SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HƯNG YÊN

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THCS
NĂM HỌC 2024 - 2025
Môn thi: TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1 (4,0 điểm).

a) Cho $A=\dfrac{3}{\sqrt{x}+2}$, với $x=\sqrt{\sqrt{3}-1+\sqrt{6-\sqrt{49-8\sqrt{3}}}}$. Tính $T=A+A^2+A^3+...+A^{2025}$.

b) Cho a,b dương thoả mãn $a\neq b;\ 2a+b=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$.

Câu 2 (4,0 điểm).

a) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, viết phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc **âm** đi qua điểm $M(-1;-5)$ và giao với parabol $(P): y=4x^2$ tại đúng một điểm.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(y^2-y+1).\sqrt{x}-y^3-y+x=0 & (1)\\ 2x^2y^2-x^2-3y^2+1=\sqrt{x^5+y^8+1} & (2)\end{cases}$.

Câu 3 (4,0 điểm).

a) Tìm tất cả các cặp giá trị nguyên $(x;y)$ thỏa mãn phương trình

$$x^2y^2-4xy^2-2x^3+5x^2+4y^2+4x-32=0.$$

b) Một hộp chứa 9 thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra hai thẻ. Tính xác suất của biến cố *E:* "Tích hai số ghi trên thẻ là một số chẵn".

Câu 4 (2,0 điểm). Tam giác ABC có các góc B và góc C nhọn thỏa mãn điều kiện $\dfrac{\sin^2 B+\sin^2 C}{\cos^2 B+\cos^2 C}=\dfrac{\tan^2 B+\tan^2 C}{2}$. Chứng minh tam giác ABC cân.

Câu 5 (4,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của cạnh BC.

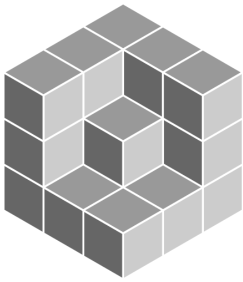
a) Chứng minh: $OM=\dfrac{1}{2}AH$.

b) Gọi K là giao điểm các đường phân giác của các góc $\widehat{ABH}$ và $\widehat{ACH}$.
Chứng minh đường thẳng MK đi qua trung điểm của đoạn AH.

Câu 6 (2,0 điểm). Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=2025$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{a^2+2025}+\sqrt{b^2+2025}+\sqrt{c^2+2025}}{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}$.

--------------------**HẾT**-------------------



Đề thi HSG tỉnh Hưng Yên 2024-2025

xytunghoanh

Ngày 4 tháng 3 năm 2025

1 Đề thi

Bài 1 (4 điểm)**.**

(a) Cho $A = \dfrac{3}{\sqrt{x}+2}$, với $x = \sqrt{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{6 - \sqrt{49 - 8\sqrt{3}}}}$. Tính $T = A + A^2 + A^3 + ... + A^{2025}$.

(b) Cho $a, b > 0$ thoả mãn $a \neq b$ và $a + 2b = 1$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

Bài 2 (4 điểm)**.**

(a) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, viết phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc âm đi qua điểm $M(-1; -5)$ và giao với parabol $(P) : y = 4x^2$ tại đúng một điểm.

(b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (y^2 - y + 1)\sqrt{x} - y^3 - y + x = 0 \\ 2x^2y^2 - x^2 - 3y^2 + 1 = \sqrt{x^5 + y^8 + 1} \end{cases}$$

Bài 3 (4 điểm)**.**

(a) Tìm tất cả các cặp giá trị nguyên (x, y) thoả mãn phương trình

$$x^2y^2 - 4xy^2 - 2x^3 + 5x^2 + 4y^2 + 4x - 32 = 0$$

(b) Một hộp chứa 9 thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra hai thẻ. Tính xác suất của biến cố E: "Tích hai số ghi trên thẻ là một số chẵn".

Bài 4 (2 điểm)**.** Tam giác ABC có $\angle B$ và $\angle C$ là các góc nhọn thoả mãn điều kiện

$$\frac{\sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 B + \cos^2 C} = \frac{\tan^2 B + \tan^2 C}{2}.$$

Chứng minh rằng $\triangle ABC$ là tam giác cân.

Bài 5 (4 điểm)**.** Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp (O). Các đường cao AD, BE và CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của cạnh BC.

(a) Chứng minh rằng: $AH = 2OM$

(b) Gọi K là giao điểm các đường phân giác $\angle ABH$ và $\angle ACH$. Chứng minh rằng đường thẳng MK chia đôi AH.

