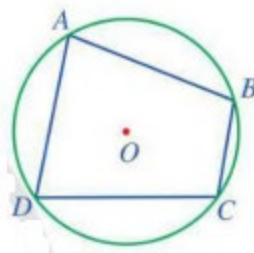
a) $\hat{A} = 45^\circ$ và $\hat{B} = 155^\circ$.

b) $\hat{B} = 60^\circ$ và $\hat{C} = 85^\circ$.

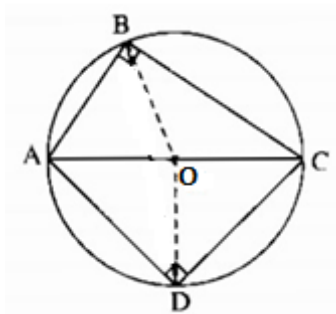
DẠNG 2. CHỨNG MINH TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

1. Phương pháp chung

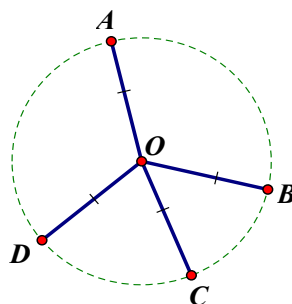
• **Phương pháp 1:** Để tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn thì ta chứng minh $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ hoặc $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$.



Chú ý: Tứ giác có hai góc đối diện đều bằng 90° thì tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó là trung điểm của cạnh đối diện hai góc vuông đó.



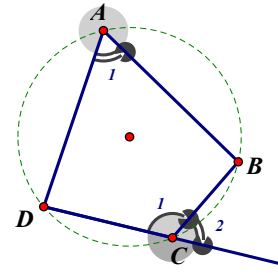
• **Phương pháp 2:** Để tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn thì ta chứng minh $OA = OB = OC = OD$.



2. Ta cần thuộc các bổ đề sau để vận dụng chứng minh tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

Bổ đề 1: Tứ giác có góc bằng góc kề của góc đối của nó thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

Giả thiết	$ABCD$ là tứ giác $\widehat{A_1} = \widehat{C_2}$
Kết luận	Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn.



Chứng minh:

Ta có: $\widehat{A_1} = \widehat{C_2}$ (giả thiết)

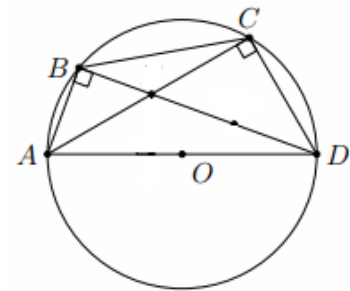
$$\widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 180^\circ \text{ (hai góc kề bù)}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{A_1} + \widehat{C_1} = 180^\circ$$

Tứ giác $ABCD$ có tổng số đo hai góc đối $\widehat{A_1}$ và $\widehat{C_1}$ bằng 180° , do đó tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn.

Bổ đề 2: Tứ giác có hai đỉnh kề nhau và cùng bằng 90° , đồng thời cùng nhìn dưới một cạnh thì tứ giác nội tiếp được đường tròn.

Giả thiết	$ABCD$ là tứ giác có là hai góc kề $\widehat{ABD}, \widehat{ACD}$ cùng nhìn dưới cạnh AD . $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^\circ$ $OA = OD$
Kết luận	Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn có tâm là trung điểm AD .



Chứng minh:

Xét tam giác ABD có $\widehat{ABD} = 90^\circ$ và BO là đường trung tuyến nên $OB = OA = OD = \frac{1}{2}AD$ (1)

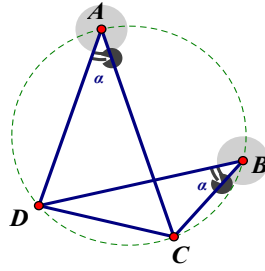
Xét tam giác ACD có $\widehat{ACD} = 90^\circ$ và CO là đường trung tuyến nên $OC = OA = OD = \frac{1}{2}AD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OA = OB = OC = OD$

Vậy tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn có tâm là trung điểm AD .

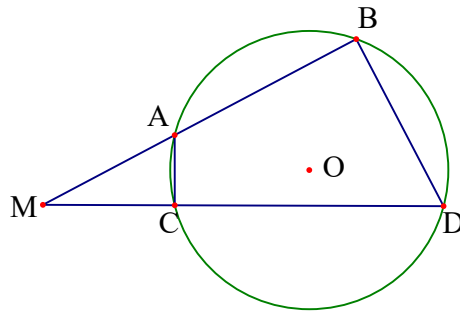
Chú ý:

Mở rộng bổ đề 2: Tứ giác có hai đỉnh kề nhau và bằng nhau đồng thời cùng nhìn dưới một cạnh thì tứ giác nội tiếp được.

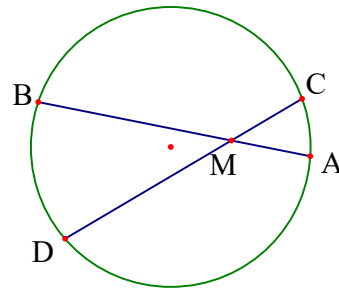


Nếu $\widehat{CAD} = \widehat{CBD} = \alpha$ thì $ABCD$ nội tiếp

Bổ đề 3: Cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 cắt nhau tại điểm M. Trên hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt lấy các điểm A, B và C, D khi đó 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi $MA.MB = MC.MD$.



Hình 1



Hình 2

Nếu $MA.MB = MC.MD$ thì $ABCD$ nội tiếp

Ta chứng minh tính chất trên như sau:

• Trường hợp 1 (Hình 1)

$$\text{Ta có: } MA.MB = MC.MD \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB}$$

Xét $\triangle MAC$ và $\triangle MDB$ có:

$\widehat{MAC}$ chung

$$\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\Rightarrow \triangle MAC \sim \triangle MDB (c - g - c) \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MDB} \Rightarrow ABCD \text{ nội tiếp.}$$

• Trường hợp 2 (Hình 2)

$$\text{Ta có: } MA.MB = MC.MD \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB}$$

Xét $\triangle MAC$ và $\triangle MDB$ có:

$\widehat{AMC} = \widehat{DMB}$ (đối đỉnh)

$$\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\Rightarrow \triangle MAC \sim \triangle MDB (c - g - c) \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MDB}$$

Vậy tứ giác $ABCD$ có hai đỉnh A và D kề nhau, cùng nhìn cạnh BC dưới hai góc bằng nhau nên tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn.

Nhận xét: Trong bài tập chứng minh tứ giác nội tiếp chủ yếu sử dụng Bổ đề 1 và Bổ đề 2, còn Bổ đề 2 mở rộng và Bổ đề 3 hầu như không dùng đến. Nó chỉ dùng cho học sinh chuyên toán, vì thế các em không quan tâm đến Bổ đề 2 mở rộng và Bổ đề 3 nhé .

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ các đường cao BD và CE của tam giác ABC . Gọi H là giao điểm của BD và CE .

- a) Chứng minh $ADHE$ là tứ giác nội tiếp.
- b) Chứng minh $BCDE$ là tứ giác nội tiếp.

Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC ($AB > AC$). Đường tròn (I) đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại F, E . Đường thẳng BE cắt CF tại H và đường thẳng AH cắt BC tại D .

- a) Chứng minh tứ giác $BFHD$ nội tiếp.
- b) Chứng minh tứ giác $ABDE$ nội tiếp.

Ví dụ 3. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có tam giác ABC là tam giác nhọn. Vẽ các đường cao AM và CN của tam giác ABC . Gọi H là giao điểm của AM và CN .

- a) Chứng minh $\widehat{ABC} = \widehat{CHM}$.
- b) Chứng minh $\widehat{ADC} = \widehat{AHC}$.
- c) Chứng minh $\widehat{MAC} = \widehat{MNC}$.
- d) Chứng minh $\widehat{MAC} + 90^\circ = \widehat{ANM}$.

DẠNG 3. ĐƯỜNG TRÒN LIÊN QUAN ĐẾN TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN, CHỨNG MINH HỆ THỨC, TRUNG ĐIỂM, TỈ LỆ CẠNH

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao AE , BF và CN cắt nhau tại H ($E \in BC$, $F \in AC$, $N \in AB$).

- a) Chứng minh tứ giác $CEHF$ nội tiếp.
- b) Kéo dài FE cắt đường tròn đường kính BC tại M . Chứng minh $BM = BN$.
- c) Biết $AH = BC$. Tính số đo góc A của tam giác ABC .

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm). Một đường thẳng đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q sao cho P nằm giữa A và Q , dây cung PQ không đi qua tâm O . Gọi I là trung điểm của đoạn PQ , J là giao điểm của hai đường thẳng AQ và MN . Chứng minh rằng :

- a) Năm điểm A, M, O, I, N cùng nằm trên một đường tròn và $\angle JIM = \angle JIN$
- b) Tam giác AMP đồng dạng với tam giác AQM . Và $AP.AQ = AI.AJ$

Ví dụ 3. Cho đường tròn tâm O , đường kính AB , dây CD vuông góc với AB tại F . Gọi M là một điểm thuộc cung nhỏ BC (M khác B , M khác C), hai đường thẳng AM và CD cắt nhau tại E

- a) Chứng minh tứ giác $BMEF$ nội tiếp
- b) Chứng minh tia MA là phân giác của góc CMD
- c) Chứng minh $AC^2 = AE.AM$
- d) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng MD và AB , N là giao điểm của hai đường thẳng AM và BC . Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEN nằm trên đường thẳng CI

Ví dụ 4. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc ngoài tại A ($R > r$). Gọi BC là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn này (với $B \in (O)$ và $C \in (O')$). Tiếp tuyến chung tại A của hai đường tròn (O) và (O') cắt đoạn thẳng BC tại M .

- Chứng minh OM vuông góc với $O'M$.
- Gọi E là giao điểm của AB với OM và F là giao điểm của AC với $O'M$. Chứng minh tứ giác $OEFO'$ nội tiếp một đường tròn.
- Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OEFO'$, K là trung điểm của AM . Chứng minh $OO' = 2IK$.

Ví dụ 5. Cho nửa đường tròn đường kính AD . Lấy điểm B thuộc nửa đường tròn (B khác A và D), trên cung BD lấy điểm C (C khác B và D). Hai dây AC, BD cắt nhau tại điểm E . Kẻ đoạn thẳng EF vuông góc với AD ($F \in AD$)

- Chứng minh tứ giác $ABEF$ nội tiếp
- Chứng minh $AE.AC = AF.AD$
- Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BFC

DẠNG 4. ĐƯỜNG TRÒN LIÊN QUAN ĐẾN BA ĐIỂM THẲNG HÀNG, BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn tâm O . Kẻ đường kính AD . Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại D cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại E và F

- Chứng minh hai tam giác ABC và AFE đồng dạng với nhau
- Gọi I là trung điểm của EF và K là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC . Chứng minh ba điểm A, K, I thẳng hàng

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O) . Gọi BE, CF là các đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC .

- Chứng minh tứ giác $AEHF$ là tứ giác nội tiếp.
- Đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$ cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai I (A không trùng với I). Chứng minh hai tam giác IBC và IFE đồng dạng với nhau.
- Hai đường thẳng BC và EF cắt nhau tại K . Chứng minh ba điểm A, I, K thẳng hàng.

DẠNG 5. ĐƯỜNG TRÒN LIÊN QUAN ĐẾN TIẾP TUYẾN, VUÔNG GÓC, SONG SONG

Ví dụ 1. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Dây cung MN vuông góc với AB , ($AM < BM$). Hai đường thẳng BM và NA cắt nhau tại K . Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ K đến đường thẳng AB .

- Chứng minh tứ giác $AHKM$ nội tiếp trong một đường tròn.
- Chứng minh rằng $NB.HK = AN.HB$.
- Chứng minh HM là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H ($E \in AC, F \in AB$). Chứng minh rằng :

- Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn
- $AE.BC = EF.AB$
- $OA \perp EF$

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) , ($AB < AC$). Gọi D là điểm trên cung nhỏ BC sao cho $DB < DC$. Từ D kẻ DE vuông góc với BC (E thuộc BC), kẻ DF vuông góc với AC (F thuộc AC). Đường thẳng EF cắt tia AB tại K .

- Chứng minh tứ giác $CDEF$ và $\widehat{DFE} = \widehat{DAB}$.
- Chứng minh tứ giác $DKBE$ nội tiếp và $DB \cdot DF = DA \cdot DE$.
- Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và EF . Chứng minh IJ vuông góc với DJ .

Ví dụ 4. Cho đường tròn (O) , đường kính AB , bán kính OC vuông góc với AB . Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC . Đường thẳng AH cắt OC tại D và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K (K khác A)

- Chứng minh tứ giác $ODKB$ nội tiếp một đường tròn
- Tia phân giác của góc COK cắt AK tại M . Chứng minh $\angle CMA = 90^\circ$
- Đường thẳng OM cắt BC tại N , NK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là P (P khác K). Chứng minh B đối xứng với P qua M

DẠNG 6. ĐƯỜNG TRÒN LIÊN QUAN ĐẾN GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Ví dụ 1. Trên nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$, lấy điểm C (C khác A và B), từ C kẻ CH vuông góc với AB ($H \in AB$). Gọi D là điểm bất kỳ trên đoạn CH (D khác C và H), đường thẳng AD cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai là E

- Chứng minh tứ giác $BHDE$ nội tiếp
- Chứng minh $AD \cdot EC = CD \cdot AC$
- Khi điểm C di động trên nửa đường tròn (C khác A, B và điểm chính giữa cung AB), xác định vị trí của điểm C sao cho chu vi tam giác COH đạt giá trị lớn nhất

Ví dụ 2. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB , M là một điểm bất kỳ thuộc nửa đường tròn (M khác A, B). Tiếp tuyến tại M cắt các tiếp tuyến Ax, By của đường tròn (O) lần lượt tại C và D

- Chứng minh tứ giác $ACMO$ nội tiếp
- Chứng minh CO vuông góc với OD
- Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác ACM, BDM

C. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

9.18. Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp. Tính số đo của các góc còn lại của tứ giác trong mỗi trường hợp sau:

- $\hat{A} = 60^\circ, \hat{B} = 80^\circ$;
- $\hat{B} = 70^\circ, \hat{C} = 90^\circ$;
- $\hat{C} = 100^\circ, \hat{D} = 60^\circ$;
- $\hat{D} = 110^\circ, \hat{A} = 80^\circ$.

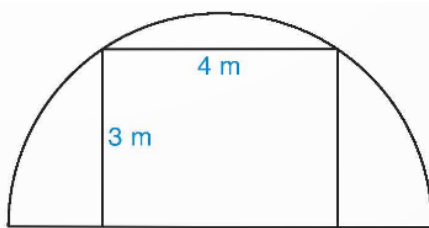
9.19. Cho điểm I nằm ngoài đường tròn (O) . Qua I kẻ hai đường thẳng lần lượt cắt (O) tại bốn điểm A, B và C, D sao cho A nằm giữa B và I, C nằm giữa D và I . Chứng minh rằng $\widehat{IBD} = \widehat{ICA}, \widehat{IAC} = \widehat{IDB}$ và $IA \cdot IB = IC \cdot ID$.

9.20. Cho hình bình hành $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Chứng minh rằng $ABCD$ là hình chữ nhật.

9.21. Cho hình thang $ABCD$ (AB song song với CD) nội tiếp đường tròn (O) . Chứng minh rằng $ABCD$ là hình thang cân.

9.22. Tính diện tích của một hình chữ nhật, biết rằng hình chữ nhật đó có chiều dài gấp hai lần chiều rộng và bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $2,5\text{ cm}$.

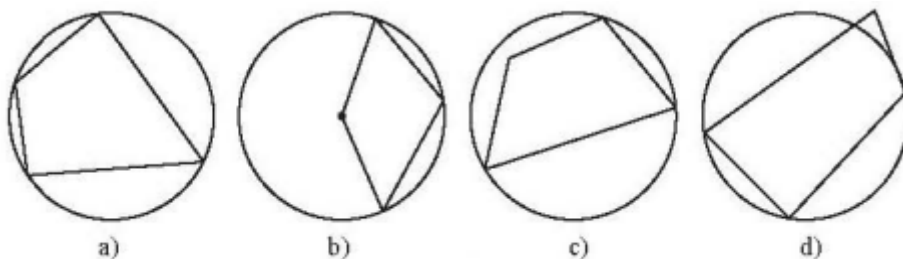
9.23. Người ta muốn dựng một khung cổng hình chữ nhật rộng $4m$ và cao $3m$, bên ngoài khung cổng được bao bởi một khung thép dạng nửa đường tròn như Hình 9.37. Tính chiều dài của đoạn thép làm khung nửa đường tròn đó.



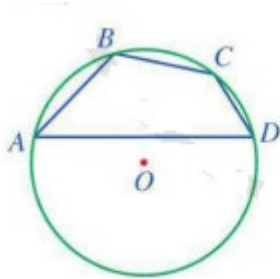
Hình 9.37

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

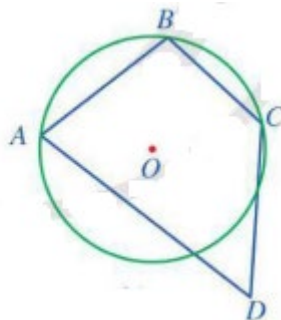
Bài 1. Trong các tứ giác sau, tứ giác nào nội tiếp được đường tròn? Giải thích.



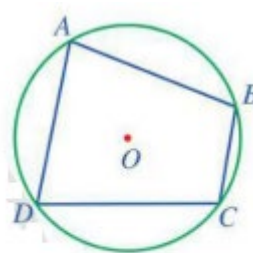
Bài 2. Trong các đường tròn (O) sau, đường tròn nào ngoại tiếp tứ giác $ABCD$? Giải thích.



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Bài 3. Trên nửa đường tròn (O) đường kính AB lấy điểm C sao cho $AC > BC$ (C khác A và B). Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng OA . Đường thẳng qua D và vuông góc với AB cắt AC tại E . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $BCED$ nội tiếp được

b) $AC \cdot AE = \frac{AB^2}{4}$

Bài 4. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) có trục tâm là điểm H . Gọi M là điểm trên dây cung BC không chứa điểm A (M khác B, C). Gọi N, P theo thứ tự là các điểm đối xứng của M qua các đường thẳng AB, AC

a) Chứng minh $AHCP$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh N, H, P thẳng hàng.

Bài 5. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A ở bên ngoài đường tròn. Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi M là trung điểm AB .

a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp và xác định tâm I của đường tròn này.

b) Chứng minh rằng $AM \cdot AO = AB \cdot AI$.

c) Gọi G là trọng tâm tam giác ACM . Chứng minh $MG \parallel BC$.

d) Chứng minh IG vuông góc với CM .

Bài 6. Cho tam giác ABC và đường cao AH gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BHM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CNH tại E . Chứng minh $AMEN$ là tứ giác nội tiếp và HE đi qua trung điểm của MN .

Bài 7. Trên các cạnh BC, CD của hình vuông $ABCD$ ta lấy lần lượt các điểm M, N sao cho $\widehat{MAN} = 45^\circ$. Đường thẳng BD cắt các đường thẳng AM, AN tương ứng tại các điểm P, Q .

a) Chứng minh rằng các tứ giác $ABMQ$ và $ADNP$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng các điểm M, N, Q, P, C nằm trên cùng một đường tròn.

Bài 8. Cho điểm M thuộc cung nhỏ BC của đường tròn (O) . Một đường thẳng d ở ngoài (O) và vuông góc với OM ; CM, BM cắt d lần lượt tại D, E . Chứng minh rằng B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.

Bài 9. Cho đường tròn $(O; R)$ nội tiếp $\triangle ABC$, tiếp xúc với cạnh AB, AC lần lượt ở D và E

a) Gọi O' là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ADE$, tính OO' theo R .

b) Các đường phân giác trong của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt đường thẳng DE lần lượt tại M và N . Chứng minh tứ giác $BCMN$ nội tiếp được đường tròn.

c) Chứng minh $\frac{MN}{BC} = \frac{DM}{AC} = \frac{EN}{AB}$.

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A . Kẻ đường cao AH và phân giác trong AD của góc $\widehat{HAC}$. Phân giác trong góc $\widehat{ABC}$ cắt AH, AD lần lượt tại M, N . Chứng minh rằng: $\widehat{BND} = 90^\circ$.

Bài 11. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$) P là điểm trên cạnh đáy BC . Kẻ các đường thẳng PE, PD lần lượt song song với AB, AC ($E \in AC, D \in AB$) gọi Q là điểm đối xứng với P qua DE . Chứng minh bốn điểm Q, A, B, C cùng thuộc một đường tròn.

Bài 12. Cho tam giác ABC nhọn với $AB > AC$. Các đường cao BM, CN cắt nhau tại H .

a) Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp

b) Gọi D là giao điểm của AH và BC . Chứng minh AD là phân giác của $\angle MDN$

c) Đường thẳng qua D và song song với MN cắt AB, CN lần lượt tại I, J . Chứng minh D là trung điểm IJ

Bài 13. Cho đường tròn (O) . Từ một điểm M ở ngoài đường tròn (O) , kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là hai tiếp điểm).

a) Chứng minh $MAOB$ là tứ giác nội tiếp.

b) Vẽ đường kính BK của đường tròn (O) , H là điểm trên BK sao cho AH vuông góc BK . Điểm I là giao điểm của AH, MK . Chứng minh I là trung điểm của HA .

Bài 14. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Vẽ tia tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đường kính AB . Lấy một điểm M trên tia Ax ($M \neq A$). Vẽ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn (O) (C là tiếp điểm). Vẽ AC cắt OM tại E , Vẽ MB cắt nửa đường tròn (O) tại D ($D \neq B$).

a) Chứng minh: Tứ giác $AMDE$ nội tiếp trong một đường tròn.

b) Chứng minh: $MA^2 = MD \cdot MB$.

c) Vẽ CH vuông góc với AB ($H \in AB$). Chứng minh rằng MB đi qua trung điểm của đoạn thẳng CH .

Bài 15. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn tâm O . Dựng đường thẳng d qua A song song BC , đường thẳng d' qua C song song BA , gọi D là giao điểm của d và d' . Dựng AE vuông góc BD (E nằm trên BD), F là giao điểm của BD với đường tròn (O). Chứng minh:

a) Tứ giác $AECD$ nội tiếp được trong đường tròn.

b) $\widehat{AOF} = 2\widehat{CAE}$

c) Tứ giác $AECF$ là hình bình hành.

d) $DF \cdot DB = 2AB^2$.

Bài 16. Cho đường tròn ($O; R$) và dây MN cố định ($MN < 2R$). Kẻ đường kính AB vuông góc với dây MN tại E . Lấy điểm C thuộc dây MN (C khác M, N, E). Đường thẳng BC cắt đường tròn ($O; R$) tại điểm K (K khác B)

a) Chứng minh $AKCE$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $BM^2 = BK \cdot BC$

c) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AK, MN ; D là giao điểm của hai đường thẳng AC và BI .

Chứng minh điểm C cách đều ba cạnh của tam giác DEK

Bài 17. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC và E là hình chiếu vuông góc của điểm B lên đường thẳng AO

a) Chứng minh $AEHB$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh đường thẳng HE vuông góc với đường thẳng AC

c) Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Tính tỉ số $\frac{ME}{MH}$

Bài 18. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $AB < AC$. Vẽ các đường cao AD, BE, CF của tam giác đó. Gọi H là giao điểm của các đường cao vừa vẽ

a) Chứng minh rằng các tứ giác $AEHF$ và $BFEC$ nội tiếp

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH, BC . Chứng minh rằng $FM \cdot FC = FN \cdot FA$

c) Gọi P, Q lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M, N đến đường thẳng DF . Chứng minh rằng đường tròn đường kính PQ đi qua giao điểm của FE, MN

Bài 19. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O), điểm D thuộc cung nhỏ $\widehat{AB}$ (D khác A và B). Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C cắt AD theo thứ tự tại E và G . Gọi I là giao điểm của CE và BG

a) Chứng minh rằng $\triangle EBC \sim \triangle BCG$

b) Tính số đo góc BIC . Từ đó, hãy chứng minh tứ giác $BIDE$ nội tiếp

c) Gọi K là giao điểm của DI và BC . Chứng minh rằng $BK^2 = KI \cdot KD$

Bài 20. Cho tam giác ABC vuông tại C ($AC < BC$), đường cao CK và đường phân giác BD ($K \in AB, D \in AC$). Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt CK, AB lần lượt tại H và I .

a) Chứng minh tứ giác $CDKI$ nội tiếp.

b) Chứng minh $AC \cdot AD = DH \cdot AB$.

c) Gọi F là trung điểm của AD . Đường tròn tâm I bán kính ID cắt BC tại M (M khác B) và cắt AM tại N (N khác M). Chứng minh B, N, F thẳng hàng.

Bài 21. Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Các đường cao AK, BE và CF cắt nhau tại H . Gọi I là trung điểm của đoạn AH , N là trung điểm của đoạn BC .

- a) Chứng minh bốn điểm A, E, H, F nằm trên cùng một đường tròn.
- b) Chứng minh NE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH .
- c) Chứng minh $CI^2 - IE^2 = CK.CB$.

Bài 22. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm A lấy điểm M ($M \neq A$). Lấy điểm N trên đoạn thẳng OB (N khác O và B). Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại hai điểm C, D (C nằm giữa M và D). Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng CD

- a) Chứng minh tứ giác $AMIO$ là tứ giác nội tiếp
- b) Qua D kẻ đường thẳng song song với MO cắt AB tại H . Chứng minh $MA^2 = MC.MD$ và $\angle IAB = \angle MDH$
- c) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của đường thẳng MO với hai đường thẳng BC, BD . Chứng minh tứ giác $AEBF$ là hình bình hành

Bài 23. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O . Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại M , tia AM cắt đường tròn (O) tại điểm D .

- a) Chứng minh rằng tứ giác $OBMC$ nội tiếp được đường tròn.
- b) Chứng minh $MB^2 = MD.MA$
- c) Gọi E là trung điểm đoạn thẳng AD ; tia CE cắt đường tròn (O) tại điểm F . Chứng minh rằng: $BF \parallel AM$.

Bài 24. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O , đường cao BE và CF . Tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại S , BC và OS cắt nhau tại M .

- a) Chứng minh rằng $AB.MB = AE.BS$.
- b) Hai tam giác AEM và ABS đồng dạng.
- c) Gọi AM cắt EF tại N , AS cắt BC tại P . Chứng minh rằng $NP \perp BC$.

Bài 25. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$, có ba đường cao AK, BE và CF cắt nhau tại H .

- a) Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp.
- b) Hai đường thẳng BE và CF cắt đường tròn (O) lần lượt tại M và N (M khác B ; N khác C). Chứng minh: $MN \parallel EF$.
- c) Giả sử hai điểm B, C cố định, điểm A di động trên cung lớn BC của đường tròn (O) (A khác B, C). Tìm vị trí của điểm A sao cho chu vi tam giác KEF đạt giá trị lớn nhất.

Bài 26. Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn $(O; R)$ và $AB < AC$. Ba đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC (D, E, F là chân các đường cao) đồng quy tại điểm H . Kẻ đường kính AK của đường tròn $(O; R)$. Gọi M là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AK .

- a) Chứng minh rằng tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn.
- b) Chứng minh rằng tam giác ABD đồng dạng với tam giác AKC và MD song song với BK .
- c) Giả sử hai đỉnh B, C cố định trên đường tròn $(O; R)$ và đỉnh A di động trên cung lớn BC của đường tròn $(O; R)$. Chứng minh rằng đường thẳng MF luôn đi qua một điểm cố định và tìm vị trí của đỉnh A sao cho diện tích tam giác AEH lớn nhất.

Bài 27. Trên nửa đường tròn tâm O đường kính AB với $AB = 2022$, lấy điểm C (C khác A và B), từ C kẻ CH vuông góc AB ($H \in AB$). Gọi D là điểm bất kì trên đoạn CH (D khác C và H), đường thẳng AD cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai E .

- a) Chứng minh tứ giác BHDE là tứ giác nội tiếp.
- b) Chứng minh: $AD \cdot EC = CD \cdot AC$.
- c) Chứng minh: $AD \cdot AE + BH \cdot BA = 2022^2$.
- d) Khi điểm C di động trên nửa đường tròn (C khác A, B và điểm chính giữa cung AB), xác định vị trí điểm C sao cho chu vi tam giác COH đạt giá trị lớn nhất.

Bài 28. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O; R), kẻ tiếp tuyến MA (A là tiếp điểm) và cát tuyến MBC không đi qua tâm O (điểm B nằm giữa hai điểm M, C). Gọi H là trung điểm BC. Đường thẳng OH cắt đường tròn (O; R) tại hai điểm N, K (trong đó điểm K thuộc cung BAC). Gọi D là giao điểm của AN và BC

- a) Chứng minh tứ giác AKHD là tứ giác nội tiếp
- b) Chứng minh $\angle NAB = \angle NBD$ và $NB^2 = NA \cdot ND$
- c) Chứng minh rằng khi đường tròn (O; R) và điểm M cố định đồng thời cát tuyến MBC thay đổi thì điểm D nằm trên một đường tròn cố định

Bài 29. Cho đường tròn (O; R) và đường thẳng d không đi qua O cắt (O) tại hai điểm A; B. Trên tia đối của tia BA lấy điểm M; qua M kẻ hai tiếp tuyến MC; MD với đường tròn (O) (C; D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB.

- a) Chứng minh tứ giác OMCH nội tiếp.
- b) OM cắt đường tròn (O) tại I và cắt CD tại K. Chứng minh $OK \cdot OM = R^2$
- c) Đường thẳng qua O vuông góc với OM, cắt tia MC và MD lần lượt tại P và Q. Tính độ dài OM theo R sao cho diện tích tam giác MPQ nhỏ nhất.

Bài 30. Cho đường tròn (O, R) và đường thẳng d không đi qua O cắt đường tròn tại hai điểm A, B. Lấy một điểm M trên tia đối của tia BA kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn (C, D là tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB.

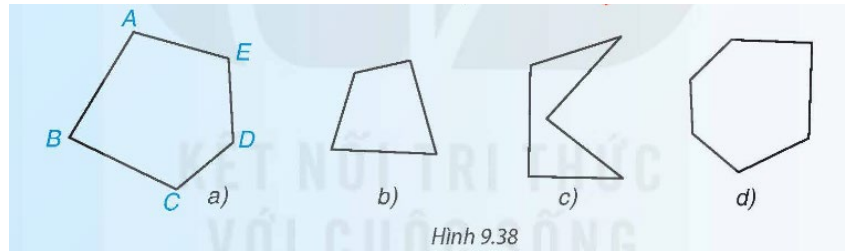
- a) Chứng minh rằng M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn
- b) Đoạn OM cắt đường tròn tại I. CMR I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD.
- c) Đường thẳng qua O, vuông góc với OM cắt các tia MC, MD theo thứ tự tại P, Q. Tìm vị trí của điểm M trên d sao cho diện tích tam giác MPQ bé nhất.

BÀI 30. ĐA GIÁC ĐỀU

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đa giác đều

- Những hình như Hình 9.38 được gọi chung là các *đa giác*.



- Đa giác $ABCDE$ (H.9.38a) là hình gồm năm đoạn thẳng AB, BC, CD, DE, EA , trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào có một điểm chung cũng không cùng nằm trên một đường thẳng. Đa giác $ABCDE$ có năm đỉnh là các điểm A, B, C, D, E ; năm cạnh là các đoạn thẳng AB, BC, CD, DE, EA và năm góc là các góc EAB, ABC, BCD, CDE, DEA .

- Nếu với một cạnh bất kì của đa giác, các đỉnh không thuộc cạnh đó đều nằm về một phía đối với đường thẳng chứa cạnh đó thì đa giác được gọi là đa giác lồi. Các đa giác trong Hình 9.38 a, b, d là các đa giác lồi. Đa giác trong Hình 9.38c không phải đa giác lồi.

Định nghĩa: Đa giác đều là một đa giác lồi có các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau.

Người ta chứng minh được rằng các đỉnh của mỗi đa giác đều luôn cùng nằm trên một đường tròn, được gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác, tâm đường tròn được gọi là tâm của đa giác và đa giác được gọi là nội tiếp đường tròn đó.

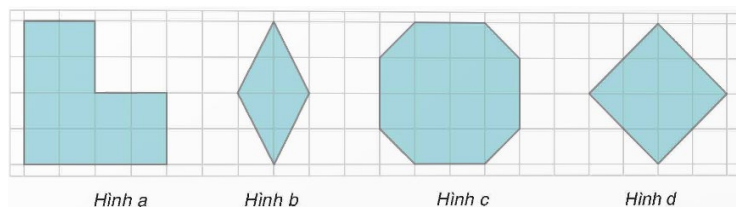
Ví dụ 1. a) Dưới đây là hình các đa giác đều thường gặp trong hình học (H.9.41).



b) Trong nghệ thuật, kiến trúc, công nghệ chế tạo và thế giới tự nhiên có nhiều hình phẳng có dạng đa giác đều. Những hình phẳng này không chỉ đẹp vì sự cân đối hài hoà mà còn tối ưu trong việc sắp xếp và sử dụng (H.9.42).



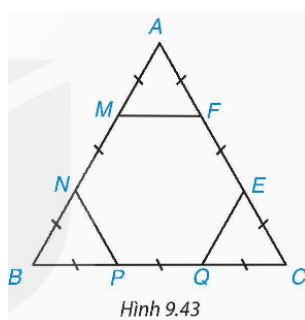
Ví dụ 2. Trong các hình phẳng dưới đây, hình phẳng nào có dạng là một đa giác đều?



Lời giải

Ta thấy đa giác trong hình a không phải đa giác lồi, đa giác trong hình b là hình thoi có các góc không bằng nhau, đa giác trong hình c là bát giác có các cạnh không bằng nhau, đa giác trong hình d là hình vuông. Do vậy chỉ có hình phẳng trong hình d có dạng đa giác đều.

Ví dụ 3. Cho tam giác đều ABC có cạnh 6 cm. Trên cạnh AB lấy các điểm M, N ; trên cạnh BC lấy các điểm P, Q ; trên cạnh CA lấy các điểm E, F , sao cho các đoạn thẳng $AM, MN, NB, BP, PQ, QC, CE, EF, FA$ đều bằng 2 cm như Hình 9.43. Hỏi $MNPQEF$ có là một lục giác đều hay không?



Lời giải

Theo Hình 9.43, ta thấy $MNPQEF$ là một đa giác lồi. Ta có $\frac{AM}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{3}$.

Theo định lý Thalès đảo cho tam giác ABC và đường thẳng MF thì $MF \parallel BC$.

Suy ra $\frac{MF}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$. Do đó $MF = \frac{BC}{3} = 2 \text{ cm}$. Tương tự, $NP = QE = 2 \text{ cm}$.

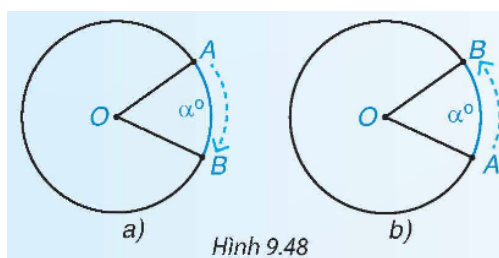
Vậy lục giác $MNPQEF$ có tất cả các cạnh bằng nhau.

Mặt khác, tam giác AMF là tam giác đều vì $AM = MF = FA = 2 \text{ cm}$ nên $\widehat{FMA} = 60^\circ$ và $\widehat{FMN} = 180^\circ - \widehat{FMA} = 120^\circ$.

Tương tự các góc tại các đỉnh N, P, Q, E, F của lục giác $MNPQEF$ đều bằng nhau và bằng 120° . Vậy lục giác $MNPQEF$ có các cạnh và các góc bằng nhau. Do đó $MNPQEF$ là lục giác đều.

2. Phép quay

Phép quay thuận chiều α° ($0^\circ < \alpha^\circ < 360^\circ$) tâm O giữ nguyên điểm O , biến điểm A khác điểm O thành điểm B thuộc đường tròn (O, OA) sao cho tia OA quay thuận chiều quay của kim đồng hồ đến tia OB thì điểm A tạo nên cung AB có số đo α° (H.9.48a). Định nghĩa tương tự cho phép quay ngược chiều α° tâm O (H.9.48b). Phép quay 0° và phép quay 360° giữ nguyên mọi điểm.



Ví dụ 4. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) như Hình 9.49. Hãy cho biết các phép quay ngược chiều lần lượt $120^\circ, 240^\circ, 360^\circ$ với tâm O sẽ biến các đỉnh A, B, C thành những điểm nào.

Lời giải

Các phép quay ngược chiều lần lượt $120^\circ, 240^\circ, 360^\circ$ với tâm O biến các điểm A, B, C thành những điểm tương ứng được cho bởi bảng sau:

Đỉnh \ Phép quay ngược chiều	A	B	C
120°	B	C	A
240°	C	A	B
360°	A	B	C

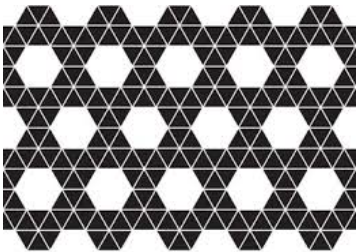
Khái niệm: Một phép quay được gọi là giữ nguyên một đa giác đều $\mathcal{H}$ nếu phép quay đó biến mỗi điểm của $\mathcal{H}$ thành một điểm của $\mathcal{H}$. Người ta chỉ ra rằng nếu một phép quay biến các đỉnh của đa giác đều $\mathcal{H}$ thành các đỉnh của $\mathcal{H}$ thì phép quay đó giữ nguyên $\mathcal{H}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Nhận dạng đa giác đều

Ví dụ 1. Tìm các đa giác lồi trong hình vẽ và giải thích.

Ví dụ 2. Trong các hình phẳng sau, hình nào là hình phẳng có dạng đa giác đều?



Lời giải

Hình phẳng có dạng đa giác đều là hình b và d.

Ví dụ 3. Tìm và gọi tên các đa giác đều có trong hình vẽ dưới đây.

Ví dụ 4. Kể tên các loại đa giác đều có trong hình.

Ví dụ 5. Cho đường tròn $(O; R)$. Lấy các điểm A, B, C, D, E, F trên đường tròn $(O; R)$ sao cho số đo các cung $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DE}, \widehat{EF}, \widehat{FA}$ bằng nhau. Đa giác $ABCDEF$ có là đa giác đều không?

Ví dụ 6. Cho ngũ giác $ABCDE$ có các cạnh bằng nhau và $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 108^\circ$. Ngũ giác $ABCDE$ có phải là ngũ giác đều không?

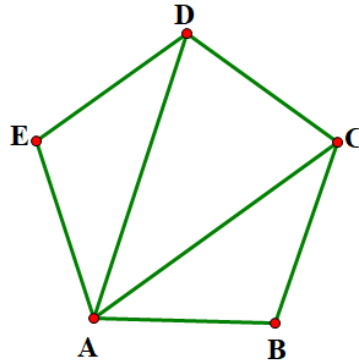
Hướng dẫn: Để chứng minh ngũ giác $ABCDE$ đều ta phải chứng minh:

* Các cạnh bằng nhau (giả thiết đã cho).

* Các góc bằng nhau: $\widehat{D} = \widehat{E} = 108^\circ$.

Dạng 2. Tính toán

Ví dụ 1. Cho ngũ giác đều $ABCDE$ như hình vẽ.



a) Tính tổng các góc trong của tam giác ABC, ACD, ADE , từ đó suy ra tổng các góc trong ngũ giác đều $ABCDE$.

b) Tính số đo góc E .

Ví dụ 2. Cho hình tròn $(O; R)$.

a) Vẽ hình tam giác đều, hình vuông, hình lục giác đều có các đỉnh nằm trên $(O; R)$.

b) Tính các cạnh của các hình vừa vẽ theo R .

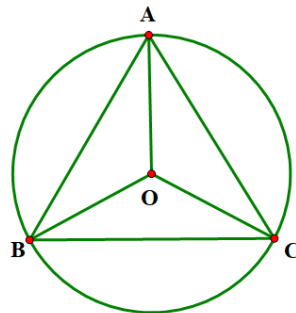
Dạng 3. Phép quay

Ví dụ 1. Cho lục giác đều $ABCDEF$.

a) Tính số đo các góc BCF, BDF, BEF .

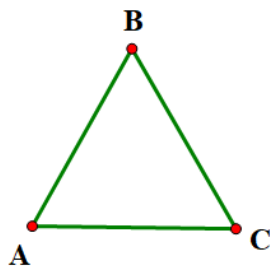
b) Gọi O là tâm của lục giác đều. Hãy chỉ ra ba phép quay tâm O giữ nguyên tam giác ACE .

Ví dụ 2. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) . Hãy chỉ ra các phép quay biến tam giác thành chính nó.



Hướng dẫn: Tương tự câu b, bài toán 9, có tất cả 6 phép quay đó là phép quay $120^\circ, 240^\circ, 360^\circ$ tâm O thuận chiều và ngược chiều.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC đều như hình vẽ.



Điểm B biến thành điểm nào:

- a) Phép quay thuận chiều 60° tâm A ;
- b) Phép quay ngược chiều 300° tâm A .

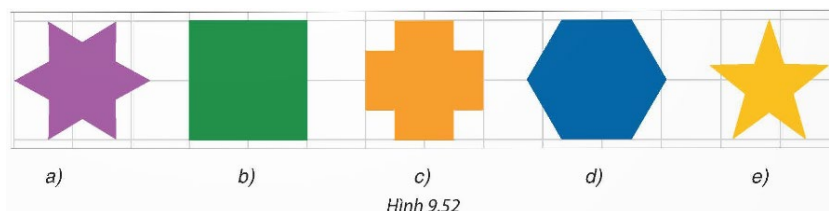
Ví dụ 4. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O (hình vẽ). Nêu các phép quay giữ nguyên hình vuông đó.

Ví dụ 5. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O như hình vẽ. Phép quay thuận chiều tâm O biến điểm A thành điểm D thì các điểm B, C, D tương ứng biến thành các điểm nào?

Ví dụ 6. Cho hình vuông nội tiếp đường tròn tâm O . hãy cho biết các phép quay thuận chiều lần lượt $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ với tâm O sẽ biến các điểm A, B, C, D thành những điểm nào?

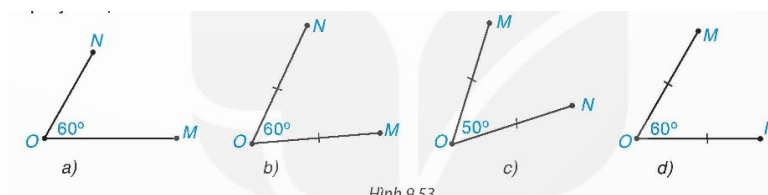
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

9.24. Trong các hình phẳng sau (H.9.52), hình nào là hình phẳng có dạng đa giác đều?



Hình 9.52

9.25. Trong các hình dưới đây (H.9.53), hình nào vẽ hai điểm M và N thỏa mãn phép quay thuận chiều 60° tâm O biến điểm M thành điểm N ?

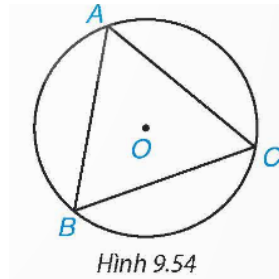


Hình 9.53

9.26. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) bán kính 2 cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC .

9.27. Cho hình thoi $ABCD$ có $\hat{A} = 60^\circ$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng $MBNPDQ$ là lục giác đều.

9.28. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) như Hình 9.54. Phép quay ngược chiều 60° tâm O biến các điểm A, B, C lần lượt thành các điểm D, E, F . Chứng minh rằng $ADBECF$ là một lục giác đều.



Hình 9.54

9.29. Liệt kê năm phép quay giữ nguyên một ngũ giác đều nội tiếp một đường tròn tâm O .

9.30. Cho vòng quay mặt trời gồm tám cabin như Hình 9.55. Hỏi để cabin A di chuyển đến vị trí cao nhất thì vòng quay phải quay thuận chiều quay của kim đồng hồ quanh tâm bao nhiêu độ?



Hình 9.55

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính số đo của mỗi góc của ngũ giác đều, lục giác đều, bát giác đều (đa giác đều 8 cạnh).

Bài 2. Tính số cạnh của một đa giác đều, biết mỗi góc của nó bằng 135° .

Bài 3. Cho tam giác đều ABC , các đường cao AD , BE , CF cắt nhau tại H . Gọi I , K , M theo thứ tự là trung điểm của HA , HB , HC . Chứng minh rằng $DKFIEM$ là lục giác đều.

Bài 4.

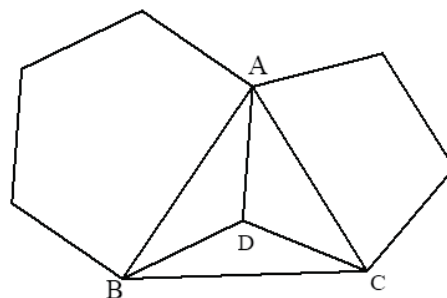
a) Tính số đường chéo của đa giác n cạnh.

b) Đa giác nào có số đường chéo bằng số cạnh?

Bài 5. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Gọi M là trung điểm của EF , N là trung điểm của BD . Chứng minh rằng AMN là tam giác đều.

Bài 6. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Trên cạnh AB , BC , CD , DE , EF , FA lấy các điểm A' , B' , C' , D' , E' , F' sao cho $AA' = BB' = CC' = DD' = EE' = FF'$. Chứng minh rằng $A'B'C'D'E'F'$ là một lục giác đều.

Bài 7. Một lục giác đều và một ngũ giác đều chung cạnh AD (như hình vẽ). Tính các góc của tam giác ABC .



Bài 8. Cho ngũ giác đều $ABCDE$. Gọi I là giao điểm của AD và BE . Chứng minh rằng

- a) $DIBC$ là hình bình hành;
- b) $DI^2 = AI \cdot AD$.

Bài 9*. Đường tròn tâm O nội tiếp hình vuông $ABCD$, tiếp điểm trên AB là M . Một tiếp tuyến với (O) cắt các cạnh BC, CD lần lượt ở E, F . Chứng minh rằng

- a) Các tam giác DFO và BOE đồng dạng.
- b) ME song song với AF .

Bài 10. Cho ngũ giác $ABCDE$ có các cạnh bằng nhau và $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$.

- a) Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.
- b) Chứng minh ngũ giác $ABCDE$ là ngũ giác đều.

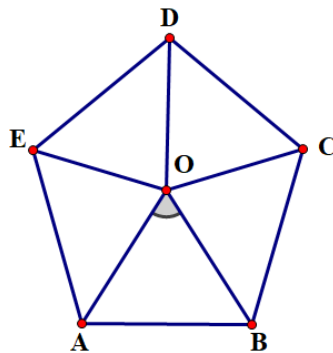
Bài 11. Chứng minh rằng tổng độ dài các cạnh của một ngũ giác lồi bé hơn tổng độ dài các đường chéo của nó.

Bài 12. Cho hình ngũ giác đều $ABCDE$ có tâm O .

- a) Phép quay thuận chiều tâm O biến điểm A thành điểm C thì các điểm B, C, D, E tương ứng biến thành các điểm nào?
- b) Chỉ ra các phép quay tâm O giữ nguyên hình ngũ giác đều đã cho.

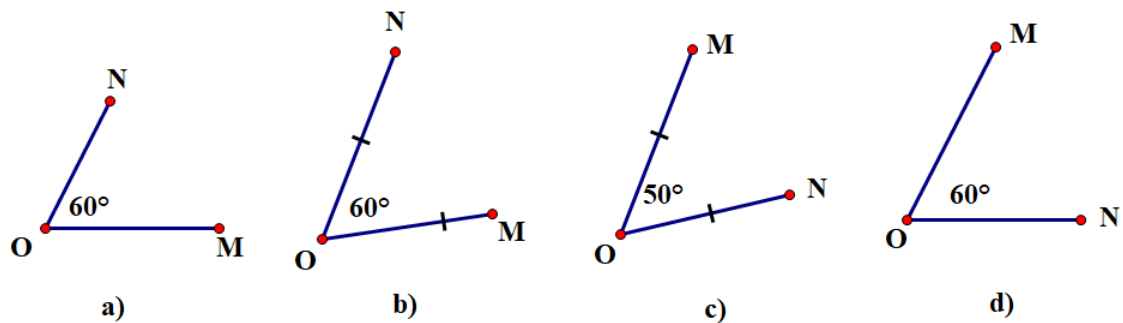
Bài 13. Cho tam giác đều, thực hiện phép quay ngược chiều tâm A góc 90° ta được tam giác đều. Hãy vẽ tam giác đều đó.

Bài 14. Cho hình ngũ giác đều $ABCDE$ có tâm O (Hình vẽ).

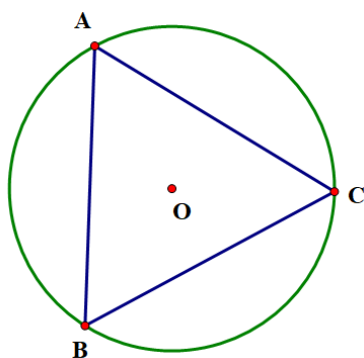


- a) Phép quay ngược chiều tâm O biến điểm A thành điểm B thì các điểm B, C, D, E tương ứng biến thành các điểm nào?
- b) Chỉ ra ba phép quay tâm O giữ nguyên hình ngũ giác đều đã cho.

Bài 15. Trong các hình dưới đây, hình nào vẽ hai điểm M và N thỏa mãn phép quay thuận chiều 60° tâm O biến điểm M thành điểm N ?



Bài 16. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) như hình vẽ. Phép quay ngược chiều 60° tâm O biến các điểm A, B, C lần lượt thành các điểm D, E, F . Chứng minh rằng $ADBECF$ là một lục giác đều.



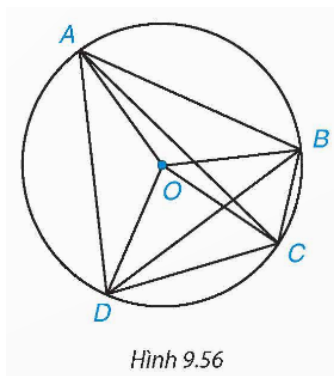
Bài 17. Vòng trong của mái giếng trời hình hoa sen của nhà ga Bến Thành (Thành phố Hồ Chí Minh) có dạng đa giác đều 12 cạnh (Hình vẽ). Hãy chỉ ra bốn phép quay biến đa giác đều đó thành chính nó.



LUYỆN TẬP CHUNG

A. VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

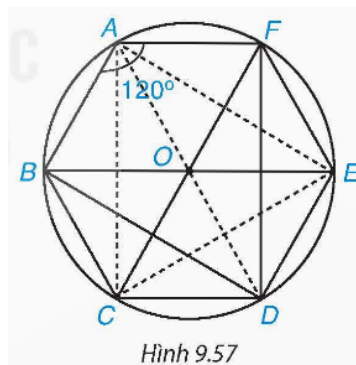
Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Biết rằng $\widehat{AOB} = 120^\circ$, $\widehat{BOC} = 40^\circ$, $\widehat{COD} = 80^\circ$. Tính số đo các góc của tứ giác $ABCD$.



Hình 9.56

Ví dụ 2. Cho lục giác đều $ABCDEF$.

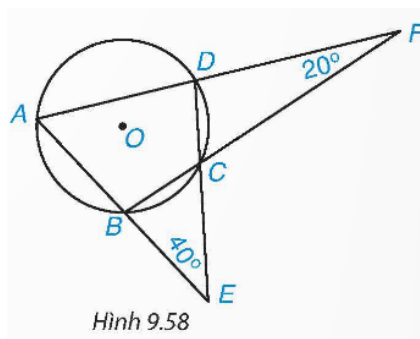
- Tính số đo các góc BCF, BDF, BEF .
- Gọi O là tâm của lục giác đều. Hãy chỉ ra ba phép quay tâm O giữ nguyên tam giác ACE .



Hình 9.57

9.31. Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF . Chứng minh rằng $BCEF, CAFD, ABDE$ là những tứ giác nội tiếp.

9.32. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) , AB cắt CD tại E , AD cắt BC tại F như Hình 9.58. Biết $\widehat{BEC} = 40^\circ$ và $\widehat{DFC} = 20^\circ$, tính số đo các góc của tứ giác $ABCD$.



Hình 9.58

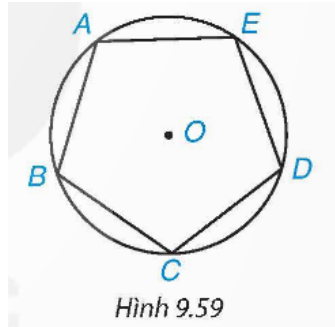
9.33. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4 cm. Tính chu vi, diện tích của các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.

9.34. Biết rằng bốn đỉnh A, B, C, D của một hình vuông cùng nằm trên một đường tròn (O) theo thứ tự ngược chiều quay của kim đồng hồ. Phép quay thuận chiều 45° biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm E, F, G, H .

- Vẽ đa giác $EAFBGCHD$.

b) Đa giác $EAFBGCHD$ có phải là một bát giác đều hay không? Vì sao?

9.35. Cho ngũ giác đều $ABCDE$ nội tiếp đường tròn (O) như Hình 9.59.

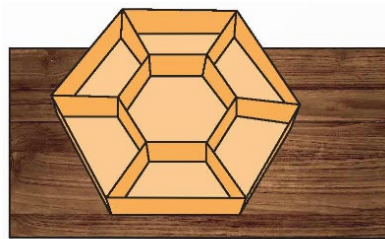


Hình 9.59

a) Hãy tìm một phép quay thuận chiều tâm O biến điểm A thành điểm C .

b) Phép quay trên sẽ biến các điểm B, C, D, E lần lượt thành những điểm nào? Phép quay này có giữ nguyên ngũ giác đều $ABCDE$ không?

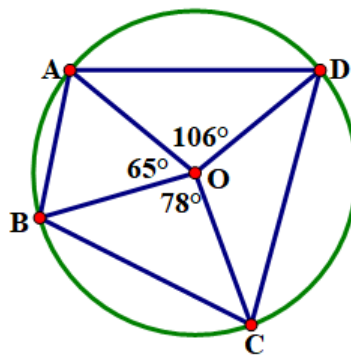
9.36. Người ta muốn làm một khay đựng bánh kẹo hình lục giác đều có cạnh 10 cm và chia thành 7 ngăn gồm một lục giác đều nhỏ và 6 hình thang cân như Hình 9.60. Hỏi lục giác đều nhỏ phải có cạnh bằng bao nhiêu để nó có diện tích bằng hai lần diện tích mỗi hình thang?



Hình 9.60

B. BÀI TẬP THÊM

Bài 1. Tính số đo các của tứ giác nội tiếp $ABCD$ trong hình vẽ.



Bài 2. Tính diện tích của một hình chữ nhật, biết rằng hình chữ nhật đó có chiều dài gấp hai lần chiều rộng và bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 2,5 cm.

Hướng dẫn: Hình chữ nhật $ABCD$ là tứ giác nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp có tâm là giao điểm hai đường chéo và bán kính bằng một nửa độ dài đường chéo.

Bài 3. Xác định tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật và hình vuông trong hình vẽ.

Bài 4. Cho đường tròn tâm O có bán kính $R = 5$ cm.

a) Tính độ dài cạnh của hình vuông nội tiếp trong (O) .

b) Một hình chữ nhật nội tiếp trong (O) có chu vi 28 cm . Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật đó.

Hướng dẫn: Hình vuông và hình chữ nhật là các tứ giác nội tiếp. Đường tròn ngoại tiếp của chúng có tâm là giao điểm của hai đường chéo và bán kính bằng một nửa độ dài đường chéo.

ngoại tiếp hình vuông ABCD .

Hướng dẫn: Cần tính bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp.

Bài 6. Cho tam giác nhọn ABC có AD, BE, CF là đường cao và H là trực tâm. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác AEHF, BDHF và CDHF là các tứ giác nội tiếp.

b) DA là đường phân giác của góc FDE.

Bài 7. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) , đường cao AD cắt đường tròn (O) tại E . Trên AD lấy H sao cho D là trung điểm của EH, BH cắt AC tại K . Chứng minh tứ giác HKCD nội tiếp.

Hướng dẫn: Ta đưa về câu a , bài toán 16 bằng cách chứng minh $\widehat{BKC} = 90^\circ$.

Bài 8. Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn (O) , vẽ cát tuyến MBC và tiếp tuyến Mt tiếp xúc với (O) tại A Gọi I là trung điểm của dây BC. Chứng minh AMIO là một tứ giác nội tiếp.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A . Lấy điểm M bất kì trên đoạn AC , đường tròn đường kính CM cắt hai đường thẳng BM và BC lần lượt tại D và N . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác ABCD nội tiếp;

b) Các đường thẳng AB, MN, CD cùng đi qua một điểm.

Hướng dẫn:

Câu b) Cho hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm, chứng minh đường thứ ba đi qua điểm đó.

Bài 10. Trong một đường tròn. Chứng minh rằng góc giữa tiếp tuyến một dây và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

Bài 11. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) , các đường cao AD và E cắt nhau tại H . BO cắt DE tại I và cắt đường tròn (O) tại M. Chứng minh rằng: tứ giác DIMC nội tiếp.

Bài 12. Cho tam giác ABC ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn (O) đường kính BC . Vẽ đường cao AH của tam giác. Trên cạnh BC lấy F ($F \neq 0$) sao cho $CF = CA$. Vẽ CI vuông góc với AF tại I và CI cắt cạnh AB tại E . Chứng minh rằng: tứ giác AIHC và BEIH nội tiếp.

Bài 13. Cho hình bình hành ABCD có đỉnh D nằm trên đường tròn đường kính AB . Kẻ DM và BN cùng vuông góc với đường chéo AC . Chứng minh CBID nội tiếp.

Bài 14. Từ điểm A bên ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (B, C là tiếp điểm). Vẽ đường kính BD của đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại D của (O) cắt đường thẳng BC ở E, OE cắt AD ở N . Chứng minh rằng: tứ giác AONC nội tiếp.

Bài 15. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên tia đối của tia BA lấy điểm C (C không trùng với B). Kẻ tiếp tuyến CD với đường tròn (O) (D là tiếp điểm). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng CD tại E. Gọi H là giao điểm của AD và OE, K là giao điểm BE và đường tròn (O) (K không trùng với B).

a) Chứng minh: $AE^2 = AK \cdot EB$.

b) Chứng minh: Tứ giác BOHK nội tiếp.

Bài 16. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác AFHE nội tiếp. Xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AFHE.

b) Gọi M là giao điểm của EF và BC và AM cắt đường tròn (O) tại I. Chứng tỏ: tứ giác AEFI nội tiếp.

Bài 17. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE và CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng: Tứ giác BFEC nội tiếp, xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BFEC.

b) Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại M và cắt đường tròn (O) tại K và T (K nằm giữa M và T). Chứng minh rằng: $MK \cdot MT = ME \cdot MF$.

c) Chứng minh tứ giác KTID nội tiếp.

Bài 18. Cho đường tròn (O; R). Lấy các điểm A, B, C, D, E trên đường tròn (O; R) sao cho số đo các cung $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DE}$, $\widehat{EA}$ bằng nhau. Đa giác ABCDE có là đa giác đều không? Vì sao?

Bài 19. Cho tam giác đều ABC, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I, K, M theo thứ tự là trung điểm của HA, HB, HC. Chứng minh rằng DKFIEM là lục giác đều.

Bài 20. Cho lục giác đều ABCDEF. Trên cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA lấy các điểm A', B', C', D', E', F' sao cho $AA' = BB' = CC' = DD' = EE' = FF'$. Chứng minh rằng A'B'C'D'E'F' là một lục giác đều.

Bài 21. Cho một đa giác đều n cạnh có độ dài mỗi cạnh là a. Hãy tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp và bán kính r của đường tròn nội tiếp đa giác đều đó.

Bài 22. Tính diện tích lục giác đều nội tiếp đường tròn bán kính R.

Bài 23. Tính số đo của mỗi góc của ngũ giác đều, lục giác đều, bát giác đều (đa giác đều 8 cạnh).

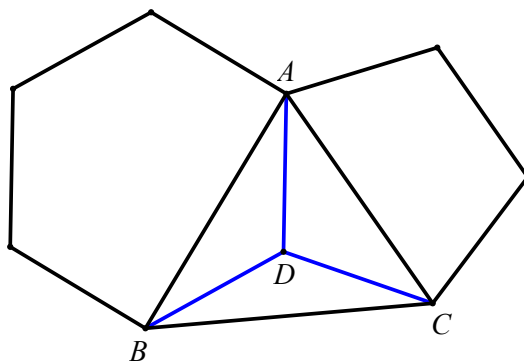
Phương pháp:

Đa giác đều có n cạnh bằng nhau và cũng có n góc bằng nhau nên có công thức tính số đo mỗi góc là:

$$\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$$

Bài 24. Cho lục giác đều ABCDEF. Gọi M là trung điểm của EF, N là trung điểm của BD. Chứng minh rằng AMN là tam giác đều.

Bài 25. Một lục giác đều và một ngũ giác đều chung cạnh AD (như hình vẽ). Tính các góc của tam giác ABC .



BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX

PHẦN 1. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

A. TRẮC NGHIỆM

9.37. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Góc nội tiếp có số đo bằng số đo cung bị chắn.
- B. Góc có hai cạnh chứa các dây cung của đường tròn là góc nội tiếp đường tròn đó.
- C. Góc nội tiếp có số đo bằng một nửa số đo cung bị chắn.
- D. Góc có đỉnh nằm trên đường tròn là góc nội tiếp đường tròn đó.

9.38. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp một đường tròn có $\widehat{A} - \widehat{C} = 100^\circ$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\widehat{A} = 80^\circ$.
- B. $\widehat{C} = 80^\circ$.
- C. $\widehat{B} + \widehat{D} = 100^\circ$.
- D. $\widehat{A} = 140^\circ$.

9.39. Đa giác nào dưới đây không nội tiếp một đường tròn?

- A. Đa giác đều.
- B. Hình chữ nhật.
- C. Hình bình hành.
- D. Tam giác.

B. TỰ LUẬN

9.40. Cho tam giác ABC có các đường cao BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của BC và I là trung điểm của AH . Chứng minh rằng:

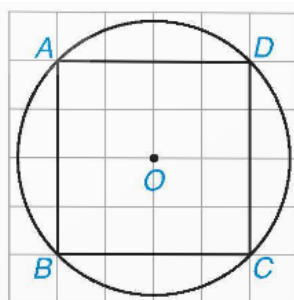
- a) Tứ giác $AEHF$ nội tiếp một đường tròn tâm I ;
- b) ME, MF tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$.

9.41. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng các tứ giác $ANOP, BPOM, CMON$ là các tứ giác nội tiếp.

9.42. Cho một hình lục giác đều và một hình vuông cùng nội tiếp một đường tròn. Biết rằng hình vuông có cạnh bằng 3 cm. Tính chu vi và diện tích của hình lục giác đều đã cho.

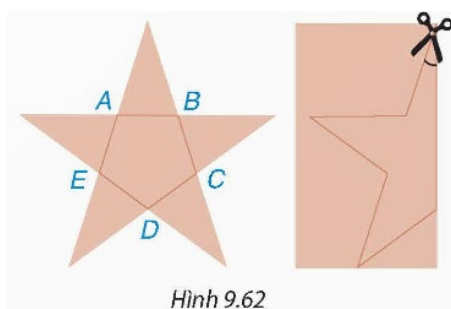
9.43. a) Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O (H.9.61). Phép quay thuận chiều 45° tâm O biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm A', B', C', D' . Hãy vẽ tứ giác $A'B'C'D'$.

b) Phép quay trong câu a biến các điểm A', B', C', D' thành những điểm nào?



Hình 9.61

9.44. Bạn Lan muốn cắt hình ngôi sao có dạng như Hình 9.62 (trong đó $ABCDE$ là một ngũ giác đều). Lan gấp đôi tờ giấy, vẽ một nửa ngôi sao và cắt theo nét vẽ. Hỏi góc tạo bởi lưỡi kéo và nếp gấp lúc đầu bằng bao nhiêu độ?



Hình 9.62

PHẦN 2. BÀI TẬP THÊM

A. TRẮC NGHIỆM

1. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Góc nội tiếp có số đo bằng số đo cung bị chắn.
- B. Góc có hai cạnh chứa các dây cung của đường tròn là góc nội tiếp đường tròn đó.
- C. Góc nội tiếp có số đo bằng một nửa số đo cung bị chắn.
- D. Góc có đỉnh nằm trên đường tròn là góc nội tiếp đường tròn đó.

2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp một đường tròn có $\widehat{A} - \widehat{C} = 100^\circ$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

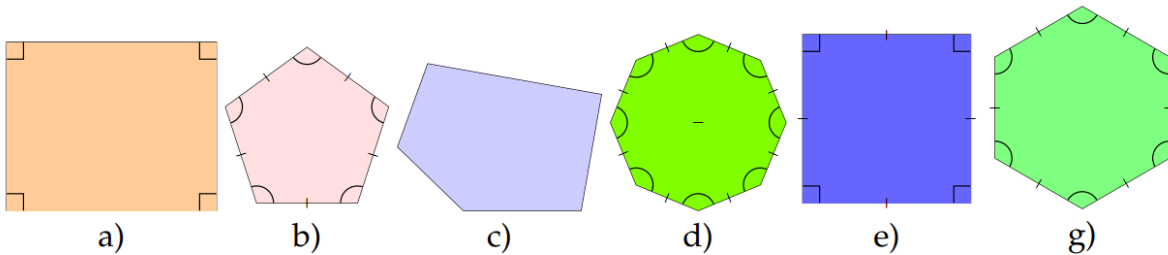
- A. $\widehat{A} = 80^\circ$. B. $\widehat{B} = 80^\circ$. C. $\widehat{B} + \widehat{D} = 100^\circ$. D. $\widehat{A} = 140^\circ$.

3. Đa giác nào sau đây không nội tiếp một đường tròn?

- A. Đa giác đều. B. Hình chữ nhật. C. Hình bình hành. D. Tam giác.

B. TỰ LUẬN

1. Tìm và gọi tên các đa giác đều trong hình dưới đây



2. Tính số cạnh của một đa giác đều, biết mỗi góc của nó bằng 135° .

3. a) Tính số đường chéo của đa giác n cạnh.

b) Đa giác nào có số đường chéo bằng số cạnh?

4. Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên AC lấy một điểm M và dựng đường tròn đường kính MC . Nối BM kéo dài gặp đường tròn tại D . Đường thẳng DA gặp đường tròn tại S . Chứng minh rằng CA là tia phân giác của góc $\widehat{SCB}$.

5. M ở chính giữa nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Trên cung nhỏ $\widehat{BM}$ lấy điểm C bất kì. Vẽ tiếp tuyến tại B của (O) cắt MC tại D . Gọi H là giao điểm của MB và AC . Kẻ HI vuông góc với AB . Chứng minh rằng CA là tia phân giác của góc $\widehat{MCI}$.

6. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$ đường kính AD , đường cao AH .

a) Chứng minh $\triangle AHB$ và $\triangle ACD$ đồng dạng.

b) Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh tương ứng với các đỉnh A, B, C . Chứng minh $S_{ABC} = \frac{a.b.c}{4R}$.

7. Cho tam giác ABC có các đường cao BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của BC và I là trung điểm của AH . Chứng minh rằng:

- a) Tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn tâm I ;
- b) ME, MF tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$.

8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng các tứ giác $ANOP, BPOM, CMON$ là các tứ giác nội tiếp.

9. Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH ($H \in BC$) và nội tiếp đường tròn tâm O có đường kính AM (Hình vẽ). Chứng minh $\widehat{OAC} = \widehat{BAH}$

10. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a . Góc vuông xAy thay đổi sao cho tia Ax cắt đoạn thẳng BC tại M và tia Ay cắt đoạn thẳng CD kéo dài tại N .

- a) Chứng minh hai tam giác ABM và AND bằng nhau;
- b) Gọi O là trung điểm của MN . Chứng minh $ABMO$ và $ANDO$ là các tứ giác nội tiếp;
- c) Chứng minh ba điểm B, D, O thẳng hàng.

11. Cho một hình lục giác đều và một hình vuông cùng nội tiếp một đường tròn. Biết rằng hình vuông có cạnh bằng 3 cm. Tính chu vi và diện tích của một hình lục giác đều đã cho.

CHƯƠNG IX. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP.

BÀI 27. GÓC NỘI TIẾP

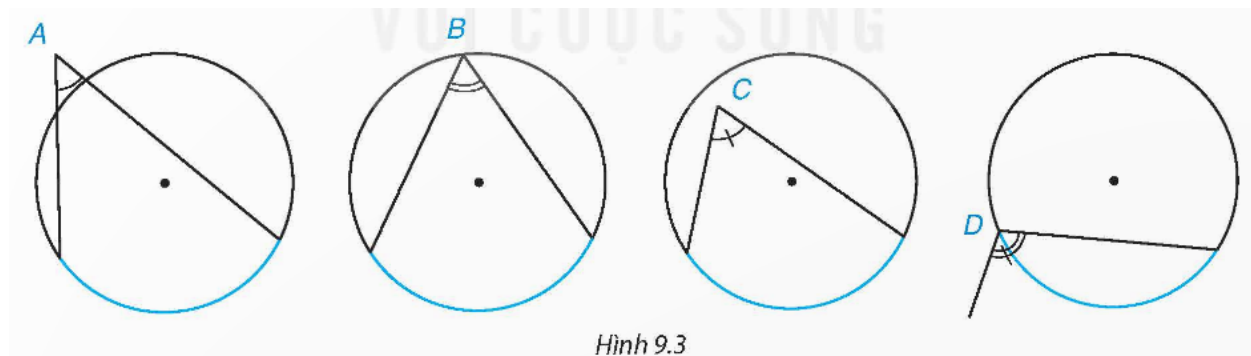
A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Góc nội tiếp và cung bị chắn

Định nghĩa

Góc nội tiếp của đường tròn là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó. Cung nằm bên trong góc được gọi là cung bị chắn.

Ví dụ 1. Trong các góc A, B, C, D ở Hình 9.3, góc nào là góc nội tiếp, góc nào không phải góc nội tiếp của đường tròn vẽ trong hình? Vì sao?



