



LÊ THỊ HOÀI CHÂU (Tổng Chủ biên)
TRẦN ANH DŨNG (Chủ biên)
TRẦN TRÍ DŨNG, LÊ ĐẠI DƯƠNG, LÊ CHÂN ĐỨC
NGÔ MINH ĐỨC, PHẠM DUY KHÁNH, HỒ LỘC THUẬN

TOÁN 12

Tập 1

Bản mẫu



NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC HUẾ



HỘI ĐỒNG QUỐC GIA THẨM ĐỊNH SÁCH GIÁO KHOA

Môn Toán - Lớp 12

(Theo Quyết định số 1882/QĐ-BGDĐT ngày 29 tháng 6 năm 2023
của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo)

Lê Mậu Hải (Chủ tịch), Cao Thị Hà (Phó Chủ tịch), Phạm Đức Tài (Ủy viên, Thư ký).

Phạm Khắc Ban - Nguyễn Hắc Hải - Nguyễn Doãn Phú - Nguyễn Chiến Thắng
Nguyễn Thị Vĩnh Thuyên - Đinh Cao Thượng - Vũ Thị Như Trang - Phạm Đình Tùng (Ủy viên).



LÊ THỊ HOÀI CHÂU (Tổng Chủ biên)
TRẦN ANH DŨNG (Chủ biên)
TRẦN TRÍ DŨNG, LÊ ĐẠI DƯƠNG, LÊ CHÂN ĐỨC
NGÔ MINH ĐỨC, PHẠM DUY KHÁNH, HỒ LỘC THUẬN

TOÁN 12

Tập 1

Bản mẫu



**NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC HUẾ**



LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh, quý thầy, cô giáo và phụ huynh thân mến!

Toán 12 – Cùng khám phá là một sự tiếp nối những cuốn sách giáo khoa Toán cùng bộ đã có ở các lớp dưới, được biên soạn nhằm đáp ứng yêu cầu đổi mới nội dung cũng như phương pháp dạy – học, hướng tới mục tiêu chuẩn bị cho học sinh hoà nhập tốt với xã hội hôm nay và ngày mai. Sách được biên soạn theo tinh thần kế thừa những yếu tố tích cực của các bộ sách giáo khoa Việt Nam thời kì trước đây, đồng thời khai thác có chọn lọc kinh nghiệm quốc tế về phát triển tài liệu học tập hiện đại và vận dụng những lí thuyết dạy học đang được thừa nhận rộng rãi trên thế giới.

Thông qua các mục *Mở đầu chương*, *Khởi động*, *Hoạt động*, *Luyện tập – Vận dụng* hay *Em có biết*, sách giáo khoa **Toán 12 – Cùng khám phá** kết nối toán học với cuộc sống cũng như các môn học khác, giúp đỡ và khuyến khích học sinh ứng dụng kiến thức thu nhận được vào việc giải quyết nhiều vấn đề thuộc những lĩnh vực khác nhau. Với phương thức trình bày đa dạng, các hoạt động xuyên suốt **Toán 12 – Cùng khám phá** vừa tạo điều kiện để học sinh trải nghiệm, khám phá, tự học, tự đánh giá, vừa có cấu trúc thuận lợi cho giáo viên tổ chức các hoạt động dạy học, vừa giúp phụ huynh kiểm tra kiến thức của các em.

Đúng như tên gọi của nó, sách giáo khoa **Toán 12 – Cùng khám phá** giúp các em khám phá kiến thức và có thể vận dụng được những khái niệm tương chừng như trừu tượng vào việc giải quyết nhiều vấn đề của khoa học và thực tiễn.

Ban biên soạn mong rằng bộ sách sẽ khơi gợi niềm vui và hứng thú cho các em học sinh trong quá trình tìm hiểu toán học. Chúc các em khám phá được nhiều điều thú vị của thế giới và nhận ra sự hiện diện khắp nơi của toán học trong cuộc sống quanh ta.

Em hãy giữ gìn sách cẩn thận để sử dụng được lâu dài nhé!

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

Các chương, bài của **Toán 12 Tập 1** được trình bày theo một cấu trúc thống nhất, gồm các mục:

1. Mở đầu chương	Giới thiệu chương thông qua việc thiết lập sự liên hệ giữa chủ đề của chương với các tình huống thực tiễn. Mục tiêu học tập cũng được nêu trong đề mục này.
2. Các bài học: Mỗi bài học thường được thiết kế với các phần:	
Khởi động:	Thường là một câu hỏi hay một tình huống tạo động cơ, dẫn dắt học sinh vào bài học, để rồi sau đó nhận ra ứng dụng của kiến thức được đề cập trong bài.
HOẠT ĐỘNG	Thông qua trải nghiệm, khám phá, học sinh tham gia vào việc hình thành kiến thức mới, nhận ra ứng dụng của kiến thức đó trong những ngữ cảnh cụ thể.
 KIẾN THỨC TRỌNG TÂM	Được đặt trong khung màu với biểu tượng bóng đèn, trình bày những kiến thức trọng tâm của bài học.
VÍ DỤ	Cung cấp ví dụ có lời giải để minh họa, giúp học sinh nhận thấy các ý tưởng hay lập luận toán học được diễn đạt rõ ràng và chính xác bằng ngôn ngữ toán học như thế nào, kiến thức vừa học có thể được sử dụng ra sao.
LUYỆN TẬP VẬN DỤNG	Tạo cơ hội cho học sinh sử dụng kiến thức vừa học vào việc giải quyết những vấn đề cụ thể của toán học hay của thực tiễn, qua đó hình thành và phát triển các kĩ năng gắn với kiến thức đang bàn đến.
BÀI TẬP	Gồm một hệ thống bài tập từ đơn giản - áp dụng trực tiếp các khái niệm toán học vừa được nghiên cứu, đến những bài đòi hỏi việc vận dụng kiến thức toán học ở mức độ cao hơn về lập luận, kĩ năng. Nhiều vấn đề thực tiễn được đưa vào, giúp học sinh nhận ra ý nghĩa của kiến thức vừa học.
3. Ôn tập chương	Qua hệ thống bài tập ôn tập (tự luận và trắc nghiệm), học sinh có thể kiểm tra lại hiểu biết của mình về các khái niệm và ý tưởng quan trọng được nghiên cứu trong chương, kết nối chúng với nhau trong việc giải quyết những vấn đề đa dạng.

Bên cạnh đó, trong các bài còn có thêm một số đề mục bổ trợ sau đây:

 Ghi chú / Lưu ý Nhấn mạnh hoặc mở rộng kiến thức, chú thích những thông tin quan trọng liên quan đến các khái niệm cốt lõi.	 NHẮC LẠI Nhắc lại những khái niệm hoặc định nghĩa mà học sinh đã học trước đó, từ đó tạo mối liên hệ giữa chúng với các chủ đề đang được nghiên cứu.	 THẢO LUẬN Đặt một số câu hỏi liên quan đến các khái niệm mà học sinh đang học nhằm thúc đẩy sự tương tác tích cực, chủ động giữa giáo viên với học sinh và giữa học sinh với nhau.	 EM CÓ BIẾT Giới thiệu một số câu chuyện thú vị về toán học, lịch sử toán học và các nhà toán học.
---	--	--	---

MỤC LỤC

Chương 1. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Bài 1. Tính đơn điệu và cực trị của hàm số	2
Bài 2. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số	10
Bài 3. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số	15
Bài 4. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số	24
Hoạt động thực hành và trải nghiệm	38
Ôn tập chương 1	45

Chương 2. VECTƠ VÀ HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1. Vectơ trong không gian	51
Bài 2. Các phép toán vectơ trong không gian	55
Bài 3. Hệ trục toạ độ trong không gian	66
Bài 4. Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ	74
Ôn tập chương 2	82

Chương 3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Bài 1. Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm	86
Bài 2. Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm	96
Ôn tập chương 3	104

Bảng tra cứu từ ngữ	109
---------------------	-----

Bảng giải thích thuật ngữ	109
---------------------------	-----



CHƯƠNG 1

Ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số

Ở lớp 11, ta đã biết khái niệm đạo hàm. Trong chương này, ta sẽ tìm hiểu ứng dụng của đạo hàm trong việc xét một số tính chất quan trọng của hàm số và đồ thị, chẳng hạn như tính đơn điệu, cực trị, giá trị nhỏ nhất, lớn nhất... hướng tới việc khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số, từ đó vận dụng vào giải quyết một số vấn đề thực tiễn, đặc biệt là các vấn đề tối ưu.

- ◆ Nhận biết được tính đồng biến, nghịch biến, cực trị của hàm số dựa vào dấu của đạo hàm, bảng biến thiên hoặc đồ thị và thể hiện được trên bảng biến thiên;
- ◆ Nhận biết được giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên tập cho trước và xác định được giá trị này trong các trường hợp đơn giản;
- ◆ Nhận biết được hình ảnh hình học của đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang và tiệm cận xiên của đồ thị;
- ◆ Khảo sát được sự biến thiên, vẽ được đồ thị của các hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $y = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ và nhận biết được tính đối xứng của đồ thị các hàm số này;
- ◆ Vận dụng được đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết một số vấn đề thực tiễn.

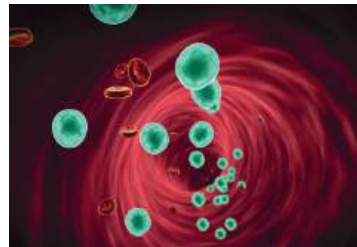
TÍNH ĐƠN ĐIỀU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Khởi động: Khi loại thuốc A được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ (mg/l) của thuốc trong máu sau x phút (kể từ khi bắt đầu tiêm) được xác định bởi công thức:

$$C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}.$$

(Nguồn: James Stewart, J. (2015). *Calculus*. Cengage Learning)

Để đưa ra những lời khuyên và cách xử lý phù hợp cho bệnh nhân, ta cần tìm khoảng thời gian mà nồng độ của thuốc trong máu đang tăng.

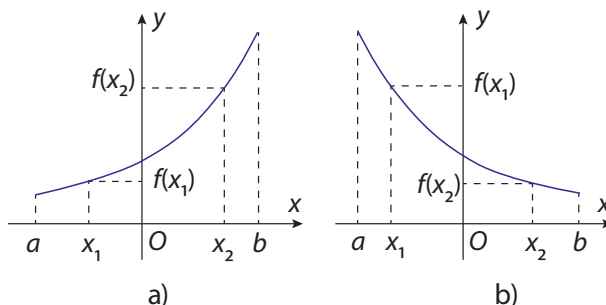


I Tính đơn điệu của hàm số và dấu của đạo hàm

Trước hết, ta nhắc lại khái niệm hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến trên một khoảng $(a; b)$:

- Hàm số $y = f(x)$ gọi là đồng biến (tăng) trên khoảng $(a; b)$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in (a; b)$ mà $x_1 < x_2$ thì ta có $f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến (giảm) trên khoảng $(a; b)$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in (a; b)$ mà $x_1 < x_2$ thì ta có $f(x_1) > f(x_2)$.

Minh hoạ về đồ thị: Hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b)$ có đồ thị là đường "đi lên" từ trái sang phải như Hình 1.1a, hàm số nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ có đồ thị là đường "đi xuống" từ trái sang phải như Hình 1.1b.



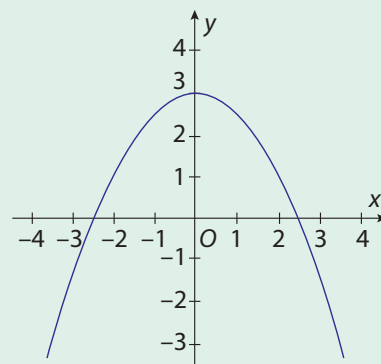
Hình 1.1

HOẠT ĐỘNG 1

Hình 1.2 là đồ thị (C) của hàm số $y = f(x) = \frac{-1}{2}x^2 + 3$.

- Quan sát đồ thị (C) và chỉ ra các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số đã cho.
- Xác định dấu của đạo hàm $f'(x)$ khi x thuộc các khoảng đồng biến, nghịch biến ở câu a.
- Ghi lại và hoàn thành bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		?	?	?	
$f(x)$	$-\infty$		?		$-\infty$



Hình 1.2

Tổng quát, liên hệ giữa dấu của đạo hàm và tính đồng biến, nghịch biến của một hàm số được cho bởi định lí sau đây:



Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$, (có thể a là $-\infty$; b là $+\infty$).
 Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc $(a; b)$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$.
 Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc $(a; b)$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$.

Lưu ý:

- Người ta chứng minh được rằng: Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a; b)$ thì $f(x)$ không đổi trên $(a; b)$.
- Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số được gọi chung là **tính đơn điệu** của hàm số.
- Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số trên khoảng $(a; b)$ được biểu diễn bởi bảng biến thiên được minh hoạ như *Bảng 1.1*.

Bảng 1.1

x	a	b
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b)$

x	a	b
$f'(x)$	-	
$f(x)$		

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(a; b)$

- Kết quả trong định lí trên vẫn đúng khi ta thay khoảng $(a; b)$ bằng một đoạn hoặc nửa khoảng. Khi yêu cầu xét tính đơn điệu của hàm số mà chưa chỉ rõ khoảng $(a; b)$, ta hiểu là xét tính đơn điệu trên tập xác định của hàm số đó.

VÍ DỤ 1

Xác định các khoảng đồng biến, nghịch biến và lập bảng biến thiên của hàm số:

- a) $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$; b) $y = f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Giải

- a) Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = f'(x) = 3x^2 - 6x$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$$

Bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Suy ra hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$	+	0	-	0	+		
$f(x)$	$-\infty$		1		-3		$+\infty$

b) Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\text{Ta có } y' = f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$$

Vì $x^2 > 0, \forall x \neq 0$ nên dấu của $f'(x)$ là dấu của $x^2 - 1$.

Bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
f'(x)		+	0	-		-	0	+

Suy ra hàm số $y = x + \frac{1}{x}$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(0; 1)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$						
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$					
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$	$ $	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Lưu ý: Từ nay về sau, bảng xét dấu của $f'(x)$ sẽ được ghép chung vào bảng biến thiên.

LUYỆN TẬP 1

Lập bảng biến thiên và kết luận các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

a) $y = f(x) = \frac{2x-1}{x+3};$

b) $y = f(x) = \cos x$ trên khoảng $(0; 2\pi)$.

HOẠT ĐỘNG 2

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 1$.

a) Bằng định nghĩa, hãy cho biết hàm số $f(x)$ có đồng biến trên $\mathbb{R}$ hay không.

b) Hãy nhận xét về dấu của đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$.

ĐỊNH LÝ MỞ RỘNG

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$.

Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a; b)$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc khoảng $(a; b)$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$.

Nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in (a; b)$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc khoảng $(a; b)$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$.

VÍ DỤ 2

Lập bảng biến thiên và xác định các khoảng đơn điệu của hàm số:

$$y = f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 6x - 9.$$

Giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = f'(x) = 6x^2 + 12x + 6 = 6(x + 1)^2$. Do đó $y' \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $y' = 0$ tại $x = -1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

LUYỆN TẬP 2

Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x) = \sin x - x$ trên khoảng $(-\pi; \pi)$.

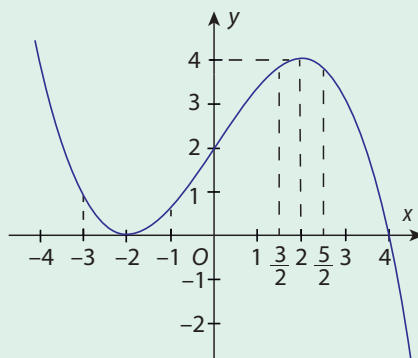
II

Cực trị của hàm số

HOẠT ĐỘNG 3

Hàm số $y = f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{2}x + 2$ có đồ thị cho ở Hình 1.3.

- Giải phương trình $f'(x) = 0$.
- Dựa vào đồ thị, so sánh $f(-2)$ với các giá trị $f(x)$ khi $x \in (-3; -1)$.
- Dựa vào đồ thị, so sánh $f(2)$ với các giá trị $f(x)$ khi $x \in (\frac{3}{2}; \frac{5}{2})$.



Hình 1.3

ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$.

- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0 .
- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 .

Ghi chú:

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực đại** của hàm số, $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số, kí hiệu là f_{CD} hay y_{CD} , còn điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại của đồ thị hàm số**.
Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực tiểu** của hàm số, $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số, kí hiệu là f_{CT} hay y_{CT} , còn điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực tiểu của đồ thị hàm số**.
- Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại (còn gọi là cực đại) và giá trị cực tiểu (còn gọi là cực tiểu) được gọi chung là **giá trị cực trị** (hay cực trị) của hàm số.
- Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và có điểm cực trị là $x_0 \in (a; b)$ thì $f'(x_0) = 0$.

VÍ DỤ 3

Xét hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(-1; 4)$, ta có bảng biến thiên như sau:

x	-1	1	2	3	4
$f'(x)$	-	-	0	+	+
$f(x)$		-1	-5	-1	

$x_0 = 2$ là điểm cực tiểu hay điểm cực đại của hàm số đã cho? Tìm giá trị cực trị tương ứng.

Giải

Theo định nghĩa, ta có thể chọn $h = 1$, ta có $x_0 - h = 1, x_0 + h = 3$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(x) > f(2), \forall x \in (1; 3) \setminus \{2\}$, suy ra $x_0 = 2$ là điểm cực tiểu của hàm số, giá trị cực tiểu của hàm số là $f(2) = -5$.

LUYỆN TẬP 3

- Chỉ ra một điểm cực đại, một điểm cực tiểu của đồ thị hàm số được cho ở Hoạt động 3.

HOẠT ĐỘNG 4

Xét hàm số $y = f(x)$ ở Hoạt động 3. Xác định dấu của đạo hàm y' ở các ô **?** tương ứng với x thuộc các khoảng $(-\infty; -2), (-2; 2), (2; +\infty)$ trong **Bảng 1.2**. Nêu mối liên hệ giữa sự tồn tại cực trị và dấu của đạo hàm.

Bảng 1.2

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	?	0	?	0
$f(x)$	$+\infty$	0	4	$-\infty$



ĐỊNH LÝ (ĐIỀU KIỆN ĐỦ ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ)

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$, với $h > 0$.

- Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

Nhận xét:

- Định lý trên có thể hiểu một cách đơn giản như sau: Điều kiện đủ để hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại một điểm x_0 là đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu khi x qua x_0 , với $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ (Bảng 1.3).

Bảng 1.3

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		f_{CD}	

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		f_{CT}	

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$ hoặc đạo hàm không tồn tại tại x_0 .

VÍ DỤ 4

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		+		-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Xác định các cực trị của hàm số $f(x)$.

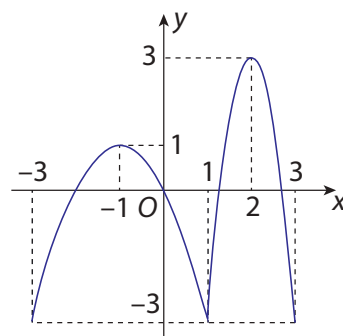
Giải

Ta có $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (-\infty; 0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (0; 1)$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $f_{\text{CD}} = f(0) = 2$.

Ta có $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (0; 1)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (1; +\infty)$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $f_{\text{CT}} = f(1) = -3$.

LUYỆN TẬP 4

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 3]$ và có đồ thị như Hình 1.4. Hãy xác định các điểm cực trị, giá trị cực trị của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(-3; 3)$.



Hình 1.4

Tổng quát, ta có quy tắc tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$:

- Bước 1** Tìm tập xác định của hàm số.
Bước 2 Tính $f'(x)$. Tìm các điểm mà tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
Bước 3 Lập bảng biến thiên.
Bước 4 Từ bảng biến thiên, suy ra các điểm cực trị, giá trị cực trị.

VÍ DỤ 5

Tìm cực trị của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{1}{3}$.

Giải

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta có $y' = x^2 - 2x - 3$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3. \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\frac{26}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra $x = -1$ là điểm cực đại của hàm số, $f_{\text{CD}} = 2$;

$x = 3$ là điểm cực tiểu của hàm số, $f_{\text{CT}} = -\frac{26}{3}$.

LUYỆN TẬP 5

Tìm cực trị của hàm số $y = f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$.

VẬN DỤNG

Trở lại bài toán Khởi động đầu bài học, hãy lập bảng biến thiên của hàm số

$$y = C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2} \text{ trên khoảng } (0; +\infty).$$

Khi đó, cho biết hàm nồng độ thuốc trong máu $C(x)$:

- a) Tăng trong khoảng thời gian nào;
b) Đạt giá trị cực đại là bao nhiêu trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm.

BÀI TẬP

1.1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	4	5	$+\infty$					
y'		+		-	0	+	0	+		-	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$	

Xác định các khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số đã cho.

1.2. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau:

a) $y = -x^3 + x^2 - 5$;

b) $y = \sqrt{x^2 - x - 20}$;

c) $y = e^{x^2}$;

d) $y = \frac{x}{x^2 + 4}$.

1.3. Tìm các điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x}{3}(x - 3)^2$;

b) $y = |x|$;

c) $y = 3^{x-2x^2}$;

d) $y = \ln(x^2 + e)$.

1.4. Lập bảng biến thiên, tìm các khoảng đơn điệu và cực trị của các hàm số:

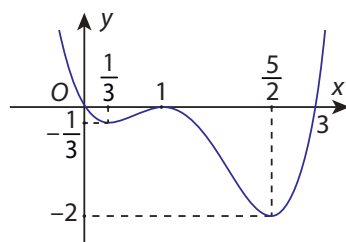
a) $y = -x^3 + 3x - 6$;

b) $y = \frac{x-1}{x+2}$;

c) $y = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x+1}$;

d) $y = \frac{3x}{x^2 - 9}$.

1.5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$ thỏa mãn $f'(\frac{1}{3}) = f'(1) = f'(\frac{5}{2}) = 0$ và có đồ thị là đường cong như Hình 1.5. Xác định các khoảng đơn điệu và tìm cực trị của hàm số đã cho trên khoảng $(0; 3)$.



Hình 1.5

1.6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $y' = f'(x) = x(x - 1)^2(x + 3)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Xác định các khoảng đồng biến, nghịch biến và điểm cực trị của hàm số $f(x)$ đã cho.

1.7. Thể tích V của 1 kg nước (tính bằng cm^3) ở nhiệt độ T (đơn vị: $^\circ\text{C}$) khi T thay đổi từ 0°C đến 30°C được cho xấp xỉ bởi công thức:

$$V = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000769T^3.$$

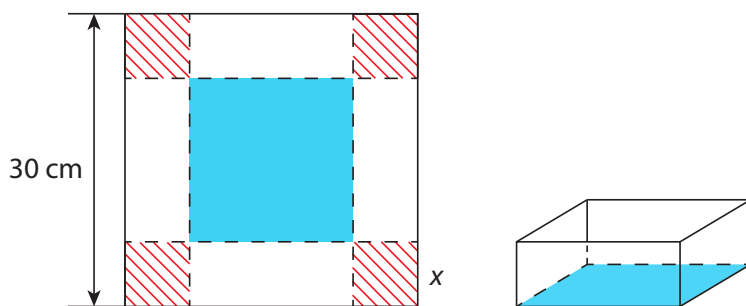
(Nguồn: James Stewart, J. (2015). *Calculus*. Cengage Learning 8th edition, p.284)

Tìm nhiệt độ $T_0 \in (0; 30)$ để kể từ nhiệt độ T_0 trở lên thì thể tích V tăng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

1.8. Một công ty tiến hành khai thác 17 giếng dầu trong khu vực được chỉ định. Trung bình mỗi giếng dầu chiết xuất được 245 thùng dầu mỗi ngày. Công ty có thể khai thác nhiều hơn 17 giếng dầu nhưng cứ khai thác thêm một giếng thì lượng dầu mỗi giếng chiết xuất được hằng ngày sẽ giảm 9 thùng. Để giám đốc công ty có thể quyết định số giếng cần thêm cho phù hợp với tài chính, hãy chỉ ra số giếng công ty có thể khai thác thêm để sản lượng dầu chiết xuất tăng lên.