Bài 6 (2 điểm)**.** Cho 3 số thực dương a, b, c thoả mãn điều kiện $ab + bc + ca = 2025$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{a^2 + 2025} + \sqrt{b^2 + 2025} + \sqrt{c^2 + 2025}}{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}}$$

2 Lời giải

Bài 1 (4 điểm)**.**

(a) Cho $A = \dfrac{3}{\sqrt{x} + 2}$, với $x = \sqrt{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{6 - \sqrt{49 - 8\sqrt{3}}}}$. Tính $T = A + A^2 + A^3 + ... + A^{2025}$.

(b) Cho $a, b > 0$ thoả mãn $a \neq b$ và $a + 2b = 1$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Lời giải.

(a) Điều kiện: $x \geq 0$.
Biến đổi liên tiếp x ta được

$$x = \sqrt{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{6 - \sqrt{49 - 8\sqrt{3}}}} = \sqrt{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{6 - \left|\sqrt{48} - 1\right|}} = \sqrt{\sqrt{3} - 1 + \left|\sqrt{3} - 2\right|} = 1.$$

Do đó

$$A = \frac{3}{\sqrt{x} + 2} = \frac{3}{1 + 2} = 1.$$

Nên

$$T = 1 + 1^2 + 1^3 + ... + 1^{2025} = \underbrace{1 + 1 + 1 + ... + 1}_{\text{2025 số hạng 1}} = 2025.$$

Vậy $T = 2025$ □

(b) Biến đổi biểu thức Q và áp dụng bất đẳng thức *AM-GM* ta được

$$\begin{aligned}
Q &= \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) \\
&= \left(\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\right)\left(\frac{b-a}{ab}\right) \\
&= \left(\frac{-4\sqrt{ab}}{a-b}\right)\left(\frac{b-a}{ab}\right) \\
&= \frac{4}{\sqrt{ab}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2a.b}} \\
&\geq \frac{4\sqrt{2}}{\left(\frac{2a+b}{2}\right)} \geq 8\sqrt{2}
\end{aligned}$$

.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2a = b$ hay $a = \frac{1}{4}$ và $b = \frac{1}{2}$.
Vậy $\max Q = 8\sqrt{2}$ đạt được khi và chỉ khi $a = \frac{1}{4}$ và $b = \frac{1}{2}$.

□

Bài 2 (4 điểm)**.**

(a) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, viết phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc âm đi qua điểm $M(-1;-5)$ và giao với parabol $(P) : y = 4x^2$ tại đúng một điểm.

(b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (y^2-y+1)\sqrt{x} - y^3 - y + x = 0 \\ 2x^2y^2 - x^2 - 3y^2 + 1 = \sqrt{x^5+y^8+1} \end{cases}$$

Lời giải.

(a) Gọi đường thẳng cần tìm là $(d) : y = ax + b$ với $a < 0$.
Vì đường thẳng (d) đi qua điểm $M(-1;-5)$ nên $-5 = -a + b$ hay $b = a - 5$.
Do đó ta có $(d) : y = ax + a - 5$.
Gọi giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) là $W(x_A, y_A)$ và giao điểm này là duy nhất theo giả thiết.
Thế thì

$$\begin{cases} y_A = ax_A + a - 5 \\ y_a = 4x_A^2 \end{cases}$$

Nên

$$4x_A^2 = ax_A + a - 5$$
$$4x_A^2 - ax_A - a + 5 = 0$$

Vì tính duy nhất của x_A nên $\Delta_{x_A} = a^2 + 16a - 4^2.5 = 0$.
Do đó $a = -20$ (thoả mãn) hoặc $a = 4$ (không thoả mãn).
Cuối cùng, ta có đường thẳng cần tìm là $(d) : y = -20a - 25$. □

(b) Điều kiện: $x \geq 0$ và $x^5 + y^8 + 1 \geq 0$
Ta có

$$\begin{cases} (y^2-y+1)\sqrt{x} - y^3 - y + x = 0 & (1) \\ 2x^2y^2 - x^2 - 3y^2 + 1 = \sqrt{x^5+y^8+1} & (2) \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} y^2+1=a \\ -y=b \\ \sqrt{x}=c \end{cases}$.