Hình 9.3

Lời giải

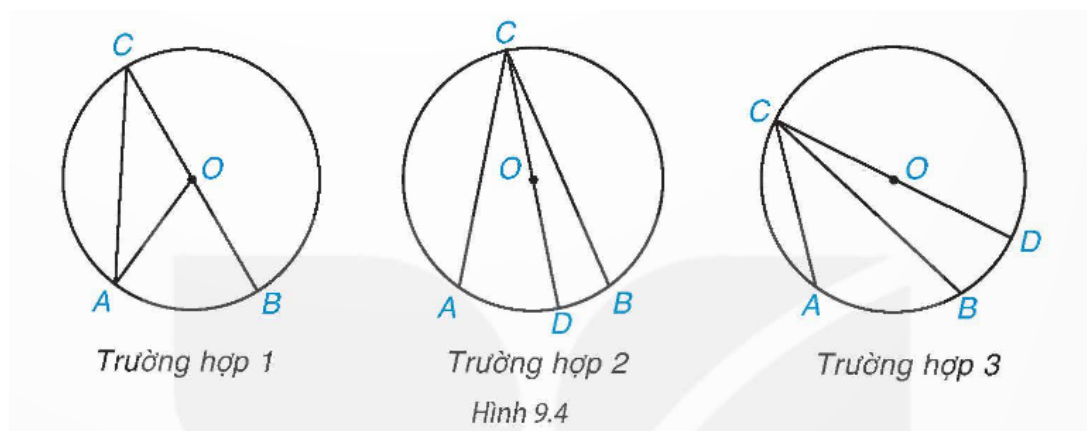
Các góc A và C không phải góc nội tiếp của đường tròn vì đỉnh không nằm trên đường tròn. Góc D có một cạnh không chứa dây cung của đường tròn nên cũng không là góc nội tiếp của đường tròn. Góc B có đỉnh B nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn nên là góc nội tiếp của đường tròn.

2. Định lý sau cho biết mối liên hệ giữa góc nội tiếp với cung bị chắn:

Định lý: Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

GT	$A, B, C \in (O).$
KL	$\widehat{ACB} = \frac{1}{2} sđ \widehat{AB}$ (cung AB không chứa C).

Chứng minh. Ta xét ba trường hợp sau (H.9.4).



Trường hợp 1: Tâm O nằm trên một cạnh của góc ACB . Giả sử $O \in CB$. Do tam giác OAC cân tại O và có tổng các góc bằng 180° nên: $2\widehat{ACB} = \widehat{ACO} + \widehat{CAO} = 180^\circ - \widehat{AOC} = \widehat{AOB}$.

Do $\widehat{AOB} = sđ \widehat{AB}$ (vì $\widehat{AOB}$ là góc ở tâm chắn cung AB) nên $\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = \frac{1}{2} sđ \widehat{AB}$.

Trường hợp 2: Tâm O nằm bên trong góc ACB . Vẽ đường kính CD . Áp dụng Trường hợp 1 cho các góc nội tiếp ACD và DCB với cạnh CD đi qua O , ta được: $\widehat{ACD} = \frac{1}{2}s\widehat{AD}$ và $\widehat{DCB} = \frac{1}{2}s\widehat{DB}$

$$\text{Suy ra } \widehat{ACB} = \widehat{ACD} + \widehat{DCB} = \frac{1}{2}s\widehat{AD} + \frac{1}{2}s\widehat{DB} = \frac{1}{2}s\widehat{AB}.$$

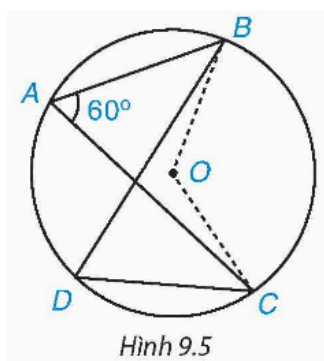
Trường hợp 3: Tâm O nằm ngoài góc ACB . Vẽ đường kính CD . Áp dụng Trường hợp 1 cho các góc nội tiếp ACD và BCD với cạnh CD đi qua O , tương tự như trên ta được:

$$\widehat{ACB} = \widehat{ACD} - \widehat{BCD} = \frac{1}{2}s\widehat{AD} - \frac{1}{2}s\widehat{BD} = \frac{1}{2}s\widehat{AB}$$

Nhận xét. Từ định lý trên ta có các khẳng định sau đối với các góc nội tiếp của một đường tròn hoặc của hai đường tròn bằng nhau:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.
- Các góc nội tiếp chắn cung nhỏ thì có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm chắn cùng một cung.
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) và các điểm A, B, C, D trên (O) như Hình 9.5. Biết rằng $\widehat{BAC} = 60^\circ$, hãy tính số đo của các góc BOC và BDC .



Hình 9.5

Lời giải

Xét đường tròn (O) , ta có:

- Do hai góc nội tiếp $\widehat{BDC}$ và $\widehat{BAC}$ cùng chắn cung nhỏ BC nên $\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = 60^\circ$;
- Vì góc nội tiếp $\widehat{BAC}$ và góc ở tâm $\widehat{BOC}$ cùng chắn cung nhỏ BC nên $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 120^\circ$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. TÍNH SỐ ĐO GÓC, CUNG

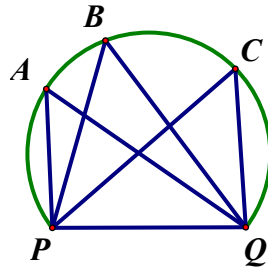
1. Phương pháp

Trong một đường tròn:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau và ngược lại.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau
- Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90°) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Một huấn luyện viên cho cầu thủ tập sút bóng vào cầu môn PQ. Bóng được đặt ở các vị trí A, B, C trên một cung tròn như hình 22.



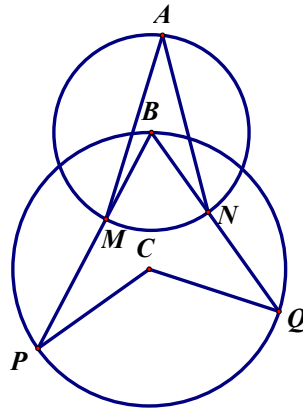
Hình 22

Hãy so sánh các góc $\widehat{PAQ}, \widehat{PBQ}, \widehat{PCQ}$.

Trả lời

$\widehat{PAQ} = \widehat{PBQ} = \widehat{PCQ}$ (các góc nội tiếp cùng chắn cung PQ).

Ví dụ 2. Xem hình 24 (hai đường tròn có tâm là B, C và điểm B nằm trên đường tròn tâm C)



Hình 24

a) Biết $\widehat{MAN} = 30^\circ$. Tính $\widehat{PCQ}$.

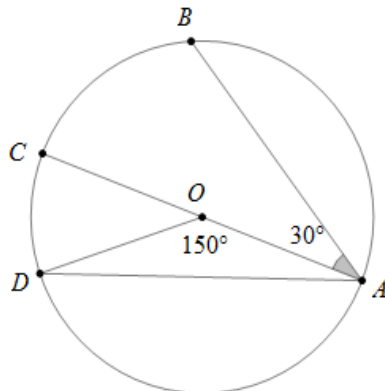
b) Nếu $\widehat{PCQ} = 136^\circ$ thì $\widehat{MAN}$ có số đo là bao nhiêu?

Hướng dẫn (h.24)

a) $\widehat{MAN} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MBN} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{PCQ} = 120^\circ$

b) $\widehat{PCQ} = 136^\circ \Rightarrow \widehat{MBN} = 68^\circ \Rightarrow \widehat{MAN} = 34^\circ$.

Ví dụ 3. Dựa vào hình vẽ sau:



a) Tính số đo cung nhỏ CD.

b) Tính số đo cung nhỏ BD.

Lời giải

a)

Ta có: $\widehat{COD} = 180^\circ - \widehat{AOC}$ (hai góc bù nhau)

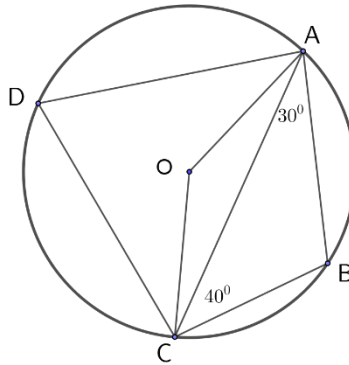
$$\widehat{COD} = 180^\circ - \widehat{AOC} = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

số đo cung nhỏ CD là: $s\widehat{CD} = \widehat{COD} = 30^\circ$ (góc ở tâm)

b) số đo cung nhỏ BC là $s\widehat{BC} = 2\widehat{CAB} = 2.30^\circ = 60^\circ$ (góc nội tiếp)

số đo cung nhỏ BD là: $s\widehat{BD} = s\widehat{BC} + s\widehat{CD} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$

Ví dụ 4. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), biết $\widehat{BAC} = 30^\circ$, $\widehat{BCA} = 40^\circ$ (như hình vẽ bên).



Tính số đo các góc $\widehat{ABC}$, $\widehat{ADC}$, $\widehat{AOC}$.

Lời giải

Xét tam giác ABC có: $\widehat{BAC} + \widehat{BCA} + \widehat{ABC} = 180^\circ$ (tổng 3 góc trong tam giác)

$$\text{Hay } 30^\circ + 40^\circ + \widehat{ABC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 110^\circ$$

$$\widehat{ADC} = \frac{1}{2}(s\widehat{AB} + s\widehat{AB}) = \frac{1}{2}(2\widehat{ACB} + 2\widehat{CAB}) = \widehat{ACB} + \widehat{CAB} = 40^\circ + 30^\circ = 70^\circ \text{ (góc nội tiếp)}$$

$$\text{Hay } 110^\circ + \widehat{ADC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ADC} = 70^\circ$$

Ta có: $\widehat{AOC} = 2\widehat{ADC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AC)

$$\Rightarrow \widehat{AOC} = 2.70^\circ = 140^\circ.$$

$$\text{Vậy } \widehat{ABC} = 110^\circ, \widehat{ADC} = 70^\circ, \widehat{AOC} = 140^\circ$$

Chú ý: Có thể dùng tính chất Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) nên để tính $\widehat{ADC}$

Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) nên $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ (tổng 2 góc đối diện của tứ giác nội tiếp)

$$\text{Hay } 110^\circ + \widehat{ADC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ADC} = 70^\circ$$

DẠNG 2. CHỨNG MINH CÁC GÓC BẰNG NHAU, CÁC CUNG BẰNG NHAU. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

1. Phương pháp

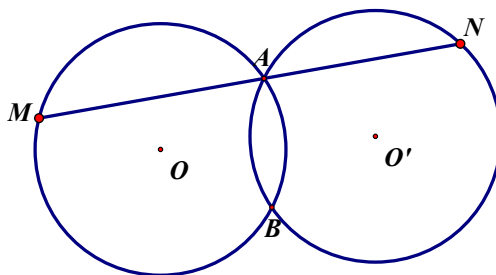
Trong một đường tròn:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau và ngược lại.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau

- Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90°) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ đường thẳng qua A cắt (O) tại M và cắt (O') tại N (A nằm giữa M và N). Hỏi MBN là tam giác gì? Tại sao?



Hình 23

Giải

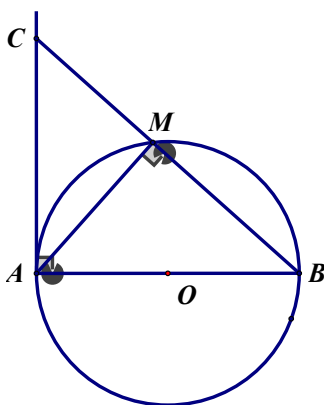
Hai đường tròn (O) và (O') bằng nhau nên hai cung nhỏ AB bằng nhau (vì cùng căng dây AB).

Suy ra $\widehat{M} = \widehat{N}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Vậy $\triangle MBN$ là tam giác cân.

Ví dụ 2. Trên đường tròn (O) đường kính AB, lấy điểm M (khác A và B). Vẽ tiếp tuyến của (O) tại A. Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến đó tại C. Chứng minh rằng ta luôn có: $MA^2 = MB.MC$

Hướng dẫn (h.28)



Hình 28

Dùng tính chất của tiếp tuyến để chứng minh $AC \perp AB$; dùng hệ quả d) để chứng minh $AM \perp BC$.

Sau đó dùng hệ thức: $h^2 = b'.c'$ đối với tam giác vuông ta được:

$$MA^2 = MB.MC$$

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O) và một điểm M cố định không nằm trên đường tròn. Qua M kẻ hai đường thẳng. Đường thẳng thứ nhất cắt (O) tại A và B. Đường thẳng thứ hai cắt (O) tại C và D. Chứng minh: $MA.MB = MC.MD$

Hướng dẫn: Xét cả hai trường hợp điểm M nằm bên trong và bên ngoài đường tròn. Trong mỗi trường hợp, xét hai tam giác đồng dạng.

Giải

Trường hợp điểm M nằm bên trong đường tròn (h.29)

$\triangle MAC$ và $\triangle MDB$ có:

$\widehat{A} = \widehat{D}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BC)

$\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ (đối đỉnh)

Do đó: $\triangle MAC \sim \triangle MDB$ (g.g). Suy ra:

$$\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB}, \text{ do đó: } MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

Trường hợp điểm M nằm bên ngoài đường tròn: cũng chứng minh tương tự.

Ví dụ 4. Một chiếc cầu được thiết kế như hình 30 có độ dài $AB = 40\text{m}$, chiều cao $MK = 3\text{m}$. Hãy tính bán kính của đường tròn chứa cung AMB .

Giải (h.30)

MK nằm trên đường kính MN của đường tròn, trong đó cung AMB là một cung của đường tròn đó.

Gọi bán kính của đường tròn là R thì $KN = MN - MK = 2R - 3$.

Vì $MN \perp AB$ nên $KA = KB = 20\text{m}$

Theo kết quả bài 23, ta có:

$KM \cdot KN = KA \cdot KB$, suy ra: $3 \cdot (2R - 3) = 20 \cdot 20$

$$\Rightarrow R = \frac{409}{6} \approx 68,2(m)$$

Ví dụ 5. Cho AB, BC, CA là ba dây của đường tròn (O) Từ điểm chính giữa M của cung AB vẽ dây MN song song với dây BC . Gọi giao điểm của MN và AC là S. Chứng minh $SM = SC$ và $SN = SA$.

Giải (h.31)

Ta có: $MN \parallel BC \Rightarrow \widehat{M} = \widehat{C_1}$

$\widehat{MA} = \widehat{MB} \Rightarrow \widehat{C_2} = \widehat{C_1}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Suy ra: $\widehat{M} = \widehat{C_2} \Rightarrow \triangle SMC$ cân.

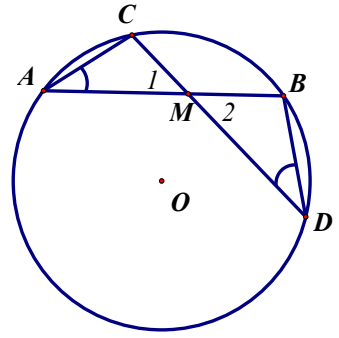
$$\Rightarrow SM = SC$$

Ta có: $\widehat{A_1} = \widehat{M}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CN)

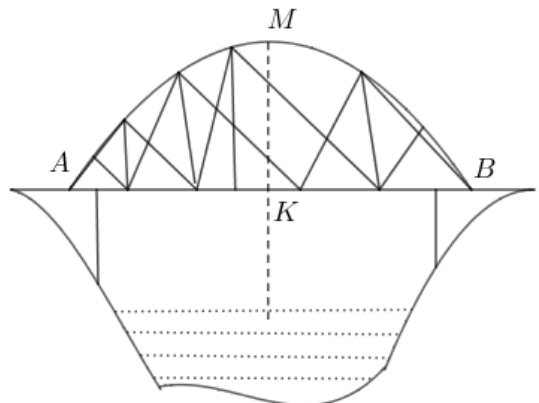
$\widehat{C_2} = \widehat{N}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

Vì $\widehat{M} = \widehat{C_2}$ (chứng minh trên) nên $\widehat{A_1} = \widehat{N}$

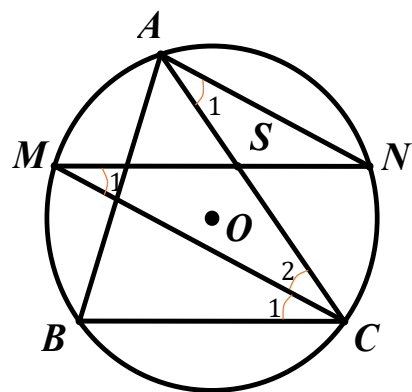
Suy ra: $\triangle SAN$ cân $\Rightarrow SN = SA$



Hình 29



Hình 30



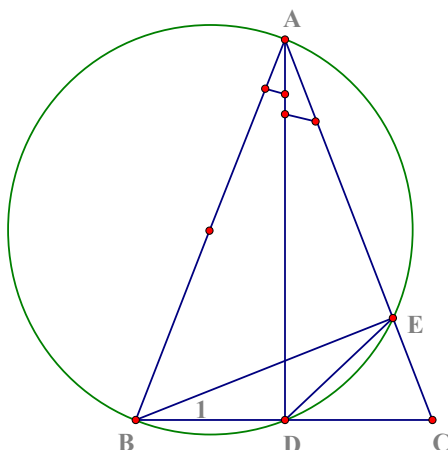
Hình 31

Ví dụ 6. Cho $\triangle ABC$ cân tại A ($\widehat{A} < 90^\circ$). Vẽ đường tròn đường kính AB cắt BC tại D, cắt AC tại E.

a) Chứng minh $\widehat{BD} = \widehat{DE}$.

b) Chứng minh $\widehat{CBE} = \frac{1}{2} \widehat{BAC}$.

Lời giải



a) $\widehat{ADB} = 90^\circ \Rightarrow AD \perp BC \Rightarrow AD$ là phân giác của $\widehat{A}$

$$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{DE}$$

b) Ta có $\widehat{B_1} = \widehat{A_2} = \frac{1}{2} \widehat{DE} \Rightarrow \widehat{B_1} = \frac{1}{2} \widehat{BAC}$.

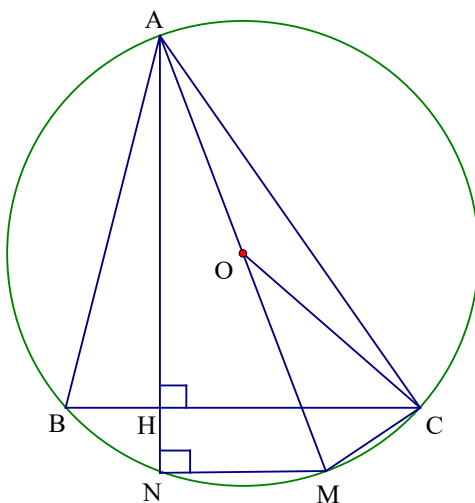
Ví dụ 7. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH và nội tiếp đường tròn tâm O , đường kính AM

a) Tính $\widehat{ACM}$.

b) Chứng minh $\widehat{BAH} = \widehat{OCA}$.

c) Gọi N là giao điểm của AH với (O) . Tứ giác $BCMN$ là hình gì? Vì sao?

Lời giải



a) Ta có $\widehat{ACM} = 90^\circ$ (góc nội tiếp)

b) Ta có $\Delta ABH \sim \Delta AMC$ (gg)

$$\Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{OAC}; \widehat{OCA} = \widehat{OAC} \Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{OCA}$$

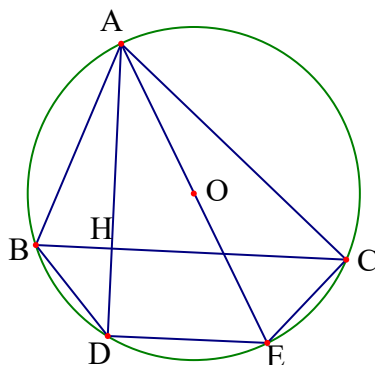
c) $\widehat{ANM} = 90^\circ \Rightarrow MNBC$ là hình thang

$$\Rightarrow BC \parallel MN \Rightarrow \text{sđ } \widehat{BN} = \text{sđ } \widehat{CM}$$

$$\Rightarrow \widehat{CBN} = \widehat{BCM} \Rightarrow BCMN \text{ hình thang cân.}$$

Ví dụ 8. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Từ đỉnh A ta kẻ đường cao AH (H thuộc BC). Chứng minh rằng $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

Lời giải



Kẻ đường kính AE của đường tròn (O) .

Ta thấy $\widehat{ACE} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Từ đó $\widehat{OAC} + \widehat{AEC} = 90^\circ$ (1).

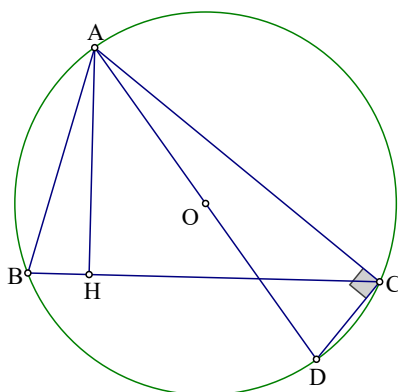
Theo giả thiết bài ra, ta có: $\widehat{BAH} + \widehat{ABC} = 90^\circ$ (2).

Mặt khác $\widehat{AEC} = \widehat{ABC}$ (cùng chắn $\widehat{AC}$) (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$ (đpcm).

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$, AH là đường cao ($H \in BC$). Chứng minh rằng: $AB \cdot AC = 2R \cdot AH$.

Lời giải



Vẽ đường kính AD của đường tròn (O) , suy ra $\widehat{ACD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Xét $\triangle HBA$ và $\triangle CDA$ có:

$$\widehat{AHB} = \widehat{ACD} (= 90^\circ); \widehat{HBA} = \widehat{CDA} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{AC}),$$

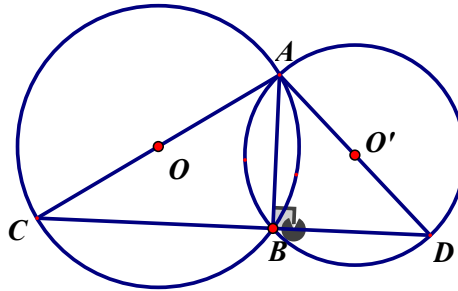
$$\text{Do đó } \triangle HBA \sim \triangle CDA \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AB.AC = AD.AH.$$

Mà $AD = 2R$.

Do đó $AB.AC = 2R.AH$.

DẠNG 3. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, VUÔNG GÓC, BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ các đường kính AC và AD của hai đường tròn. Chứng minh rằng ba điểm C, B, D thẳng hàng.



Hình 26

Giải (h.26)

Vẽ dây chung BA và các dây BC, BD.

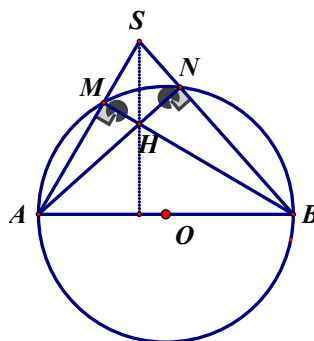
Ta có : $\widehat{ABC} = 90^\circ$; $\widehat{ABD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra $BC \perp BA$ và $BD \perp BA$.

Qua B chỉ vẽ được một đường thẳng vuông góc với AB mà thôi, suy ra ba điểm C, B, D thẳng hàng.

Ví dụ 2. Cho đường tròn tâm (O), đường kính AB và S là một điểm nằm bên ngoài đường tròn, SA và SB lần lượt cắt đường tròn tại M, N. Gọi H là giao điểm của BM và AN. Chứng minh rằng SH vuông góc với AB.

Giải (H.27)



Hình 27

Ta có: $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB).

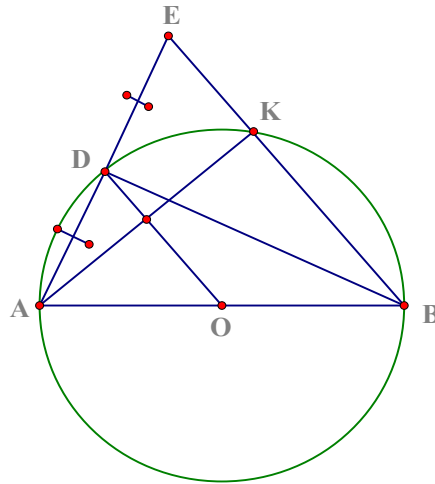
Suy ra: $AN \perp SB$; $BM \perp SA$.

Xét $\triangle SAB$ có hai đường cao AN và BM cắt nhau tại H. Theo tính chất ba đường cao của tam giác gặp nhau tại một điểm, suy ra: $SH \perp AB$.

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm D thuộc (O). Gọi E là điểm đối xứng với A qua D
a) $\triangle ABE$ là tam giác gì?

b) Gọi K là giao điểm của EB với (O), Chứng minh rằng: $OD \perp AK$.

Lời giải



a) $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow \begin{cases} BD \perp AE \\ AD = DE \end{cases} \Rightarrow \triangle ABE \text{ cân tại B}$$

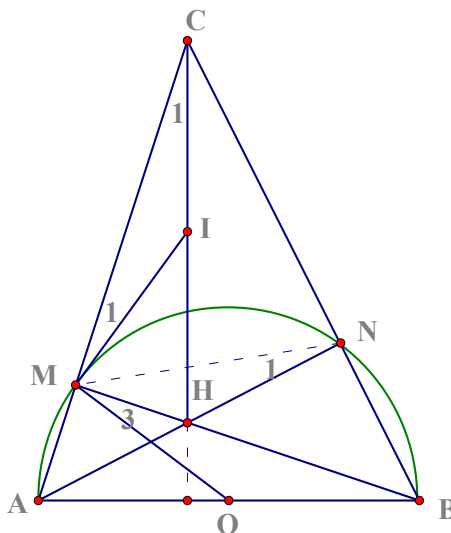
$$\text{b) } \begin{cases} OD \parallel EB \\ AK \perp EB \end{cases} \Rightarrow OD \perp AK$$

Ví dụ 4. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$ và điểm C nằm ngoài nửa đường tròn. CA cắt nửa đường tròn tại M, CB cắt nửa đường tròn tại N. Gọi H là giao điểm của AN và BM.

a) Chứng minh rằng $CH \perp AB$.

b) Gọi I là trung điểm của CH. Chứng minh rằng MI là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O).

Lời giải



a) Ta có H là trực tâm của tam giác $\Rightarrow CH \perp AB$

b) Cần chứng minh $MI \perp MO$

$$\text{Ta có: } C, M, H, N \in \left(I; \frac{CH}{2}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{C_1} = \widehat{N_1} (= \frac{1}{2} sd \widehat{MH}) \\ \widehat{N_1} = \widehat{B_1} (= \frac{1}{2} sd \widehat{AM}) \\ \widehat{B_1} = \widehat{B_3} (\Delta.can) \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \widehat{M_1} = \widehat{M_3} \\ \widehat{M_1} + \widehat{IMB} = 90^0 \end{array} \right\} \rightarrow \widehat{M_3} + \widehat{IMB} = 90^0 \rightarrow \widehat{OMI} = 90^0$$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

9.1. Những khẳng định nào sau đây là đúng?

- a) Hai góc nội tiếp bằng nhau thì chắn cùng một cung.
- b) Góc nội tiếp nhỏ hơn 90° có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm chắn cùng một cung.
- c) Góc nội tiếp chắn cung nhỏ có số đo bằng số đo của góc ở tâm chắn cùng một cung.
- d) Hai góc nội tiếp bằng nhau thì chắn hai cung bằng nhau.

Lời giải

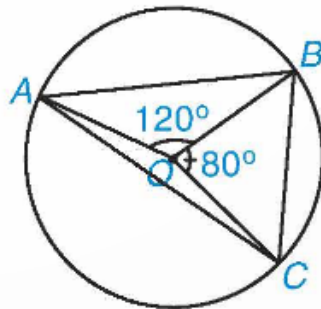
Trong cùng một đường tròn hoặc hai đường tròn bằng nhau, ta có:

- Hai góc nội tiếp bằng nhau thì chắn hai cung bằng nhau, chưa chắc đã chắn cùng một cung. Do đó khẳng định a) là sai và khẳng định d) là đúng.
- Góc nội tiếp nhỏ hơn 90° có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm chắn cùng một cung. Do đó khẳng định b) là đúng.
- Góc nội tiếp chắn cung nhỏ có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm chắn cùng một cung. Do đó khẳng định c) là sai.

Vậy các khẳng định đúng là: b, d.

9.2. Cho các điểm như Hình 9.7. Tính số đo các góc của tam giác ABC , biết rằng

$$\widehat{AOB} = 120^\circ, \widehat{BOC} = 80^\circ.$$



Hình 9.7

Lời giải

Xét đường tròn (O) có:

- $\widehat{BAC}, \widehat{BOC}$ lần lượt là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung nhỏ BC, nên

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC} = \frac{1}{2} \cdot 80^\circ = 40^\circ;$$

- $\widehat{ACB}, \widehat{AOB}$ lần lượt là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung nhỏ AB, nên

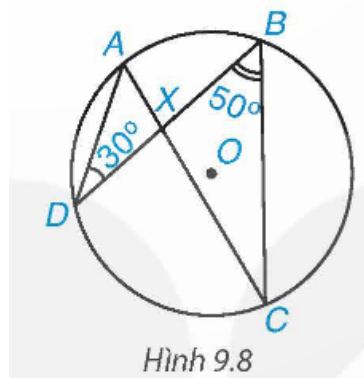
$$\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ.$$

Xét $\triangle ABC$ có: $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$ (định lý tổng các góc của một tam giác)

Suy ra $\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{ACB} - \widehat{BAC} = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$.

Vậy $\widehat{ABC} = 80^\circ, \widehat{BAC} = 40^\circ; \widehat{ACB} = 60^\circ$.

9.3. Cho đường tròn (O) và hai dây cung AC, BD cắt nhau tại X (H.9.8). Tính số đo góc $\angle AXB$ biết rằng $\widehat{ADB} = 30^\circ$ và $\widehat{DBC} = 50^\circ$.



Hình 9.8

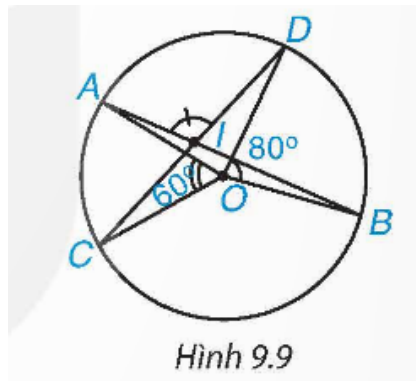
Lời giải

Xét đường tròn (O) có $\widehat{ADB}, \widehat{ACB}$ là hai góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ AB nên $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 30^\circ$.

Vì $\widehat{AXB}$ là góc ngoài của $\triangle BXC$ tại đỉnh X nên ta có: $\widehat{AXB} = \widehat{XCB} + \widehat{XBC} = 30^\circ + 50^\circ = 80^\circ$

Vậy $\widehat{AXB} = 80^\circ$.

9.4. Cho đường tròn (O) và hai dây cung AB, CD cắt nhau tại điểm I nằm trong (O) (H.9.9)



Hình 9.9

a) Biết rằng $\widehat{AOC} = 60^\circ, \widehat{BOD} = 80^\circ$. Tính số đo của góc $\angle AID$.

b) Chứng minh rằng $IA \cdot IB = IC \cdot ID$.

Lời giải

a) Xét đường tròn (O) có:

- $\widehat{BAD}, \widehat{BOD}$ lần lượt là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung nhỏ BD, nên

$$\widehat{BAD} = \frac{1}{2} \widehat{BOD} = \frac{1}{2} \cdot 80^\circ = 40^\circ.$$

- vì $\widehat{ADC}, \widehat{AOC}$ lần lượt là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung nhỏ AC, nên

$$\widehat{ADC} = \frac{1}{2} \widehat{AOC} = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$$

Xét $\triangle AID$ có: $\widehat{AID} + \widehat{DAI} + \widehat{ADI} = 180^\circ$ (định lý tổng các góc của một tam giác)

Suy ra $\widehat{AID} = 180^\circ - \widehat{DAI} - \widehat{ADI} = 180^\circ - 40^\circ - 30^\circ = 110^\circ$.

Vậy $\widehat{AID} = 110^\circ$.

b) Xét đường tròn (O) có $\widehat{ADC}$ và $\widehat{ABC}$ là hai góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ AC nên $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ hay $\widehat{ADI} = \widehat{CBI}$.

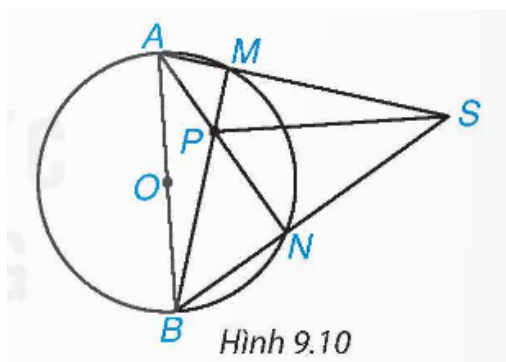
Xét $\triangle AID$ và $\triangle CIB$ có:

$\widehat{AID} = \widehat{CIB}$ (hai góc đối đỉnh); $\widehat{ADI} = \widehat{CBI}$ (chứng minh trên).

Do đó $\triangle AID \sim \triangle CIB$ (g.g).

Suy ra $\frac{IA}{IC} = \frac{ID}{IB}$ (tỉ số các cạnh tương ứng) hay $IA \cdot IB = IC \cdot ID$.

9.5. Cho đường tròn (O), đường kính AB và điểm S nằm ngoài (O). Cho hai đường thẳng SA, SB lần lượt cắt (O) tại M (khác A) và N (khác B). Gọi P là giao điểm của BM và AN (H.9.10). Chứng minh rằng SP vuông góc với AB.



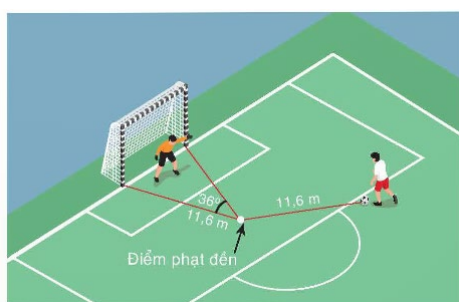
Lời giải

Xét đường tròn (O) có: $\widehat{AMB}$ và $\widehat{ANB}$ đều là góc nội tiếp cùng chắn nửa đường tròn nên $\widehat{AMB} = 90^\circ$ và $\widehat{ANB} = 90^\circ$. Suy ra $BM \perp AM$ và $AN \perp BN$. Hay $BM \perp AS$ và $AN \perp BS$.

Xét $\triangle ABS$ có AN, BM là hai đường cao ($BM \perp AS$ và $AN \perp BS$) cắt nhau tại P nên P là trực tâm của $\triangle ABS$, suy ra $SP \perp AB$.

Vậy $SP \perp AB$.

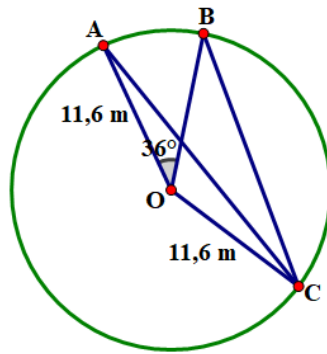
9.6. Trên sân bóng, khi quả bóng được đặt tại điểm phạt đền thì có góc sút bằng 36° và quả bóng cách mỗi cọc gôn 11,6m (H.9.11). Hỏi khi quả bóng đặt ở vị trí cách điểm phạt đền 11,6m thì góc sút bằng bao nhiêu?



Hình 9.11

Lời giải

Hình vẽ dưới đây minh họa cho bài toán trên với A, B lần lượt là các cọc gôn, C là vị trí đặt bóng và O là vị trí điểm phạt đền.



Vì $OA = OB = OC = 11,6m$ nên A, B, C cùng thuộc đường tròn $(O; 11,6m)$.

Xét đường tròn $(O; 11,6m)$ có $\widehat{ACB}, \widehat{AOB}$ lần lượt là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung nhỏ AB nên $\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 36^\circ = 18^\circ$.

Vậy khi quả bóng đặt ở vị trí cách điểm phạt đến 11,6m thì góc sút bằng 18° .

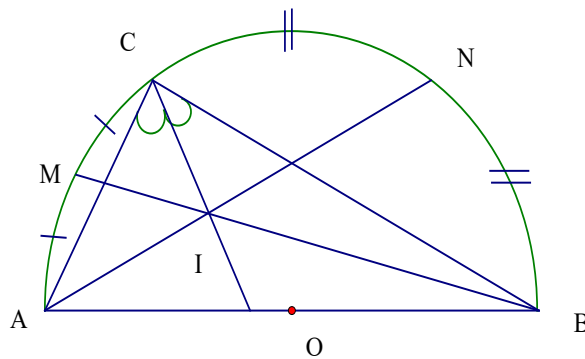
D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và dây AC căng cung AC có số đo bằng 60° .

a) So sánh các góc của $\triangle ABC$.

b) Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của các cung AC và BC , hai dây AN và BM cắt nhau tại I . Chứng minh rằng CI là tia phân giác của $\widehat{ACB}$.

Lời giải

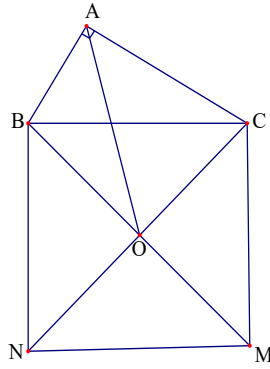


a) Ta có: $\widehat{AC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{B} < \widehat{A} < \widehat{C}$

b) AN là phân giác của góc A , BM là phân giác của góc B nên CI là phân giác của góc C (đpcm)

Bài 2. Trên cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC về phía ngoài ta dựng hình vuông với tâm tại điểm O . Chứng minh rằng AO là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

Lời giải



Vì O là tâm của hình vuông nên $\widehat{BOC} = 90^\circ$.

Lại có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ suy ra bốn điểm A, B, O, C cùng nằm trên đường tròn đường kính BC .

Đối với đường tròn này ta thấy $\widehat{BAO} = \widehat{BCO}$ (cùng chắn $\widehat{BO}$).

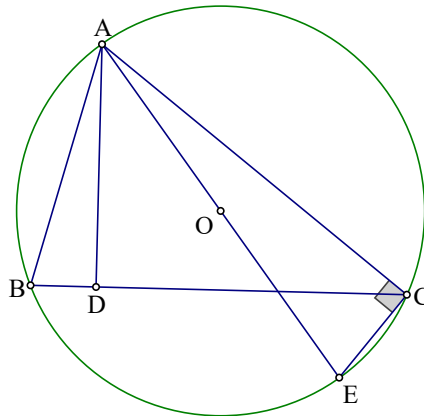
Mà $\widehat{BCO} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BAO} = 45^\circ$.

Do $\widehat{BAC} = 90^\circ$, nên $\widehat{CAO} = \widehat{BAC} - \widehat{BAO} = 45^\circ$.

Vậy $\widehat{BAO} = \widehat{CAO}$, nghĩa là AO là tia phân giác của góc vuông $\widehat{BAC}$ (đpcm).

Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Vẽ AD là đường cao của tam giác ABC . Chứng minh rằng $\widehat{BAD} = \widehat{OAC}$.

Lời giải



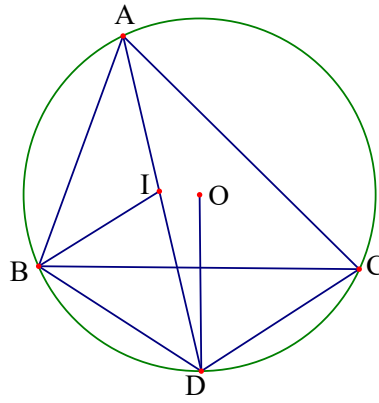
Dựng đường kính AE của đường tròn $(O; R)$.

Ta có $\widehat{AEC} = \widehat{ABD}$ (cùng chắn cung AC)

suy ra $\triangle DBA \sim \triangle CEA$, từ đó suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{OAC}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) . Đường phân giác trong góc A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại D . Gọi I là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh $DB = DC = DI$

Lời giải



Ta luôn có $DB = DC$ do AD là phân giác trong góc A . Ta sẽ chứng minh tam giác DIB cân tại D .

Thật vậy ta có: $\widehat{IBD} = \widehat{IBC} + \widehat{CBD}$.

Mặt khác $\widehat{CBD} = \widehat{CAD}$ (Góc nội tiếp chắn cung CD)

mà $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$, $\widehat{IBC} = \widehat{IBA}$ (Tính chất phân giác)

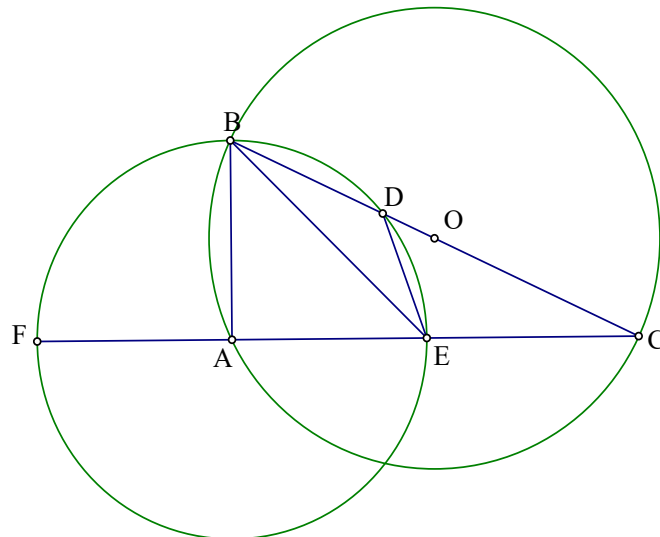
suy ra $\widehat{IBD} = \widehat{ABI} + \widehat{BAI}$.

Nhưng $\widehat{BID} = \widehat{ABI} + \widehat{BAI}$ (Tính chất góc ngoài).

Như vậy tam giác BDI cân tại $D \Rightarrow DB = DI = DC$

Bài 5. Cho tam giác ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) và $AB < AC$. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AB cắt BC tại D , cắt AC tại E . Chứng minh rằng $DB \cdot CB = EB^2$.

Lời giải



Giả sử CA cắt (O) tại F thì EF là đường kính của $(A; AB)$,

ta có $\widehat{BF} = \widehat{BE}$ (vì $BA \perp EF$) $\Rightarrow \widehat{BED} = \widehat{BFD}$,

$$\widehat{BCF} \equiv \widehat{BCE} = \frac{1}{2} \text{sđ}(\widehat{BF} - \widehat{DE}) = \frac{1}{2} \text{sđ}(\widehat{BE} - \widehat{DE}) = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{BD} = \widehat{BFD}$$

Từ đó suy ra $\widehat{BED} = \widehat{ECB}$.

Xét tam giác $\triangle BCE, \triangle BED$ có

$\widehat{B}$ chung,

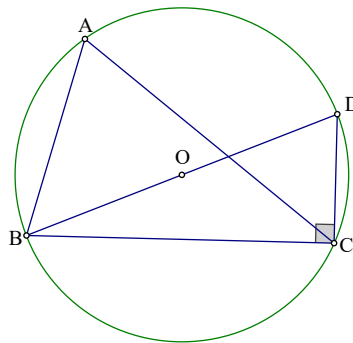
$$\widehat{BED} = \widehat{ECB}$$

$$\Rightarrow \triangle BCE \sim \triangle BED \Leftrightarrow \frac{BC}{BE} = \frac{BE}{BD} \Rightarrow DB \cdot CB = EB^2.$$

Bài 6. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}$ nhọn nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$. Chứng minh rằng:

$$BC = 2R \sin \widehat{BAC}.$$

Lời giải



Vẽ đường kính BD của đường tròn $(O; R) \Rightarrow \widehat{BCD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\triangle BCD$ có $\widehat{C} = 90^\circ$ nên $BC = BD \sin \widehat{BDC}$.

Ta lại có $BD = 2R; \widehat{BDC} = \widehat{BAC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BC}$) nên $BC = 2R \sin \widehat{BAC}$.

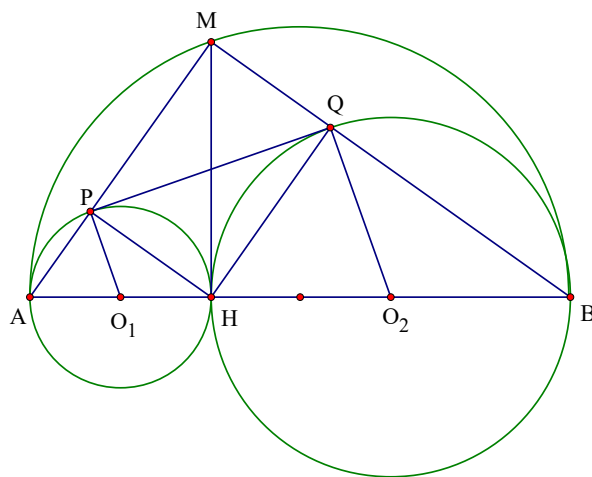
Bài 7. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Lấy M là điểm tùy ý trên nửa đường tròn (M khác A và B). Kẻ MH vuông góc với AB ($H \in AB$). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn (O) vẽ hai nửa đường tròn tâm O_1 , đường kính AH và tâm O_2 , đường kính BH . Đoạn MA và MB cắt hai nửa đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại P và Q . Chứng minh rằng:

a) $MH = PQ$.

b) $\triangle MPQ \sim \triangle MBA$.

c) PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1) và (O_2) .

Lời giải



a) Ta có: $\diamond MPHQ$ là hình chữ nhật $\Rightarrow MH = PQ$

b) Xét các tam giác vuông AHM và BHM ta có: $MP \cdot MA = MQ \cdot MB \Rightarrow \triangle MPQ \sim \triangle MBA (cgc)$

c) $\widehat{PMH} = \widehat{MBH} \Rightarrow \widehat{PQH} = \widehat{O_2QB} \Rightarrow PQ$ là tiếp tuyến của O_2

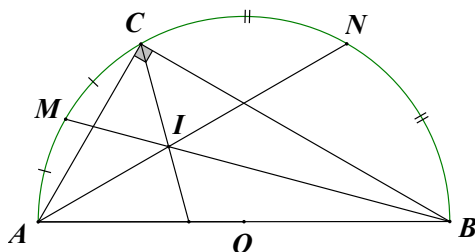
Chứng minh tương tự ta có PQ là tiếp tuyến của O_1 .

Bài 8. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và dây AC căng cung AC có số đo bằng 60° .

a) So sánh các góc của $\triangle ABC$;

b) Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của các cung AC và BC. Hai dây AN và BM cắt nhau tại điểm I. Chứng minh rằng CI là tia phân giác của góc ACB.

Hướng dẫn giải



Hình 174

a. Dùng định lý góc nội tiếp và hệ quả của nó để tính

Đáp số: $\widehat{A} < \widehat{B} < \widehat{C}$ ($30^\circ < 60^\circ < 90^\circ$).

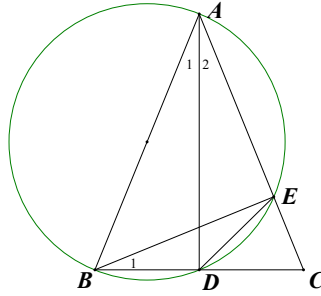
b. Bạn hãy chứng minh các tia AN, BM là tia phân giác của các góc A và B suy ra tia CI là tia phân giác của góc C .

Bài 9. Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^\circ$). Vẽ đường tròn đường kính AB cắt BC tại D, cắt AC tại E. Chứng minh rằng:

a) Tam giác DBE cân;

b) $\widehat{CBE} = \frac{1}{2} \widehat{BAC}$

Hướng dẫn giải

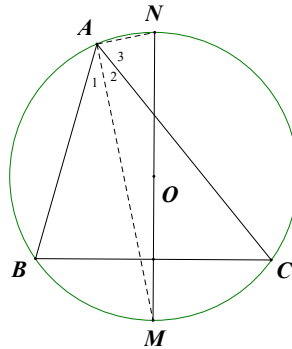


Hình 175

- a. $\widehat{ADB} = 90^\circ \Rightarrow AD \perp BC$, do đó AD cũng là đường phân giác, suy ra $\widehat{DB} = \widehat{DE} \Rightarrow DB = DE \Rightarrow \triangle DBE$ cân.
- b. $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_2$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DE) $\Rightarrow \widehat{B}_1 = \frac{1}{2} \widehat{BAC}$.

Bài 10. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Vẽ đường kính $MN \perp BC$ (điểm M thuộc cung BC không chứa A). Chứng minh rằng các tia AM , AN lần lượt là các tia phân giác trong và ngoài tại đỉnh A của $\triangle ABC$.

Hướng dẫn giải



Hình 176

$$MN \perp BC \Rightarrow \widehat{MB} = \widehat{MC} \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2.$$

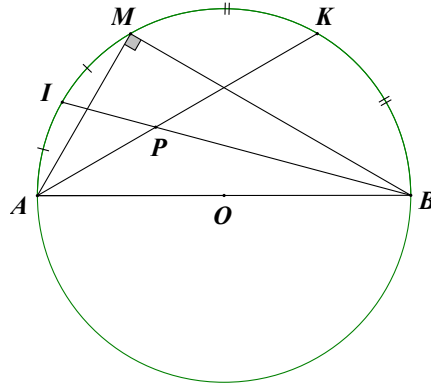
Mặt khác, $\widehat{MAN} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Mà AM là phân giác trong góc A , nên AN là phân giác ngoài góc A

Bài 11. Cho đường tròn (O) và hai dây MA , MB vuông góc với nhau. Gọi I và K lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ MA , MB . Gọi P là giao điểm của AK và BI .

- a) Chứng minh rằng ba điểm A , O , B thẳng hàng.
- b) Chứng minh rằng P là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$.
- c*) Giả sử $MA = 12\text{cm}$, $MB = 16\text{cm}$, tính bán kính của đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$.

Hướng dẫn giải



Hình 177

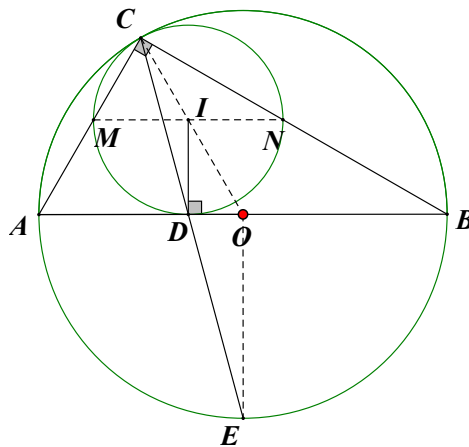
- a. $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB} = 2.90^\circ = 180^\circ \Rightarrow A, O, B$ thẳng hàng.
- b. Ta có $\widehat{KAM} = \widehat{KAB}; \widehat{IBM} = \widehat{IBA}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).
 Vậy AK, BI là hai đường phân giác của $\triangle MAB$. Giao điểm P của hai đường phân giác này là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$.
- c. Gọi r là bán kính của đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$, a là cạnh huyền và p là nửa chu vi của tam giác đó.
 Ta có $r = p - a$ (xem bài 6.5 chương Đường tròn). Áp dụng định lý Pi-ta-go vào tam giác vuông MAB ta tính được $AB = 20$ cm. Từ đó suy ra $r = 24 - 20 = 4$ (cm).

Bài 12. Cho đường tròn (O) đường kính AB và một điểm C di động trên nửa đường tròn đó. Vẽ đường tròn (I) tiếp xúc với đường tròn (O) tại C và tiếp xúc với đường kính AB tại D, đường tròn này cắt CA và CB lần lượt tại các điểm thứ hai là M và N.

Chứng minh rằng:

- a) Ba điểm M, I, N thẳng hàng.
 b) $ID \perp MN$.
 c) Đường thẳng CD đi qua một điểm cố định, từ đó suy ra cách dựng đường tròn I nói trên.

Hướng dẫn giải



Hình 178

- a. Xét đường tròn (O) có $\widehat{ACB} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{MCN} = 90^\circ$.
 Xét đường tròn (I) có $\widehat{MCN} = 90^\circ$, suy ra M, I, N thẳng hàng.

b. Đường tròn (O) và (I) tiếp xúc với nhau tại C suy ra O, I, C thẳng hàng.

$$\triangle ICN \text{ cân} \Rightarrow \widehat{INC} = \widehat{ICN};$$

$$\triangle OCB \text{ cân} \Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB}.$$

Suy ra $\widehat{INC} = \widehat{OBC}$, dẫn tới $MN \parallel AB$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

Ta có $ID \perp AB$ (tính chất của tiếp tuyến), do đó $ID \perp MN$.

c. Ta có $\widehat{DM} = \widehat{DN}$ suy ra $\widehat{MCD} = \widehat{NCD}$. Gọi E là giao điểm của đường thẳng CD với đường tròn (O) , ta được $\widehat{EA} = \widehat{EB}$. Vậy E là điểm chính giữa của nửa đường tròn đường kính AB (nửa này không chứa điểm C). Do đó đường thẳng CD luôn đi qua một điểm cố định. Ta suy ra cách dựng đường tròn (I) như sau:

- Dựng bán kính $OE \perp AB$ (E thuộc nửa đường tròn không chứa C).
- Nối CE cắt AB tại D .
- Từ điểm D dựng một đường thẳng vuông góc với AB cắt OC tại I .
- Dựng đường tròn $(I; ID)$ đó là đường tròn phải dựng.

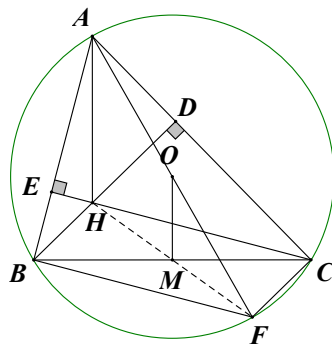
Bài 13. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H . Vẽ đường kính AF .

a) Tứ giác $BFCH$ là hình gì?

b) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng ba điểm H, M, F thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng: $OM = \frac{1}{2} AH$

Hướng dẫn giải



Hình 179

- a. Bạn hãy chứng minh $\widehat{ABF} = \widehat{ACF} = 90^\circ$ để suy ra $CE \parallel BF$ và $BD \parallel CF$, dẫn tới tứ giác $BHCF$ là hình bình hành.
- b. Dùng tính chất hai đường chéo của hình bình hành cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.
- c. Dùng tính chất đường trung bình của tam giác AHF .

Bài 14. Cho đường tròn (O) đường kính AB , M là điểm chính giữa của một nửa đường tròn, C là điểm bất kì trên nửa đường tròn kia, CM cắt AB tại D . Vẽ dây AE vuông góc với CM tại F .

a) Chứng minh rằng tứ giác $ACEM$ là hình thang cân.

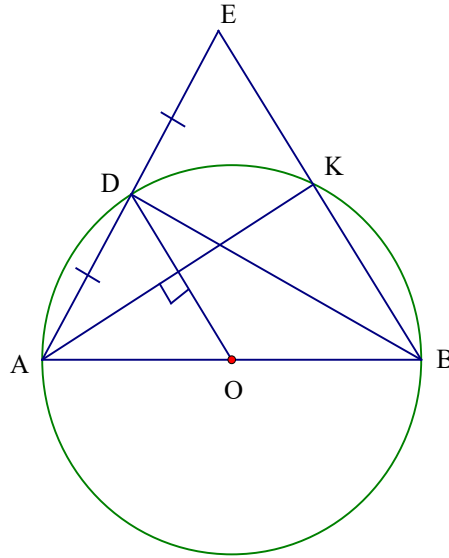
b) Vẽ $CH \perp AB$, chứng minh rằng tia CM là phân giác của góc HCO .

Bài 3. Cho đường tròn (O), đường kính AB, điểm D thuộc đường tròn. Gọi E là điểm đối xứng với A qua D.

a) Tam giác ABE là tam giác gì?

b) Gọi K là giao điểm của EB với (O). Chứng minh $OD \perp AK$.

Lời giải



a) Xét $\triangle ABE$ có BD đồng thời là đường cao, đường trung tuyến nên $\triangle ABE$ cân tại B.

b) Xét $\triangle ABE$ có OD là đường trung tuyến $\Rightarrow OD \parallel BE$

mà: $AK \perp BE$ ($\widehat{AKB} = 90^\circ$) $\Rightarrow AK \perp OD$

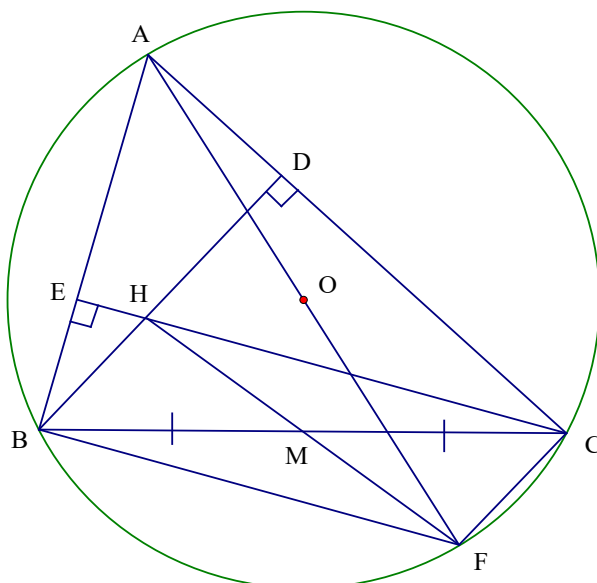
Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Vẽ đường kính AF.

a) Tứ giác BFCH là hình gì?

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm H, M, F thẳng hàng.

c) Chứng minh $OM = \frac{1}{2}AH$.

Lời giải



a) Tứ giác BFCH có các cạnh đối song song nên là hình bình hành.

b) Tứ giác BHCF là hình bình hành mà M là trung điểm của BC nên M là trung điểm của HF $\Rightarrow H, M, F$ thẳng hàng.

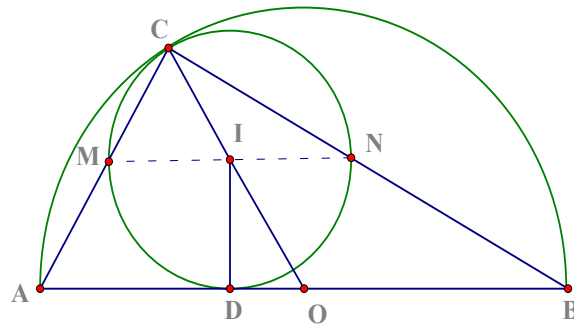
c) Xét $\triangle AHF$ có OM là đường trung bình của $\triangle AHF \Rightarrow OM = \frac{1}{2} AH$.

Bài 5. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và điểm C di động trên nửa đường tròn đó. Vẽ đường tròn (I) tiếp xúc với đường tròn (O) tại C và tiếp xúc với đường kính AB tại D, đường tròn này cắt CA, CB lần lượt tại các điểm thứ hai là M và N. Chứng minh rằng:

a) M, N, I thẳng hàng.

b) $ID \perp MN$.

Lời giải



a) $\widehat{ACB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MCN} = 90^\circ$

Xét (I), có: $\widehat{ACB} = 90^\circ \Rightarrow N, M, I$ thẳng hàng

b) Đường tròn (O) và (I) tiếp xúc với nhau tại C nên O, I, C thẳng hàng

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ICN \rightarrow \widehat{INC} = \widehat{ICN} \\ \triangle OCB \rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{INC} = \widehat{OBC} \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow MN \parallel AB \\ ID \perp AB (t.c. tiếp.tuyến) \end{array} \right\} \Rightarrow ID \perp MN$$

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường cao BM, CN cắt nhau tại H và cắt đường tròn lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh rằng A là điểm chính giữa cung FE.

b) Chứng minh rằng $EF \parallel MN$.

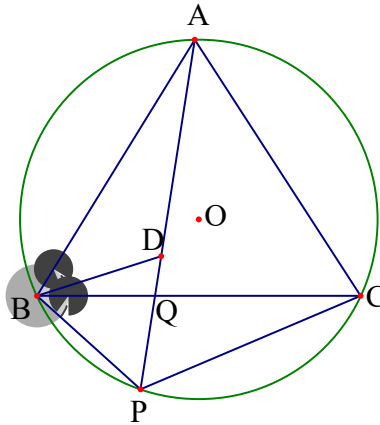
c) Chứng minh rằng $OA \perp MN$.

d) Chứng minh rằng AH không đổi khi A di động trên cung lớn BC.

e) Chứng minh rằng F đối xứng với H qua AB.

Lời giải

Lời giải



a) Trước tiên ta nhận thấy rằng tam giác PBD cân tại P .

Mặt khác, $\widehat{BPD} = \widehat{BPA} = \widehat{BCA} = 60^\circ$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AB}$ của đường tròn (O)).

Vậy nên tam giác PDB đều.

b) Ta đã có $PB = PD$, vậy để chứng minh $PA = PB + PC$ ta sẽ chứng minh $DA = PC$.

Thật vậy, xét hai tam giác BPC và BDA có: $BA = BC$ (giả thiết), $BD = BP$ (do tam giác BPD đều).

Lại vì $\widehat{ABD} + \widehat{DBC} = 60^\circ$, $\widehat{PBC} + \widehat{DBC} = 60^\circ$ nên $\widehat{ABD} = \widehat{PBC}$.

Từ đó $\triangle BPC = \triangle BDA$ (c.g.c), dẫn đến $DA = PC$ (đpcm).

c) Xét hai tam giác PBQ và PAC ta thấy $\widehat{BPQ} = 60^\circ$, $\widehat{APC} = \widehat{ABC} = 60^\circ$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AC}$) suy ra $\widehat{BPQ} = \widehat{APC}$, $\widehat{PBQ} = \widehat{PBC} = \widehat{PAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{PC}$).

Từ đó $\triangle PBQ \sim \triangle PAC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{PQ}{PB} = \frac{PC}{PA}$, hay $PQ \cdot PA = PB \cdot PC$.

Theo kết quả câu b, ta có $PA = PB + PC$ nên $PQ(PB + PC) = PB \cdot PC$.

Hệ thức này tương đương với $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$ (đpcm).

BÀI 28. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP CỦA MỘT TAM GIÁC.

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

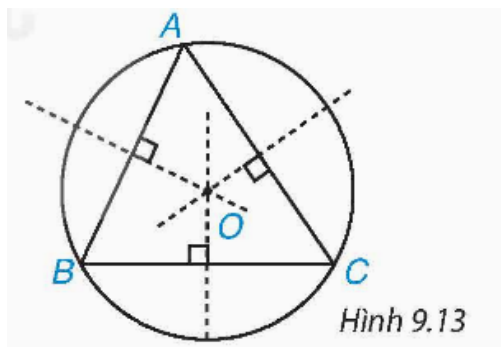
1. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP MỘT TAM GIÁC

Khái niệm đường tròn ngoại tiếp tam giác

Định nghĩa:

Đường tròn ngoại tiếp một tam giác là đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác đó.

Trong Hình 9.13, đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC . Ta cũng nói tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , hay (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tâm O là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác ABC .

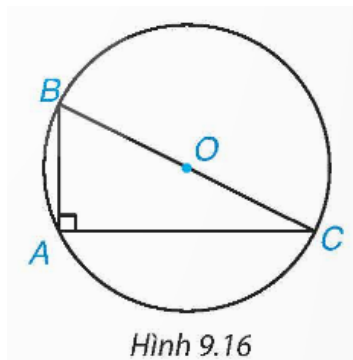


Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông

Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông có tâm là trung điểm của cạnh huyền và bán kính bằng một nửa cạnh huyền.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 2\text{ cm}$, $AC = 4\text{ cm}$. Vẽ đường tròn $(O; R)$ ngoại tiếp tam giác ABC và tính bán kính R .

Lời giải



Lấy O là trung điểm của BC và vẽ đường tròn (O) đi qua A . Khi đó, (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Theo định lý Pythagore, ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4 + 16 = 20$ nên $BC = 2\sqrt{5}(\text{cm})$.

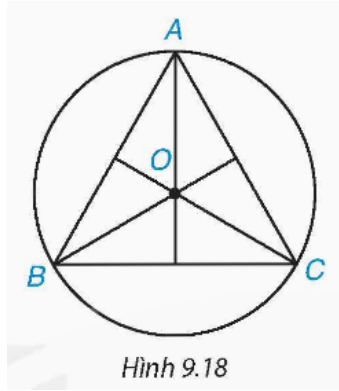
Vậy đường tròn (O) có bán kính $R = \frac{BC}{2} = \sqrt{5}\text{ cm}$.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều

Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh a có tâm là trọng tâm của tam giác đó và bán kính bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

Ví dụ 2. Cho tam giác đều ABC có độ dài cạnh bằng 3 cm . Vẽ đường tròn $(O; R)$ ngoại tiếp tam giác ABC . Tính bán kính R .

Lời giải



Hình 9.18

Lấy O là giao điểm của ba đường trung tuyến của tam giác ABC và vẽ đường tròn (O) đi qua A . Đường tròn (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính $R = \frac{\sqrt{3}}{3} BC = \sqrt{3} \text{ cm}$.

2. ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP MỘT TAM GIÁC

Đường tròn nội tiếp tam giác

Tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác được gọi là đường tròn nội tiếp tam giác. Tam giác đó được gọi là ngoại tiếp đường tròn. Tâm đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm ba đường phân giác của tam giác.

Chú ý:

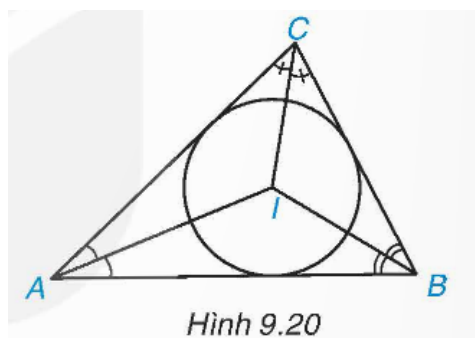
Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác nghĩa là tiếp xúc với đường thẳng chứa cạnh đó và có tiếp điểm nằm trên cạnh đó.

Đường tròn nội tiếp tam giác đều

Đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a có tâm là trọng tâm của tam giác đó và bán kính bằng $\frac{\sqrt{3}}{6} a$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . Biết rằng $\hat{A} = 40^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$. Tính số đo của các góc BIC , CIA và AIB .

Lời giải



Hình 9.20

Vì tổng ba góc của tam giác ABC bằng 180° nên $\widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{BAC} - \widehat{ABC} = 80^\circ$.

Vì tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) nên I là giao điểm các đường phân giác của tam giác ABC .

Do đó, ta có: $\widehat{CAI} = \widehat{BAI} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = 20^\circ$; $\widehat{CBI} = \widehat{ABI} = \frac{\widehat{ABC}}{2} = 30^\circ$; $\widehat{ACI} = \widehat{BCI} = \frac{\widehat{ACB}}{2} = 40^\circ$. Vì tổng các

góc trong tam giác BIC bằng 180° nên $\widehat{BIC} = 180^\circ - \widehat{CBI} - \widehat{BCI} = 180^\circ - 30^\circ - 40^\circ = 110^\circ$.

Tương tự, $\widehat{CIA} = 180^\circ - \widehat{ACI} - \widehat{CAI} = 120^\circ$ và $\widehat{AIB} = 180^\circ - \widehat{ABI} - \widehat{BAI} = 130^\circ$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. XÁC ĐỊNH TÂM VÀ TÍNH BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP, NỘI TIẾP TAM GIÁC

1. Phương pháp

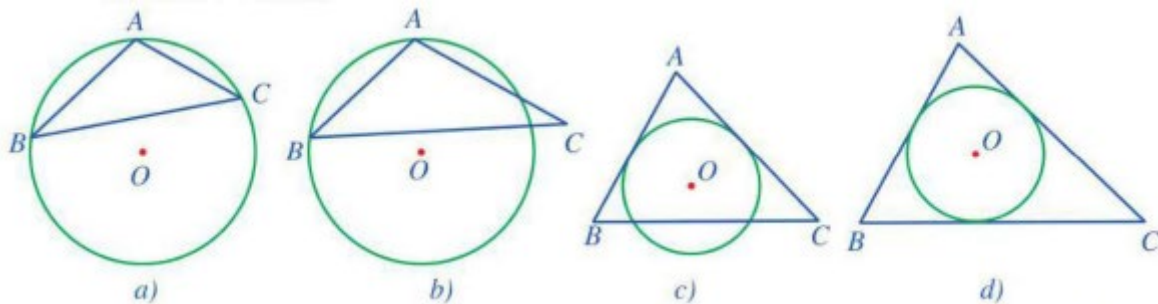
- Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông có tâm là trung điểm cạnh huyền và bán kính bằng nửa cạnh huyền của tam giác vuông đó.

- Trong một tam giác đều, trọng tâm của tam giác đồng thời là tâm của đường tròn ngoại và nội tiếp tam giác đó.

- Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và bán kính đường tròn nội tiếp là $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình vẽ sau :



a) Hình nào có đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC ? Giải thích?

b) Hình nào có đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC ? Giải thích?

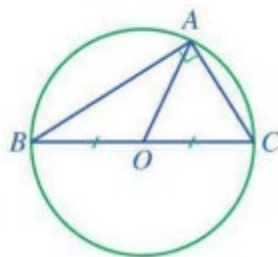
Lời giải

a) Hình $a)$, đường tròn (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vì nó đi qua ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC .

b) Hình $d)$, đường tròn (O) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC vì nó tiếp xúc ba cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC .

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 10\text{cm}$ và $AC = \sqrt{21}\text{cm}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Lời giải



Xét ABC vuông tại A , theo pythagore ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 10^2 + (\sqrt{21})^2$$

$$BC^2 = 121$$

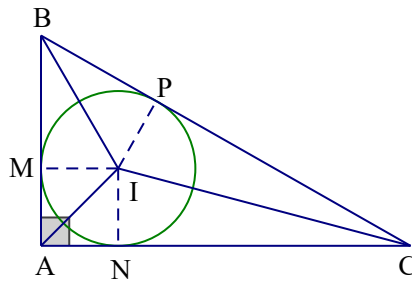
$$\Rightarrow BC = \sqrt{121} = 11(cm)$$

Tam giác ABC vuông tại A nên bán kính R đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng nửa cạnh huyền

$$BC \text{ hay } R = \frac{BC}{2} = \frac{11}{2} = 5,5(cm)$$

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có $AB = 6cm$ và $AC = 8cm$ ngoại tiếp đường tròn $(I; r)$. Tính r

Lời giải



Đường tròn $(I; r)$ tiếp xúc với các cạnh AB, AC, BC theo thứ tự M, N, P

$$\text{Ta có: } S_{AIB} = \frac{1}{2} IM \cdot AB = \frac{1}{2} r \cdot AB (1); S_{AIC} = \frac{1}{2} IN \cdot AC = \frac{1}{2} r \cdot AC (2); S_{BIC} = \frac{1}{2} r \cdot BC (3)$$

$$\text{Cộng (1)(2)(3) về theo về, ta được: } \frac{S_{AIB} + S_{AIC} + S_{BIC}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2} r \cdot (AB + AC + BC)$$

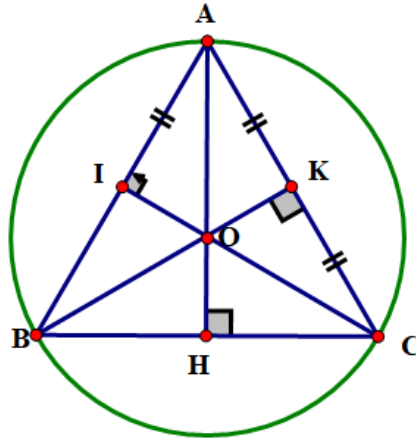
$$\text{Mà } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 (cm^2), BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 (cm)$$

$$\text{Nên ta có: } 24 = \frac{1}{2} r (6 + 8 + 10) \Rightarrow r = 2 (cm).$$

Ví dụ 4. Xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC có cạnh bằng a .