Khởi động: Trong một trò chơi, mỗi đội được phát một tấm bìa hình vuông có cạnh bằng 30 cm. Nhiệm vụ của mỗi đội chơi là cắt ở bốn góc của tấm bìa này bốn hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm bìa lại (Hình 1.6) và dán keo để được một cái hộp không nắp có dạng hình hộp chữ nhật. Đội nào thiết kế được hộp có thể tích lớn nhất sẽ giành chiến thắng. Hãy xác định cạnh của các hình vuông bị cắt để thu được hộp có thể tích lớn nhất.



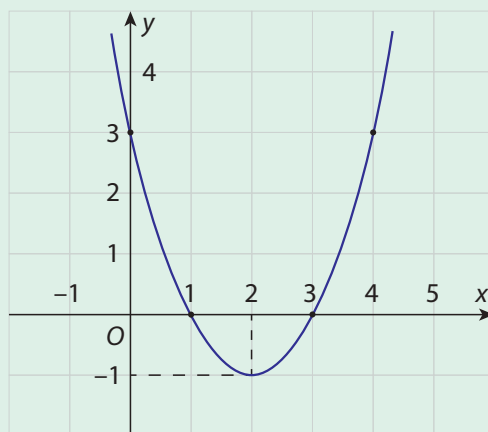
Hình 1.6

I Định nghĩa

HOẠT ĐỘNG 1

Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị như Hình 1.7.

- Tìm tọa độ điểm thấp nhất của đồ thị hàm số $f(x)$ đã cho.
- Khi x thay đổi trên đoạn $[1; 4]$, tìm $x_0 \in [1; 4]$ để $f(x_0)$ là giá trị lớn nhất.



Hình 1.7

ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

- Số M được gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \leq M$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$, kí hiệu $M = \max_D f(x)$.
- Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \geq m$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$, kí hiệu $m = \min_D f(x)$.

Lưu ý:

- Khi tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của một hàm số mà không yêu cầu trên tập nào thì ta mặc định tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số đó trên tập xác định của nó.
- Việc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số có thể thực hiện bằng cách sử dụng bảng biến thiên của hàm số.

VÍ DỤ 1

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = x + \frac{1}{x} - 7$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Giải

Trên khoảng $(0; +\infty)$, ta có $y' = f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (do $x \in (0; +\infty)$).

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{1}{x} - 7 \right) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} - 7 \right) = +\infty.$$

Bảng biến thiên:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$	$+\infty$	-5	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có $f(x) \geq -5, \forall x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = -5$.

Suy ra trên khoảng $(0; +\infty)$, hàm số có giá trị nhỏ nhất là -5 tại $x = 1$.

Hàm số $f(x)$ không có giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; +\infty)$.

LUYỆN TẬP 1

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ trên nửa khoảng $[-1; 4)$.

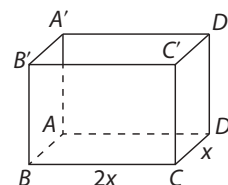
VÍ DỤ 2

Ông Nam cần xây dựng một bể chứa nước có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp đậy để phục vụ cho việc tưới cây trong vườn. Do các điều kiện về diện tích vườn, ông Nam cần bể có thể tích là 36 m^3 , đáy bể có chiều dài gấp hai lần chiều rộng và chiều rộng không quá 4 m , biết rằng chi phí vật liệu xây dựng mỗi mét vuông diện tích bề mặt là như nhau. Hỏi chiều cao bể nước bằng bao nhiêu để tổng chi phí vật liệu là nhỏ nhất?

Giải

Xem bể chứa có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ như Hình 1.8.

Gọi x (m) là chiều rộng của bể, ta có $0 < x \leq 4$.



Hình 1.8

Chiều dài của bể là $2x$ (m).

Gọi h (m) là chiều cao bể nước, ta có thể tích của bể là $V = x \cdot (2x) \cdot h$.

$$\text{Suy ra } h = \frac{V}{2x^2} = \frac{36}{2x^2} = \frac{18}{x^2} \text{ (m)}.$$

Tổng diện tích các mặt cần xây là:

$$\begin{aligned} S &= S_{ABCD} + 2.S_{ABB'A'} + 2.S_{BCC'B'} \\ &= 2x^2 + 2.x \cdot \frac{18}{x^2} + 2.2x \cdot \frac{18}{x^2} = 2x^2 + \frac{108}{x}. \end{aligned}$$

Xét hàm số $S(x) = 2x^2 + \frac{108}{x}$ ($0 < x \leq 4$), ta có:

$$S'(x) = 4x - \frac{108}{x^2} = \frac{4x^3 - 108}{x^2} = \frac{4(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{x^2}.$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Do $x^2 > 0$ và $x^2 + 3x + 9 > 0$ khi $x \in (0; 4]$ nên dấu của $S'(x)$ trên $(0; 4]$ phụ thuộc dấu của biểu thức $x - 3$.

Bảng biến thiên:

x	0	3	4
$S'(x)$	–	0	+
$S(x)$			

Chi phí vật liệu xây dựng thấp nhất khi tổng diện tích các mặt cần xây $S(x)$ là nhỏ nhất.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $S(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 3$, suy ra $h = 2$.

Vậy cần xây bể có chiều cao là 2 (m).

LUYỆN TẬP 2

Giải quyết bài toán về trò chơi ở phần Khởi động.

II Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn

HOẠT ĐỘNG 2

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$.

- Xét tính liên tục của hàm số đã cho trên mỗi đoạn $[-5; -1]$, $[-4; 3]$.
- Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên các đoạn $[-5; -1]$ và $[-4; 3]$.

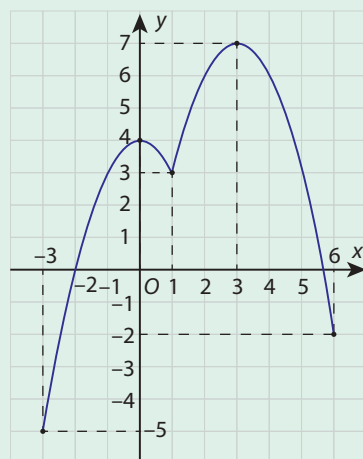
Nhận xét:

Mọi hàm số liên tục trên một đoạn đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

HOẠT ĐỘNG 3

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 6]$, có đạo hàm trên các khoảng $(-3; 1)$ và $(1; 6)$ có đồ thị như Hình 1.9, biết rằng $f(-3) = -5$ và $f(6) = -2$.

- Xác định các điểm cực trị thuộc đoạn $[-3; 6]$ của hàm số $f(x)$.
- Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-3; 6]$.



Hình 1.9

Nhận xét:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$:

- Nếu đạo hàm $f'(x)$ giữ nguyên dấu trên đoạn $[a; b]$ thì hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên đoạn $[a; b]$. Do đó $f(x)$ đạt được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất tại các đầu mút a, b của đoạn.
- Nếu chỉ có một số hữu hạn $x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_k$ (với k nguyên dương) mà $f'(x_i) = 0$ hoặc $f'(x_i)$ không tồn tại thì hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên mỗi khoảng (x_i, x_{i+1}) . Rõ ràng giá trị lớn nhất (tương ứng giá trị nhỏ nhất) của hàm số trên đoạn $[a; b]$ là số lớn nhất (tương ứng số nhỏ nhất) trong các giá trị của hàm số tại hai đầu mút a, b và tại các điểm x_i nói trên.

Từ đó, ta có quy tắc sau để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$:



Bước 1 Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ thuộc khoảng $(a; b)$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không tồn tại.

Bước 2 Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$.

Bước 3 Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số ở Bước 2. Ta có:

$$M = \max_{[a; b]} f(x); m = \min_{[a; b]} f(x).$$

VÍ DỤ 3

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ trên đoạn $[0; 5]$.

Giải

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin (0; 5) \\ x = 3 \in (0; 5). \end{cases}$$

Ta có $f(0) = 5; f(5) = 10; f(3) = -22$.

Vậy $\max_{[0; 5]} f(x) = 10, \min_{[0; 5]} f(x) = -22$.

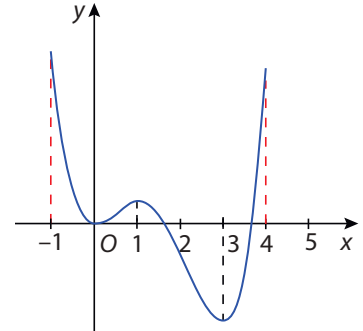
LUYỆN TẬP 3

Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ trên đoạn $[2; 4]$.

BÀI TẬP

1.9. Cho hàm số $y = f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ có một phần đồ thị như Hình 1.10. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên:

- Nửa khoảng $(-1; 4]$;
- Đoạn $[-1; 1]$.

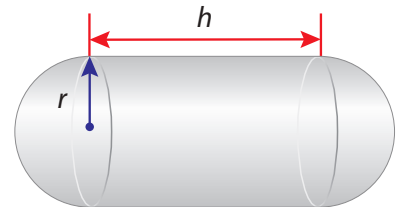


Hình 1.10

1.10. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

- $y = f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 4$ trên đoạn $[-4; 1]$;
- $y = f(x) = x + \frac{1}{x} - 2$ trên khoảng $(-\infty; 0)$;
- $y = f(x) = \frac{x-2}{2x-3}$ trên nửa khoảng $[2; 6)$;
- $y = f(x) = \sqrt{4-x^2}$;
- $y = f(x) = e^x - x$ trên đoạn $[-1; 2]$;
- $y = f(x) = x \ln x$ trên đoạn $[e^{-2}; e]$.

1.11. Một thùng chứa nhiên liệu gồm phần ở giữa là một hình trụ có chiều dài h mét ($h > 0$) và hai đầu là các nửa hình cầu bán kính r ($r > 0$) (Hình 1.11). Biết rằng thể tích của thùng chứa là $144\,000\pi \text{ m}^3$. Để sơn mặt ngoài của phần hình cầu cần 20 000 đồng cho 1 m^2 , còn sơn mặt ngoài cho phần hình trụ cần 10 000 đồng cho 1 m^2 . Xác định r để chi phí cho việc sơn diện tích mặt ngoài thùng chứa (bao gồm diện tích xung quanh hình trụ và diện tích hai nửa hình cầu) là nhỏ nhất, biết rằng bán kính r không được vượt quá 50 m.



Hình 1.11

1.12. Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi bằng 18 cm, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

1.13. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe X với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang bán chạy này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi theo đó, giá bán mới là bao nhiêu thì lợi nhuận thu được cao nhất?

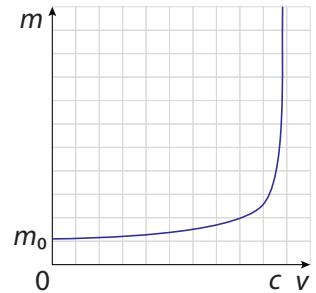
ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Khởi động: Trong thuyết tương đối Einstein, khối lượng của vật chuyển động với vận tốc v được cho bởi công thức:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

trong đó m_0 là khối lượng của vật khi nó đứng yên, c là vận tốc ánh sáng (nguồn: <https://www.britannica.com/science/relativity/Relativistic-mass>).

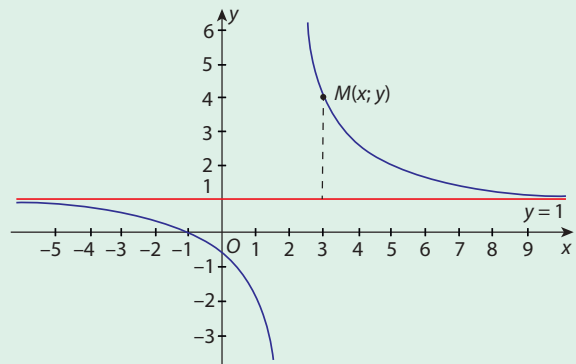
Xem m là hàm số theo vận tốc v . Khi vật chuyển động với vận tốc càng gần vận tốc ánh sáng thì khối lượng của vật thay đổi như thế nào?



I Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

HOẠT ĐỘNG 1

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ có đồ thị (C) là đường cong (Hình 1.12). Nêu nhận xét về khoảng cách từ điểm $M(x; y) \in (C)$ tới đường thẳng $y = 1$ khi $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$.



Hình 1.12

ĐỊNH NGHĨA

Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là **đường tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

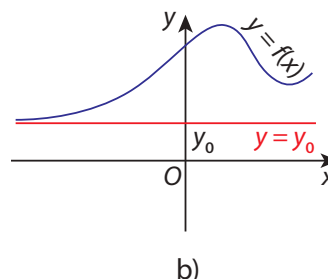
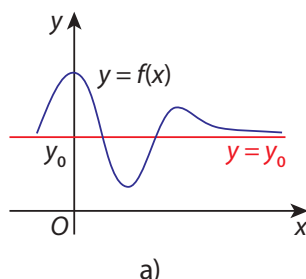
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0.$$

Ghi chú:

Hình 1.13a là hình ảnh đường tiệm cận ngang $y = y_0$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow +\infty$.

Hình 1.13b là hình ảnh đường tiệm cận ngang $y = y_0$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow -\infty$.



Hình 1.13

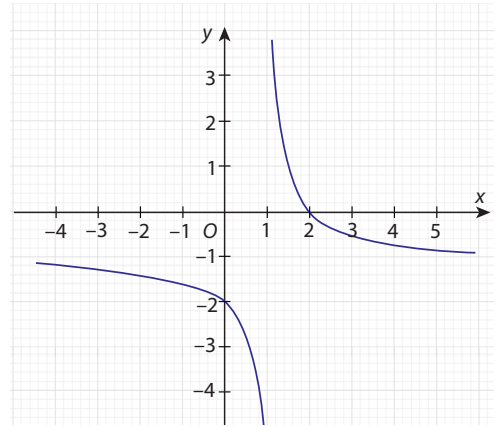
VÍ DỤ 1

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{x-1} - 1$ có đồ thị (C) như Hình 1.14. Chứng minh rằng đường thẳng $y = -1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho và vẽ đường tiệm cận ngang này trên cùng mặt phẳng tọa độ với (C).

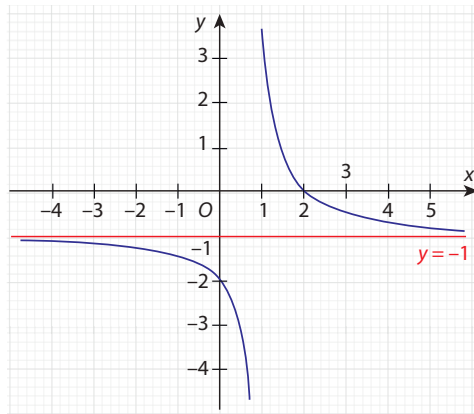
Giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x-1} - 1 \right) = -1$ nên đường thẳng $y = -1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Hình ảnh đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng $y = -1$.



Hình 1.14

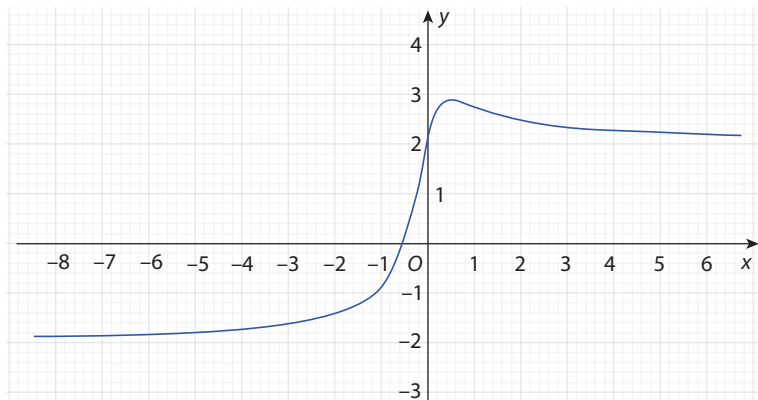


Hình 1.15

LUYỆN TẬP 1

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{4x+2}{\sqrt{4x^2+1}}$ có đồ thị như Hình 1.16.

- Tìm các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ (nếu có).
- Vẽ các đường tiệm cận ngang vừa tìm được ở câu a.



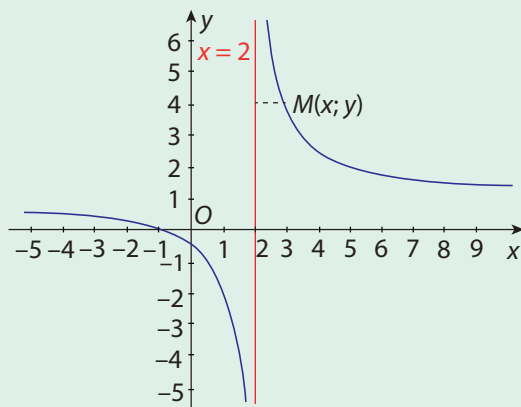
Hình 1.16

II Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

HOẠT ĐỘNG 2

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ có đồ thị (C) như Hình 1.17.

- Nêu nhận xét về khoảng cách từ điểm $M(x; y) \in (C)$ đến đường thẳng $x = 2$ khi $x \rightarrow 2$.
- Tính các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.



Hình 1.17

ĐỊNH NGHĨA

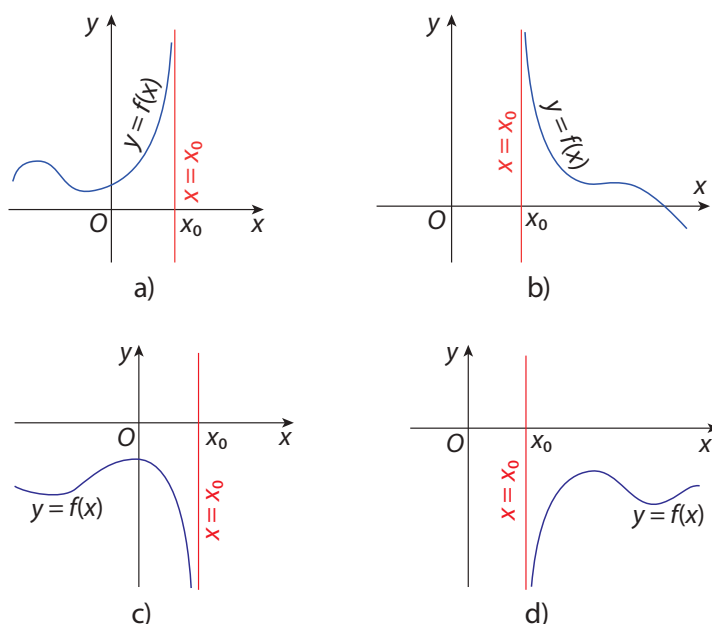
Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty.$$

Ghi chú:

Hình 1.18a và Hình 1.18c là hình ảnh đường tiệm cận đứng $x = x_0$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0^-$.

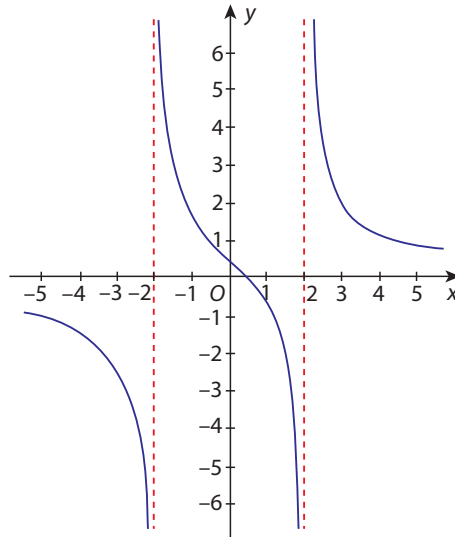
Hình 1.18b và Hình 1.18d là hình ảnh đường tiệm cận đứng $x = x_0$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0^+$.



Hình 1.18

VÍ DỤ 2

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2-4x}{4-x^2}$ có đồ thị là đường cong như Hình 1.19. Các đường thẳng $x = 2$ và $x = -2$ có phải là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho hay không? Vì sao?



Hình 1.19

Giải

Ta có:

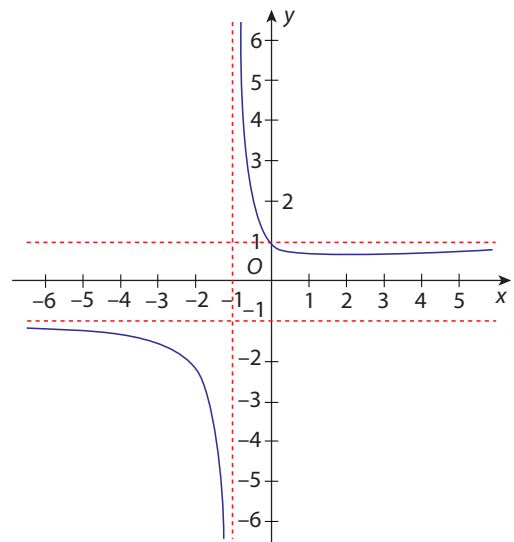
$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-4x}{4-x^2} = +\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-4x}{4-x^2} = -\infty$ nên đường thẳng $x = 2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Tương tự:

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2-4x}{4-x^2} = +\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2-4x}{4-x^2} = -\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị $y = f(x)$ đã cho.

LUYỆN TẬP 2

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ có đồ thị là đường cong như Hình 1.20. Hãy xác định các đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

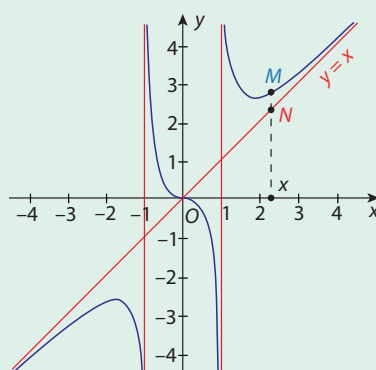


Hình 1.20

III Đường tiệm cận của đồ thị hàm số

HOẠT ĐỘNG 3

Trong Hình 1.21, đường cong là đồ thị (C) của hàm số $y = f(x) = x + \frac{x}{x^2 - 1}$ và đường thẳng $\Delta: y = x$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm thuộc (C) và Δ có cùng hoành độ x, với $x > 1$ hoặc $x < -1$. Nhận xét về độ dài của đoạn MN khi $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$.



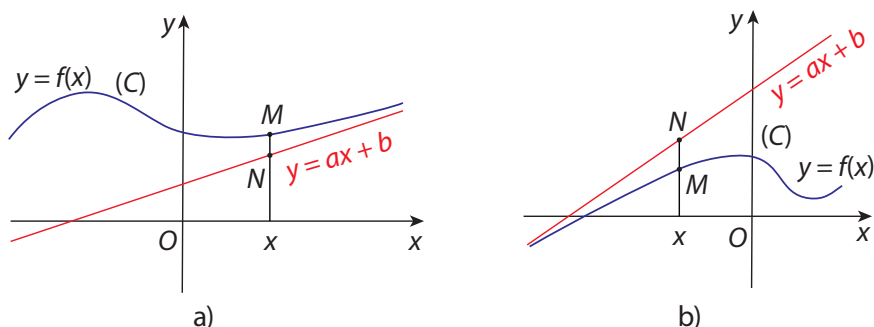
Hình 1.21

ĐỊNH NGHĨA

Đường thẳng $y = ax + b$, $a \neq 0$, được gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

Ghi chú:

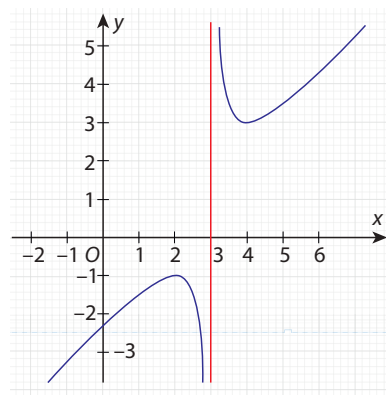
Hình 1.22a là hình ảnh đường tiệm cận xiên $y = ax + b$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow +\infty$.
Hình 1.22b là hình ảnh đường tiệm cận xiên $y = ax + b$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow -\infty$.