Phương trình (1) trở thành

$$(a+b)c+ab+c^2=0$$
$$(c+a)(c+b)=0$$

Trường hợp 1: $a+c=0$.
Trở lại phép đặt, ta có

$$y^2+1+\sqrt{x}=0$$

Vô lý vì $y^2+1+\sqrt{x}\geq 0+1+0=1>0$

Trường hợp 2: $c+b=0$.
Trở lại phép đặt, ta có:

$$\sqrt{x}=y$$
$$x=y^2 \quad (y\geq 0)$$

Thay $y^2=x$ vào phương trình (2) ta được

$$2x^3-x^2-3x+1=\sqrt{x^5+x^4+1}$$
$$2x^3-x^2-3x+1=\sqrt{(x^3-x+1)(x^2+x+1)}$$
$$2(x^3-x+1)-(x^2+x+1)=\sqrt{(x^3-x+1)(x^2+x+1)}$$
$$2p^2-q^2=pq$$

Đặt $p=\sqrt{x^3-x+1}, q=\sqrt{x^2+x+1}$ thì

$$2p^2-q^2=pq$$
$$2p^2-pq-q^2=0$$
$$(p-q)(2p+q)=0$$

Vì $2p+q>0$ nên $p=q$.
Trở lại phép đặt, ta có

$$\sqrt{x^3-x+1}=\sqrt{x^2+x+1}$$
$$x^3-x+1=x^2+x+1$$
$$x(x^2-x-2)=0$$
$$x(x-1)(x+2)=0$$
$$x(x-1)=0 \quad (x+2>0)$$

- Với $x=0$ thì $y=0$ và thoả mãn.
- Với $x=2$ thì $y=\sqrt{2}$ và thoả mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x,y) là $(0;0)$ và $(2;\sqrt{2})$

□

Bài 3 (4 điểm)**.**

(a) Tìm tất cả các cặp giá trị nguyên (x, y) thoả mãn phương trình

$$x^2y^2 - 4xy^2 - 2x^3 + 5x^2 + 4y^2 + 4x - 32 = 0$$

(b) Một hộp chứa 9 thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra hai thẻ. Tính xác suất của biến cố E: "Tích hai số ghi trên thẻ là một số chẵn".

Lời giải.

(a) Ta có

$$\begin{gathered} x^2y^2 - 4xy^2 - 2x^3 + 5x^2 + 4y^2 + 4x - 32 = 0 \\ y^2(x^2 - 4x + 4) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 32 \end{gathered}$$

Nếu $x = 2$ thì $2.2^3 - 5.2^2 - 4.2 + 32 = 0$ hay $20 = 0$, vô lý.
Do đó $x \neq 2$ Ta có

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 32}{x^2 - 4x + 4} \\ &= 2x + 3 + \frac{20}{(x-2)^2} \ (1) \end{aligned}$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên từ (1) ta có $\frac{20}{(x-2)^2} \in \mathbb{Z}$

Hay $20 \vdots (x-2)^2$, mà $(x-2)^2$ là một số chính phương nên ta xét các trường hợp sau:
Trường hợp 1: $(x-2)^2 = 1$.

- Với $x - 2 = 1$ thì $x = 3$ và $y^2 = 29$, vô lý.
- Với $x - 2 = -1$ thì $x = 1$ và $y = 5$ hoặc $y = -5$.

Trường hợp 2: $(x-2)^2 = 4$.

- Với $x - 2 = 2$ thì $x = 4$ và $y = 4$ hoặc $y = -4$.
- Với $x - 2 = -2$ thì $x = 0$ và $y^2 = 8$, vô lý.

Vậy các cặp số nguyên (x, y) thoả mãn là $(1; 5); (1; -5); (4; 4)$ và $(4; -4)$ □

(b) Xét phép thử lấy ngẫu nhiên từ hộp ra hai thẻ.
Vì là ấy ngẫu nhiên từ hộp ra hai thẻ nên các kết quả là đồng khả năng.
Xét biến cố E: "Tích hai số ghi trên thẻ là một số chẵn".
Số các kết quả có thể là: $\dfrac{9.8}{2} = 36$.
Trường hợp 1: Có một thẻ mang số chẵn, thẻ còn lại là số lẻ.
Số các kết quả thuận lợi là: $4.5 = 20$.
Trường hợp 2: Cả 2 thẻ đều mang số chẵn.
Số các kết quả thuận lợi là: $\dfrac{4.3}{2} = 6$
Do đó

$$P(E) = \frac{20 + 6}{36} = \frac{13}{18}$$

□

Bài 4 (2 điểm). Tam giác ABC có $\angle B$ và $\angle C$ là các góc nhọn thoả mãn điều kiện

$$\frac{\sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 B + \cos^2 C} = \frac{\tan^2 B + \tan^2 C}{2}.$$

Chứng minh rằng $\triangle ABC$ là tam giác cân.