Lời giải

Gọi O là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác đều ABC thì O đồng thời cũng là trọng tâm và trực tâm của tam giác. Ta có $OA = OB = OC = \frac{2}{3} AH$ (H là chân đường cao kẻ từ A) (Xem hình vẽ).



Do đó O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC .

Mặt khác, xét tam giác AHB vuông tại H.

Theo định lí Pythagore, ta có: $AB^2 = AH^2 + HB^2 \Rightarrow AH^2 = AB^2 - HB^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AO = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ (Tính chất trọng tâm)}$$

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh a có tâm là trọng tâm tam giác và có bán kính $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

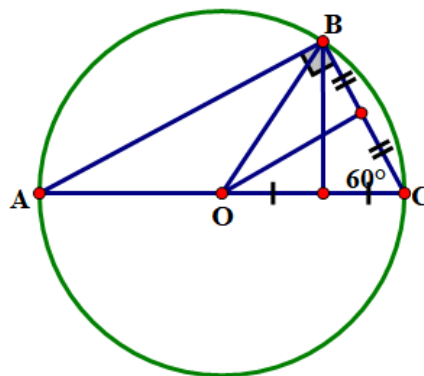
Ví dụ 5. Cho tam giác ABC vuông tại B có $\widehat{C} = 60^\circ$, $BC = 3\text{ cm}$ và O là trung điểm AC . Xác định tâm, bán kính và vẽ đường tròn ngoại tiếp của:

a) $\triangle ABC$;

b) $\triangle BCO$.

Lời giải

a) (Xem hình vẽ).



Tam giác ANC vuông tại B có $\widehat{C} = 60^\circ$ nên tam giác ABC là nửa tam giác đều

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = 30^\circ \Rightarrow AC = 2BC = 2.3 = 6(\text{cm}).$$

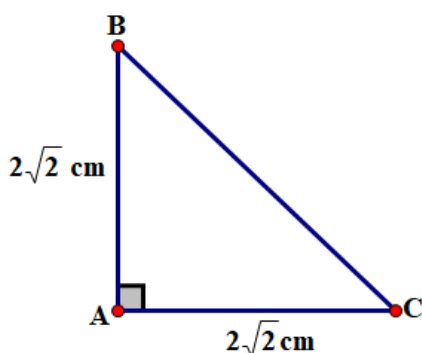
Theo bài toán 1 ta có bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $\frac{AC}{2} = \frac{6}{2} = 3(\text{cm})$ và tâm O là trung điểm cạnh huyền AC .

b) Dễ thấy tam giác BCD đều (Theo bài toán 2).

Gọi I là trọng tâm của tam giác BCD , ta có I là tâm của đường tròn ngoại tiếp vì cạnh của tam giác đều BCD là $3(\text{cm})$ nên bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều BCD là $\frac{3\sqrt{3}}{3}$ (Xem lời giải bài toán 2).

Ví dụ 6. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC . Tính bán kính của (O) , biết rằng ABC vuông cân tại A và có cạnh bằng $2\sqrt{2} \text{ cm}$.

Lời giải



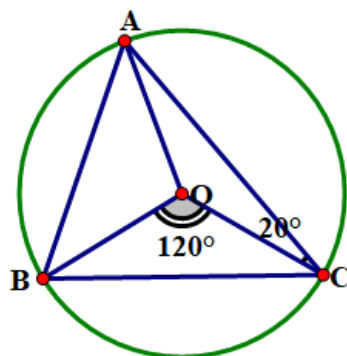
Ta có tam giác ABC vuông cân tại A (gt).

Theo định lý Pythagore, ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 \Rightarrow BC = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4(\text{cm})$

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông ABC có độ dài bằng nửa cạnh huyền BC tức là $2(\text{cm})$.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Biết rằng $\widehat{BOC} = 120^\circ$ và $\widehat{OCA} = 20^\circ$. Tính số đo các góc của tam giác ABC .

Lời giải



Xét đường tròn (O) , ta có:

$\widehat{BAC}$ và $\widehat{BOC}$ là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung BC nên $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$.

Tam giác BOC cân tại O có góc ở đỉnh $\widehat{BOC} = 120^\circ$ (gt).

$$\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \frac{180^\circ - \widehat{BOC}}{2} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$

Do đó $\widehat{BCA} = \widehat{OCB} + \widehat{OCA} = 30^\circ + 20^\circ = 50^\circ$.

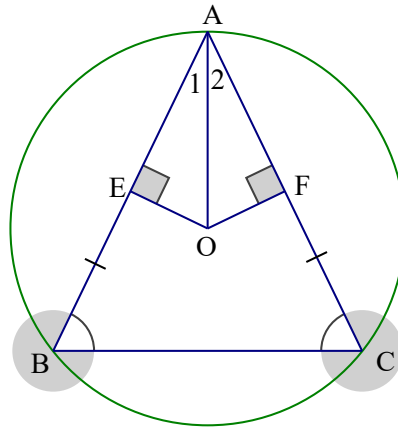
Xét tam giác ABC, ta có: $\widehat{ABC} = 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{BCA}) = 180^\circ - (60^\circ + 50^\circ) = 70^\circ$.

Vậy số đo các góc của tam giác ABC là: $\widehat{BAC} = 60^\circ$; $\widehat{ABC} = 70^\circ$ và $\widehat{BCA} = 50^\circ$

DẠNG 2. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP, NỘI TIẾP TAM GIÁC

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu của (O) lên AB và AC. Chứng minh rằng AO là tia phân giác của $\widehat{BAC}$

Lời giải



Ta có: $\triangle ABC$ cân tại A $\Rightarrow AB = AC \Rightarrow OE = OF$

Xét hai tam giác vuông AOE và AOF, có:

+ OA: cạnh chung

+ OE = OF : Chứng minh trên

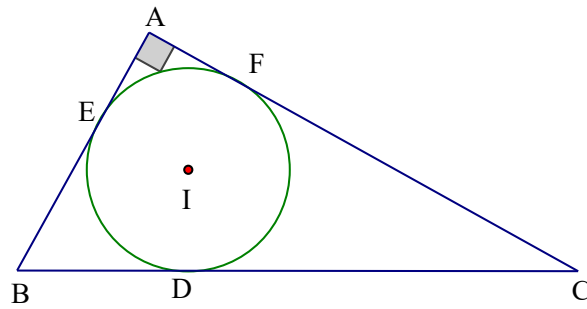
$$\Rightarrow \triangle AOE = \triangle AOF \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \\ AE = AF \end{cases} \Rightarrow AO \text{ là phân giác của } \widehat{BAC}$$

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A $\widehat{BAC} = 90^\circ$ ($AB \leq AC$). Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D. Chứng minh rằng:

a) $BD = \frac{BC + AB - AC}{2}$

b) $S_{ABC} = BD \cdot DC$

Lời giải



a) Gọi E, F là tiếp điểm của đường tròn (I) với các cạnh AB, AC

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $AE = AF; BE = BD; CD = CF$

Do đó: $2BD = BD + BE = BC - CD + AB - AE = BC + AB - (CD + AE) = BC + AB - (CF + AF)$

$$= BC + AB - AC \Rightarrow BD = \frac{BC + AB - AC}{2}$$

b) Tương tự câu a) ta có: $DC = \frac{BC + AC - AB}{2}$

mà $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ($\triangle ABC$ vuông tại A), do đó: $BD \cdot DC = \frac{(BC + AB - AC)(BC + AC - AB)}{4}$

$$\frac{BC^2 - (AB - AC)^2}{4} = \frac{BC^2 - AB^2 - AC^2 + 2AB \cdot AC}{4} = \frac{AB \cdot AC}{2} = S_{ABC}.$$

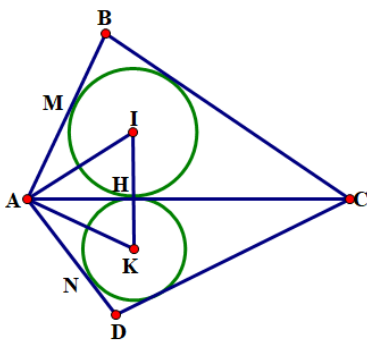
Ví dụ 3. Cho tứ giác ABCD có các tam giác ABC và ADC lần lượt ngoại tiếp các đường tròn (I) và (K) sao cho hai đường tròn này tiếp xúc với đường thẳng AC tại điểm H thuộc đoạn thẳng AC. Giả sử đường tròn (I) tiếp xúc với cạnh AB tại M, đường tròn (K) tiếp xúc với cạnh AD tại N (Hình vẽ). Chứng minh:

a) Ba điểm I, H, K thẳng hàng;

b) $AM = AN$;

c) $\widehat{IAK} = \frac{1}{2} \widehat{BAD}$.

Lời giải



a) Đường tròn (I) tiếp xúc với cạnh AC tại điểm H (gt) $\Rightarrow IH \perp AC$.

Tương tự đường tròn (K) tiếp xúc với cạnh AC tại điểm H $\Rightarrow KH \perp AC$.

$\Rightarrow$ Ba điểm I, H, K thẳng hàng.

b) Ta có đường tròn (I) tiếp xúc với cạnh AB tại M hay AM là tiếp tuyến của đường tròn (I).

lại có AH là tiếp tuyến của đường tròn (I) (cmt) $\Rightarrow AM = AH$ (*) (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Chứng minh tương tự, ta có $AH = AN$ (**)

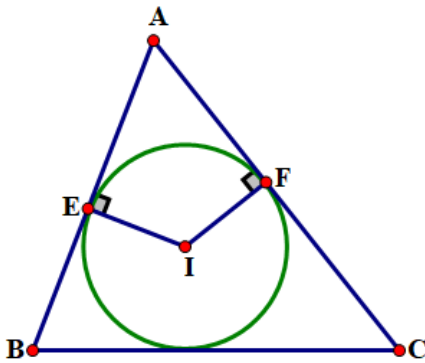
Từ (*) và (**) $\Rightarrow AM = AN$.

c) Ta có: $\widehat{IAK} = \widehat{IAH} + \widehat{HAK}$ mà $\widehat{IAH} = \frac{1}{2} \widehat{MAH}$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$$\widehat{HAK} = \frac{1}{2} \widehat{HAN} \Rightarrow \widehat{IAK} = \frac{1}{2} \widehat{HAN} = \frac{1}{2} (\widehat{MAH} + \widehat{HAN}) = \frac{1}{2} \widehat{MAN} \text{ hay } = \frac{1}{2} \widehat{BAD} \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 4. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC với các tiếp điểm trên các cạnh AB, AC lần lượt là E, F. Chứng minh rằng $\widehat{EIF} + \widehat{BAC} = 180^\circ$.

Lời giải



Ta có E, F lần lượt là hai tiếp điểm trên các cạnh AB và AC (gt) $\Rightarrow \widehat{AEI} = \widehat{AFI} = 90^\circ$

Xét tứ giác AEIF có $\widehat{AEI} + \widehat{AFI} = 180^\circ$.

$$\Rightarrow \widehat{EIF} + \widehat{BAC} = 360^\circ - (\widehat{AEI} + \widehat{AFI}) \widehat{EIF} + \widehat{BAC} = 180^\circ \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 5. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) đường kính $AD = 2R$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh:

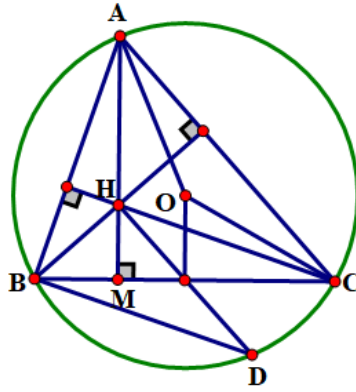
a) $DB \perp AC$ và $CD \perp AB$;

b) Tứ giác BHCD là hình bình hành;

c) $AC^2 + BH^2 = 4R^2$;

d) Ba điểm H, M, D thẳng hàng và $AH = 2OM$.

Lời giải



a) Xét tam giác ABD , ta có: $OB = OA = OD (= R)$ hay $OB = \frac{1}{2} AD$

Chứng tỏ $\triangle ABD$ vuông tại B hay $DB \perp AB$ (đpcm)

Chứng minh tương tự ta có $CD \perp AC$.

b) Ta có $BH \parallel DC$ (cùng vuông góc với AC). Tương tự $CH \parallel BD (\perp AB)$

$\Rightarrow$ Tứ giác BHCD là hình bình hành (các cạnh đối song song).

c) Ta có tam giác ACD vuông tại C (chứng minh trên) $\Rightarrow AC^2 + DC^2 = AD^2$ (định lý Pythagore)

Mà $DC = BH$ (cmt) $\Rightarrow AC^2 + BH^2 = AD^2 = (2R)^2 = 4R^2$.

d) * Ta có M là trung điểm của BC (gt) mà tứ giác BHCD là hình bình hành (cmt) nên đường chéo thứ hai HD phải qua trung điểm M hay ba điểm H, M, D thẳng hàng.

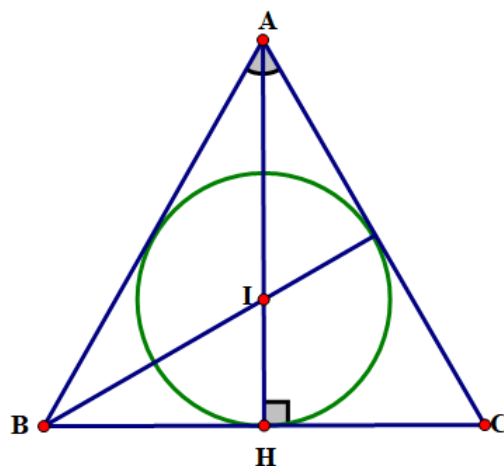
* Xét tam giác AHD có O là trung điểm của AD (gt)

M là trung điểm của HD (cmt) nên OM là đường trung bình của tam giác AHD $\Rightarrow AH = 2OM$.

DẠNG 3. TOÁN THỰC TẾ

Ví dụ 1. Một mảnh vườn có dạng tam giác đều ABC cạnh 12 cm . Người ta muốn trồng hoa ở phần đất bên trong đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tính diện tích phần đất trồng hoa đó.

Lời giải



Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC .

Kẻ đường cao AH , khi đó tâm I của đường tròn nội tiếp (giao điểm của ba đường phân giác cũng là trọng tâm).

Ta có AH là đường trung tuyến $\Rightarrow$ H là trung điểm của BC hay $BH = CH = \frac{BC}{2} = \frac{12}{2} = 6$ (m).

Xét tam giác BHI vuông tại H . Có $BH = 6$ cm và $\widehat{IBH} = 30^\circ$.

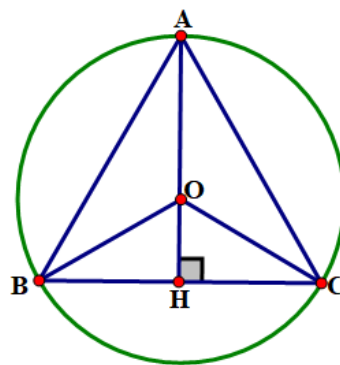
Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có: $IH = BH \cdot \tan IBH = 6 \cdot \tan 30^\circ = 2\sqrt{3}$ (m)

Vậy bán kính của phần đất trồng hoa là $r = 2\sqrt{3}$ (m)

Do đó diện tích phần đất trồng hoa là $S = \pi \cdot (2\sqrt{3})^2 = 12\pi$ (m²)

Ví dụ 2. Ba vị trí A,B,C ở một công viên là ba đỉnh của một tam giác đều cạnh 15 m . Người ta cần chọn vị trí O cách đều ba vị trí A,B,C để làm một cột đèn. Tính khoảng cách từ vị trí O đến mỗi vị trí A,B,C .

Lời giải



Gọi O là vị trí cách đều ba vị trí A,B,C nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (giao điểm của ba đường trung trực).

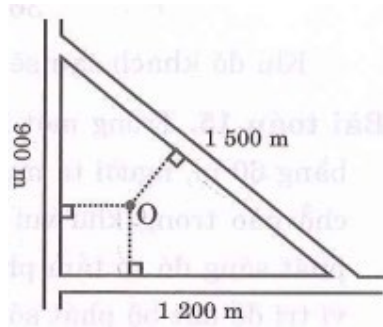
Do $\triangle ABC$ đều (gt) nên O đồng thời là trực tâm và trọng tâm của tam giác hay AH là đường cao của tam giác ABC

đều cạnh 15 m $\Rightarrow AH = \frac{15\sqrt{3}}{2}$ (m) vì AH đồng thời là trung tuyến của $\triangle ABC$ có trọng tâm O

$\Rightarrow OA = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{15\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ (m) .

Vậy khoảng cách từ vị trí O đến mỗi vị trí A,B,C là $5\sqrt{3}$ (m) .

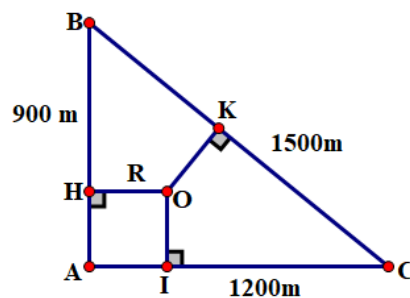
Ví dụ 3. Người ta vẽ bản quy hoạch của một khu định cư được bao xung quanh bởi ba con đường thẳng lập thành một tam giác với độ dài các cạnh là 900m,1200m và 1500 m (Hình vẽ).



a) Tính chu vi và diện tích của phần đất giới hạn bởi tam giác trên.

b) Họ muốn xây dựng một khách sạn bên trong khu dân cư cách đều cả ba con đường đó. Hỏi khi đó khách sạn sẽ cách mỗi con đường một khoảng là bao nhiêu?

Lời giải



a) Xét tam giác ABC, ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ($1500^2 = 900^2 + 1200^2$)

Theo định lý Pythagore đảo, tam giác ABC vuông tại A.

Phần đất giới hạn là tam giác vuông, gọi P là chu vi, ta có:

$$P = AB + BC + AC = 900 + 1500 + 1200 = 3600(m)$$

$$\text{Và diện tích } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 900 \cdot 1200 = 540000(m^2)$$

b) Gọi O là nơi xây dựng khách sạn và khoảng cách từ khách sạn đến ba con đường là $OH = OI = OK = R$.

Ta có: $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC}$ (trong đó $S_{AOB}, S_{AOC}, S_{BOC}$ lần lượt là diện tích các tam giác AOB, AOC và BOC)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} R \cdot AB + \frac{1}{2} R \cdot AC + \frac{1}{2} R \cdot BC$$

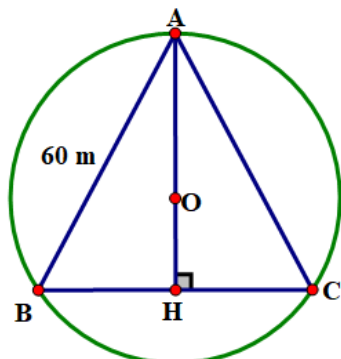
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} R (AB + AC + BC)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} R \cdot P \quad (S_{ABC} \text{ là diện tích } \triangle ABC \text{ và } P \text{ là chu vi}) \Rightarrow R = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{P} = \frac{2 \cdot 540000}{3600} = 300(m)$$

Khi đó khách sạn sẽ cách mỗi con đường 300 (m).

Ví dụ 4. Trong một khu vui chơi có dạng hình tam giác đều với cạnh bằng 60 m , người ta muốn tìm một vị trí đặt bộ phát sóng wifi sao cho ở chỗ nào trong khu vui chơi đó đều có thể bắt được sóng. Biết rằng bộ phát sóng đó có tầm phát sóng tối đa là 50 m . Hỏi rằng có thể tìm được vị trí để đặt bộ phát sóng như vậy hay không?

Lời giải



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Kẻ AH là đường cao vì $\triangle ABC$ đều nên đường cao đồng thời là đường trung tuyến nên H là trung điểm của BC, ta có: $HB = HC = \frac{BC}{2} = \frac{60}{2} = 30(\text{m})$

Tam giác AHC vuông tại H. Theo định lí Pythagore, ta có:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = 60^2 + 30^2 \Rightarrow AB = \sqrt{60^2 + 30^2} = 30\sqrt{3}(\text{m})$$

$$\text{Ta có: } OA = \frac{2}{3}AH \text{ (tính chất trọng tâm)} \Rightarrow OA = \frac{2}{3} \cdot 30\sqrt{3} = 20\sqrt{3}(\text{m})$$

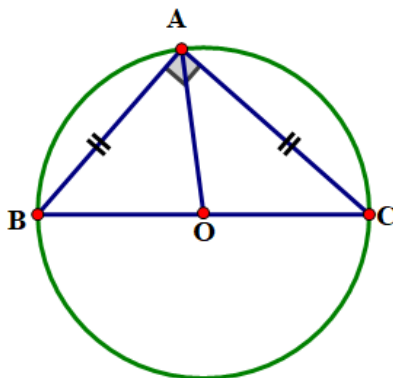
Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC cạnh 60 m là: $OA = 20\sqrt{3}(\text{m}) \approx 34,6(\text{m}) < 50(\text{m})$

Vậy có thể đặt vị trí bộ phát sóng tại O .

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

9.7. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC . Tính bán kính của (O) , biết rằng ABC là tam giác vuông cân tại A và có độ dài cạnh bên bằng $2\sqrt{2}$ cm .

Lời giải



Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên $AB = AC = 2\sqrt{2}$ cm .

Áp dụng định lí Pythagore vào $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

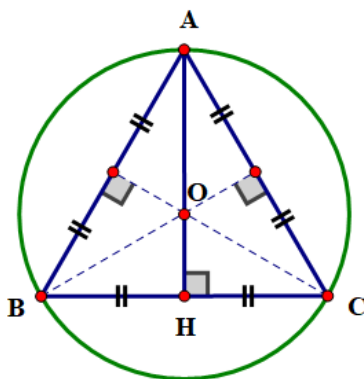
Do đó $BC^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 16$. Suy ra $BC = 4\text{ cm}$.

Vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông tại A nên bán kính của (O) bằng một nửa cạnh huyền BC .

Vậy bán kính của (O) là: $R = \frac{BC}{2} = \frac{4}{2} = 2(\text{cm})$.

9.8. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) . Biết rằng đường tròn (O) có bán kính bằng 3 cm . Tính diện tích tam giác ABC .

Lời giải



Vì tam giác ABC đều nên tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác là trọng tâm của tam giác đó và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác là $AO = \frac{\sqrt{3}}{3} BC$.

Theo bài, $AO = 3\text{ cm}$ nên $\frac{\sqrt{3}}{3} BC = 3$. Suy ra $BC = 3\sqrt{3}\text{ cm}$.

Gọi H là giao điểm của AO và BC . Khi đó AH vừa là đường trung trực, vừa là đường trung tuyến, cũng là đường cao của tam giác.

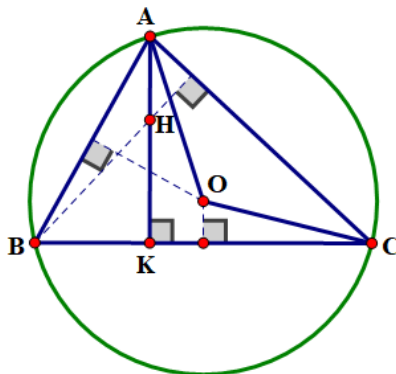
Ta có $AO = \frac{2}{3} AH$, suy ra $AH = \frac{3}{2} AO = \frac{3}{2} \cdot 3 = 4,5(\text{cm})$.

Diện tích của tam giác ABC là: $S = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 3\sqrt{3} = \frac{27\sqrt{3}}{4} (\text{cm}^2)$.

Vậy diện tích của tam giác ABC là $\frac{27\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$.

9.9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

Lời giải



Ta có $OA = OB$ (cùng bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp (O) của $\triangle ABC$) nên $\triangle OAC$ cân tại O , do đó $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$ (tính chất tam giác cân).

Lại có $\widehat{OAC} + \widehat{OCA} + \widehat{AOC} = 180^\circ$ (tổng ba góc của một tam giác). Suy ra $2\widehat{OAC} + \widehat{AOC} = 180^\circ$

$$\text{Nên } \widehat{OAC} = \frac{180^\circ - \widehat{AOC}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{AOC}}{2}. (1)$$

Gọi K là giao điểm của AH và BC . Khi đó AK là đường cao của tam giác ABC .

Xét $\triangle ABK$ vuông tại K có: $\widehat{ABK} + \widehat{BAK} = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn của tam giác vuông) Suy ra $\widehat{BAK} = 90^\circ - \widehat{ABK}$ hay $\widehat{BAH} = 90^\circ - \widehat{ABC}$. (2)

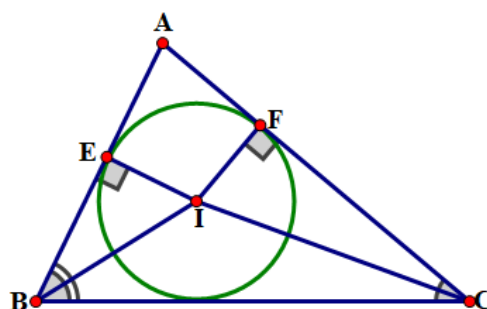
Mặt khác, xét đường tròn (O) có $\widehat{ABC}, \widehat{AOC}$ lần lượt là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AC nên $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$. (3)

$$\text{Từ (2) và (3) ta có } \widehat{BAH} = 90^\circ - \frac{\widehat{AOC}}{2}. (4)$$

Từ (1) và (4) ta có $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

9.10. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC với các tiếp điểm trên các cạnh AB, AC lần lượt là E, F . Chứng minh rằng $\widehat{EIF} + \widehat{BAC} = 180^\circ$.

Lời giải



Vì đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC với các tiếp điểm trên các cạnh AB, AC lần lượt là E, F nên $IE \perp AB$ và $IF \perp AC$. Do đó $\widehat{AEI} = \widehat{AFI} = 90^\circ$.

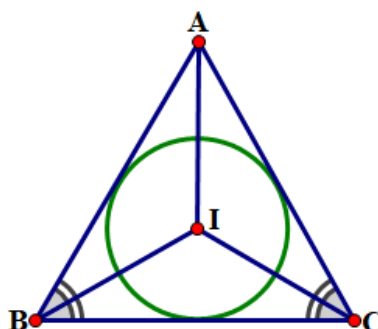
Xét tứ giác $AEIF$ có: $\widehat{BAC} + \widehat{AEI} + \widehat{AFI} + \widehat{EIF} = 360^\circ$ (tổng các góc của một tứ giác)

$$\text{Suy ra } \widehat{BAC} + \widehat{EIF} = 360^\circ - \widehat{AEI} - \widehat{AFI} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ.$$

Vậy $\widehat{EIF} + \widehat{BAC} = 180^\circ$.

9.11. Cho tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC biết rằng bán kính của (I) bằng 1cm .

Lời giải



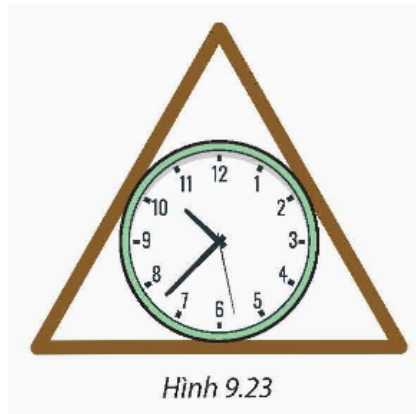
Gọi độ dài các cạnh của tam giác đều ABC là $a(\text{cm})$.

Vì tam giác ABC đều ngoại tiếp đường tròn ($l;r$) nên ta có $r = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a$

Theo bài, $r = 1\text{cm}$ nên $1 = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a$. Suy ra $a = 2\sqrt{3}(\text{cm})$.

Vậy độ dài các cạnh của tam giác ABC là $2\sqrt{3}\text{cm}$.

9.12. Người ta muốn làm một khung gỗ hình tam giác đều để đặt vừa khít một chiếc đồng hồ hình tròn có đường kính 30cm (H.9.23). Hỏi độ dài các cạnh (phía bên trong) của khung gỗ phải bằng bao nhiêu?



Hình 9.23

Lời giải

Gọi độ dài các cạnh phía bên trong của khung gỗ là $a(\text{cm})$.

Bán kính của chiếc đồng hồ hình tròn là: $r = 30 : 2 = 15(\text{cm})$.

Vì khung gỗ hình tam giác đều để đặt vừa khít chiếc đồng hồ nên đường tròn khung viền của đồng hồ nội tiếp tam giác chứa cạnh của khung gỗ và bán kính đường tròn này là $r = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a$.

Suy ra $15 = \frac{\sqrt{3}}{6} a$, suy ra $a = 30\sqrt{3}(\text{cm})$.

Vậy độ dài cạnh của tam giác (phía bên trong) của khung gỗ là $30\sqrt{3}\text{cm}$.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

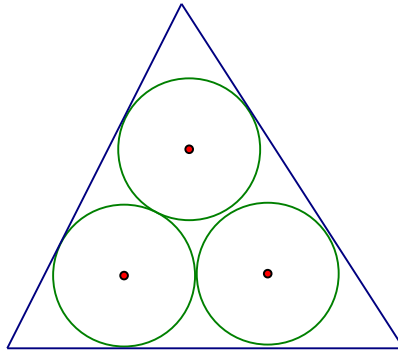
Bài 1. Một đường tròn có bán kính 3 cm . Tính diện tích hình vuông nội tiếp đường tròn đó.

Hướng dẫn giải

$$a = R\sqrt{2} = 3\sqrt{2}(\text{cm})$$

$$S = a^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18(\text{cm}^2)$$

Bài 2. Ba đường tròn tiếp xúc với nhau từng đôi một và tiếp xúc với các cạnh của tam giác như hình bên. Nếu mỗi đường tròn có bán kính là 3 , thì chu vi của tam giác sẽ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Từ tâm P và Q vẽ PQ và CQ vuông góc với cạnh AD của tam giác

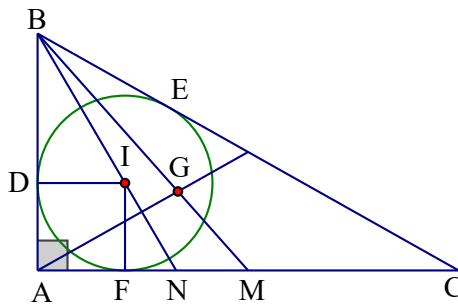
Các tam giác APB và DQC là nửa tam giác đều với $PB = QC = 3$

$$\Rightarrow AB = CD = 3\sqrt{3}; BC = PQ = 6 \Rightarrow AD = 6 + 6\sqrt{3}$$

Vậy chu vi tam giác là: $18 + 18\sqrt{3}$

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có $AB = 9\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp, G là trọng tâm của tam giác. Tính độ dài IG

Lời giải



Gọi D, E, F là tiếp điểm của đường tròn (I) với AB

$\triangle ABC$ vuông tại A , theo định lý Pytago ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15(\text{cm})$

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $AD = AF$; $BD = BE$; $CE = CF$

$$\text{Do đó } 2AD + 2BE + 2CE = AB + BC + CA = 9 + 12 + 15 = 36$$

$$\Leftrightarrow 2AD + 2BC = 36 \Leftrightarrow AD = 3(\text{cm}) \Rightarrow BD = 6(\text{cm}); DI = 3(\text{cm})$$

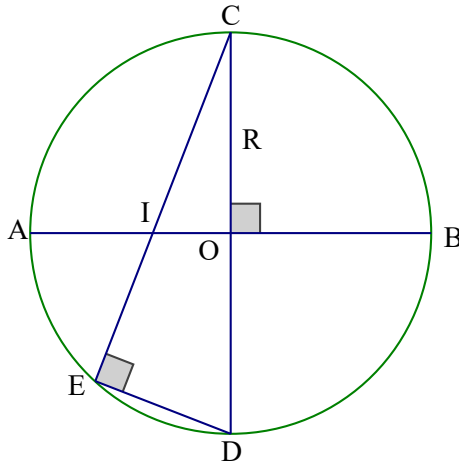
$$\text{Gọi } N = BI \cap AC, \text{ ta có: } \frac{BI}{BN} = \frac{BD}{BA} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = \frac{BG}{BM} \Rightarrow \begin{cases} IG \parallel NM \\ IG = \frac{2}{3} NM \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \triangle IDAF \text{ là hình vuông, có: } \frac{BD}{BA} = \frac{DI}{AN} = \frac{2}{3} \Rightarrow AN = 4,5(\text{cm})$$

$$\text{Mà } M \text{ là trung điểm của } AC \text{ nên: } NM = AM - AN = 6 - 4,5 = 1,5(\text{cm}) \Rightarrow IG = 1(\text{cm})$$

Bài 4. Cho đường tròn $(O; R)$ và hai đường kính vuông góc AB, CD . Trên bán kính AO lấy đoạn

$$AI = \frac{2AO}{3}, \text{ vẽ tia } CI \text{ cắt } (O) \text{ tại } E. \text{ Tính } R \text{ theo } CE$$



Lời giải

Ta có $AI = \frac{2AO}{3} = \frac{2R}{3} \Rightarrow OI = R - \frac{2R}{3} = \frac{R}{3}$

$\triangle OCI$ vuông tại O , ta có:

$$CI = \sqrt{OC^2 + OI^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{3}\right)^2} = \frac{R\sqrt{10}}{3}$$

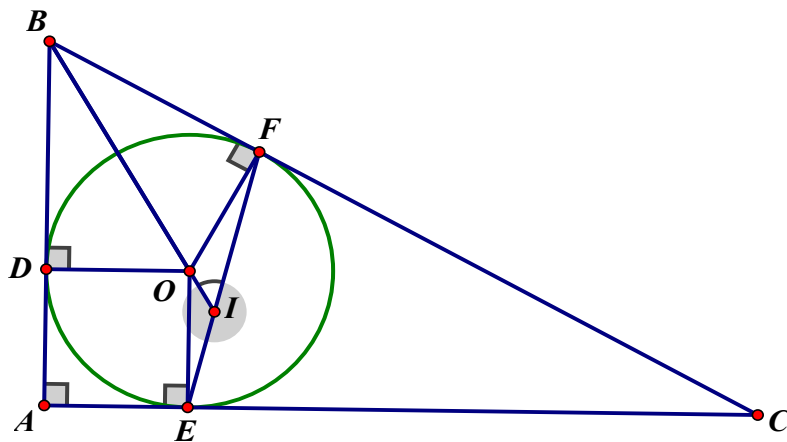
$\triangle CED$ nội tiếp đường tròn O có cạnh CD là đường kính $\Rightarrow \triangle CED$ vuông tại E

Hai tam giác vuông OCI và CED có $\hat{C}$: chung

$$\begin{aligned} \Rightarrow \triangle COI \sim \triangle CED &\Rightarrow \frac{CO}{CE} = \frac{CI}{CD} \Rightarrow CE = \frac{CO \cdot CD}{CI} \\ &= \frac{R \cdot 2R}{\frac{R\sqrt{10}}{3}} = \frac{6R}{\sqrt{10}} = \frac{3R\sqrt{10}}{5} \end{aligned}$$

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ngoại tiếp đường tròn (O) . Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của (O) với các cạnh AB, AC và BC . Đường thẳng BO cắt đường thẳng EF tại I . Tính $\widehat{BIF}$

Lời giải



Ta có: $\widehat{DEI} = \widehat{DEF} = \frac{1}{2} \widehat{DOF}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung DF).

Vì BD, BF là các tiếp tuyến của (O) lần lượt tại D, F nên OB là tia phân giác của $\widehat{DOF}$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau).

$$\Rightarrow \widehat{DOB} = \frac{1}{2} \widehat{DOF}$$

$$\Rightarrow \widehat{DEI} = \widehat{DOB}.$$

$\Rightarrow DEIO$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có góc ngoài bằng góc trong tại đỉnh đối diện).

Xét tứ giác $ODAE$ có $\widehat{ODA} = \widehat{DAE} = \widehat{OEA} = 90^\circ$ nên $ODAE$ là hình chữ nhật (tứ giác có 3 góc vuông).

Lại có AD, AE là các tiếp tuyến của (O) tại D, E nên $AD = AE$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow ODAE$ là hình vuông (hình chữ nhật có 2 cạnh kề bằng nhau) $\Rightarrow \widehat{ODE} = 45^\circ$.

Mà $DEIO$ là tứ giác nội tiếp (*cmt*).

$\Rightarrow \widehat{BIF} = \widehat{ODE} = 45^\circ$ (góc ngoài yà góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác nội tiếp).

Vậy $\widehat{BIF} = 45^\circ$.

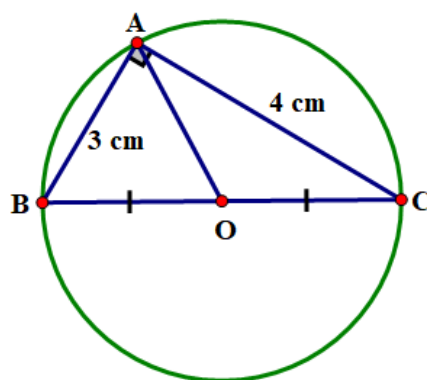
Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3\text{ cm}, AC = 4\text{ cm}$. Xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Lời giải

Gọi O là trung điểm của cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC .

Ta có AO là trung tuyến của tam giác vuông $OA = \frac{1}{2}BC = OB = OC$.

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường tròn tâm O là trung điểm của BC .



Vì tam giác ABC vuông tại A (gt).

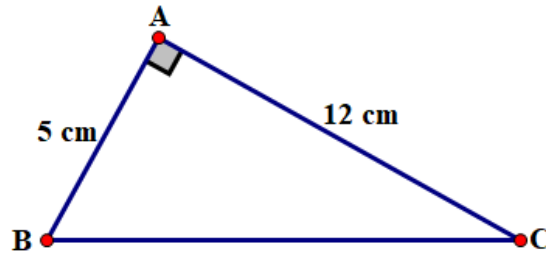
Theo định lý Pythagore, ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5(\text{cm})$

Vậy bán kính của đường tròn là $5 : 2 = 2,5(\text{cm})$.

Bài 7. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông tại A , biết $AB = 5\text{ cm}, AC = 12\text{ cm}$.

Lời giải

Tam giác ABC vuông tại A (gt).



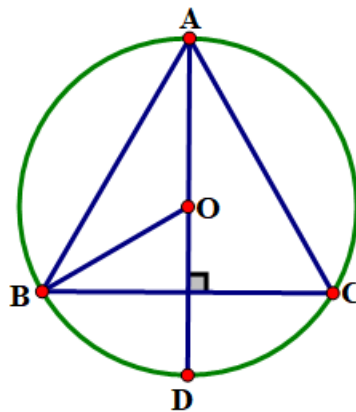
Theo định lí Pythagore, ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow BC = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13(\text{cm})$

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông tại A là: $\frac{BC}{2} = \frac{13}{2}(\text{cm})$ (nửa cạnh huyền BC)

Bài 8. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) . Biết rằng đường tròn (O) có bán kính bằng 3 cm . Tính diện tích tam giác ABC .

Lời giải

Kẻ đường cao AH vì tam giác ABC đều (gt) nên đường cao AH đồng thời là đường phân giác của góc BAC , ta có: $\widehat{BAH} = \widehat{CAH} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$. Kéo dài AH cắt đường tròn (O) tại D .



Khi đó $\widehat{BOD}$ và $\widehat{BAD}$ lần lượt là góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung BD
 $\Rightarrow \widehat{BOD} = 2\widehat{BAD} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$

Tam giác BHO vuông tại H có cạnh huyền $OB = 3 \text{ cm}$ (gt) và $\widehat{BOH} = 60^\circ$. Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có: $BH = OB \cdot \sin BOH = 3 \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}(\text{cm})$

Vì $\triangle ABC$ đều nên đường cao AH đồng thời là trung tuyến hay H là trung điểm của BC .

$$\Rightarrow BC = 2BH = 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}(\text{cm})$$

Xét tam giác AHB vuông tại H có cạnh huyền $AB = BC = 3\sqrt{3}(\text{cm})$ và góc $\widehat{BAH} = 30^\circ$ (cmt) .

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có: $AH = AB \cdot \cos BAH = 3\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = \frac{9}{2}(\text{cm})$

Gọi S_{ABC} là diện tích tam giác đều, ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{27\sqrt{3}}{4} (\text{cm}^2)$.

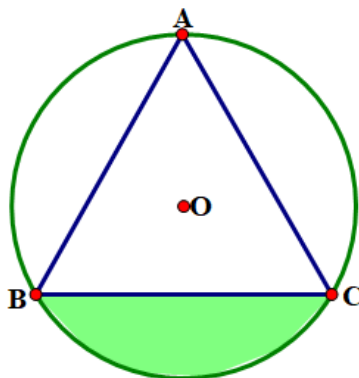
Bài 9. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 3 cm và nội tiếp đường tròn (O) như hình vẽ.

a) Tính bán kính R của đường tròn (O).

b) Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây cung BC và cung nhỏ BC.

Hướng dẫn: Ngoài cách giải như bài toán 2, chúng ta sẽ có cách khác như sau:

Lời giải



a) Kẻ đường cao AH của tam giác đều ABC có cạnh 3 cm ta có $AH = \frac{3\sqrt{3}}{4} (\text{cm})$.

Vì $\triangle ABC$ đều nên trực tâm O cùng trùng với trọng tâm, khi đó $OA = \frac{2}{3} \cdot AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} (\text{cm})$

Vậy bán kính R của đường tròn (O) là: $OA = \sqrt{3} (\text{cm})$

b) Gọi S_{ABC} là diện tích tam giác đều ABC cạnh 3 cm, ta có: $S_{ABC} = \frac{3^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4} (\text{cm}^2)$

Gọi S là diện tích hình tròn (O), ta có: $S = \pi \cdot (\sqrt{3})^2 = 3\pi (\text{cm}^2)$

Do đó diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây cung BC và cung nhỏ BC là:

$$S_{vp} = \frac{1}{3} \left(3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4} \right) \approx 1,8 (\text{cm}^2).$$

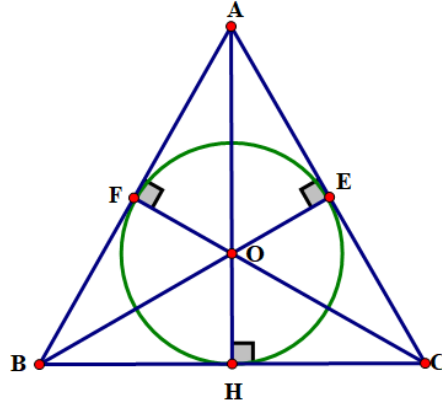
Bài 10. Xác định tâm và bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC có độ dài cạnh bằng a.

Lời giải

Ta có tam giác ABC đều.

Gọi O là trực tâm của tam giác đồng thời là giao điểm ba đường phân giác trong.

Vậy O là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC. Ta có: $\widehat{BAH} = \widehat{CAH} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.



Xét tam giác AHB vuông tại H có cạnh huyền $AB = a$, $\widehat{BAH} = 30^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có: $AH = AB \cdot \cos BAH = a \cdot \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

(**Lưu ý:** Có thể kết luận ngay $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ vì $\triangle ABC$ đều cạnh a).

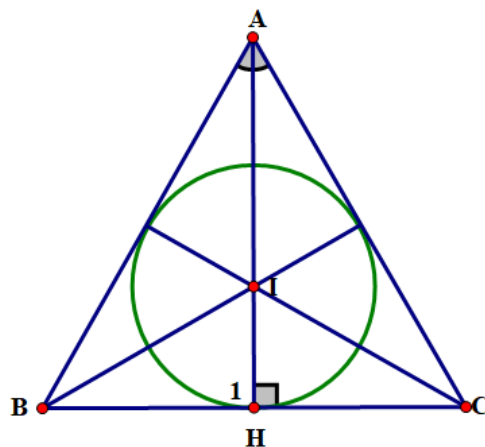
Mặt khác tam giác ABC đều nên trực tâm O cũng là trọng tâm $\Rightarrow OH = \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Vậy bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a bằng $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Nhận xét: Trong tam giác đều tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn ngoại tiếp trùng nhau.

Bài 11. Cho tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC biết rằng bán kính của (I) bằng 1 cm.

Lời giải



I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC nên I là giao điểm của ba đường phân giác và I đồng thời là trọng tâm của tam giác đều ABC, khi đó AH là đường trung tuyến, ta có:

$$AI = 2IH = 2 \cdot 1 = 2(\text{cm}) \Rightarrow BI = CI = AI = 2(\text{cm})$$

Xét tam giác BHI vuông tại H, có cạnh huyền $BI = 2(\text{cm})$, góc $\widehat{IBH} = 30^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$BH = BI \cdot \cos \angle IBH = 2 \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}(\text{cm}) \Rightarrow BC = 2 \cdot BH = 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}(\text{cm})$$

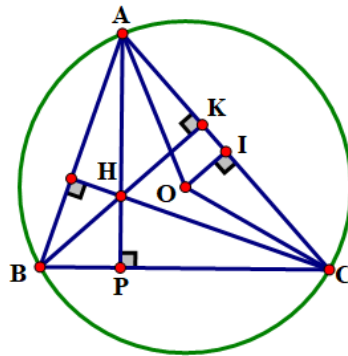
Độ dài các cạnh của tam giác đều ABC ngoại tiếp (I,1) bằng $2\sqrt{3}(\text{cm})$.

Bài 12. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

Lời giải

Gọi OI là đường cao của tam giác AOC cân tại O, ta có OI đồng thời là đường phân giác của góc AOC

$$\text{hay } \widehat{AOI} = \widehat{COI} = \frac{\widehat{AOC}}{2}.$$



Xét đường tròn (O), ta có: $\widehat{ABC}$ và $\widehat{AOC}$ lần lượt là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AC nên

$$\widehat{ABC} = \frac{\widehat{AOC}}{2} \text{ hay } \widehat{ABC} = \widehat{AOI}$$

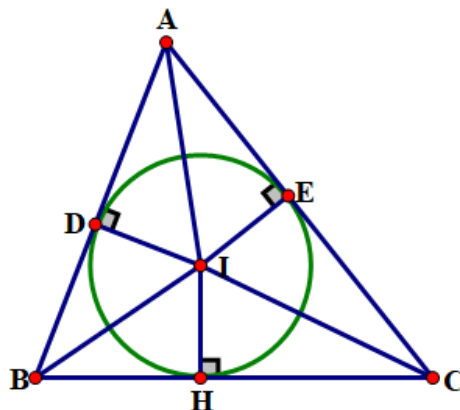
Hai tam giác APB và tam giác AIO đều vuông tại P và I mà $\widehat{ABP} = \widehat{AOI}$ (chứng minh trên)

$$\Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{OAC} \text{ (cùng phụ với hai góc bằng nhau).}$$

Bài 13. Cho tam giác ABC có diện tích S và ngoại tiếp đường tròn (I; r). Chứng minh rằng

$$S = \frac{1}{2}r(BC + CA + AB).$$

Lời giải



Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp $(I; r)$ với các cạnh AB, AC và BC của tam giác ABC.

$$\text{Ta có: } S = S_{\triangle IAB} + S_{\triangle IAC} + S_{\triangle IBC} = \frac{1}{2} ID \cdot AB + \frac{1}{2} IE \cdot AC + \frac{1}{2} IF \cdot BC$$

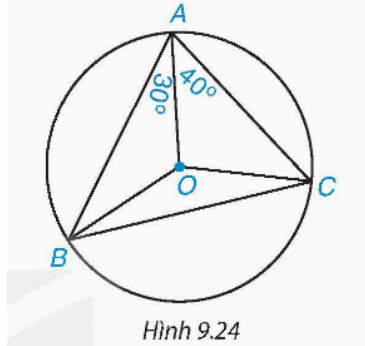
$$\text{Mà } ID = IE = IF = r \Rightarrow S = \frac{1}{2} r (BC + CA + AB) \text{ (đpcm)}$$

LUYỆN TẬP CHUNG

A. VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Biết rằng $\widehat{OAB} = 30^\circ$, $\widehat{OAC} = 40^\circ$. Hãy tính số đo của các góc ABC và ACB .

Lời giải



Hình 9.24

Vì $OA = OB$ nên tam giác OAB cân tại O . Suy ra $\widehat{OBA} = \widehat{OAB} = 30^\circ$.

Do tổng các góc trong tam giác OAB bằng 180° nên $\widehat{AOB} = 180^\circ - \widehat{OAB} - \widehat{OBA} = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$.

Tương tự, tam giác OAC cân tại O vì $OA = OC$. Do đó $\widehat{OCA} = \widehat{OAC} = 40^\circ$.

Vì tổng các góc trong tam giác OAC bằng 180° nên $\widehat{AOC} = 180^\circ - \widehat{OAC} - \widehat{OCA} = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ$.

Xét đường tròn (O) ta có

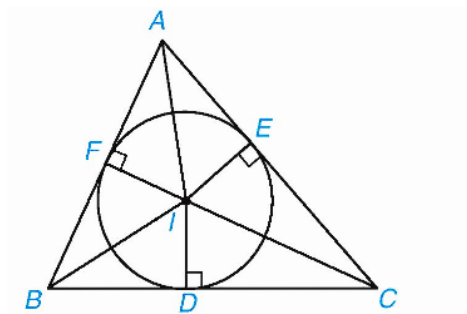
Vì góc nội tiếp ABC và góc ở tâm AOC cùng chắn cung nhỏ AC nên $\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{AOC} = 50^\circ$;

Vì góc nội tiếp ACB và góc ở tâm AOB cùng chắn cung nhỏ AB nên $\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = 60^\circ$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có diện tích S và ngoại tiếp đường tròn $(I; r)$. Chứng minh rằng

$$S = \frac{1}{2} r(BC + CA + AB).$$

Lời giải



Hình 9.25

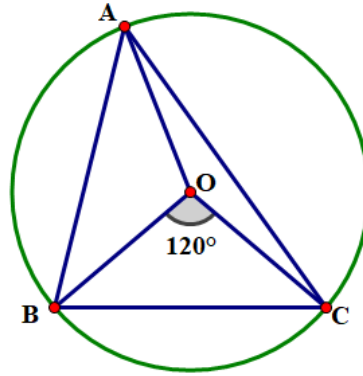
Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn $(I; r)$ với BC, CA và AB .

$$\text{Ta có: } S = S_{BIC} + S_{CIA} + S_{AIB} = \frac{1}{2} ID \cdot BC + \frac{1}{2} IE \cdot CA + \frac{1}{2} IF \cdot AB = \frac{1}{2} r(BC + CA + AB).$$

BÀI TẬP

9.13. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Biết rằng $\widehat{BOC} = 120^\circ$ và $\widehat{OCA} = 20^\circ$. Tính số đo các góc của tam giác ABC .

Lời giải



Vì tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) nên $OA = OB = OC$.

Xét $\triangle OAC$ có $OA = OC$ nên $\triangle OAC$ cân tại O , suy ra $\widehat{OAC} = \widehat{OCA} = 20^\circ$.

Lại có $\widehat{OAC} + \widehat{OCA} + \widehat{AOC} = 180^\circ$ (tổng các góc của một tam giác)

Suy ra $\widehat{AOC} = 180^\circ - \widehat{OAC} - \widehat{OCA} = 180^\circ - 20^\circ - 20^\circ = 140^\circ$.

Xét đường tròn (O) có:

$\widehat{ABC}, \widehat{AOC}$ lần lượt là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AC nên: $\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{AOC} = \frac{1}{2} \cdot 140^\circ = 70^\circ$

$\widehat{BAC}, \widehat{BOC}$ lần lượt là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung BC nên: $\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC} = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$

Xét $\triangle ABC$ có: $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$ (tổng các góc của một tam giác)

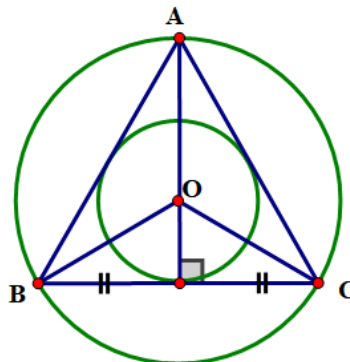
Suy ra $\widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{BAC} - \widehat{ABC} = 180^\circ - 60^\circ - 70^\circ = 50^\circ$.

Vậy $\widehat{BAC} = 60^\circ; \widehat{ABC} = 70^\circ; \widehat{ACB} = 50^\circ$.

9.14. Cho tam giác đều ABC có độ dài cạnh bằng 4cm . Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Lời giải

Vẽ đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác đều ABC .



Vì tam giác ABC đều nên đường tròn (O) có tâm là trọng tâm của tam giác và có bán kính là

$$R = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 4 = \frac{4\sqrt{3}}{3} (\text{cm}).$$

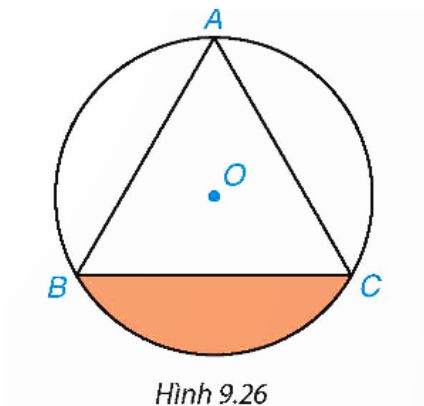
Mặt khác, ta đã biết đường tròn nội tiếp tam giác đều có tâm là trọng tâm của tam giác đó, nên trọng tâm O cũng là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó.

Khi đó bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $r = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 4 = \frac{2\sqrt{3}}{3}(\text{cm})$.

9.15. Cho tam giác đều ABC có độ dài cạnh bằng 3cm và nội tiếp đường tròn (O) như Hình 9.26.

a) Tính bán kính R của đường tròn (O) .

b) Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây cung BC và cung nhỏ BC .

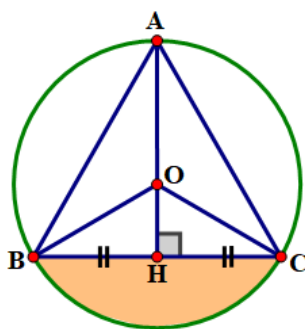


Hình 9.26

Lời giải

a) Đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác đều ABC nên có bán kính là $R = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3 = \sqrt{3}(\text{cm})$.

b)



Do $\triangle ABC$ là tam giác đều nên $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} = 60^\circ$.

Xét đường tròn (O) có $\widehat{BAC}, \widehat{BOC}$ lần lượt là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung BC nên

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC}, \text{ suy ra } \widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ.$$

Do đó cung nhỏ BC có số đo bằng 120° .

Diện tích hình quạt tròn bán kính $R = \sqrt{3}\text{cm}$ ứng với cung nhỏ BC có số đo bằng 120° là:

$$S_q = \frac{n\pi R^2}{360} = \frac{120 \cdot \pi \cdot (\sqrt{3})^2}{360} = \pi (\text{cm}^2).$$

Gọi H là giao điểm của AO và BC . Khi đó AH vừa là đường trung trực, vừa là đường phân giác, cũng là đường cao của tam giác.

Vì BO là phân giác của góc ABC nên $\widehat{OBH} = \frac{1}{2} \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$.

Xét $\triangle OBH$ vuông tại H , có: $OH = OB \cdot \sin \widehat{OBH} = R \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}(\text{cm})$

Diện tích của tam giác OBC là: $S_{OBC} = \frac{1}{2} OH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 = \frac{3\sqrt{3}}{4} (\text{cm}^2)$.

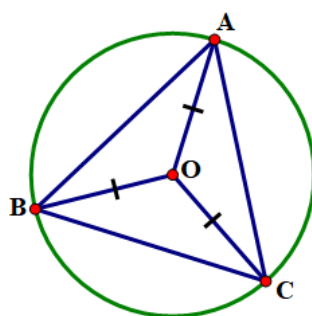
Gọi S là diện tích viên phân giới hạn bởi dây cung BC và cung nhỏ BC .

Ta có: $S = S_{OBC} - S_q = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{4} (\text{cm}^2)$.

Vậy hình viên phân giới hạn bởi dây cung BC và cung nhỏ BC có diện tích bằng $\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4} (\text{cm}^2)$.

9.16. Trong một khu vui chơi có dạng hình tam giác đều với độ dài cạnh bằng 60m , người ta muốn tìm một vị trí đặt bộ phát sóng wifi sao cho ở chỗ nào trong khu vui chơi đó đều có thể bắt được sóng. Biết rằng bộ phát sóng đó có tầm phát sóng tối đa là 50m , hỏi có thể tìm được vị trí để đặt bộ phát sóng như vậy hay không?

Lời giải



Gọi O là vị trí đặt cục phát wifi; ba điểm A, B, C là ba đỉnh của khu vui chơi có dạng hình tam giác đều cạnh bằng 60m . Khi đó $AB = BC = CA = 60\text{m}$.

Để vị trí đặt bộ phát sóng wifi sao cho ở chỗ nào trong khu vui chơi đó đều có thể bắt được sóng thì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Do đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 60 = 20\sqrt{3} \approx 34,64(\text{m})$.

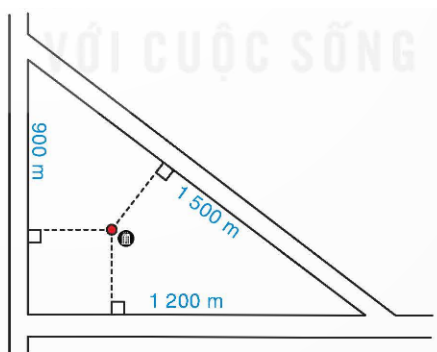
Ta thấy $R < 50(\text{m})$ nên bộ phát sóng đặt ở O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì cả khu vui chơi đó đều có thể bắt được sóng.

9.17. Người ta vẽ bản quy hoạch của một khu dân cư được bao xung quanh bởi ba con đường thẳng lập thành một tam giác với độ dài các cạnh là $900\text{m}, 1200\text{m}$ và 1500m (H.9.27).

a) Tính chu vi và diện tích của phần đất giới hạn bởi tam giác trên.

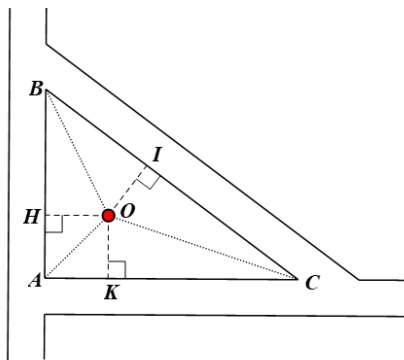
b) Họ muốn xây dựng một khách sạn bên trong khu dân cư cách đều cả ba con đường đó. Hỏi khi đó khách sạn

sẽ cách mỗi con đường một khoảng là bao nhiêu?



Hình 9.27

Lời giải



Gọi A, B, C là ba đỉnh của khu dân cư sao cho $AB = 900\text{m}$, $BC = 1500\text{m}$ và $AC = 1200\text{m}$.

Xét $\triangle ABC$ có:

$$- AB^2 + AC^2 = 900^2 + 1200^2 = 2250000;$$

$$- BC^2 = 1500^2 = 2250000.$$

Do đó $AB^2 + AC^2 = BC^2$, nên theo định lý Pythagore đảo ta có $\triangle ABC$ vuông tại A .

a) Chu vi của phần đất giới hạn bởi tam giác ABC là: $AB + BC + CA = 900 + 1500 + 1200 = 3600(m)$

Diện tích của phần đất giới hạn bởi tam giác trên là: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 900 \cdot 1200 = 540000(m^2)$

b) Gọi O là vị trí xây dựng khách sạn; H, I, K lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ O đến AB, BC, CA .

Vì vị trí xây dựng khách sạn cách đều cả ba con đường nên $OH = OI = OK$.

$$\text{Mặt khác, } S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot OH \cdot AB; S_{OBC} = \frac{1}{2} \cdot OI \cdot BC; S_{OCA} = \frac{1}{2} \cdot OK \cdot CA.$$

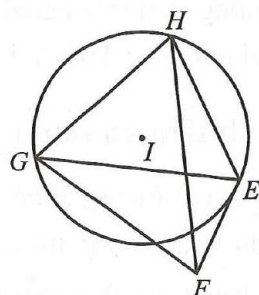
$$\text{Mà } S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA}. \text{ Suy ra } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot OH \cdot AB + \frac{1}{2} \cdot OI \cdot BC + \frac{1}{2} \cdot OK \cdot CA$$

$$\text{Do đó } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot OH \cdot (AB + BC + CA). \text{ Nên } OH = \frac{2S_{ABC}}{AB + BC + CA} = \frac{2 \cdot 540000}{3600} = 300(m).$$

Vậy khách sạn sẽ cách mỗi con đường một khoảng là 300 mét.

B. BÀI TẬP THÊM

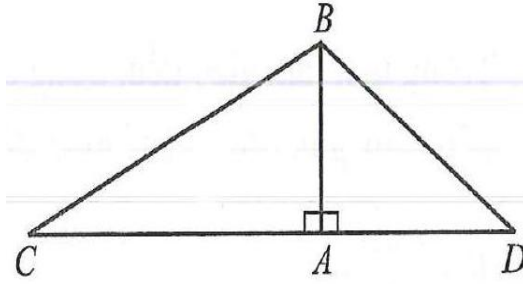
Bài 1: Quan sát Hình 3 và cho biết một tam giác nội tiếp đường tròn (I) và ba tam giác không nội tiếp đường tròn (I).



Lời giải

Ở Hình 3, ta có: một tam giác nội tiếp đường tròn (I) là tam giác HGE ; ba tam giác không nội tiếp đường tròn (I) là các tam giác GHF , HEF , GEF .

Bài 2: Cho hai tam giác ABC và ABD (Hình 4) có $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$, $AB = 3\text{ cm}$, $AD = 4\text{ cm}$, $AC = 6\text{ cm}$.



- a) Xác định các điểm O, I lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và ABD .
b) Tính bán kính của các đường tròn (O) và (I) .

Lời giải

a) Do tam giác ABC vuông tại A nên trung điểm của cạnh huyền BC là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tương tự, do tam giác ABD vuông tại A nên trung điểm của cạnh huyền BD là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD . Vậy O, I lần lượt là trung điểm của BC và BD .

b) Bán kính của đường tròn (O) là: $\frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{3^2 + 6^2}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ (cm).

Bán kính của đường tròn (I) là: $\frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AD^2}}{2} = \frac{\sqrt{3^2 + 4^2}}{2} = \frac{5}{2}$ (cm).

Bài 3: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn bán kính 5dm. Tính độ dài cạnh của tam giác đều ABC đó.

Lời giải

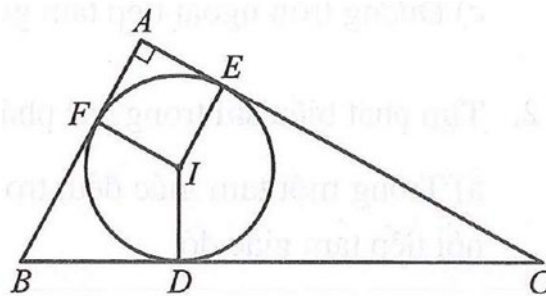
Gọi a là độ dài cạnh của tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn bán kính $R = 5\text{dm}$. Khi đó $5 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ nên

$a = \frac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$. Vậy độ dài cạnh của tam giác ABC là $5\sqrt{3}\text{dm}$.

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A có bán kính đường tròn nội tiếp là r . Chứng minh rằng:

$$r = \frac{AB + AC - BC}{2}.$$

Lời giải



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC vuông tại A và (I) tiếp xúc với AB, BC, AC lần lượt tại F, D, E .

Tứ giác $AFIE$ có: $\hat{A} = 90^\circ$ (giả thiết), $\widehat{AFI} = \widehat{AEI} = 90^\circ$ và $AF = AE$ (tính chất của tiếp tuyến).

Do đó tứ giác $AFIE$ là hình vuông và $AE = AF = r$.

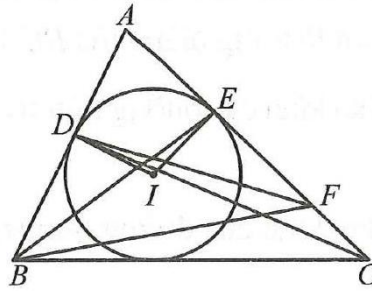
Mặt khác: $BD = BF$ và $CD = CE$ (do tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau).

Từ đó, ta có: $AB + AC - BC = AF + FB + AE + EC - (BD + DC) = 2r$.

$$\text{Vậy } r = \frac{AB + AC - BC}{2}.$$

Bài 5: Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn $(I; r)$. Các cạnh AB, AC lần lượt tiếp xúc với (I) tại D và E . Chứng minh rằng nếu $AB < AC$ thì $BE < CD$.

Lời giải



Lấy điểm F trên AC sao cho $AB = AF$. Do $AB < AC$ và $AB = AF$ nên F nằm trên đoạn thẳng AC . Xét hai tam giác ADF và AEB có: $AD = AE$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau); $\hat{A}$ là góc chung; $AF = AB$ nên $\triangle ADF = \triangle AEB$ (c.g.c). Do đó $DF = BE$ (1).

Lại có tam giác ABF cân tại A (vì $AB = AF$) nên góc AFB là góc nhọn. Suy ra góc AFD cũng là góc nhọn và góc DFC là góc tù. Trong tam giác DFC có góc DFC là góc tù nên $DF < CD$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $BE < CD$.

Bài 6. Cho tam giác ABC cân tại A , có O, I lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

a) Chứng minh rằng:

- Ba điểm A, O, I cùng thuộc một đường thẳng;
- Đường thẳng OA vuông góc với BC và đi qua điểm chính giữa D (khác điểm A) của cung BC .

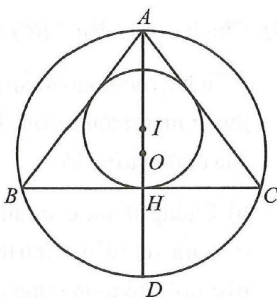
b) Cho $BC = 24$ cm, $AC = 20$ cm. Tính độ dài bán kính R của đường tròn ngoại tiếp và bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Lời giải

(Hình 17).

a) Học sinh tự làm.

b) Do $BC = 24$ cm, $AC = 20$ cm nên ta có $AH = \sqrt{AC^2 - HC^2} = 16$ (cm). Lại



Hình 17

có $\triangle ACH \sim \triangle ADC$ nên $AC^2 = AH \cdot AD$, suy ra $20^2 = 16 \cdot AD$ hay $AD = 25$ cm. Do đó, $R = AD : 2 = 12,5$ cm.

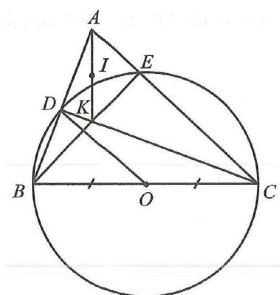
Do BI là phân giác của góc ABH nên $\frac{IH}{IA} = \frac{BH}{BA} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$. Ta có

$\frac{IH}{IA} = \frac{3}{5}$ hay $\frac{IH}{IH + IA} = \frac{3}{3 + 5} = \frac{3}{8}$, tức là $\frac{r}{16} = \frac{3}{8}$. Vì vậy $r = 6$ cm.

Bài 7. Cho tam giác nhọn ABC . Các đường cao BE, CD của tam giác ABC cắt nhau tại K . Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp mỗi tam giác sau:

- a) Tam giác BDE ;
- b) Tam giác DEC ;
- c) Tam giác ADE .

Lời giải

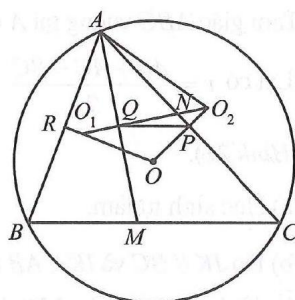


- a) Gọi O là trung điểm của BC . Do tam giác BDC vuông ở D và BEC vuông ở E nên $OB = OD = OC = OE$ (*). Do đó, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE .
- b) Do (*), ta có O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEC .
- c) Gọi I là trung điểm của AK . Do tam giác ADK vuông ở D và tam giác AEK vuông ở E nên $IA = IK = IE = ID$. Do đó, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE .

Bài 8. Cho tam giác nhọn ABC ($\hat{B} > \hat{C}$), phân giác AM . Gọi O, O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, AMB, AMC . Chứng minh rằng:

- a) OO_1, OO_2, O_1O_2 lần lượt là các đường trung trực của AB, AC, AM ;
- b) Tam giác OO_1O_2 cân.

Lời giải



- a) Do $OA = OB$ và $O_1A = O_1B$ nên OO_1 là đường trung trực của AB . Tương tự OO_2, O_1O_2 lần lượt là các đường trung trực của AC, AM .

- b) Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của AC, AM, AB ; N là giao điểm của QO_2 và AC . Ta có

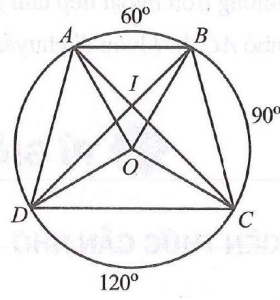
$$\widehat{OO_1Q} = \widehat{RAQ} = \frac{\widehat{BAC}}{2} \left(= 180^\circ - \widehat{RO_1Q} \right)$$

Mặt khác $\widehat{O_2NP} = \widehat{ANQ}$ nên $90^\circ - \widehat{O_2NP} = 90^\circ - \widehat{ANQ}$.

$$\text{Suy ra: } \widehat{NO_2P} = \widehat{QAN} = \frac{\widehat{BAC}}{2} \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) suy ra } \widehat{OO_1O_2} = \widehat{OO_2O_1}.$$

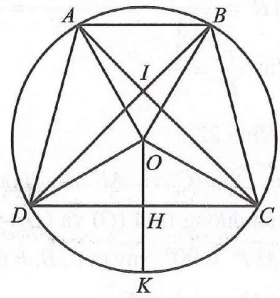
Do đó, tam giác OO_1O_2 cân tại O .

Bài 9. Trên đường tròn (O) bán kính R , lấy các điểm A, B, C, D sao cho số đo $\widehat{AB} = 60^\circ$, số đo $\widehat{BC} = 90^\circ$, số đo $\widehat{CD} = 120^\circ$ (Hình 7).



- a) Xác định tâm và tính theo R bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác OAB , OBC , OAD , ODC
b) Gọi I là giao điểm của AC và BD . Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác IAB , IBC , IAD , IDC .

Lời giải



- a) Gọi G là trọng tâm của tam giác OAB . Tam giác OAB là tam giác đều với cạnh $AB = R$ nên có tâm đường tròn ngoại tiếp là G và bán kính đường tròn ngoại tiếp là $\frac{R\sqrt{3}}{3}$. Tam giác OBC vuông tại O , có cạnh huyền $BC = R\sqrt{2}$ nên tâm, bán kính đường tròn ngoại tiếp của nó lần lượt là trung điểm E của BC và $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Tương tự tâm, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác OAD lần lượt là trung điểm F của AD và $\frac{R\sqrt{2}}{2}$

Gọi H là trung điểm của DC và giao điểm của tia OH và cung nhỏ CD là K . Dễ thấy K là điểm chính giữa của cung nhỏ DC và $KD = KO = KC = R$. Vậy tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ODC lần lượt là K và R .