Hình 1.22

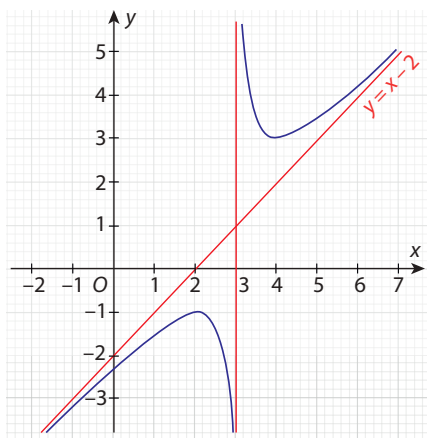
VÍ DỤ 3

Đường cong ở Hình 1.23 là đồ thị (C) của hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$. Chứng minh rằng đường thẳng $\Delta: y = x - 2$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Vẽ Δ lên cùng hệ trục tọa độ với (C).



Hình 1.23

Giải



Hình 1.24

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 5x + 7}{x - 3} - (x - 2) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x - 3} \right) = 0.\end{aligned}$$

Suy ra đường thẳng $y = x - 2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Hình ảnh của đường thẳng $\Delta: y = x - 2$ như Hình 1.24.

Ghi chú:

Để xác định các hệ số a, b trong phương trình của đường tiệm cận xiên, ta có thể áp dụng các công thức sau: $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$; $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$ hoặc $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$; $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$ (khi $a = 0$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận ngang).

Hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu) luôn được viết dưới dạng $y = px + q + \frac{r}{mx + n}$ ($p, q, r \in \mathbb{R}$). Khi đó, đồ thị của hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = -\frac{n}{m}$ và đường tiệm cận xiên là $y = px + q$.

LUYỆN TẬP 3

Sử dụng Ghi chú ở trên, tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{-x^2 - 3x - 3}{x + 1}$.

VẬN DỤNG 1

Trong phần Khởi động đầu bài, tìm đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

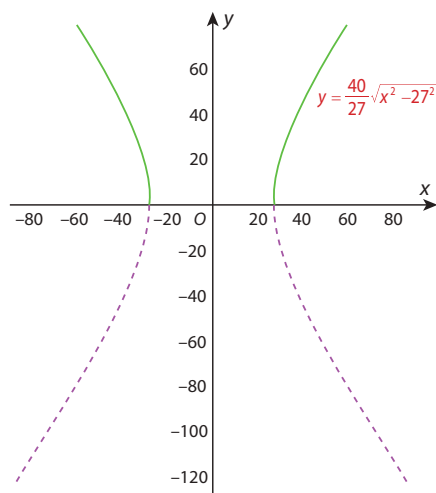
từ đó nhận xét khối lượng của vật khi vận tốc của nó càng gần với vận tốc ánh sáng.

VẬN DỤNG 2

Một ống khói của nhà máy điện hạt nhân có mặt cắt là một hypebol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{27^2} - \frac{y^2}{40^2} = 1$ (Hình 1.25). Xét hai nhánh bên trên Ox của (H) là đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{40}{27}\sqrt{x^2 - 27^2}$ (phần nét liền đậm). Chứng minh rằng đường thẳng $y = \frac{40}{27}x$ là một đường tiệm cận xiên của (C). Hãy chỉ ra thêm một đường tiệm cận xiên khác của (C).

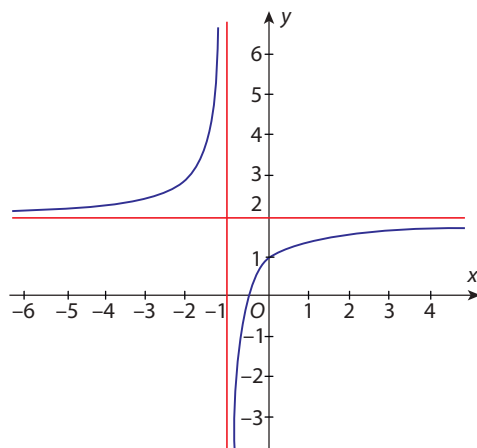


Hình 1.25



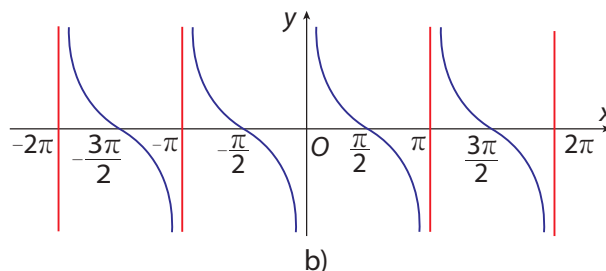
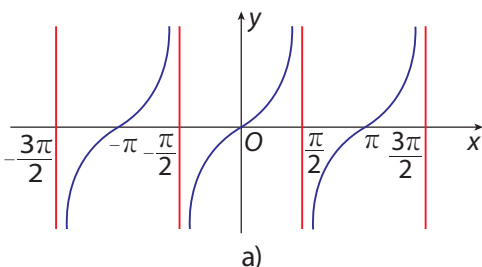
BÀI TẬP

- 1.14.** Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị là đường cong như Hình 1.26. Xác định phương trình đường tiệm cận đứng, đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.



Hình 1.26

- 1.15.** Xác định các đường tiệm cận đứng của đồ thị các hàm số $y = \tan x$ (Hình 1.27a) và $y = \cot x$ (Hình 1.27b).



Hình 1.27

1.16. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị mỗi hàm số sau:

a) $y = x^3 - 2x^2 + x - 9$;

b) $y = \frac{x-5}{4x+2}$;

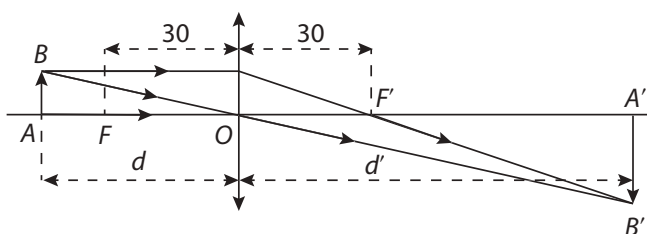
c) $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{2x + 1}$;

d) $y = 2x - 1 + \frac{3}{x+1}$.

1.17. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự $f = 30$ cm như Hình 1.28. Trong Vật lí, ta biết rằng nếu đặt vật thật AB cách quang tâm O của thấu kính một khoảng d (cm) lớn hơn 30 cm thì được ảnh thật $A'B'$ cách quang tâm của thấu kính một khoảng d' (cm). Ngược lại, nếu $0 < d < 30$ thì ta có ảnh ảo. Công thức của thấu kính là $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$.

a) Từ công thức thấu kính, tìm biểu thức xác định d' theo d .

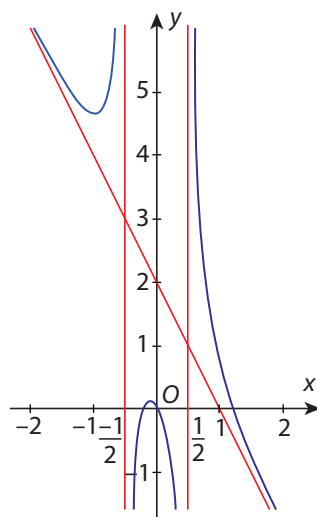
b) Xem biểu thức của d' ở câu a là một hàm số theo d , kí hiệu là $h(d)$. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $h(d)$.



Hình 1.28

1.18. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ và

có đồ thị là các phần đường cong như Hình 1.29. Xác định phương trình đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang và tiệm cận xiên (nếu có) của đồ thị hàm số đã cho.



Hình 1.29

1.19. Tại một công ty sản xuất đồ chơi A, công ty phải chi 50 000 USD để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi A, công ty phải trả 5 USD cho nguyên liệu thô và nhân công. Gọi x ($x \geq 1$) là số đồ chơi A mà công ty đã sản xuất và $T(x)$ (đơn vị USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi A. Người ta xác định chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi A là $M(x) = \frac{T(x)}{x}$.

a) Xem $M(x)$ là hàm số theo x xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số này.

b) Nêu nhận xét về chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi A khi x đủ lớn.

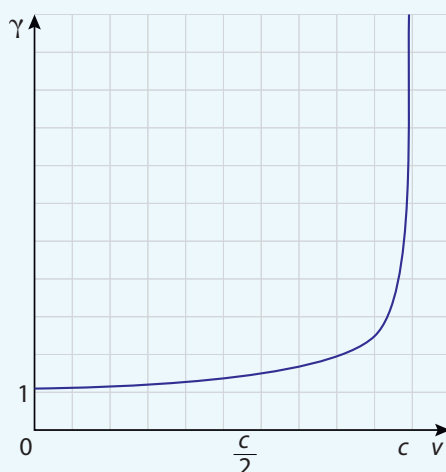
? EM CÓ BIẾT

Hệ số Lorentz (Lorentz factor) là một khái niệm quan trọng trong lĩnh vực Vật lí và được giới thiệu bởi nhà vật lí người Hà Lan – Hendrik Lorentz (1853 – 1928) vào cuối thế kỉ XIX. Hệ số Lorentz γ của một vật là một hàm số với biến là vận tốc v của vật đó và được xác định bởi công thức:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

trong đó c (đơn vị: m/s) là vận tốc ánh sáng trong chân không ($c \approx 3.10^8$ m/s).

Đồ thị của hàm số $\gamma = \gamma(v)$ (trục hoành mô tả vận tốc v , trục tung mô tả giá trị γ) như sau:



Ta có $\lim_{v \rightarrow c^-} \gamma = \lim_{v \rightarrow c^-} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = +\infty$ nên đường thẳng $v = c$ là một đường tiệm cận đứng của

đồ thị hàm số $\gamma = \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Hệ số Lorentz được tính toán dựa trên vận tốc của vật và tốc độ ánh sáng trong chân không. Khi vận tốc của vật tiến đến vận tốc ánh sáng, hệ số Lorentz tiến đến vô cùng. Điều này có nhiều ý nghĩa trong thuyết tương đối hẹp của Albert Einstein (1879 – 1955), chẳng hạn như công thức mô tả khối lượng của một vật di chuyển với vận tốc v là:

$$m = m_0 \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

trong đó m_0 là khối lượng của vật ở trạng thái nghỉ.

Ngoài ra, thừa số Lorentz còn có liên quan đến các khái niệm quan trọng trong thuyết tương đối hẹp như sự giãn nở thời gian (time dilation) và độ co chiều dài (contraction length).

(Nguồn: Kitaev, A. (2013). *Lorentz factor*. In *Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics* (pp. 825–827). Springer, New York, NY)

Khởi động: Một cửa hàng kinh doanh điện thoại di động đã kí hợp đồng với nơi sản xuất để nhập về 2 500 điện thoại trong một năm. Cửa hàng có thể nhập về tất cả số điện thoại này và bán dần, tuy nhiên như vậy sẽ tốn nhiều chi phí cho lưu kho, bảo quản và mặt bằng. Vì vậy họ được phép nhập về theo từng đợt, mỗi đợt đều nhập x chiếc điện thoại, sau đó sẽ lưu trữ ở kho hàng một nửa số điện thoại đó. Biết rằng kinh phí cho việc lưu trữ ở kho trong một năm là 100 000 đồng trên một chiếc điện thoại (chỉ tính trong đợt nhập đầu tiên), chi phí cho mỗi đợt nhập hàng (vận chuyển, giấy tờ, nhân công sắp xếp,...) cố định là 200 000 đồng và thêm 90 000 đồng trên mỗi điện thoại. Bằng cách xác định hàm số biểu thị sự phụ thuộc của tổng chi phí vào số điện thoại nhập trong mỗi đợt và khảo sát sự biến thiên của hàm số này, người ta có thể tìm được phương án nhập điện thoại để tổng chi phí là nhỏ nhất. Họ đã làm điều đó như thế nào?



I Sơ đồ khảo sát hàm số

HOẠT ĐỘNG 1

Cho hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$.

- Tập xác định của hàm số $f(x)$ là gì?
- Hàm số $f(x)$ đồng biến, nghịch biến trên các khoảng nào?
- Hàm số $f(x)$ đạt cực đại và cực tiểu tại những điểm nào?
- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận hay không?

CÁC BƯỚC ĐỂ KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bước 1 Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2 Xét sự biến thiên của hàm số:

- Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tiệm cận (nếu có);
- Lập bảng biến thiên của hàm số bao gồm: tìm đạo hàm của hàm số, xét dấu đạo hàm, mô tả chiều biến thiên và cực trị của hàm số (nếu có), điền đầy đủ các kết quả vào bảng;
- Dựa vào bảng, ta có kết luận về chiều biến thiên và cực trị.

Bước 3 Vẽ đồ thị hàm số:

- Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị (nếu có);
- Xác định thêm một số điểm đặc biệt của đồ thị, chẳng hạn tìm giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu đồ thị không cắt các trục tọa độ hoặc việc tìm tọa độ giao điểm phức tạp thì bỏ qua phần này);
- Dựa vào bảng biến thiên và các yếu tố xác định ở trên để vẽ đồ thị.



Ghi chú:

Trong bước vẽ đồ thị, ta nên xem xét đến tính đối xứng (tâm đối xứng, trục đối xứng) của đồ thị hàm số để vẽ chính xác hơn, nội dung này sẽ được đề cập đến trong các hàm số dưới đây.



Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

VÍ DỤ 1

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

Giải

• Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

• Sự biến thiên:

$$\text{– Giới hạn: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3} \right) \right] = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3} \right) \right] = -\infty.$$

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 - 6x;$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 2.$$

– Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y			4		0	$+\infty$

– Chiều biến thiên: Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

– Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $f_{\text{CD}} = f(0) = 4$;

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$, $f_{\text{CT}} = f(2) = 0$.

• Đồ thị:

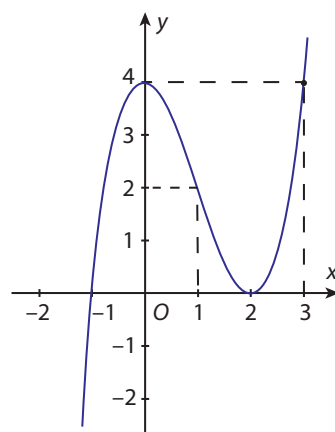
Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0; 4)$.

$$\text{Ta có } x^3 - 3x^2 + 4 = (x - 2)^2(x + 1) = 0$$

$\Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$, do đó đồ thị hàm số giao với trục Ox tại hai điểm là $(-1; 0)$ và $(2; 0)$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(3; 4)$ và có tâm đối xứng là điểm $I(1; 2)$.

Đồ thị hàm số được cho như Hình 1.30.



Hình 1.30

VÍ DỤ 2

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = -x^3 - 3x^2 - 4x - 2$.

Giải

• Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

• Sự biến thiên:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 - 3x^2 - 4x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(-1 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) \right] = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 - 3x^2 - 4x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(-1 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) \right] = +\infty.$$

Ta có $y' = -3x^2 - 6x - 4$.

Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm.

– Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$+\infty$
y'		–
y	$+\infty$	$-\infty$

– Chiều biến thiên: Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

– Cực trị: Hàm số không có cực trị.

• Đồ thị:

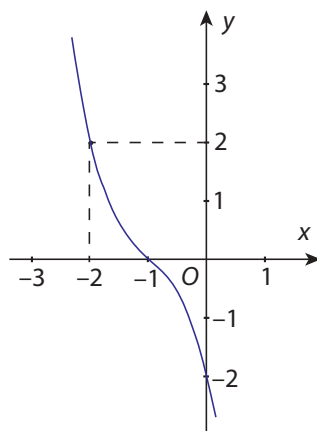
Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0; -2)$.

Ta có $-x^3 - 3x^2 - 4x - 2 = (x + 1)(-x^2 - 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = -1$,

do đó đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-1; 0)$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-2; 2)$ và có tâm đối xứng là điểm $I(-1; 0)$.

Đồ thị hàm số được cho như Hình 1.31.



Hình 1.31

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có **tâm đối xứng** là điểm $I(x_0; f(x_0))$, với x_0 là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ (tức là $x_0 = \frac{-b}{3a}$).

LUYỆN TẬP 1

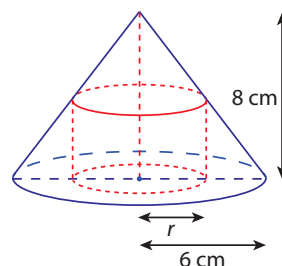
Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x - 3$;

b) $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$.

VẬN DỤNG 1

Một chi tiết máy có dạng khối nón với bán kính đáy là 6 cm và chiều cao là 8 cm. Người ta cần khoan từ đáy khối nón lên phía trên một khối trụ có bán kính đáy là r ($r > 0$) và có tâm của đáy trùng tâm của đáy khối nón như Hình 1.32. Xác định r sao cho phần thể tích khối trụ có được là lớn nhất.



Hình 1.32

III

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad-bc \neq 0$)

VÍ DỤ 3

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{-x+1}{x-2}$.

Giải

• Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

• Sự biến thiên:

– Giới hạn, tiệm cận:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x+1}{x-2} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x+1}{x-2} = +\infty.$$

Suy ra đường thẳng $x = 2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1}{x-2} = -1; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+1}{x-2} = -1.$$

Suy ra đường thẳng $y = -1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Ta có $y' = \frac{1}{(x-2)^2} > 0, \forall x \in D$; y' không xác định tại $x = 2$.

– Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		+		+	
y	-1	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	-1

– Chiều biến thiên: Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

– Cực trị: Hàm số không có cực trị.

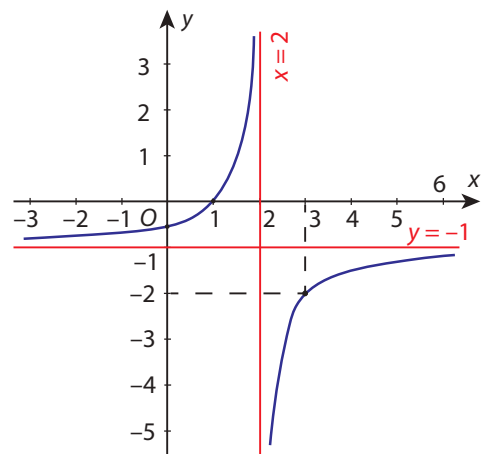
• Đồ thị:

– Vẽ các đường tiệm cận $x = 2$ và $y = -1$.

– Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0; -\frac{1}{2})$ và giao với trục Ox tại điểm $(1; 0)$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(3; -2)$, nhận giao điểm $I(2; -1)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

Đồ thị hàm số được cho như Hình 1.33.



Hình 1.33

Nhận xét:

Đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad-bc \neq 0$) có:

- **Tâm đối xứng** là giao điểm I của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang, nghĩa là $I(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c})$;
- Hai **trục đối xứng** là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận của nó.

LUYỆN TẬP 2

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{2x+4}{2x+1}$.

VẬN DỤNG 2

Ở một bể chứa nước có chứa 1 000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30 gam/lít vào bể nước với tốc độ là 25 lít/phút.

- Chứng minh rằng nồng độ muối của nước trong bể sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là $C(t) = \frac{30t}{40+t}$ (gam/lít).
- Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = C(t)$ sau 10 tiếng kể từ lúc bắt đầu bơm, từ đó nhận xét về nồng độ muối trong bể khi thời gian t càng lớn.

IV

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

VÍ DỤ 4

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$.

Giải

• Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

• Sự biến thiên:

– Giới hạn, tiệm cận:

$$\text{Ta có: } y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2} = x + 2 + \frac{1}{x + 2};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 2 + \frac{1}{x + 2} \right) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 2 + \frac{1}{x + 2} \right) = -\infty.$$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2} = +\infty; \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2} = -\infty.$$

Suy ra đường thẳng $x = -2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 2} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x + 2} = 0.$$

Suy ra đường thẳng $y = x + 2$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

– Bảng biến thiên:

$$\text{Ta có: } y' = 1 - \frac{1}{(x + 2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2};$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ hoặc } x = -1.$$

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$			
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$		
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$		
				$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

- Chiều biến thiên:
Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-1; +\infty)$;
Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-3; -2)$ và $(-2; -1)$.
- Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -3, f_{\text{CD}} = f(-3) = -2$;
Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -1, f_{\text{CT}} = f(-1) = 2$.

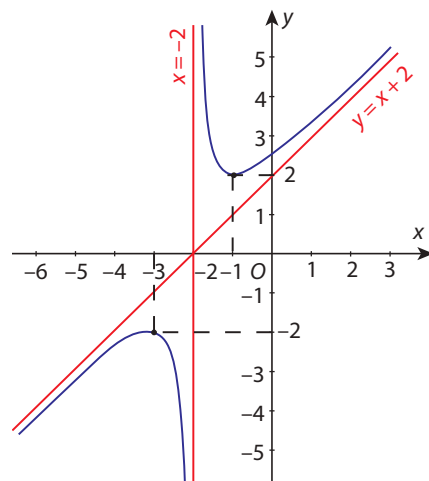
• Đồ thị:

Vẽ các đường tiệm cận $x = -2$ và $y = x + 2$.

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0; \frac{5}{2})$ và không giao với trục Ox .

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-2; 0)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

Đồ thị hàm số được cho như Hình 1.34.



Hình 1.34

VÍ DỤ 5

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{-x^2 - x + 2}{x + 1}$.

Giải

• Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

• Sự biến thiên:

– Giới hạn, tiệm cận:

Ta có: $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x + 1} = -x + \frac{2}{x + 1}$;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + \frac{2}{x + 1}\right) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x + \frac{2}{x + 1}\right) = +\infty.$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-x^2 - x + 2}{x + 1} = +\infty; \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x^2 - x + 2}{x + 1} = -\infty.$

Suy ra đường thẳng $x = -1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x + 1} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x + 1} = 0.$$

Suy ra đường thẳng $y = -x$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

– Bảng biến thiên:

Ta có $y' = -1 - \frac{2}{(x + 1)^2} = \frac{-x^2 - 2x - 3}{(x + 1)^2}$.

Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm, y' không xác định tại $x = -1$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$-$	$\parallel$	$-$
y	$+\infty \rightarrow -\infty$	$\parallel$	$+\infty \rightarrow -\infty$

- Chiều biến thiên: Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
- Cực trị: Hàm số không có cực trị.

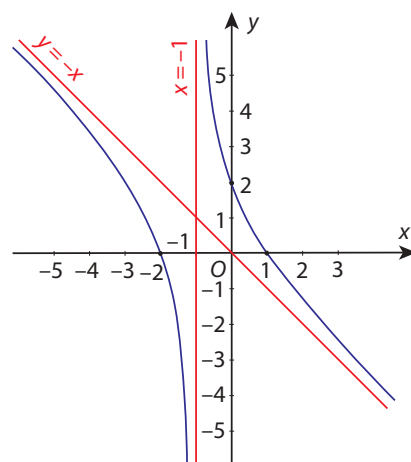
• Đồ thị:

Vẽ các đường tiệm cận $x = -1$ và $y = -x$.

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại $(0; 2)$ và giao với trục Ox tại $(-2; 0)$ và $(1; 0)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-1; 1)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

Đồ thị hàm số được cho như Hình 1.35.