Lời giải. Biến đổi liên tiếp giả thiết ta được

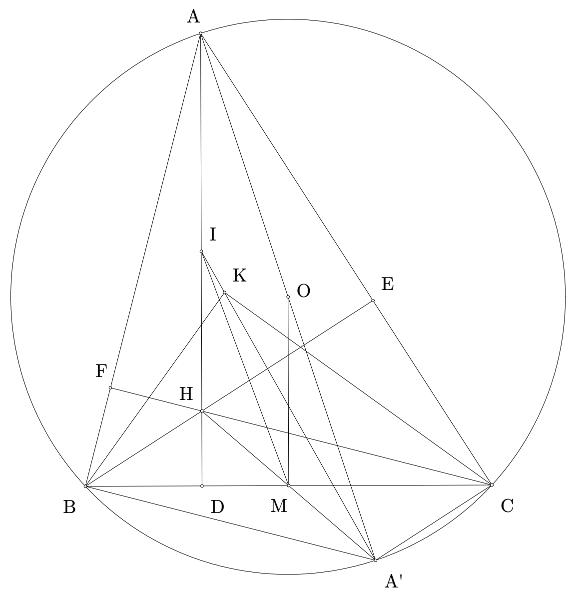
$$\frac{\sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 B + \cos^2 C} = \frac{\tan^2 B + \tan^2 C}{2}$$
$$\frac{\sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 B + \cos^2 C} + 1 = \frac{\tan^2 B + \tan^2 C}{2} + 1$$
$$\frac{\sin^2 B + \sin^2 C + \cos^2 B + \cos^2 C}{\cos^2 B + \cos^2 C} = \frac{\tan^2 B + \tan^2 C}{2} + 1$$
$$\frac{2}{\cos^2 B + \cos^2 C} = \frac{\tan^2 B + 1 + \tan^2 C + 1}{2}$$
$$\frac{4}{\cos^2 B + \cos^2 C} = \frac{1}{\cos^2 B} + \frac{1}{\cos^2 C}$$
$$(\cos^2 B + \cos^2 C)^2 = 4\cos^2 B.\cos^2 C$$
$$(\cos^2 B - \cos^2 C)^2 = 0$$
$$\cos B = \cos C$$
$$\angle B = \angle C$$

Do đó $\triangle ABC$ cân tại A. □

Bài 5 (4 điểm)**.** Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp (O). Các đường cao AD, BE và CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của cạnh BC.

(a) Chứng minh rằng: $AH = 2OM$

(b) Gọi K là giao điểm các đường phân giác $\angle ABH$ và $\angle ACH$. Chứng minh rằng đường thẳng MK chia đôi AH.



Lời giải.

(a) Gọi AA' là đường kính của (O)
Ta có $\angle ACA' = 90^\circ$ nên $A'C \perp AC$
Mà $BH \perp AC$ nên $BH \parallel A'C$
Tương tự, ta có $CH \parallel A'C$
Do đó tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành nên M là trung điểm $A'H$
Mà O là trung điểm AA' nên OM là đường trung bình của $\triangle AHA'$ nên $AH = 2OM$.

(b) Gọi I là giao điểm của MK và AH.
Ta có

$$\angle KBC + \angle KCB = \angle EBC + \angle FCB + \angle KBE + \angle KCF = \angle BAC + 90^\circ - \angle BAC = 90^\circ$$

Do đó $\triangle BKC$ vuông tại K.
Mà M là trung điểm BC nên $MB = MC = MK$.
Suy ra $\triangle KMB$ cân tại M. Thế thì

$$\angle KMH = \angle KMB - \angle HMB = 180^\circ - 2\angle KBM - \angle HMB$$

Mà

$$\angle AA'H = \angle HA'C - \angle AA'C = \angle BHM - \angle ABC = 180^\circ - 2\angle KBM - \angle HMB$$

Nên $\angle KMH = \angle AA'H$ suy ra $IM \parallel A'A$.
Theo định lý Thales thì I phải là trung điểm AH.

□

Bài 6 (2 điểm)**.** Cho 3 số thực dương a, b, c thoả mãn điều kiện $ab + bc + ca = 2025$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{a^2 + 2025} + \sqrt{b^2 + 2025} + \sqrt{c^2 + 2025}}{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức *Bunyakowski* ta được

$$\sqrt{a^2 + 2025} = \sqrt{a^2 + ab + bc + ca} = \sqrt{(a+b)(c+a)} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{ab}$$

Chứng minh tương tự với các biến còn lại rồi cộng theo vế ta được

$$P \geq \frac{2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})}{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}} = 2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 15\sqrt{3}$. Vậy $\max P = 2$ đạt được khi và chỉ khi $a = b = c = 15\sqrt{3}$. □