- b) Do $\widehat{CAB} = \widehat{DBA} = 45^\circ$ nên $\widehat{AIB} = 90^\circ$ hay AC vuông góc với BD . Mặt khác, $AB = R, BC = AD = R\sqrt{2}$ và $DC = R\sqrt{3}$ do đó bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác IAB , IBC , IAD , IDC lần lượt là:
- $$\frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{2}}{2}, \frac{R\sqrt{2}}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6, AC = 8$, bán kính đường tròn nội tiếp là r , bán kính đường tròn ngoại tiếp là R . Tính $\frac{r}{R}$.

Lời giải

Tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6, AC = 8$ do đó $BC = 10$ và $R = 10 : 2 = 5$.

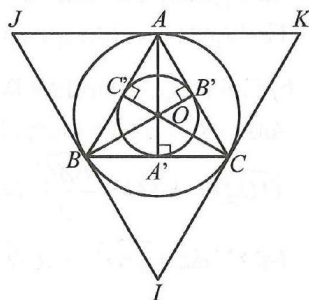
Lại có $r = \frac{AB + AC - BC}{2} = 2$. Suy ra $\frac{r}{R} = \frac{2}{5}$.

Bài 11. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính R .

- a) Chứng minh rằng O cũng là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .
b) Vẽ tam giác IJK ngoại tiếp đường tròn $(O; R)$ với $JK \parallel BC, IJ \parallel AC, IK \parallel AB$. Chứng minh tam giác IJK đều.

c) Gọi R' là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác IJK và r là bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tính $\frac{r}{R'}$.

Lời giải



a) Học sinh tự làm.

b) Do $JK \parallel BC$ và $IK \parallel AB$ nên tứ giác $ABCK$

là hình bình hành. Mặt khác, $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

Suy ra $\widehat{AKC} = 60^\circ$ hay $\widehat{IKJ} = 60^\circ$.

Tương tự $\widehat{KJI} = 60^\circ$.

Do đó, tam giác IJK là tam giác đều.

c) $R' = \frac{JK\sqrt{3}}{3} = \frac{2AK\sqrt{3}}{3} = \frac{2BC\sqrt{3}}{3}$ mà $OA = \frac{BC\sqrt{3}}{3}$ nên $R' = 2OA = 4OA' = 4r$.

Vậy $\frac{r}{R'} = \frac{1}{4}$.

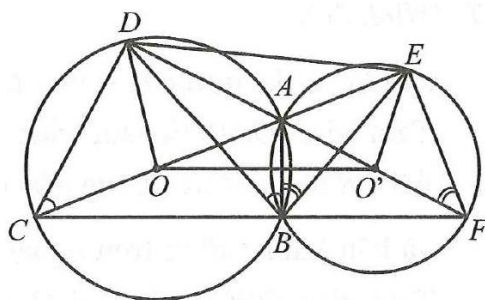
Bài 12. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B . Đường thẳng AO cắt (O) và (O') lần lượt tại hai điểm C, E (khác điểm A). Đường thẳng AO' cắt (O) và (O') lần lượt tại hai điểm D, F (khác điểm A). Chứng minh:

a) C, B, F thẳng hàng;

b) Bốn điểm C, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn;

c) A là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BDE .

Lời giải



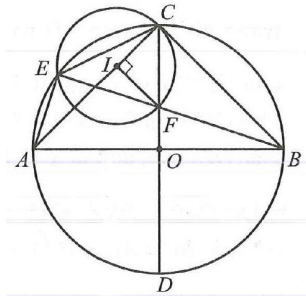
a) Do AC và AF lần lượt là đường kính của đường tròn (O) và (O') nên $\widehat{ABC} = 90^\circ$, $\widehat{ABF} = 90^\circ$. Suy ra C, B, F thẳng hàng.

b) Học sinh tự làm.

c) Ta có $\widehat{DCA} = \widehat{DBA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DA của đường tròn (O)) (1). Tương tự $\widehat{ABE} = \widehat{AFE}$ và $\widehat{DCE} = \widehat{DFE}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ABE} = \widehat{DBA}$, do đó BA là phân giác của góc DBE . Tương tự, DA là phân giác của góc BDE . Suy ra A là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BDE .

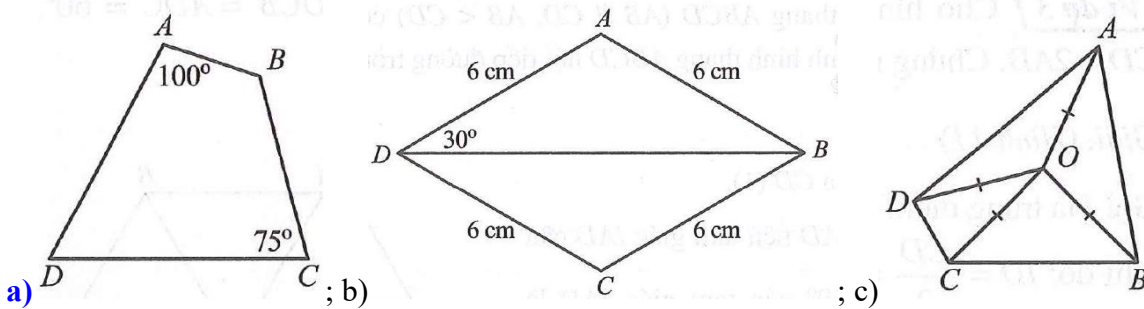
Bài 13. Cho tam giác ABC vuông cân tại C và nội tiếp đường tròn $(O; R)$. E là điểm tùy ý trên cung nhỏ AC của đường tròn đó. Gọi F là giao điểm của EB và CO , I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ECF . Chứng minh rằng khi E di chuyển trên cung nhỏ AC thì I luôn di chuyển trên một đoạn thẳng cố định.

Lời giải



Ta có $\widehat{CEB} = \widehat{CAB} = 45^\circ$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CB của đường tròn (O)). Mặt khác, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ECF , do đó $\widehat{CIF} = 2\widehat{CEF} = 90^\circ$. Mà $IC = IF$ suy ra tam giác ICF vuông cân tại I , do đó $\widehat{ICF} = 45^\circ$. Lại có $\widehat{ACO} = 45^\circ$, suy ra I nằm trên AC . Vậy khi E di chuyển trên cung nhỏ AC thì I di chuyển trên đoạn thẳng

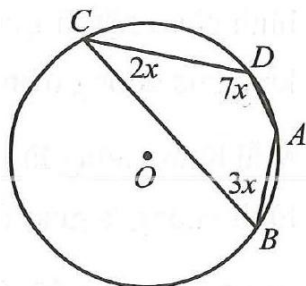
Bài 14: Trong các hình 9a, 9b, 9c, ở hình nào ta có tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp?



Lời giải

- Ở Hình 9a, nếu tứ giác $ABCD$ nội tiếp thì $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180^\circ$ nhưng ta lại có $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 175^\circ$ suy ra vô lí. Vậy tứ giác $ABCD$ ở Hình 9a không là tứ giác nội tiếp.
- Ở Hình 9b, vì $AD = AB = 6$ cm nên tam giác ADB cân tại A , do đó $\widehat{ABD} = \widehat{ADB} = 30^\circ$. Mặt khác, xét tứ giác $ABCD$, ta có $AB = BC = CD = DA$ nên tứ giác $ABCD$ là hình thoi, do đó: $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} = 2\widehat{ABD} = 60^\circ$. Tức là tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 120^\circ$. Vì vậy, lí luận tương tự như trên tứ giác $ABCD$ ở Hình 9b không là tứ giác nội tiếp.
- Ở Hình 9c, ta có $OA = OB = OC = OD$ nên đường tròn tâm O , bán kính OA đi qua cả bốn đỉnh A, B, C, D của tứ giác $ABCD$. Vì vậy, tứ giác $ABCD$ ở Hình 9c là tứ giác nội tiếp.

Bài 15: Tính số đo góc DAB trong Hình 10.



Lời giải

Do tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) nên $\widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180^\circ$ hay $7x + 3x = 180^\circ$.

Suy ra: $x = 18^\circ$ và $\widehat{DCB} = 2x = 2 \cdot 18^\circ = 36^\circ$.

Mặt khác, $\widehat{DCB} + \widehat{DAB} = 180^\circ$.

Do đó $\widehat{DAB} = 180^\circ - \widehat{DCB} = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$.

Vậy số đo góc DAB bằng 144° .

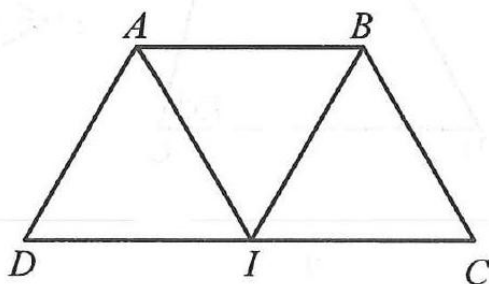
Bài 16: Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB < CD$) có $\widehat{DCB} = \widehat{ADC} = 60^\circ$, $CD = 2AD$. Chứng minh hình thang $ABCD$ nội tiếp đường tròn.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của CD (1).

Khi đó: $ID = \frac{CD}{2} = AD$ nên tam giác IAD cân tại D . Mà $\widehat{ADC} = 60^\circ$ nên tam giác IAD là tam giác đều.

Suy ra $IA = ID$ (2).



Ta có $AB \parallel CD$ và $\widehat{DCB} = \widehat{ADC}$ nên tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.

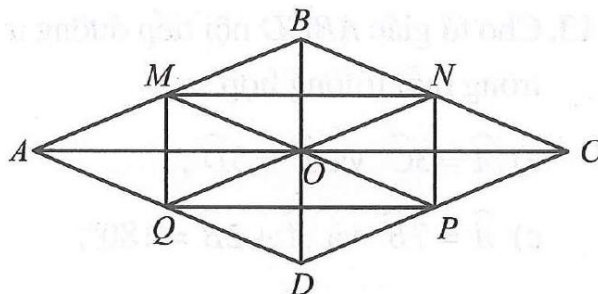
Suy ra $BC = AD$. Mà $IC = ID = AD$ nên $IC = BC$. Do đó, tam giác IBC cân tại C , lại có $\widehat{DCB} = 60^\circ$ nên tam giác IBC là tam giác đều. Vì thế $IC = IB$ (3). Từ (1), (2), (3) suy ra $IA = ID = IB = IC$. Tức là hình thang $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn tâm I bán kính IA .

Bài 17: Cho hình thoi $ABCD$, có $AB = 13$ cm, $AO = 12$ cm (O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD). M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA .

a) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ nội tiếp đường tròn.

b) Tính tỉ số diện tích hình thoi $ABCD$ và diện tích hình tròn ngoại tiếp tứ giác $MNPQ$ (lấy $\pi \approx 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải



a) Ta có M, N, P, Q lần lượt trung điểm của AB, BC, CA, DA (giả thiết) và $AC \perp BD$ tại O (vì O là giao điểm hai đường chéo AC, BD của hình thoi $ABCD$). Suy ra OM, ON, OP, OQ lần lượt là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của các tam giác vuông OAB, OBC, OCD, ODA .

Do đó, ta có: $OM = \frac{AB}{2}$; $ON = \frac{CB}{2}$; $OP = \frac{CD}{2}$; $OQ = \frac{DA}{2}$.

Mà $AB = BC = CD = DA$ nên $OM = ON = OP = OQ$. Vì vậy tứ giác $MNPQ$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính $\frac{AB}{2}$.

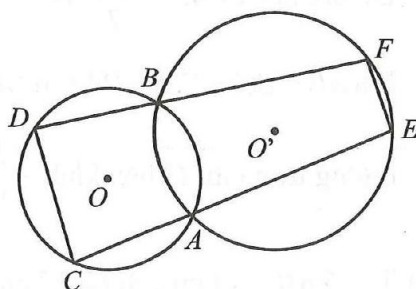
b) Ta có $AB = 13$ cm, $AO = 12$ cm và $\widehat{AOB} = 90^\circ$ nên $BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = 5$ (cm).

Diện tích hình thoi $ABCD$ là: $\frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{(2 \cdot 12) \cdot (2 \cdot 5)}{2} = 120$ (cm²).

Diện tích hình tròn ngoại tiếp tứ giác $MNPQ$ là: $\pi \cdot \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \approx 3,14 \cdot 6,5^2 = 132,665$ (cm²)

Vậy tỉ số diện tích hình thoi $ABCD$ và diện tích hình tròn ngoại tiếp tứ giác $MNPQ$ là khoảng: $120 : 132,665 \approx 0,9$.

Bài 19. Cho hai đường tròn $(O), (O')$ giao nhau tại A, B và CD là một dây cung của (O) . Tia CA cắt (O') tại E và tia DB cắt (O') tại F . Chứng minh EF song song với CD .



Lời giải

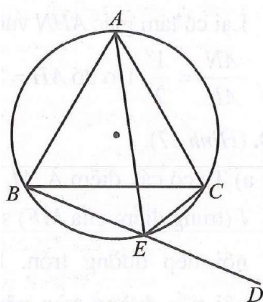
Ta có tứ giác $ABDC$ nội tiếp đường tròn (O) nên $\widehat{ACD} = \widehat{ABF} (= 180^\circ - \widehat{ABD})$ (1).

Mặt khác, tứ giác $ABFE$ nội tiếp đường tròn (O') suy ra $\widehat{ABF} + \widehat{AEF} = 180^\circ$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{ACD} + \widehat{AEF} = 180^\circ$ hay $\widehat{ECD} + \widehat{CEF} = 180^\circ$. Suy ra $EF \parallel CD$.

Bài 20. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác đều ABC . Điểm E nằm trên cung nhỏ BC (E khác B và C). ED là tia đối của tia EB . Chứng minh EC là phân giác của góc AED và EA là phân giác của góc BEC .

Lời giải



Do tứ giác $ABEC$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{CED} = \widehat{BAC} = 60^\circ (= 180^\circ - \widehat{BEC})$.

Mặt khác $\widehat{AEC} = \widehat{ABC} = 60^\circ$ nên ta có $\widehat{AEC} = \widehat{CED} = 60^\circ$. Do đó, EC là phân giác của góc AED .

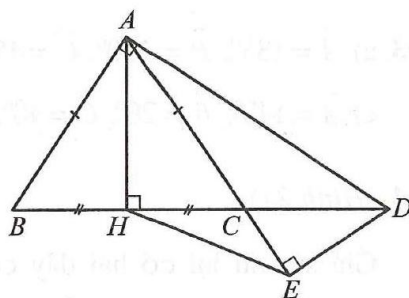
Tương tự ta có $\widehat{AEC} = \widehat{ABC} = 60^\circ$ và $\widehat{AEB} = \widehat{ACB} = 60^\circ$.

Do đó $\widehat{AEB} = \widehat{AEC} = 60^\circ$ hay EA là phân giác của góc BEC .

Bài 21. Cho tam giác ABC cân ở A , H là trung điểm của BC và $\widehat{BAC} < 90^\circ$. Đường vuông góc với AB tại A cắt đường thẳng BC ở D . Kẻ DE vuông góc với AC . Chứng minh:

- a) $AH = EH$;
b) $\widehat{DCE} = \widehat{ABD}$.

Lời giải

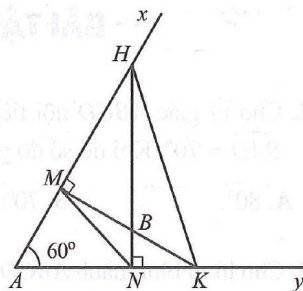


a) Do tam giác ABC cân tại A và H là trung điểm của BC nên $\widehat{BAH} = \widehat{HAC}$ (1). Vì các tam giác AHD và AED lần lượt vuông tại H và E nên tứ giác $AHED$ nội tiếp đường tròn đường kính AD suy ra $\widehat{ADH} = \widehat{AEH}$

Mặt khác $\widehat{ADH} = \widehat{BAH}$ (3) (vì cùng cộng với $\widehat{HAD}$ bằng 90°). Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{HAC} = \widehat{AEH}$. Do đó, tam giác HAE cân tại H . Vì vậy $AH = EH$.

b) Học sinh tự làm.

Bài 22. Cho $\widehat{xAy} = 60^\circ$ và điểm B nằm trong góc xAy . Kẻ đường thẳng BN vuông góc với Ay cắt Ax tại H ; kẻ đường thẳng BM vuông góc với Ax cắt Ay tại K . Chứng minh:



a) Các tứ giác $AMBN, HMNK$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn;

b) $HK = 2MN$.

Lời giải

a) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, HK . Khi đó MI, NI lần lượt là các đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AB của các tam giác vuông AMB, ANB nên $IM = IN = IA = IB = \frac{AB}{2}$. Suy ra tứ giác $AMBN$ nội tiếp đường tròn tâm I đường kính AB . Tương tự tứ giác $HMNK$ nội tiếp đường tròn tâm J đường kính HK .

b) Do tứ giác $HMNK$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{AMN} = \widehat{NKH} (= 180^\circ - \widehat{HMN})$ hay

$$\widehat{AMN} = \widehat{AKH}. \text{ Mà } \widehat{MAN} = \widehat{KAH} \text{ suy ra } \triangle AMN \sim \triangle AKH. \text{ Do đó } \frac{HK}{MN} = \frac{AH}{AN} \quad (3)$$

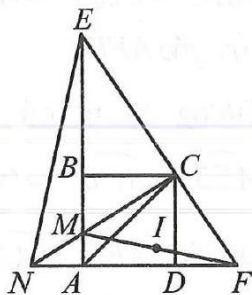
Lại có tam giác AHN vuông tại N nên $\cos \widehat{HAN} = \frac{AN}{AH}$ hay $\cos 60^\circ = \frac{AN}{AH}$, tức là $\frac{AN}{AH} = \frac{1}{2}$. Do đó $AH = 2AN$ (4). Từ (3) và (4) suy ra $HK = 2MN$.

Bài 23. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm M . Đường thẳng qua C vuông góc với CM cắt các tia AB, AD lần lượt tại E và F . Tia CM cắt đường thẳng AD tại N . Chứng minh rằng:

a) $\widehat{NCA} = \widehat{MFN}$ và $\widehat{NEA} = \widehat{NCA}$;

b) $CM + CN = EF$.

Lời giải

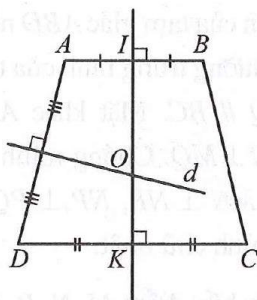


a) Ta có các điểm A, M, C, F cách đều điểm I (trung điểm của MF) suy ra tứ giác $AMCF$ nội tiếp đường tròn. Do tứ giác $AMCF$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{MCA} = \widehat{MFA}$ hay $\widehat{NCA} = \widehat{MFN}$. Tương tự tứ giác $NACE$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{NEA} = \widehat{NCA}$

b) Ta có tứ giác $NACE$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{ENC} = \widehat{EAC} = 45^\circ$. Mà $\widehat{NCE} = 90^\circ$. Suy ra tam giác CEN cân tại C . Vì thế $CN = CE$ (1). Tương tự tam giác CMF cân tại C suy ra $CM = CF$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $CM + CN = CE + CF = EF$.

Bài 24. Chứng minh rằng mỗi hình thang cân là một tứ giác nội tiếp đường tròn.

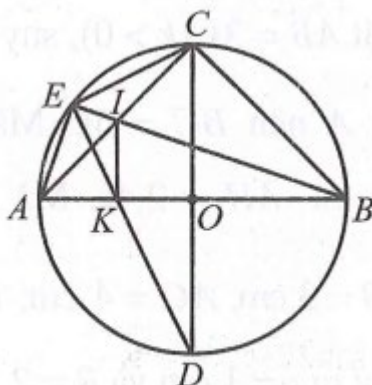
Lời giải



Gọi IK là trục đối xứng của hình thang cân $ABCD$. Dựng đường trung trực d của AD . Gọi O là giao điểm của d và IK . Dễ thấy $OA = OB = OC = OD$ suy ra các A, B, C, D đều thuộc đường tròn tâm O , bán kính OA hay hình thang cân $ABCD$ nội tiếp đường tròn.

Bài 25. Cho tam giác ABC vuông cân tại C và nội tiếp đường tròn $(O; R)$. E là điểm tùy ý trên cung nhỏ AC . Gọi I là giao điểm của EB và AC . Kẻ IK vuông góc với AB . Chứng minh rằng khi E di chuyển trên cung nhỏ AC thì EK luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



Hình 29

Kẻ đường kính CD suy ra D cố định. Ta có $\widehat{AEI} = \widehat{AKI} = 90^\circ$ nên tứ giác $EIKA$ nội tiếp đường tròn đường kính AI . Từ đó suy ra $\widehat{KAI} = \widehat{KEI}$. Lại có $\widehat{KAI} = 45^\circ$ (do tam giác ACB vuông cân tại C) do đó

$\widehat{KEI} = 45^\circ$ hay $\widehat{BEK} = 45^\circ$ (1). Mặt khác, $\widehat{BED} = 45^\circ$ (do D là điểm chính giữa của cung AB) (2). Từ (1) và (2) suy ra E, K, D thẳng hàng. Vậy khi E di chuyển trên cung nhỏ AC thì EK luôn đi qua điểm D cố định.

BÀI 29. TỨ GIÁC NỘI TIẾP.

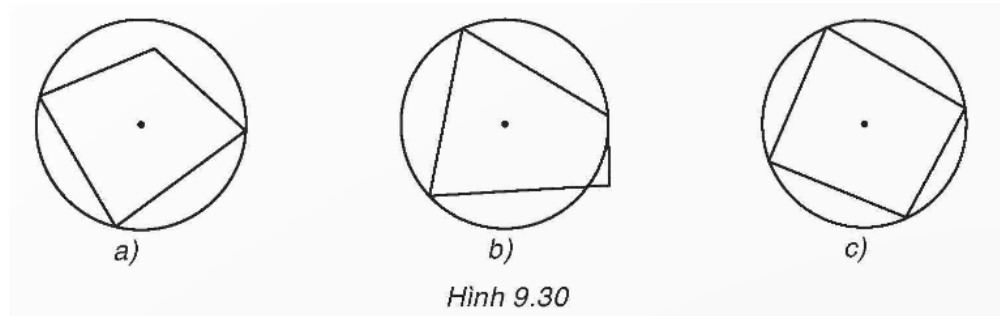
A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Đường tròn ngoại tiếp một tứ giác

Đường tròn đi qua bốn đỉnh của một tứ giác

Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (hoặc đơn giản là tứ giác nội tiếp) và đường tròn được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

Ví dụ 1. Trong các hình sau (H.9.30), hình nào vẽ một tứ giác nội tiếp một đường tròn?



Hình 9.30

Lời giải

Hình a và b không vẽ tứ giác nội tiếp đường tròn vì mỗi tứ giác có ba đỉnh nằm trên đường tròn và đỉnh còn lại không nằm trên đường tròn.

Hình c vẽ tứ giác nội tiếp đường tròn vì tứ giác có bốn đỉnh nằm trên đường tròn.

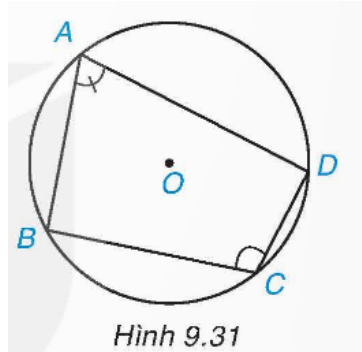
Tổng quát, chúng ta có định lý sau đây về tổng số đo các góc đối nhau của một tứ giác nội tiếp.

Định lý

Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối nhau bằng 180° .

GT	Tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) .
KL	$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ; \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$.

Chứng minh



Hình 9.31

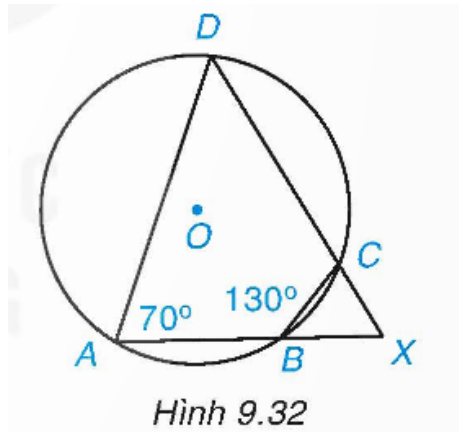
Do hai điểm B, D chia đường tròn (O) thành hai cung $\widehat{BCD}$ và $\widehat{BAD}$ nên $s\widehat{BCD} + s\widehat{BAD} = 360^\circ$.

Do $\hat{A}$ và $\hat{C}$ là các góc nội tiếp của đường tròn (O) lần lượt chắn cung $\widehat{BCD}$ và $\widehat{BAD}$ nên

$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{1}{2}s\widehat{BCD} + \frac{1}{2}s\widehat{BAD} = 180^\circ. \text{ Tương tự, } \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ.$$

Ví dụ 2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) như Hình 9.32. Hai đường thẳng AB và DC cắt nhau tại X . Biết rằng $\widehat{DAB} = 70^\circ, \widehat{ABC} = 130^\circ$. Tính số đo của các góc BCD và BXC .

Lời giải



Hình 9.32

Vì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn (O) nên các góc đối diện có tổng số đo bằng 180° .

Do đó $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180^\circ$, hay $\widehat{BCD} = 180^\circ - \widehat{DAB} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

Tương tự, ta có: $\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = 180^\circ$, hay $\widehat{CDA} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.

Vì tổng các góc trong tam giác AXD bằng 180° nên:

$$\widehat{BXC} = \widehat{AXD} = 180^\circ - \widehat{DAB} - \widehat{CDA} = 180^\circ - 70^\circ - 50^\circ = 60^\circ.$$

2. Đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật và hình vuông

Đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật và hình vuông

Ta có khẳng định sau:

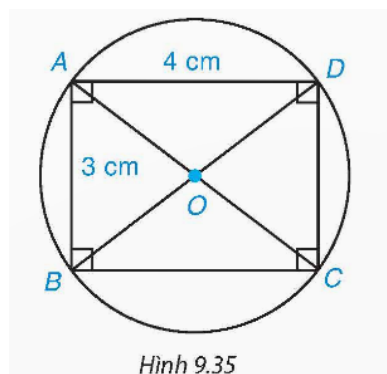
Hình chữ nhật và hình vuông là các tứ giác nội tiếp. Đường tròn ngoại tiếp của chúng có tâm là giao điểm của hai đường chéo và bán kính bằng một nửa độ dài đường chéo.

Ví dụ 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3\text{ cm}$, $AD = 4\text{ cm}$. Vẽ đường tròn $(O; R)$ ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ và tính bán kính R .

Lời giải

Gọi O là giao điểm của AC và BD . Vẽ đường tròn tâm O bán kính $R = OA$. Đường tròn $(O; R)$ vừa vẽ

tiếp hình chữ nhật $ABCD$ (H.9.35).



Hình 9.35

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác ABD vuông tại A , ta có:

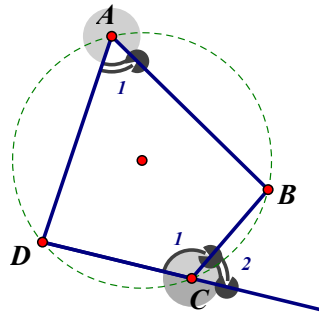
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \text{ nên } BD = 5(\text{cm}). \text{ Do đó, ta có } R = \frac{BD}{2} = 2,5 \text{ cm}.$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. TÍNH GÓC CỦA TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

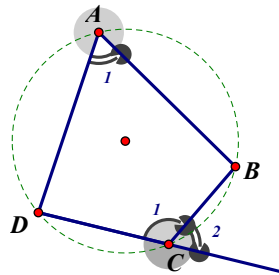
1. Phương pháp

- Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn thì có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° .



$ABCD$ nội tiếp được đường tròn nên $\widehat{A_1} + \widehat{C_1} = 180^\circ$ và $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$

- Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn thì có góc bằng góc kề của góc đối của nó.



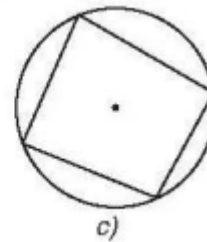
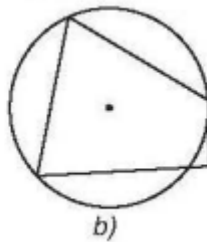
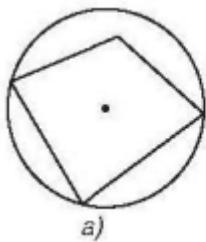
$ABCD$ nội tiếp được đường tròn nên $\widehat{A_1} + \widehat{C_1} = 180^\circ$ mà $\widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 180^\circ$ (hai góc kề bù) $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C_2}$

Chú ý: Cần nắm lại kiến thức góc nội tiếp và góc ở tâm

- Góc nội tiếp có số đo bằng nửa số đo cung bị chắn.
- Góc ở tâm có số đo bằng cung bị chắn.
- Góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung thì góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Trong các tứ giác sau, tứ giác nào nội tiếp được đường tròn? Giải thích.

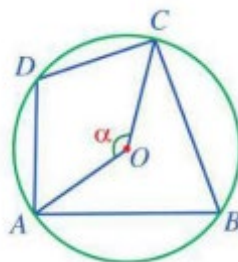


Lời giải

Ở hình a) và hình b), tứ giác không nội tiếp đường tròn vì có một đỉnh tứ giác không nằm trên đường tròn

Ở hình c), tứ giác nội tiếp đường tròn vì 4 đỉnh tứ giác nằm trên đường tròn

Ví dụ 2. Trong hình vẽ dưới đây, cho $\alpha = 140^\circ$.



a) Tính các góc $\widehat{ABC}$, $\widehat{ADC}$ của tứ giác $ABCD$.

b) Tính $\widehat{BAD} + \widehat{BCD}$.

Lời giải

a) Ta có: $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2} \cdot 140^\circ = 70^\circ$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AC)

$\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ (tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn)

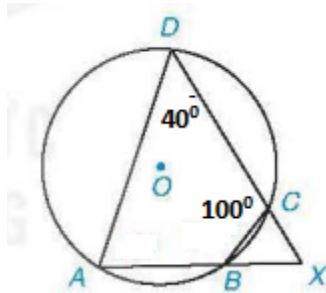
$$70^\circ + \widehat{ADC} = 180^\circ$$

$$\widehat{ADC} = 180^\circ - 70^\circ$$

$$\widehat{ADC} = 110^\circ$$

b) tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$.

Ví dụ 3. Trong hình vẽ dưới đây, cho $\widehat{ADC} = 40^\circ$, $\widehat{BCD} = 100^\circ$.



a) Tính các góc $\widehat{ABC}$, $\widehat{BAD}$ của tứ giác $ABCD$.

b) Tính $\widehat{BXC}$.

Lời giải

a) Ta có:

$\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ (tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn)

$$\widehat{ABC} + 40^\circ = 180^\circ$$

$$\widehat{ABC} = 180^\circ - 40^\circ$$

$$\widehat{ABC} = 140^\circ$$

$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$ (tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn)

$$\widehat{BAD} + 100^\circ = 180^\circ$$

$$\widehat{BAD} = 180^\circ - 100^\circ$$

$$\widehat{BAD} = 80^\circ$$

b) Ta có:

$\widehat{AXD} + \widehat{XAD} + \widehat{XDA} = 180^\circ$ (tổng ba góc của tam giác ADX)

$$\widehat{AXD} + 80^\circ + 40^\circ = 180^\circ$$

$$\widehat{AXD} = 180^\circ - (80^\circ + 40^\circ)$$

$$\widehat{AXD} = 60^\circ$$

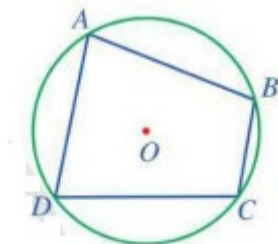
Ví dụ 4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn. Tính số đo các góc còn lại của tứ giác đó trong các trường hợp sau:

a) $\hat{A} = 45^\circ$ và $\hat{B} = 155^\circ$.

b) $\widehat{B} = 60^\circ$ và $\widehat{C} = 85^\circ$.

Lời giải

a)



- Ta có: $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$ (tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn)

$$45^\circ + \widehat{C} = 180^\circ$$

$$\widehat{C} = 180^\circ - 45^\circ$$

$$\widehat{C} = 135^\circ$$

- Ta có: $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$ (tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn)

$$155^\circ + \widehat{D} = 180^\circ$$

$$\widehat{D} = 180^\circ - 155^\circ$$

$$\widehat{D} = 25^\circ$$

b) $\widehat{B} = 60^\circ$ và $\widehat{C} = 85^\circ$.

- Ta có: $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$ (tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn)

$$60^\circ + \widehat{D} = 180^\circ$$

$$\widehat{D} = 180^\circ - 60^\circ$$

$$\widehat{D} = 120^\circ$$

- Ta có: $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$ (tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn)

$$\widehat{A} + 85^\circ = 180^\circ$$

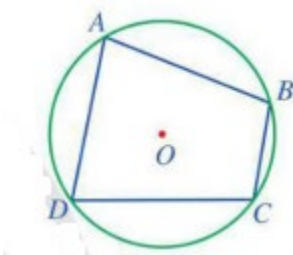
$$\widehat{A} = 180^\circ - 85^\circ$$

$$\widehat{A} = 95^\circ$$

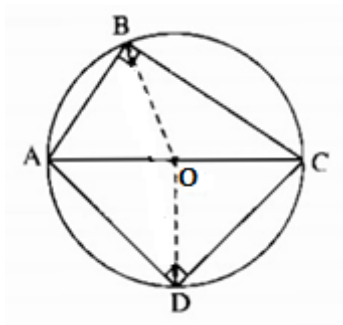
DẠNG 2. CHỨNG MINH TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

1. Phương pháp chung

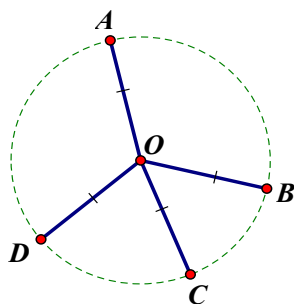
• **Phương pháp 1:** Để tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn thì ta chứng minh $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$ hoặc $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$.



Chú ý: Tứ giác có hai góc đối diện đều bằng 90° thì tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó là trung điểm của cạnh đối diện hai góc vuông đó.



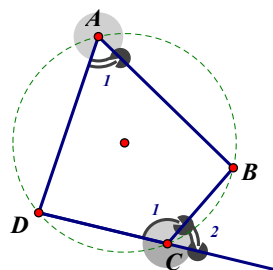
• **Phương pháp 2:** Để tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn thì ta chứng minh $OA = OB = OC = OD$



2. Ta cần thuộc các bổ đề sau để vận dụng chứng minh tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

Bổ đề 1: Tứ giác có góc bằng góc kề của góc đối của nó thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

Giả thiết	$ABCD$ là tứ giác $\widehat{A_1} = \widehat{C_2}$
Kết luận	Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn.



Chứng minh:

Ta có: $\widehat{A_1} = \widehat{C_2}$ (giả thiết)

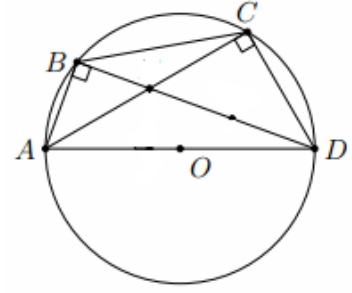
$\widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

Suy ra $\widehat{A_1} + \widehat{C_1} = 180^\circ$

Tứ giác $ABCD$ có tổng số đo hai góc đối $\widehat{A_1}$ và $\widehat{C_1}$ bằng 180° , do đó tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn.

Bổ đề 2: Tứ giác có hai đỉnh kề nhau và cùng bằng 90° , đồng thời cùng nhìn dưới một cạnh thì tứ giác nội tiếp được đường tròn.

Giả thiết	$ABCD$ là tứ giác có là hai góc kề $\widehat{ABD}, \widehat{ACD}$ cùng nhìn dưới cạnh AD . $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^\circ$ $OA = OD$
	Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn có



Chứng minh:

Xét tam giác ABD có $\widehat{ABD} = 90^\circ$ và BO là đường trung tuyến nên $OB = OA = OD = \frac{1}{2}AD$ (1)

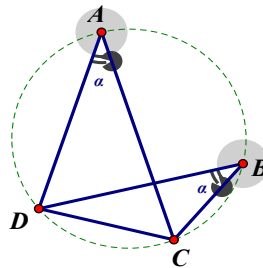
Xét tam giác ACD có $\widehat{ACD} = 90^\circ$ và CO là đường trung tuyến nên $OC = OA = OD = \frac{1}{2}AD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OA = OB = OC = OD$

Vậy tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn có tâm là trung điểm AD .

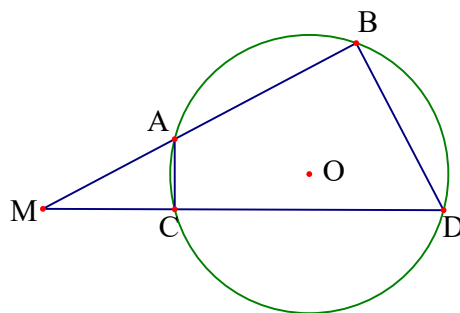
Chú ý:

Mở rộng bổ đề 2: Tứ giác có hai đỉnh kề nhau và bằng nhau đồng thời cùng nhìn dưới một cạnh thì tứ giác nội tiếp được.

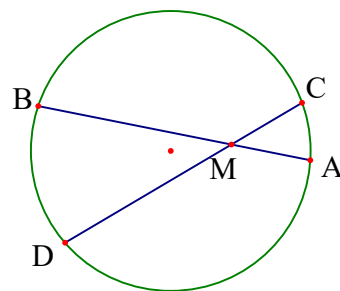


Nếu $\widehat{CAD} = \widehat{CBD} = \alpha$ thì $ABCD$ nội tiếp

Bổ đề 3: Cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 cắt nhau tại điểm M . Trên hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt lấy các điểm A, B và C, D khi đó 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi $MA.MB = MC.MD$.



Hình 1



Hình 2

Nếu $MA.MB = MC.MD$ thì $ABCD$ nội tiếp

Ta chứng minh tính chất trên như sau:

• Trường hợp 1 (Hình 1)

Ta có: $MA.MB = MC.MD \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB}$

Xét $\triangle MAC$ và $\triangle MDB$ có:

$\widehat{MAC}$ chung

$$\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\Rightarrow \triangle MAC \sim \triangle MDB (c - g - c) \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MDB} \Rightarrow ABCD \text{ nội tiếp.}$$

• Trường hợp 2 (Hình 2)

Ta có: $MA.MB = MC.MD \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB}$

Xét $\triangle MAC$ và $\triangle MDB$ có:

$$\widehat{AMC} = \widehat{DMB} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\Rightarrow \triangle MAC \sim \triangle MDB (c - g - c) \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MDB}$$

Vậy tứ giác $ABCD$ có hai đỉnh A và D kề nhau, cùng nhìn cạnh BC dưới hai góc bằng nhau nên tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn.

Nhận xét: Trong bài tập chứng minh tứ giác nội tiếp chủ yếu sử dụng Bổ đề 1 và Bổ đề 2, còn Bổ đề 2 mở rộng và Bổ đề 3 hầu như không dùng đến. Nó chỉ dùng cho học sinh chuyên toán, vì thế các em không quan tâm đến Bổ đề 2 mở rộng và Bổ đề 3 nhé .

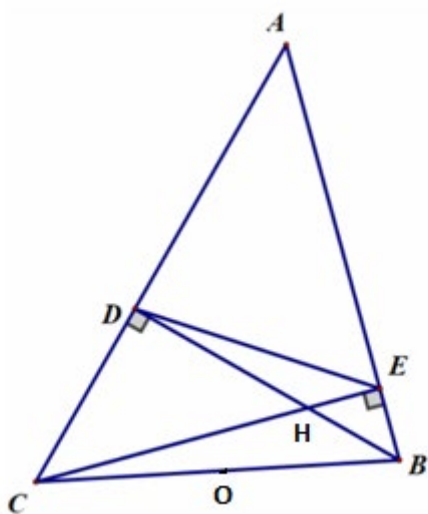
2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ các đường cao BD và CE của tam giác ABC . Gọi H là giao điểm của BD và CE .

a) Chứng minh $ADHE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $BCDE$ là tứ giác nội tiếp.

Lời giải



a) Chứng minh $ADHE$ là tứ giác nội tiếp.

Vì BD, CE là các đường cao của $\triangle ABC$ nên $\begin{cases} BD \perp AC \\ CE \perp AB \end{cases} \Rightarrow \widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^\circ$.

Xét tứ giác $ADHE$ có $\widehat{AEH} + \widehat{ADH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

$\Rightarrow ADHE$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có tổng 2 góc đối bằng 180°).

b) Chứng minh $BCDE$ là tứ giác nội tiếp.

Gọi O là trung điểm BC .

Vì BD, CE là các đường cao của $\triangle ABC$ nên $\begin{cases} BD \perp AC \\ CE \perp AB \end{cases} \Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$

Xét tam giác BDC có $\widehat{BDC} = 90^\circ$ và DO là đường trung tuyến nên $OD = OC = OB = \frac{1}{2}BC$ (1)

Xét tam giác BEC có $\widehat{BEC} = 90^\circ$ và EO là đường trung tuyến nên $OE = OC = OB = \frac{1}{2}BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OD = OE = OC = OB$

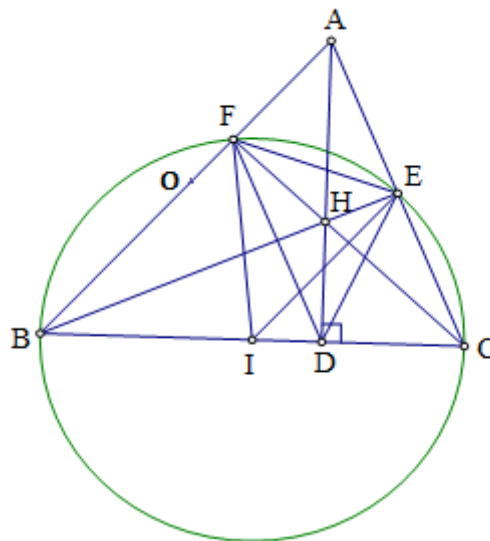
Vậy tứ giác $BCDE$ nội tiếp được đường tròn có tâm O là trung điểm BC .

Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC ($AB > AC$). Đường tròn (I) đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại F, E . Đường thẳng BE cắt CF tại H và đường thẳng AH cắt BC tại D .

a) Chứng minh tứ giác $BFHD$ nội tiếp.

b) Chứng minh tứ giác $ABDE$ nội tiếp.

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $BFHD$ nội tiếp.

- Xét đường tròn (I)

$$\widehat{CFB} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)} \Rightarrow CF \perp AB$$

$$\widehat{CEB} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)} \Rightarrow BE \perp AC$$

$$\text{Suy ra } H \text{ là trực tâm của tam giác } ABC \text{ hay } AH \perp BC \Rightarrow \widehat{HDB} = 90^\circ$$

- Xét tứ giác $BFHD$

$$\widehat{CFB} = \widehat{HDB} = 90^\circ \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\Rightarrow \widehat{CFB} + \widehat{HDB} = 180^\circ$$

tứ giác $BFHD$ có tổng hai góc đối $\widehat{CFB}, \widehat{HDB}$ bằng 180° nên tứ giác $BFHD$ nội tiếp.

b) Chứng minh tứ giác $ABDE$ nội tiếp.

Gọi O là trung điểm AB .

Xét tam giác ADB có $\widehat{ADB} = 90^\circ$ và DO là đường trung tuyến nên $OD = OA = OB = \frac{1}{2}AB$ (1)

Xét tam giác AEB có $\widehat{AEB} = 90^\circ$ và EO là đường trung tuyến nên $OE = OA = OB = \frac{1}{2}AB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OD = OE = OA = OB$

Vậy tứ giác $ABDE$ nội tiếp được đường tròn có tâm O là trung điểm AB .

Ví dụ 3. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có tam giác ABC là tam giác nhọn. Vẽ các đường cao AM và CN của tam giác ABC . Gọi H là giao điểm của AM và CN .

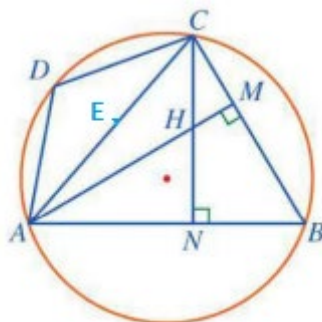
a) Chứng minh $\widehat{ABC} = \widehat{CHM}$.

b) Chứng minh $\widehat{ADC} = \widehat{AHC}$.

c) Chứng minh $\widehat{MAC} = \widehat{MNC}$.

d) Chứng minh $\widehat{MAC} + 90^\circ = \widehat{ANM}$.

Lời giải



a) Chứng minh $\widehat{ABC} = \widehat{CHM}$.

Vì AM, CN là các đường cao của $\triangle ABC$ nên $\begin{cases} AM \perp BC \\ CN \perp AB \end{cases} \Rightarrow \widehat{BMH} = \widehat{BNH} = 90^\circ$.

Xét tứ giác $BNHM$ có $\widehat{BMH} + \widehat{BNH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

$\Rightarrow BNHM$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có tổng 2 góc đối bằng 180°).

Tứ giác $BNHM$ nội tiếp nên: $\widehat{MBN} + \widehat{NHM} = 180^\circ$ hay $\widehat{CBA} + \widehat{NHM} = 180^\circ$

mà $\widehat{MBN} + \widehat{NHM} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

do đó $\widehat{CBA} = \widehat{MBN}$

b) Chứng minh $\widehat{ADC} = \widehat{AHC}$.

Tứ giác $BNHM$ nội tiếp nên: $\widehat{MBN} + \widehat{NHM} = 180^\circ$

mà $\widehat{AHC} = \widehat{NHM}$ (đối đỉnh)

nên $\widehat{MBN} + \widehat{AHC} = 180^\circ$

hay $\widehat{ABC} + \widehat{AHC} = 180^\circ$

Mặt khác tứ giác $BNHM$ nội tiếp đường tròn tâm (O) nên $\widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180^\circ$

Do đó $\widehat{ADC} = \widehat{AHC}$

c) Chứng minh $\widehat{MAC} = \widehat{MNC}$.

Ta chứng minh $ACMN$ là tứ giác nội tiếp.

Gọi E là trung điểm AC .

Xét tam giác AMC có $\widehat{AMC} = 90^\circ$ và ME là đường trung tuyến nên $EM = EC = EA = \frac{1}{2}AC$ (1)

Xét tam giác ANC có $\widehat{ANC} = 90^\circ$ và NE là đường trung tuyến nên $EN = EC = EA = \frac{1}{2}AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $EM = EN = EC = EA$

Vậy tứ giác $ACMN$ nội tiếp được đường tròn có tâm E là trung điểm AC .

Suy ra $\widehat{MAC} = \widehat{MNC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MC của đường tròn tâm E)

d) Chứng minh $\widehat{MAC} + 90^\circ = \widehat{ANM}$.

Ta có $\widehat{MAC} + \widehat{ACM} = 90^\circ$ (hai góc phụ nhau)

Hay $\widehat{ACM} = 90^\circ - \widehat{MAC}$

Mà $\widehat{ACM} + \widehat{ANM} = 180^\circ$ (tứ giác $ACMN$ nội tiếp được đường tròn, câu c))

Nên $90^\circ - \widehat{MAC} + \widehat{ANM} = 180^\circ$

Suy ra $\widehat{MAC} + 90^\circ = \widehat{ANM}$

DẠNG 3. ĐƯỜNG TRÒN LIÊN QUAN ĐẾN TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN, CHỨNG MINH HỆ THỨC, TRUNG ĐIỂM, TỈ LỆ CẠNH

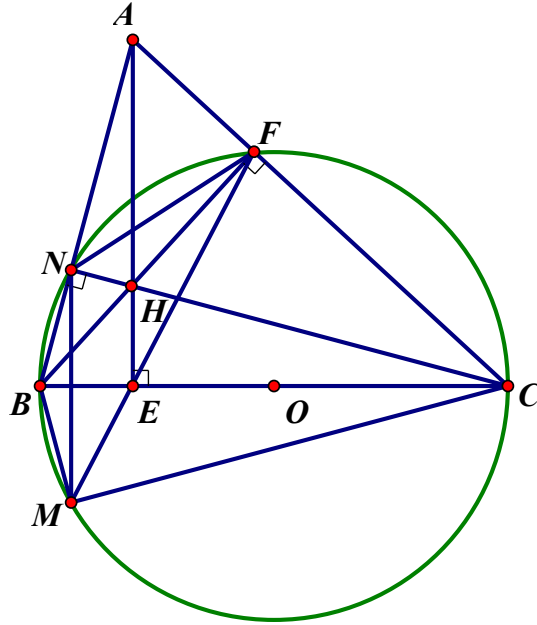
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao AE , BF và CN cắt nhau tại H ($E \in BC$, $F \in AC$, $N \in AB$).

a) Chứng minh tứ giác $CEHF$ nội tiếp.

b) Kéo dài FE cắt đường tròn đường kính BC tại M . Chứng minh $BM = BN$.

c) Biết $AH = BC$. Tính số đo góc A của tam giác ABC .

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $CEHF$ nội tiếp.

Ta có:

$$HF \perp AC (gt) \Rightarrow \widehat{HFC} = 90^\circ$$

$$HE \perp BC (gt) \Rightarrow \widehat{HEC} = 90^\circ$$

Xét tứ giác $CEHF$ có: $\widehat{HFC} + \widehat{HEC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ mà hai góc này đối nhau
 $\Rightarrow CEHF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Kéo dài FE cắt đường tròn đường kính BC tại M . Chứng minh $BM = BN$.

Ta có:

$$HN \perp AB (gt) \Rightarrow \widehat{ANH} = 90^\circ$$

$$HF \perp AC (gt) \Rightarrow \widehat{AFH} = 90^\circ$$

Xét tứ giác $AFHN$ có: $\widehat{ANH} + \widehat{AFH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ mà hai góc này đối nhau
 $\Rightarrow AFHN$ là tứ giác nội tiếp.

$$\Rightarrow \widehat{NAH} = \widehat{NFH} \text{ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung } HN \text{)} \quad (1)$$

Tứ giác $HECF$ nội tiếp (cmt)

$$\Rightarrow \widehat{HFE} = \widehat{HCE} \text{ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung } HE \text{)}. \quad (2)$$

$$\text{Ta có: } \widehat{BAE} = \widehat{NCB} \text{ (hai góc cùng phụ với } \widehat{ABC} \text{)} \Rightarrow \widehat{NAH} = \widehat{HCE} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{NFH} = \widehat{HFE}$ hay $\widehat{NFB} = \widehat{BFM}$.

Xét (O) có: $\widehat{NFB} = \widehat{BFM}$:

$$\Rightarrow \widehat{sdBN} = \widehat{sdBM} \text{ (hai góc nội tiếp bằng nhau hai cung chắn bằng nhau).}$$

$$\Rightarrow BN = BM \text{ (hai cung chắn bằng nhau hai dây bằng nhau) (đpcm).}$$

c) Biết $AH = BC$. Tính số đo góc A của tam giác ABC .

Xét hai tam giác vuông FAH và FBH ta có:

$$AH = BH \text{ (giả thiết)}$$

$$\widehat{FAH} = \widehat{FBH} \text{ (vì cùng phụ với góc } \widehat{ACE})$$

$$\text{Vậy } \triangle FAH = \triangle FBH$$

$$\Rightarrow FA = FB$$

Mặt khác tam giác AFB vuông có $FA = FB$ nên nó vuông cân

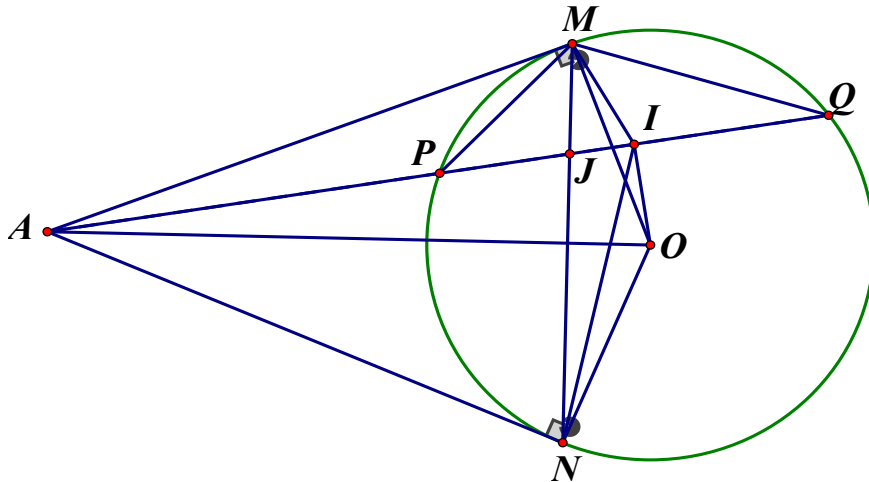
$$\text{Vậy } \widehat{BAC} = 45^\circ.$$

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm). Một đường thẳng đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q sao cho P nằm giữa A và Q , dây cung PQ không đi qua tâm O . Gọi I là trung điểm của đoạn PQ , J là giao điểm của hai đường thẳng AQ và MN . Chứng minh rằng :

a) Năm điểm A, M, O, I, N cùng nằm trên một đường tròn và $\angle JIM = \angle JIN$

b) Tam giác AMP đồng dạng với tam giác AQM . Và $AP.AQ = AI.AJ$

Lời giải



a) Năm điểm A, M, O, I, N cùng nằm trên một đường tròn và $\angle JIM = \angle JIN$

- Năm điểm A, M, O, I, N cùng nằm trên một đường tròn

Xét đường tròn (O) có I là trung điểm của dây cung PQ (dây PQ không đi qua tâm O)

$$\Rightarrow OI \perp PQ \Rightarrow \angle PIO = 90^\circ \Rightarrow \angle AIO = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle AIO \text{ vuông tại } I \Rightarrow I \text{ thuộc đường tròn đường kính } AO$$

AM là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow \angle AMO = 90^\circ$ (tính chất tiếp tuyến của đường tròn)

$$\Rightarrow \triangle AMO \text{ vuông tại } M \Rightarrow M \text{ thuộc đường tròn đường kính } AO$$

Cmtt suy ra N thuộc đường tròn đường kính AO

Vậy 5 điểm A, M, O, I, N cùng nằm trên một đường tròn đường kính AO

- $\angle JIM = \angle JIN$

AM, AN là tiếp tuyến của đường tròn $(O) \Rightarrow OA$ là phân giác của $\angle MON$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \angle AOM = \angle AON$. Ta có :

$$\angle AOM = \angle AIM \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } AM)$$

$$\angle AON = \angle AIN \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } AN) \text{ mà } \angle AOM = \angle AON \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \angle AIM = \angle AIN \Rightarrow \angle JIM = \angle JIN \text{ (dpcm)}$$

b) Tam giác AMP đồng dạng với tam giác AQM . Và $AP.AQ = AI.AJ$

Xét (O) có : $\angle MQP = \angle AMP$ (cùng chắn cung PM) $\Rightarrow \angle MQA = \angle AMP$

Xét $\triangle AMP$ và $\triangle AQM$ có :

$\angle MAQ$ chung, $\angle AMP = \angle MQA \Rightarrow \triangle AMP \sim \triangle AQM (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{AP}{AM} = \frac{AM}{AQ} \text{ (hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)} \Rightarrow AP.AQ = AM^2 (1)$$

Ta có : $\angle AMN = \angle AIN$ (cùng chắn cung AN) $\Rightarrow \angle AMJ = \angle JIN$

Mà $\angle JIM = \angle JIN (cmt) \Rightarrow \angle AMJ = \angle JIM$ (do $\angle JIM = \angle JIN - cmt$) $\Rightarrow \angle AMJ = \angle AIM$

Xét $\triangle AMJ$ và $\triangle AIM$ có :

$\angle MAI$ chung, $\angle AMJ = \angle AIM (cmt) \Rightarrow \triangle AMJ \sim \triangle AIM (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AI} = \frac{AJ}{AM} \text{ (cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)} \Rightarrow AI.AJ = AM^2 (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AP.AQ = AI.AJ (dpcm)$

Ví dụ 3. Cho đường tròn tâm O , đường kính AB , dây CD vuông góc với AB tại F . Gọi M là một điểm thuộc cung nhỏ BC (M khác B , M khác C), hai đường thẳng AM và CD cắt nhau tại E

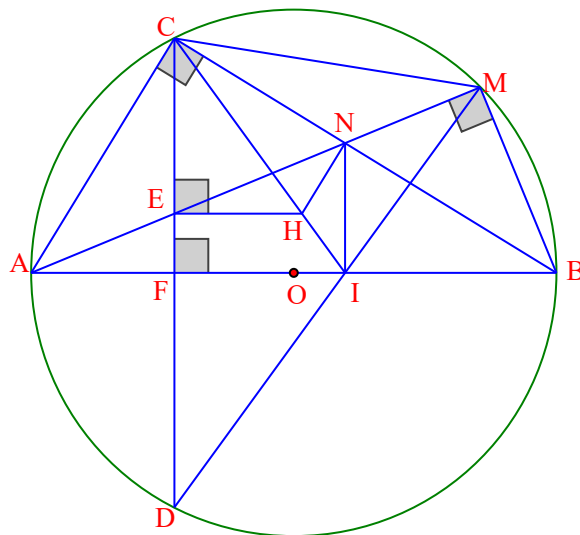
a) Chứng minh tứ giác $BMEF$ nội tiếp

b) Chứng minh tia MA là phân giác của góc CMD

c) Chứng minh $AC^2 = AE.AM$

d) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng MD và AB , N là giao điểm của hai đường thẳng AM và BC . Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEN nằm trên đường thẳng CI

Lời giải



a) Xét tứ giác $BMEF$ có:

$$\widehat{BFE} = 90^\circ \text{ (gt)}$$

$$\widehat{BFE} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BFE} + \widehat{BME} = 180^\circ$$

Mà hai góc $\widehat{BFE}$, $\widehat{BME}$ nằm ở vị trí đối nhau nên tứ giác $BMEF$ nội tiếp

b) Ta có $AB \perp CD \Rightarrow F$ là trung điểm của CD (mối liên hệ giữa đường kính và dây cung)

$\Rightarrow AB$ là đường trung trực của $CD \Rightarrow sđ \widehat{AC} = sđ \widehat{AD}$

Ta có $\widehat{AMC} = \frac{1}{2} sđ \widehat{AC}$ và $\widehat{AMD} = \frac{1}{2} sđ \widehat{AD}$

$\Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{AMD} \Rightarrow AM$ là phân giác của $\widehat{CMD}$

c) Xét $\triangle ACE$ và $\triangle AMC$ có: $\widehat{A}$: chung

$\widehat{AMC} = \frac{1}{2} sđ \widehat{AC}$ và $\widehat{ACD} = \frac{1}{2} sđ \widehat{AD} \Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{ACD}$

$\Rightarrow \triangle ACE \sim \triangle AMC$ (g-g) $\Rightarrow \frac{AC}{AM} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AC^2 = AE \cdot AM$

d) Trên CI lấy điểm H sao cho HE vuông góc với CD

Cần chứng minh tứ giác $CEHN$ nội tiếp đường tròn đường kính CH , ta đi chứng minh $\widehat{CNE} = \widehat{CHE}$

Ta có: $\widehat{NMI} = \widehat{NBI} \left(= \frac{1}{2} sđ \widehat{AC} \right) \Rightarrow$ tứ giác $BMNI$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{NIB} + \widehat{NMB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{NIB} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $ACNI$ nội tiếp

Ta có: $\widehat{CHE} = \widehat{CIA}$ (đồng vị); $\widehat{CNE} = \widehat{CIA}$ (cùng chắn cung $\widehat{AC}$)

$\Rightarrow \widehat{CNE} = \widehat{CHE} \Rightarrow$ tứ giác $CEHN$ nội tiếp

Mà $\widehat{CEH} = 90^\circ \Rightarrow CH$ là đường kính

$\Rightarrow$ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEN nằm trên CI .

Ví dụ 4. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc ngoài tại A ($R > r$). Gọi BC là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn này (với $B \in (O)$ và $C \in (O')$). Tiếp tuyến chung tại A của hai đường tròn (O) và (O') cắt đoạn thẳng BC tại M .

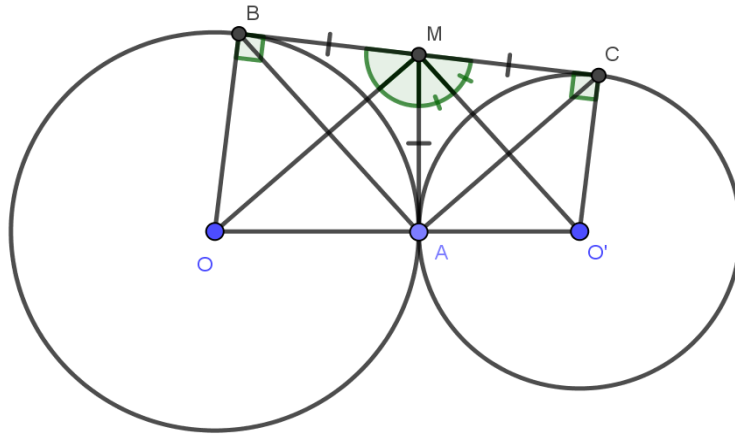
a) Chứng minh OM vuông góc với $O'M$.

b) Gọi E là giao điểm của AB với OM và F là giao điểm của AC với $O'M$. Chứng minh tứ giác $OEFO'$ nội tiếp một đường tròn.

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OEFO'$, K là trung điểm của AM . Chứng minh $OO' = 2IK$.

Lời giải

a) Chứng minh OM vuông góc với $O'M$.



Vì MA và MB là tiếp tuyến của (O) nên MO

là tia phân giác của $\widehat{AMB}$. Do đó $\widehat{OMA} = \frac{1}{2}\widehat{BMA}$

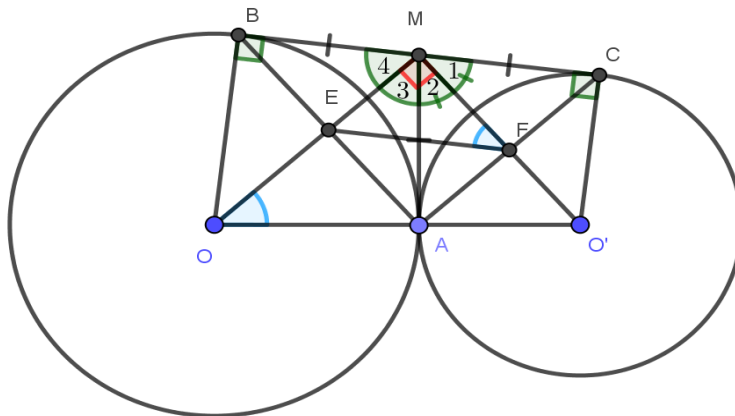
MA và MC là tiếp tuyến của (O') nên MO'

là tia phân giác của $\widehat{AMC}$. Do đó $\widehat{O'MA} = \frac{1}{2}\widehat{CMA}$

Suy ra $\widehat{OMO'} = \widehat{OMA} + \widehat{O'MA} = \frac{1}{2}(\widehat{BMA} + \widehat{CMA}) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow OM \perp O'M$

b) Gọi E là giao điểm của AB với OM và F là giao điểm của AC với $O'M$. Chứng minh tứ giác $OEFO'$ nội tiếp một đường tròn.



Ta có:

$MB = MA$ (tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau)

$OB = OA$ (bán kính R)

$\Rightarrow MO$ là đường trung trực của AB

$\Rightarrow MO \perp AB$ tại $E \Rightarrow \widehat{MEA} = 90^\circ$

Tương tự, ta có: $\widehat{MFA} = 90^\circ$

Xét tứ giác $MEAF$ có: $\widehat{MEA} = \widehat{MFE} = \widehat{OMO'} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ tứ giác $MEAF$ là hình chữ nhật (theo dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow MEAF$ là tứ giác nội tiếp

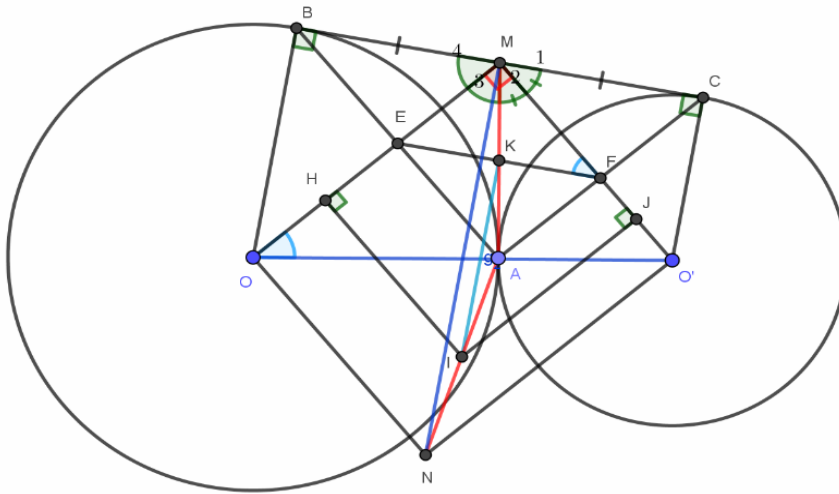
$\Rightarrow \widehat{MFE} = \widehat{MAE}$

Trong tam giác vuông AOM , ta có $\widehat{MAE} = \widehat{OAE}$

Vì vậy $\widehat{MFE} = \widehat{EOO'}$

Do đó, tứ giác $OEFO'$ nội tiếp một đường tròn (góc ngoài bằng góc trong của đỉnh đối diện)

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OEFO'$, K là trung điểm của AM . Chứng minh $OO' = 2IK$.



Cần xác định tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OEFO'$

Vẽ hai đường trung trực của hai đoạn thẳng EO và FO' lần lượt cắt EO và FO' tại H và J . Hai đường trung trực này cắt nhau tại I . I chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OEFO'$.

Qua O vẽ đường thẳng song song với MO' . Qua O' vẽ đường thẳng song song với MO . Hai đường thẳng này cắt nhau tại N . Theo cách vẽ ta được tứ giác $MONO'$ là hình chữ nhật (vì có 3 góc vuông).

Suy ra $OO' = MN$ (hai đường chéo của hình chữ nhật)

Chứng minh I là trung điểm của AN :

Hình thang $AEON$ có $HE = HO$ và $HI \parallel EA \parallel ON$

$\Rightarrow HI$ đi qua trung điểm của AN (1)

Tương tự, ta có JI đi qua trung điểm của AN (2)

Mà $I = HI \cap JI$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow I$ là trung điểm của AN

Xét $\triangle AMN$ có IK là đường trung bình của tam giác

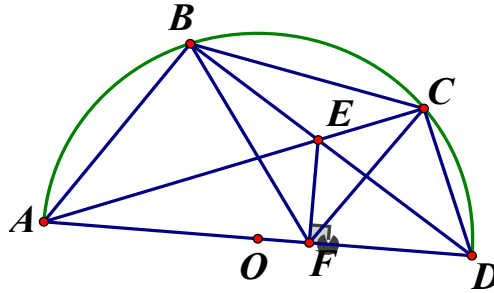
$\Rightarrow IK = \frac{1}{2}MN$

$\Rightarrow IK = \frac{1}{2}OO'$

Ví dụ 5. Cho nửa đường tròn đường kính AD . Lấy điểm B thuộc nửa đường tròn (B khác A và D), trên cung BD lấy điểm C (C khác B và D). Hai dây AC, BD cắt nhau tại điểm E . Kẻ đoạn thẳng EF vuông góc với AD ($F \in AD$)

- Chứng minh tứ giác $ABEF$ nội tiếp
- Chứng minh $AE.AC = AF.AD$
- Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BFC

Lời giải



- Chứng minh tứ giác $ABEF$ nội tiếp
 B thuộc $(O) \Rightarrow \angle ABD = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle ABE = 90^\circ$
 $EF \perp AD(gt) \Rightarrow \angle AFE = 90^\circ$

Xét tứ giác $ABEF$ có $\angle ABE + \angle AFE = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ mà 2 góc này đối nhau $\Rightarrow ABEF$ là tứ giác nội tiếp

- Chứng minh $AE.AC = AF.AD$

$C \in (O) \Rightarrow \angle ACD = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét $\triangle AFE$ và $\triangle ACD$ có :

$\angle CAD$ chung, $\angle AFE = \angle ACD = 90^\circ$

$$\Rightarrow \triangle AFE \sim \triangle ACD(g.g) \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AC.AE = AF.AD(dfcm)$$

- Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BFC

*Ta chứng minh FE là phân giác của $\angle BFC$

Xét (O) : $\angle BAC = \angle BDC$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung BC) $\Rightarrow \angle BAE = \angle EDC$ (1)

Tứ giác $ABEF$ nội tiếp (cmt) nên $\angle BAE = \angle BFE$ (cùng chắn cung BE) (2)

Tứ giác $CDFE$ có $\angle ECD + \angle EFD = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ mà hai góc này đối nhau

Nên $CDFE$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle EFC = \angle EDC$ (cùng chắn cung EC) (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \angle BFE = \angle EFC \Rightarrow FE$ là phân giác của $\angle BFC$

*Chứng minh CE là phân giác của góc BCF

Xét (O) có $\angle ACB = \angle ADB$ (cùng chắn cung AB) $\Rightarrow \angle ECB = \angle EDF$

Tứ giác $CDFE$ nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \angle ECF = \angle EDF$ (cùng chắn cung EF)

Suy ra $\angle ECB = \angle ECF \Rightarrow CE$ là phân giác $\angle BCF$

$\triangle BCF$ có FE, CE là hai đường phân giác cắt nhau tại E

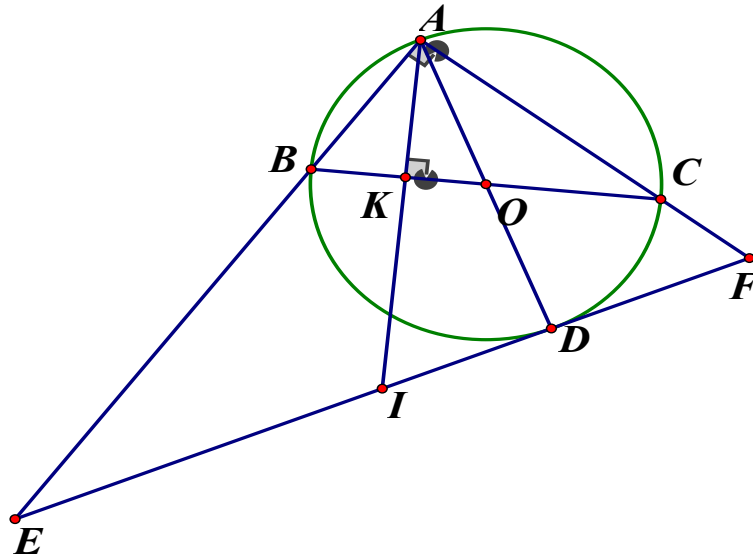
Nên E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCF (dfcm)

DẠNG 4. ĐƯỜNG TRÒN LIÊN QUAN ĐẾN BA ĐIỂM THẲNG HÀNG, BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn tâm O . Kẻ đường kính AD . Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại D cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại E và F

- a) Chứng minh hai tam giác ABC và AFE đồng dạng với nhau
 b) Gọi I là trung điểm của EF và K là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC . Chứng minh ba điểm A, K, I thẳng hàng

Lời giải



- a) Chứng minh hai tam giác ABC và AFE đồng dạng với nhau

EF là tiếp tuyến của (O) tại D nên $AD \perp EF$ tại D

Tam giác ADF vuông tại D nên $\angle AFD + \angle FAD = 90^\circ$

Mà $\angle FAD + \angle OAB = \angle BAC = 90^\circ \Rightarrow \angle AFD = \angle OAB$

Tam giác OAB có $OA = OB \Rightarrow \Delta OAB$ cân tại $O \Rightarrow \angle OAB = \angle OBA$ (hai góc ở đáy)

$\Rightarrow \angle AFD = \angle OBA$ hay $\angle AFE = \angle ABC$

Xét ΔABC và ΔAFE có :

$\angle EAF$ chung, $\angle ABC = \angle AFE$ (cmt) $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta AFE$ (g.g) (đpcm)

- b) Gọi I là trung điểm của EF và K là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC . Chứng minh ba điểm A, K, I thẳng hàng

Xét tam giác vuông AEF có AI là trung tuyến ứng với cạnh huyền EF

$\Rightarrow AI = \frac{1}{2}EF = IE = IF$ (đường trung tuyến bằng nửa cạnh huyền)

$\Rightarrow \Delta IAE$ cân tại $I \Rightarrow \angle IAE = \angle IEA = \angle AEF$

Mà $\Delta ABC \sim \Delta AFE$ (cmt) $\Rightarrow \angle AEF = \angle ACB$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow \angle IAE = \angle ACB$

Lại có $\angle ACB = \angle KAB$ (cùng phụ với $\angle ABC$) $\Rightarrow \angle IAE = \angle KBA$

Vậy A, K, I thẳng hàng (đpcm)

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O) . Gọi BE, CF là các đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC .

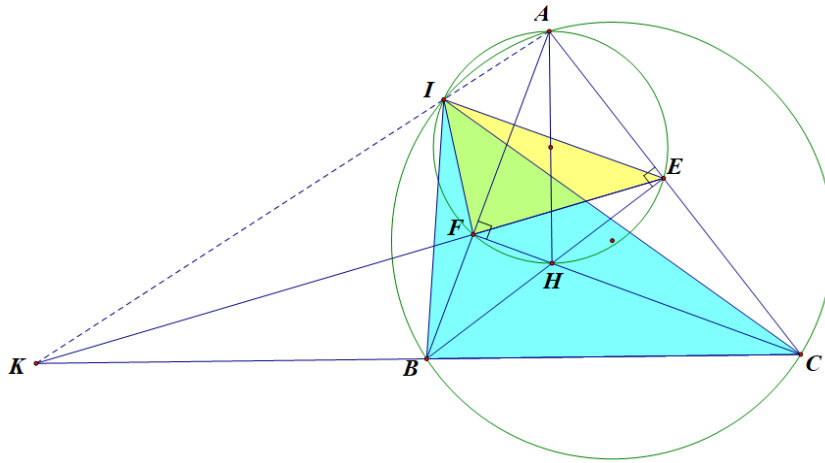
- a) Chứng minh tứ giác $AEHF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$ cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai I (A không trùng với I).

Chứng minh hai tam giác IBC và IFE đồng dạng với nhau.

c) Hai đường thẳng BC và EF cắt nhau tại K . Chứng minh ba điểm A, I, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Xét tứ giác $AEHF$, ta có: $\widehat{AFH} = 90^\circ$ (Vì CF là đường cao của tam giác ABC)

$$\widehat{AEH} = 90^\circ \text{ (Vì } BE \text{ là đường cao của tam giác } ABC)$$

$$\text{Do đó } \widehat{AFH} + \widehat{AEH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Vậy tứ giác $AEHF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Xét tứ giác $AEHF$, ta có: $\widehat{IEF} = \widehat{IAF}$ (cùng chắn $\widehat{IF}$)

$$\widehat{IAF} = \widehat{IBC} \text{ (cùng chắn } \widehat{IB})$$

$$\text{Do đó } \widehat{IEF} = \widehat{IBC}$$

$$\text{Tương tự, } \widehat{FIE} = \widehat{FAE} \text{ (cùng chắn } \widehat{EF})$$

$$\widehat{FAE} = \widehat{BIC} \text{ (cùng chắn } \widehat{BC})$$

$$\text{Do đó } \widehat{FIE} = \widehat{BIC}$$

$$\text{Xét } \triangle IBC \text{ và } \triangle IFE, \text{ ta có: } \widehat{IEF} = \widehat{IBC} \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{FIE} = \widehat{BIC} \text{ (cmt)}$$

$$\text{Do đó } \triangle IBC \sim \triangle IFE \text{ (g - g)}$$

c)

$$\text{Tứ giác } IAEF \text{ nội tiếp} \Rightarrow \widehat{IFK} = \widehat{IAE}$$

$$\text{Tứ giác } IABC \text{ nội tiếp} \Rightarrow \widehat{IBK} = \widehat{IAE}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{IFK} = \widehat{IBK}$$

Suy ra tứ giác $IFBK$ nội tiếp (có hai đỉnh B, F kề cùng nhìn cạnh IK dưới một góc bằng nhau).

$$\text{Vậy } \widehat{KIF} + \widehat{KBF} = 180^\circ, \text{ mà } \widehat{KBF} = \widehat{FEC} = \widehat{FIA}$$

$$\Rightarrow \widehat{KIF} + \widehat{FIA} = 180^\circ \text{ hay ba điểm } A, I, K \text{ thẳng hàng.}$$

DẠNG 5. ĐƯỜNG TRÒN LIÊN QUAN ĐẾN TIẾP TUYẾN, VUÔNG GÓC, SONG SONG

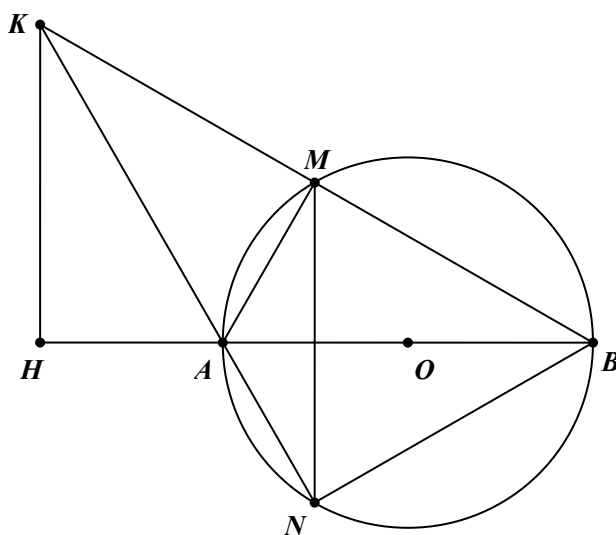
Ví dụ 1. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Dây cung MN vuông góc với AB , ($AM < BM$). Hai đường thẳng BM và NA cắt nhau tại K . Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ K đến đường thẳng AB .

a) Chứng minh tứ giác $AHKM$ nội tiếp trong một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $NB \cdot HK = AN \cdot HB$.

c) Chứng minh HM là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $AHKM$ nội tiếp trong một đường tròn.

+) Tứ giác $AHKM$ có: $\widehat{AHM} = 90^\circ$ (vì $KH \perp AB$)

và $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{AMK} = 90^\circ$ (kề bù với $\widehat{AMB}$)

Suy ra tứ giác $AHKM$ nội tiếp đường tròn đường kính AK .

b) Chứng minh rằng: $NB \cdot HK = AN \cdot HB$.

Xét $\triangle ANB$ và $\triangle KHB$ có:

+) $\widehat{ANB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{ANB} = \widehat{KHB} = 90^\circ$;

+) Đường kính $AB \perp MN \Rightarrow A$ là điểm chính giữa $\widehat{MN}$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây)

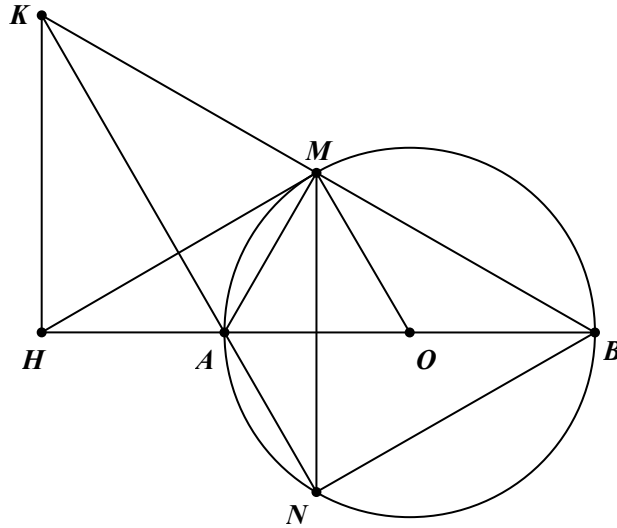
$\Rightarrow \widehat{AN} = \widehat{AM} \Rightarrow \widehat{ABN} = \widehat{KBH}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau);

Suy ra $\triangle ANB \sim \triangle KHB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AN}{NB} = \frac{KH}{HB}$$

$$\Rightarrow NB \cdot HK = AN \cdot HB.$$

c) Chứng minh HM là tiếp tuyến của đường tròn (O) .



+) Ta có HM giao với đường tròn (O) tại M , ta phải chứng minh $HM \perp OM$. Thật vậy:

Tứ giác $AHKM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HMK} = \widehat{HAK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{HK}$);

$\widehat{HAK} = \widehat{NAB}$ (hai góc đối đỉnh);

$\widehat{NAB} = \widehat{MAB}$ ($AB \perp MN \Rightarrow B$ là điểm chính giữa $\widehat{MN}$, hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau);

$\widehat{MAB} = \widehat{OMA}$ ($\triangle OAM$ cân tại O);

$\Rightarrow \widehat{HMK} = \widehat{OMA} (= \widehat{HAK} = \widehat{NAB} = \widehat{MAB}) \Rightarrow \widehat{HMK} + \widehat{HMA} = \widehat{OMA} + \widehat{HMA}$;

Mà $\widehat{HMK} + \widehat{HMA} = \widehat{AMK} = 90^\circ$ (kề bù với $\widehat{AMB} = 90^\circ$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn);

$\Rightarrow \widehat{OMA} + \widehat{HMA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HMO} = 90^\circ \Rightarrow HM \perp OM$ tại $M \in (O)$

$\Rightarrow HM$ là tiếp tuyến của (O) .

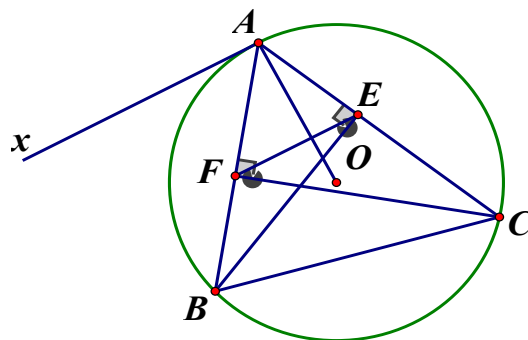
Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H ($E \in AC, F \in AB$). Chứng minh rằng :

a) Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn

b) $AE \cdot BC = EF \cdot AB$

c) $OA \perp EF$

Lời giải



a) Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn

Tứ giác $BCEF$ có $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$ (do $BE \perp AC, CF \perp AB$)

Mà 2 góc này cùng nhìn cạnh $BC \Rightarrow$ tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn

b) $AE \cdot BC = EF \cdot AB$

Tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $\angle FBC = \angle AEF$ (cùng bù với $\angle FEC$)

Xét $\triangle AEF$ và $\triangle ABC$ có : $\angle BAC$ chung, $\angle FBC = \angle AEF$ (cmt)

$$\Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC (g.g) \Rightarrow \frac{AE}{EF} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AE \cdot BC = EF \cdot AB (dfcm)$$

c) $OA \perp EF$

Kẻ tiếp tuyến Ax đi qua điểm A của đường tròn $(O) \Rightarrow Ax \perp OA$ (1)

Tứ giác $BCEF$ nội tiếp $\Rightarrow \angle AFE = \angle ACB$ (góc trong và góc ngoài tại đỉnh đối diện)

Mà $\angle xAB = \angle ACB$ (cùng chắn cung AB) $\Rightarrow \angle AFE = \angle xAB$, mà 2 góc này ở vị trí so le trong nên $Ax \parallel EF$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OA \perp EF$ (dpcm)

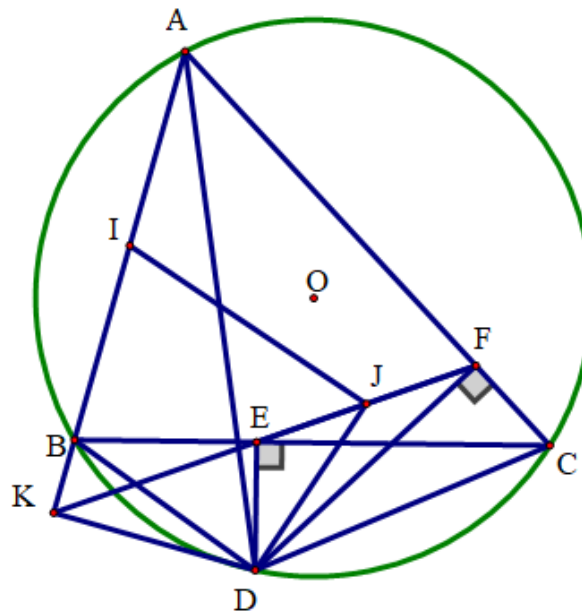
Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) , ($AB < AC$). Gọi D là điểm trên cung nhỏ BC sao cho $DB < DC$. Từ D kẻ DE vuông góc với BC (E thuộc BC), kẻ DF vuông góc với AC (F thuộc AC). Đường thẳng EF cắt tia AB tại K .

a) Chứng minh tứ giác $CDEF$ và $\widehat{DFE} = \widehat{DAB}$.

b) Chứng minh tứ giác $DKBE$ nội tiếp và $DB \cdot DF = DA \cdot DE$.

c) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và EF . Chứng minh IJ vuông góc với DJ .

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $CDEF$ và $\widehat{DFE} = \widehat{DAB}$.

Xét tứ giác $CDEF$ có:

+) $\widehat{DEC} = 90^\circ$ (DE vuông góc với BC tại E)

+) $\widehat{DFC} = 90^\circ$ (DF vuông góc với AC tại F)

$\Rightarrow$ Tứ giác $CDEF$ nội tiếp đường tròn đường kính DC (2 đỉnh E và F cùng nhìn cạnh DC dưới 1 góc vuông)

$$\Rightarrow \widehat{DFE} = \widehat{DCE} = \frac{1}{2} sđ \widehat{DE}$$

Mà $\widehat{DCE} = \widehat{DCB} = \widehat{DAB} = \frac{1}{2}sd\widehat{BD}$ trong đường tròn (O).

Do đó: $\widehat{DFE} = \widehat{DAB}$.

b) Chứng minh tứ giác $DKBE$ nội tiếp và $DB \cdot DF = DA \cdot DE$.

Ta có: $\widehat{KED} = \widehat{DCF}$ (góc ngoài bằng góc đối trong của tứ giác $CDEF$ nội tiếp)

$\widehat{DCF} = \widehat{DCA} = \widehat{KBD}$ (góc ngoài bằng góc đối trong đối với tứ giác $ABDC$ nội tiếp đường tròn (O)).

Do đó: $\widehat{KBD} = \widehat{KED} = \widehat{DCA}$ không đổi.

Suy ra tứ giác $DKBE$ nội tiếp (2 đỉnh B, E cùng phía đối với cạnh KD và cùng nhìn cạnh KD dưới 1 góc không đổi)

Ta có: $\widehat{EDF} = \widehat{ECF} = \frac{1}{2}sd\widehat{EF} = \widehat{BCA}$

Và $\widehat{BCA} = \widehat{BDA} = \frac{1}{2}sd\widehat{BA}$ trong đường tròn (O)

Suy ra $\widehat{BDA} = \widehat{EDF}$.

Xét $\triangle DBA$ và $\triangle DEF$ có:

+) $\widehat{DAB} = \widehat{DFE}$ (chứng minh trên)

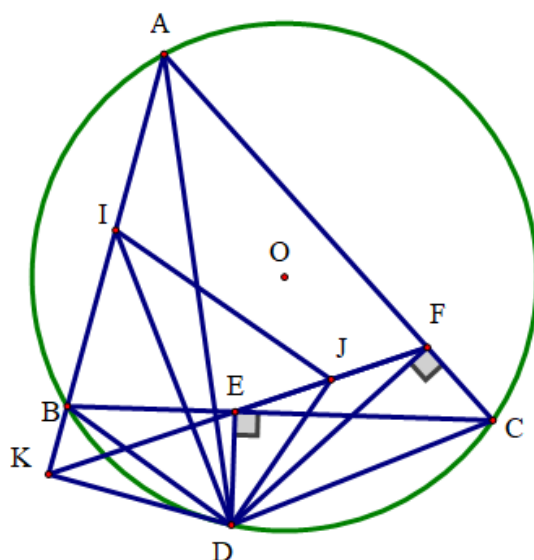
+) $\widehat{BDA} = \widehat{EDF}$ (chứng minh trên)

$\triangle DBA \sim \triangle DEF$ (góc - góc)

$$\Rightarrow \frac{DB}{DE} = \frac{DA}{DF} = \frac{BA}{EF} (*)$$

$\Rightarrow DB \cdot DF = DA \cdot DE$ (điều phải chứng minh)

c) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và EF . Chứng minh IJ vuông góc với DJ .



Từ (*) và I, J lần lượt là trung điểm của AB, EF nên ta có:

$$\frac{DB}{DE} = \frac{BA}{EF} = \frac{2IB}{2JE} = \frac{IB}{JE}$$

Xét $\triangle DBI$ và $\triangle DEJ$ ta có:

+) $\widehat{DBI} = \widehat{DEJ}$ ($\triangle DBA \sim \triangle DEF$ chứng minh trên)

$$+) \frac{DB}{DE} = \frac{IB}{JE} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\Rightarrow \triangle DBI \square \triangle DEJ \text{ (cạnh - góc - cạnh)}$$

$$\Rightarrow \widehat{DIB} = \widehat{DJE} \Rightarrow \widehat{KID} = \widehat{KJD} = \text{góc không đổi.}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $IKDJ$ nội tiếp (2 đỉnh I, J cùng phía với cạnh KD và cùng nhìn cạnh KD dưới 1 góc không đổi)

$$\Rightarrow \widehat{IKD} + \widehat{IJD} = 180^\circ.$$

Mà tứ giác $DKBE$ nội tiếp nên $\widehat{IKD} = \widehat{BKD} = 180^\circ - \widehat{BED} = 90^\circ$

Do đó: $\widehat{IJD}$ vuông hay IJ vuông góc với DJ .

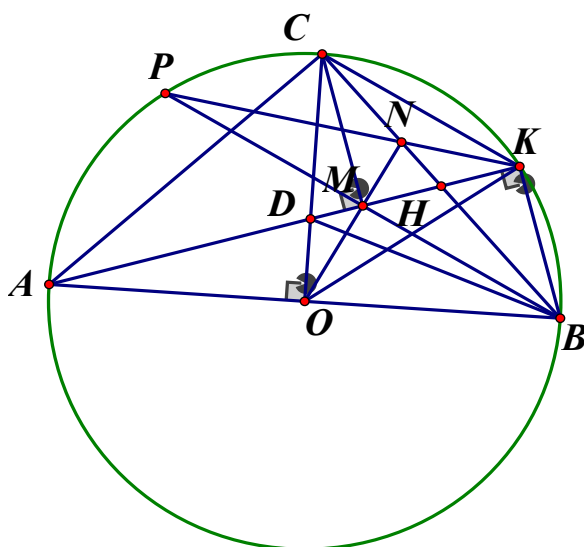
Ví dụ 4. Cho đường tròn (O) , đường kính AB , bán kính OC vuông góc với AB . Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC . Đường thẳng AH cắt OC tại D và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K (K khác A)

a) Chứng minh tứ giác $ODKB$ nội tiếp một đường tròn

b) Tia phân giác của góc COK cắt AK tại M . Chứng minh $\angle CMA = 90^\circ$

c) Đường thẳng OM cắt BC tại N , NK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là P (P khác K). Chứng minh B đối xứng với P qua M

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $ODKB$ nội tiếp một đường tròn

Xét (O) có: K thuộc đường tròn nên $\angle AKB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow \angle DKB = 90^\circ \Rightarrow \triangle BDK \text{ vuông tại } K$$

$$\Rightarrow K \text{ thuộc đường tròn đường kính } BD(1)$$

Ta có $OC \perp AB$ tại O (gt) $\Rightarrow \angle BOC = 90^\circ \Rightarrow \angle BOD = 90^\circ \Rightarrow \triangle OBD$ vuông tại O

$$\Rightarrow O \text{ thuộc đường tròn đường kính } BD(2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow O, K$ thuộc đường tròn đường kính BD

Vậy tứ giác $ODKB$ nội tiếp một đường tròn

b) Tia phân giác của góc COK cắt AK tại M . Chứng minh $\angle CMA = 90^\circ$

Xét tam giác COK có $OC = OK \Rightarrow \triangle COK$ cân tại O

$$\Rightarrow \angle OCK = \angle CKO$$

Lại có ON là phân giác của góc COK (gt)

$\Rightarrow ON$ đồng thời là đường trung bình của

Mà $M \in ON \Rightarrow CM = MK$ (tính chất đường trung trực)

$\Rightarrow \triangle CMK$ cân tại $M \Rightarrow \angle MCK = \angle CKM$

Ta có :

$\angle OCK = \angle CKO$ (cmt)

$\Rightarrow \angle OCM + \angle CMK = \angle OKM + \angle MKC$

$\Rightarrow \angle OCM = \angle OKM$ (do $\angle MCK = \angle CKM$ (cmt))

$\Rightarrow \angle OCM = \angle DKO$ (3)

Tứ giác $DKBO$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \angle DKO = \angle DBO$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung OD) (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\angle OCM = \angle DBO$

Tam giác ABD có :

DO là đường cao (do OC vuông góc với AB tại O)

DO là đường trung tuyến (do O là tâm đường tròn đường kính AB nên O là trung điểm của AB)

$\Rightarrow \triangle ABD$ cân tại $D \Rightarrow \angle DAO = \angle DBO \Rightarrow \angle MAO = \angle DBO$

Mà $\angle OCM = \angle DBO$ (cmt) $\Rightarrow \angle MAO = \angle OCM$

Xét tứ giác $AOMC$ có : $\angle MAO = \angle OCM$ mà hai góc này có đỉnh kề nhau cùng chắn cung $AC \Rightarrow AOMC$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle AOC = \angle AMC$

Mà $\angle AOC = 90^\circ$ (do AB vuông góc với CO tại O)

$\Rightarrow \angle AMC = 90^\circ$ (đpcm)

c) Đường thẳng OM cắt BC tại N , NK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là P (P khác K). Chứng minh B đối xứng với P qua M

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AHC có :

$$HM.HA = HC^2 = HB^2 \Rightarrow \frac{HM}{HB} = \frac{HB}{HA}$$

Xét $\triangle HBM$ và $\triangle HAB$ có : $\angle AHB$ chung, $\frac{HM}{HB} = \frac{HB}{HA}$ (cmt) $\Rightarrow \triangle HBM \sim \triangle HAB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \angle HAB = \angle HBM$ (hai góc tương ứng)

Mà $\angle HAB = \angle KPB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung KB)

$\Rightarrow \angle KBP = \angle HBM$ hay $\angle NPB = \angle NBP$

$\Rightarrow \triangle NBP$ cân tại N (tam giác có hai góc ở đáy bằng nhau)

$\Rightarrow NB = NP$

Xét $\triangle ONB$ và $\triangle ONP$ có :

$OB = OP (= R)$, ON chung, $NB = NP$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle ONB = \triangle ONP$ (c.c.c)

$\Rightarrow \angle NOB = \angle NOP$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow ON$ là phân giác của $\angle BOP$

$\Rightarrow OM$ là phân giác của $\angle BOP$

Xét tam giác OBP có: $OB = OP = R$, nên $\triangle OBP$ cân tại $O \Rightarrow$ phân giác OM đồng thời là đường trung tuyến $\Rightarrow M$ là trung điểm của BP

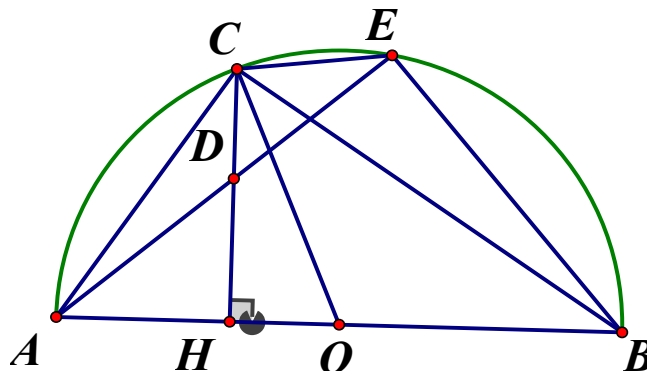
Vậy B đối xứng với P qua M (đpcm)

DẠNG 6. ĐƯỜNG TRÒN LIÊN QUAN ĐẾN GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Ví dụ 1. Trên nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$, lấy điểm C (C khác A và B), từ C kẻ CH vuông góc với AB ($H \in AB$). Gọi D là điểm bất kỳ trên đoạn CH (D khác C và H), đường thẳng AD cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai là E

- Chứng minh tứ giác $BHDE$ nội tiếp
- Chứng minh $AD \cdot EC = CD \cdot AC$
- Khi điểm C di động trên nửa đường tròn (C khác A, B và điểm chính giữa cung AB), xác định vị trí của điểm C sao cho chu vi tam giác COH đạt giá trị lớn nhất

Lời giải



- Chứng minh tứ giác $BHDE$ nội tiếp

Ta có : $\angle BEA = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle BED = 90^\circ$

Xét tứ giác $BHDE$ có : $\angle BED + \angle BHD = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, mà 2 góc này đối nhau

Nên $BHDE$ là tứ giác nội tiếp

- Chứng minh $AD \cdot EC = CD \cdot AC$

Ta có $\angle ACB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \angle ABC = \angle ACH$ (cùng phụ với $\angle BCH$)

Mà $\angle AEC = \angle ABC$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

$\Rightarrow \angle AEC = \angle ACH = \angle ACD$

Xét $\triangle ACD$ và $\triangle AEC$ có :

$\angle CAE$ chung, $\angle ACD = \angle AEC$ (cmt) $\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle AEC$ (g.g)

$$\frac{AD}{AC} = \frac{CD}{EC} \text{ (hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)}$$

Vậy $AD \cdot EC = CD \cdot AC$ (đpcm)

- Khi điểm C di động trên nửa đường tròn (C khác A, B và điểm chính giữa cung AB), xác định vị trí của điểm C sao cho chu vi tam giác COH đạt giá trị lớn nhất

Chu vi tam giác COH là $P_{COH} = OC + OH + CH$

Do OC bằng bán kính đường tròn đường kính AB không đổi nên

$$P_{COH} \max \Leftrightarrow (OH + CH)_{\max}$$

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta có :

$$(OH + CH)^2 \leq 2(OH^2 + CH^2) = 2OC^2 \text{ (Định lý Pytago)}$$

$$\Rightarrow OH + CH \leq OC\sqrt{2}$$

Khi đó ta có $P_{COH} = OC + OH + CH \leq OC + OC\sqrt{2} = R(1 + \sqrt{2})$

Dấu "=" xảy ra khi $OH = CH \Rightarrow \Delta OCH$ vuông cân tại H $\Rightarrow \angle COH = 45^\circ \Rightarrow \angle COA = 45^\circ$

Vậy để chu vi tam giác COH đạt giá trị lớn nhất bằng $R(1 + \sqrt{2})$ thì điểm C nằm trên nửa đường tròn đường kính AB sao cho $\angle COA = 45^\circ$

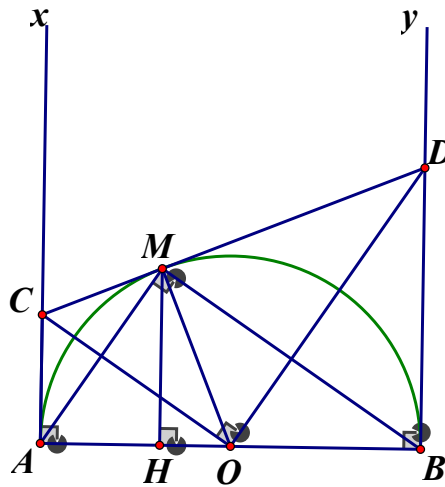
Ví dụ 2. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB , M là một điểm bất kỳ thuộc nửa đường tròn (M khác A, B). Tiếp tuyến tại M cắt các tiếp tuyến Ax, By của đường tròn (O) lần lượt tại C và D

a) Chứng minh tứ giác $ACMO$ nội tiếp

b) Chứng minh CO vuông góc với OD

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác ACM, BDM

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $ACMO$ nội tiếp

Vì Ax là tiếp tuyến của (O) tại A (gt) $\Rightarrow Ax \perp AB \Rightarrow \angle OAC = 90^\circ$

Vì CD là tiếp tuyến của (O) tại M $\Rightarrow CD \perp OM \Rightarrow \angle OMC = 90^\circ$

Xét tứ giác $ACMO$ có $\angle OAC + \angle OMC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ mà hai góc này đối nhau

Nên $ACMO$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh CO vuông góc với OD

AC, CD là tiếp tuyến của đường tròn (O) $\Rightarrow OC$ là tia phân giác của $\angle AOM$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \angle COM = \frac{1}{2} \angle AOM$

BD, CD là tiếp tuyến của đường tròn (O) $\Rightarrow OD$ là tia phân giác của $\angle BOM$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \angle DOM = \frac{1}{2} \angle BOM$

Ta có $\angle AOM + \angle BOM = 180^\circ$ (hai góc kề bù)
 $\Rightarrow \frac{1}{2} \angle AOM + \frac{1}{2} \angle BOM = 90^\circ \Rightarrow \angle COM + \angle DOM = 90^\circ \Rightarrow \angle COD = 90^\circ$

Vậy $CO \perp DO$ (đpcm)

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác ACM, BDM

Kẻ $MH \perp AB$

Ta có $CA = CM, DB = DM$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Mà $CD = CM + DM$ nên $CD = CA + DB = AC + BD$

Trong tam giác MHO ta có $MH \leq MO = R$

Trong tứ giác $ABDC$ là hình thang vuông nên $CD \geq AB = 2R$

$$\text{Ta có } S_{ABDC} = \frac{(AC + BD) \cdot AB}{2} = \frac{CD \cdot AB}{2} \geq \frac{AB \cdot AB}{2} = 2R^2$$

$$S_{MAB} = \frac{MH \cdot AB}{2} \leq \frac{MO \cdot AB}{2} = R^2$$

$$\Rightarrow S_{ACM} + S_{BDM} = S_{ABDC} - S_{MAB} \geq 2R^2 - R^2 = R^2$$

Dấu bằng xảy ra khi $H \equiv O \Leftrightarrow M$ là điểm nằm chính giữa cung AB

Vậy M nằm chính giữa cung AB thì tổng diện tích tam giác ACM và BDM nhỏ nhất bằng R^2

C. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

9.18. Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp. Tính số đo của các góc còn lại của tứ giác trong mỗi trường hợp sau:

a) $\hat{A} = 60^\circ, \hat{B} = 80^\circ$;

b) $\hat{B} = 70^\circ, \hat{C} = 90^\circ$;

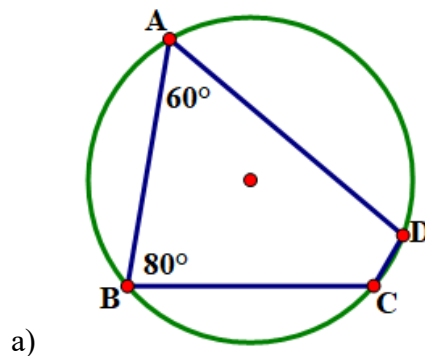
c) $\hat{C} = 100^\circ, \hat{D} = 60^\circ$;

d) $\hat{D} = 110^\circ, \hat{A} = 80^\circ$.

Lời giải

Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) nên các góc đối diện có tổng số đo bằng 180° . Do đó

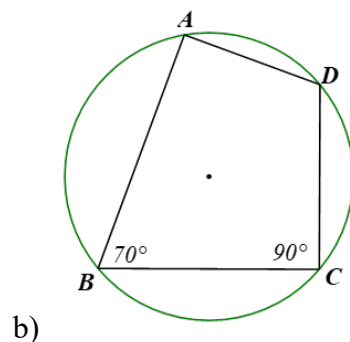
$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \text{ và } \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ .$$



Ta có:

- $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ hay $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$;

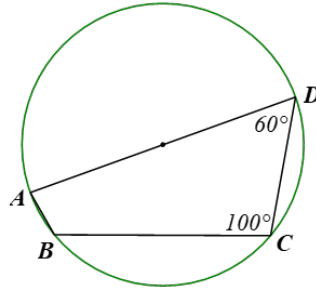
- $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$ hay $\hat{D} = 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.



Ta có:

- $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ hay $\hat{A} = 180^\circ - \hat{C} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$;

- $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$ hay $\hat{D} = 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

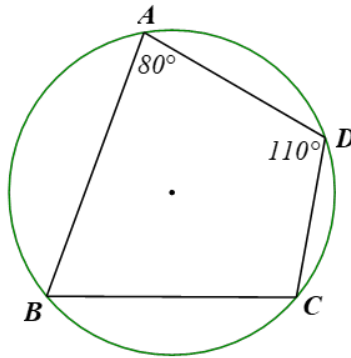


c)

Ta có:

$$- \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \text{ hay } \hat{A} = 180^\circ - \hat{C} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ;$$

$$- \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \text{ hay } \hat{B} = 180^\circ - \hat{D} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$



d)

Ta có:

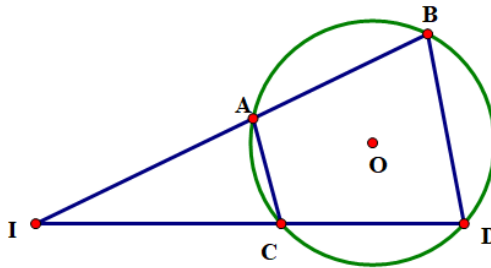
$$- \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \text{ hay } \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ;$$

$$- \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \text{ hay } \hat{B} = 180^\circ - \hat{D} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ.$$

9.19. Cho điểm I nằm ngoài đường tròn (O). Qua I kẻ hai đường thẳng lần lượt cắt (O) tại bốn điểm A, B và C, D sao cho A nằm giữa B và I, C nằm giữa D và I. Chứng minh rằng

$$\widehat{IBD} = \widehat{ICA}, \widehat{IAC} = \widehat{IDB} \text{ và } IA \cdot IB = IC \cdot ID.$$

Lời giải



- Vì tứ giác ABDC nội tiếp đường tròn (O) nên các góc đối diện có tổng số đo bằng 180° .

$$\text{Do đó: } \widehat{DCA} + \widehat{ABD} = 180^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{DCA} + \widehat{ICA} = 180^\circ \text{ (hai góc kề bù) nên } \widehat{ABD} = \widehat{ICA} \text{ hay } \widehat{IBD} = \widehat{ICA}.$$

$$- \widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^\circ.$$

$$\text{Mà } \widehat{BAC} + \widehat{IAC} = 180^\circ \text{ (hai góc kề bù) nên } \widehat{BDC} = \widehat{IAC} \text{ hay } \widehat{IDB} = \widehat{IAC}.$$

- Xét $\triangle IAC$ và $\triangle IDB$, có:

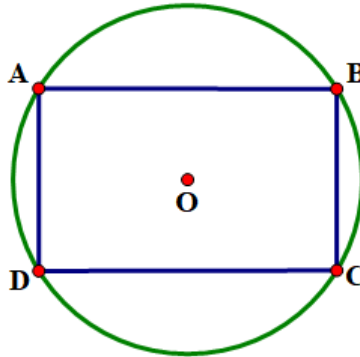
$$\widehat{IAC} = \widehat{IDB} \text{ (chứng minh trên) và } \widehat{BID} \text{ là góc chung}$$

Do đó $\triangle IAC \sim \triangle IDB(g.g)$

Suy ra $\frac{IA}{ID} = \frac{IC}{IB}$ (tỉ số đồng dạng) nên $IA \cdot IB = IC \cdot ID$.

9.20. Cho hình bình hành $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Chứng minh rằng $ABCD$ là hình chữ nhật.

Lời giải



Vì hình bình hành $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) nên các góc đối diện có tổng số đo bằng 180° .

Do đó: $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$. (1)

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên hai góc đối bằng nhau, do đó $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ABC} + \widehat{ABC} = 180^\circ$.

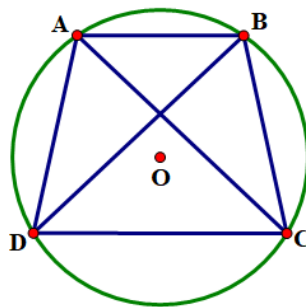
Hay $2\widehat{ABC} = 180^\circ$, do đó $\widehat{ABC} = 90^\circ$.

Hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{ABC} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật.

Vậy $ABCD$ là hình chữ nhật.

9.21. Cho hình thang $ABCD$ (AB song song với CD) nội tiếp đường tròn (O) . Chứng minh rằng $ABCD$ là hình thang cân.

Lời giải



Vì hình thang $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) nên các góc đối diện có tổng số đo bằng 180° .

Do đó: $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$. (1)

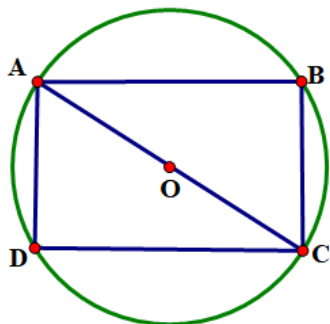
Vì $ABCD$ là hình thang nên $AB \parallel CD$, do đó $\widehat{ABC} + \widehat{BCD} = 180^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$.

Hình thang $ABCD$ có $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$ nên là hình thang cân.

9.22. Tính diện tích của một hình chữ nhật, biết rằng hình chữ nhật đó có chiều dài gấp hai lần chiều rộng và bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $2,5\text{ cm}$.

Lời giải



Vì ABCD là hình chữ nhật nên nó nội tiếp đường tròn tâm O là giao điểm hai đường chéo AC, BD và bán kính bằng nửa độ dài đường chéo AC, hay AC là đường kính của đường tròn (O).

Do đó $AC = 2 \cdot 2,5 = 5(\text{cm})$.

Vì ABCD là hình chữ nhật nên $\widehat{ABC} = 90^\circ$.

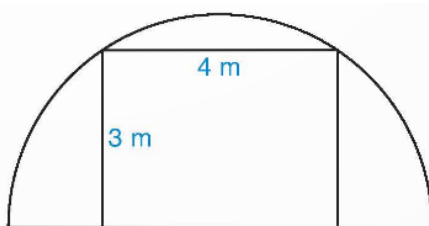
Áp dụng định lý Pythagore vào $\triangle ABC$ vuông tại B, ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2$

Suy ra $5^2 = (2BC)^2 + BC^2$. Do đó $25 = 4BC^2 + BC^2$

Hay $5BC^2 = 25$, suy ra $BC^2 = 5$, nên $BC = \sqrt{5}(\text{cm})$. Khi đó, $AB = 2BC = 2\sqrt{5}(\text{cm})$.

Vậy diện tích hình chữ nhật ABCD là: $S = AB \cdot BC = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 10(\text{cm}^2)$

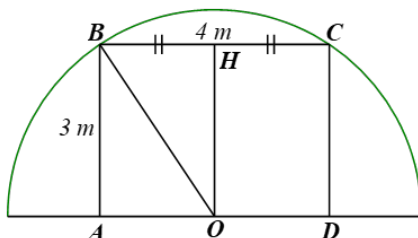
9.23. Người ta muốn dựng một khung cổng hình chữ nhật rộng 4m và cao 3m, bên ngoài khung cổng được bao bởi một khung thép dạng nửa đường tròn như Hình 9.37. Tính chiều dài của đoạn thép làm khung nửa đường tròn đó.



Hình 9.37

Lời giải

Giả sử ABCD là khung cổng hình chữ nhật ($AB = CD = 3\text{ m}$ và $AD = BC = 4\text{ m}$) nội tiếp nửa đường tròn (O) (hình vẽ).



Gọi H là trung điểm của CD.

Khi đó $HB = HC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2(\text{m})$ và H nằm trên đường trung trực của BC.

Vì B, C cùng nằm trên nửa đường tròn (O) nên $OB = OC$, suy ra O nằm trên đường trung trực của BC.

Do đó OH là đường trung trực của đoạn thẳng BC, nên $OH \perp BC$.

Mà $BC \parallel AD$ (do ABCD là hình chữ nhật) nên $OH \perp AD$.

Xét tứ giác ABHO có $\widehat{OAB} = \widehat{AOH} = \widehat{OHB} = 90^\circ$ nên ABHO là hình chữ nhật. Do đó $OH = AB = 3(\text{m})$.

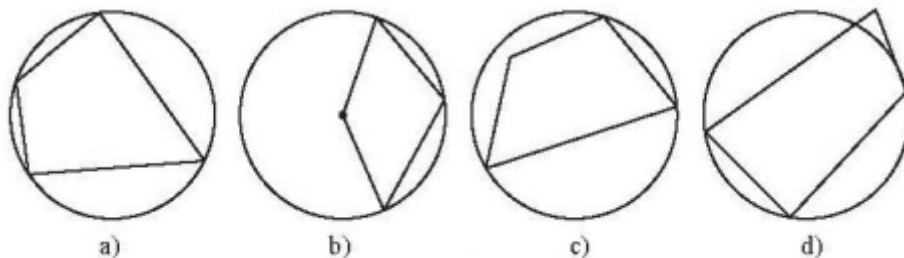
Xét $\triangle OBH$ vuông tại H, theo định lý Pythagore, ta có: $OB^2 = OH^2 + HB^2 = 3^2 + 2^2 = 13$.

Do đó $OB = \sqrt{13} \text{ m}$. Nửa chu vi đường tròn (O) là: $\pi\sqrt{13}(\text{m})$.

Vậy chiều dài của đoạn thép làm khung nửa đường tròn đó là: $\pi\sqrt{13}(\text{m})$.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong các tứ giác sau, tứ giác nào nội tiếp được đường tròn? Giải thích.

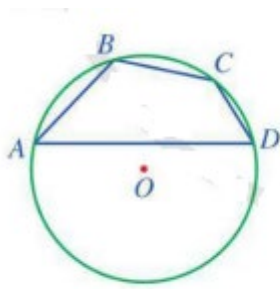


Lời giải

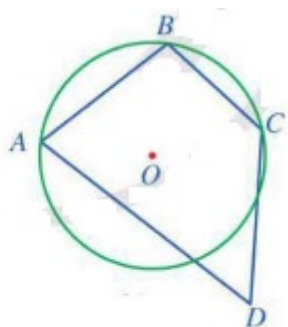
Ở hình a) và hình b), tứ giác nội tiếp đường tròn vì 4 đỉnh tứ giác nằm trên đường tròn

Ở hình c) và hình d), tứ giác không nội tiếp đường tròn vì có một đỉnh tứ giác không nằm trên đường tròn

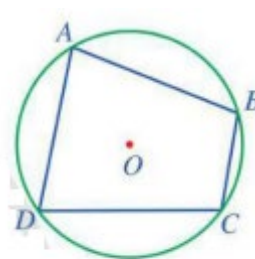
Bài 2. Trong các đường tròn (O) sau, đường tròn nào ngoại tiếp tứ giác ABCD? Giải thích.



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Lời giải

Ở hình 1) và hình 3), đường tròn (O) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD vì nó đi qua cả bốn đỉnh của tứ giác ABCD.

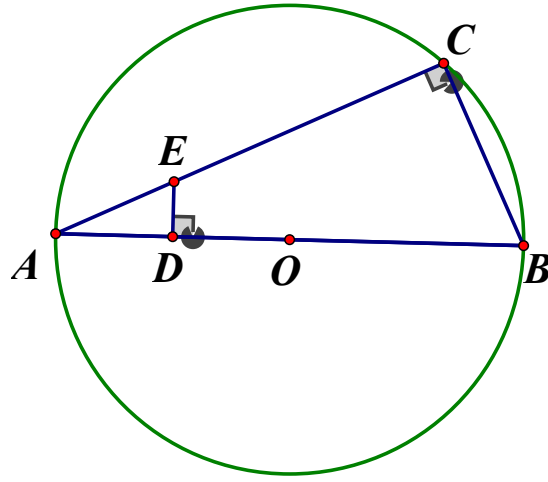
Ở hình 2), đường tròn (O) là đường tròn không ngoại tiếp tứ giác ABCD vì nó không đi qua đỉnh D của tứ giác.

Bài 3. Trên nửa đường tròn (O) đường kính AB lấy điểm C sao cho $AC > BC$ (C khác A và B). Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng OA. Đường thẳng qua D và vuông góc với AB cắt AC tại E. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác BCED nội tiếp được

b) $AC \cdot AE = \frac{AB^2}{4}$

Lời giải



a) Tứ giác $BCED$ nội tiếp

C thuộc đường tròn đường kính $AB \Rightarrow \angle ACB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \angle ECB = 90^\circ$, mặt khác $ED \perp AB$ tại D (gt) $\Rightarrow \angle EDB = 90^\circ$

Tứ giác $BCED$ có $\angle ECB + \angle EDB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ mà hai góc này đối nhau

Suy ra $BCED$ là tứ giác nội tiếp

$$AC \cdot AE = \frac{AB^2}{4}$$

b)

Xét $\triangle AED$ và $\triangle ABC$ có :

$$\left. \begin{array}{l} \angle BAC \text{ chung} \\ \angle ADE = \angle ACB = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AED \sim \triangle ABC (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} \text{ (cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)} \Rightarrow AC \cdot AE = AD \cdot AB$$

$$\text{Mà } D \text{ là trung điểm của } AO \text{ (gt)} \Rightarrow AD = \frac{1}{2} AO$$

$$O \text{ là tâm đường tròn đường kính } AB \text{ (gt)} \Rightarrow AO = \frac{1}{2} AB$$

$$\text{Suy ra } AD = \frac{1}{2} AO = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} AB = \frac{1}{4} AB$$

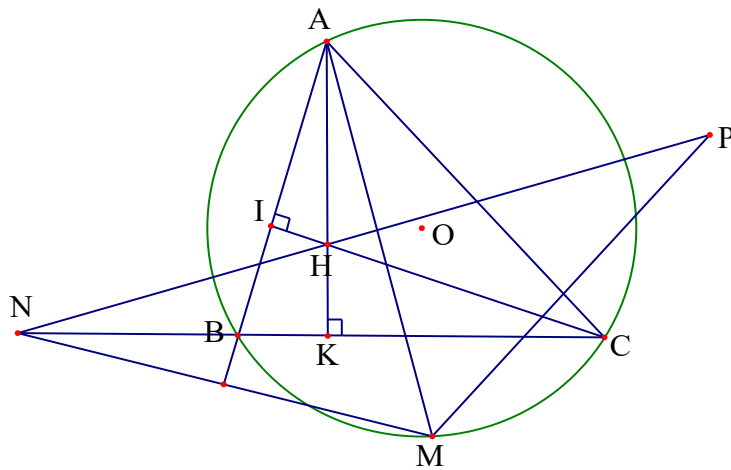
$$\text{Do đó, } AC \cdot AE = \frac{1}{4} AB \cdot AB = \frac{AB^2}{4} \text{ (đpcm)}$$

Bài 4. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) có trục tâm là điểm H . Gọi M là điểm trên dây cung BC không chứa điểm A (M khác B, C). Gọi N, P theo thứ tự là các điểm đối xứng của M qua các đường thẳng AB, AC

a) Chứng minh $AHCP$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh N, H, P thẳng hàng.

Lời giải



a). Giả sử các đường cao của tam giác là AK, CI . Để chứng minh $AHCP$ là tứ giác nội tiếp ta sẽ chứng minh $\widehat{AHC} + \widehat{APC} = 180^\circ$.

Ta có:

$$\widehat{AHC} = \widehat{IHK} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\widehat{APC} = \widehat{AMC} = \widehat{ABC} \text{ (do tính đối xứng và góc nội tiếp cùng chắn một cung).}$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh $\widehat{ABC} + \widehat{IHK} = 180^\circ$ nhưng điều này là hiển nhiên do tứ giác $BIHK$ là tứ giác nội tiếp.

b). Để chứng minh N, H, P thẳng hàng ta sẽ chứng minh $\widehat{NHA} + \widehat{AHP} = 180^\circ$ do đó ta sẽ tìm cách quy hai góc này về 2 góc đối nhau trong một tứ giác nội tiếp.

Thật vậy ta có: $\widehat{AHP} = \widehat{ACP}$ (tính chất góc nội tiếp), $\widehat{ACP} = \widehat{ACM}$ (1) (Tính chất đối xứng).

Ta thấy vai trò tứ giác $AHCP$ giống với $AHBN$ nên ta cũng dễ chứng minh được $AHBN$ là tứ giác nội tiếp từ đó suy ra $\widehat{AHN} = \widehat{ABN}$, mặt khác $\widehat{ABN} = \widehat{ABM}$ (2) (Tính chất đối xứng).

Từ (1), (2) ta suy ra chỉ cần chứng minh $\widehat{ABM} + \widehat{ACM} = 180^\circ$ nhưng điều này là hiển nhiên do tứ giác $ABMC$ nội tiếp.

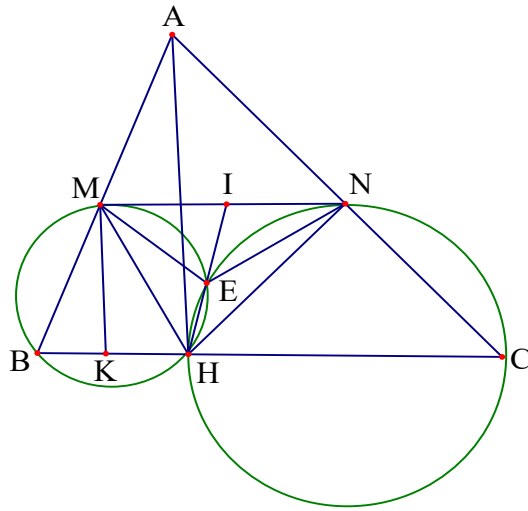
Vậy $\widehat{NHA} + \widehat{AHP} = 180^\circ$ hay N, H, P thẳng hàng.

Bài 5. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A ở bên ngoài đường tròn. Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi M là trung điểm AB .

- Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp và xác định tâm I của đường tròn này.
- Chứng minh rằng $AM.AO = AB.AI$.
- Gọi G là trọng tâm tam giác ACM . Chứng minh $MG \parallel BC$.
- Chứng minh IG vuông góc với CM .

Lời giải

Lời giải



Để chứng minh AMEN là tứ giác nội tiếp ta sẽ

chứng minh: $\widehat{MAN} + \widehat{MEN} = 180^\circ$.

Ta cần tìm sự liên hệ của các góc $\widehat{MAN}; \widehat{MEN}$ với các góc có sẵn của những tứ giác nội tiếp khác.

Ta có $\widehat{MEN} = 360^\circ - (\widehat{MEH} + \widehat{NEH}) = 360^\circ - (180^\circ - \widehat{ABC} + 180^\circ - \widehat{ACB}) = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{BAC}$ suy ra $\widehat{MEN} + \widehat{MAN} = 180^\circ$. Hay tứ giác AMEN là tứ giác nội tiếp.

Kẻ $MK \perp BC$, giả sử HE cắt MN tại I thì IH là cát tuyến của hai đường tròn (BMH), (CNH).

Lại có $MB = MH = MA$ (Tính chất trung tuyến tam giác vuông).

Suy ra tam giác MBH cân tại M $\Rightarrow KB = KH \Rightarrow MK$ luôn đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MBH.

Hay MN là tiếp tuyến của (MBH) suy ra $IM^2 = IE.IH$, tương tự ta cũng có MN là tiếp tuyến của (HNC)

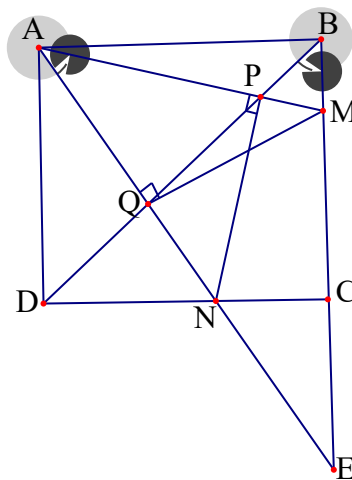
suy ra $IN^2 = IE.IH$ do đó $IM = IN$.

Bài 7. Trên các cạnh BC, CD của hình vuông ABCD ta lấy lần lượt các điểm M, N sao cho $\widehat{MAN} = 45^\circ$. Đường thẳng BD cắt các đường thẳng AM, AN tương ứng tại các điểm P, Q.

a) Chứng minh rằng các tứ giác ABMQ và ADNP nội tiếp.

b) Chứng minh rằng các điểm M, N, Q, P, C nằm trên cùng một đường tròn.

Lời giải



a). Gọi E là giao điểm của AN và BC.

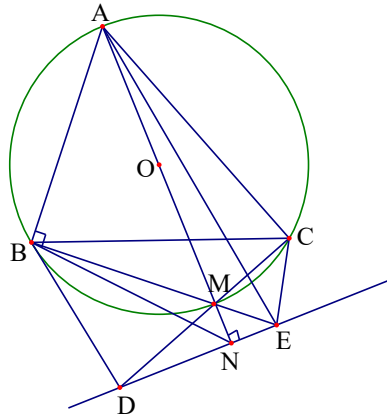
Các điểm M và Q nằm trên hai cạnh EB và EA của tam giác EBA, nên tứ giác ABMQ là nội tiếp. Các đỉnh A và B cùng nhìn đoạn thẳng MQ dưới một góc 45^0 không đổi. Vì vậy tứ giác ABMQ nội tiếp.

Lập luận tương tự ta suy ra tứ giác ADNP nội tiếp.

b) Từ kết quả câu a, suy ra $\widehat{ADP} = \widehat{ANP} = 45^0, \widehat{QAM} = \widehat{QBM} = 45^0 \Rightarrow NP \perp AM, MQ \perp AN$. Tập hợp các điểm P, Q, C nhìn đoạn MN dưới một góc vuông, nên các điểm này nằm trên đường tròn đường kính MN.

Bài 8. Cho điểm M thuộc cung nhỏ BC của đường tròn (O). Một đường thẳng d ở ngoài (O) và vuông góc với OM; CM, BM cắt d lần lượt tại D, E. Chứng minh rằng B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải



Kẻ đường kính AM cắt d tại N.

Ta có $\widehat{ANE} = \widehat{ABE} = 90^0$ nên tứ giác ABNE nội tiếp, suy ra $\widehat{BEN} = \widehat{BAN}$.

Mặt khác $\widehat{BAN} = \widehat{BCM}$, do đó $\widehat{BCM} = \widehat{BEN}$ hay $\widehat{BCD} = \widehat{BED}$.

Tứ giác BCDE có các đỉnh C và E cùng nhìn đoạn thẳng BD dưới một góc không đổi. Vì vậy tứ giác BCDE nội tiếp.

Vậy B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.

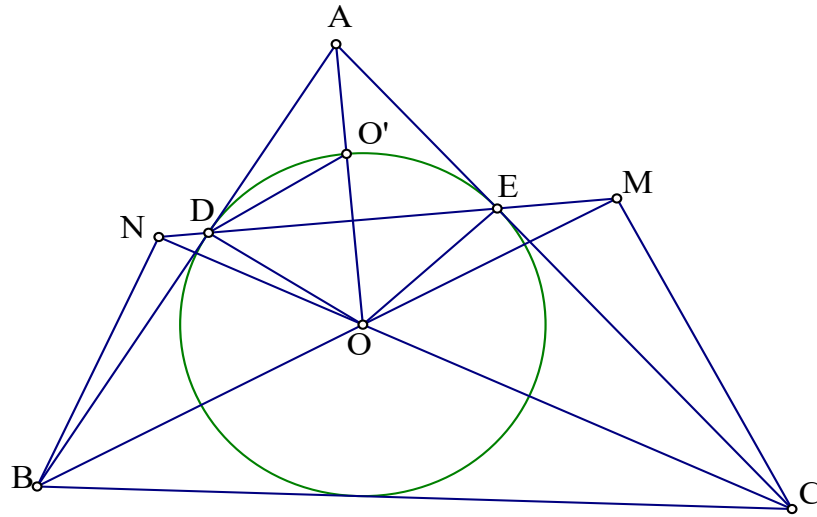
Bài 9. Cho đường tròn $(O; R)$ nội tiếp $\triangle ABC$, tiếp xúc với cạnh AB, AC lần lượt ở D và E

a) Gọi O' là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ADE$, tính OO' theo R.

b) Các đường phân giác trong của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt đường thẳng DE lần lượt tại M và N. Chứng minh tứ giác BCMN nội tiếp được đường tròn.

c) Chứng minh $\frac{MN}{BC} = \frac{DM}{AC} = \frac{EN}{AB}$.

Lời giải



a). Gọi O' là giao điểm của AO với cung nhỏ DE của đường tròn $(O) \Rightarrow O'$ thuộc đường phân giác của $\widehat{A}$ trong $\triangle ADE$.

Ta có $\widehat{DOA} = \widehat{EOA}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \widehat{DO'} = \widehat{O'E}$.

Mà $\widehat{ADO'} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{DO'}$; $\widehat{EDO'} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{O'E} \Rightarrow \widehat{ADO'} = \widehat{EDO'} \Rightarrow DO'$ là phân giác $\widehat{D} \Rightarrow O'$ là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ADE$. Do đó $OO' = R$.

b) Do $AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \triangle ADE$ cân tại A nên $\widehat{ADE} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2}$.

Mà $\widehat{ADE} = \widehat{ABM} + \widehat{NMB} = \frac{\widehat{ABC}}{2} + \widehat{NMB}$ (do BO là phân giác $\widehat{ABC}$ nên $\widehat{ABM} = \frac{\widehat{ABC}}{2}$)
 $\Rightarrow \widehat{NMB} = \widehat{ADE} - \frac{\widehat{B}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{BAC} + \widehat{ABC}}{2} = \frac{\widehat{ACB}}{2}$.

Mặt khác $\widehat{NCB} = \frac{\widehat{ACB}}{2}$ (do CO là tia phân giác $\widehat{ACB}$).

Suy ra $\widehat{NMB} = \widehat{NCB}$, mà M, C là hai đỉnh liên tiếp của tứ giác $BCM N \Rightarrow$ Tứ giác $BCM N$ nội tiếp (vì cùng thuộc một cung chứa góc).

c) $\triangle NMO$ và $\triangle BCO$ có $\widehat{NOM} = \widehat{BOC}$ (đối đỉnh); $\widehat{NMO} = \widehat{BCO}$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle NMO \sim \triangle BCO$ (g.g) $\Rightarrow \frac{OM}{OC} = \frac{ON}{OB} = \frac{MN}{BC}$.

Tương tự $\triangle DMO \sim \triangle ACO$ (g.g) $\Rightarrow \frac{DM}{AC} = \frac{OM}{OC}$;

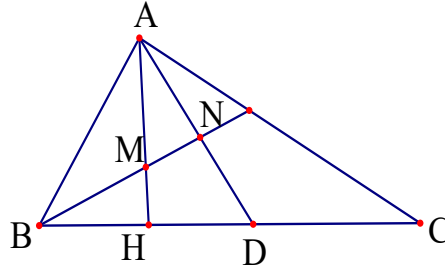
$\triangle NEO \sim \triangle BAO$ (g.g) $\Rightarrow \frac{NE}{AB} = \frac{ON}{OB}$.

Vậy $\frac{MN}{BC} = \frac{DM}{AC} = \frac{EN}{AB}$.

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A . Kẻ đường cao AH và phân giác trong AD của góc $\widehat{HAC}$. Phân giác trong góc $\widehat{ABC}$ cắt AH, AD lần lượt tại M, N . Chứng minh rằng: $\widehat{BND} = 90^\circ$.

Lời giải

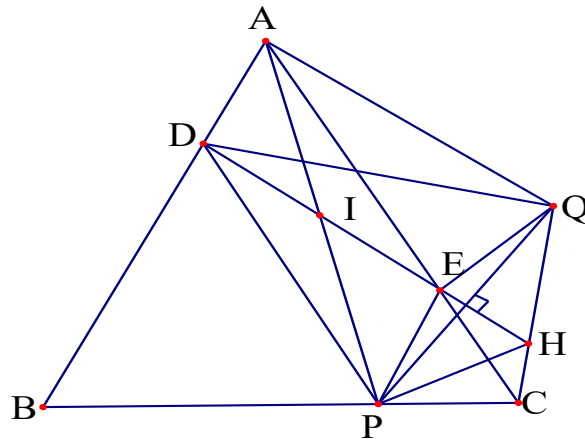
Phân tích: Ta có $\widehat{MHD} = 90^\circ$. Nếu $\widehat{MND} = 90^\circ$ thì tứ giác $MHDN$ nội tiếp. Vì vậy thay vì trực tiếp chỉ ra góc $\widehat{BND} = 90^\circ$ ta sẽ đi chứng minh tứ giác $MHDN$ nội tiếp. Tức là ta chứng minh $\widehat{AMN} = \widehat{ADH}$.



Thật vậy ta có $\widehat{AMN} = \widehat{BMH} = 90^\circ - \widehat{MBH}$, $\widehat{NDH} = 90^\circ - \widehat{HAD}$ mà $\widehat{MBH} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$, $\widehat{HAD} = \frac{1}{2}\widehat{HAC}$ và $\widehat{ABC} = \widehat{HAC}$ do cùng phụ với góc $\widehat{BCA}$ từ đó suy ra $\widehat{AMN} = \widehat{ADH}$ hay tứ giác $MHDN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MND} = \widehat{MHD} = 90^\circ$

Bài 11. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$) P là điểm trên cạnh đáy BC . Kẻ các đường thẳng PE, PD lần lượt song song với AB, AC ($E \in AC, D \in AB$) gọi Q là điểm đối xứng với P qua DE . Chứng minh bốn điểm Q, A, B, C cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải



Bài toán có 2 giả thiết cần lưu ý. Đó là các đường thẳng song song với 2 cạnh tam giác, và điểm Q đối xứng với P qua DE . Do đó ta sẽ có: $AD = EP = EC = EQ$ và $DP = DQ$ (Đây là chìa khóa để ta giải bài toán này)

Từ định hướng đó ta có lời giải như sau:

Do $AD \parallel PE, PD \parallel AE \Rightarrow ADPE$ là hình bình hành $\Rightarrow AE = DP = DQ$.

Mặt khác do P, Q đối xứng nhau qua $DE \Rightarrow AD = PE = EQ$. Suy ra $DAQE$ là hình thang cân $\Rightarrow \widehat{DAQ} = \widehat{AQE}$.

Kéo dài DE cắt CQ tại H ta có $\widehat{DAQ} = \widehat{AQE} = \widehat{PEH}$.

Như vậy để chứng minh $ABCQ$ nội tiếp ta cần chứng minh: $\widehat{PCH} + \widehat{PEH} = 180^\circ \Leftrightarrow PEHC$ là tứ giác nội tiếp.

Mặt khác ta có: $\widehat{ECQ} = \widehat{EQC}$ (do tam giác EQC cân), $\widehat{EPH} = \widehat{EQH}$ (Do tính đối xứng) suy ra $\widehat{ECH} = \widehat{EPH} \Leftrightarrow EPCH$ là tứ giác nội tiếp.

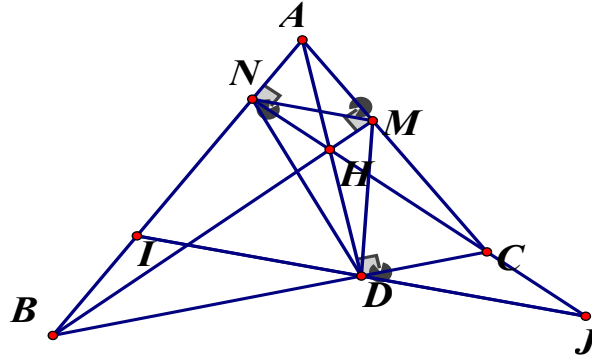
Bài 12. Cho tam giác ABC nhọn với $AB > AC$. Các đường cao BM, CN cắt nhau tại H .

a) Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp

b) Gọi D là giao điểm của AH và BC . Chứng minh AD là phân giác của $\angle MDN$

c) Đường thẳng qua D và song song với MN cắt AB, CN lần lượt tại I, J . Chứng minh D là trung điểm IJ

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp

Ta có $\begin{cases} HM \perp AC \\ HN \perp AB \end{cases} \Rightarrow \angle HMA = \angle HNA = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle HMA + \angle HNA = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, mà 2 góc này là hai góc đối nhau nên tứ giác $AMHN$ là tứ giác nội tiếp

b) Gọi D là giao điểm của AH và BC . Chứng minh AD là phân giác của $\angle MDN$

Tương tự câu a, ta có

$\angle HMC = \angle HDM = 90^\circ \Rightarrow HDCM$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle HDM = \angle HCM$ (cùng chắn cung HM)

$\angle HDB = \angle HNB = 90^\circ \Rightarrow HDBN$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle NDH = \angle NBH$ (cùng chắn cung HN)

Mà $\angle HCM = \angle NBH$ (cùng phụ với $\angle BAC$)

$\Rightarrow \angle HDM = \angle HDN \Rightarrow AD$ là phân giác của $\angle MDN$ (dpcm)

c) Đường thẳng qua D và song song với MN cắt AB, CN lần lượt tại I, J . Chứng minh D là trung điểm IJ

Ta có :

Tứ giác $AMHN$ nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \angle HNM = \angle HAM$ (cùng chắn cung HM)

Mà $\angle HAM = \angle HBD$ (cùng phụ với $\angle ACB$)

Tứ giác $HDBN$ nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \angle HBD = \angle HND$ (cùng chắn cung HD)

$\Rightarrow \angle HNM = \angle HND$

Ta lại có $IJ \parallel MN$ (gt) $\Rightarrow \angle HNM = \angle HJI = \angle HJD$ (hai góc so le trong bằng nhau)

$\Rightarrow \angle HND = \angle HJD \Rightarrow \triangle DNJ$ cân tại D nên $DN = DJ$ (1)

Vì $\angle HND = \angle HJD$ (cmt) $\Rightarrow 90^\circ - \angle HND = 90^\circ - \angle HJD \Rightarrow \angle DNI = \angle NID$

Suy ra $\triangle NID$ cân tại $D \Rightarrow DN = DI$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DI = DJ (= DN)$

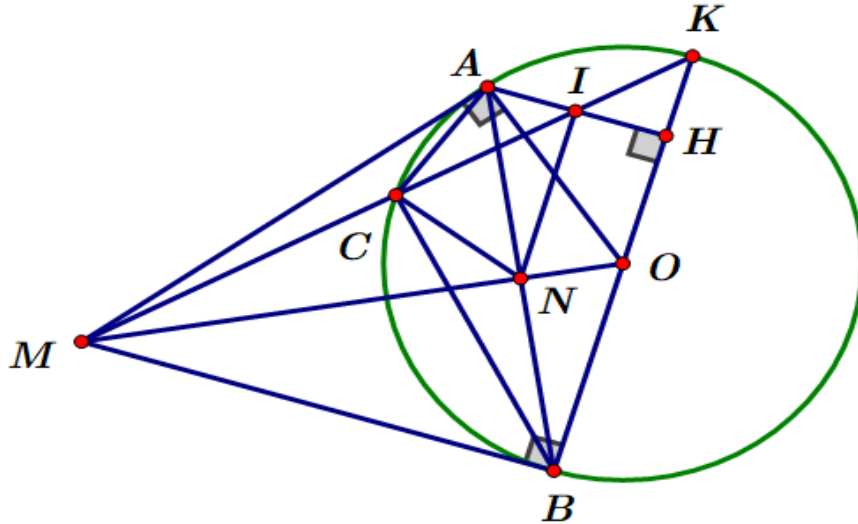
Vậy D là trung điểm IJ (dpcm)

Bài 13. Cho đường tròn (O) . Từ một điểm M ở ngoài đường tròn (O) , kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là hai tiếp điểm).

a) Chứng minh $MAOB$ là tứ giác nội tiếp.

b) Vẽ đường kính BK của đường tròn (O) , H là điểm trên BK sao cho AH vuông góc BK . Điểm I là giao điểm của AH, MK . Chứng minh I là trung điểm của HA .

Lời giải



a) Chứng minh $MAOB$ là tứ giác nội tiếp.

Vì MA, MB là các tiếp tuyến của (O) lần lượt tại A, B nên $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^\circ$ (định nghĩa).

Tứ giác $MAOB$ có $\widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 180^\circ$.

Suy ra tứ giác $MAOB$ nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°).

b) Vẽ đường kính BK của đường tròn (O) , H là điểm trên BK sao cho AH vuông góc BK . Điểm I là giao điểm của AH, MK . Chứng minh I là trung điểm của HA .

Gọi N là giao điểm của AB với MO .

C là giao điểm giữa MK với đường tròn (O)

Ta có: $OA = OB \Rightarrow O$ thuộc trung trực của AB .

Tứ giác $MCNB$ có $\widehat{MCB} = \widehat{MNB} = 90^\circ$. Suy ra tứ giác $MCNB$ nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh kề cùng nhìn một cạnh dưới các góc bằng nhau).

$\Rightarrow \widehat{NMB} = \widehat{NCB}$ (hai góc cùng chắn một cung BN)

Ta có: $\widehat{NMB} = \widehat{NBO}$ (cùng phụ với $\widehat{MBN}$)

$\Rightarrow \widehat{NCB} = \widehat{NBO}$.

Lại có: $\widehat{NCB} + \widehat{NCI} = 90^\circ, \widehat{NAI} + \widehat{NBO} = 90^\circ$

Suy ra $\widehat{NCI} = \widehat{NAI}$.

Xét tứ giác $ACNI$ có: $\widehat{NCI} = \widehat{NAI}(cmt)$, suy ra tứ giác $ACNI$ nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh kề cùng nhìn một cạnh dưới các góc bằng nhau).

$\Rightarrow \widehat{ANI} = \widehat{ACI}$ (hai góc cùng chắn cung AI).

Trong (O) có: $\widehat{ACI} = \widehat{ABK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AK)

Suy ra $\widehat{ANI} = \widehat{ABK}$. Mà hai góc này vị trí đồng vị $\Rightarrow NI // BK$

Tam giác ABK có:
$$\begin{cases} NI // BK \\ NA = NB = \frac{1}{2} AB \end{cases}$$

Suy ra I là trung điểm của $AH \Rightarrow IA = IH$ (định lý đường trung bình của tam giác) (đpcm).