Hình 1.35

Nhận xét:

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$ và đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

có **tâm đối xứng** là giao điểm I của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên, nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận của nó làm **trục đối xứng**.

LUYỆN TẬP 3

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau đây:

a) $y = \frac{-x^2 - 2x - 2}{x + 1};$

b) $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 2}.$

Vận dụng đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết một số vấn đề liên quan thực tiễn

Vận dụng đạo hàm và khảo sát sự biến thiên của hàm số, ta có thể giải quyết một số vấn đề liên quan đến thực tiễn cuộc sống, trong y học, kinh tế, kỹ thuật,...

VÍ DỤ 6

Khi một vật lạ mắc kẹt trong khí quản khiến ta phải ho, cơ hoành đẩy lên trên gây ra tăng áp lực trong phổi, theo đó cuống họng co thắt làm hẹp khí quản khiến không khí đi qua mạnh hơn. Đối với một lượng không khí bị đẩy ra trong một khoảng thời gian cố định, khí quản càng nhỏ thì luồng không khí càng đẩy ra nhanh hơn. Vận tốc luồng khí thoát ra càng cao, lực tác động lên vật lạ càng lớn. Qua nghiên cứu một số trường hợp, người ta nhận thấy vận tốc v của luồng khí liên hệ với bán kính x của khí quản theo công thức:

$$v(x) = k(x_0 - x)x^2 \text{ với } \frac{1}{2}x_0 \leq x \leq x_0,$$

trong đó k là hằng số ($k > 0$) và x_0 là bán kính khí quản ở trạng thái bình thường. Tìm x theo x_0 để vận tốc của luồng khí một cơn ho trong trường hợp này là lớn nhất.

(Nguồn: James Stewart, J. (2015). *Calculus*. Cengage Learning 8th edition, p.285)

Giải

Xét hàm số $f(x) = (x_0 - x)x^2$ với x_0 cố định và $\frac{1}{2}x_0 \leq x \leq x_0$.

Do k là hằng số nên vận tốc của luồng khí một cơn ho lớn nhất khi $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $f(x) = -x^3 + x_0x^2$;

$$f'(x) = -3x^2 + 2x_0x;$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \frac{2}{3}x_0.$$

Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{2}x_0$	$\frac{2}{3}x_0$	x_0
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f(\frac{1}{2}x_0)$	$f(\frac{2}{3}x_0)$	$f(x_0)$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\max_{[\frac{1}{2}x_0, x_0]} f(x) = f(\frac{2}{3}x_0)$.

Vậy vận tốc của luồng khí một cơn ho lớn nhất khi $x = \frac{2}{3}x_0$.

VÍ DỤ 7

Giả sử chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,...) được cho bởi công thức:

$$C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 10\,000,$$

trong đó $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng.

a) Tính tổng chi phí $T(x)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí.

b) Tỷ số $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Tính $M(x)$ theo x và tìm số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình là thấp nhất, biết rằng nhu cầu hiện tại xuất bản không quá 30 000 cuốn. Khi đó chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí là bao nhiêu?

Giải

a) Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng, tức là 0,4 vạn đồng.

Suy ra chi phí phát hành cho x cuốn là $0,4x$ (vạn đồng).

Theo đề bài, ta có tổng chi phí xuất bản và phát hành cho x cuốn tạp chí là:

$$T(x) = C(x) + 0,4x = 0,0001x^2 + 0,2x + 10\,000, \text{ với } x > 0.$$

b) Ta có $M(x) = \frac{T(x)}{x} = 0,0001x + 0,2 + \frac{10\,000}{x}$.

Xét hàm số $f(x) = 0,0001x + 0,2 + \frac{10\,000}{x}$, với $0 < x \leq 30\,000$.

$$f'(x) = 0,0001 - \frac{10\,000}{x^2} = \frac{0,0001x^2 - 10\,000}{x^2};$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10\,000 \text{ (do } x > 0\text{)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

Bảng biến thiên:

x	0	10 000	30 000	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(10\,000)$	$f(30\,000)$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị của $M(x)$ nhỏ nhất khi $x = 10\,000$.

Vậy số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình thấp nhất là $x = 10\,000$ (cuốn).

Chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản 10 000 cuốn là:

$$M(10\,000) = 2,2 \text{ (vạn đồng)} = 22\,000 \text{ (đồng)}.$$

VÍ DỤ 8

Anh Nam có một mảnh đất rộng và muốn dành ra một khu đất hình chữ nhật có diện tích 200 m^2 để trồng vài loại cây mới. Anh dự kiến rào quanh ba cạnh của khu đất hình chữ nhật này bằng lưới thép, cạnh còn lại (chiều dài) sẽ tận dụng bức tường có sẵn (Hình 1.36). Do điều kiện địa lí, chiều rộng khu đất không vượt quá 15 m , hỏi chiều rộng của khu đất này bằng bao nhiêu để tổng chiều dài lưới thép cần dùng là ngắn nhất (nghĩa là chi phí rào lưới thép thấp nhất)?



Hình 1.36

Giải

Gọi $x \text{ (m)}$ là chiều rộng của khu đất hình chữ nhật cần rào.

Theo đề bài, ta có $0 < x \leq 15$.

Diện tích khu đất này là $200 \text{ (m}^2\text{)}$ nên chiều dài của khu đất là $\frac{200}{x} \text{ (m)}$.

Tổng chiều dài lưới thép rào quanh khu đất là $L(x) = 2x + \frac{200}{x}$ (m).

Xét hàm số: $L(x) = 2x + \frac{200}{x}$, với $x \in (0; 15]$.

Ta có: $L'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2}$;

$L'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$ (do $x > 0$).

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2x + \frac{200}{x} \right) = +\infty$;

$L(10) = 40$;

$L(15) = \frac{130}{3}$.

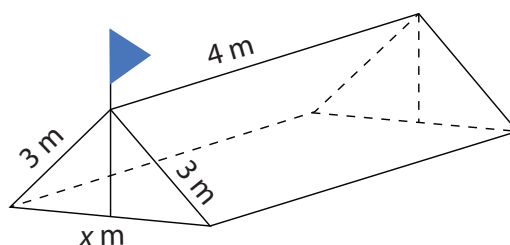
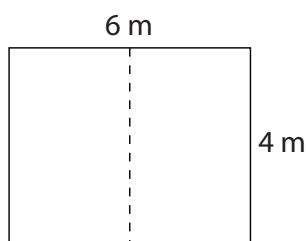
Bảng biến thiên:

x	0	10	15
$L'(x)$	-	0	+
$L(x)$	$+\infty$	40	$\frac{130}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên, chiều dài lưới thép ngắn nhất là 40 m khi chiều rộng khu đất này là $x = 10$ (m) (và chiều dài là $\frac{200}{10} = 20$ (m)).

LUYỆN TẬP 4

Trong đợt chào mừng kỉ niệm ngày 26 tháng 3, trường X có tổ chức cho các lớp bày các gian hàng tại sân trường. Để có thể che nắng, chứa đồ đạc trong quá trình tham gia hoạt động, một lớp đã nghĩ ra ý tưởng như sau: Dựng trên mặt đất bằng phẳng một chiếc lều từ một tấm bạt hình chữ nhật có chiều rộng là 4 m và chiều dài là 6 m, bằng cách gập đôi tấm bạt lại theo đoạn nối trung điểm hai cạnh là chiều dài của tấm bạt, hai mép chiều rộng còn lại của tấm bạt sát đất và cách nhau x (m) (Hình 1.37). Tìm x để khoảng không gian phía trong lều là lớn nhất.



Hình 1.37

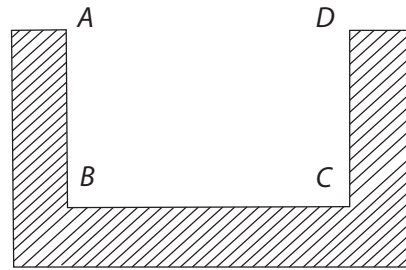
LUYỆN TẬP 5

Hình 1.38a là một mương dẫn nước thủy lợi tại một địa phương. Phần không gian trong mương để nước chảy có mặt cắt ngang là một hình chữ nhật $ABCD$ (Hình 1.36b). Với điều kiện lưu lượng nước qua mương cho phép ở đây thì diện tích mặt cắt $ABCD$ là $1,2 \text{ m}^2$. Để đảm bảo yêu cầu kĩ thuật tốt nhất cho mương, người ta cần thiết kế sao cho tổng độ dài $AB + BC + CD$ là ngắn nhất.

- Đặt $BC = x$, tính $y = AB + BC + CD$ theo x .
- Khảo sát hàm số $y = f(x)$ tìm được ở câu a, từ đó tính x để y nhỏ nhất, biết rằng theo quy định thì đoạn BC (chiều rộng đáy mương) phải dưới 10 m .



a)



b)

Hình 1.38

VẬN DỤNG 3

Trở lại phần Khởi động đầu bài.

- Lập công thức hàm số tổng chi phí lưu kho và nhập hàng, khảo sát sự biến thiên của hàm số này.
- Tìm số đợt nhập và số điện thoại nhập trong mỗi đợt để tổng chi phí của câu a là nhỏ nhất.

BÀI TẬP

1.20. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

- $y = x^3 + 3x^2 - 4$;
- $y = x^3 + 4x^2 + 4x$;
- $y = -2x^3 + 2$;
- $y = -x^3 - x^2 - x + 1$.

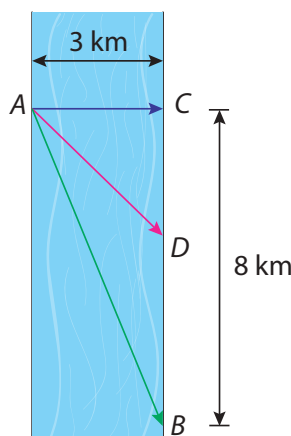
1.21. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

- $y = \frac{x-2}{2x+1}$;
- $y = \frac{1-2x}{2x+4}$.

1.22. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

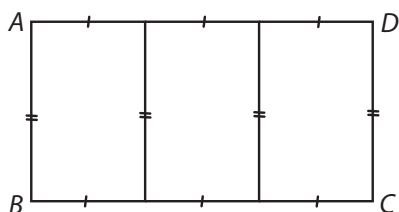
- $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$;
- $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 2}$;
- $y = -x - 1 + \frac{1}{x + 1}$;
- $y = \frac{2x^2 - x + 1}{1 - x}$.

- 1.23.** Một người chèo thuyền từ điểm A trên bờ một con sông thẳng, rộng 3 km và muốn đến điểm B , cách bờ đối diện 8 km về phía hạ lưu, càng nhanh càng tốt như Hình 1.39. Người ấy có thể chèo thuyền qua sông đến điểm C rồi chạy bộ đến B , hoặc anh ta có thể chèo thẳng đến B , hoặc có thể chèo thuyền đến điểm D nào đó giữa C và B rồi chạy bộ đến B . Biết rằng tốc độ chèo thuyền của người này là 6 km/h và tốc độ chạy bộ là 8 km/h. Tìm thời gian ngắn nhất mà người này có thể đi từ A đến B (bỏ qua vận tốc của nước và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



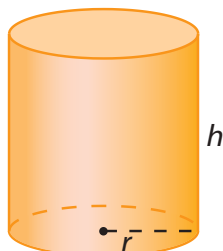
Hình 1.39

- 1.24.** Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = -t^3 + 2t^2 - t$, với t (đơn vị: giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (đơn vị: mét) là quãng đường chất điểm di chuyển được trong khoảng thời gian đó.
- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $s = s(t)$ trên hệ trục tọa độ tOs .
 - Trong khoảng thời gian 2 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, chất điểm đạt được vận tốc lớn nhất là bao nhiêu?
- 1.25.** Người ta cần rào một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích là 600 m^2 . Trên mảnh đất này, người ta chia làm ba miếng đất hình chữ nhật có diện tích bằng nhau (Hình 1.40). Giá tiền để xây dựng hàng rào bên trong và bao bên ngoài là 60 000 đồng mỗi mét, biết rằng chiều dài hình chữ nhật $ABCD$ không vượt quá 60 m. Tìm chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật $ABCD$ sao cho chi phí xây dựng hàng rào là thấp nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình 1.40

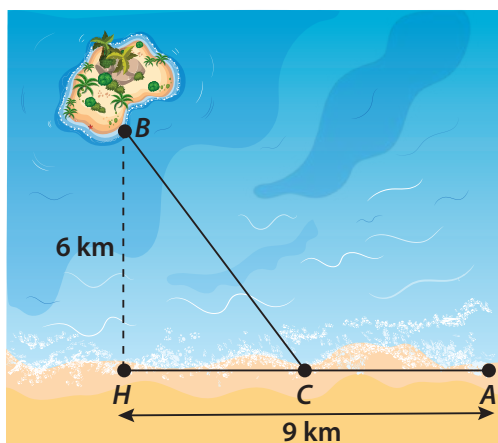
- 1.26.** Người ta cần thiết kế một cái lon có dạng hình trụ có thể tích là 1 lít (Hình 1.41). Tính tỉ lệ chiều cao và bán kính đáy hình trụ này để tổng chi phí làm vỏ lon (bao gồm cả hai đáy) là nhỏ nhất.



Hình 1.41

- 1.27.** Trong Vật lí, điện trở tương đương R_{td} của hai điện trở R_1, R_2 mắc song song được xác định bởi công thức $\frac{1}{R_{td}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, biết rằng $R_2 = 3 (\Omega)$. Đặt $R_1 = x (\Omega), x > 0$.
- Tính R_{td} theo x , xem biểu thức tính được này là một hàm số $y = f(x)$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $f(x)$ với $x > 0$.
 - Khi x tăng, điện trở R_{td} thay đổi như thế nào? R_{td} không thể vượt qua giá trị bao nhiêu?

- 1.28.** Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ vị trí A trên bờ biển đến vị trí B trên hòn đảo. Khoảng cách từ điểm B đến bờ biển là $BH = 6$ km (Hình 1.42). Giá tiền để xây dựng đường ống trên bờ là 50 000 USD mỗi kilômét và giá tiền xây dựng đường ống trên biển là 130 000 USD mỗi kilômét, biết rằng $AH = 9$ km. Xác định vị trí điểm C trên đoạn AH để khi lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ACB thì chi phí công ty bỏ ra là thấp nhất.



Hình 1.42

Đường cong spline

Hàm số đa thức nói chung và hàm số bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) nói riêng có nhiều ứng dụng trong Toán học, thực tiễn và Khoa học máy tính, một trong số đó là các spline (tạm dịch tiếng Việt là đường lượn sóng).

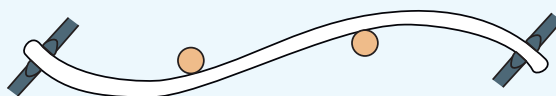
Đường cong spline trong Toán học được tạo ra bằng cách nối phần đồ thị các hàm đa thức với nhau, thông thường là các phần đồ thị hàm đa thức bậc ba được kết nối với nhau bởi một tập hợp các điểm cho trước, các đường cong spline được tạo ra là một đường liên tục và đảm bảo độ cong cần thiết.

Chẳng hạn, đường ray của tàu lượn siêu tốc là một dạng đường cong spline được thiết kế với độ cong thay đổi linh hoạt, thú vị và đáp ứng một số tiêu chí về an toàn (nguồn: J. R. McKilligan & T. J. Allen. *The Mathematics of Coaster Design*. American Scientist 88, November 2000, pp.480–487) (Hình 1.43).



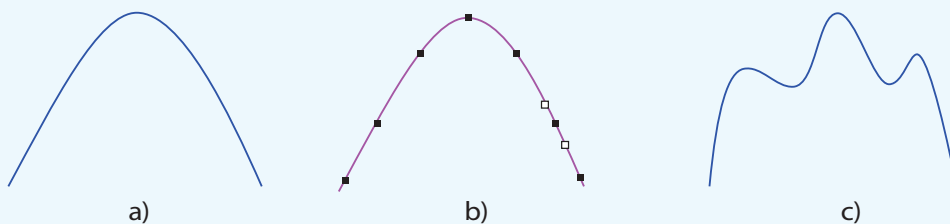
Hình 1.43

Thuật ngữ "spline" xuất phát từ các kim loại mảnh dẻo hoặc mảnh gỗ được sử dụng bởi thợ đóng tàu để tạo ra hình dạng cong của thân thuyền (Hình 1.44).



Hình 1.44

Đường cong spline cũng có ý nghĩa trong các chương trình máy tính như: Adobe Illustrator, Microsoft Powerpoint, Microsoft Word, Microsoft Paint,... Minh họa đơn giản nhất là trong Microsoft Powerpoint, sau khi vẽ một đường parabol bằng công cụ Shape (Hình 1.45a), ta hoàn toàn có thể thêm một số điểm vào mỗi vị trí (Hình 1.45b). Sau đó di chuyển các điểm thêm này và phần mềm sẽ cho ta một đường cong gợn sóng phù hợp với vị trí mới của các điểm đó.



Hình 1.45

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

Giáo viên có thể chọn ít nhất một trong hai hoạt động sau đây: "Thiết kế đường ray tàu lượn siêu tốc" hoặc "Sử dụng GeoGebra vẽ đồ thị hàm số và tìm nghiệm của phương trình" để học sinh thực hành trải nghiệm.

I Thiết kế đường ray tàu lượn siêu tốc

Mục tiêu:

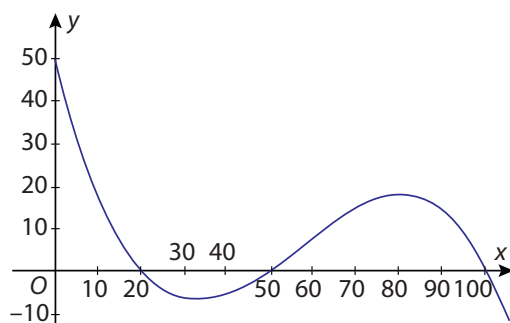
- Lập được công thức hàm số bậc ba: $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) thông qua các giao điểm của đồ thị với trục hoành và trục tung. Tìm được cực trị của hàm số đã cho.
- Thiết kế đường ray tàu lượn siêu tốc có dạng đồ thị hàm số bậc ba ở trên và thực nghiệm với viên bi (mô tả tàu lượn) lăn trên đường ray không cản động cơ.

Yêu cầu:

Một phần đường ray tàu lượn siêu tốc có dạng đồ thị hàm số bậc ba: $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$). Trục Ox mô tả quãng đường tàu di chuyển theo chiều ngang (tính bằng centimét), trục Oy mô tả chiều cao của đường ray (tính bằng centimét) tại mỗi vị trí x .

Chiều cao xuất phát là 50 cm. Tàu xuống dưới mặt đất lần thứ nhất từ vị trí $x = 20$ cm, tàu lên khỏi mặt đất ở vị trí $x = 50$ cm và sau đó xuống dưới mặt đất lần thứ hai ở vị trí $x = 100$ cm. Xét $x \in [0; 100]$:

- a) Tìm công thức hàm số $f(x)$.
- b) Tìm điểm cao nhất của đường ray khi tàu lên khỏi mặt đất và toạ độ điểm thấp nhất của đường ray khi tàu xuống dưới mặt đất.
- c) Sử dụng ống xốp để thiết kế phần đường ray này, cho một viên bi (thay thế cho tàu lượn) lăn trên mô hình đã thiết kế. Sử dụng đồng hồ bấm giây để đo thời gian viên bi di chuyển.



Hình 1.46

Chuẩn bị:

- Ống xốp bảo ôn chiều dài 2 m cắt đôi theo chiều dọc;



a) Ống xốp bảo ôn



b) Ống xốp đã cắt đôi theo chiều dọc

Hình 1.47

- Bìa các-tông kích thước tối thiểu 1 m × 1 m (hoặc giấy roki);
- Băng keo giấy;
- Một viên bi nhẹ;
- Đồng hồ bấm giây.

Tổ chức hoạt động:

HOẠT ĐỘNG 1A

Tìm công thức hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Do đồ thị hàm số giao với trục hoành tại các điểm $x = 20, x = 50, x = 100$ nên phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm 20, 50, 100, từ đó ta có $y = a(x - 20)(x - 50)(x - 100)$.

Mặt khác, tại điểm $x = 0$ ta có $y = 50$, suy ra:

$$50 = a(0 - 20)(0 - 50)(0 - 100)$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2\,000}.$$

$$\text{Suy ra } y = -\frac{1}{2\,000}(x - 20)(x - 50)(x - 100) = -\frac{1}{2\,000}x^3 + \frac{17}{200}x^2 - 4x + 50.$$

HOẠT ĐỘNG 1B

Tìm điểm cao nhất của đường ray khi tàu lên khỏi mặt đất và toạ độ điểm thấp nhất của đường ray khi tàu xuống dưới mặt đất

Các điểm cần tìm chính là các điểm cực trị của hàm số

$$y = f(x) = -\frac{1}{2\,000}x^3 + \frac{17}{200}x^2 - 4x + 50.$$

$$\text{Ta có } y' = -\frac{3}{2\,000}x^2 + \frac{17}{100}x - 4$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{100}{3} \\ x = 80. \end{cases}$$

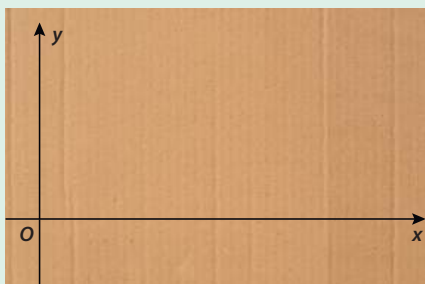
Ta có các điểm cực trị của hàm số $f(x)$ là $A\left(\frac{100}{3}; -\frac{200}{27}\right)$ và $B(80; 18)$.

HOẠT ĐỘNG 1C

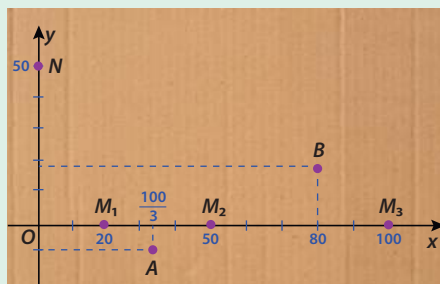
Thiết kế mô hình và trải nghiệm

Bước 1 Trên tấm bìa các-tông, vẽ hệ trục toạ độ Oxy (Hình 1.48).

Bước 2 Đánh dấu các điểm đặc biệt bao gồm điểm cắt trục hoành M_1, M_2, M_3 , điểm cắt trục tung N , các điểm cực trị A, B trên tấm bìa (Hình 1.49).



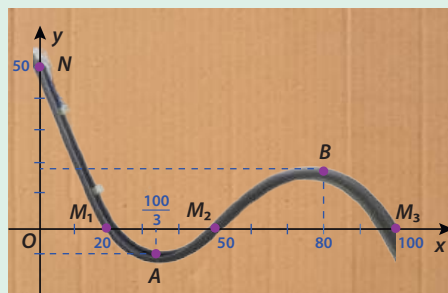
Hình 1.48



Hình 1.49

Bước 3 Vẽ đồ thị hàm số $f(x)$ qua các điểm được đánh dấu trên tấm bìa, sau đó dán ống xốp vào theo đồ thị đã vẽ (Hình 1.50).

Bước 4 Thả viên bi không vận tốc đầu từ vị trí N , quan sát viên bi lăn trên đường ray đến vị trí M_3 và sử dụng đồng hồ bấm giây tính thời gian vật chuyển động từ N đến M_3 .



Hình 1.50

LUYỆN TẬP 1

Lớp học chia làm 4 nhóm, mỗi nhóm có thể thay đổi chiều cao xuất phát nhưng phải giữ nguyên các vị trí giao với trục hoành. Thiết kế đường ray sao cho viên bi lăn trên đó trong thời gian càng lâu càng tốt, nhóm thực nghiệm cho thời gian viên bi lăn lớn nhất sẽ chiến thắng và trình bày công thức hàm số có đồ thị mô tả hình dáng đường ray lúc đó.

II Sử dụng GeoGebra vẽ đồ thị hàm số và tìm nghiệm của phương trình

Mục tiêu:

Sử dụng phần mềm GeoGebra trên máy tính (máy tính bảng, điện thoại thông minh) để:

- Vẽ đồ thị các hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$;
- Xác định tọa độ giao điểm của các đồ thị hàm số, biện luận được số nghiệm của một phương trình theo tham số.

Yêu cầu:

- Phần mềm GeoGebra, bản cài đặt trên máy tính tại địa chỉ: <https://www.geogebra.org/download> (bài học này được minh họa theo GeoGebra Classic 5) hoặc sử dụng trực tuyến trên trình duyệt tại địa chỉ: <https://www.geogebra.org/classic>.
- Học sinh cũng có thể dùng ứng dụng GeoGebra trên điện thoại thông minh, máy tính bảng. Học sinh tìm kiếm và cài đặt ứng dụng GeoGebra Graphing Calculator trên Play Store (đối với hệ điều hành Android) và App Store (đối với hệ điều hành iOS).
- Các nút lệnh và thao tác cần thiết để thực hiện nội dung này:

Nút lệnh/Công cụ	Công dụng	Cách dùng
Giao điểm của 2 đối tượng 	Tìm giao điểm của hai đối tượng (đồ thị).	Chọn nút lệnh này sau đó bấm chuột vào từng đồ thị của các hàm số.
Cực trị của hàm số 	Vẽ các điểm cực trị của đồ thị hàm số.	Chọn nút lệnh này sau đó chọn vào đồ thị cần tìm cực trị.

Tìm nghiệm của phương trình 	Tìm nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ hoặc giao điểm của $f(x)$ với trục Ox .	Chọn nút lệnh này, sau đó chọn vào đồ thị hàm số $f(x)$.
Thanh trượt 	Tạo giá trị tham số có thể thay đổi được.	Chọn nút lệnh này và bấm chọn khoảng trống trên vùng làm việc. Sau đó có thể thay đổi tên của tham số trong giao diện hiện ra (nếu cần thiết).
Chèn chữ 	Chèn chữ vào vùng làm việc.	Chọn nút lệnh này, sau đó bấm chọn vào vị trí cần chèn chữ và gõ chữ.

Bài toán:

Cho hàm số $y = \frac{-x^2 - 3x - 6}{x + 1}$.

- Xác định tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho, sử dụng GeoGebra để vẽ các đường thẳng này.
- Vẽ đồ thị (C) hàm số $y = \frac{-x^2 - 3x - 6}{x + 1}$.
- Sử dụng GeoGebra tìm các điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.
- Dựa vào đồ thị đã vẽ, biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình $\frac{-x^2 - 3x - 6}{x + 1} = m$.

Tổ chức hoạt động:

HOẠT ĐỘNG 2A

Xác định tiệm cận đứng, tiệm cận xiên và vẽ đồ thị của hàm số.

Ta có $y = \frac{-x^2 - 3x - 6}{x + 1} = -x - 2 - \frac{4}{x + 1}$.

Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = -1$. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y = -x - 2$.

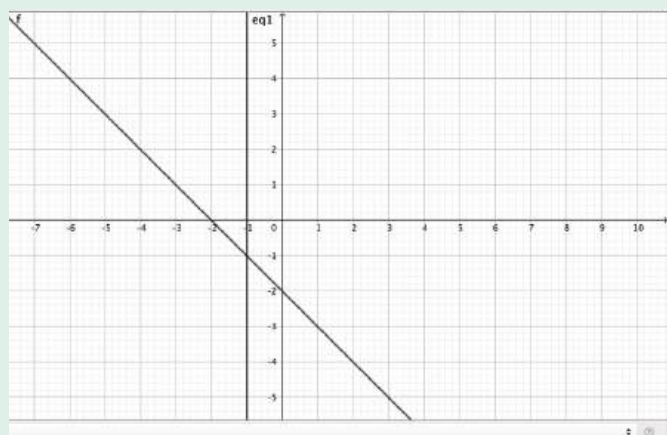
Khởi động GeoGebra.

Sử dụng bàn phím, nhập vào ô **Nhập lệnh** (hàng dưới cùng của giao diện) công thức $x = -1$.

Nhập lệnh: **$x = -1$** . Ta vẽ được đường tiệm cận đứng.

Nhập vào biểu thức $y = -x - 2$

Nhập lệnh: **$y = -x - 2$** . Ta vẽ được đường tiệm cận xiên (Hình 1.51).



Hình 1.51

HOẠT ĐỘNG 2B

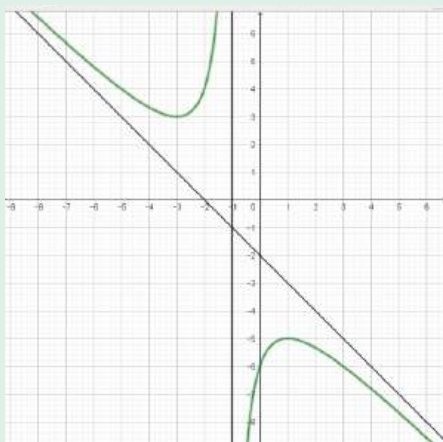
Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2 - 3x - 6}{x + 1}$.

Nhập vào biểu thức $y = \frac{-x^2 - 3x - 6}{x + 1}$ ở ô nhập liệu Nhập lệnh: $y = (-x^2 - 3x - 6) / (x + 1)$.

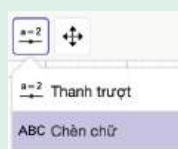
Ta được đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{-x^2 - 3x - 6}{x + 1}$ là đường cong (Hình 1.52).

Chọn nút lệnh **Chèn chữ** để ghi thêm nhãn cho trục Ox , Oy (Hình 1.53).

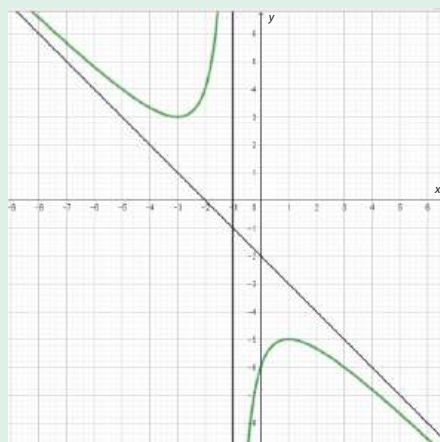
Ta được đồ thị hoàn thiện của hàm số đã cho (Hình 1.54).



Hình 1.52



Hình 1.53



Hình 1.54

HOẠT ĐỘNG 2C

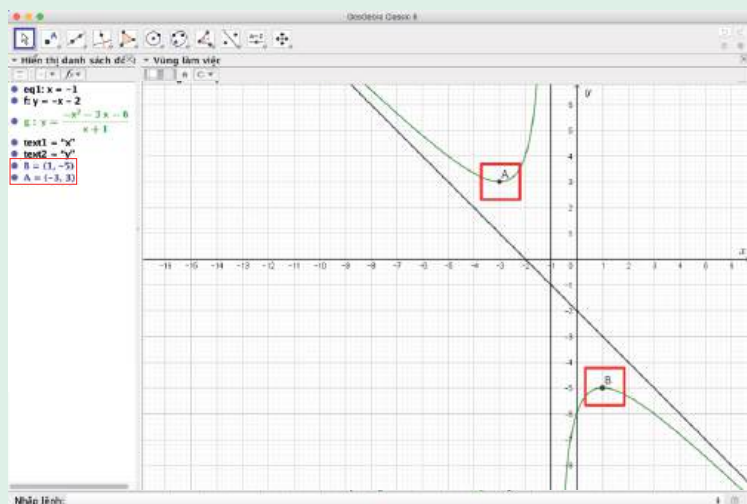
Tìm các điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

Chọn nút lệnh **Extremum** (Hình 1.55).

Sau đó chọn vào đồ thị $f(x)$ để được các điểm cực trị $A(-3; 3)$, $B(1; -5)$ (Hình 1.56).



Hình 1.55



Hình 1.56

HOẠT ĐỘNG 2D

Biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình $\frac{-x^2 - 3x - 6}{x + 1} = m$. (*)

Lưu ý:

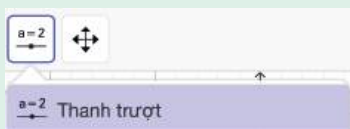
Số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$.

Bước 1 Tạo thanh trượt.

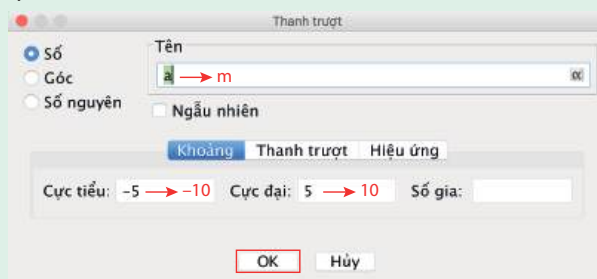
Chọn nút tạo thanh trượt ở thanh công cụ (Hình 1.57).

Sau đó chọn vào một vị trí trống trên giao diện phần mềm.

Sửa chữ "a" thành chữ "m", điều chỉnh các giá trị "cực tiểu", "cực đại" của tham số này là -10 đến 10 , sau đó nhấn **OK** (Hình 1.58).



Hình 1.57



Hình 1.58

Bước 2 Nhập vào khung nhập liệu hàm số $y = m$ Nhập lệnh: $y = m$.

Bước 3 Gõ vào khung Nhập lệnh: **GiaoĐiểm($y = (-x^2 - 3x - 6)/(x + 1)$, $y = m$, -100 , 100)**

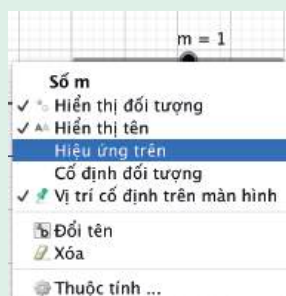
Nhập lệnh: **GiaoĐiểm($y = (-x^2 - 3x - 6)/(x + 1)$, $y = m$, -100 , 100)**. Ở giá trị từ -100 đến 100 , ta chọn khoảng x rộng để có thể quét hết tất cả các giao điểm.

Bước 4 Nhấn chuột phải vào thanh trượt và chọn **Hiệu ứng trên** (Hình 1.59).

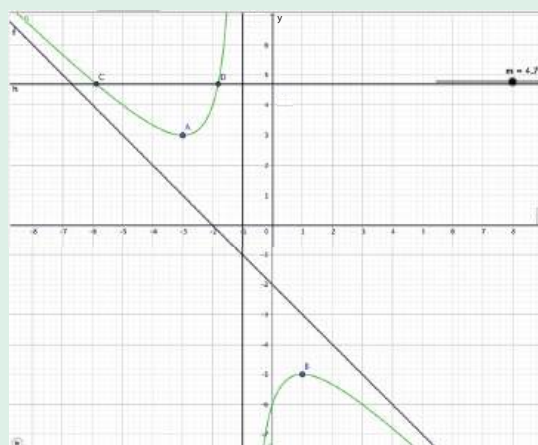
Sau đó quan sát số giao điểm của đường thẳng (d): $y = m$ và đồ thị (C) của hàm số.

Ta thấy có các trường hợp sau đây:

- Với $m > 3$: d cắt (C) tại 2 điểm nên phương trình (*) có 2 nghiệm (Hình 1.60).

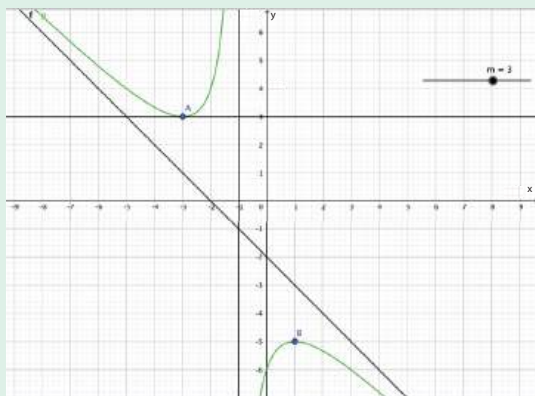


Hình 1.59

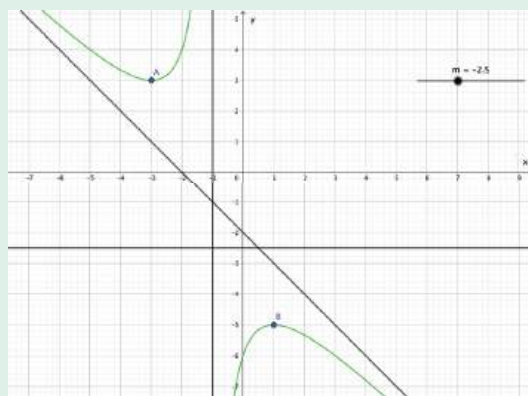


Hình 1.60

- Với $m = 3$: d cắt (C) tại 1 điểm nên phương trình (*) có 1 nghiệm (Hình 1.61).
- Với $-5 < m < 3$: d không cắt (C) nên phương trình (*) vô nghiệm (Hình 1.62).

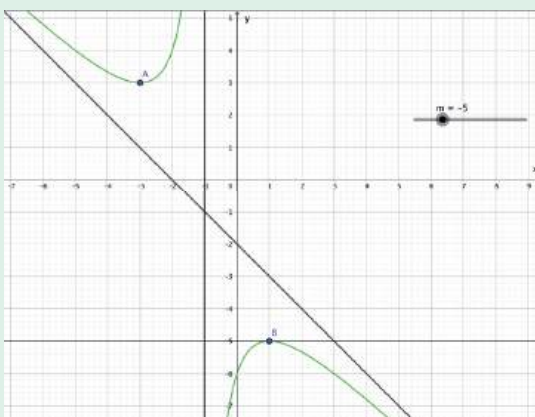


Hình 1.61

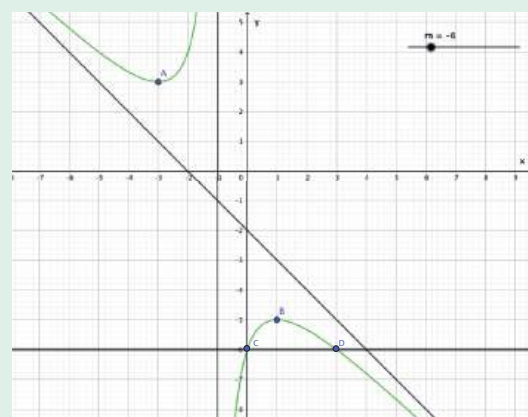


Hình 1.62

- Với $m = -5$: d cắt (C) tại 1 điểm nên phương trình (*) có 1 nghiệm (Hình 1.63).
- Với $m < -5$: d cắt (C) tại 2 điểm nên phương trình (*) có 2 nghiệm (Hình 1.64).



Hình 1.63



Hình 1.64

Kết luận:

- $m > 3$ hoặc $m < -5$: Phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt.
- $m = -5$ hoặc $m = 3$: Phương trình (*) có đúng 1 nghiệm.
- $-5 < m < 3$: Phương trình (*) vô nghiệm.

LUYỆN TẬP 2

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

- Sử dụng phần mềm GeoGebra vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
- Tìm nghiệm gần đúng (làm tròn đến hàng phần trăm) của phương trình $f(x) = 0$.
- Dựa vào đồ thị đã vẽ ở câu a, biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình $x^3 - 3x^2 + 3 = m$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

1.29. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$ và có bảng biến thiên như *Bảng 1.4*. Xác định các khoảng đồng biến, nghịch biến và cực trị của hàm số đã cho.

Bảng 1.4

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$		
y'	+		+	0	+	0	-
y	-5	$+\infty$	$-\infty$	-2	$-\infty$		

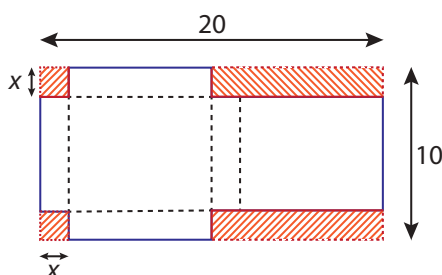
1.30. Lập bảng biến thiên, tìm khoảng đơn điệu và cực trị (nếu có) của hàm số:

a) $y = -x^3 + 2x^2 - x - 7$;

b) $y = \frac{x-6}{1-2x}$;

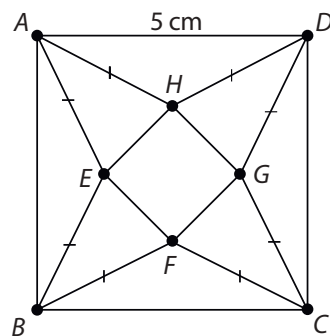
c) $y = \sqrt{4x - x^2}$.

1.31. Từ một miếng bìa hình chữ nhật với kích thước $20 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$, bạn Lan cắt bỏ hai hình vuông có cạnh là $x \text{ (cm)}$ và hai hình chữ nhật (phần gạch sọc *Hình 1.65*) rồi gấp theo đường nét đứt và dán các mép để được một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật. Tìm x để thể tích hộp là lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.



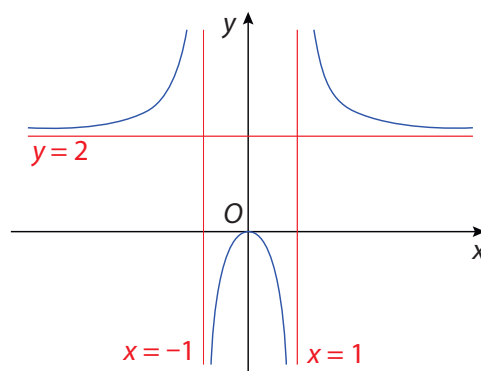
Hình 1.65

1.32. Trong một cuộc thi làm đồ dùng học tập do trường phát động, bạn Nam làm một hình chóp tứ giác đều $S.EFGH$ bằng cách sử dụng một tấm bìa hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 5 cm và cắt tấm bìa theo các tam giác cân AEB , BFC , CGD , DHA . Sau đó bạn gấp các tam giác AEH , BEF , CFG , DGH sao cho bốn đỉnh A , B , C , D trùng nhau tạo thành đỉnh S của khối chóp tứ giác đều như *Hình 1.66*. Thể tích lớn nhất của khối chóp tứ giác đều tạo thành bằng bao nhiêu?



Hình 1.66

- 1.33.** Cho hàm số $y = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$ có đồ thị là đường cong như Hình 1.67. Xác định các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang và tiệm cận xiên (nếu có) của đồ thị hàm số đã cho.



Hình 1.67

- 1.34.** Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$. Khảo sát sự biến thiên, vẽ đồ thị và chỉ ra tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho.

- 1.35.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{3x + 6}{2 - x};$ b) $y = 2x + \frac{3}{2 - x}.$

- 1.36.** Chuyên viên phân tích thị trường của một công ty X sản xuất máy xay sinh tố nhận thấy rằng, nếu công ty sản xuất x máy xay hằng năm thì tổng lợi nhuận thu được sẽ tính theo công thức:

$$y = f(x) = 8x + 0,3x^2 - 0,0013x^3 - 372 \text{ (triệu đồng)}.$$

- a) Công ty X cần sản xuất ít nhất bao nhiêu máy xay để không bị lỗ, biết rằng công ty sản xuất 20 máy xay vẫn chưa có lãi?
b) Lợi nhuận lớn nhất công ty có thể thu được là bao nhiêu? Khi đó cần sản xuất bao nhiêu máy xay?

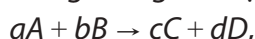
- 1.37.** Trong Vật lí, khi một điện trở ngoài có giá trị R (Ω) được nối qua một nguồn điện E (V) với một điện trở trong r (Ω) thì công suất (tính bằng W) của điện trở ngoài là

$$P = \frac{E^2 R}{(R + r)^2}.$$

(Nguồn: [https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Electricity_and_Magnetism/Electricity_and_Magnetism_\(Tatum\)/04%3A_Batteries_Resistors_and_Ohm's_Law/4.08%3A_Power_Delivered_to_an_External_Resistance](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Electricity_and_Magnetism/Electricity_and_Magnetism_(Tatum)/04%3A_Batteries_Resistors_and_Ohm's_Law/4.08%3A_Power_Delivered_to_an_External_Resistance))

Khi R thay đổi, E và r cố định, ta xem P là hàm số theo R . Tìm công suất lớn nhất của điện trở ngoài.

- 1.38.** Trong Hoá học, xét một số phản ứng đơn giản một chiều có dạng:



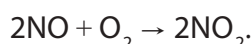
trong đó A, B, C, D là các chất hoá học và a, b, c, d là các hệ số cân bằng.

Theo định luật tác dụng khối lượng (M. Guldberg & P. Waage, 1864), tốc độ phản ứng hoá học được xác định bởi công thức:

$$v = k[A]^a[B]^b,$$

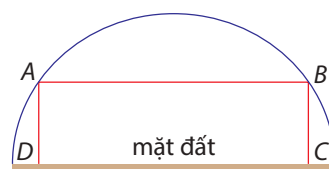
trong đó k là hằng số tốc độ phản ứng chỉ phụ thuộc vào bản chất của chất phản ứng và nhiệt độ; $[A]$, $[B]$ lần lượt là nồng độ mol của các chất A , B tại thời điểm đang xét (đơn vị mol/l) (nguồn: [https://chem.libretexts.org/Bookshelves/Physical_and_Theoretical_Chemistry_Textbook_Maps/Supplemental_Modules_\(Physical_and_Theoretical_Chemistry\)/Kinetics/02%3A_Reaction_Rates/2.05%3A_Reaction_Rate](https://chem.libretexts.org/Bookshelves/Physical_and_Theoretical_Chemistry_Textbook_Maps/Supplemental_Modules_(Physical_and_Theoretical_Chemistry)/Kinetics/02%3A_Reaction_Rates/2.05%3A_Reaction_Rate)).

Biết phương trình tạo ra khí nitrogen dioxide (NO_2) từ nitrogen monoxide (NO) và oxygen (O_2) như sau:



Xác định nồng độ khí oxygen tham gia phản ứng để phản ứng xảy ra nhanh nhất, biết rằng tổng nồng độ mol của O_2 và NO là 1 (mol/l).

- 1.39.** Một cổng vòm có dạng nửa hình tròn trên mặt đất với bán kính $R = 5$ m. Người ta muốn đặt một khung hình chữ nhật $ABCD$ để thiết kế trang trí, với hai điểm A , B đỉnh trên vòm và CD đặt trên mặt đất (Hình 1.68). Tìm khoảng cách A , B so với mặt đất để diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là lớn nhất.



Hình 1.68

- 1.40.** Kính viễn vọng Hubble được tàu không gian Discovery đưa vào sử dụng ngày 24/4/1990. Mô hình vận tốc của tàu trong sứ mệnh này, từ lúc rời bệ phóng ($t = 0$ giây) cho đến khi được tên lửa đẩy nhanh khỏi bệ tại thời điểm $t = 126$ giây, được xác định bởi công thức:

$$v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083 \text{ (feet/giây)}$$

(nguồn: James Stewart, J. (2015). *Calculus. Cengage Learning 8th edition*, p. 282). Tính gia tốc lớn nhất và gia tốc nhỏ nhất của tàu trong khoảng thời gian này (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình 1.69

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- 1.41.** Hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x - 2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(5; +\infty)$.
B. $(-\infty; 1)$.
C. $(-2; 3)$.
D. $(1; 5)$.