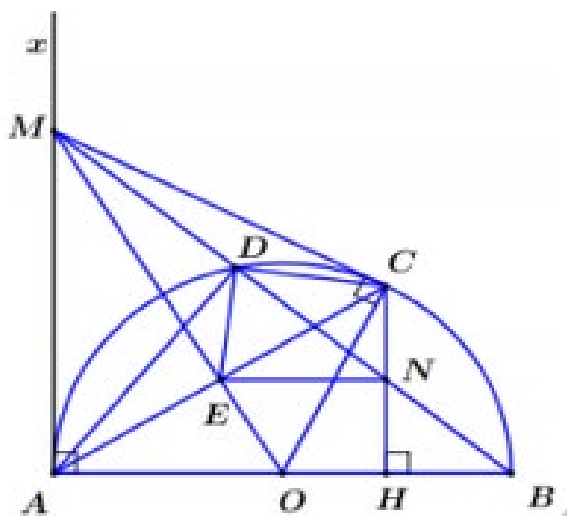
Bài 14. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Vẽ tia tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đường kính AB . Lấy một điểm M trên tia $Ax (M \neq A)$. Vẽ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn (O) (C là tiếp điểm). Vẽ AC cắt OM tại E , vẽ MB cắt nửa đường tròn (O) tại $D (D \neq B)$.

a) Chứng minh: Tứ giác $AMDE$ nội tiếp trong một đường tròn.

b) Chứng minh: $MA^2 = MD \cdot MB$.

c) Vẽ CH vuông góc với $AB (H \in AB)$. Chứng minh rằng MB đi qua trung điểm của đoạn thẳng CH .

Lời giải



a) Chứng minh: Tứ giác $AMDE$ nội tiếp trong một đường tròn.

Ta có: $OA = OC \Rightarrow O$ thuộc trung trực của AC .

$MA = MC$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow M$ thuộc trung trực của AC .

$\Rightarrow OM$ là trung trực của $AC \Rightarrow OM \perp AC$ tại $E \Rightarrow \widehat{AEM} = 90^\circ$.

Ta có $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{ADM} = 90^\circ$.

Xét tứ giác $AMDE$ có $\widehat{AEM} = \widehat{ADM} = 90^\circ (cmt) \Rightarrow AMDE$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AM (tứ giác có 2 đỉnh kề cùng nhìn AM dưới một góc 90°).

b) Chứng minh $MA^2 = MD \cdot MB$.

Xét $\triangle MAD$ và $\triangle MBA$ có:

$\widehat{AMB}$ chung;

$$\widehat{MDA} = \widehat{MAB} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta MAD \sim \Delta MBA (g.g) \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MA} (2 \text{ cạnh tương ứng}) \Rightarrow MA^2 = MD.MB.$$

c) Vẽ CH vuông góc với $AB (H \in AB)$. Chứng minh rằng MB đi qua trung điểm của đoạn thẳng CH .

Gọi $MB \cap CH = \{N\}$.

Vì $AEDM$ là tứ giác nội tiếp (cmt) nên $\widehat{DEC} = \widehat{AMD}$ (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác nội tiếp).

Mà $\widehat{AMD} = \widehat{DAB}$ (cùng phụ với $\widehat{MAD}$) nên $\widehat{DEC} = \widehat{DAB}$ (1).

$$\text{Ta có } \widehat{DNC} = \widehat{BNH} \text{ (đối đỉnh), mà } \begin{cases} \widehat{BNH} + \widehat{NBH} = 90^\circ \\ \widehat{DAB} + \widehat{NBH} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{BNH} = \widehat{DAB} \Rightarrow \widehat{DNC} = \widehat{DAB} \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{DNC}$.

$\Rightarrow DENC$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh kề cùng nhìn một cạnh dưới các góc bằng nhau).

$\Rightarrow \widehat{DNE} = \widehat{DCE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung DE).

Mà $\widehat{DCE} = \widehat{DCA} = \widehat{DBA}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung DA).

$\Rightarrow \widehat{DNE} = \widehat{DBA}$. Mà 2 góc này nằm ở vị trí 2 góc đồng vị nên $EN \parallel AB$ hay $EN \parallel AH$.

Lại có: E là trung điểm của AC (do OM là trung trực của $AC, OM \cap AC = \{E\}$).

$\Rightarrow N$ là trung điểm của CH (định lý đường trung bình trong tam giác ACH).

Vậy MB đi qua N là trung điểm của CH (đpcm).

Bài 15. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn tâm O . Dựng đường thẳng d qua A song song BC , đường thẳng d' qua C song song BA , gọi D là giao điểm của d và d' . Dựng AE vuông góc BD (E nằm trên BD), F là giao điểm của BD với đường tròn (O). Chứng minh:

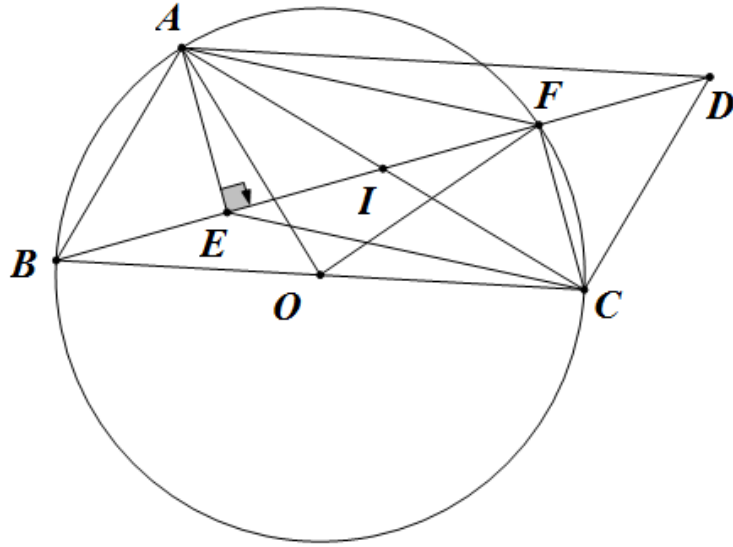
a) Tứ giác $AECD$ nội tiếp được trong đường tròn.

b) $\widehat{AOF} = 2\widehat{CAE}$

c) Tứ giác $AECF$ là hình bình hành.

d) $DF \cdot DB = 2AB^2$.

Lời giải



a) ta có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow AB \parallel CD$ nên $\widehat{ACD} = \widehat{BAC} = 90^\circ$ (hai góc so le trong)

Suy ra $\widehat{AED} = \widehat{ACD} = 90^\circ \Rightarrow E; C$ cùng nhìn AD dưới góc 90° do đó tứ giác $AECD$ nội tiếp.

b) tứ giác $AECD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{CDE}$ (2 góc nội tiếp chắn cung EC)

$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{ABD}$ (so le trong)

$\Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{ABD}$

Mà $\widehat{ABD}$ là góc ở tâm; $\widehat{AOF}$ là góc nội tiếp chắn cung $AF \Rightarrow \widehat{AOF} = 2.\widehat{ABD}$ hay $\widehat{AOF} = 2.\widehat{CAE}$

c) Ta có $\widehat{BFC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AE \parallel CF$ (cùng vuông góc với BD)

Lại có $\widehat{AFB} = \widehat{ACB} = \widehat{CAD} = \widehat{FEC} \Rightarrow AF \parallel EC$

Do đó tứ giác $AECF$ là hình bình hành.

d) Gọi giao điểm của AC và BD là I , do tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên

$IA = IC; IB = ID; AB = CD$

Xét tam giác DCI vuông tại C có CF là đường cao nên $CD^2 = DF.DI \Rightarrow AB^2 = DF.DI$

$\Rightarrow 2AB^2 = 2.DF.DI$ mà $2DI = BD$ do đó $2AB^2 = DF.BD$.

Bài 16. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây MN cố định ($MN < 2R$). Kẻ đường kính AB vuông góc với dây MN tại E . Lấy điểm C thuộc dây MN (C khác M, N, E). Đường thẳng BC cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm K (K khác B)

a) Chứng minh $AKCE$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $BM^2 = BK.BC$

c) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AK, MN ; D là giao điểm của hai đường thẳng AC và BI .

Chứng minh điểm C cách đều ba cạnh của tam giác DEK

Lời giải

$\Rightarrow DA$ là tia phân giác của $\angle EDK$

Tam giác DEK có :

KB là tia phân giác của $\angle DKE$, DA là tia phân giác của $\angle EDK$

Mà C là giao điểm của $KB, DA \Rightarrow C$ là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DEK$

Vậy C cách đều ba cạnh của tam giác DEK

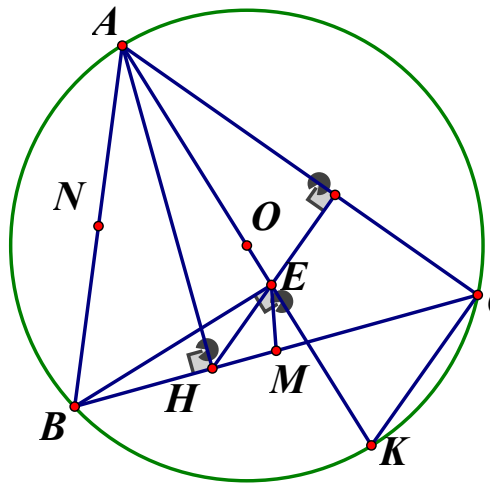
Bài 17. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O) . Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC và E là hình chiếu vuông góc của điểm B lên đường thẳng AO

a) Chứng minh $AEHB$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh đường thẳng HE vuông góc với đường thẳng AC

c) Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Tính tỉ số $\frac{ME}{MH}$

Lời giải



a) Chứng minh $AEHB$ là tứ giác nội tiếp

Ta có :

$$AH \perp BC \Rightarrow \angle AHB = 90^\circ, \quad AE \perp BE \Rightarrow \angle AEB = 90^\circ$$

Tứ giác $AEHB$ có $\angle AHB = \angle AEB = 90^\circ$ cùng nhìn cạnh AB dưới 1 góc không đổi
 $\Rightarrow AEHB$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh đường thẳng HE vuông góc với đường thẳng AC

Kéo dài AO cắt đường tròn (O) tại K khi đó AK là đường kính của đường tròn tâm O , ta có C thuộc đường tròn $(O) \Rightarrow \angle ACK = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
 $\Rightarrow CK \perp AC$

Tứ giác $AEHB$ nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \angle EHC = \angle BAE$ (hai góc cùng bù với $\angle BHE$)
 $\Rightarrow \angle EHC = \angle BAK$

Xét (O) có : $\angle BAK = \angle BCK$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BK)
 $\Rightarrow \angle EHC = \angle BCK$ mà hai góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow HE \parallel CK$

Ta có $\begin{cases} CK \perp AC \text{ (cmt)} \\ CK \parallel HE \end{cases} \Rightarrow HE \perp AC \text{ (dpcm)}$

c) Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Tính tỉ số $\frac{ME}{MH}$

Gọi N là trung điểm của AB

Ta có N là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABHE \Rightarrow NE = NH$ (1)

Tam giác ABC có : M, N lần lượt là trung điểm BC, AB

Suy ra MN là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow MN \parallel AC$

Mà $HE \perp AC(cmt) \Rightarrow MN \perp HE(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MN$ là đường trung trực của $HE \Rightarrow MH = ME \Rightarrow \frac{ME}{MH} = 1$

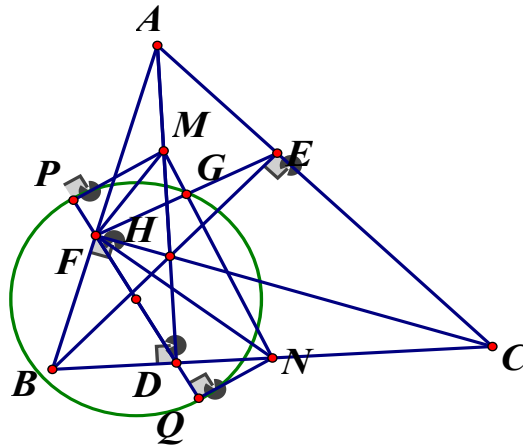
Bài 18. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $AB < AC$. Vẽ các đường cao AD, BE, CF của tam giác đó. Gọi H là giao điểm của các đường cao vừa vẽ

a) Chứng minh rằng các tứ giác $AEHF$ và $BFEC$ nội tiếp

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH, BC . Chứng minh rằng $FM \cdot FC = FN \cdot FA$

c) Gọi P, Q lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M, N đến đường thẳng DF . Chứng minh rằng đường tròn đường kính PQ đi qua giao điểm của FE, MN

Lời giải



a) Chứng minh rằng các tứ giác $AEHF$ và $BFEC$ nội tiếp

Ta có $\angle AFH = 90^\circ$ (do $CF \perp AB$); $\angle AEH = 90^\circ$ ($BE \perp AC$)

Suy ra $\angle AFH + \angle AEH = 180^\circ$ mà hai góc này đối nhau nên $AEHF$ là tứ giác nội tiếp

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH, BC . Chứng minh rằng $FM \cdot FC = FN \cdot FA$

Tam giác BFC vuông tại F ta có: FN là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC

$$\Rightarrow FN = \frac{BC}{2} (1)$$

Tam giác BEC vuông tại E ta có EN là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC

$$\Rightarrow EN = \frac{1}{2} BC (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $FN = EN (*)$

$\triangle AHF$ vuông tại F có FM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AH

$$\Rightarrow FM = \frac{1}{2} AH (3)$$

$$\triangle AEH \text{ vuông tại E có } EM \text{ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền } AH \Rightarrow EM = \frac{1}{2} AH (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $FM = ME (**)$

Từ (*) và (**) ta có MN là đường trung trực EF

Gọi G là giao điểm của MN, EF

Tam giác FME có MG là đường cao đồng thời là đường trung tuyến

$$\Rightarrow \Delta FME \text{ cân tại M có MG là phân giác} \Rightarrow \angle FMG = \frac{1}{2} \angle FME \quad (5)$$

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $FAEH$ có :

$$\angle FAE = \frac{1}{2} \angle FME \text{ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm chắn cung EF)} \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra $\angle FAE = \angle FMK$ hay $\angle FAC = \angle FMN$

$$\text{Ta có } FM = MH \left(= \frac{1}{2} AH \right) \Rightarrow \Delta FMH \text{ cân tại M}$$

$$\Rightarrow \angle MFH = \angle MHF = \angle DHC \text{ (vì } \angle MHF = \angle DHC \text{ là hai góc đối đỉnh)}$$

$$\text{Ta có : } FN = NC \left(= \frac{1}{2} BC \right) \Rightarrow \Delta FNC \text{ cân tại N} \Rightarrow \angle NFC = \angle NCF$$

Mà $\angle DHC + \angle NCF = 90^\circ$ (ΔDHN vuông tại D)

$$\text{Suy ra } \angle MFH + \angle NFC = \angle MFN = 90^\circ$$

Xét ΔFMN và ΔFAC có:

$$\angle MFN = \angle AFC = 90^\circ, \angle FAC = \angle FMN \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \Delta FMN \sim \Delta FAC \Rightarrow \frac{FM}{FN} = \frac{FA}{FC} \Rightarrow FM \cdot FC = FN \cdot FA \text{ (dfcm)}$$

c) Gọi P, Q lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M, N đến đường thẳng DF . Chứng minh rằng đường tròn đường kính PQ đi qua giao điểm của FE, MN

Vì $MN \perp EF$ tại G nên $\angle MGF = 90^\circ$

Ta có $MP \perp PQ$ tại P nên $\angle MPF = 90^\circ$

Tứ giác $MPFG$ có : $\angle MGF + \angle MPF = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ mà hai góc này đối nhau

$\Rightarrow MPFG$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle MGP = \angle MFP$ (cùng nhìn cạnh MP)

Vì $MN \perp EF$ tại G $\Rightarrow \angle FGN = 90^\circ$

Ta có $NQ \perp PQ$ tại Q $\Rightarrow \angle NQF = 90^\circ$

Tứ giác $NQFG$ có :

$\angle FGN + \angle NQF = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ mà hai góc này đối nhau nên $NQFG$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle QGN = \angle QFN$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung QN)

$\Rightarrow \angle MGP + \angle QGN = \angle MFP + \angle QFN$

Mà $\angle MFN = 90^\circ \Rightarrow \angle MFP + \angle QFN = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle MFP + \angle QGN = 90^\circ \Rightarrow \angle PGQ = 90^\circ$

Đường tròn đường kính PQ có $\angle PGQ = 90^\circ \Rightarrow G \in$ đường tròn đường kính PQ.

Bài 19. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) , điểm D thuộc cung nhỏ $\widehat{AB}$ (D khác A và B).

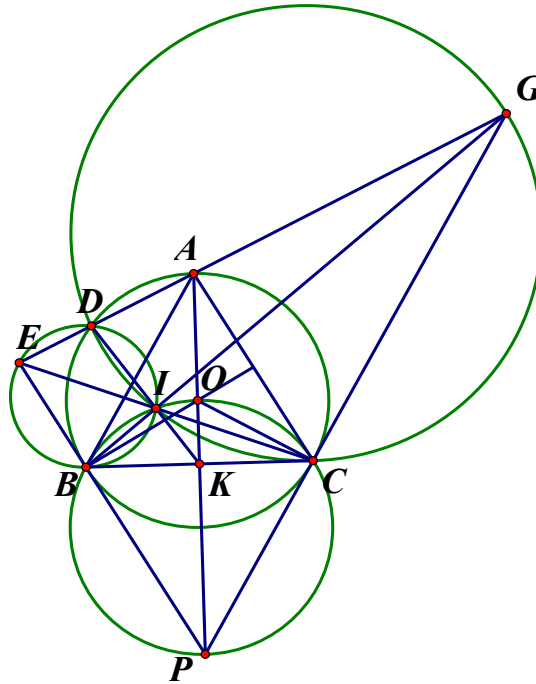
Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C cắt AD theo thứ tự tại E và G. Gọi I là giao điểm của CE và BG

a) Chứng minh rằng $\Delta EBC \sim \Delta BCG$

b) Tính số đo góc BIC . Từ đó, hãy chứng minh tứ giác BIDE nội tiếp

c) Gọi K là giao điểm của DI và BC. Chứng minh rằng $BK^2 = KI \cdot KD$

Lời giải



a) Chứng minh rằng $\triangle EBC \sim \triangle BCG$

Gọi tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại P.

$$\angle EBC = 180^\circ - \angle PBC = 180^\circ - \angle PCB = \angle GCB$$

Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác DEB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác GCD tại I' khác D. Ta có :

$$\angle DI'B = 180^\circ - \angle DEB \text{ và } \angle DI'C = 180^\circ - \angle DGC$$

Chú ý rằng $\angle BPC = 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

Do đó $\angle BI'C = 120^\circ$. Lại có :

$\angle BDE = \angle EI'B = 60^\circ$ (do tứ giác $DACB$ nội tiếp và $EDI'B$ nội tiếp) dẫn đến :

E, I', C thẳng hàng. Tương tự G, I', B thẳng hàng, dẫn đến $I \equiv I'$

Do đó thu được $\angle BIC = \angle EBC = \angle GBC$ dẫn đến các tam giác $EBC; BIC$ và BCG đồng dạng với nhau.

b) Tính số đo góc BIC . Từ đó, hãy chứng minh tứ giác $BIDE$ nội tiếp

Từ câu a) ta đã chỉ ra $\angle BIC = 120^\circ$ và $BIDE$ nội tiếp

c) Gọi K là giao điểm của DI và BC . Chứng minh rằng $BK^2 = KI.KD$

Ta có : $\angle CIB = \angle KIB = \angle BEI = \angle IDB$ dẫn đến tam giác KIB đồng dạng với tam giác KBD

$$\Rightarrow \frac{KI}{KB} = \frac{KB}{KD} \Rightarrow BK^2 = KI.KD$$

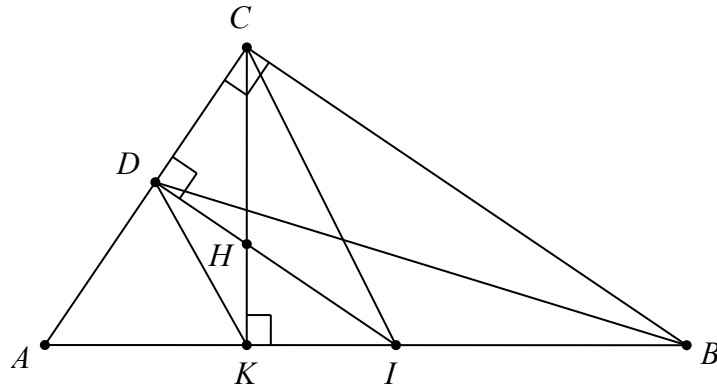
Bài 20. Cho tam giác ABC vuông tại C ($AC < BC$), đường cao CK và đường phân giác BD ($K \in AB, D \in AC$). Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt CK, AB lần lượt tại H và I.

a) Chứng minh tứ giác CDKI nội tiếp.

b) Chứng minh $AC.AD = DH.AB$.

c) Gọi F là trung điểm của AD. Đường tròn tâm I bán kính ID cắt BC tại M (M khác B) và cắt AM tại N (N khác M). Chứng minh B, N, F thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có : $\widehat{CDI} = 90^0$ (gt)

$$\widehat{CKI} = 90^0 \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \widehat{CDI} = \widehat{CKI}$$

Vậy tứ giác CDKI nội tiếp.

b) Ta có: BD là phân giác của tam giác ABC (gt) $\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$ (1)

Xét $\triangle DCH$ và $\triangle CBA$ có:

$$\widehat{CDH} = \widehat{BCA} (= 90^0)$$

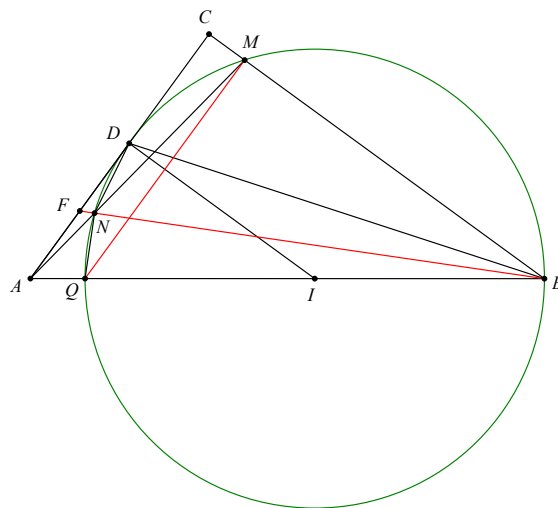
$$\widehat{DCH} = \widehat{CBA} \text{ (cùng phụ } \widehat{BAC} \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle DCH \sim \triangle CBA \text{ (g-g)}$$

$$\Rightarrow \frac{DH}{AC} = \frac{DC}{BC} \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \frac{DH}{AC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AC \cdot AD = AB \cdot DH$$

c)



Gọi F' là giao điểm của BN với AD, Q là giao điểm của AB với (I).

Ta có: $ID \parallel BC$ (cùng vuông góc với AC) $\Rightarrow \widehat{IDB} = \widehat{DBC}$

Mà $\widehat{DBI} = \widehat{DBC}$ (gt)

$$\Rightarrow \widehat{IDB} = \widehat{DBI}$$

$$\Rightarrow \triangle IDB \text{ cân tại } I \Rightarrow IB = ID \Rightarrow B \in (I)$$

$\Rightarrow$ tứ giác BMNQ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{NBQ} = \widehat{NMQ}$$

Ta có: $\widehat{QMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow QM \perp BC$$

$\Rightarrow QM \parallel AC$ (cùng vuông góc với BC)

$$\Rightarrow \widehat{NMQ} = \widehat{MAD} \text{ (so le trong)}$$

$$\Rightarrow \widehat{NAF'} = \widehat{F'BA}$$

Xét $\triangle F'AN$ và $\triangle F'BA$ có:

$$\widehat{NAF'} = \widehat{F'BA} \text{ (c/m trên)}$$

$\widehat{BF'A}$ chung

$$\Rightarrow \triangle F'AN \sim \triangle F'BA \text{ (g-g)}$$

$$\Rightarrow \frac{F'A}{F'B} = \frac{F'N}{F'A} \Rightarrow F'A^2 = F'B \cdot F'N \quad (3)$$

Ta lại có: $DA \perp ID$ (gt) nên DA là tiếp tuyến của (I) $\Rightarrow \widehat{F'DN} = \widehat{NBD}$

Xét $\triangle F'DN$ và $\triangle F'BD$ có:

$$\widehat{F'DN} = \widehat{NBD} \text{ (c/m trên)}$$

$\widehat{BF'D}$ chung

$$\Rightarrow \triangle F'DN \sim \triangle F'BD \text{ (g-g)}$$

$$\Rightarrow \frac{F'D}{F'B} = \frac{F'N}{F'D} \Rightarrow F'D^2 = F'B \cdot F'N \quad (4)$$

Từ (3), (4) $\Rightarrow F'A^2 = F'D^2 \Rightarrow F'A = F'D$ Hay F' là trung điểm của AD

Do đó F' trùng với F

Vậy F, N, B thẳng hàng

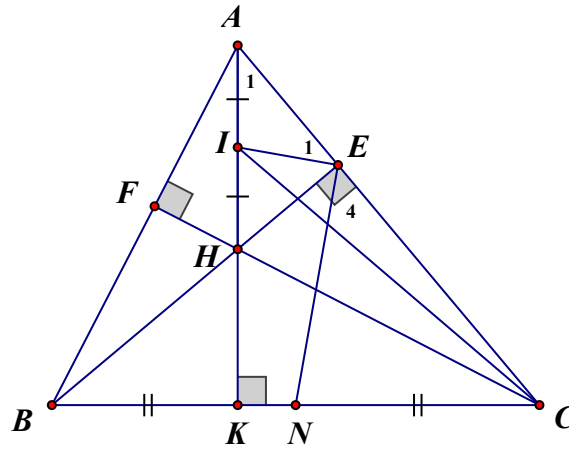
Bài 21. Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Các đường cao AK , BE và CF cắt nhau tại H . Gọi I là trung điểm của đoạn AH , N là trung điểm của đoạn BC .

a) Chứng minh bốn điểm A , E , H , F nằm trên cùng một đường tròn.

b) Chứng minh NE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH .

c) Chứng minh $CI^2 - IE^2 = CK \cdot CB$.

Lời giải



a) Chứng minh bốn điểm A, E, H, F nằm trên cùng một đường tròn.

Ta có $\widehat{AEB} = 90^\circ$ (do BE là đường cao của $\triangle ABC$) hay $\widehat{AEH} = 90^\circ$

$\widehat{AFC} = 90^\circ$ (do CF là đường cao của $\triangle ABC$) hay $\widehat{AFH} = 90^\circ$

Xét tứ giác $AEHF$ có $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Mà $\widehat{AEH}, \widehat{AFH}$ ở vị trí đối nhau

Do đó tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH

Suy ra bốn điểm A, E, H, F cùng nằm trên một đường tròn (đpcm)

b) Chứng minh NE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH ;

Vì I là trung điểm của đoạn thẳng AH nên I là tâm đường tròn đường kính AH

Suy ra $IA = IE$

$\Rightarrow \triangle IAE$ cân tại I

$$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{E_1} \quad (1)$$

$\triangle EBC$ vuông tại E có EN là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC

$$\Rightarrow EN = NC \left(= \frac{BC}{2} \right)$$

$\Rightarrow \triangle ENC$ cân tại N

$$\Rightarrow \widehat{NCE} = \widehat{E_4} \quad (2)$$

$$\text{Xét } \triangle AKC \text{ vuông tại } K \text{ có } \widehat{KCA} + \widehat{A_1} = 90^\circ \text{ hay } \widehat{NCE} + \widehat{A_1} = 90^\circ \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) suy ra } \widehat{E_1} + \widehat{E_4} = 90^\circ$$

$$\text{Lại có } \widehat{E_1} + \widehat{E_4} + \widehat{IEN} = 180^\circ \text{ (do } A, E, C \text{ thẳng hàng)}$$

$$\Rightarrow 90^\circ + \widehat{IEN} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{IEN} = 90^\circ$$

Suy ra $EN \perp EI$ tại E

Do đó NE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH (đpcm)

c) Chứng minh $CI^2 - IE^2 = CK.CB$.

Áp dụng định lí Py – Ta – Go $\triangle CIK$ vuông tại K , ta có: $CI^2 = CK^2 + IK^2$

Lại có $IA = IE = IH$ (cùng bán kính đường tròn tâm I)

$$\Rightarrow CI^2 - IE^2 = CK^2 + IK^2 - IE^2$$

$$CI^2 - IE^2 = CK^2 + (IK + IE)(IK - IE)$$

$$CI^2 - IE^2 = CK^2 + (IK + IE)(IK - IH) = CK^2 + AK.KH \quad (4)$$

$$\text{Ta lại có } CK.CB = CK(CK + KB) = CK^2 + CK.KB \quad (5)$$

Xét $\triangle KBH$ và $\triangle KAC$ có

$$\widehat{KBH} = \widehat{KAC} \text{ (Cùng phụ với } \widehat{ACB}); \widehat{BKH} = \widehat{AKC} = 90^\circ$$

Do đó $\triangle AHK \sim \triangle ACB$ (g – g)

$$\Rightarrow \frac{KB}{KA} = \frac{KH}{KC} \Rightarrow KA.KH = KB.KC \text{ hay } AK.KH = CK.KB \quad (6)$$

Từ (4), (5) và (6) suy ra $CI^2 - IE^2 = CK.CB$ (đpcm)

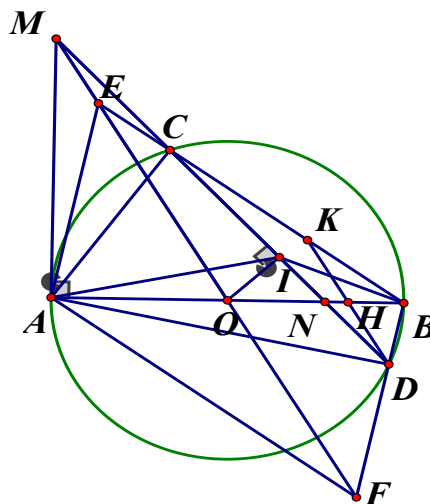
Bài 22. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm A lấy điểm M ($M \neq A$). Lấy điểm N trên đoạn thẳng OB (N khác O và B). Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại hai điểm C, D (C nằm giữa M và D). Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng CD

a) Chứng minh tứ giác $AMIO$ là tứ giác nội tiếp

b) Qua D kẻ đường thẳng song song với MO cắt AB tại H. Chứng minh $MA^2 = MC.MD$ và $\angle IAB = \angle MDH$

c) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của đường thẳng MO với hai đường thẳng BC, BD . Chứng minh tứ giác $AEBF$ là hình bình hành

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $AMIO$ là tứ giác nội tiếp

Ta có : I là trung điểm của CD nên $OI \perp CD$ (tính chất đường kính – dây cung)

$$\Rightarrow \angle OIM = 90^\circ$$

MA là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A (gt) nên $\angle MAO = 90^\circ$

Xét tứ giác $AMIO$ có $\angle OIM + \angle MAO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ mà hai góc này đối diện nhau

Nên tứ giác $AMIO$ là tứ giác nội tiếp

b) Qua D kẻ đường thẳng song song với MO cắt AB tại H. Chứng minh $MA^2 = MC.MD$ và $\angle IAB = \angle MDH$
Ta có $\angle MAC = \angle CDA$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AC)
Xét $\triangle MCA$ và $\triangle MAD$ có :

$\angle DMA$ chung, $\angle MAC = \angle MDA$ (cmt)

$$\Rightarrow \triangle MCA \sim \triangle MAD (g.g) \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA} \text{ (hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)}$$

$$\Rightarrow MA^2 = MC.MD \text{ (đpcm)}$$

Vì $AMIO$ là tứ giác nội tiếp (cmt) nên ta có :

$$\angle IMO = \angle IAO = \angle IAB \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OI)}$$

Vì $HD // MO \Rightarrow \angle MDH = \angle IMO$ (2 góc so le trong)

Vậy $\angle IAB = \angle MDH$ (đpcm)

c) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của đường thẳng MO với hai đường thẳng BC, BD . Chứng minh tứ giác $AEBF$ là hình bình hành

Kéo dài DH cắt BC tại K

Ta có : $\angle IAB = \angle MDH$ (cmt) hay $\angle IAH = \angle IDH$ mà A và D là hai đỉnh kề nhau của tứ giác $AIHD$ cùng nhìn cạnh IH dưới 1 góc bằng nhau

Suy ra tứ giác $AIHD$ nội tiếp đường tròn

$$\Rightarrow \angle HID = \angle HAD \text{ (cùng chắn cung HD)}$$

Xét (O) ta có : $\angle BAD = \angle BCD$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BD)

$$\text{Hay } \angle HAD = \angle BCD$$

Suy ra $\angle BCD = \angle HID (= \angle HAD)$, mà 2 góc này ở vị trí đồng vị nên $IH // CK$

Suy ra H là trung điểm của DK (định lý về đường trung bình của tam giác)

$$\Rightarrow HK = HD \text{ (1)}$$

Vì $DH // OH$ (gt) $\Rightarrow HK // OE, HD // OF$

$$\text{Xét } \triangle BOE \text{ có } HK // OE \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{HK}{OE} = \frac{BH}{BO} \text{ (hệ quả của định lý Talet) (2)}$$

$$\text{Xét } \triangle BOF \text{ ta có } HD // OF \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{HD}{OF} = \frac{BH}{BO} \text{ (hệ quả định lý Talet) (3)}$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow OE = OF$$

Xét tứ giác $AEBF$ ta có : $OA = OB = R; OE = OF$ (cmt)

Suy ra tứ giác $AEBF$ là hình bình hành (đpcm)

Bài 23. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O. Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại M, tia AM cắt đường tròn (O) tại điểm D.

a) Chứng minh rằng tứ giác $OBMC$ nội tiếp được đường tròn.

b) Chứng minh $MB^2 = MD.MA$

c) Gọi E là trung điểm đoạn thẳng AD; tia CE cắt đường tròn (O) tại điểm F. Chứng minh rằng: $BF // AM$.

Lời giải

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{MEC} = \widehat{BFC}$

Mà hai góc $\widehat{MEC}$ và $\widehat{BFC}$ ở vị trí đồng vị $\Rightarrow EM // BF$ hay $AM // BF$.

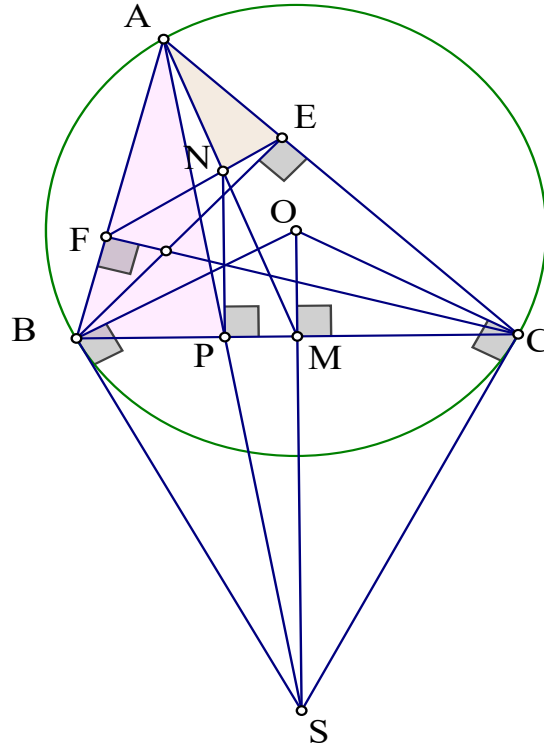
Bài 24. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O , đường cao BE và CF . Tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại S , BC và OS cắt nhau tại M .

a) Chứng minh rằng $AB.MB = AE.BS$.

b) Hai tam giác AEM và ABS đồng dạng.

c) Gọi AM cắt EF tại N , AS cắt BC tại P . Chứng minh rằng $NP \perp BC$.

Lời giải



a) Ta chứng minh $\triangle ABE \sim \triangle BSM$.

b) Từ câu a ta có $\frac{AE}{AB} = \frac{MB}{BS}$ (1)

mà $MB = EM$ (do $\triangle BEC$ vuông tại E có M là trung điểm của BC)

nên $\frac{AE}{AB} = \frac{EM}{BS}$ Có $\widehat{MOB} = \widehat{BAE}$; $\widehat{EBA} + \widehat{BAE} = 90^\circ$;

$\widehat{MBO} + \widehat{MOB} = 90^\circ$ nên $\widehat{MBO} = \widehat{EBA}$

do đó $\widehat{MEB} = \widehat{OBA} = \widehat{MBE}$. Suy ra $\widehat{MEA} = \widehat{SBA}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle AEM \sim \triangle ABS$ (đpcm).

c) Dễ thấy SM vuông góc với BC nên ta chứng minh $NP // SM$.

Xét $\triangle ANE$ và $\triangle APB$: Từ câu b) ta có $\triangle AEM \sim \triangle ABS$ nên $\widehat{NAE} = \widehat{PAB}$. Mà $\widehat{AEN} = \widehat{ABP}$

(do tứ giác $BCEF$ nội tiếp). Do đó $\triangle ANE \sim \triangle APB$ nên $\frac{AN}{AP} = \frac{AE}{AB}$.

Lại có $\frac{AM}{AS} = \frac{AE}{AB} (\Delta AEM \sim \Delta ABS)$. Suy ra $\frac{AM}{AS} = \frac{AN}{AP}$ nên trong tam giác AMS có $NP \parallel SM$ (định lý Talet đảo). Do đó bài toán được chứng minh.

Bài 25. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$, có ba đường cao AK, BE và CF cắt nhau tại H .

a) Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp.

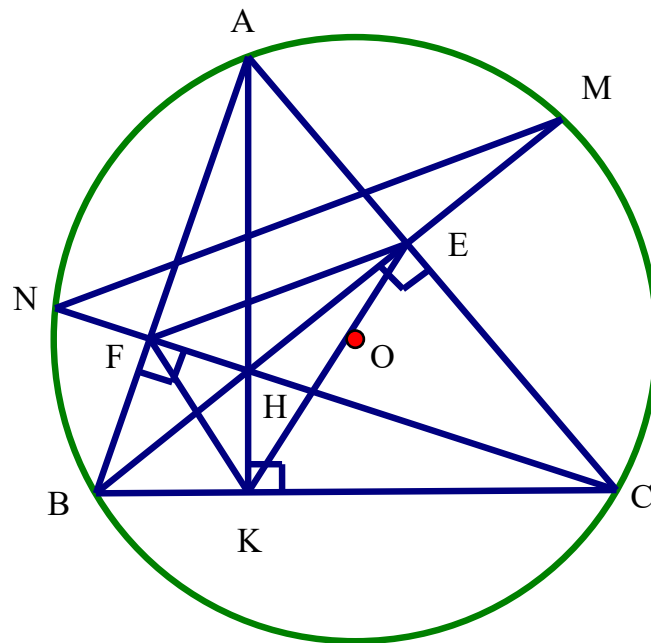
b) Hai đường thẳng BE và CF cắt đường tròn (O) lần lượt tại M và N (M khác B ; N khác C).

Chứng minh: $MN \parallel EF$.

c) Giả sử hai điểm B, C cố định, điểm A di động trên cung lớn BC của đường tròn (O) (A khác B, C).

Tìm vị trí của điểm A sao cho chu vi tam giác KEF đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



a. Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp:

Xét tứ giác $AEHF$, có: $\begin{cases} HE \perp AC (gt) \Rightarrow \widehat{AEH} = 90^\circ \\ HF \perp AB (gt) \Rightarrow \widehat{AFH} = 90^\circ \end{cases}$.

$\Rightarrow \widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Vậy tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn.

b. Hai đường thẳng BE và CF cắt đường tròn (O) lần lượt tại M và N (M khác B ; N khác C).

Chứng minh: $MN \parallel EF$.

Xét tứ giác $BCEF$, có: $\begin{cases} BE \perp AC (gt) \Rightarrow \widehat{BEC} = 90^\circ \\ CF \perp AB (gt) \Rightarrow \widehat{BFC} = 90^\circ \end{cases}$.

Tứ giác $BCEF$ có 2 đỉnh E, F liên tiếp nhau cùng nhìn cạnh BC dưới 1 góc 90° .

$\Rightarrow$ Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn đường kính BC .

$\Rightarrow \widehat{FEB} = \widehat{BCF}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung BF) hay $\widehat{FEB} = \widehat{BCN}$. (1)

Xét đường tròn (O) có: $\widehat{BMN} = \widehat{BCN}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung BN). (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{BMN} = \widehat{FEB}$.

Mà 2 góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow MN \parallel EF$. (điều phải chứng minh).

c. Giả sử hai điểm B, C cố định, điểm A di động trên cung lớn BC của đường tròn (O) (A khác B, C). Tìm vị trí của điểm A sao cho chu vi tam giác KEF đạt giá trị lớn nhất.

Xét đường tròn đường kính BC , có $\widehat{FBE} = \widehat{ECF}$ hay $\widehat{ABM} = \widehat{ACN}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung EF).

$\Rightarrow \widehat{AM} = \widehat{AN} \Rightarrow AM = AN$.

Mà $OM = ON = R$ nên OA là đường trung trực của đoạn thẳng MN .

$\Rightarrow OA \perp MN$.

Lại có: $MN \parallel EF$ (câu b) $\Rightarrow OA \perp EF$.

Tương tự: $OB \perp FK$; $OC \perp EK$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle OEF} + S_{\triangle OFK} + S_{\triangle OCK} = \frac{1}{2}OA \cdot EF + \frac{1}{2}OB \cdot FK + \frac{1}{2}OC \cdot EK = \frac{1}{2}R \cdot (EF + FK + EK) \\ &= \frac{1}{2} \cdot R \cdot C_{\triangle KEF} \text{ (trong đó } C_{\triangle KEF} \text{ là chu vi } \triangle KEF \text{).} \end{aligned}$$

Khi đó: Chu vi $\triangle KEF$ lớn nhất khi và chỉ khi diện tích $\triangle ABC$ lớn nhất.

$$\text{Mà } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot BC.$$

Theo đề bài BC cố định nên $S_{\triangle ABC}$ lớn nhất khi và chỉ khi AK lớn nhất. $\Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa cung lớn BC .

Vậy chu vi $\triangle KEF$ lớn nhất khi và chỉ A là điểm chính giữa cung lớn BC .

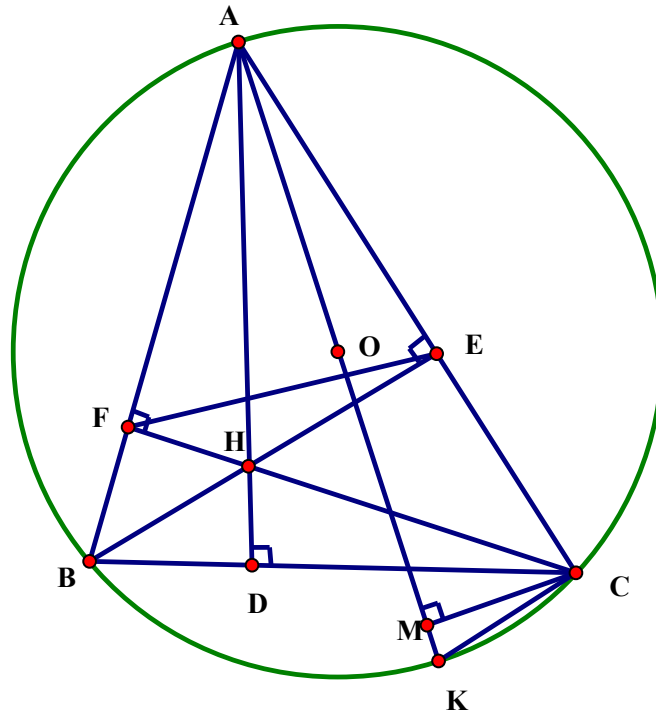
Bài 26. Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn $(O; R)$ và $AB < AC$. Ba đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC (D, E, F là chân các đường cao) đồng quy tại điểm H . Kẻ đường kính AK của đường tròn $(O; R)$. Gọi M là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AK .

a) Chứng minh rằng tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh rằng tam giác ABD đồng dạng với tam giác AKC và MD song song với BK .

c) Giả sử hai đỉnh B, C cố định trên đường tròn $(O; R)$ và đỉnh A di động trên cung lớn BC của đường tròn $(O; R)$. Chứng minh rằng đường thẳng MF luôn đi qua một điểm cố định và tìm vị trí của đỉnh A sao cho diện tích tam giác AHE lớn nhất.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{BEC} = 90^\circ$ (vì BE là đường cao của $\triangle ABC$)

$\widehat{BFC} = 90^\circ$ (vì CF là đường cao của $\triangle ABC$)

$\Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$

Xét tứ giác $BCEF$ có $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$ (theo chứng minh trên)

$\Rightarrow$ Đỉnh E và F là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh BC dưới một góc không đổi 90°

Do đó tứ giác $BCEF$ nội tiếp (đpcm)

b)

* Chứng minh rằng tam giác ABD đồng dạng với tam giác AKC

Ta có + $\widehat{ACK} = 90^\circ$ (là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

+ $\widehat{ABC} = \widehat{AKC}$ (cùng chắn $\widehat{AC}$)

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AKC$ có

$\widehat{ADB} = \widehat{ACK} = 90^\circ$

$\widehat{ABC} = \widehat{AKC}$ (theo chứng minh trên)

Do đó $\triangle ABD \sim \triangle AKC$ (g.g)

* MD song song với BK .

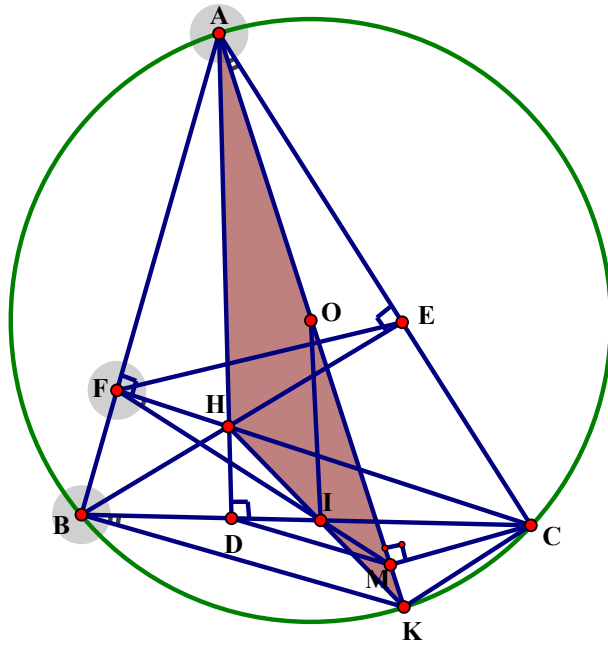
Xét đường tròn tâm (O) có $\widehat{CBK} = \widehat{KAC}$ (cùng chắn $\widehat{KC}$) (1)

Chứng minh tứ giác $ACMD$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{KAC} = \widehat{CDM}$ (cùng chắn $\widehat{MC}$) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CBK} = \widehat{CDM} \Rightarrow DM \parallel BK$ (đpcm)

c)



Gọi I trung điểm BC

Ta có $\widehat{ACK} = 90^\circ$ (chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow CK \perp AC$

Mà $BE \perp AC$ (BE là đường cao của $\triangle ABC$)

Suy ra $CK \parallel BE$ (1)

Tương tự $BK \parallel CF$ (2)

Xét tứ giác $CHBK$ có $\begin{cases} CK \parallel BE \\ BK \parallel CF \end{cases}$

Suy ra tứ giác $CHBK$ là hình bình hành.

Mà I trung điểm của BC

Suy ra I, H, K thẳng hàng.

Xét $\triangle AHK$ có O là trung điểm của AK

I là trung điểm của HK

Suy ra OI là đường trung bình của $\triangle AHK \Rightarrow AH = 2OI$

Do OI không đổi nên AH không đổi

Ta có $S_{\triangle AHE} = \frac{1}{2} AE \cdot HE$ (1)

Ta có $\triangle AEH$ vuông tại E nên $AE^2 + EH^2 = AH^2$

Áp dụng bất đẳng thức cô si ta có

$$AH^2 = AE^2 + EH^2 \geq 2\sqrt{AE^2 \cdot EH^2} = 2AE \cdot HE$$

$$\Rightarrow AE \cdot HE \leq \frac{1}{2} AH^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $S_{\triangle AHE} \leq \frac{1}{4} AH^2$ không đổi

$$\Rightarrow S_{\triangle AHE} = \frac{1}{4} AH^2$$

Dấu “=” xảy ra khi $AE = HE \Rightarrow \widehat{HAE} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} = 45^\circ$

Bài 27. Trên nửa đường tròn tâm O đường kính AB với $AB = 2022$, lấy điểm C (C khác A và B), từ C kẻ CH vuông góc AB ($H \in AB$). Gọi D là điểm bất kì trên đoạn CH (D khác C và H), đường thẳng AD cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai E .

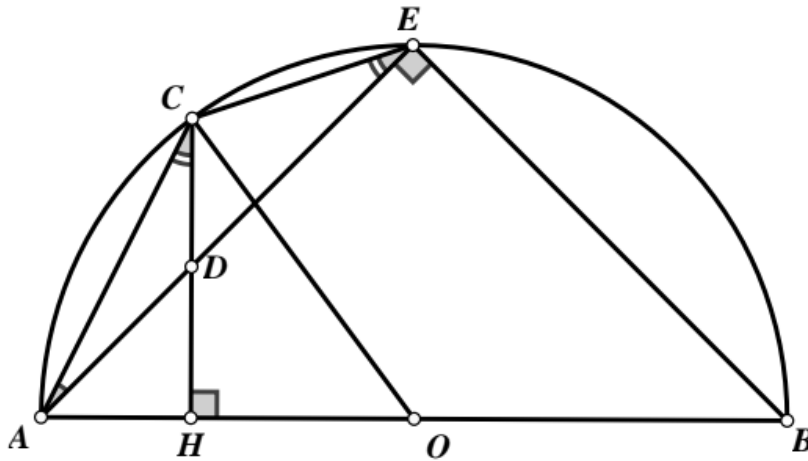
a) Chứng minh tứ giác $BHDE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: $AD \cdot EC = CD \cdot AC$.

c) Chứng minh: $AD \cdot AE + BH \cdot BA = 2022^2$.

d) Khi điểm C di động trên nửa đường tròn (C khác A , B và điểm chính giữa cung AB), xác định vị trí điểm C sao cho chu vi tam giác COH đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



a) Xét tứ giác $BHDE$ có: $\widehat{DHA} = 90^\circ(gt)$; $\widehat{DEB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $\widehat{DHA} = \widehat{DEB}$ do đó tứ giác $BHDE$ nội tiếp.

b) Xét hai tam giác $\triangle ADC$ và $\triangle ACE$ có: $\widehat{CAD}$ chung; $\widehat{ACD} = 90^\circ - \widehat{CAH} = \widehat{CEA}$

Nên $\triangle ADC \sim \triangle ACE(g \cdot g)$ do đó $\frac{AD}{DC} = \frac{AC}{CE}$ hay $AD \cdot EC = CD \cdot AC$.

c) HD: Dựa vào ý (1) để chứng minh $\triangle ADH \sim \triangle ABE(g \cdot g)$ khi đó:

$$AD \cdot AE + BH \cdot BA = AB \cdot AE + AB \cdot BH = AB^2 = 2022^2.$$

d) Tam giác CHO vuông tại H nên theo định lí Pytago ta có:

$$OC^2 = OH^2 + HC^2 = \frac{1}{2}(OH + HC)^2 + \frac{1}{2}(OH - HC)^2 \geq \frac{1}{2}(OH + HC)^2$$

Hay là $OH + HC \leq OC\sqrt{2}$ nên $Cv_{CHO} = OC + OH + HC \leq (1 + \sqrt{2})OC = (1 + \sqrt{2}) \cdot 1011$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi điểm C nằm trên nửa đường tròn O sao cho $\widehat{ACD} = 45^\circ$.

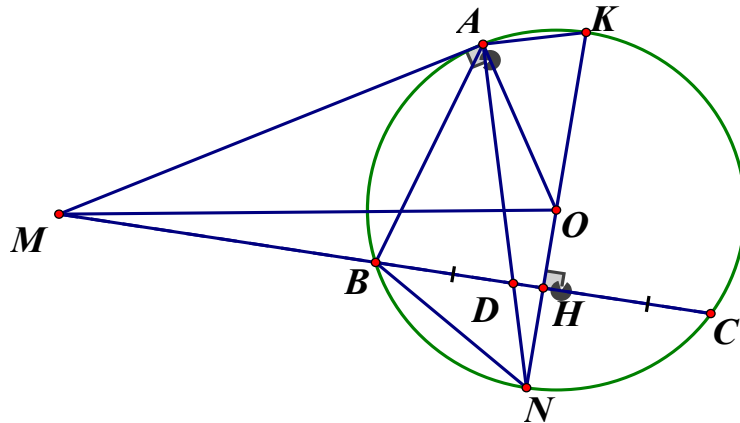
Bài 28. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn $(O; R)$, kẻ tiếp tuyến MA (A là tiếp điểm) và cát tuyến MBC không đi qua tâm O (điểm B nằm giữa hai điểm M, C). Gọi H là trung điểm BC . Đường thẳng OH cắt đường tròn $(O; R)$ tại hai điểm N, K (trong đó điểm K thuộc cung BAC). Gọi D là giao điểm của AN và BC

a) Chứng minh tứ giác $AKHD$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $\angle NAB = \angle NBD$ và $NB^2 = NA \cdot ND$

c) Chứng minh rằng khi đường tròn $(O; R)$ và điểm M cố định đồng thời cát tuyến MBC thay đổi thì điểm D nằm trên một đường tròn cố định

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $AKHD$ là tứ giác nội tiếp

Ta có $\angle KAN = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle KAD = 90^\circ$

H là trung điểm của $BC \Rightarrow OH \perp BC$ (tính chất đường kính – dây cung)

$\Rightarrow \angle KHD = 90^\circ$

Xét tứ giác $AKHD$ có $\angle KAD + \angle KHD = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, mà hai góc này đối diện

Nên tứ giác $AKHD$ nội tiếp

b) Chứng minh $\angle NAB = \angle NBD$ và $NB^2 = NA \cdot ND$

Vì H là trung điểm $BC \Rightarrow N$ là điểm chính giữa cung $BC \Rightarrow \widehat{BN} = \widehat{CN}$

$\Rightarrow \angle NAB = \angle NBC = \angle NBD$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Xét $\triangle NBD$ và $\triangle NAB$ có :

$\angle ANB$ chung, $\angle NBD = \angle NAB$ (cmt) $\Rightarrow \triangle NBD \sim \triangle NAB$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{NB}{ND} = \frac{NA}{NB}$ (2 cặp cạnh tương ứng tỉ lệ) $\Rightarrow NB^2 = NA \cdot ND$ (đpcm)

c) Chứng minh rằng khi đường tròn $(O; R)$ và điểm M cố định đồng thời cát tuyến MBC thay đổi thì điểm D nằm trên một đường tròn cố định

$\angle MDA = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{AB} + \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{NC} = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{AB} + \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{NB} = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{AN} \Rightarrow \triangle MAD$ cân tại M

$\Rightarrow MD = MA$ mà MA không đổi nên $D \in (M; MA)$

Bài 29. Cho đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng d không đi qua O cắt (O) tại hai điểm $A; B$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm M ; qua M kẻ hai tiếp tuyến $MC; MD$ với đường tròn (O) ($C; D$ là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB .

a) Chứng minh tứ giác $OMCH$ nội tiếp.

b) OM cắt đường tròn (O) tại I và cắt CD tại K . Chứng minh $OK \cdot OM = R^2$

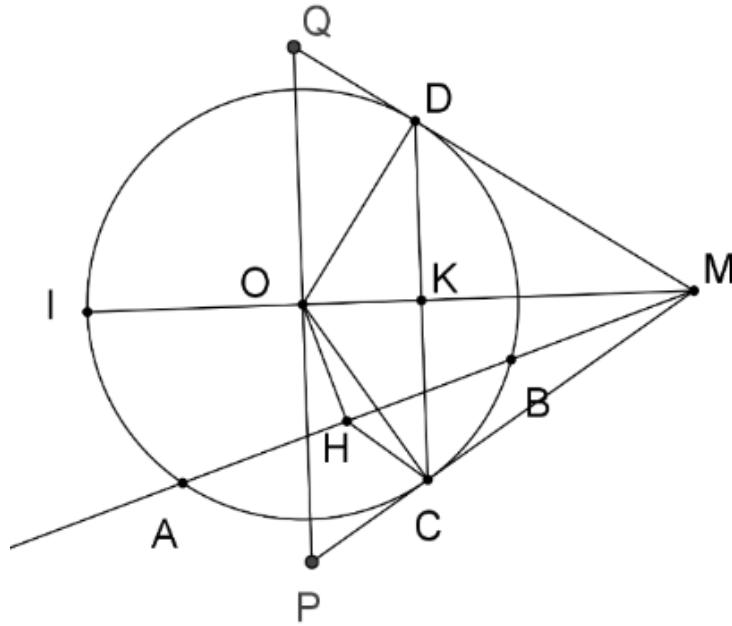
c) Đường thẳng qua O vuông góc với OM , cắt tia MC và MD lần lượt tại P và Q . Tính độ dài OM theo R sao cho diện tích tam giác MPQ nhỏ nhất.

Lời giải

a) Chứng minh tứ giác $OMCH$ nội tiếp.

Vì H là trung điểm của dây cung AB nên $OH \perp AB \Rightarrow \widehat{OHM} = 90^\circ$

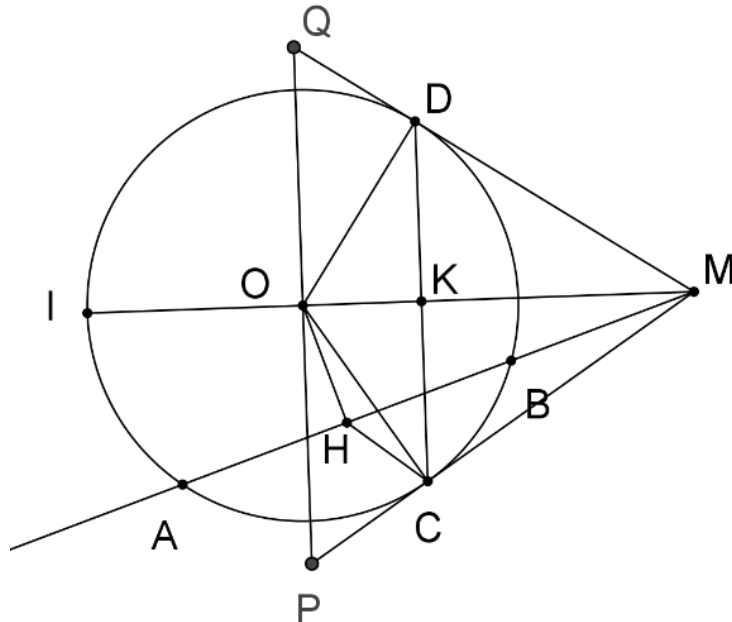
Ta có: $\widehat{OHM} = \widehat{OCM} = 90^\circ$ nên tứ giác OMCH nội tiếp.



b) OM cắt đường tròn (O) tại I và cắt CD tại K. Chứng minh $OK \cdot OM = R^2$

Tam giác ODM vuông tại D (vì $\widehat{ODM} = 90^\circ$). Mặt khác: $MC = MD$ (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau);
 $OC = OD = R \Rightarrow OM$ là đường trung trực của đoạn thẳng $CD \Rightarrow OM \perp CD$. Trong tam giác vuông ODM
 áp dụng hệ thức $b^2 = a \cdot b'$ ta có: $OD^2 = OK \cdot OM \Leftrightarrow OK \cdot OM = R^2$.

c) Đường thẳng qua O vuông góc với OM, cắt tia MC và MD lần lượt tại P và Q. Tính độ dài OM theo R sao cho diện tích tam giác MPQ nhỏ nhất.



Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau ta có MO là tia phân giác của góc PMQ, mặt khác $MO \perp PQ$ nên tam giác PMQ cân tại M $\Rightarrow PQ = 2OP$.

Ta có $S_{PMQ} = \frac{1}{2} MO \cdot PQ = MO \cdot OP$. Trong tam giác vuông OMQ ta có:

$$\frac{1}{OD^2} = \frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OM^2} \Leftrightarrow \frac{1}{R^2} = \frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OM^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si :

$$\frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OM^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{OP^2} \cdot \frac{1}{OM^2}} = \frac{2}{OP \cdot OM} \Leftrightarrow \frac{1}{R^2} \geq \frac{2}{S_{PMQ}}$$

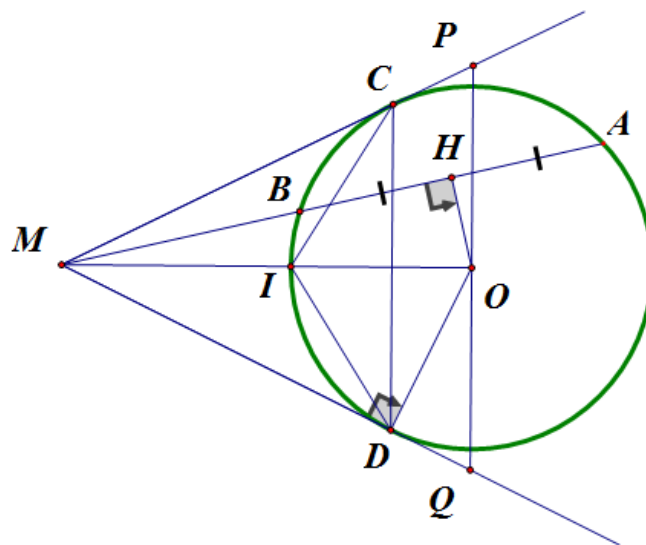
$$S_{PMQ} \geq 2R^2. \text{ Dấu "}" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OP^2} \\ OM \cdot OP = 2R^2 \end{cases} \Leftrightarrow OM = OP = R\sqrt{2}.$$

Vậy S_{PMQ} đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow OM = R\sqrt{2}$.

Bài 30. Cho đường tròn (O, R) và đường thẳng d không đi qua O cắt đường tròn tại hai điểm A, B . Lấy một điểm M trên tia đối của tia BA kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn (C, D là tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB .

- Chứng minh rằng M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn
- Đoạn OM cắt đường tròn tại I . CMR I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD .
- Đường thẳng qua O , vuông góc với OM cắt các tia MC, MD theo thứ tự tại P, Q . Tìm vị trí của điểm M trên d sao cho diện tích tam giác MPQ bé nhất.

Lời giải



a. Do MD là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow MD \perp OD \Rightarrow \widehat{MDO} = 90^\circ$

Do H là trung điểm của AB ; dây AB không đi qua tâm O

nên $OH \perp AB$; $\Rightarrow \widehat{MHO} = 90^\circ$

Xét tứ giác $MHOD$ có $\widehat{MDO} + \widehat{MHO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$ tứ giác $MHOD$ nội tiếp

$\Rightarrow M, D, O, H$ cùng nằm trên một đường tròn.

b. Do MC, MD là tiếp tuyến của (O)

$\Rightarrow MO$ là tia phân giác của $\widehat{CMD} \Rightarrow MI$ là tia phân giác của $\widehat{CMD} (*)$

OI là tia phân giác của $\widehat{COD} \Rightarrow \widehat{COI} = \widehat{DOI}$ hay $\widehat{CI} = \widehat{DI}$ (1)

$$\text{Mà } \widehat{MCI} = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{CI} ; \widehat{DCI} = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{DI} \quad (2)$$

Từ 1, 2 $\Rightarrow \widehat{MCI} = \widehat{DCI} \Rightarrow CI$ là phân giác của $\widehat{MCD}$ (**)

Từ (*), (**) $\Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD

$$\text{c. Ta có } S_{MPQ} = \frac{1}{2} MO.PQ = \frac{1}{2} MO.2.OP = MO.OP$$

$$\text{Mà } \triangle MCO \sim \triangle MOP (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{MO}{MP} = \frac{CO}{OP} \Rightarrow MO.OP = MP.CO$$

$$\Rightarrow S_{MPQ} = MP.CO = (MC + CP).CO \geq 2\sqrt{MC.CP}.CO = 2OC^2 = 2R^2$$

Dấu “=” xảy ra khi $MC = CP \Leftrightarrow \triangle MOP$ vuông cân

$$\Leftrightarrow \widehat{PMO} = 45^\circ \Leftrightarrow \widehat{CMD} = 90^\circ$$

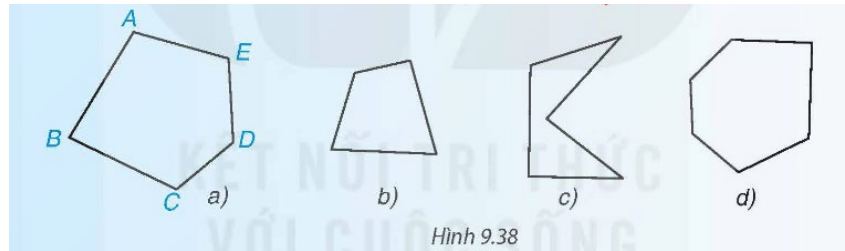
$\Leftrightarrow$ MCOĐ là hình vuông cạnh $R \Leftrightarrow OM = R\sqrt{2}$. Vậy diện tích tam giác MPQ bé nhất khi $OM = R\sqrt{2}$

BÀI 30. ĐA GIÁC ĐỀU

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đa giác đều

- Những hình như Hình 9.38 được gọi chung là các *đa giác*.



- Đa giác $ABCDE$ (H.9.38a) là hình gồm năm đoạn thẳng AB, BC, CD, DE, EA , trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào có một điểm chung cũng không cùng nằm trên một đường thẳng. Đa giác $ABCDE$ có năm đỉnh là các điểm A, B, C, D, E ; năm cạnh là các đoạn thẳng AB, BC, CD, DE, EA và năm góc là các góc EAB, ABC, BCD, CDE, DEA .

- Nếu với một cạnh bất kì của đa giác, các đỉnh không thuộc cạnh đó đều nằm về một phía đối với đường thẳng chứa cạnh đó thì đa giác được gọi là đa giác lồi. Các đa giác trong Hình 9.38 a, b, d là các đa giác lồi. Đa giác trong Hình 9.38c không phải đa giác lồi.

Định nghĩa: Đa giác đều là một đa giác lồi có các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau.

Người ta chứng minh được rằng các đỉnh của mỗi đa giác đều luôn cùng nằm trên một đường tròn, được gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác, tâm đường tròn được gọi là tâm của đa giác và đa giác được gọi là nội tiếp đường tròn đó.

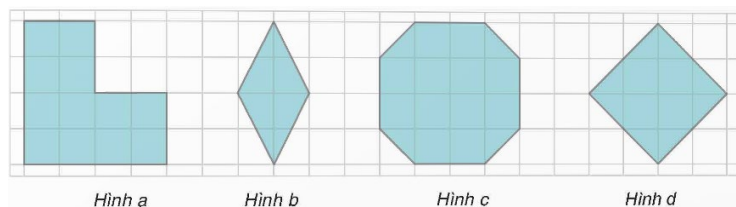
Ví dụ 1. a) Dưới đây là hình các đa giác đều thường gặp trong hình học (H.9.41).



b) Trong nghệ thuật, kiến trúc, công nghệ chế tạo và thế giới tự nhiên có nhiều hình phẳng có dạng đa giác đều. Những hình phẳng này không chỉ đẹp vì sự cân đối hài hoà mà còn tối ưu trong việc sắp xếp và sử dụng (H.9.42).



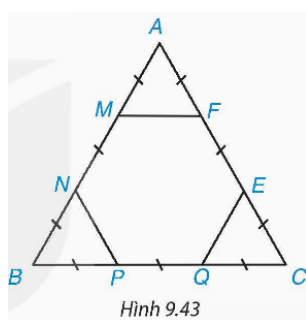
Ví dụ 2. Trong các hình phẳng dưới đây, hình phẳng nào có dạng là một đa giác đều?



Lời giải

Ta thấy đa giác trong hình a không phải đa giác lồi, đa giác trong hình b là hình thoi có các góc không bằng nhau, đa giác trong hình c là bát giác có các cạnh không bằng nhau, đa giác trong hình d là hình vuông. Do vậy chỉ có hình phẳng trong hình d có dạng đa giác đều.

Ví dụ 3. Cho tam giác đều ABC có cạnh 6 cm. Trên cạnh AB lấy các điểm M, N ; trên cạnh BC lấy các điểm P, Q ; trên cạnh CA lấy các điểm E, F , sao cho các đoạn thẳng $AM, MN, NB, BP, PQ, QC, CE, EF, FA$ đều bằng 2 cm như Hình 9.43. Hỏi $MNPQEF$ có là một lục giác đều hay không?



Lời giải

Theo Hình 9.43, ta thấy $MNPQEF$ là một đa giác lồi. Ta có $\frac{AM}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{3}$.

Theo định lý Thalès đảo cho tam giác ABC và đường thẳng MF thì $MF \parallel BC$.

Suy ra $\frac{MF}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$. Do đó $MF = \frac{BC}{3} = 2$ cm. Tương tự, $NP = QE = 2$ cm.

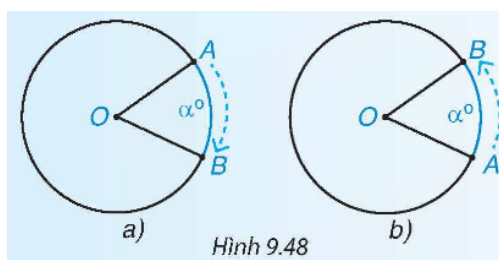
Vậy lục giác $MNPQEF$ có tất cả các cạnh bằng nhau.

Mặt khác, tam giác AMF là tam giác đều vì $AM = MF = FA = 2$ cm nên $\widehat{FMA} = 60^\circ$ và $\widehat{FMN} = 180^\circ - \widehat{FMA} = 120^\circ$.

Tương tự các góc tại các đỉnh N, P, Q, E, F của lục giác $MNPQEF$ đều bằng nhau và bằng 120° . Vậy lục giác $MNPQEF$ có các cạnh và các góc bằng nhau. Do đó $MNPQEF$ là lục giác đều.

2. Phép quay

Phép quay thuận chiều α° ($0^\circ < \alpha^\circ < 360^\circ$) tâm O giữ nguyên điểm O , biến điểm A khác điểm O thành điểm B thuộc đường tròn (O, OA) sao cho tia OA quay thuận chiều quay của kim đồng hồ đến tia OB thì điểm A tạo nên cung AB có số đo α° (H.9.48a). Định nghĩa tương tự cho phép quay ngược chiều α° tâm O (H.9.48b). Phép quay 0° và phép quay 360° giữ nguyên mọi điểm.



Ví dụ 4. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) như Hình 9.49. Hãy cho biết các phép quay ngược chiều lần lượt $120^\circ, 240^\circ, 360^\circ$ với tâm O sẽ biến các đỉnh A, B, C thành những điểm nào.