1.42. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$.
- C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

1.43. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như *Bảng 1.5*. Khẳng định nào sau đây đúng?

Bảng 1.5

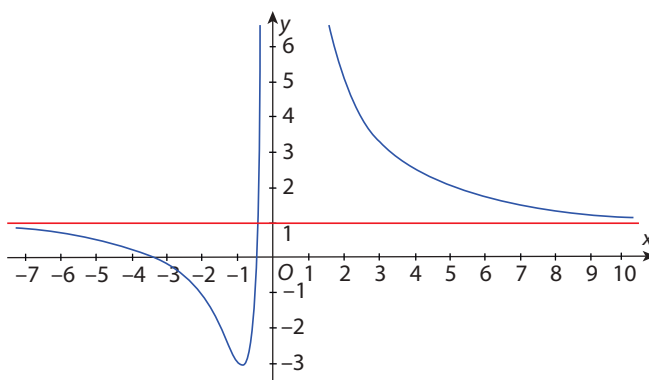
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			-2		3		$-\infty$

- A. Hàm số đồng biến trên $(0; 2)$ và đạt cực đại tại $x = 2$.
- B. Hàm số đồng biến trên $(0; 2)$ và đạt cực đại tại $x = 0$.
- C. Hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$ và đạt cực đại tại $x = 2$.
- D. Hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$ và đạt cực đại tại $x = 0$.

1.44. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2}$

có đồ thị là đường cong như *Hình 1.70*. Đồ thị hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.



Hình 1.70

1.45. Một trang trại mỗi ngày thu hoạch được một tấn rau. Mỗi ngày, nếu bán rau với giá 30 000 đồng/kg thì hết rau, nếu giá bán cứ tăng thêm 1 000 đồng/kg thì số rau thừa lại tăng thêm 20 kg. Số rau thừa này được bán để làm thức ăn cho gia súc với giá 2 000 đồng/kg. Hỏi số tiền bán rau nhiều nhất mà trang trại có thể thu được mỗi ngày là bao nhiêu?

- A. 32 420 000 đồng.
- B. 32 400 000 đồng.
- C. 34 400 000 đồng.
- D. 32 240 000 đồng.

1.46. Tích của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 1$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

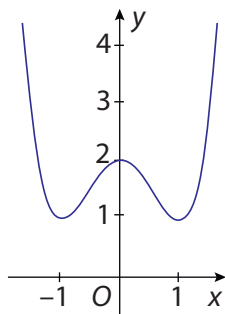
- A. $-\frac{43}{27}$. B. $-\frac{5}{27}$. C. -2 . D. $-\frac{50}{27}$.

1.47. Mỗi đợt xuất khẩu gạo của tỉnh A thường kéo dài trong 60 ngày. Người ta nhận thấy lượng gạo xuất khẩu tính theo ngày thứ t được xác định bởi công thức: $S(t) = \frac{2}{5}t^3 - 63t^2 + 3\,240t - 3\,100$ (tấn) ($1 \leq t \leq 60$). Hỏi trong 60 ngày đó, ngày thứ mấy có lượng gạo xuất khẩu cao nhất?

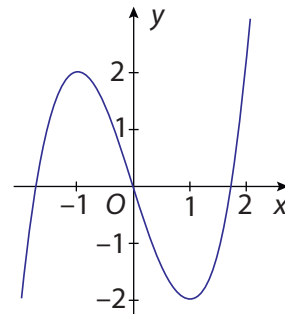
- A. 60. B. 45. C. 30. D. 25.

1.48. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ là đường cong trong hình nào dưới đây?

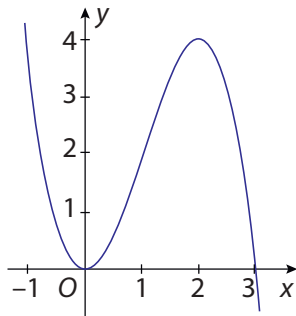
A.



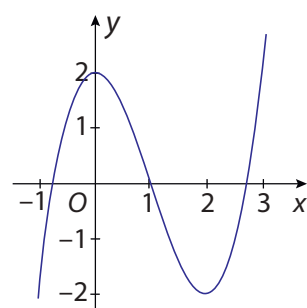
B.



C.

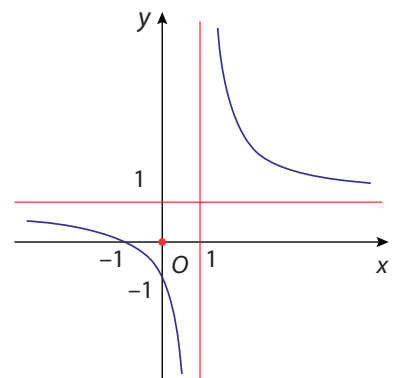


D.



1.49. Đường cong trong Hình 1.71 là đồ thị của hàm số nào sau đây?

- A. $y = \frac{2x+1}{2x-2}$. B. $y = \frac{x+1}{x-1}$.
C. $y = \frac{-x}{1-x}$. D. $y = \frac{x-1}{x+1}$.



Hình 1.71



Tại phòng làm việc của một trạm kiểm soát không lưu

CHƯƠNG 2

Vectơ và hệ tọa độ trong không gian

Tìm hiểu chuyển động của các hành tinh trong Thiên văn học, tính toán lực tác động khi thiết kế công trình xây dựng, điều hướng di chuyển tàu thuyền và máy bay,... là những ví dụ về các vấn đề thường gặp trong cuộc sống hằng ngày mà việc nghiên cứu đòi hỏi phải xem xét hướng chuyển động và vị trí của các đối tượng. Vectơ và tọa độ của chúng là công cụ toán học hữu ích cho việc xem xét những vấn đề đó.

Trong chương này, ta sẽ tìm hiểu vectơ, tọa độ của vectơ, biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ trong không gian và vận dụng vào việc giải quyết một số vấn đề của toán học cũng như của thực tiễn.

- ◆ Nhận biết được vectơ và thực hiện được các phép toán vectơ trong không gian (tổng và hiệu của hai vectơ, tích của một số với một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ);
- ◆ Xác định được tọa độ của vectơ đối với một hệ trục tọa độ;
- ◆ Tính được độ dài của một vectơ khi biết tọa độ điểm đầu và điểm cuối của nó;
- ◆ Tính được góc giữa hai vectơ;
- ◆ Xác định được biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ;
- ◆ Vận dụng được tọa độ của vectơ để giải một số bài toán có liên quan đến thực tiễn.

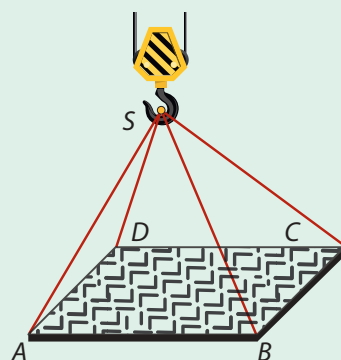


Khởi động: Công cụ nào của toán học được dùng để biểu diễn các đại lượng có hướng trong không gian?

I Vectơ trong không gian

HOẠT ĐỘNG 1

Trên công trường xây dựng, cần cẩu đang đưa một khung thép hình chữ nhật lên tầng cao của toà nhà. Bốn dây cáp được móc vào bốn đỉnh của khung thép như ở Hình 2.1. Hãy biểu diễn trên hình vẽ hướng của các lực căng của bốn sợi dây cáp này.



Hình 2.1

Để mô tả các đại lượng có hướng trong không gian, người ta mở rộng khái niệm vectơ trong mặt phẳng. Khái niệm vectơ trong không gian được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng.



Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Lưu ý:

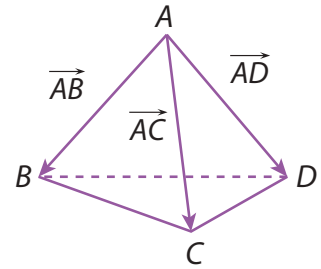
- Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ được dùng để chỉ vectơ có điểm đầu A và điểm cuối B .
- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của một vectơ, ta kí hiệu vectơ đó là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$

VÍ DỤ 1

Cho tứ diện $ABCD$. Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện.

Giải

Ngoài đỉnh A , tứ diện còn có 3 đỉnh B, C, D nên ta có 3 vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ (Hình 2.2).



Hình 2.2

LUYỆN TẬP 1

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Hãy chỉ ra tất cả những vectơ có điểm đầu và điểm cuối là hai điểm phân biệt lấy trong các điểm S, A, B, C, D .

II Độ dài của vectơ. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng, bằng nhau

HOẠT ĐỘNG 2

Nhắc lại các khái niệm liên quan đến vectơ trong mặt phẳng:

- Độ dài của vectơ;
- Giá của vectơ;
- Hai vectơ cùng phương; hai vectơ cùng hướng;
- Hai vectơ bằng nhau;
- Hai vectơ đối nhau;
- Vectơ–không.

Các khái niệm liên quan đến vectơ trong không gian được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng.

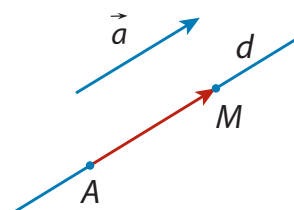


- **Độ dài của vectơ** là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của nó. Độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.
- **Giá** của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.
- Hai vectơ được gọi là **cùng phương** nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.
- Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng có thể **cùng hướng** hoặc **ngược hướng**.
- Hai vectơ được gọi là **bằng nhau** nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng. Nếu hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng nhau thì ta viết là $\vec{a} = \vec{b}$.
- Hai vectơ được gọi là **đối nhau** nếu chúng có cùng độ dài và ngược hướng. Vectơ đối của $\vec{a}$ được kí hiệu là $-\vec{a}$.

Lưu ý:

- Khi cho trước vectơ $\vec{a}$ và điểm A thì ta luôn tìm được một điểm M duy nhất sao cho vectơ $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$.

Để xác định điểm M , ta làm như sau: Qua A , kẻ đường thẳng d song song hoặc trùng với giá của $\vec{a}$. Trên đường thẳng d , lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng với $\vec{a}$ và AM bằng độ dài của $\vec{a}$ (Hình 2.3).



Hình 2.3

- Với mỗi điểm tùy ý, ta quy ước có một vectơ đặc biệt (có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau), chẳng hạn $\overrightarrow{AA}$, gọi là **vectơ-không**, kí hiệu $\vec{0}$. Ta quy ước vectơ-không có độ dài bằng 0 và cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

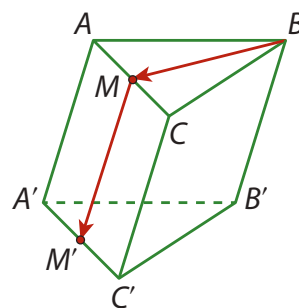
VÍ DỤ 2

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm các cạnh $AC, A'C'$ (Hình 2.4).

- a) Trong tất cả những vectơ có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của lăng trụ, hãy chỉ ra các vectơ:

- Khác $\vec{0}$ và cùng phương với $\overrightarrow{AM}$;
- Khác $\vec{0}$ và cùng hướng với $\overrightarrow{AM}$;
- Là vectơ đối của $\overrightarrow{AC}$;
- Bằng $\overrightarrow{MM'}$.

- b) Tìm độ dài của $\overrightarrow{BM}$ trong trường hợp ABC là tam giác cân tại B , có cạnh bên bằng 5 cm và góc ở đỉnh bằng 30° (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình 2.4

Giải

- a) Do $AC \parallel A'C'$ và $M \in AC$ nên:

- Vectơ khác $\vec{0}$ và cùng phương với $\overrightarrow{AM}$ là vectơ có giá AC hoặc $A'C'$. Đó là các vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{C'A'}$;
- Trong những vectơ khác $\vec{0}$ và cùng phương với $\overrightarrow{AM}$, có hai vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'C'}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AM}$;
- Các vectơ đối của $\overrightarrow{AC}$ là $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C'A'}$;
- Các vectơ bằng $\overrightarrow{MM'}$ là $\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}$ (các vectơ này cùng hướng và cùng độ dài với $\overrightarrow{MM'}$).

- b) Từ giả thiết, ta suy ra tam giác AMB vuông tại M . Từ đó ta có:

$$BM = BA \cdot \cos \widehat{ABM} = 5 \cdot \cos 15^\circ \approx 4,83 \text{ (cm)}.$$

Vậy độ dài của $\overrightarrow{BM}$ là $|\overrightarrow{BM}| \approx 4,83 \text{ (cm)}$.

LUYỆN TẬP 2

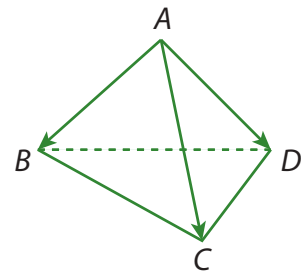
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

- Trong các vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp, hãy chỉ ra những vectơ:
 - Cùng phương với vectơ $\vec{AB}$;
 - Bằng vectơ $\vec{AB}$;
 - Ngược hướng với vectơ $\vec{AA'}$.
- Tính độ dài của vectơ $\vec{AC'}$ trong trường hợp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp đứng, có $AA' = a$, $AB = b$, $BC = c$ và $\widehat{ABC} = 120^\circ$.

BÀI TẬP

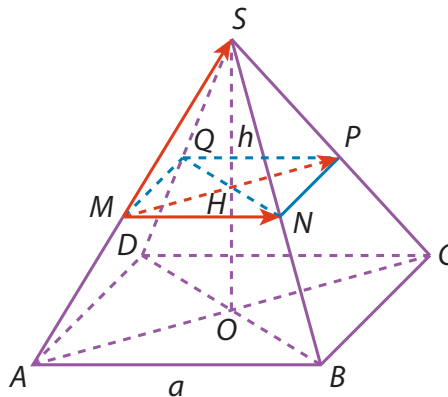
2.1. Cho hình tứ diện đều $ABCD$ (Hình 2.5).

- Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của tứ diện? Liệt kê tất cả những vectơ đó.
- Bạn Lan nói: " $\vec{AB} = \vec{AC} = \vec{AD}$ vì các vectơ này có cùng độ dài và cùng hướng (từ trên xuống dưới)". Khẳng định của bạn Lan có đúng không? Vì sao?



Hình 2.5

2.2. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy a và đường cao h . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA, SB, SC, SD và O, H lần lượt là tâm của các hình vuông $ABCD, MNPQ$ (Hình 2.6).



Hình 2.6

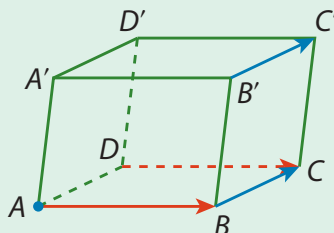
- Trong những vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu và điểm cuối là những điểm cho trên hình, hãy liệt kê các vectơ:
 - Cùng hướng với $\vec{MN}$;
 - Bằng $\vec{MN}$.
- Tìm độ dài các vectơ $\vec{MP}, \vec{MS}$ theo a và h .

Khởi động: Vectơ trong mặt phẳng đã mang lại một công cụ hữu hiệu để giải quyết nhiều bài toán của Hình học phẳng và thực tiễn. Vậy công cụ này sẽ được khai thác ra sao vào việc nghiên cứu các đối tượng của Hình học không gian và các vấn đề thực tiễn? Để trả lời, ta cần biết các phép toán vectơ trong không gian được xây dựng như thế nào.

I Tổng và hiệu của hai vectơ trong không gian

HOẠT ĐỘNG 1

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (Hình 2.7). Một vật bắt đầu di chuyển từ điểm A theo độ dịch chuyển bằng $\overrightarrow{DC}$, sau đó tiếp tục di chuyển theo độ dịch chuyển bằng $\overrightarrow{B'C'}$. Hỏi vật sẽ di chuyển đến điểm nào?

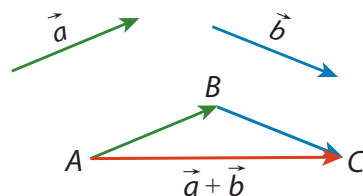


Hình 2.7

TỔNG CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý. Vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là **tổng của hai vectơ** $\vec{a}, \vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.

Phép lấy tổng của hai vectơ còn được gọi là phép cộng vectơ.



Hình 2.8

Lưu ý:

- Phép cộng vectơ trong không gian cũng có các tính chất của phép cộng vectơ trong mặt phẳng.

Chẳng hạn, với mọi vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, ta có:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

(tính chất giao hoán);

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

(tính chất kết hợp);

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

(phép cộng với vectơ-không);

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

(phép cộng với vectơ đối).

Do tính chất kết hợp nên để viết tổng của nhiều vectơ thì ta không cần dùng dấu ngoặc. Chẳng hạn, tổng $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ có thể được viết là $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

- Khi thực hiện phép cộng vectơ trong không gian, ta cũng có thể sử dụng quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành như trong mặt phẳng.



QUY TẮC BA ĐIỂM VÀ QUY TẮC HÌNH BÌNH HÀNH

Với ba điểm A, B, C bất kì trong không gian, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (quy tắc ba điểm).

Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (quy tắc hình bình hành).

VÍ DỤ 1

Cho hình tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

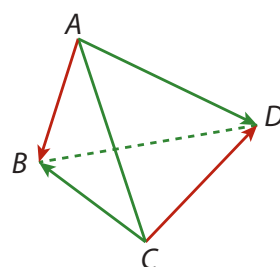
Giải

Sử dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}.$$

Áp dụng tính chất kết hợp và giao hoán của phép cộng vectơ, ta suy ra:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD}) \\ &= \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.\end{aligned}$$



Hình 2.9

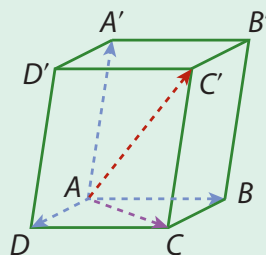
LUYỆN TẬP 1

Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.

HOẠT ĐỘNG 2

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (Hình 2.10).

- Tìm liên hệ giữa $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AC}$.
- Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.



Hình 2.10

Từ kết quả của Hoạt động 2, ta suy ra quy tắc sau:



QUY TẮC HÌNH HỘP

Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

VÍ DỤ 2

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (Hình 2.10). Tìm vectơ $\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D'A'}$.

Giải

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{CB}$.

Suy ra $\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA'}$.

LUYỆN TẬP 2

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (Hình 2.10). Tìm vectơ $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'}$.

HOẠT ĐỘNG 3

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (Hình 2.10). Tìm tổng của vectơ $\overrightarrow{AD}$ và vectơ đối của $\overrightarrow{C'C}$.

HIỆU CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Hiệu của hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ là vectơ $\vec{a} + (-\vec{b})$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$.

Phép lấy hiệu của hai vectơ trong không gian được gọi là phép trừ vectơ.

Phép trừ vectơ trong không gian cũng có quy tắc sau:

QUY TẮC HIỆU

Với O, A, B là ba điểm bất kì trong không gian, $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.

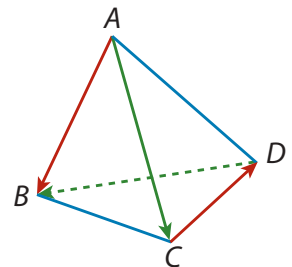
VÍ DỤ 3

Cho hình tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.

Giải

Sử dụng quy tắc ba điểm và quy tắc hiệu, ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}) \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} \\ &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}.\end{aligned}$$

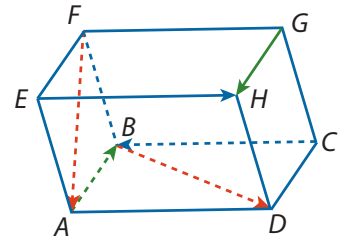


Hình 2.11

LUYỆN TẬP 3

Cho hình hộp $ABCD.EFGH$ (Hình 2.12). Hãy tìm:

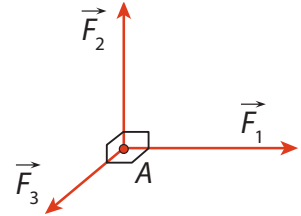
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EH}$;
- $\overrightarrow{FA} - \overrightarrow{BD}$.



Hình 2.12

VẬN DỤNG 1

Một chất điểm chịu tác động bởi 3 lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ có chung điểm đặt A và có giá vuông góc với nhau từng đôi một. Biết cường độ của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt là 10 N, 8 N và 5 N, xác định hợp lực của 3 lực và tính cường độ của hợp lực (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



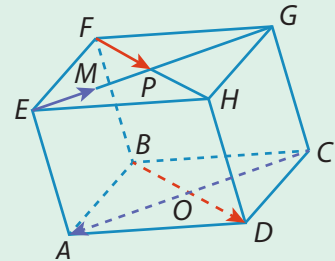
Hình 2.13

II Tích của một số với một vectơ trong không gian

HOẠT ĐỘNG 4

Cho hình hộp $ABCD.EFGH$ có O và P tương ứng là giao điểm các đường chéo của hai đáy $ABCD$ và $EFGH$. M là trung điểm của đoạn thẳng EP (Hình 2.14). Xét mối quan hệ về hướng và độ dài của các cặp vectơ:

- $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{FP}$;
- $\overrightarrow{EM}$ và $\overrightarrow{CA}$.



Hình 2.14

Để biểu diễn mối quan hệ giữa các cặp vectơ đã xét trong Hoạt động 4, ta viết $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{FP}$ và $\overrightarrow{EM} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$.

Tổng quát, ta có định nghĩa:



Cho số $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ trong không gian. **Tích của số k với vectơ $\vec{a}$** là một vectơ, kí hiệu $k\vec{a}$, có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$ và cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$.

Phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là phép nhân một số với một vectơ.

Lưu ý:

- Quy ước: Nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $k = 0$ thì $k\vec{a} = \vec{0}$.
- Nếu $k\vec{a} = \vec{0}$ thì $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

VÍ DỤ 4

Cho tứ diện $ABCD$. G là trọng tâm của tam giác BCD (Hình 2.15). Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}.$$

Giải

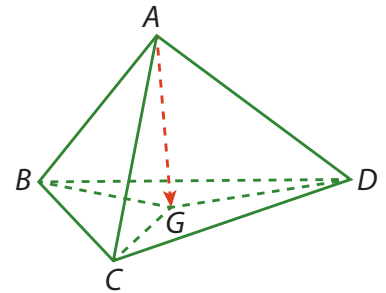
Áp dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD} \\ &= 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}.\end{aligned}$$

Vì G là trọng tâm tam giác BCD nên:

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

Suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.



Hình 2.15

LUYỆN TẬP 4

Cho hình chóp $S.ABC$. Điểm M thuộc cạnh SA và $SM = \frac{2}{3}SA$.

- Viết hệ thức liên hệ giữa các cặp vectơ $\overrightarrow{SM}$ và $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{AS}$.
- Tìm điểm N sao cho $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$.

VẬN DỤNG 2

Trọng lực $\vec{P}$ là lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một vật, được tính theo công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, trong đó m là khối lượng của vật (đơn vị: kg), còn $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do, có hướng đi xuống và có độ lớn $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Xác định hướng và độ lớn của trọng lực (đơn vị: N) tác dụng lên quả bưởi có khối lượng 2,5 kg.



Lưu ý:

Các tính chất của phép nhân một số với một vectơ trong mặt phẳng đều đúng cho phép nhân một số với một vectơ trong không gian. Đặc biệt, ta có các tính chất sau:

- Với vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bất kì và với mọi số thực k , l , ta có:

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}; \quad (k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a};$$

$$k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}; \quad 1\vec{a} = \vec{a}; \quad -1\vec{a} = -\vec{a};$$

- Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$;
- Hai đường thẳng AB , CD song song hoặc trùng nhau khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$;
- Ba điểm phân biệt A , B , C thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

VÍ DỤ 5

Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Điểm M là trọng tâm tam giác AFH (Hình 2.16).

- Chứng minh rằng ba điểm E, M, C thẳng hàng.
- Tính độ dài của $\overrightarrow{EM}$ trong trường hợp $ABCD.EFGH$ là hình hộp đứng có các cạnh $AB = 5, AD = 6, AE = 10$ và $\widehat{ABC} = 120^\circ$.

Giải

- Để chứng minh E, M, C thẳng hàng, ta sẽ chứng minh $\overrightarrow{EC} = k\overrightarrow{EM}$ với k là một số thực nào đó.

Do M là trọng tâm của tam giác AFH nên ta có:

$$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} = 3\overrightarrow{EM}.$$

Mặt khác, theo quy tắc hình hộp thì:

$$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EC}.$$

Suy ra $\overrightarrow{EC} = 3\overrightarrow{EM}$. Vậy ba điểm E, M, C thẳng hàng.

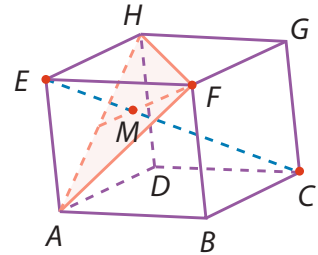
- Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC , ta có:

$$AC^2 = 5^2 + 6^2 - 2.5.6.\cos 120^\circ = 91.$$

Khi $ABCD.EFGH$ là hình hộp đứng thì EAC là tam giác vuông tại A , do đó:

$$EC^2 = EA^2 + AC^2 = 100 + 91 = 191.$$

$$\text{Suy ra } EM = \frac{1}{3}\sqrt{191}.$$

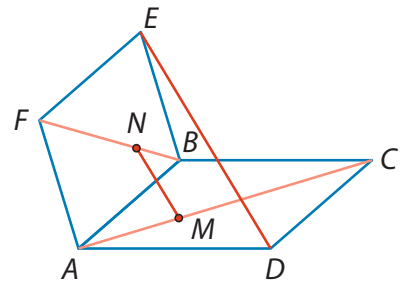


Hình 2.16

LUYỆN TẬP 5

Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên các đường chéo AC và BF lấy các điểm M, N sao cho $MC = 2MA, NF = 2NB$ (Hình 2.17).

- Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{DE}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}$.
- Từ đó suy ra $MN \parallel DE$.



Hình 2.17



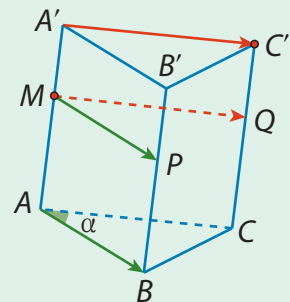
Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

1. Góc giữa hai vectơ trong không gian

HOẠT ĐỘNG 5

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $\widehat{BAC} = \alpha$. Gọi M là một điểm bất kì thuộc cạnh bên AA' (Hình 2.18).

- Vẽ hai vectơ $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{MQ}$ lần lượt bằng $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'C'}$. $ABC.MPQ$ có phải là hình lăng trụ không? Vì sao?
- Trong mặt phẳng (MPQ) , hãy xác định góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}$ và so sánh góc đó với α .

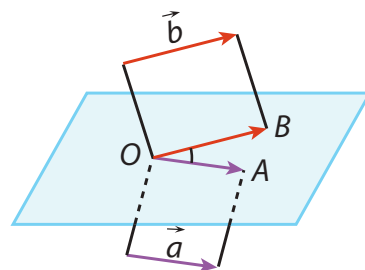


Hình 2.18

Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{MQ}$ tìm được ở Hoạt động 5 cũng được gọi là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'C'}$ trong không gian. Tổng quát, người ta định nghĩa:

GÓC GIỮA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O bất kì và hai điểm A, B sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Ta gọi $\widehat{AOB}$ ($0^\circ \leq \widehat{AOB} \leq 180^\circ$) là **góc giữa hai vectơ** $\vec{a}, \vec{b}$ trong không gian và kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b})$.



Hình 2.19

Nhận xét:

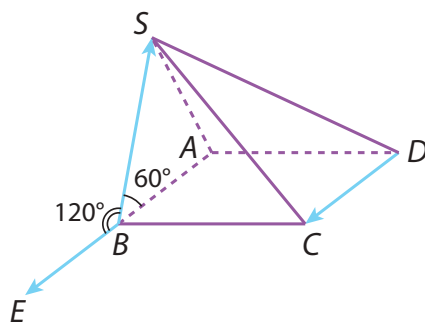
Với mọi cặp vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$, ta có:

- Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng thì $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$;
- Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng thì $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$;
- Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc với nhau và kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$;
- $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

VÍ DỤ 6

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và mặt bên SAB là tam giác đều. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BS}$.

Giải



Hình 2.20

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel DC$.

Trên tia AB lấy điểm E sao cho $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$ (Hình 2.20). Ta có:

$$(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BS}) = \widehat{EBS} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Vậy $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = 120^\circ$.

LUYỆN TẬP 6

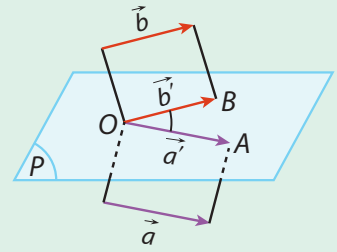
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm góc giữa vectơ $\overrightarrow{A'C'}$ và

- vectơ $\overrightarrow{AB}$;
- vectơ $\overrightarrow{AD}$;
- vectơ $\overrightarrow{B'B}$.

2. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

HOẠT ĐỘNG 6

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Từ một điểm O tùy ý trong không gian, vẽ các vectơ $\vec{a'}, \vec{b'}$ sao cho $\vec{a'} = \vec{a}, \vec{b'} = \vec{b}$. (P) là mặt phẳng chứa giá của hai vectơ $\vec{a'}$ và $\vec{b'}$ (Hình 2.21).



Hình 2.21

- Trong mặt phẳng (P) , hãy viết biểu thức tính $\vec{a'} \cdot \vec{b'}$.
- Hãy so sánh $\vec{a'} \cdot \vec{b'}$ với $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Biểu thức tính $\vec{a'} \cdot \vec{b'}$ cũng được gọi là tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong không gian, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Từ đó ta có định nghĩa:



Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. **Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$** , kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{b}$, là một số được tính theo công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Lưu ý:

Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian đã được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng, nên nó có tất cả những tính chất của tích vô hướng của hai vectơ trong mặt phẳng. Chẳng hạn:

- Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Ta có $\vec{a} \perp \vec{b}$ khi và chỉ khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$;
- Trường hợp có ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng $\vec{0}$ thì ta quy ước $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$;
- $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$; $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$;
- Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$ thì $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

VÍ DỤ 7

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt bên ASB là tam giác vuông cân tại S và có cạnh $AB = a$. Gọi M là trung điểm của AB . Hãy tính:

- $\vec{DC} \cdot \vec{BS}$;
- $\vec{DC} \cdot \vec{AS}$;
- $\vec{DC} \cdot \vec{MS}$.

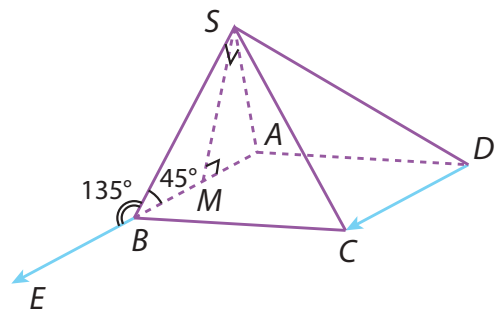
Giải

- Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD$. Gọi E là điểm thuộc tia AB sao cho $\vec{BE} = \vec{DC}$. Ta có:

$$(\vec{DC}, \vec{BS}) = (\vec{BE}, \vec{BS}) = \widehat{EBS}.$$

$\triangle ASB$ vuông cân (tại S) nên $\widehat{SBA} = 45^\circ$.

Suy ra $\widehat{EBS} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, hay $(\vec{DC}, \vec{BS}) = 135^\circ$.



Hình 2.22

Mặt khác, do $AB = a$ nên $AS = BS = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BS} &= |\overrightarrow{DC}| \cdot |\overrightarrow{BS}| \cdot \cos(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) \\ &= a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 135^\circ = a^2 \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BS} = -\frac{a^2}{2}.$$

$$\text{b) } \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AS} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AS}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS}) = a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

c) Tam giác ASB cân tại S và M là trung điểm của cạnh AB nên $SM \perp AB$, hay $\overrightarrow{MS} \perp \overrightarrow{AB}$.
Suy ra $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{MS} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MS} = 0$.

LUYỆN TẬP 7

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Hãy tính:

- $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$;
- $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BD}$;
- $\overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{BB'}$.

VÍ DỤ 8

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa các vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$.

Giải

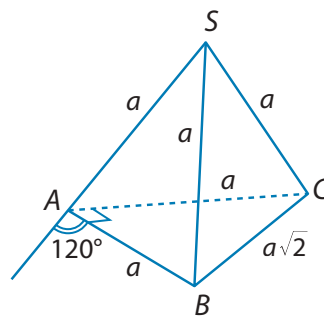
Ta có:

$$\begin{aligned}\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) &= \frac{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB}}{a^2} \\ &= \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{a^2}.\end{aligned}$$

Từ giả thiết suy ra SAB là tam giác đều và ABC là tam giác vuông cân tại A . Từ đó ta tính được:

$$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2} \text{ và } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2}. \text{ Vậy } (\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = 120^\circ.$$



Hình 2.23

LUYỆN TẬP 8

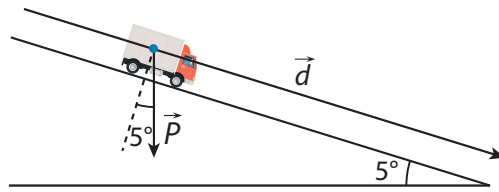
Cho tứ diện $ABCD$ có $DA = DB = a$, $BC = \frac{a}{2}$, $AB \perp BC$ và $\widehat{CBD} = 45^\circ$. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$.

VÍ DỤ 9

Cho biết công A (đơn vị: J) sinh bởi lực $\vec{F}$ tác dụng lên một vật được tính bằng công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$, trong đó $\vec{d}$ là vectơ biểu thị độ dịch chuyển của vật (đơn vị của $|\vec{d}|$ là m) khi chịu tác dụng của lực $\vec{F}$.

Một chiếc xe có khối lượng 1,5 tấn đang đi xuống trên một đoạn đường dốc có góc nghiêng 5° so với phương ngang. Tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30 m (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị), biết rằng trọng lực $\vec{P}$ được xác định bởi công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, với m (đơn vị: kg) là khối lượng của vật và $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Giải



Hình 2.24

Ta có 1,5 tấn = 1 500 kg.

Độ lớn của trọng lực tác dụng lên chiếc xe là: $|\vec{P}| = m|\vec{g}| = 1\,500 \cdot 9,8 = 14\,700 \text{ (N)}$.

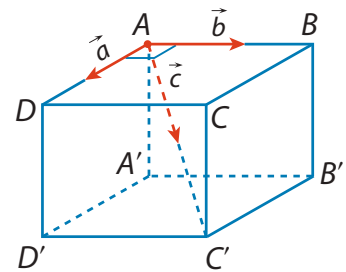
Vectơ $\vec{d}$ biểu thị độ dịch chuyển của xe có độ dài là $|\vec{d}| = 30 \text{ (m)}$ và $(\vec{P}, \vec{d}) = 90^\circ - 5^\circ = 85^\circ$.

Công sinh ra bởi trọng lực $\vec{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30 m là:

$$A = \vec{P} \cdot \vec{d} = |\vec{P}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos(\vec{P}, \vec{d}) = 14\,700 \cdot 30 \cdot \cos 85^\circ \approx 38\,436 \text{ (J)}.$$

LUYỆN TẬP 9

Một chất điểm ở vị trí đỉnh A của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chất điểm chịu tác động bởi ba lực $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC'}$ như Hình 2.25. Cường độ của các lực $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ tương ứng là 10 N, 10 N và 20 N. Tính cường độ hợp lực của $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 2.25

BÀI TẬP

2.3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Chứng minh rằng:

$$\vec{SA} + \vec{SC} = \vec{SB} + \vec{SD}.$$

2.4. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AE} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của đoạn BG . Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ theo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2.5. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và $A'B'C'$. O là giao điểm của hai đường thẳng AB' và $A'B$.

a) Chứng minh rằng các đường thẳng GO và CG' song song với nhau.

b) Tính độ dài của $\overrightarrow{GO}$ trong trường hợp $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng, cạnh bên $AA' = 3$ và đáy là tam giác đều có cạnh bằng 2.

2.6. Trọng lực $\vec{P}$ là lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một vật được tính bởi công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, trong đó m là khối lượng của vật (đơn vị: kg), $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do, có hướng đi xuống và có độ lớn $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Xác định hướng và độ lớn của trọng lực (đơn vị: N) tác dụng lên quả bóng có khối lượng 450 gam.



2.7. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a . Tính:

a) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH}$;

b) $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EG}$;

c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{FE}$.

2.8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng a và $\widehat{BAA'} = \widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Tính độ dài đường chéo AC' .

2.9. Cho tứ diện $ABCD$. Hai điểm M và N theo thứ tự là trung điểm của BC và AD . Cho biết $AB = 10, CD = 6, MN = 7$.

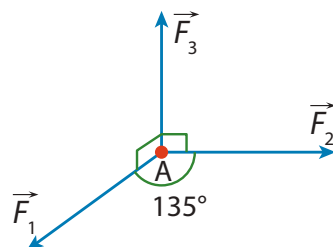
a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.

b) Từ kết quả câu a, hãy tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$.

c) Tính $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC})$.

2.10. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 2a, CD = 2a\sqrt{3}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Biết rằng $MN = a\sqrt{7}$, hãy tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$.

2.11. Một chất điểm A nằm trên mặt phẳng nằm ngang (α), chịu tác động bởi ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$. Các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ có giá nằm trong (α) và $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 135^\circ$, còn lực $\vec{F}_3$ có giá vuông góc với (α) và hướng lên trên. Xác định hợp lực của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, biết rằng độ lớn của ba lực đó lần lượt là 20 N, 15 N và 10 N.

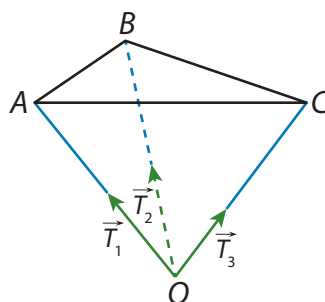


Hình 2.26

2.12. Người ta treo một vật trang trí O có khối lượng $m = 2 \text{ kg}$ trên trần nhà bằng các sợi dây nhẹ, không co giãn tại các điểm A, B và C . Để bảo đảm lực phân phối đều trên các dây và tính thẩm mỹ, người ta chọn độ dài các dây sao cho $OABC$ là tứ diện đều. Gọi $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ và $\vec{T}_3$ lần lượt là các lực căng dây của ba dây treo tại A, B và C . Lấy giá trị gần đúng của gia tốc trọng trường g là 10 m/s^2 .

a) Tính cường độ của hợp lực.

b) Tính cường độ của lực căng trên mỗi dây.



Hình 2.27



Khởi động: Trên bầu trời có hàng loạt máy bay đang di chuyển vào cùng một thời điểm. Làm sao để chúng không va chạm vào nhau? Ngoài thông tin về tốc độ của mỗi máy bay, các kiểm soát viên không lưu (những người chỉ huy, điều hành, đảm bảo an toàn cho tất cả các chuyến bay) phải theo dõi vị trí của các máy bay, giữ khoảng cách tối thiểu là 304,8 m theo độ cao, 9 260 m theo phương ngang trong vùng trời tiếp cận và 18 520 m trong vùng trời đường dài (nguồn: <https://vatm.vn/stkiem-soat-vien-khong-luu-nghe-nghiep-va-tuong-lai-st832.htm>).

Vậy toán học cung cấp cho ta công cụ gì để xác định vị trí các vật thể trong không gian?

I Hệ trục toạ độ trong không gian

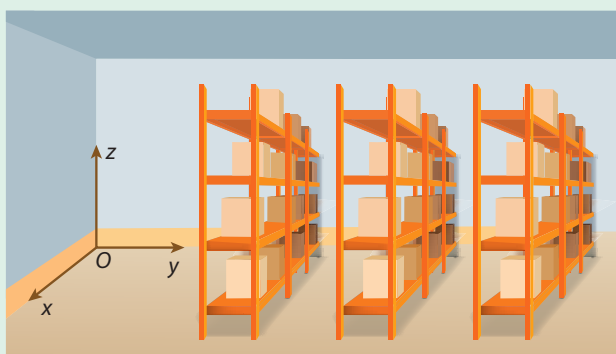
HOẠT ĐỘNG 1

Làm thế nào để định vị một đối tượng trong một nhà kho lớn?

Bác Quân là thủ kho vật liệu của nhà máy. Trong kho có nhiều giá xếp hàng, được xếp song song với một bức tường như Hình 2.28.

Nhà kho rất lớn nên để dễ dàng tìm các thùng hàng, bác dùng ba số để ghi chép vị trí của chúng theo quy ước:

- Số thứ nhất cho biết thùng hàng nằm ở giá nào (các giá được đánh số theo thứ tự từ trái sang phải, theo mũi tên Oy);
- Số thứ hai cho biết thùng hàng nằm ở ngăn thứ mấy của giá (các ngăn của mỗi giá được đánh số thứ tự từ bờ tường phía trong ra ngoài, theo mũi tên Ox);
- Số thứ ba cho biết thùng hàng nằm ở tầng nào (các tầng của mỗi giá được đánh số thứ tự từ thấp lên cao, theo mũi tên Oz).



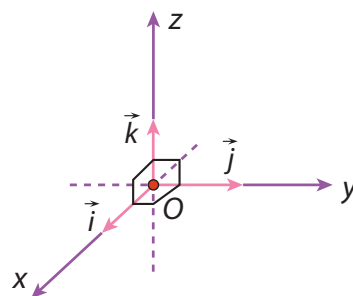
Hình 2.28

- a) Hôm nay, đúng ngày bác Quân nghỉ phép thì người ta lại muốn lấy thùng đựng đinh vít cho bộ phận lắp ráp sử dụng. Biết rằng trong sổ của bác Quân có ghi: "thùng đinh vít: 5; 3; 2". Hãy chỉ dẫn cho người trực kho lấy đúng thùng đinh vít.
- b) Nếu bỏ đi một trong ba số này thì việc xác định vị trí của thùng đinh vít có thuận lợi không?

Trong không gian, nhằm xác định vị trí các điểm, người ta dùng hệ trục tọa độ gồm ba trục Ox , Oy , Oz đồng quy tại điểm O và đôi một vuông góc với nhau (Hình 2.29).



Trong không gian, hệ ba trục Ox , Oy , Oz đôi một vuông góc được gọi là *hệ trục tọa độ vuông góc Oxyz*, hay đơn giản là **hệ tọa độ Oxyz**.



Hình 2.29

Lưu ý:

- Điểm O được gọi là *gốc tọa độ*.
- Ba trục Ox , Oy , Oz lần lượt được gọi là *trục hoành*, *trục tung*, *trục cao*.
- Ba mặt phẳng (Oxy) , (Oxz) , (Oyz) đôi một vuông góc với nhau, được gọi là các **mặt phẳng tọa độ**. Không gian gắn với hệ tọa độ Oxyz được gọi là **không gian Oxyz**.
- Ta quy ước gọi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ tương ứng là ba vectơ đơn vị trên ba trục Ox , Oy , Oz . Từ nay trở đi, nếu không nói gì thêm thì ta hiểu *Không gian Oxyz* đã có bộ ba vectơ đơn vị trên các trục là $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Vì các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ có độ dài bằng 1 và đôi một vuông góc với nhau nên:

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1;$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0.$$

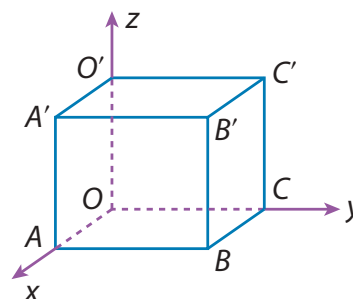
VÍ DỤ 1

Cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$. Hệ tọa độ Oxyz được chọn sao cho các tia Ox , Oy , Oz lần lượt chứa các điểm A , C , O' (Hình 2.30).

- Mặt bên $OCC'O'$ nằm trong mặt phẳng tọa độ nào?
- Ox có vuông góc với mặt bên $OCC'O'$ không?
- Mặt bên $OAA'O'$ có vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oxy) không?

Giải

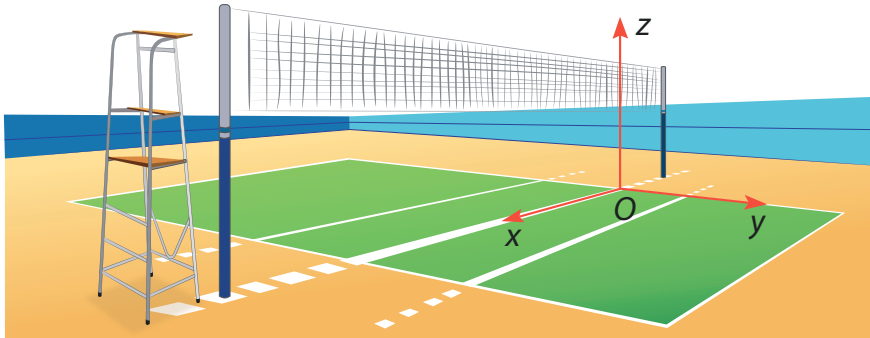
- Mặt bên $OCC'O'$ nằm trong mặt phẳng tọa độ (Oyz) .
- $Ox \perp (Oyz)$ nên $Ox \perp (OCC'O')$.
- Mặt bên $OAA'O'$ nằm trong mặt phẳng tọa độ (Oxz) . Các mặt phẳng tọa độ đôi một vuông góc với nhau nên $(OAA'O') \perp (Oxy)$.



Hình 2.30

LUYỆN TẬP 1

Một sân bóng chuyền với hệ toạ độ $Oxyz$ chọn như ở Hình 2.31. Về mặt kĩ thuật, khi dựng cột và căng lưới, người ta phải đảm bảo cho lưới nằm ở mặt phẳng toạ độ nào? Mặt phẳng đó có vuông góc với mặt sân không?



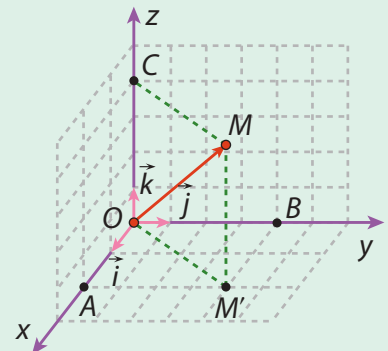
Hình 2.31

II Toạ độ của một điểm

HOẠT ĐỘNG 2

Cho điểm M trong không gian $Oxyz$. Trong ba mặt phẳng toạ độ là ba lưới ô vuông có cạnh bằng đơn vị. Biết rằng $MM' \perp (Oxy)$, $MC \perp Oz$ và vị trí các điểm M' , A , B , C được cho như trong Hình 2.32.

- Biểu diễn $\overrightarrow{OM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{OM'}$ và $\overrightarrow{OC}$.
- Biểu diễn $\overrightarrow{OM'}$ theo hai vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}$.
- Biểu diễn $\overrightarrow{OM}$ theo ba vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.