Lời giải

Các phép quay ngược chiều lần lượt $120^\circ, 240^\circ, 360^\circ$ với tâm O biến các điểm A, B, C thành những điểm tương ứng được cho bởi bảng sau:

Đỉnh	A	B	C
Phép quay ngược chiều			
120°	B	C	A
240°	C	A	B
360°	A	B	C

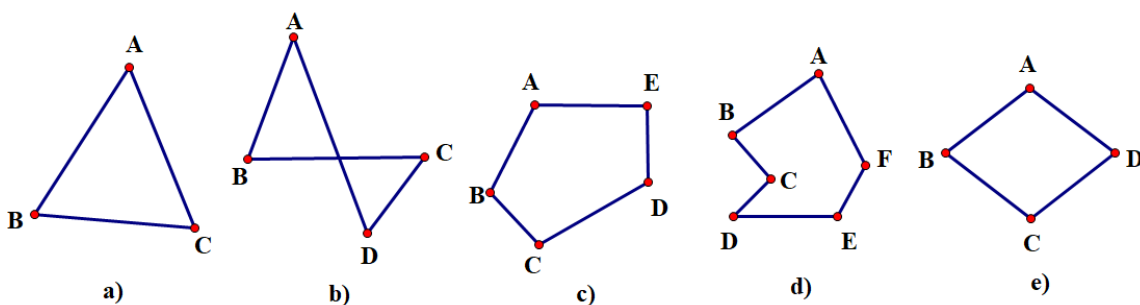
Khái niệm: Một phép quay được gọi là giữ nguyên một đa giác đều $\mathcal{H}$ nếu phép quay đó biến mỗi điểm của $\mathcal{H}$ thành một điểm của $\mathcal{H}$. Người ta chỉ ra rằng nếu một phép quay biến các đỉnh của đa giác đều $\mathcal{H}$ thành các đỉnh của $\mathcal{H}$ thì phép quay đó giữ nguyên $\mathcal{H}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Nhận dạng đa giác đều

Ví dụ 1. Tìm các đa giác lồi trong hình vẽ và giải thích.

Lời giải

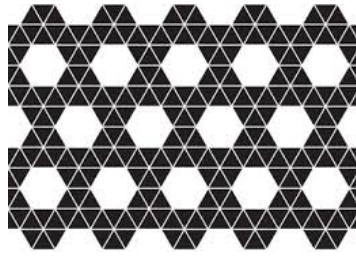


Các đa giác trong hình a, c, e là các đa giác lồi vì đa giác luôn nằm về một phía của đường thẳng chứa một cạnh bất kì của đa giác.

Đa giác ở hình b không phải là đa giác lồi vì không cùng nằm về một phía so với đường thẳng AD hoặc BC .

Ở hình d cũng không phải là đa giác lồi vì không cùng nằm về một phía so với đường thẳng BC hoặc DC .

Ví dụ 2. Trong các hình phẳng sau, hình nào là hình phẳng có dạng đa giác đều?



Lời giải

Hình phẳng có dạng đa giác đều là hình b và d.

Ví dụ 3. Tìm và gọi tên các đa giác đều có trong hình vẽ dưới đây.

Lời giải

Hình 3b là ngũ giác đều, Hình 3d là hình bát giác đều; Hình 3e là tứ giác đều; Hình 3g là lục giác đều.

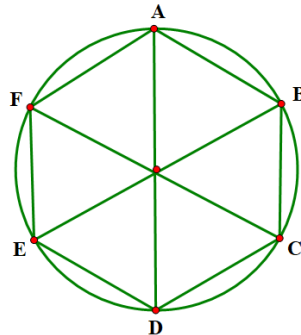
Ví dụ 4. Kể tên các loại đa giác đều có trong hình.

Lời giải

Các đa giác đều có trong hình là: Tam giác đều, tứ giác đều và lục giác đều.

Ví dụ 5. Cho đường tròn $(O; R)$. Lấy các điểm A, B, C, D, E, F trên đường tròn $(O; R)$ sao cho số đo các cung $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DE}, \widehat{EF}, \widehat{FA}$ bằng nhau. Đa giác $ABCDEF$ có là đa giác đều không?

Lời giải



Ta có $sđ \widehat{AB} = sđ \widehat{BC} = sđ \widehat{CD} = sđ \widehat{DE} = sđ \widehat{EF} = sđ \widehat{FA} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.

Xét tam giác AOB cân tại O có $\widehat{AOB} = 60^\circ$ (vì $sđ \widehat{AB} = 60^\circ$)

$\Rightarrow \triangle AOB$ đều nên $AB = R$ và $\widehat{ABO} = 60^\circ$ (1)

Tương tự với tam giác BOC đều $\Rightarrow \widehat{OBC} = 60^\circ$ và $BC = R$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ABO} + \widehat{OBC} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$ và $AB = BC = R$.

Chứng minh tương tự với các cạnh và các góc còn lại ta có đa giác $ABCDEF$ có:

$AB = BC = CD = DE = EF = FA = R$.

Và các góc $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDE} = \widehat{DEF} = \widehat{EFA} = \widehat{FAB} = 120^\circ$. Do đó $ABCDEF$ là một đa giác đều.

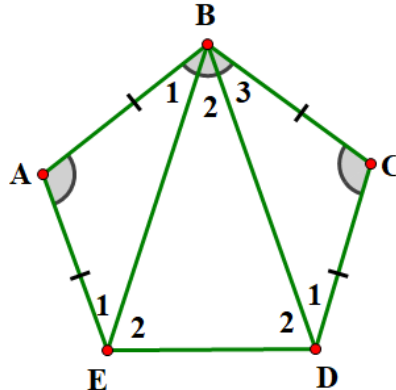
Ví dụ 6. Cho ngũ giác $ABCDE$ có các cạnh bằng nhau và $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 108^\circ$. Ngũ giác $ABCDE$ có phải là ngũ giác đều không?

Hướng dẫn: Để chứng minh ngũ giác $ABCDE$ đều ta phải chứng minh:

* Các cạnh bằng nhau (giả thiết đã cho).

* Các góc bằng nhau: $\widehat{D} = \widehat{E} = 108^\circ$.

Lời giải



Ta có: $AB = BC = CD = DE = EA$ (gt) (*).

Xét tam giác ABE có $AB = AE$ (gt) nên $\triangle ABE$ cân tại A có $\widehat{A} = 108^\circ$ (gt)

$$\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{E}_1 = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ.$$

Tương tự với tam giác BCD , ta có: $\widehat{B}_3 = \widehat{D}_1$.

$$\text{Lại có } \widehat{ABC} = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 + \widehat{B}_3 = 108^\circ \Rightarrow \widehat{B}_2 = 108^\circ - (\widehat{B}_1 + \widehat{B}_3) \Rightarrow \widehat{B}_2 = 108^\circ - (36^\circ + 36^\circ) = 36^\circ$$

Dễ thấy $\triangle ABE = \triangle CBD$ (c.g.c) $\Rightarrow BE = BD$ hay tam giác EBD cân tại B có $\widehat{B}_2 = 36^\circ$

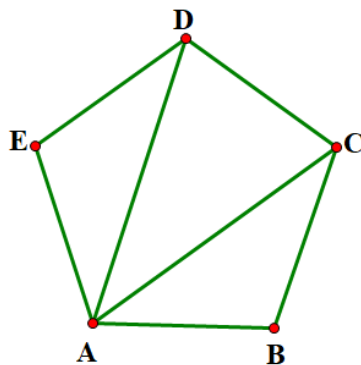
$$\Rightarrow \widehat{E}_2 = \widehat{D}_2 = \frac{180^\circ - \widehat{B}_2}{2} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ. \text{ Khi đó } \widehat{AED} = \widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = 36^\circ + 72^\circ = 108^\circ$$

Tương tự $\widehat{CDE} = 108^\circ$. Vậy $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = \widehat{E} = 108^\circ$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow$ Ngũ giác $ABCDE$ là ngũ giác đều (Các cạnh bằng nhau, các góc bằng nhau).

Dạng 2. Tính toán

Ví dụ 1. Cho ngũ giác đều $ABCDE$ như hình vẽ.



a) Tính tổng các góc trong của tam giác ABC, ACD, ADE , từ đó suy ra tổng các góc trong ngũ giác đều $ABCDE$.

b) Tính số đo góc E .

Lời giải

a) Tổng các góc trong của tam giác ABC bằng 180° . Tương tự với hai tam giác còn lại ACD và ADE .

Vậy tổng các góc trong của ba tam giác ABC, ACD và ADE là: $3.180^\circ = 540^\circ$

$\Rightarrow$ Tổng các góc trong của ngũ giác đều $ABCDE$ là 540° .

b) Vì $ABCDE$ là ngũ giác đều nên tất cả các góc đều bằng nhau nên số đo mỗi góc của ngũ giác đều bằng $\frac{540}{5} = 108^\circ$. Vậy số đo góc E bằng 108° .

Ví dụ 2. Cho hình tròn $(O; R)$.

a) Vẽ hình tam giác đều, hình vuông, hình lục giác đều có các đỉnh nằm trên $(O; R)$.

b) Tính các cạnh của các hình vừa vẽ theo R .

Lời giải

a) • Vẽ tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Vẽ đường cao AH , ta có:

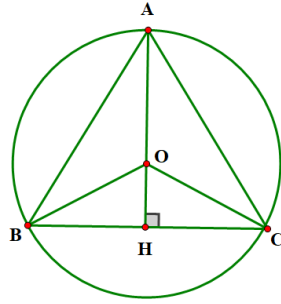
$$AB = AC; OB = OC = R$$

Nên A, O, H thuộc đường trung trực của BC vì $\triangle ABC$ đều nên O là trọng tâm của tam giác.

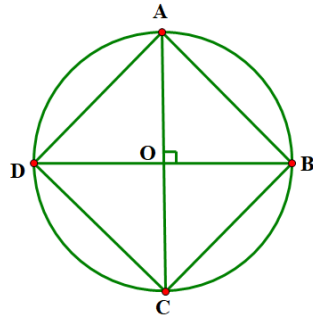
Ta có $AH = \frac{3}{2} AO = \frac{3}{2} R$ (1) (tính chất trọng tâm). Lại có AH là đường cao của tam giác ABC đều nên

$$AH = \frac{AB\sqrt{3}}{2}. \text{ Từ (1) và (2) } \Rightarrow \frac{3}{2} R = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \frac{3R}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.R$$

Vậy cạnh của tam giác đều nội tiếp đường tròn $(O; R)$ là $\sqrt{3}.R$.



- Vẽ hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$.

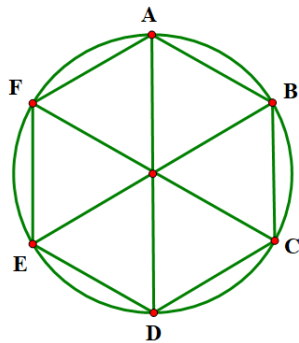


Ta có: $AC \perp BD$ (tính chất hai đường chéo hình vuông). Xét tam giác AOB vuông tại O .

Theo định lý Pythagore, ta có: $AB^2 = OA^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 \Rightarrow AB = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$

Vậy cạnh của hình vuông nội tiếp đường tròn $(O; R)$ là $R\sqrt{2}$.

- Vẽ lục giác đều $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$



Vì $ABCDEF$ là lục giác đều $\Rightarrow AB = BC = CD = DE = EF = FA$

$\Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EF} = \widehat{FA}$

$\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \widehat{EOF} = \widehat{FOA} = \frac{360}{6} = 60^\circ$

Xét tam giác AOB cân tại O có $\widehat{AOB} = 60^\circ$ nên $\triangle AOB$ đều $\Rightarrow AB = R$.

Chứng minh tương tự, ta có $BC = CD = DE; EF = FA = AB = R$.

Vậy cạnh của hình lục giác đều nội tiếp đường tròn $(O; R)$ là R .

Ghi nhớ: Bán kính đường tròn ngoại tiếp là R .

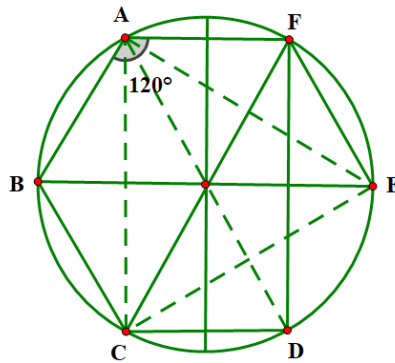
- Độ dài cạnh tam giác đều nội tiếp là $R\sqrt{3}$
- Độ dài cạnh hình vuông nội tiếp là $R\sqrt{2}$.
- Độ dài cạnh hình lục giác đều nội tiếp là R .

Dạng 3. Phép quay

Ví dụ 1. Cho lục giác đều $ABCDEF$.

- Tính số đo các góc BCF, BDF, BEF .
- Gọi O là tâm của lục giác đều. Hãy chỉ ra ba phép quay tâm O giữ nguyên tam giác ACE .

Lời giải



a) Dễ thấy $ABCDEF$ là lục giác đều nên $\widehat{ABF} = \widehat{AFE} = \widehat{FED} = \widehat{EDC} = \widehat{DCB} = \widehat{CBA} = 120^\circ$.

Ta có tứ giác $ABCF$ nội tiếp đường tròn (R) nên $\widehat{BCF} = \widehat{BAF} = 180^\circ$ hay

$$\widehat{BCF} + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BCF} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Tương tự tứ giác $ABDF$ nội tiếp đường tròn (R) nên $\widehat{BDF} = \widehat{BAF} = 180^\circ$ hay

$$\widehat{BDF} + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BDF} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Tương tự ta có $\widehat{BEF} = 60^\circ$.

b) Ba đỉnh A, C, E của tam giác đều ACE chia đường tròn (O) thành ba cung bằng nhau:

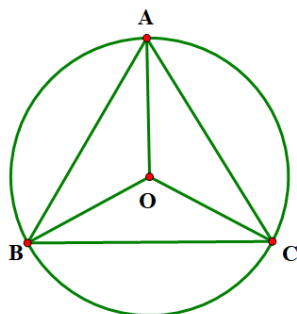
$$\text{sd}\widehat{AC} = \text{sd}\widehat{CE} = \text{sd}\widehat{EA} = 120^\circ$$

Do đó có 6 phép quay tâm O giữ nguyên tam giác đó là:

Phép quay $120^\circ, 240^\circ$ thuận chiều hoặc 120° ngược chiều.

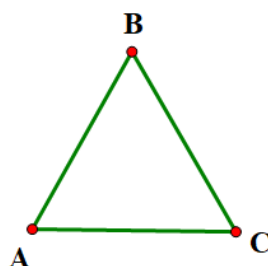
Nhận xét: Có tất cả 6 phép quay $120^\circ, 240^\circ, 360^\circ$ tâm O thuận chiều hoặc ngược chiều kim đồng hồ giữ nguyên tam giác.

Ví dụ 2. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) . Hãy chỉ ra các phép quay biến tam giác thành chính nó.



Hướng dẫn: Tương tự câu b, bài toán 9, có tất cả 6 phép quay đó là phép quay $120^\circ, 240^\circ, 360^\circ$ tâm O thuận chiều và ngược chiều.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC đều như hình vẽ.

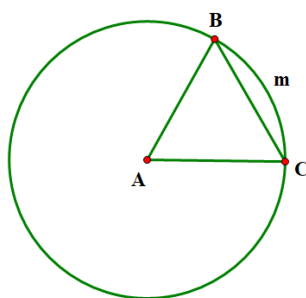


Điểm B biến thành điểm nào:

a) Phép quay thuận chiều 60° tâm A ;

b) Phép quay ngược chiều 300° tâm A .

Lời giải



a) Tam giác ABC đều nên $AB = AC$. Do đó C thuộc đường tròn $(A; AB)$.

Xét đường tròn $(A; AB)$, ta có: $\widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \text{sđ}\widehat{BmC} = 60^\circ$

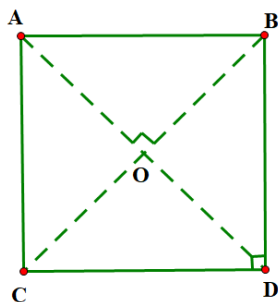
Khi đó điểm B biến thành điểm C qua phép quay thuận chiều 60° tâm A.

b) Ta có: $\text{sđ}\widehat{BnC} = 360^\circ - \text{sđ}\widehat{BmC} = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

Khi đó điểm B biến thành điểm C qua phép quay ngược chiều 300° tâm A.

Ví dụ 4. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O (hình vẽ). Nêu các phép quay giữ nguyên hình vuông đó.

Lời giải



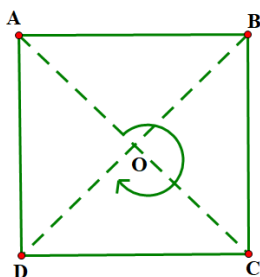
Ta có bốn điểm A, B, C, D thuộc đường tròn tâm O là giao điểm hai đường chéo AC và BD .

Ta có $AC \perp BD$. Có 8 phép quay giữ nguyên hình vuông $ABCD$ là:

- * Phép quay $180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ tâm O thuận chiều.
- * Phép quay $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ tâm O ngược chiều.

Ví dụ 5. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O như hình vẽ. Phép quay thuận chiều tâm O biến điểm A thành điểm D thì các điểm B, C, D tương ứng biến thành các điểm nào?

Lời giải



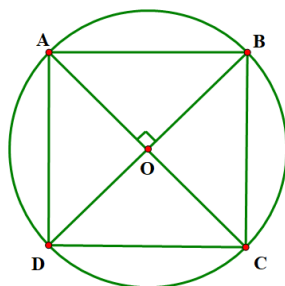
Ta có $ABCD$ là hình vuông nên $OA = OB = OC = OD$ và $AC \perp BD$.

Ta có: $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA} = 90^\circ$.

Phép quay thuận chiều tâm O biến điểm A thành điểm D là phép quay $3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$. Khi đó điểm B biến thành điểm A , điểm C biến thành điểm B và điểm D biến thành điểm C .

Ví dụ 6. Cho hình vuông nội tiếp đường tròn tâm O . hãy cho biết các phép quay thuận chiều lần lượt $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ với tâm O sẽ biến các điểm A, B, C, D thành những điểm nào?

Lời giải

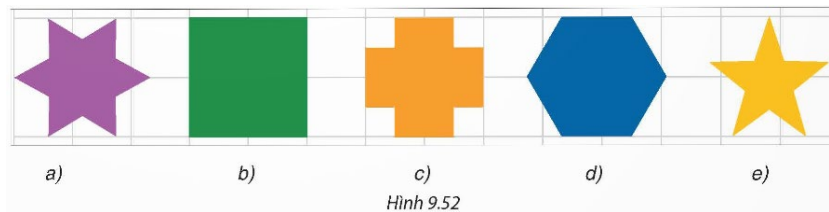


Các phép quay thuận chiều lần lượt là $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ với tâm O biến các điểm A, B, C, D thành những điểm tương ứng cho bởi bảng sau:

Đỉnh Phép quay cùng chiều	A	B	C	D
90°	B	C	D	A
180°	C	D	A	B
270°	D	A	B	C

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

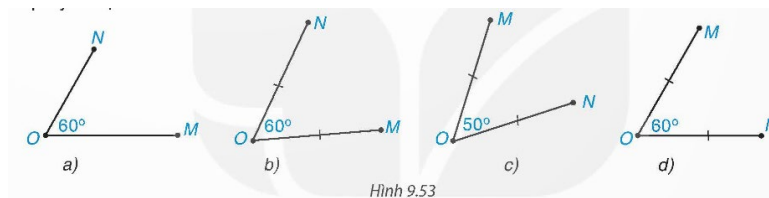
9.24. Trong các hình phẳng sau (H.9.52), hình nào là hình phẳng có dạng đa giác đều?



Lời giải

Hình b là hình vuông, hình d là hình lục giác đều vì hai hình đều có các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau.

9.25. Trong các hình dưới đây (H.9.53), hình nào vẽ hai điểm M và N thỏa mãn phép quay thuận chiều 60° tâm O biến điểm M thành điểm N ?



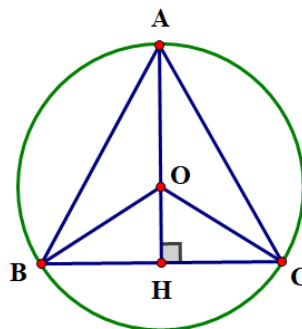
Lời giải

Phép quay thuận chiều 60° tâm O biến điểm M thành điểm N tức là điểm N thuộc đường tròn $(O; OM)$ sao cho tia OM quay thuận chiều kim đồng hồ đến tia ON thì điểm M tạo nên cung MN số đo 60° .

Do đó, hình d đúng.

9.26. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) bán kính 2 cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC .

Lời giải



Vì tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (O) nên O là trọng tâm, trực tâm của tam giác ABC .

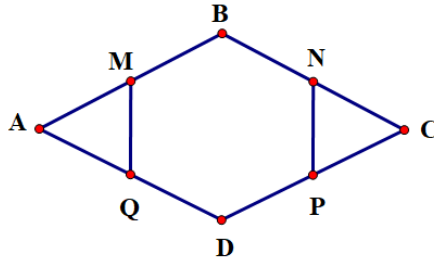
Gọi H là giao điểm của AO và BC nên AH là trung trực đồng thời là đường cao trong tam giác đều ABC .

$$\text{Do đó: } OA = \frac{BC\sqrt{3}}{3} \Rightarrow BC = \sqrt{3}OA = 2\sqrt{3}(\text{cm}).$$

Vậy cạnh của tam giác đều bằng $2\sqrt{3}\text{ cm}$.

9.27. Cho hình thoi $ABCD$ có $\hat{A} = 60^\circ$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng $MBNPDQ$ là lục giác đều.

Lời giải



Vì $ABCD$ là hình thoi nên $AB = BC = CD = AD$. Vì M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của

$$AB, BC, CD, DA \text{ nên } MB = BN = NC = PC = PD = DQ = \frac{AB}{2} \quad (1)$$

Tam giác ABD có: $AB = AD$ nên tam giác ABD là tam giác cân tại A , mà $\hat{A} = 60^\circ$ nên tam giác ABD đều.

Do đó, $AB = BD$. Vì M, Q lần lượt là trung điểm của AB và AD (gt) nên MQ là đường trung bình của tam giác ABD . Do đó, $MQ = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB$ (2).

Vì N, P lần lượt là trung điểm của BC và CD (gt) nên NP là đường trung bình của tam giác CBD . Do đó, $NP = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có: $MB = BN = PD = DQ = MQ = NP$ (*)

Vì $ABCD$ là hình thoi nên $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$; $\hat{C} = \hat{A} = 60^\circ$

$$\text{Ta có: } \widehat{ABC} + \widehat{ADC} + \hat{C} + \hat{A} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 360^\circ - 2.60^\circ = 120^\circ$$

Tam giác NPC có: $NC = PC$ nên tam giác NPC cân tại C . Mà $\hat{C} = 60^\circ$ nên tam giác NPC đều.

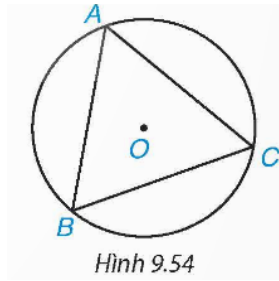
Do đó, $\widehat{CNP} = 60^\circ$. Ta có: $\widehat{BNP} + \widehat{PNC} = 180^\circ$ (hai góc kề bù) nên $\widehat{BNP} = 120^\circ$

Chứng minh tương tự ta có: $\widehat{NPD} = \widehat{DQM} = \widehat{QMB} = 120^\circ$

$$\text{Do đó: } \widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \widehat{BNP} = \widehat{NPD} = \widehat{DQM} = \widehat{QMB} = 120^\circ \quad (**)$$

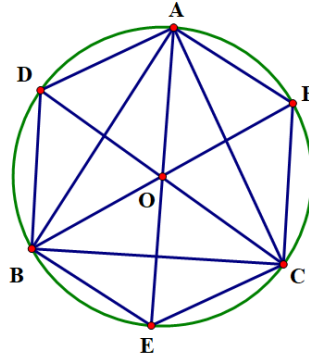
Từ (*) và (**) ta có: $MBNPDQ$ là lục giác đều.

9.28. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) như Hình 9.54. Phép quay ngược chiều 60° tâm O biến các điểm A, B, C lần lượt thành các điểm D, E, F . Chứng minh rằng $ADBECF$ là một lục giác đều.



Hình 9.54

Lời giải



Vì lục giác $ADBECF$ nội tiếp đường tròn (O) nên $OA = OB = OC = OD = OE = OF$. Vì phép quay ngược chiều 60° tâm O biến các điểm A, B, C lần lượt thành các điểm D, E, F nên $\widehat{AOD} = \widehat{BOE} = \widehat{COF} = 60^\circ$. Vì tam giác ABC đều nên AO, BO là các đường phân giác của tam giác ABC .

Ta có: $\widehat{BAO} = \widehat{ABO} = \frac{1}{2} \widehat{ABC} = 30^\circ$. Tam giác OAB có: $\widehat{BOA} = 180^\circ - \widehat{BAO} - \widehat{ABO} = 120^\circ$.

Suy ra: $\widehat{BOD} = \widehat{AOB} - \widehat{AOD} = 60^\circ$. Tam giác AOD cân tại O (do $OA = OD$), mà $\widehat{AOD} = 60^\circ$ nên tam giác

DAO đều. Do đó, $DA = AO = OD, \widehat{DAO} = \widehat{ADO} = 60^\circ$.

Tương tự ta có: $DO = OB = BD, \widehat{ODB} = \widehat{OBD} = 60^\circ$, $EO = OB = BE, \widehat{OEB} = \widehat{OBE} = 60^\circ$,

$EO = OC = CE, \widehat{OEC} = \widehat{OCE} = 60^\circ$, $FO = OC = CF, \widehat{OFC} = \widehat{OCF} = 60^\circ$,

$FO = OA = AF, \widehat{OFA} = \widehat{OAF} = 60^\circ$

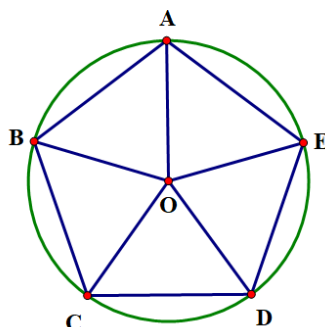
Do $AD = BD = BE = EC = FC = FA$ và $\widehat{DAF} = \widehat{AFC} = \widehat{FCE} = \widehat{CEB} = \widehat{EBD} = \widehat{BDA} = 120^\circ$.

Vậy $ADBECF$ là lục giác đều.

9.29. Liệt kê năm phép quay giữ nguyên một ngũ giác đều nội tiếp một đường tròn tâm O .

Lời giải

Giả sử $ABCDE$ là ngũ giác đều nội tiếp đường tròn (O) (hình vẽ).



Vì ngũ giác $ABCDE$ nội tiếp đường tròn (O) nên $OA = OB = OC = OD = OE$.

Vì $ABCDE$ là ngũ giác đều nên $AB = BC = CD = DE = EA$.

Xét $\triangle OAB$ và $\triangle OBC$ có: $OA = OB, OB = OC, AB = BC$

Do đó $\triangle OAB = \triangle OBC$ (c.c.c)

Chứng minh tương tự ta có $\triangle OAB = \triangle OBC = \triangle COD = \triangle DOE = \triangle EOA$.

Suy ra $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \widehat{EOA}$. Mà $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COD} + \widehat{DOE} + \widehat{EOA} = 360^\circ$

Do đó $5\widehat{AOB} = 360^\circ$. Suy ra $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \widehat{EOA} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.

Khi đó phép quay ngược chiều 72° tâm O giữ nguyên điểm O , biến điểm A thành điểm B thuộc đường tròn $(O; OA)$ sao cho tia OA quay ngược chiều kim đồng hồ đến tia OB , điểm A tạo nên cung AB có số đo 72° .

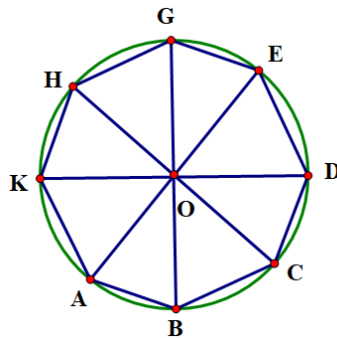
Vậy mỗi phép quay ngược chiều 72° tâm O ở mỗi đỉnh A, B, C, D, E sẽ giữ nguyên ngũ giác đều nội tiếp một đường tròn tâm O .

9.30. Cho vòng quay mặt trời gồm tám cabin như Hình 9.55. Hỏi để cabin A di chuyển đến vị trí cao nhất thì vòng quay phải quay thuận chiều quay của kim đồng hồ quanh tâm bao nhiêu độ?



Lời giải

Giả sử 8 cabin tạo thành một bát giác đều $ABCDEFGHK$ nội tiếp đường tròn (O) .



Vì bát giác $ABCDEFGHK$ nội tiếp đường tròn (O) nên $OA = OB = OC = OD = OE = OG = OH = OK$.

Vì $ABCDEFGHK$ là bát giác đều nên $AB = BC = CD = DE = EG = GH = HK = KA$.

Xét $\triangle OAB$ và $\triangle OBC$ có: $OA = OB, OB = OC, AB = BC$. Do đó $\triangle OAB = \triangle OBC$ (c.c.c)

Chứng minh tương tự ta có $\triangle OAB = \triangle OBC = \triangle COD = \triangle DOE = \triangle EOG = \triangle GOH = \triangle HOK = \triangle KOA$.

Suy ra $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \widehat{EOG} = \widehat{GOH} = \widehat{HOK} = \widehat{KOA}$.

Mà $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COD} + \widehat{DOE} + \widehat{EOG} + \widehat{GOH} + \widehat{HOK} + \widehat{KOA} = 360^\circ$. Do đó $8\widehat{AOB} = 360^\circ$

Suy ra $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \widehat{EOG} = \widehat{GOH} = \widehat{HOK} = \widehat{KOA} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

Khi đó $\widehat{AOG} = \widehat{AOK} + \widehat{KOH} + \widehat{HOG} = 45^\circ + 45^\circ + 45^\circ = 135^\circ$.

Để cabin A di chuyển đến vị trí cao nhất (vị trí của cabin G ban đầu) thì tia OA quay thuận chiều kim đồng hồ đến tia OG , điểm A tạo nên cung $\widehat{AG}$ có số đo 135° .

Vậy để cabin A di chuyển đến vị trí cao nhất thì vòng quay phải quay thuận chiều kim đồng hồ quanh tâm có số đo là 135° .

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính số đo của mỗi góc của ngũ giác đều, lục giác đều, bát giác đều (đa giác đều 8 cạnh).

Lời giải

Mỗi góc của ngũ giác đều bằng: $\frac{(5-2) \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$

Mỗi góc của ngũ lục đều bằng: $\frac{(6-2) \cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ$

Mỗi góc của bát giác đều bằng: $\frac{(8-2) \cdot 180^\circ}{8} = 135^\circ$

Bài 2. Tính số cạnh của một đa giác đều, biết mỗi góc của nó bằng 135° .

Lời giải

Gọi n là số cạnh của đa giác đều.

Ta có $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = 135^\circ$

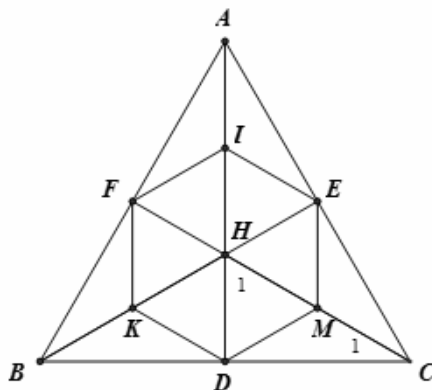
nên $\frac{n-2}{n} = \frac{135}{180} = \frac{3}{4}$.

Do đó $4(n-2) = 3n$.

Vậy $n = 8$.

Bài 3. Cho tam giác đều ABC , các đường cao AD , BE , CF cắt nhau tại H . Gọi I , K , M theo thứ tự là trung điểm của HA , HB , HC . Chứng minh rằng $DKFIEM$ là lục giác đều.

Lời giải



Xét $\triangle HDC$ vuông tại D , DM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $DM = HM$. Ta lại có $\widehat{C_1} = 30^\circ$ nên $\widehat{H_1} = 60^\circ$. Do đó $\triangle HDM$ là tam giác đều.

Tương tự các tam giác HME , HEI , HIF , HFK , HKD là các tam giác đều.

Lục giác $DKFIEM$ có các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau (bằng 120°) nên là lục giác đều.

Bài 4.

- Tính số đường chéo của đa giác n cạnh.
- Đa giác nào có số đường chéo bằng số cạnh?

Lời giải

a) Từ mỗi đỉnh của hình n – giác lồi, kẻ được $n - 1$ đoạn thẳng đến các đỉnh còn lại, trong đó có hai đoạn thẳng là cạnh của đa giác, $n - 3$ đoạn thẳng là đường chéo.

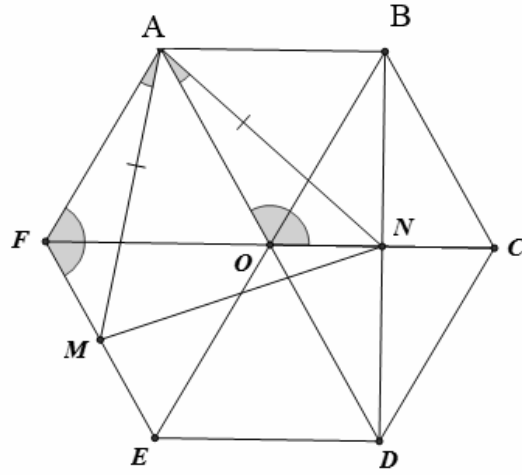
Đa giác có n đỉnh nên kẻ được $n(n - 3)$ đường chéo, trong đó mỗi đường chéo tính 2 lần. Vậy số đường

chéo của hình n - giác lồi là $\frac{n(n-3)}{2}$.

b) Giải phương trình $\frac{n(n-3)}{2} = n$. Ta được $n = 5$

Bài 5. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Gọi M là trung điểm của EF , N là trung điểm của BD . Chứng minh rằng AMN là tam giác đều.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AD , BE , CF . Dễ dàng chứng minh N là trung điểm của OC , $\triangle AFM = \triangle AON$ (c.g.c).

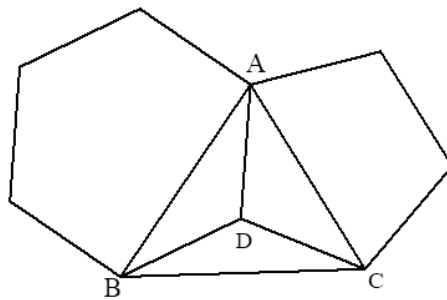
Từ đó $AM = AN$ và $\widehat{MAN} = 60^\circ$ nên $\triangle AMN$ là tam giác đều.

Bài 6. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Trên cạnh AB , BC , CD , DE , EF , FA lấy các điểm A' , B' , C' , D' , E' , F' sao cho $AA' = BB' = CC' = DD' = EE' = FF'$. Chứng minh rằng $A'B'C'D'E'F'$ là một lục giác đều.

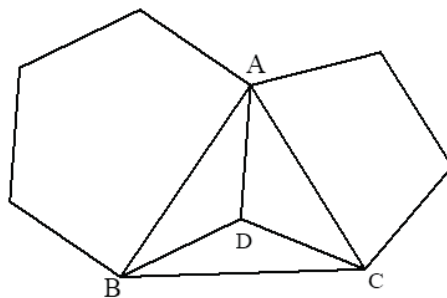
Lời giải

Hướng dẫn: Chứng minh rằng các tam giác $AA'F$, $BB'A'$, $CC'B'$, $DD'C'$, $EE'D'$, $FF'E$ bằng nhau.

Bài 7. Một lục giác đều và một ngũ giác đều chung cạnh AD (như hình vẽ). Tính các góc của tam giác ABC .



Lời giải



Theo công thức tính góc của đa giác đều, ta có:

$$\widehat{ADB} = \frac{(6-2) \cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{DBA} = 30^\circ;$$

$$\widehat{ADC} = \frac{(5-2) \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{DCA} = 36^\circ;$$

$$\text{Suy ra } \widehat{BDC} = 360^\circ - 120^\circ - 108^\circ = 132^\circ.$$

$$\text{Ta có } \triangle BDC \text{ (} DB = DC \text{) cân tại D. Do đó } \widehat{DBC} = \widehat{DCB} = \frac{180^\circ - 132^\circ}{2} = 24^\circ.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{BAC} = 30^\circ + 36^\circ = 66^\circ; \widehat{ABC} = 30^\circ + 24^\circ = 54^\circ; \widehat{BCA} = 24^\circ + 36^\circ = 60^\circ$$

Bài 8. Cho ngũ giác đều $ABCDE$. Gọi I là giao điểm của AD và BE . Chứng minh rằng

a) $DIBC$ là hình bình hành;

b) $DI^2 = AI \cdot AD$.

Lời giải

a) Ta có mỗi góc trong của ngũ giác đều có số đo là 108° hay $\widehat{AED} = 108^\circ$; Tam giác AED cân tại E từ đó $\widehat{A_1} = \widehat{D_1} = 36^\circ$; Tương tự tính được $\widehat{B_1} = \widehat{E_1} = 36^\circ = \widehat{D_1}$

Vậy $\widehat{I_1} = \widehat{E_1} + \widehat{A_1} = 72^\circ$ (góc ngoài của tam giác EAI) và $\widehat{D_2} = \widehat{EDC} - \widehat{D_1} = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$.

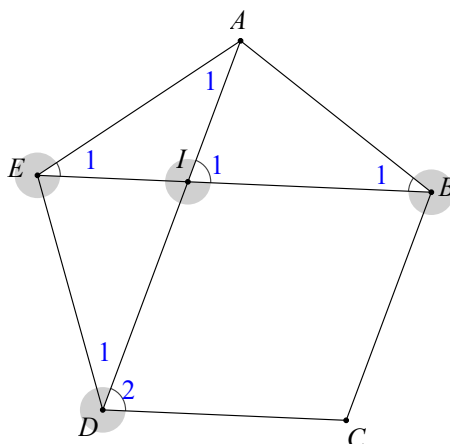
Vậy $\widehat{D_2} = \widehat{I_1}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị suy ra $IB \parallel DC$. Chứng minh tương tự ta có $DI \parallel BC$ hay $DIBC$ là hình bình hành.

b) Xét tam giác AIE và tam giác EAD , ta có

+ Góc A chung;

+ $\widehat{AEI} = \widehat{ADE}$.

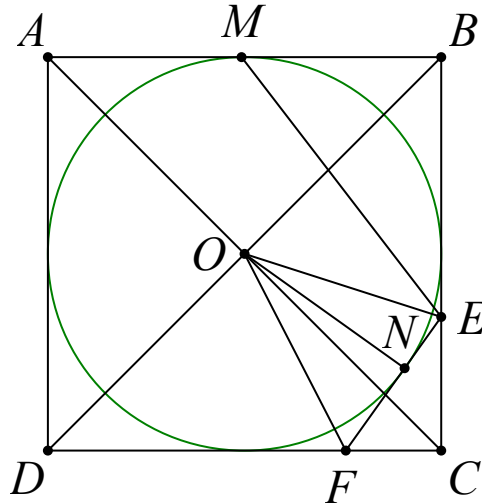
$$\Rightarrow \triangle AIE \sim \triangle AED \text{ (g - g) suy ra } \frac{AI}{AE} = \frac{AE}{AD} \text{ suy ra } AI \cdot AD = AE^2 \cdot BC^2 = DI^2$$



Bài 9*. Đường tròn tâm O nội tiếp hình vuông $ABCD$, tiếp điểm trên AB là M . Một tiếp tuyến với (O) cắt các cạnh BC, CD lần lượt ở E, F . Chứng minh rằng

- a) Các tam giác DFO và BOE đồng dạng.
b) ME song song với AF .

Lời giải



a) Xét tam giác $\triangle DFO$, ta có $\widehat{DOF} + \widehat{DFO} + \widehat{ODF} = 180^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{DOF} + \widehat{DFO} = 145^\circ$ (do $\widehat{ODF} = 45^\circ$) (1)

Xét tứ giác $DBEF$, ta có $\hat{D} + \hat{B} + \hat{E} + \hat{F} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{DEF} + \widehat{BEF} = 270^\circ$.

Mặt khác ta có FO, EO lần lượt là phân giác góc DFE và BEF nên ta có

$$\widehat{DFO} = \frac{1}{2} \widehat{DFE} \text{ và } \widehat{BEO} = \frac{1}{2} \widehat{BEF}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{DFO} + \widehat{BEO} = 145^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{DOF} = \widehat{BEO}$.

Xét tam giác DOF và tam giác BEO , ta có

$$+ \widehat{ODF} = \widehat{OBE} = 45^\circ;$$

$$+ \widehat{DOF} = \widehat{BEO} \text{ (chứng minh trên).}$$

$$\Rightarrow \triangle DOF \sim \triangle BEO \text{ (g - g)}$$

$$\text{b) } \triangle DOF \sim \triangle BEO \Rightarrow \frac{DF}{BO} = \frac{DO}{BE} \Rightarrow DF \cdot BE = DO \cdot BO = \frac{BD^2}{4} = \frac{AB^2}{2} = BM \cdot AD.$$

$$\Rightarrow \frac{BM}{DF} = \frac{BE}{AD}$$

Xét tam giác ADF và EBM , ta có

$$+ \widehat{ADF} = \widehat{MBE}$$

$$+ \frac{BM}{DF} = \frac{BE}{AD}.$$

Suy ra $\triangle ADF \sim \triangle EBM \Rightarrow \widehat{BME} = \widehat{AFD}$

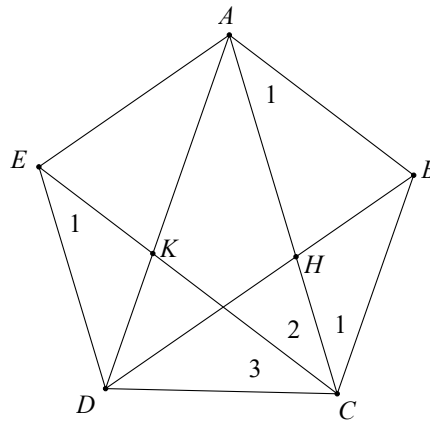
Mặt khác ta có $\widehat{BAF} = \widehat{AFD} (AB \parallel CD)$. Suy ra $\widehat{BME} = \widehat{BAF}$ suy ra $ME \parallel ED$.

Bài 10. Cho ngũ giác $ABCDE$ có các cạnh bằng nhau và $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$.

a) Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.

b) Chứng minh ngũ giác $ABCDE$ là ngũ giác đều.

Lời giải



a) $\triangle ABC$ và $\triangle BCD$ có $AB = BC$; $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$; $BC = CD$

$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle BCD (c.g.c) \Rightarrow AC = BD$.

$\triangle ABD$ và $\triangle ACD$ có $AB = DC$; $AC = DB$; AD chung

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACD (c.g.c) \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CDA}$

$\Rightarrow \triangle BAH = \triangle CDK \Rightarrow BH = CK \Rightarrow BC \parallel CD$

$\Rightarrow ABCD$ là hình thang cân

b) Chứng minh tương tự câu a, ta có $ABCE$ là hình thang cân.

Ta có: $\triangle ABC$ cân $\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BCA}$, mà $\hat{A} = \hat{C} \Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{ACD}$

$\Rightarrow \triangle AEC = \triangle CDA (c.g.c) \Rightarrow ACDE$ là hình thang cân

(Chứng minh tương tự câu a)

Ta có:

$AB \parallel CK$ ($ABCD$ là hình thang cân)

$BC \parallel AK$ ($ABCE$ là hình thang cân)

mà: $AB = BC$. Suy ra $ABCK$ là hình thoi $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C_1} = \widehat{C_2}$

$ACDE$ là hình thang cân $\Rightarrow \widehat{C_2} = \widehat{E_1} \Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{C_1} \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{C_3}$

$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle CDE \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{CDE}$

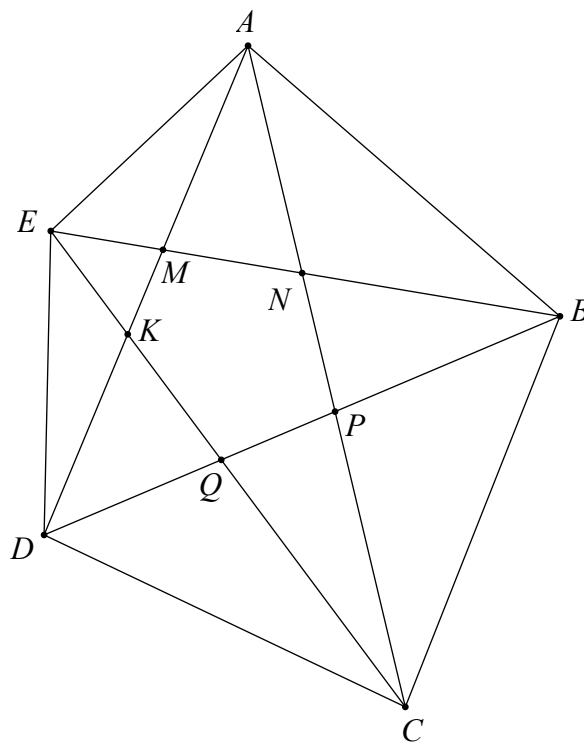
Chứng minh tương tự, ta được: $\widehat{BAE} = \widehat{AED}$

Do đó: $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = \widehat{E}$ và $AB = BC = CD = DE = EA$ (gt)

$\Rightarrow ABCDE$ là ngũ giác đều

Bài 11. Chứng minh rằng tổng độ dài các cạnh của một ngũ giác lồi bé hơn tổng độ dài các đường chéo của nó.

Lời giải



Áp dụng tính chất về quan hệ các cạnh của tam giác, ta có:

$$AB + BC + CD + DE + EA < (AN + NB) + (BP + PC) \\ + (CQ + QD) + (DK + KE) + (EM + MA) \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } AN + PC < AC; BP + DQ < BD; CQ + KE < CE; DK + MA < DA; EM + NB < EB \\ (2)$$

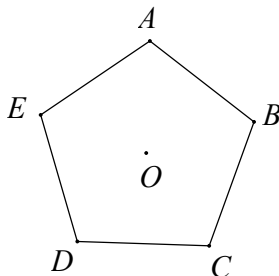
Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh

Bài 12. Cho hình ngũ giác đều $ABCDE$ có tâm O .

a) Phép quay thuận chiều tâm O biến điểm A thành điểm C thì các điểm B, C, D, E tương ứng biến thành các điểm nào?

b) Chỉ ra các phép quay tâm O giữ nguyên hình ngũ giác đều đã cho.

Lời giải



$$\text{a) } \widehat{AOC} = \frac{360^\circ}{5} \cdot 2 = 144^\circ$$

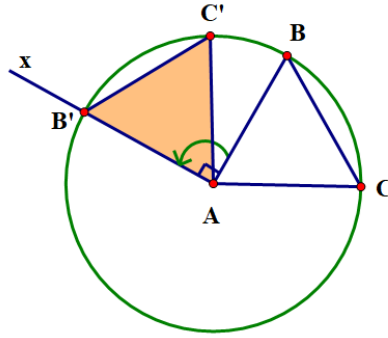
Phép quay thuận chiều 144° tâm O biến điểm A thành điểm C thì các điểm B, C, D, E tương ứng biến thành các điểm D, E, A, B

b) Các phép quay tâm O giữ nguyên hình ngũ giác đều đã cho là:

- Năm phép quay thuận chiều α° tâm O với α° lần lượt nhận các giá trị $72^\circ; 144^\circ; 216^\circ; 288^\circ; 360^\circ$.
- Năm phép quay ngược chiều α° tâm O với α° lần lượt nhận các giá trị $72^\circ; 144^\circ; 216^\circ; 288^\circ; 360^\circ$

Bài 13. Cho tam giác đều, thực hiện phép quay ngược chiều tâm A góc 90° ta được tam giác đều. Hãy vẽ tam giác đều đó.

Lời giải



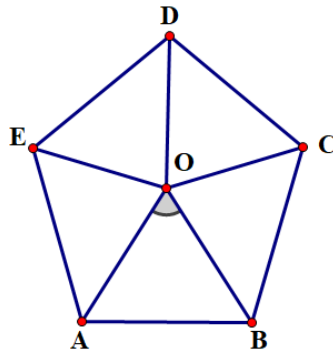
Cách dựng: Phép quay ngược chiều 90° tâm A, biến điểm B biến thành điểm B' .

Xác định điểm B' theo hướng dẫn sau:

Vẽ đường tròn $(A; AB)$ và tia Ax sao cho $\widehat{BAx} = 90^\circ$, tia Ax cắt đường tròn $(A; AB)$ tại điểm B' .

Tương tự ta dựng được c điểm C' .

Bài 14. Cho hình ngũ giác đều $ABCDE$ có tâm O (Hình vẽ).



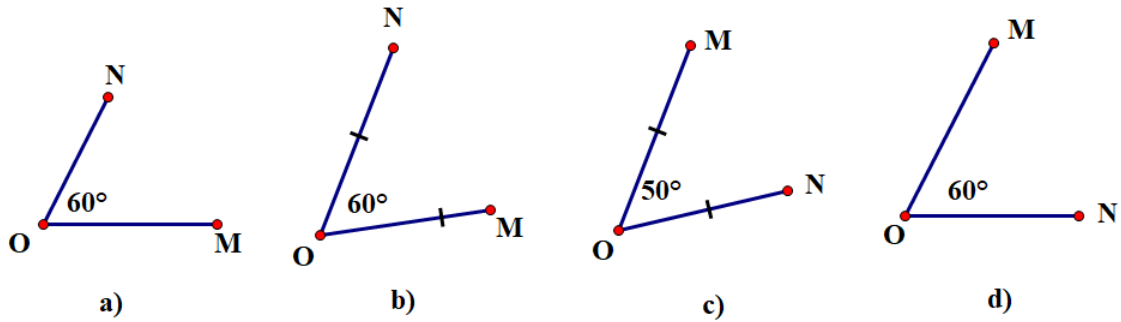
- Phép quay ngược chiều tâm O biến điểm A thành điểm B thì các điểm B, C, D, E tương ứng biến thành các điểm nào?
- Chỉ ra ba phép quay tâm O giữ nguyên hình ngũ giác đều đã cho.

Lời giải

- Phép quay ngược chiều 72° tâm O biến điểm A biến B thì các điểm B, C, D, E lần lượt biến thành các điểm C, D, E và A.
- Ba phép quay tâm O giữ nguyên hình ngũ giác đều:
 - Phép quay ngược chiều 144° ;
 - Phép quay ngược chiều 216° ;
 - Phép quay thuận chiều 72° .

Bạn hãy tìm thêm những phép quay còn lại giữ nguyên hình ngũ giác đều.

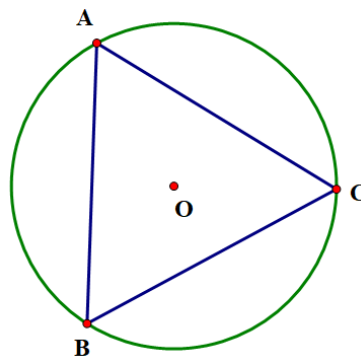
Bài 15. Trong các hình dưới đây, hình nào vẽ hai điểm M và N thoả mãn phép quay thuận chiều 60° tâm O biến điểm M thành điểm N ?



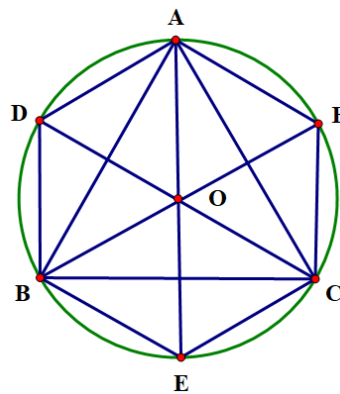
Lời giải

Phép quay thuận chiều 60° tâm O biến điểm M thành điểm N là hình d, vì ta có $OM = ON$ và $\widehat{MON} = 60^\circ$.

Bài 16. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) như hình vẽ. Phép quay ngược chiều 60° tâm O biến các điểm A, B, C lần lượt thành các điểm D, E, F. Chứng minh rằng ADBECF là một lục giác đều.



Lời giải



Phép quay ngược chiều 60° tâm O biến A thành D. Ta có: $OD = OA$ và $\widehat{AOD} = 60^\circ$ nên tam giác AOD là tam giác đều $\Rightarrow AD = OA = OD = R$ (R là bán kính đường tròn (O)).

Chứng minh tương tự, ta có: $BE = CF = R \Rightarrow AD = BE = CF = R(*)$

Tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (O), ta có: $OD = OA = OB$ (1)

Lại có $\widehat{AOB} = 120^\circ$ mà $\widehat{AOD} = 60^\circ$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{DOB} = 60^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tam giác DOB là tam giác đều.

Chứng minh tương tự các tam giác EOC và FOA cũng là tam giác đều. $\Rightarrow DB = EC = EA = R(**)$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow AD = DB = BE = EC = CE = EA (= R)(3)$

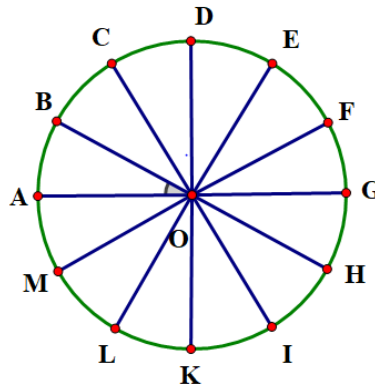
Dễ thấy $\widehat{ADB} = \widehat{DBE} = \widehat{BEC} = \widehat{ECF} = \widehat{CFA} = \widehat{FAD} (4)$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow ADBECF$ là một lục giác đều.

Bài 17. Vòng trong của mái giếng trời hình hoa sen của nhà ga Bến Thành (Thành phố Hồ Chí Minh) có dạng đa giác đều 12 cạnh (Hình vẽ). Hãy chỉ ra bốn phép quay biến đa giác đều đó thành chính nó.



Lời giải



Đa giác đều 12 cạnh $ABCDEFGHIKLM$ nội tiếp đường tròn (O) (Xem hình vẽ).

Ta có: $\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ và $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \dots = 30^\circ$

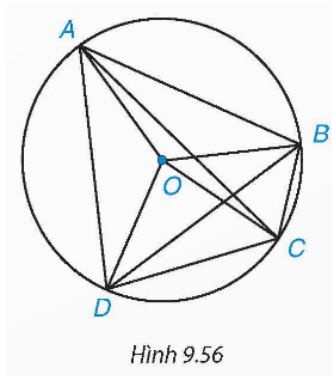
Và $OA = OB = OC = OD = \dots$ (bán kính đường tròn ngoại tiếp)

Ta chọn phép quay thuận chiều (hoặc ngược chiều) góc quay $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ biến đa giác đã cho thành chính nó.

LUYỆN TẬP CHUNG

A. VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Biết rằng $\widehat{AOB} = 120^\circ$, $\widehat{BOC} = 40^\circ$, $\widehat{COD} = 80^\circ$.
Tính số đo các góc của tứ giác $ABCD$.



Hình 9.56

Lời giải

Xét đường tròn (O) , ta có: $\widehat{ADB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = 60^\circ$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung $\widehat{AB}$);

$\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = 20^\circ$ (các góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung $\widehat{BC}$); $\widehat{CAD} = \frac{1}{2}\widehat{COD} = 40^\circ$

(góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung $\widehat{CD}$).

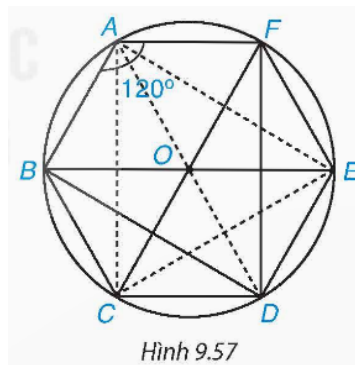
Suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} = 60^\circ$ và $\widehat{ADC} = \widehat{ADB} + \widehat{BDC} = 80^\circ$.

Vì các góc đối nhau của tứ giác nội tiếp $ABCD$ có tổng bằng 180° nên $\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{ADC} = 100^\circ$ và $\widehat{BCD} = 180^\circ - \widehat{BAD} = 120^\circ$.

Ví dụ 2. Cho lục giác đều $ABCDEF$.

a) Tính số đo các góc BCF, BDF, BEF .

b) Gọi O là tâm của lục giác đều. Hãy chỉ ra ba phép quay tâm O giữ nguyên tam giác ACE .



Hình 9.57

Lời giải

a) Lục giác đều $ABCDEF$ có các góc bằng 120° và nội tiếp một đường tròn (O) . Khi đó, các tứ giác $ABCF, ABDF, ADEF$ nội tiếp (O) . Vì vậy $\widehat{BCF} = 180^\circ - \widehat{BAF} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

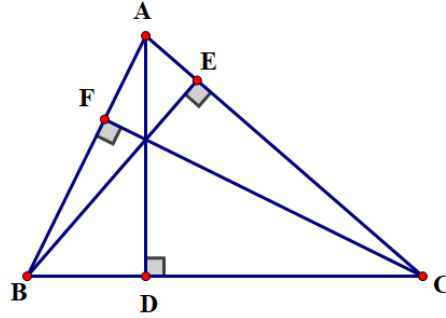
Tương tự, $\widehat{BDF} = \widehat{BEF} = 60^\circ$.

b) Tương tự câu a, các góc của tam giác ACE đều bằng 60° , hay ACE là tam giác đều và nội tiếp đường tròn (O) . Như vậy, ba phép quay tâm O giữ nguyên tam giác ACE là ba phép quay thuận chiều lần lượt $120^\circ, 240^\circ, 360^\circ$ với tâm O .

Lời giải

9.31. Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF . Chứng minh rằng $BCEF, CAFD, ABDE$ là những tứ giác nội tiếp.

Lời giải



- Vì $\triangle BEC$ vuông tại E (do $BE \perp AC$) nên tam giác có đường tròn ngoại tiếp đường tròn đường kính BC . Do đó ba điểm B, E, C cùng nằm trên đường tròn đường kính BC .

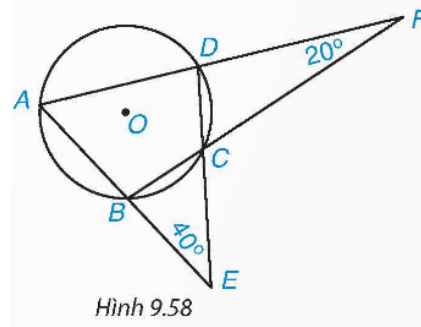
Vì $\triangle BFC$ vuông tại F (do $CF \perp AB$) nên tam giác có đường tròn ngoại tiếp là đường tròn đường kính BC . Do đó ba điểm B, F, C cùng nằm trên đường tròn đường kính BC .

Suy ra bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn hay tứ giác $BCEF$ là tứ giác nội tiếp.

Chứng minh tương tự, ta cũng có tứ giác $CAFD$ nội tiếp đường tròn đường kính AC và tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn đường kính AB .

Vậy $BCEF, CAFD, ABDE$ là những tứ giác nội tiếp.

9.32. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) , AB cắt CD tại E, AD cắt BC tại F như Hình 9.58. Biết $\widehat{BEC} = 40^\circ$ và $\widehat{DFC} = 20^\circ$, tính số đo các góc của tứ giác $ABCD$.



Hình 9.58

Lời giải

Xét $\triangle ADE$ có $\widehat{A} + \widehat{ADE} + \widehat{E} = 180^\circ$ (tổng ba góc của tam giác)

Do đó $\widehat{ADE} = 180^\circ - \widehat{E} - \widehat{A} = 180^\circ - 40^\circ - \widehat{A} = 140^\circ - \widehat{A}$.

Vì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn (O) nên tổng các góc đối nhau của tứ giác bằng 180° , do đó $\widehat{A} + \widehat{BCD} = 180^\circ$, suy ra $\widehat{BCD} = 180^\circ - \widehat{A}$.

Xét tứ giác $ABCD$ có: $\widehat{A} + \widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{ADC} = 360^\circ$ (tổng các góc của một tứ giác)

Suy ra $\widehat{A} + (160^\circ - \widehat{A}) + (180^\circ - \widehat{A}) + (140^\circ - \widehat{A}) = 360^\circ$. Hay $2\widehat{A} = 120^\circ$, nên $\widehat{A} = 60^\circ$.

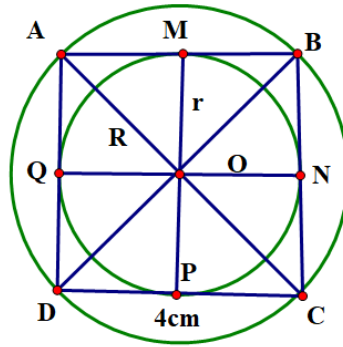
Do đó $\widehat{ABC} = 160^\circ - \widehat{A} = 160^\circ - 60^\circ = 100^\circ$; $\widehat{ADC} = 140^\circ - \widehat{A} = 140^\circ - 60^\circ = 80^\circ$;

$\widehat{BCD} = 180^\circ - \widehat{A} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Vậy tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^\circ; \widehat{ABC} = 100^\circ; \widehat{BCD} = 120^\circ; \widehat{ADC} = 80^\circ$.

9.33. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4 cm. Tính chu vi, diện tích của các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.

Lời giải



Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$. Khi đó ta có $R = \frac{1}{2} AC$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B (do $ABCD$ là hình vuông), theo định lý Pythagore, ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 4^2 = 32$$

Do đó $AC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$. Suy ra $R = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$.

Chu vi của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ là: $2\pi R = 2\pi \cdot 2\sqrt{2} = 4\pi\sqrt{2} \text{ (cm)}$

Diện tích của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ là: $\pi R^2 = \pi \cdot (2\sqrt{2})^2 = 8\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Vì $ABCD$ là hình vuông nên hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau tại trung điểm O của mỗi đường.

Xét $\triangle OAB$ vuông tại O có OM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $OM = \frac{1}{2} AB$.

Mặt khác, $\triangle OAB$ cân tại O (vì $OA = OB$) nên đường trung tuyến OM đồng thời là đường cao, do đó $OM \perp AB$ tại M .

Tương tự, ta có: $ON \perp BC$ tại $N, OP \perp CD$ tại $P, OQ \perp AD$ tại Q và

$$ON = \frac{1}{2} BC, OP = \frac{1}{2} CD, OQ = \frac{1}{2} DA.$$

Mà $AB = BC = CD = DA$ (do $ABCD$ là hình vuông) nên $OM = ON = OP = OQ$.

Vậy đường tròn $(O; OM)$ là đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$.

Khi đó ta có $r = OM = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \text{ (cm)}$.

Chu vi của đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ là: $2\pi r = 2\pi \cdot 2 = 4\pi \text{ (cm)}$.

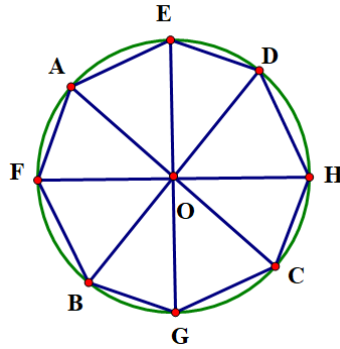
Diện tích của đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ là: $\pi r^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

9.34. Biết rằng bốn đỉnh A, B, C, D của một hình vuông cùng nằm trên một đường tròn (O) theo thứ tự ngược chiều quay của kim đồng hồ. Phép quay thuận chiều 45° biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm E, F, G, H .

a) Vẽ đa giác $EAFBGCHD$.

b) Đa giác $EAFBGCHD$ có phải là một bát giác đều hay không? Vì sao?

Lời giải



- Vẽ đường tròn (O) . Trên đường tròn (O) vẽ hình vuông $ABCD$ sao cho các đỉnh A, B, C, D theo thứ tự ngược chiều kim đồng hồ.

- Lấy điểm E thuộc đường tròn (O) sao cho tia OA quay thuận chiều kim đồng hồ đến tia OE và $\widehat{AOE} = 45^\circ$.

- Xác định các điểm F, G, H tương tự như cách xác định điểm E ở trên. Nối A với E, E với D, D với H, H với C, C với G, G với B, B với F và F với A . Khi đó ta được đa giác $EAFBGCHD$.

b) Vì $ABCD$ là hình vuông nên đường tròn (O) ngoại tiếp hình vuông có tâm O là giao điểm hai đường chéo. Do đó $AC \perp BD$ tại O hay $\widehat{AOD} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{AOE} = 90^\circ - \widehat{EOD} + \widehat{EOD} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Xét $\triangle OAE$ và $\triangle OED$ có: $OA = OE, \widehat{AOE} = \widehat{EOD}$ (cùng bằng 45°), $OE = OD$.

Do đó $\triangle OAE = \triangle OED$ (c.g.c)

Tương tự, ta sẽ chứng minh được:

$$\triangle OAE = \triangle OED = \triangle ODH = \triangle OHC = \triangle OCG = \triangle OGB = \triangle OBF = \triangle OFA.$$

Suy ra $AE = ED = DH = HC = CG = GB = BF = FA$; (1)

$$\widehat{OAE} = \widehat{OED} = \widehat{ODH} = \widehat{OHC} = \widehat{OCG} = \widehat{OGB} = \widehat{OBF} = \widehat{OFA};$$

$$\widehat{OEA} = \widehat{ODE} = \widehat{ODH} = \widehat{OCH} = \widehat{OGC} = \widehat{OBG} = \widehat{OBF} = \widehat{OAF}.$$

Xét $\triangle OAE$ có $OA = OE$ nên $\triangle OAE$ cân tại O , suy ra $\widehat{OAE} = \widehat{OEA}$.

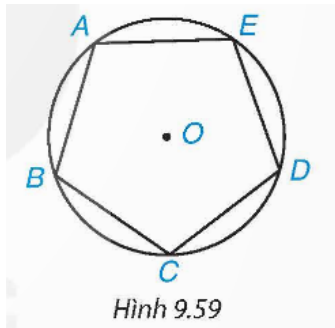
$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \widehat{OAE} + \widehat{OAF} &= \widehat{OED} + \widehat{OEA} = \widehat{ODH} + \widehat{ODE} = \widehat{OHC} + \widehat{OHD} \\ &= \widehat{OCG} + \widehat{OCH} = \widehat{OGB} + \widehat{OGC} = \widehat{OBF} + \widehat{OBG} = \widehat{OFA} + \widehat{OFB}. \end{aligned}$$

$$\text{Hay } \widehat{EAF} = \widehat{AFB} = \widehat{FBG} = \widehat{BGC} = \widehat{GCH} = \widehat{CHD} = \widehat{HDE} = \widehat{DEA}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $EAFBGCHD$ có các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau.

Vậy $EAFBGCHD$ là bát giác đều.

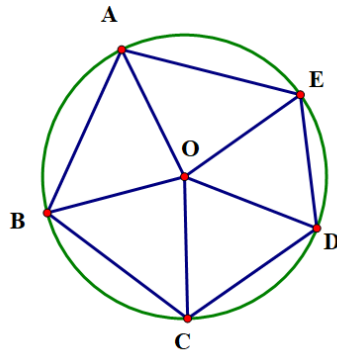
9.35. Cho ngũ giác đều $ABCDE$ nội tiếp đường tròn (O) như Hình 9.59.



Hình 9.59

- a) Hãy tìm một phép quay thuận chiều tâm O biến điểm A thành điểm C .
 b) Phép quay trên sẽ biến các điểm B, C, D, E lần lượt thành những điểm nào? Phép quay này có giữ nguyên ngũ giác đều $ABCDE$ không?

Lời giải



Vì ngũ giác $ABCDE$ nội tiếp đường tròn (O) nên $OA = OB = OC = OD = OE$.

Vì $ABCDE$ là ngũ giác đều nên $AB = BC = CD = DE = EA$.

Xét $\triangle OAB$ và $\triangle OBC$ có: $OA = OB, OB = OC, AB = BC$

Do đó $\triangle OAB = \triangle OBC$ (c.c.c).

Chứng minh tương tự ta có $\triangle OAB = \triangle OBC = \triangle COD = \triangle DOE = \triangle EOA$.

Suy ra $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \widehat{EOA}$. Mà $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COD} + \widehat{DOE} + \widehat{EOA} = 360^\circ$.

Do đó $5\widehat{AOB} = 360^\circ$. Suy ra $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \widehat{EOA} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.

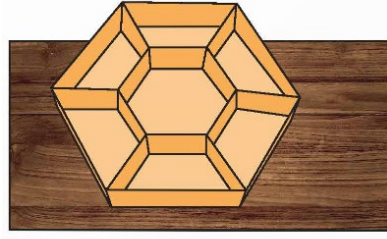
Khi đó số đo của cung lớn AC bằng: $\widehat{AOE} + \widehat{EOD} + \widehat{DOC} = 72^\circ + 72^\circ + 72^\circ = 216^\circ$

Do đó, để biến điểm A thành điểm C thì tia OA phải quay thuận chiều kim đồng hồ đến tia OC , điểm A tạo nên cung AC có số đo 216° . Vậy phép quay thuận chiều 216° tâm O biến điểm A thành điểm C .

b) Phép quay thuận chiều 216° tâm O biến các điểm B, C, D, E lần lượt thành những điểm D, E, A, B .

Khi đó phép quay này giữ nguyên ngũ giác đều $ABCDE$.

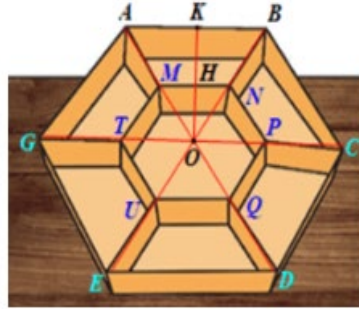
9.36. Người ta muốn làm một khay đựng bánh kẹo hình lục giác đều có cạnh 10 cm và chia thành 7 ngăn gồm một lục giác đều nhỏ và 6 hình thang cân như Hình 9.60. Hỏi lục giác đều nhỏ phải có cạnh bằng bao nhiêu để nó có diện tích bằng hai lần diện tích mỗi hình thang?



Hình 9.60

Lời giải

Giả sử $ABCDEF$ là khay bánh kẹo hình lục giác đều cạnh 10 cm, được chia thành 7 ngăn gồm một lúc giác đều nhỏ $MNPQUT$ và 6 hình thang cân $MNBA, NPCB, PQDC, QUED, UTGE, TMAG$.



Gọi O là giao điểm của ba đường chéo chính AD, BE, CF của hình lục giác đều $ABCDEF$.

Hình lục giác đều $MNPQUT$ chia thành 6 tam giác đều $OMN, ONP, OPQ, OPU, OUT, OTM$.

Ta dễ dàng chứng minh được các tam giác đều đó bằng nhau nên chúng có diện tích bằng nhau.

Khi đó, $S_{MNPQUT} = 6S_{OMN}$. Kẻ $OK \perp AB$, ta có K là trung điểm của AB nên $AK = 5$ cm.

Ta có $MN \parallel AB$ (do $MNBA$ là hình thang cân) nên $OK \perp MN$.

Gọi H là giao điểm của OK và AB , ta có $OH \perp MN$ và H là trung điểm của MN .

Gọi x (cm, $0 < x < 10$) là độ dài cạnh của lục giác đều $MNPQUT$, ta có $MN = x, MH = \frac{x}{2}$.

Vì $ABCDEF$ là lục giác đều nên $\triangle OAB$ là tam giác đều, do đó $\widehat{OAB} = 60^\circ$.

Xét $\triangle OAK$ vuông tại K , ta có: $OK = AK \cdot \tan \widehat{OAK} = 5 \cdot \tan 60^\circ = 5\sqrt{3}$ (cm)

Xét $\triangle OMH$ vuông tại H , ta có: $OH = MH = \tan \widehat{OMH} = \frac{x}{2} \cdot \tan 60^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ (cm).

Suy ra $HK = OK - OH = 5\sqrt{3} - \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{(10-x)\sqrt{3}}{2}$ (cm).

Diện tích của tam giác OMN là: $S_1 = \frac{1}{2} \cdot OH \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot x = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ (cm²)

Diện tích của hình thang cân $MNBA$ là:

$S_2 = \frac{1}{2} \cdot HK \cdot (MN + AB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(10-x)\sqrt{3}}{2} \cdot (x+10) = \frac{(100-x^2)\sqrt{3}}{4}$ (cm²).

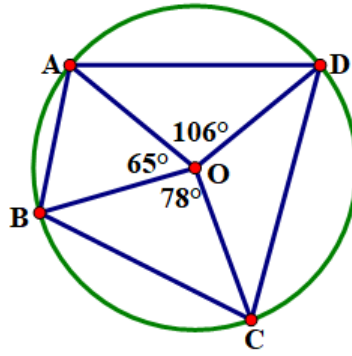
Để diện tích hình lục giác đều $MNPQUT$ bằng hai lần diện tích mỗi hình thang (chẳng hạn hình thang

$MNBA$ thì $6S_1 = 2S_2$ hay $3S_1 = S_2$. Do đó $3 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(100-x^2)\sqrt{3}}{4} \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$ (do $x > 0$)

Vậy cạnh hình lục giác đều nhỏ bằng 5 cm.

B. BÀI TẬP THÊM

Bài 1. Tính số đo các của tứ giác nội tiếp ABCD trong hình vẽ.



Lời giải

$$\text{Tam giác AOB cân tại O} \Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{OBA} = \frac{180^\circ - 65^\circ}{2} = 57,5^\circ$$

$$\text{Tương tự tam giác BOC cân tại O} \Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \frac{180^\circ - 78^\circ}{2} = 51^\circ$$

$$\text{Do đó } \widehat{ABC} = \widehat{OBA} + \widehat{OBC} = 57,5^\circ + 51^\circ = 108,5^\circ$$

$$\text{Ta có tứ giác ABCD nội tiếp nên } \widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - 108,5^\circ = 71,5^\circ$$

$$\text{Lại có tam giác AOD cân tại O nên } \widehat{OAD} = \widehat{ODA} = \frac{180^\circ - 106^\circ}{2} = 37^\circ$$

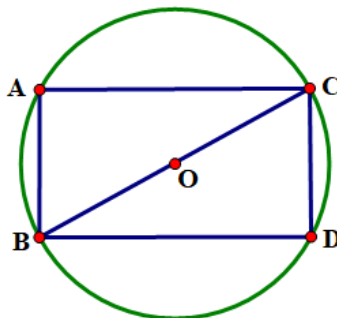
$$\text{mà } \widehat{BAD} = \widehat{OAB} + \widehat{OAD} = 57,5^\circ + 37^\circ = 94,5^\circ$$

$$\text{Vì tứ giác ABCD nội tiếp nên } \widehat{BCD} + \widehat{BAD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BCD} = 180^\circ - \widehat{BAD} = 180^\circ - 94,5^\circ = 85,5^\circ$$

Bài 2. Tính diện tích của một hình chữ nhật, biết rằng hình chữ nhật đó có chiều dài gấp hai lần chiều rộng và bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 2,5 cm.

Hướng dẫn: Hình chữ nhật ABCD là tứ giác nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp có tâm là giao điểm hai đường chéo và bán kính bằng một nửa độ dài đường chéo.

Lời giải



Ta có AC là đường kính của đường tròn ngoại tiếp $AC = 2.2,5 = 5(\text{cm})$

Gọi chiều rộng của hình chữ nhật là x thì chiều dài là $2x$

Xét tam giác ABC vuông tại B . Theo định lí Pythagore, ta có:

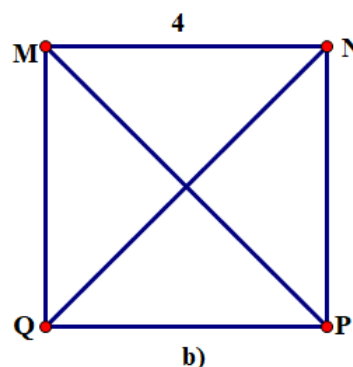
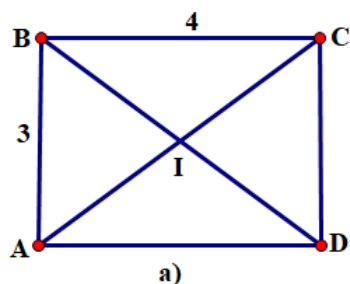
$$x^2 + (2x)^2 = 5^2 \Rightarrow 5x^2 = 25 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}(\text{cm})$$

Vậy chiều rộng của hình chữ nhật là $\sqrt{5}(\text{cm})$ và chiều dài là $2\sqrt{5}(\text{cm})$

Do đó diện tích hình chữ nhật ABCD là: $\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 10(\text{cm}^2)$

Bài 3. Xác định tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật và hình vuông trong hình vẽ.

Lời giải



a) Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC, BD của hình chữ nhật ABCD nên I là trung điểm của AC .

Tam giác ABC vuông tại B . Theo định lí Pythagore, ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Vậy đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật có tâm I (là trung điểm của AC) và bán kính $R = \frac{AC}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$

b)Gọi J là giao điểm của hai đường chéo hình vuông MNPQ nên J là trung điểm của QN.

Tam giác QMN vuông tại M. Theo định lí Pythagore, ta có:

$$QN^2 = QM^2 + MN^2 = 4^2 + 4^2 \Rightarrow QN = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

Vậy đường tròn ngoại tiếp hình vuông có tâm J (là trung điểm của QN) và bán kính

$$R = \frac{QN}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} .$$

Tổng quát: Ta có bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông cạnh a bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

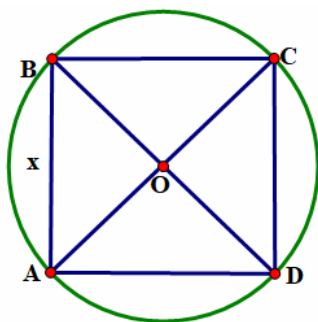
Bài 4. Cho đường tròn tâm O có bán kính $R = 5\text{cm}$.

a) Tính độ dài cạnh của hình vuông nội tiếp trong (O).

b) Một hình chữ nhật nội tiếp trong (O) có chu vi 28 cm . Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật đó.

Hướng dẫn: Hình vuông và hình chữ nhật là các tứ giác nội tiếp. Đường tròn ngoại tiếp của chúng có tâm là giao điểm của hai đường chéo và bán kính bằng một nửa độ dài đường chéo.

Lời giải



a)

Gọi hình vuông nội tiếp trong đường tròn $(O; 5\text{ cm})$ là ABCD.

Ta có: $AC = 2.R = 2.5 = 10(\text{cm})$

Gọi cạnh hình vuông là x . Theo định lý Pythagore, ta có:

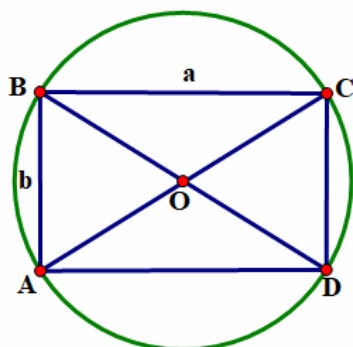
$$x^2 + x^2 = AC^2$$

$$2x^2 = 10^2$$

$$x^2 = 50 \Rightarrow x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Vậy cạnh hình vuông nội tiếp trong đường tròn $(O; 5\text{ cm})$ bằng $5\sqrt{2}$.

b) (Xem hình vẽ).



Gọi chiều dài a, chiều rộng b. Ta có chu vi hình chữ nhật $2(a + b) = 28$. Nửa chu vi $a + b = 14$.

Tam giác ABC vuông tại B. Theo định lý Pythagore, ta có:

$$a^2 + b^2 = AC^2$$

$$a^2 + b^2 = 10^2$$

$$a^2 + b^2 = 100$$

Theo bài ra, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} a + b = 14 & (1) \\ a^2 + b^2 = 100 & (2) \end{cases} \quad (a > b > 0)$$

Từ (1) $\Rightarrow b = 14 - a$ (*), thế (**) vào (2), ta có:

$$a^2 + (14 - a)^2 = 100$$

$$a^2 + (196 - 28a + a^2) = 100$$

$$2a^2 - 28a + 196 - 100 = 0$$

$$a^2 - 14a + 48 = 0$$

$$a^2 - 8a - 6a + 48 = 0$$

$$a(a - 8) - 6(a - 8) = 0$$

$$(a - 6)(a - 8) = 0$$

$$a - 8 = 0 \text{ hoặc } a - 6 = 0$$

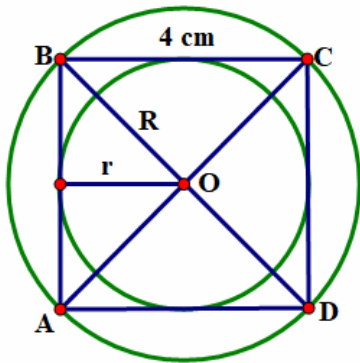
$$a = 8 \Rightarrow b = 14 - 8 = 6 \text{ (vì } a > b \text{)}$$

Vậy chiều dài của hình chữ nhật là 8 cm và chiều rộng là 6 cm .

Bài 5. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 4 cm . Tính chu vi, diện tích của các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp hình vuông ABCD .

Hướng dẫn: Cần tính bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp.

Lời giải



Dễ thấy bán kính đường tròn nội tiếp $r = \frac{BC}{2} = \frac{4}{2} = 2(\text{cm})$

Chu vi của đường tròn nội tiếp hình vuông $P_1 = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 2 = 4\pi(\text{cm})$

Diện tích của đường tròn nội tiếp hình vuông $S_1 = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi(\text{cm}^2)$

Hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn $(O; R)$ có AC là đường kính.

Xét tam giác ABC vuông tại B . Theo định lí Pythagore, ta có:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \quad 4^2 + 4^2 = AC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}(\text{cm}) \Rightarrow AC = 2\sqrt{2}$$

Chu vi của đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD là: $P_2 = 2 \cdot \pi \cdot R = 4\sqrt{2}\pi(\text{cm})$

Diện tích của hình tròn ngoại tiếp $S_2 = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot (2\sqrt{2})^2 = 8\pi(\text{cm}^2)$

Bài 6. Cho tam giác nhọn ABC có AD, BE, CF là đường cao và H là trực tâm. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác AEHF, BDHF và CDHF là các tứ giác nội tiếp.

b) DA là đường phân giác của góc FDE.

Lời giải

a) Ta có: $\widehat{AFH} + \widehat{AEH} = 180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác AEHF nội tiếp.

Chứng minh tương tự, ta có các tứ giác BDHF và CDHF nội tiếp.

b) Xét tứ giác BDHF nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{FDH} = \widehat{FBH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung FH)

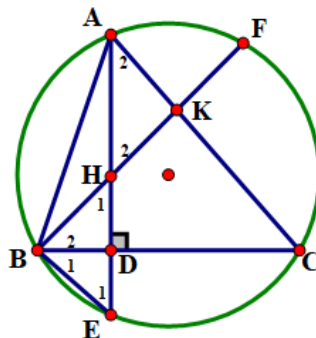
Tương tự với tứ giác nội tiếp CDHE, ta có $\widehat{HDE} = \widehat{HCE}$

mà $\widehat{FBH} = \widehat{HCE}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$) $\Rightarrow \widehat{FDH} = \widehat{HDE}$, chứng tỏ AD là đường phân giác của góc FDE.

Bài 7. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), đường cao AD cắt đường tròn (O) tại E. Trên AD lấy H sao cho D là trung điểm của EH, BH cắt AC tại K. Chứng minh tứ giác HKCD nội tiếp.

Hướng dẫn: Ta đưa về câu a, bài toán 16 bằng cách chứng minh $\widehat{BKC} = 90^\circ$.

Lời giải



Dễ thấy $\triangle BDE = \triangle BDH$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ và $\widehat{E}_1 = \widehat{H}_1$.

$\widehat{H}_1 = \widehat{H}_2$ (đối đỉnh)

$\widehat{B}_1 = \widehat{A}_2$ (góc nội tiếp cùng chắn cung EC) mà $\widehat{B}_1 + \widehat{E}_1 = 90^\circ$ (do $\widehat{BDE} = 90^\circ$ (gt))

$\Rightarrow \widehat{A}_2 + \widehat{H}_2 = 90^\circ$

Trong $\triangle AHK \Rightarrow \widehat{AKH} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HKC} = 90^\circ$

Ta có $\widehat{HKC} + \widehat{HDC} = 180^\circ$. Do tứ giác HKCD nội tiếp.

Bài 8. Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn (O), vẽ cát tuyến MBC và tiếp tuyến Mt tiếp xúc với (O) tại A. Gọi I là trung điểm của dây BC. Chứng minh AMIO là một tứ giác nội tiếp.

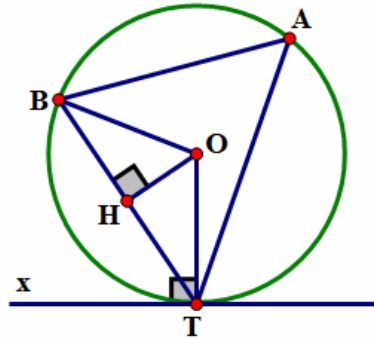
Lời giải

$\Rightarrow$ IM và IN phải trùng nhau hay ba điểm I, M, N thẳng hàng.

Vậy các đường thẳng AB, MN, CD cùng đi qua điểm I .

Bài 10. Trong một đường tròn. Chứng minh rằng góc giữa tiếp tuyến một dây và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

Lời giải



Kẻ $OH \perp TB$. Tam giác BOT cân tại O nên đường cao OH đồng thời là đường phân giác hay

$$\widehat{\text{BOH}} = \widehat{\text{HOT}} = \frac{1}{2} \widehat{\text{BOT}}$$

Lại có $\widehat{\text{BAT}} = \frac{1}{2} \widehat{\text{BOT}}$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn một cung) $\Rightarrow \widehat{\text{HOT}} = \widehat{\text{BAT}}$ (1)

Tam giác OHT vuông tại H , ta có $\widehat{HOT} + \widehat{OTB} = 90^\circ$

Lại có $\widehat{OTB} + \widehat{BTx} = 90^\circ$ (do tx là tiếp tuyến) $\Rightarrow \widehat{HOT} = \widehat{BTx}$ (2)

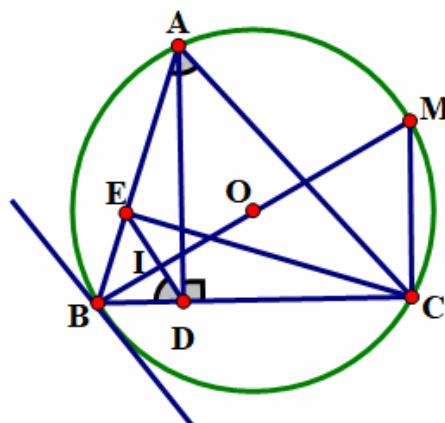
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ITx} = \widehat{BAT}$ ($\widehat{BTx}$ là góc giữa tiếp tuyến và một dây chắn cung BT, $\widehat{BAT}$ là góc nội tiếp chắn cung BT)

Kết Luận: Trong một đường tròn góc giữa tiếp tuyến một dây và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

Ghi chú: Kết luận của bài toán 20 này sẽ dùng để chứng minh cho các bài toán khác và , chúng ta xem là một định lí trong hình học.

Bài 11. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (O), các đường cao AD và E cắt nhau tại H. BO cắt DE tại I và cắt đường tròn (O) tại M. Chứng minh rằng: tứ giác DIMC nội tiếp.

Lời giải



Ta có: $\widehat{AEC} = \widehat{AD} = 90^\circ$ (gt) nên tứ giác AEDC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BDE} = \widehat{BAC} = 180^\circ$

Mà $\widehat{BDE} + \widehat{EDC} = 180^\circ$ (kề bù) $\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BDE}$ (1)

Kẻ tiếp tuyến Bx với đường tròn (O) ta có $\widehat{CBx} = \widehat{BAC}$ (2) (góc giữa tiếp tuyến một dây và góc nội tiếp cùng chắn cung BC).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BDE} = \widehat{CBx} \Rightarrow Bx \parallel ED$ (cặp góc so le trong bằng nhau)

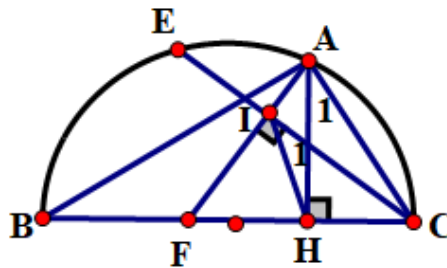
mà $Bx \perp OB$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow DE \perp OB$ hay $\widehat{DIM} = 90^\circ$

Dễ thấy $\widehat{BCM} = 90^\circ$ (do BM là đường kính) $\Rightarrow \widehat{DIM} + \widehat{BCM} = 180^\circ$

Chứng tỏ tứ giác DIMC nội tiếp (Tổng hai góc đối bằng 180°).

Bài 12. Cho tam giác ABC ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn (O) đường kính BC. Vẽ đường cao AH của tam giác. Trên cạnh BC lấy F ($F \neq 0$) sao cho $CF = CA$. Vẽ CI vuông góc với AF tại I và CI cắt cạnh AB tại E. Chứng minh rằng: tứ giác AIHC và BEIH nội tiếp.

Lời giải



Dễ thấy tứ giác AHC nội tiếp ($\widehat{AIC} = \widehat{AHC} = 90^\circ$) $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{I_1}$ (1) (góc nội tiếp cùng chắn cung HC)

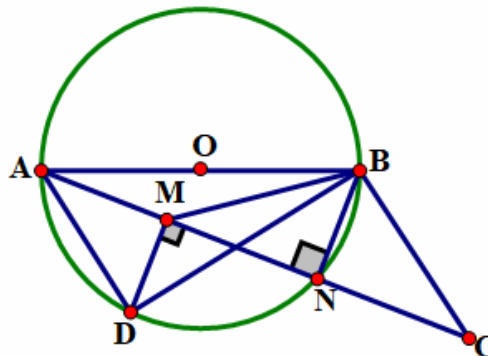
Lại có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (BC là đường kính) hay $\widehat{BAH} + \widehat{A_1} = 90^\circ$ mà $\widehat{BAH} + \widehat{B} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{B}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{I_1}$ mà $\widehat{I_1} + \widehat{EIH} = 180^\circ$ (kề bù) $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{EIH} = 180^\circ$.

Chứng tỏ tứ giác BEIH nội tiếp.

Bài 13. Cho hình bình hành ABCD có đỉnh D nằm trên đường tròn đường kính AB. Kẻ DM và BN cùng vuông góc với đường chéo AC. Chứng minh CBID nội tiếp.

Lời giải



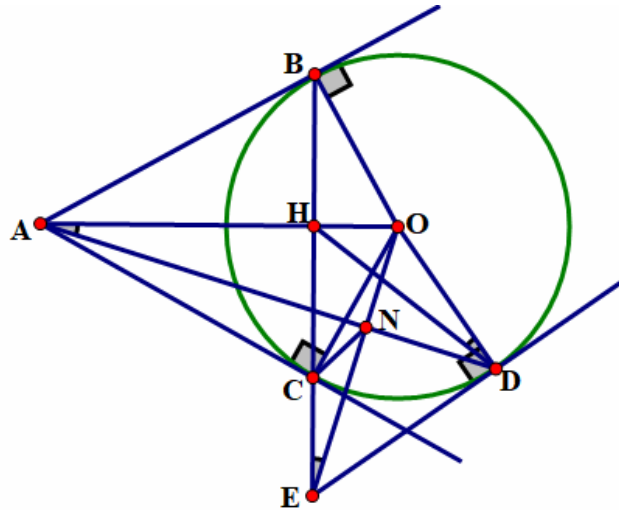
Nối B với D , ta có $\triangle ADB$ vuông tại D (AB là đường kính) hay $AD \perp BD$.

mà $AD \parallel BC(gt) \Rightarrow BD \perp BC \Rightarrow \widehat{DBC} = 90^\circ$ hay $\widehat{DBC} = \widehat{DMC} = 90^\circ$.

Hai đỉnh M, B cùng nhìn DC dưới hai góc bằng nhau cùng bằng 90° nên tứ giác $CBMD$ nội tiếp.

Bài 14. Từ điểm A bên ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (B, C là tiếp điểm). Vẽ đường kính BD của đường tròn (O). Tiếp tuyến tại D của (O) cắt đường thẳng BC ở E, OE cắt AD ở N . Chứng minh rằng: tứ giác $AONC$ nội tiếp.

Lời giải



Gọi H là giao điểm của AO và BC ta có $OA = OC (= R)$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên OA là đường trung trực của đoạn BC nên $OA \perp BC$ tại H .

Xét tam giác ACO vuông tại C (tính chất tiếp tuyến) và tam giác CHO vuông tại H (cmt) có $\widehat{OAC}$ chung.

$$\text{Do đó } \triangle ACO \sim \triangle CHO \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{OC}{OH} = \frac{OA}{OC} \Rightarrow OC^2 = OH \cdot OA$$

$$\text{Mà } OA = OC (= R) \Rightarrow OD^2 = OH \cdot OA \quad (1)$$

$$\text{Xét } \triangle AOD \text{ và } \triangle DOH \text{ có } \widehat{AOD} \text{ chung và } (1) \Rightarrow \triangle AOD \sim \triangle DOH \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{OAD} = \widehat{ODH} \quad (2)$$

$$\text{Lại có tứ giác } OHED \text{ nội tiếp } (\widehat{OHE} + \widehat{ODE} = 180^\circ) \Rightarrow \widehat{ODH} = \widehat{OEH} \quad (3) \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung HO)}$$

$$\text{Từ (2) và (3)} \Rightarrow \widehat{OAD} = \widehat{OEH} \text{ mà } \widehat{OEH} + \widehat{EOH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OAD} + \widehat{EOH} = 90^\circ$$

$$\text{Xét tam giác } ANO, \text{ ta có: } \widehat{ANO} = \widehat{ACO} = 90^\circ.$$

Do đó tứ giác $AONC$ nội tiếp.

Bài 15. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Trên tia đối của tia BA lấy điểm C (C không trùng với B). Kẻ tiếp tuyến CD với đường tròn (O) (D là tiếp điểm). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường

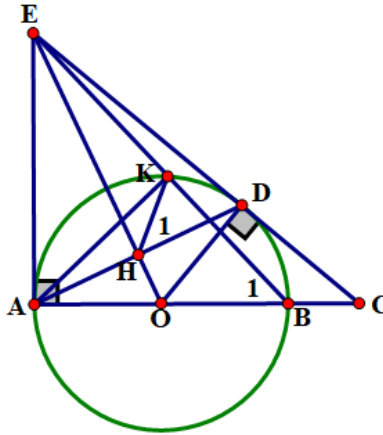
thẳng CD tại E . Gọi H là giao điểm của AD và OE, K là giao điểm BE và đường tròn (O) (K không trùng với B).

a) Chứng minh: $AE^2 = AK \cdot EB$.

b) Chứng minh: Tứ giác BOHK nội tiếp.

Lời giải

a) Ta có: $\widehat{AKB} = 90^\circ$ (vì AB là đường kính) $\Rightarrow \triangle AKE$ vuông tại K



Lại có EAB vuông tại A (tính chất tiếp tuyến)

Xét $\triangle AKE$ và $\triangle EAB$, có $\widehat{AEK}$ chung $\Rightarrow \triangle AKE \sim \triangle BAE$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AE}{EK} = \frac{EB}{AE} \Rightarrow AE^2 = EK \cdot EB \quad (1) \text{ (dpcm).}$$

b) Dễ thấy EO là đường trung trực của AD hay $EO \perp AD$ tại H .

Xét $\triangle EHA$ và $\triangle EAO$ có: $\widehat{EHA} = \widehat{EAO} = 90^\circ$, $\widehat{AEO}$ chung

$$\text{Do đó } \triangle EHA \sim \triangle EAO \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AE}{EH} = \frac{EO}{AE} \Rightarrow AE^2 = EH \cdot EO \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow EK \cdot EB = EH \cdot EO.$$

$$\Rightarrow \triangle EHK \sim \triangle EBO \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{B_1} \text{ mà } \widehat{H_1} + \widehat{KHO} = 180^\circ \text{ (kề bù)} \Rightarrow \widehat{B_1} + \widehat{KHO} = 180^\circ$$

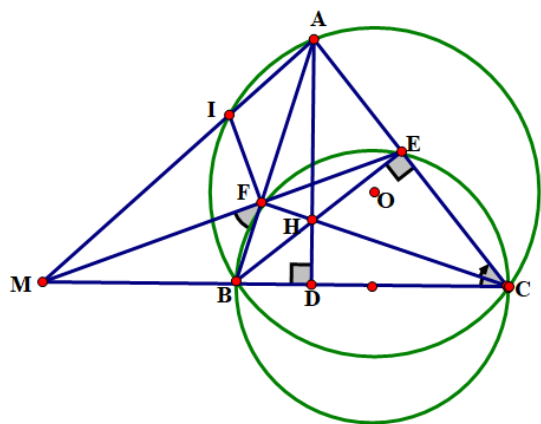
Chứng tỏ tứ giác BOHK nội tiếp.

Bài 16. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

a) Chứng minh tứ giác AFHE nội tiếp. Xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AFHE .

b) Gọi M là giao điểm của EF và BC và AM cắt đường tròn (O) tại I . Chứng tỏ: tứ giác AEFI nội tiếp.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^\circ$ (gt) $\Rightarrow \widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180^\circ$

Do đó AFHE nội tiếp đường tròn tâm là trung điểm của AH và đường kính là AH.

b) Ta có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ (gt) $\Rightarrow$ BFEC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MFB} = \widehat{MCE}$

$$\Rightarrow \triangle MFB \sim \triangle MCE (g.g) \Rightarrow \frac{MF}{MC} = \frac{MB}{ME} \Rightarrow MF \cdot ME = MB \cdot MC (1)$$

Chứng minh tương tự ta cũng có $MB \cdot MC = MI \cdot MA$. (2) (vì 4 điểm A, I, B, C thuộc (O)).

Từ (1), (2) $\Rightarrow MF \cdot ME = MI \cdot MA (= MB \cdot MC) \Rightarrow \triangle MIF \sim \triangle MEA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MIF} = \widehat{MEA}$.

Vậy tứ giác AEFI nội tiếp.

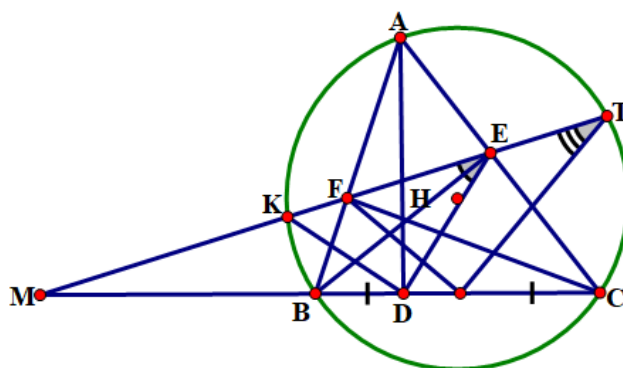
Bài 17. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE và CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng: Tứ giác BFEC nội tiếp, xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BFEC.

b) Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại M và cắt đường tròn (O) tại K và T (K nằm giữa M và T). Chứng minh rằng: $MK \cdot MT = ME \cdot MF$.

c) Chứng minh tứ giác KTID nội tiếp.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ (gt)

$\Rightarrow$ Tứ giác BFEC nội tiếp đường tròn tâm I là trung điểm của BC và bán kính $\frac{BC}{2}$.

b) Xét đường tròn (I) ta có $\widehat{FEB} = \widehat{FCB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung FB).

$$\Rightarrow \triangle MEB \sim \triangle MCF (g.g) \Rightarrow \frac{ME}{MC} = \frac{MB}{MF} \Rightarrow ME \cdot MF = MB \cdot MC \quad (1)$$

Chứng minh tương tự với đường tròn (O) ta có $MB \cdot MC = MK \cdot MT \quad (2)$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow MK \cdot MT = ME \cdot MF \quad (3)$$

c) Dễ thấy tứ giác HECD nội tiếp ($\widehat{HEC} + \widehat{HDC} = 180^\circ$)

$$\Rightarrow \widehat{HED} = \widehat{HCD} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung HD).}$$

Lại có BFEC nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{HCD} = \widehat{FEB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung FB)

$$\Rightarrow \widehat{HED} = \widehat{FEB} (= \widehat{HCD})$$

Lại có $\widehat{BIF} = 2\widehat{FCB}$ (góc ở tâm đường tròn (I) và góc nội tiếp cùng chắn cung BF)

$$\Rightarrow \widehat{BIF} = \widehat{MED} \Rightarrow \triangle MIF \sim \triangle MED (g.g). \Rightarrow \frac{MI}{ME} = \frac{MF}{MD} \Rightarrow MI \cdot MD = ME \cdot MF \quad (4)$$

$$\text{Từ (2), (4)} \Rightarrow MI \cdot MD = MK \cdot MT.$$

Do đó $\triangle MDK \sim \triangle MTI$ (c.g.c.) $\Rightarrow \widehat{MDK} = \widehat{MTI} \Rightarrow$ Tứ giác KTID nội tiếp.

Nhận xét: Cũng nói về đường tròn Ơ le ta hãy xét bài toán tương tự sau, trong đó 3 điểm là chân ba đường cao và điểm còn lại là trung điểm của đoạn thẳng nối trực tâm đến đỉnh.

Bài 18. Cho đường tròn (O; R). Lấy các điểm A, B, C, D, E trên đường tròn (O; R) sao cho số đo các cung $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DE}$, $\widehat{EA}$ bằng nhau. Đa giác ABCDE có là đa giác đều không? Vì sao?

Lời giải

Các cung $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DE}$, $\widehat{EA}$ bằng nhau và cùng có số đo bằng $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

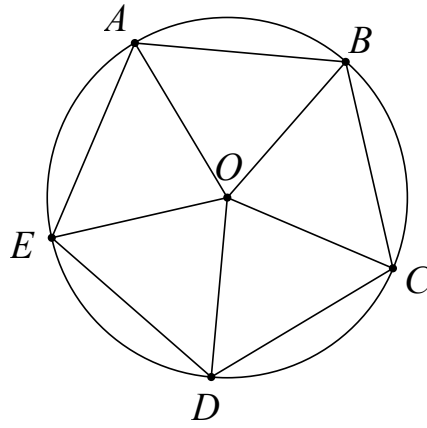
$$\text{Vậy } \widehat{AOB} = 72^\circ; \widehat{BOC} = 72^\circ; \widehat{COD} = 72^\circ; \widehat{DOE} = 72^\circ; \widehat{EOA} = 72^\circ$$

Tính các góc của tam giác cân OAB ta có $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 54^\circ$.

$$\text{Chứng minh tương tự ta được } \widehat{EAB} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDE} = \widehat{DEA}. \quad (1)$$

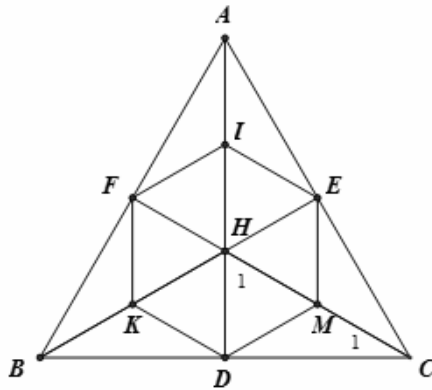
$$\text{Chứng minh } \triangle OBA = \triangle OBC \text{ nên } AB = BC, \text{ tương tự ta có } AB = BC = CD = DE = EA \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có đa giác ABCDE có là đa giác đều.



Bài 19. Cho tam giác đều ABC , các đường cao AD , BE , CF cắt nhau tại H . Gọi I , K , M theo thứ tự là trung điểm của HA , HB , HC . Chứng minh rằng $DKFIEM$ là lục giác đều.

Lời giải



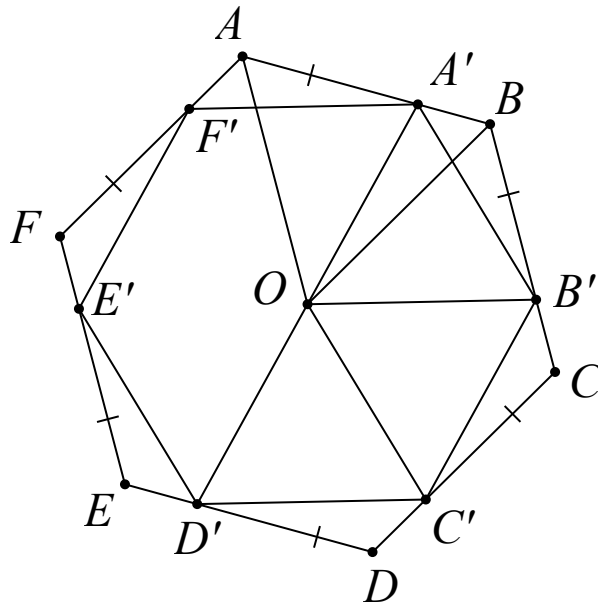
Xét $\triangle HDC$ vuông tại D , DM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $DM = HM$. Ta lại có $\widehat{C_1} = 30^\circ$ nên $\widehat{H_1} = 60^\circ$. Do đó $\triangle HDM$ là tam giác đều.

Tương tự các tam giác HME , HEI , HIF , HFK , HKD là các tam giác đều.

Lục giác $DKFIEM$ có các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau (bằng 120°) nên là lục giác đều.

Bài 20. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Trên cạnh AB , BC , CD , DE , EF , FA lấy các điểm A' , B' , C' , D' , E' , F' sao cho $AA' = BB' = CC' = DD' = EE' = FF'$. Chứng minh rằng $A'B'C'D'E'F'$ là một lục giác đều.

Lời giải



Chứng minh rằng các tam giác $AA'F$, $BB'A'$, $CC'B'$, $DD'C'$, $EE'D'$, $FF'E$ bằng nhau nên $A'B' = B'C' = C'D' = D'E' = E'F' = F'A'$

Chỉ ra các tam giác cân $OA'B'$; $OB'C'$; $OF'A'$ bằng nhau từ đó chỉ ra các góc

$$\widehat{A'B'C'} = \widehat{B'C'D'} = \dots \widehat{F'A'B'}$$

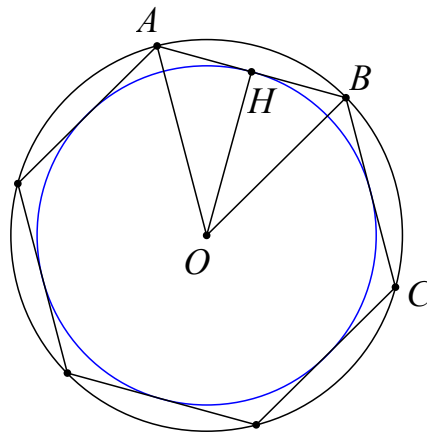
Từ đó $A'B'C'D'E'F'$ là một lục giác đều.

Bài 21. Cho một đa giác đều n cạnh có độ dài mỗi cạnh là a . Hãy tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp và bán kính r của đường tròn nội tiếp đa giác đều đó.

Lời giải

Gọi A, B là 2 đỉnh liên tiếp của đa giác đều n cạnh. Gọi O là tâm đa giác đều.

Ta có $\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{n}$.



Kẻ OH vuông góc AB , $H \in AB$. Ta có $\triangle OHA$ vuông tại H và $HA = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$

Hơn nữa ta có $\widehat{HOA} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{180^\circ}{n}$.

Khi đó

+ Bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $R = OA = \frac{HA}{\sin \frac{180^\circ}{n}}$.

+ Bán kính đường tròn nội tiếp bằng $r = OH = HA \cot \frac{180^\circ}{n}$.

Bài 22. Tính diện tích lục giác đều nội tiếp đường tròn bán kính R .

Lời giải

Ta có $AB = R$ nên suy ra tam giác OAB đều. Tương tự ta có các tam giác OBC , OCD , ODE , OEF , OAF là các tam giác đều cạnh R .

Vậy diện tích lục giác $ABCDEF$ là

$$6.S_{OAB} = 6 \cdot \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}.$$

Bài 23. Tính số đo của mỗi góc của ngũ giác đều, lục giác đều, bát giác đều (đa giác đều 8 cạnh).

Phương pháp:

Đa giác đều có n cạnh bằng nhau và cũng có n góc bằng nhau nên có công thức tính số đo mỗi góc là:

$$\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$$

Lời giải

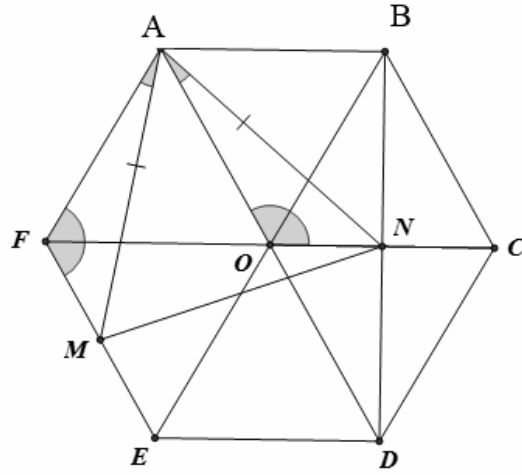
Mỗi góc của ngũ giác đều bằng: $\frac{(5-2) \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$

Mỗi góc của lục giác đều bằng: $\frac{(6-2) \cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ$

Mỗi góc của bát giác đều bằng: $\frac{(8-2) \cdot 180^\circ}{8} = 135^\circ$

Bài 24. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Gọi M là trung điểm của EF , N là trung điểm của BD . Chứng minh rằng AMN là tam giác đều.

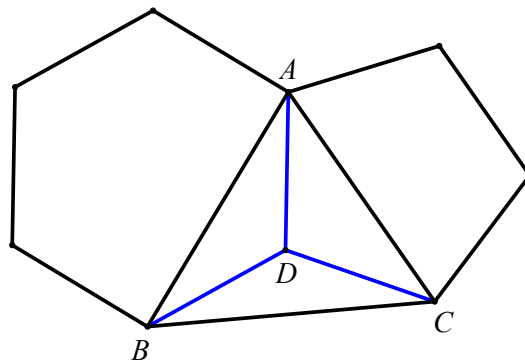
Lời giải



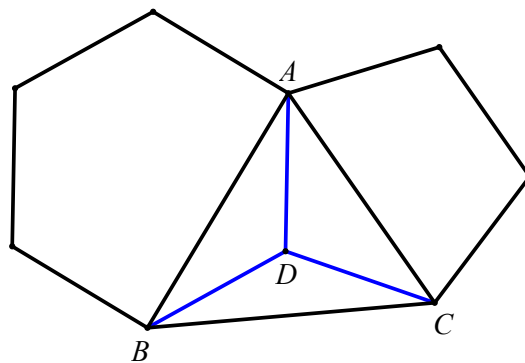
Gọi O là giao điểm của AD , BE , CF . Dễ dàng chứng minh N là trung điểm của OC , $\triangle AFM = \triangle AON$ (c.g.c).

Từ đó $AM = AN$ và $\widehat{MAN} = 60^\circ$ nên $\triangle AMN$ là tam giác đều.

Bài 25. Một lục giác đều và một ngũ giác đều chung cạnh AD (như hình vẽ). Tính các góc của tam giác ABC .



Lời giải



Theo công thức tính góc của đa giác đều, ta có:

$$\widehat{ADB} = \frac{(6-2) \cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{DBA} = 30^\circ;$$

$$\widehat{ADC} = \frac{(5-2)180^0}{5} = 108^0 \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{DCA} = 36^0;$$

Suy ra $\widehat{BDC} = 360^0 - 120^0 - 108^0 = 132^0$.

Ta có $\triangle BDC$ ($DB = DC$) cân tại D. Do đó $\widehat{DBC} = \widehat{DCB} = \frac{180^0 - 132^0}{2} = 24^0$.

Suy ra $\widehat{BAC} = 30^0 + 36^0 = 66^0$; $\widehat{ABC} = 30^0 + 24^0 = 54^0$; $\widehat{BCA} = 24^0 + 36^0 = 60^0$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX

PHẦN 1. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

A. TRẮC NGHIỆM

9.37. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Góc nội tiếp có số đo bằng số đo cung bị chắn.
- B. Góc có hai cạnh chứa các dây cung của đường tròn là góc nội tiếp đường tròn đó.
- C. Góc nội tiếp có số đo bằng một nửa số đo cung bị chắn.
- D. Góc có đỉnh nằm trên đường tròn là góc nội tiếp đường tròn đó.

Lời giải

Chọn C

Trong một đường tròn hoặc hai đường tròn bằng nhau:

- Góc nội tiếp có số đo bằng nửa số đo cung bị chắn. Do đó phương án A là sai và phương án C là đúng.
- Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó nên phương án B và D là sai.

9.38. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp một đường tròn có $\widehat{A} - \widehat{C} = 100^\circ$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\widehat{A} = 80^\circ$.
- B. $\widehat{C} = 80^\circ$.
- C. $\widehat{B} + \widehat{D} = 100^\circ$.
- D. $\widehat{A} = 140^\circ$.

Lời giải

Chọn D

Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp một đường tròn nên tổng hai góc đối nhau bằng 180° , do đó

$$\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ; \widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ.$$

$$\text{Mà } \widehat{A} - \widehat{C} = 100^\circ \text{ nên } \widehat{A} = \frac{180^\circ + 100^\circ}{2} = 140^\circ \text{ và } \widehat{C} = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ.$$

9.39. Đa giác nào dưới đây không nội tiếp một đường tròn?

- A. Đa giác đều.
- B. Hình chữ nhật.
- C. Hình bình hành.
- D. Tam giác.

Lời giải

Chọn C

Các tam giác, hình chữ nhật, đa giác đều là các đa giác nội tiếp được một đường tròn.

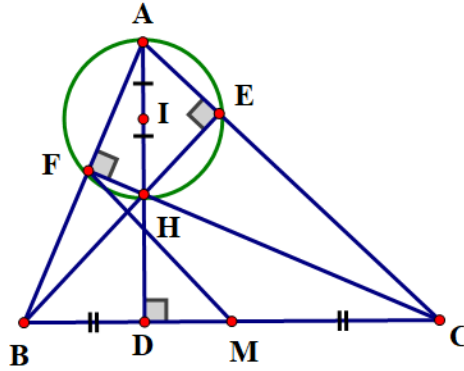
Hình bình hành không là đa giác nội tiếp đường tròn.

B. TỰ LUẬN

9.40. Cho tam giác ABC có các đường cao BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của BC và I là trung điểm của AH . Chứng minh rằng:

- a) Tứ giác $AEHF$ nội tiếp một đường tròn tâm I ;
- b) ME, MF tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$.

Lời giải



a) Vì tam giác ABC có các đường cao BE, CF cắt nhau tại H nên $HE \perp AE$ và $HF \perp AF$.

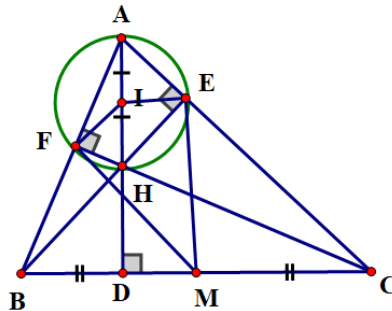
Vì $\triangle AEH$ vuông tại E nên đường tròn ngoại tiếp của tam giác có tâm I , đường kính AH . Do đó ba điểm A, E, H cùng nằm trên đường tròn tâm I , đường kính AH .

Vì $\triangle AFH$ vuông tại F nên đường tròn ngoại tiếp của tam giác có tâm I , đường kính AH . Do đó ba điểm A, F, H cùng nằm trên đường tròn tâm I , đường kính AH .

Suy ra bốn điểm A, E, H, F cùng nằm trên đường tròn tâm I , đường kính AH .

Vậy tứ giác $AEHF$ là tứ giác nội tiếp đường tròn tâm I , đường kính AH .

b)



Xét $\triangle IAF$ có $IA = IF$ (do A, F thuộc đường tròn tâm I đường kính AH) nên $\triangle IAF$ cân tại I .

Suy ra $\widehat{IAF} = \widehat{IFA}$. (1)

Xét $\triangle BCF$ vuông tại F có FM là trung tuyến ứng với cạnh huyền BC nên $FM = MB = MC = \frac{1}{2}BC$.

Xét $\triangle BMF$ có $MB = MF$ nên $\triangle BMF$ cân tại M , suy ra $\widehat{MFB} = \widehat{MBF}$. Kéo dài AH cắt BC tại D , khi đó AD là đường cao của tam giác ABC .

Xét $\triangle ABD$ vuông tại D , ta có: $\widehat{BAD} + \widehat{ABD} = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông bằng 90°).

Do đó $\widehat{IFA} + \widehat{MFB} = \widehat{IAF} + \widehat{MBF} = \widehat{BAD} + \widehat{ABD} = 90^\circ$. Lại có $\widehat{IFA} + \widehat{IFM} + \widehat{MFB} = 180^\circ$.

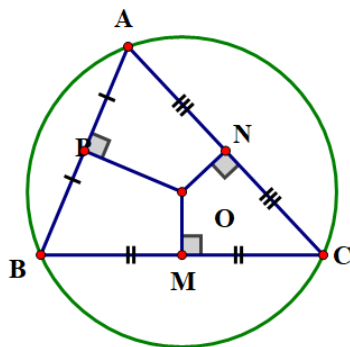
Suy ra $\widehat{IFM} = 180^\circ - (\widehat{IFA} + \widehat{MFB}) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Hay $MF \perp IF$, mà IF là bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$. Do đó MF tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$.

Tương tự, ta cũng chứng minh được ME tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$.

Vậy ME, MF tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$.

9.41. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng các tứ giác $ANOP, BPOM, CMON$ là các tứ giác nội tiếp.

Lời giải



Vì tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Mà M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB nên OM, ON, OP là ba đường trung trực của tam giác ABC . Do đó $OM \perp BC, ON \perp CA, OP \perp AB$.

Vì $\triangle OAN$ vuông tại N nên tam giác nội tiếp đường tròn có đường kính OA . Do đó O, A, N nằm trên đường tròn đường kính OA .

Vì $\triangle OAP$ vuông tại P nên tam giác nội tiếp đường tròn đường kính OA . Do đó O, A, P nằm trên đường tròn đường kính OA . Suy ra bốn điểm A, N, O, P nằm trên đường tròn đường kính OA .

Vì vậy, tứ giác $ANOP$ nội tiếp đường tròn đường kính OA . Chứng minh tương tự, ta có $BPOM$ nội tiếp đường tròn đường kính $OB, CMON$ nội tiếp đường tròn đường kính OC .

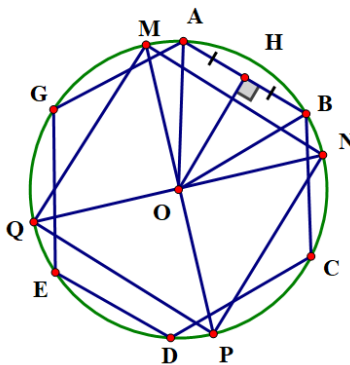
Vậy $ANOP, BPOM, CMON$ là các tứ giác nội tiếp.

9.42. Cho một hình lục giác đều và một hình vuông cùng nội tiếp một đường tròn. Biết rằng hình vuông có cạnh bằng 3 cm. Tính chu vi và diện tích của hình lục giác đều đã cho.

Lời giải

Giả sử $ABCDEF$ là hình lục giác đều và $MNPQ$ là hình vuông cùng nội tiếp đường tròn $(O; R)$.

Do đó $OA = OB = OC = OD = OE = OM = ON = OP = OQ = R$.



Vì $MNPQ$ là hình vuông nên đường tròn ngoại tiếp hình vuông này có tâm là giao điểm hai đường chéo. Mặt khác, hai đường chéo MP, NQ vuông góc với nhau tại trung điểm O của mỗi đường.

Xét $\triangle OMN$ vuông tại O , theo định lý Pythagore ta có: $MN^2 = OM^2 + ON^2$

Suy ra $3^2 = R^2 + R^2$, hay $2R^2 = 9$ nên $R = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\text{cm})$.

Vì $ABCDEF$ nên $AB = BC = CD = DE = EF = FA$.

Xét $\triangle OAB$ và $\triangle OBC$ có: $OA = OB, OB = OC, AB = BC$. Do đó $\triangle OAB = \triangle OBC$ (c.c.c).

Chứng minh tương tự ta có $\triangle OAB = \triangle OBC = \triangle OCD = \triangle ODE = \triangle OEF = \triangle OFA$.

Suy ra $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \widehat{EOF} = \widehat{FOA}$.

Mà $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COD} + \widehat{DOE} + \widehat{EOG} + \widehat{GOA} = 360^\circ$. Do đó $6\widehat{AOB} = 360^\circ$

Suy ra $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \widehat{EOG} = \widehat{GOA} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.

Xét $\triangle OAB$ có $OA = OB$ và $\widehat{AOB} = 60^\circ$ nên là tam giác đều. Như vậy các tam giác BOC, COD, DOE, EOG, GOA cũng đều là tam giác đều. Do đó

$$AB = BC = CD = DE = EG = GA = OA = R = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\text{cm}).$$

Khi đó chu vi của hình lục giác đều $ABCDEG$ là:

$$AB + BC + CD + DE + EG + GA = 6R = 6 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}(\text{cm}).$$

Gọi H là trung điểm của AB . Tam giác AOB đều có OH là đường trung tuyến nên cũng là đường cao của tam giác.

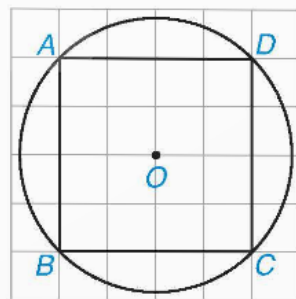
Xét $\triangle OAH$ vuông tại H , ta có: $OH = OA \cdot \sin \widehat{AOH} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{4}(\text{cm})$.

Diện tích của tam giác đều OAB là: $S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot OH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{8}(\text{cm}^2)$.

Diện tích của hình lục giác đều là: $S = 6S_{OAB} = 6 \cdot \frac{9\sqrt{3}}{8} = \frac{27\sqrt{3}}{4}(\text{cm}^2)$.

9.43. a) Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O (H.9.61). Phép quay thuận chiều 45° tâm O biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm A', B', C', D' . Hãy vẽ tứ giác $A'B'C'D'$.

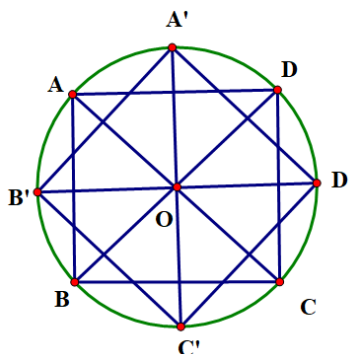
b) Phép quay trong câu a biến các điểm A', B', C', D' thành những điểm nào?



Hình 9.61

Lời giải

a) Lấy điểm A' thuộc đường tròn (O) sao cho tia OA quay thuận chiều kim đồng hồ đến tia OA' và $\widehat{AOA'} = 45^\circ$. Xác định các điểm B', C', D' tương tự như cách xác định điểm A' ở trên. Nối A' với B', B' với C', C' với D' . Khi đó ta được tứ giác $A'B'C'D'$.



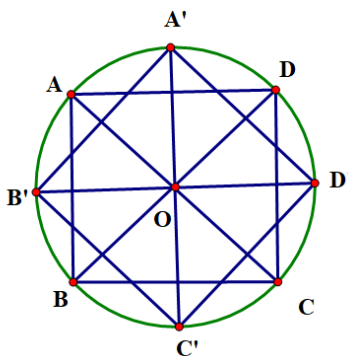
b) Vì $ABCD$ là hình vuông nên đường tròn ngoại tiếp hình vuông này có tâm là giao điểm hai đường chéo. Mặt khác, hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau tại trung điểm O của mỗi đường.

Ta có: $\widehat{AOD} = \widehat{AOA'} + \widehat{A'OD}$ nên $90^\circ = 45^\circ + \widehat{A'OD}$, suy ra $\widehat{A'OD} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

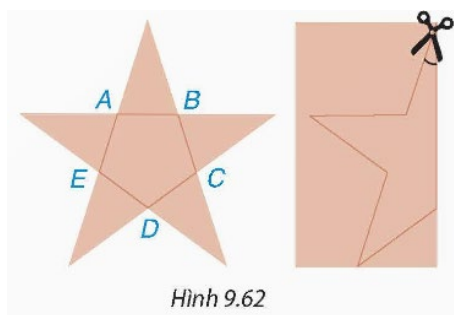
Do đó phép quay thuận chiều 45° tâm O biến điểm A' thành điểm D .

Tương tự, phép quay thuận chiều 45° tâm O biến các điểm B', C', D' lần lượt thành các điểm A, B, C .

Vậy phép quay trong câu a biến các điểm A', B', C', D' thành những điểm D, A, B, C



9.44. Bạn Lan muốn cắt hình ngôi sao có dạng như Hình 9.62 (trong đó $ABCDE$ là một ngũ giác đều). Lan gấp đôi tờ giấy, vẽ một nửa ngôi sao và cắt theo nét vẽ. Hỏi góc tạo bởi lưỡi kéo và nếp gấp lúc đầu bằng bao nhiêu độ?



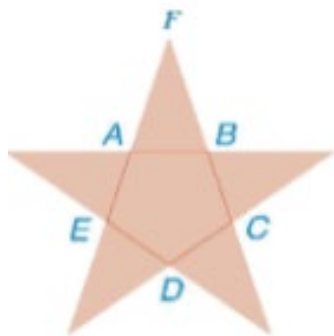
Hình 9.62

Lời giải

Ngũ giác đều $ABCDE$ được tạo bởi ba tam giác là ABC, ACD và ADE . Mà mỗi tam giác có tổng các góc bằng 180° nên tổng số đo 5 góc của ngũ giác đều $ABCDE$ là: $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$.

Vì $ABCDE$ là ngũ giác đều nên các góc của ngũ giác bằng nhau và bằng $\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$.

Gọi F là đỉnh của tam giác cân có cạnh đáy là AB (hình vẽ).



Ta có: $\widehat{FAB} + \widehat{BAE} = 180^\circ$ (hai góc kề bù). Suy ra $\widehat{FAB} = 180^\circ - \widehat{BAE} = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$.

Tam giác FAB cân tại F nên $\widehat{FAB} = \widehat{FBA} = 72^\circ$.

Mặt khác, $\widehat{AFB} + \widehat{FAB} + \widehat{FBA} = 180^\circ$ (tổng ba góc của một tam giác)

Nên $\widehat{AFB} = 180^\circ - \widehat{FAB} - \widehat{FBA} = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ$.

Vậy góc tạo bởi lưỡi kéo và nếp gấp lúc đầu là $\frac{1}{2}\widehat{AFB} = \frac{1}{2}.36^\circ = 18^\circ$.

PHẦN 2. BÀI TẬP THÊM

A. TRẮC NGHIỆM

1. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Góc nội tiếp có số đo bằng số đo cung bị chắn.
- B. Góc có hai cạnh chứa các dây cung của đường tròn là góc nội tiếp đường tròn đó.
- C. Góc nội tiếp có số đo bằng một nửa số đo cung bị chắn.
- D. Góc có đỉnh nằm trên đường tròn là góc nội tiếp đường tròn đó.

Lời giải

Chọn C

2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp một đường tròn có $\widehat{A} - \widehat{C} = 100^\circ$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $\widehat{A} = 80^\circ$.
- B. $\widehat{B} = 80^\circ$.
- C. $\widehat{B} + \widehat{D} = 100^\circ$.
- D. $\widehat{A} = 140^\circ$.

Lời giải

Chọn D

3. Đa giác nào sau đây không nội tiếp một đường tròn?

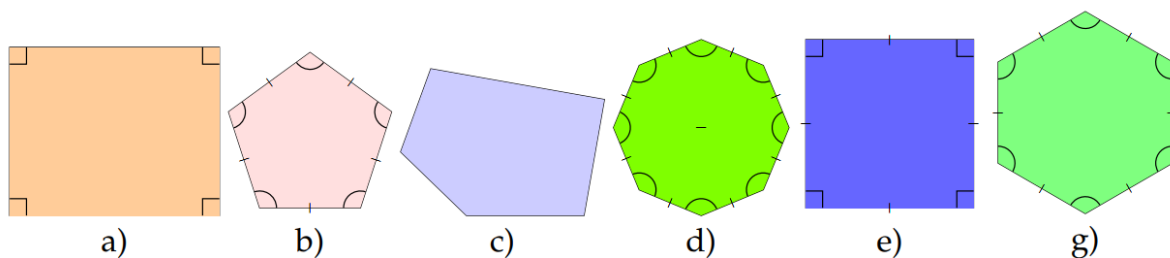
- A. Đa giác đều.
- B. Hình chữ nhật.
- C. Hình bình hành.
- D. Tam giác.

Lời giải

Chọn C

B. TỰ LUẬN

1. Tìm và gọi tên các đa giác đều trong hình dưới đây



Lời giải

Hình b: Ngũ giác đều

Hình d: Bát giác đều

Hình e: Hình vuông.

Hình g: Ngũ giác đều

2. Tính số cạnh của một đa giác đều, biết mỗi góc của nó bằng 135° .

Lời giải

Gọi n là số cạnh của đa giác đều.

$$\text{Ta có } \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = 135^\circ$$

$$\text{nên } \frac{n-2}{n} = \frac{135}{180} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Do đó } 4(n-2) = 3n.$$

$$\text{Vậy } n = 8.$$

3. a) Tính số đường chéo của đa giác n cạnh.

b) Đa giác nào có số đường chéo bằng số cạnh?

Lời giải

a) Từ mỗi đỉnh của hình n – giác lồi, kẻ được $n-1$ đoạn thẳng đến các đỉnh còn lại, trong đó có hai đoạn thẳng là cạnh của đa giác, $n-3$ đoạn thẳng là đường chéo.

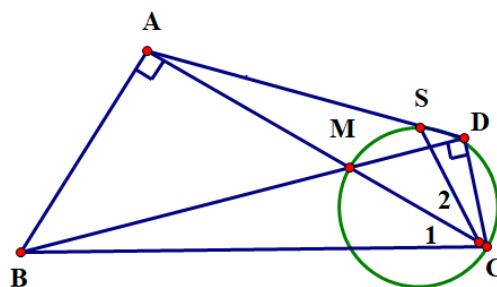
Đa giác có n đỉnh nên kẻ được $n(n-3)$ đường chéo, trong đó mỗi đường chéo tính 2 lần. Vậy số đường

$$\text{chéo của hình } n\text{-giác lồi là } \frac{n(n-3)}{2}.$$

$$\text{b) Giải phương trình } \frac{n(n-3)}{2} = n. \text{ Ta được } n = 5$$

4. Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên AC lấy một điểm M và dựng đường tròn đường kính MC . Nối BM kéo dài gặp đường tròn tại D . Đường thẳng DA gặp đường tròn tại S . Chứng minh rằng CA là tia phân giác của góc $\widehat{SCB}$.

Lời giải



Trường hợp 1: D nằm trên cung lớn $\widehat{MS}$.

Ta có $\widehat{SCM} = \widehat{SDM}$ (1) góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{SM}$ của đường tròn đường kính MC).

Để thấy $\widehat{MDC} = 90^\circ$ (MC là đường kính). Tương tự $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (gt).

$\Rightarrow$ Bốn điểm B, A, D, C cùng nằm trên một đường tròn đường kính BC .

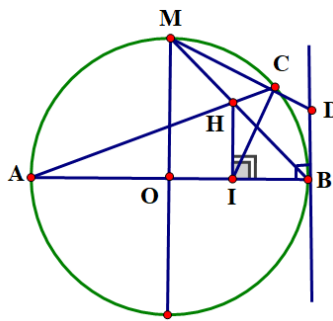
$\Rightarrow \widehat{SDM} = \widehat{ACB}$ (2) (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AB}$).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{SCM} = \widehat{MCB}$ hay CA là tia phân giác của góc SCB .

Trường hợp 2: D nằm trên cung nhỏ $\widehat{MS}$ và Trường hợp 3: D trùng với S . (Học sinh tự giải).

5. M ở chính giữa nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Trên cung nhỏ $\widehat{BM}$ lấy điểm C bất kì. Vẽ tiếp tuyến tại B của (O) cắt MC tại D . Gọi H là giao điểm của MB và AC . Kẻ HI vuông góc với AB . Chứng minh rằng CA là tia phân giác của góc $\widehat{MCI}$.

Lời giải



Để thấy $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (vì AB là đường kính); $\widehat{HCB} = 90^\circ$ hay C thuộc đường tròn đường kính HB .

Lại có $\widehat{HIB} = 90^\circ$ (gt) nên I thuộc đường tròn đường kính HB nên bốn điểm C, H, I, B cùng thuộc đường tròn đường kính HB . $\Rightarrow \widehat{HCI} = \widehat{HBI}$ (1) (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{IH}$).

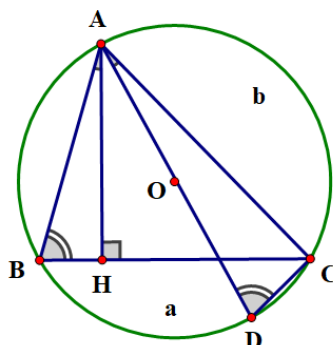
Lại có $\widehat{HBI} = \widehat{MCA}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{MA}$) $\Rightarrow \widehat{MCA} = \widehat{MBA}$, chứng tỏ CA là tia phân giác của góc $\widehat{MCI}$.

6. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$ đường kính AD , đường cao AH .

a) Chứng minh $\triangle AHB$ và $\triangle ACD$ đồng dạng.

b) Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh tương ứng với các đỉnh A, B, C . Chứng minh $S_{ABC} = \frac{a.b.c}{4R}$.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AC}$). Lại có $\widehat{ACD} = 90^\circ$ (AD là đường kính)

Do đó $\triangle AHB \sim \triangle ACD$ (g.g)

$$b) \triangle AHB \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{AD} = \frac{AB \cdot AC}{2R}$$

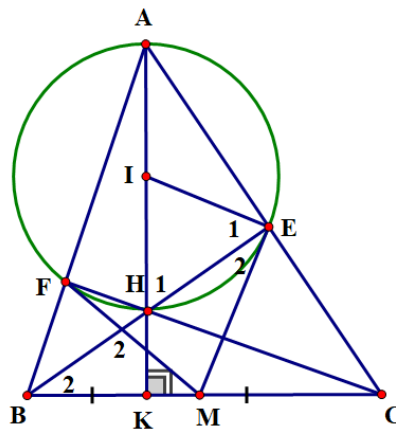
$$\text{Do đó } S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \frac{AB \cdot AC}{2R} \cdot BC = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} = \frac{abc}{4R}.$$

7. Cho tam giác ABC có các đường cao BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của BC và I là trung điểm của AH . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn tâm I ;

b) ME, MF tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$.

Lời giải



a) Dễ thấy $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^\circ$ (gt).

Tứ giác $AEHF$ có $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180^\circ$ (gt) nên nội tiếp đường tròn tâm I .

b) Ta có tam giác BEC vuông tại E (gt), EM là trung tuyến

$$\Rightarrow EM = BM = CM \text{ hay } \triangle BME \text{ cân tại } M \Rightarrow \widehat{B}_2 = \widehat{E}_2$$

Lại có H, E thuộc đường tròn tâm I nên $\triangle HIE$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{H}_2 = \widehat{E}_1$ mà $\widehat{H}_1 = \widehat{H}_2$ (đối đỉnh)

$$\Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{H}_2$$

Gọi K là chân đường cao kẻ từ A đến BC , ta có tam giác BKH vuông tại K

Gọi K là chân đường cao kẻ từ A đến BC , ta có tam giác BKH vuông tại K

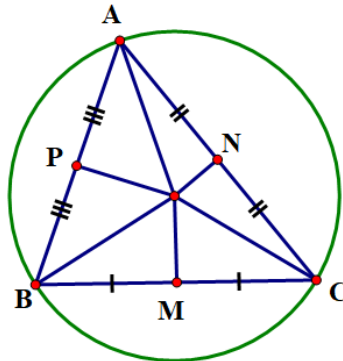
$$\Rightarrow \widehat{B}_2 + \widehat{H}_2 = 90^\circ \text{ mà } \widehat{B}_2 = \widehat{E}_2, \widehat{H}_2 = \widehat{E}_1 (cmt) \Rightarrow \widehat{E}_2 + \widehat{E}_1 = 90^\circ \text{ hay } \widehat{IEM} = 90^\circ \Rightarrow ME \perp IE$$

Chứng tỏ ME tiếp xúc với đường tròn (I) ngoại tiếp tứ giác $AEHF$.

Chứng minh tương tự ta có MF tiếp xúc với (I) .

8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng các tứ giác $ANOP, BPOM, CMON$ là các tứ giác nội tiếp.

Lời giải



Ta có M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB nên OM, ON, OP lần lượt là các trung tuyến của các tam giác cân BOC, COA và AOB .

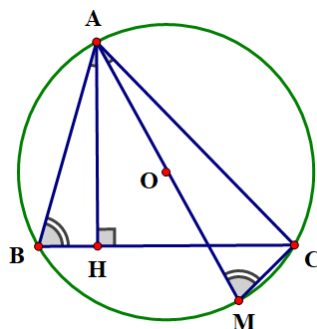
Do đó chúng đồng thời là các đường cao của các tam giác cân nêu trên.

Dễ dàng ta có $\widehat{ANO} = \widehat{APO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ANO} + \widehat{APO} = 180^\circ$

Do đó tứ giác $ANOP$ nội tiếp. Chứng minh tương tự ta có $BPOM$ và $CMON$ nội tiếp.

9. Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH ($H \in BC$) và nội tiếp đường tròn tâm O có đường kính AM (Hình vẽ). Chứng minh $\widehat{OAC} = \widehat{BAH}$

Lời giải



Dễ thấy $\widehat{ACM} = 90^\circ$ (vì AM là đường kính). Tam giác ACM vuông tại $C \Rightarrow \widehat{OAC} + \widehat{AMC} = 90^\circ$

Lại có tam giác AHB vuông tại H (gt) $\Rightarrow \widehat{BAH} + \widehat{ABC} = 90^\circ$

Mà $\widehat{AMC} = \widehat{ABC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AC}$) $\Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{BAH}$.

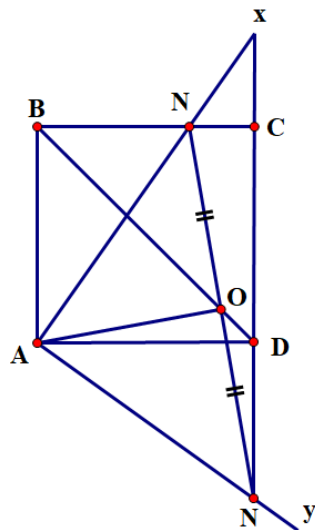
10. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a . Góc vuông xAy thay đổi sao cho tia Ax cắt đoạn thẳng BC tại M và tia Ay cắt đoạn thẳng CD kéo dài tại N .

a) Chứng minh hai tam giác ABM và AND bằng nhau;

b) Gọi O là trung điểm của MN . Chứng minh $ABMO$ và $ANDO$ là các tứ giác nội tiếp;

c) Chứng minh ba điểm B, D, O thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{BAM} + \widehat{MAD} = \widehat{BAD} = 90^\circ$ (1). Lại có $Ax \perp Ay$ nên $\widehat{xAy} = 90^\circ$ hay $\widehat{MAD} + \widehat{DAN} = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{DAN}$ nên hai tam giác vuông ABM và AND bằng nhau theo trường hợp g.c.g.

$\Rightarrow AM = AN$

b) Tam giác AMN vuông cân tại A , có AO là đường trung tuyến nên đồng thời là đường cao hay $AO \perp MN$ hay $\widehat{AOM} = 90^\circ$. Dễ thấy tứ giác $ABMO$ có $\widehat{ABM} = \widehat{AOM} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ABM} + \widehat{AOM} = 180^\circ$ nên $ABMO$ là tứ giác nội tiếp.

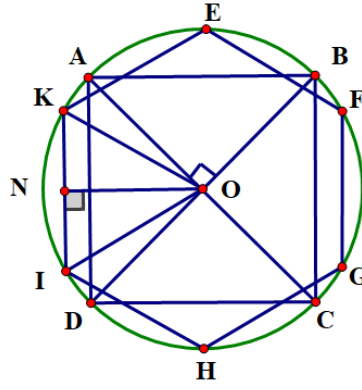
Lại có $\widehat{AON} = \widehat{ADN} = 90^\circ$, chứng tỏ bốn điểm A, O, D, N cùng thuộc một đường tròn đường kính AN hay tứ giác $ANDO$ nội tiếp.

c) Ta có tứ giác $ABMO$ nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{BOM} = \widehat{BAM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{BM}$),
 $\widehat{BAM} = \widehat{DAN}$ (cmt). Lại có tứ giác $ANDO$ nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{DAN} = \widehat{DON}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{DN}$)

$\Rightarrow \widehat{BOM} = \widehat{DON}$, mà ba điểm M, O, N thẳng hàng (gt) $\Rightarrow B, D, O$ thẳng hàng.

11. Cho một hình lục giác đều và một hình vuông cùng nội tiếp một đường tròn. Biết rằng hình vuông có cạnh bằng 3 cm. Tính chu vi và diện tích của một hình lục giác đều đã cho.

Lời giải



Ta có tam giác AOB vuông tại O . Theo định lí Pythagore, ta có: $OA^2 + OB^2 = AB^2$

$$\text{hay } R^2 + R^2 = 9 \Leftrightarrow 2R^2 = 9 \Leftrightarrow R^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} (\text{cm})$$

Ta có cạnh của hình lục giác đều bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp.

$$\text{Gọi } P \text{ là chu vi của hình lục giác đều, } P = 6 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2} (\text{cm})$$

$$\text{Xét tam giác đều } KOI \text{ cạnh } R = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ nên đường cao } ON = OK \cdot \sin \widehat{OKN} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Do đó diện tích tam giác } KOI = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{18\sqrt{3}}{8} (cm^2)$$

$$\text{Tích tam hình lục giác đều là: } S = 6 \cdot \frac{18\sqrt{3}}{8} = \frac{27\sqrt{3}}{2} (cm^2).$$