Hình 2.32

Người ta chứng minh được rằng với mỗi điểm M bất kì trong không gian $Oxyz$ đều có duy nhất một bộ ba số $(x; y; z)$ sao cho $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Ngược lại, với mỗi bộ ba số $(x; y; z)$ đều có duy nhất một điểm M trong không gian thoả mãn hệ thức $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Từ đó, người ta định nghĩa toạ độ của một điểm trong một hệ toạ độ như sau:



Trong không gian $Oxyz$, với mỗi điểm M , bộ ba số $(x; y; z)$ duy nhất thoả mãn đẳng thức $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là **toạ độ của điểm M** , kí hiệu $M(x; y; z)$ hoặc $M = (x; y; z)$. Ba số x, y, z theo thứ tự được gọi là *hoành độ*, *tung độ*, *cao độ* của điểm M .

Lưu ý:

Trong không gian $Oxyz$, gốc toạ độ là $O(0; 0; 0)$.

VÍ DỤ 2

Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $OBCD.O'B'C'D'$ có $B(2; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $O'(0; 0; 1)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại.

Giải

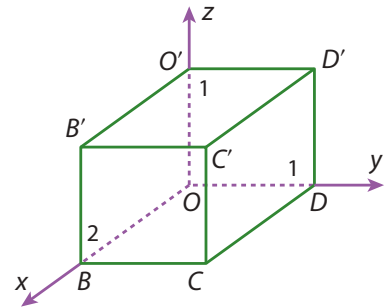
Ta cần tìm tọa độ các đỉnh O, C, B', C', D' .

- Tọa độ đỉnh O là $(0; 0; 0)$.
- Theo giả thiết, ta có $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OO'} = \vec{k}$.

Suy ra:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = 2\vec{i} + \vec{j}; \\ \overrightarrow{OB'} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OO'} = 2\vec{i} + \vec{k}; \\ \overrightarrow{OC'} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OO'} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}; \\ \overrightarrow{OD'} &= \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OO'} = \vec{j} + \vec{k}.\end{aligned}$$

Vậy $C(2; 1; 0)$, $B'(2; 0; 1)$, $C'(2; 1; 1)$, $D'(0; 1; 1)$.



Hình 2.33

LUYỆN TẬP 2

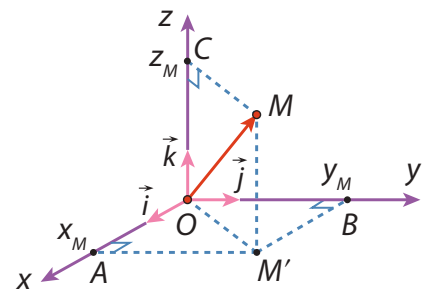
Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; 9)$, $B(6; 1; 0)$ và $C(0; 0; 1)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Tìm tọa độ điểm G .

Nhận xét:

Từ Hoạt động 2 suy ra: Để xác định tọa độ $(x_M; y_M; z_M)$ của điểm M trong không gian $Oxyz$, ta có thể làm như sau:

- Xác định hình chiếu M' của M lên mặt phẳng tọa độ (Oxy) (Hình 2.34);
- Trong mặt phẳng (Oxy) , kẻ $M'A \perp Ox$, $M'B \perp Oy$ ($A \in Ox$, $B \in Oy$) và căn cứ vào các vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ để xác định x_M, y_M ;
- Trong mặt phẳng chứa Oz và M' , kẻ $MC \perp Oz$ ($C \in Oz$) và căn cứ vào $\overrightarrow{OC}$ để tìm z_M .

Ngược lại, khi biết tọa độ của một điểm, ta cũng sẽ xác định được vị trí của điểm đó trong không gian.



Hình 2.34

VÍ DỤ 3

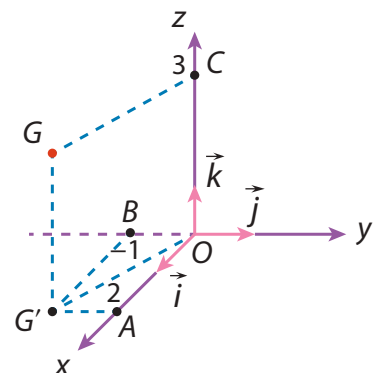
Trong không gian $Oxyz$, xác định vị trí điểm $G(2; -1; 3)$.

Giải

Vì $G(2; -1; 3)$ nên $\overrightarrow{OG} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

Trên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt lấy ba điểm A, B, C sao cho:

$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = -\vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = 3\vec{k}$ (Hình 2.35).



Hình 2.35

• Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), vẽ hình chữ nhật $OAG'B$. Nối G' với O . Ta có $\overrightarrow{OG'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. (1)

• Trong mặt phẳng (COG'), vẽ hình chữ nhật $COG'G$. Khi đó $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG'} + \overrightarrow{OC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \text{ nghĩa là } G(2; -1; 3).$$

Vậy vị trí của điểm cần tìm chính là đỉnh G của hình chữ nhật $COG'G$.

LUYỆN TẬP 3

Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O , có $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với các vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và có $AB = a, AD = b, AA' = c$. Gọi M là trung điểm cạnh CC' . Hãy xác định tọa độ các điểm B, C, C' và M .

III Tọa độ của vectơ

HOẠT ĐỘNG 3

Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$.

a) Xác định điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.

b) Gọi $(x; y; z)$ là tọa độ của điểm M . Hãy biểu diễn $\vec{a}$ theo ba vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Người ta chứng minh được rằng với mỗi vectơ $\vec{a}$ trong không gian $Oxyz$ đều tồn tại duy nhất một bộ ba số $(x; y; z)$ sao cho $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.



Trong không gian $Oxyz$, với mỗi vectơ $\vec{a}$, bộ ba số duy nhất $(x; y; z)$ thỏa mãn đẳng thức $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là **tọa độ của vectơ $\vec{a}$** , kí hiệu $\vec{a} = (x; y; z)$ hoặc $\vec{a}(x; y; z)$.

Nhận xét:

• Tọa độ của điểm M là tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$, nghĩa là:

$$M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z).$$

• $\vec{0} = (0; 0; 0)$;

• $\vec{i} = (1; 0; 0)$; $\vec{j} = (0; 1; 0)$; $\vec{k} = (0; 0; 1)$;

• Nếu $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ thì $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$.

VÍ DỤ 4

Trong không gian Oxyz, cho vectơ $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \frac{3}{4}\vec{k}$ và vectơ $\vec{v} = \left(3; -\frac{5}{4}; 2\right)$.

- Tìm toạ độ của $\vec{u}$.
- Biểu diễn $\vec{v}$ theo các vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
- Tìm toạ độ của $\vec{a} = 2\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$.

Giải

a) Vì $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \frac{3}{4}\vec{k}$ nên $\vec{u} = \left(-2; 3; \frac{3}{4}\right)$.

b) Vì $\vec{v} = \left(3; -\frac{5}{4}; 2\right)$ nên $\vec{v} = 3\vec{i} - \frac{5}{4}\vec{j} + 2\vec{k}$.

c) Biểu diễn $\vec{a}$ qua các vectơ đơn vị:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= 2\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} = 2\left(-2\vec{i} + 3\vec{j} + \frac{3}{4}\vec{k}\right) + \frac{1}{3}\left(3\vec{i} - \frac{5}{4}\vec{j} + 2\vec{k}\right) \\ &= -3\vec{i} + \frac{67}{12}\vec{j} + \frac{13}{6}\vec{k}.\end{aligned}$$

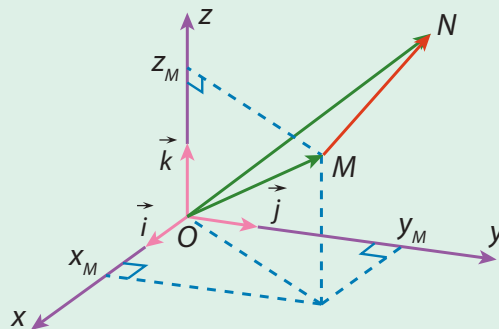
$$\text{Vậy } \vec{a} = \left(-3; \frac{67}{12}; \frac{13}{6}\right).$$

LUYỆN TẬP 4

Trong không gian Oxyz, cho ba vectơ $\vec{a} = (-1; 0; 3)$, $\vec{b} = (2; 1; 0)$, $\vec{c} = (-2; 3; 5)$. Tìm toạ độ của $\vec{x} = 2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - 3\vec{c}$.

HOẠT ĐỘNG 4

Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ và $N(x_N; y_N; z_N)$ (Hình 2.36).



Hình 2.36

- Biểu diễn $\overrightarrow{MN}$ qua các vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON}$.
- Biểu diễn mỗi vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ qua các vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
- Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M)\vec{i} + (y_N - y_M)\vec{j} + (z_N - z_M)\vec{k}$.

Ta có định lí sau:



Trong không gian $Oxyz$, nếu $M(x_M; y_M; z_M)$ và $N(x_N; y_N; z_N)$ thì:

$$\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M; y_N - y_M; z_N - z_M).$$

VÍ DỤ 5

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A(2; -1; 4)$, $B(3; 5; -1)$, $C(-1; 1; 2)$.

- Tìm toạ độ của $\overrightarrow{AB}$.
- Tìm toạ độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Giải

- Vì $A(2; -1; 4)$ và $B(3; 5; -1)$ nên $\overrightarrow{AB} = (3 - 2; 5 - (-1); -1 - 4)$.

Vậy $\overrightarrow{AB} = (1; 6; -5)$.

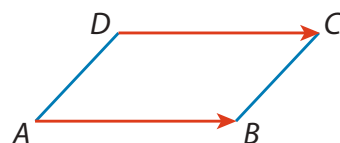
- A, B, C không thẳng hàng nên để $ABCD$ là hình bình hành thì điểm D phải thoả mãn điều kiện $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Gọi $(x_D; y_D; z_D)$ là toạ độ điểm D . Ta có

$$\overrightarrow{DC} = (-1 - x_D; 1 - y_D; 2 - z_D).$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - x_D = 1 \\ 1 - y_D = 6 \\ 2 - z_D = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -2 \\ y_D = -5 \\ z_D = 7. \end{cases}$$

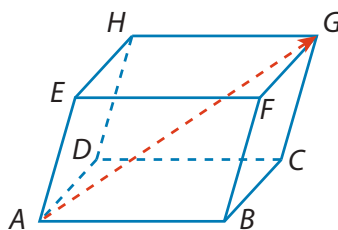
Vậy $D(-2; -5; 7)$.



Hình 2.37

LUYỆN TẬP 5

Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.EFGH$ có $A(1; 0; -1)$, $B(2; 1; 3)$ và $H(4; 3; 4)$ (Hình 2.38).



Hình 2.38

- Tìm toạ độ của đỉnh G .
- Tìm toạ độ của $\overrightarrow{AG}$.

VẬN DỤNG

Trong không gian $Oxyz$, một vật đi từ điểm $A(2; 3; 0)$ đến điểm $B(-1; 1; 2)$ rồi tiếp tục đi đến điểm $C(3; -2; -1)$. Tìm vector biểu thị độ dịch chuyển của vật khi:

- Vật đi từ điểm A đến điểm B ;
- Vật đi từ điểm A đến điểm C .

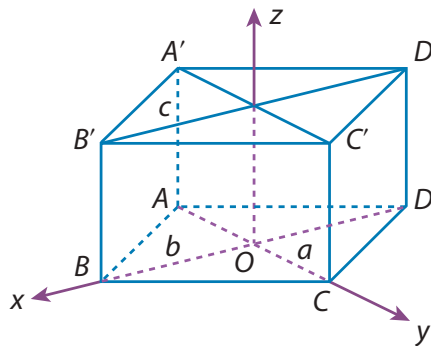
BÀI TẬP

2.13. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$. Các đỉnh A, C, O' tương ứng thuộc các tia Ox, Oy, Oz và $OA = 3, OC = 4, OO' = 2$. Tìm tọa độ của:

- Vectơ $\overrightarrow{O'B}$;
- Điểm G , với G là trung điểm của đoạn thẳng $O'B$.

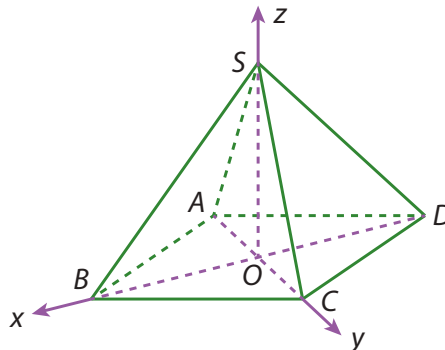
2.14. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi. Hai đường chéo AC, BD của đáy có chiều dài lần lượt là a, b . Cạnh bên $AA' = c$. Hệ tọa độ $Oxyz$ có gốc trùng với giao điểm O của hai đường chéo hình thoi $ABCD$, có tia Ox trùng với tia OB và tia Oy trùng với tia OC (Hình 2.39). Hãy xác định:

- Toạ độ các đỉnh của hình hộp;
- Toạ độ vectơ $\overrightarrow{BD'}$.



Hình 2.39

2.15. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là giao điểm của AC và BD . Biết $SA = a, SO = h$. Xét hệ tọa độ $Oxyz$ với các tia Ox, Oy, Oz tương ứng trùng với các tia OB, OC, OS như ở Hình 2.40. Hãy xác định tọa độ các điểm S, A, B, C, D .



Hình 2.40

2.16. Một vật ở trạng thái cân bằng khi hợp của tất cả các lực tác dụng lên vật được biểu diễn bằng vectơ–không.

Trong không gian $Oxyz$, biết rằng đang có ba lực biểu thị bởi ba vectơ $\vec{F}_1 = (9; 7; 2)$, $\vec{F}_2 = (1; 5; 10)$ và $\vec{F}_3 = (9; -2; -7)$ tác dụng lên một vật. Hãy tìm tọa độ của vectơ biểu thị lực $\vec{F}_4$ để khi tác dụng thêm lực này vào vật thì vật ở trạng thái cân bằng.

Khởi động: Trong không gian $Oxyz$, một người tác động một lực không đổi $\vec{F} = (2; 3; -1)$ vào một vật đang ở gốc toạ độ O và làm cho vật dịch chuyển thẳng từ O đến điểm $M(1; 2; 1)$. Biết lực tính bằng newton (N) và đơn vị trên mỗi trục toạ độ là mét, làm thế nào để tính công A (đơn vị: J) sinh ra bởi lực $\vec{F}$ trong tình huống này?

I Biểu thức toạ độ của tổng, hiệu các vectơ và tích một số với một vectơ

HOẠT ĐỘNG 1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$.

- Hãy biểu diễn các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ theo ba vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
- Tính $\vec{a} + \vec{b}$ theo $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, từ đó tìm toạ độ của vectơ $\vec{a} + \vec{b}$.

Từ Hoạt động 1, ta suy ra là có thể tính toạ độ của tổng $\vec{a} + \vec{b}$ khi biết toạ độ của các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Hoàn toàn tương tự, ta có thể tính được toạ độ của các vectơ $\vec{a} - \vec{b}, k\vec{a}$ (k là số thực tùy ý) và có định lí sau:

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1), \vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ và số thực k tùy ý. Ta có:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2);$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2);$$

$$k\vec{a} = (kx_1; ky_1; kz_1).$$

Nhận xét:

Cho hai vectơ $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và

chỉ khi tồn tại số thực k sao cho

$$\begin{cases} x_1 = kx_2 \\ y_1 = ky_2 \\ z_1 = kz_2. \end{cases}$$

Nếu x_2, y_2, z_2 đều khác 0 thì điều kiện trên tương đương với:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

VÍ DỤ 1

Cho $\vec{a} = (2; -1; 5), \vec{b} = (0; 3; -3), \vec{c} = (1; 4; -2)$. Tìm toạ độ của vectơ $\vec{d} = 2\vec{a} - \frac{1}{5}\vec{b} + 3\vec{c}$.

Giải

Ta có $2\vec{a} = (4; -2; 10); \frac{1}{5}\vec{b} = (0; \frac{3}{5}; -\frac{3}{5}); 3\vec{c} = (3; 12; -6)$.

Do đó $\vec{d} = (4 - 0 + 3; -2 - \frac{3}{5} + 12; 10 - (-\frac{3}{5}) + (-6))$, hay $\vec{d} = (7; \frac{47}{5}; \frac{23}{5})$.

LUYỆN TẬP 1

Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(5; -3; 0)$, $B(2; 1; -1)$, $C(4; 1; 2)$.

- Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{AB} + \vec{AC} - 5\vec{BC}$.
- Tìm điểm N sao cho $2\vec{NA} = -\vec{NB}$.

VÍ DỤ 2

Trong không gian Oxyz, cho bốn điểm $A(0; 1; -2)$, $B(2; -1; 3)$, $C(1; 3; -2)$, $D(5; -1; 8)$.

- Ba điểm A, B, C có thẳng hàng không?
- Chứng minh rằng hai đường thẳng AB và CD song song với nhau.

Giải

- Từ tọa độ của ba điểm đã cho, ta tính được $\vec{AB} = (2; -2; 5)$, $\vec{AC} = (1; 2; 0)$.

Vì $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{-2}$ nên hai vectơ $\vec{AB}, \vec{AC}$ không cùng phương.

Suy ra ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

- Ta có $\vec{CD} = (4; -4; 10)$. Xét tọa độ của hai vectơ $\vec{AB}, \vec{CD}$, ta thấy:

$$\frac{4}{2} = \frac{-4}{-2} = \frac{10}{5}.$$

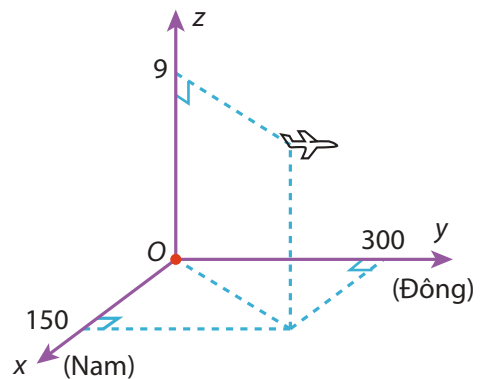
Các đẳng thức trên chứng tỏ $\vec{AB}$ và $\vec{CD}$ là hai vectơ cùng phương. Suy ra AB và CD song song hoặc trùng nhau. Nhưng hai đường thẳng này không thể trùng nhau (do A, B, C không thẳng hàng). Vậy $AB \parallel CD$.

LUYỆN TẬP 2

Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(4; 1; -1)$, $B(2; -1; 5)$, $C(3; 0; 2)$. Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng.

VẬN DỤNG 1

Trong Hình 2.41, gốc tọa độ O là nơi máy bay xuất phát, trục Ox theo hướng Nam, trục Oy theo hướng Đông, trục Oz theo hướng thẳng đứng. Đơn vị trên các trục là km. Vào thời điểm 9h30 sáng, máy bay ở độ cao 9 km, cách điểm xuất phát theo hướng Nam 150 km và theo hướng Đông 300 km. Phi công để chế độ bay tự động, với vận tốc theo hướng Đông 750 km/h, độ cao không đổi. Biết rằng gió thổi theo hướng Bắc với vận tốc 10 m/s. Tìm tọa độ của máy bay lúc 10h30, với giả định là trong khoảng thời gian 9h30 đến 10h30, vận tốc và hướng của gió không thay đổi.



Hình 2.41

HOẠT ĐỘNG 2

Trong không gian $Oxyz$, tam giác ABC có $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$.

- Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB . Tìm tọa độ điểm M .
- Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Tìm tọa độ điểm G .



- Nếu M là trung điểm của đoạn thẳng AB và $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ thì:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

- Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC và $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$ thì:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

VÍ DỤ 3

Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác MNP có $M(3; 7; 2)$, $N(5; 1; -1)$ và $P(4; -4; -2)$.
Tìm tọa độ:

- Trung điểm I của đoạn thẳng MN ;
- Trọng tâm G của tam giác MNP .

Giải

- Áp dụng công thức tính tọa độ trung điểm cho hai điểm $M(3; 7; 2)$ và $N(5; 1; -1)$, ta có $I\left(\frac{3+5}{2}; \frac{7+1}{2}; \frac{2-1}{2}\right)$, hay $I\left(4; 4; \frac{1}{2}\right)$.
- Áp dụng công thức tính tọa độ trọng tâm theo tọa độ các đỉnh của tam giác MNP , ta có $G\left(\frac{3+5+4}{3}; \frac{7+1-4}{3}; \frac{2-1-2}{3}\right)$, hay $G\left(4; \frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

LUYỆN TẬP 3

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 3; -5)$, $M\left(\frac{3}{2}; 2; -\frac{1}{2}\right)$, $G\left(2; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

- Tìm tọa độ điểm B sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB .
- Tìm tọa độ điểm C sao cho G là trọng tâm của tam giác ABC .



II Biểu thức tọa độ của tích vô hướng hai vectơ

HOẠT ĐỘNG 3

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$.

- Biểu diễn $\vec{a}$ và $\vec{b}$ qua các vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
- Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ được xác định theo công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Nhận xét:

Từ công thức tính tích vô hướng hai vectơ theo tọa độ, ta suy ra:

- Nếu $\vec{a} = (x; y; z)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- Nếu $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$ thì khoảng cách giữa hai điểm A, B là:

$$AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

- Nếu hai vectơ $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ khác $\vec{0}$ thì:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}};$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

VÍ DỤ 4

Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a} = (2; 1; -2)$ và $\vec{b} = (-2; 3; -2)$.

- Tìm $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
- Tìm $(\vec{a}, \vec{b})$.

Giải

- Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-2)$, hay $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$.

$$\text{b) } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}}.$$

Suy ra $(\vec{a}, \vec{b}) \approx 75,96^\circ$.

LUYỆN TẬP 4

Trong không gian Oxyz, hình chóp S.ABC có $S(3; 1; 3), A(2; 3; 1), B(4; 3; 3), C(2; 3; 1)$. M là trung điểm của BC. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{SM}$.

VÍ DỤ 5

Trong không gian Oxyz, cho tứ diện ABCD với $A(1; 3; -2), B(3; 2; -4), C(2; 1; 0), D(3; 5; -1)$.

- Chứng minh rằng $AB \perp CD$.
- Chứng minh rằng BCD là tam giác đều.
- Tính số đo của $\widehat{AMD}$ với M là trung điểm của BC (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Giải

a) Từ giả thiết, ta tìm được $\overrightarrow{AB} = (2; -1; -2)$, $\overrightarrow{CD} = (1; 4; -1)$. Suy ra:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 2.1 + (-1).4 + (-2).(-1) = 0. \text{ Đẳng thức này chứng tỏ } AB \perp CD.$$

b) Tính ba cạnh của tam giác BCD :

$$\text{Vì } \overrightarrow{CD} = (1; 4; -1) \text{ nên } CD = |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Để tính hai cạnh BC và BD , ta áp dụng công thức tính khoảng cách giữa hai điểm và có:

$$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(2-3)^2 + (1-2)^2 + (0-(-4))^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2};$$

$$BD = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{(3-3)^2 + (5-2)^2 + (-1-(-4))^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Từ ba đẳng thức trên suy ra BCD là tam giác đều.

c) Ta có $\widehat{AMD} = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MD})$.

Vì M là trung điểm của BC nên $M\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; -2\right)$. Suy ra:

$$\overrightarrow{MA} = \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0\right) \text{ và } \overrightarrow{MD} = \left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}; 1\right).$$

Từ đó ta tính được:

$$\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MD}) = \frac{-\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2} + 0 \cdot 1}{\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vậy $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MD}) = 54,74^\circ$, hay $\widehat{AMD} \approx 55^\circ$.

LUYỆN TẬP 5

Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABC$ với $S(-2; 1; 3)$, $A(-4; 3; 2)$, $B(0; 2; 1)$, $C(-2; 1 + \sqrt{3}; 3)$.

a) Chứng minh rằng hai cạnh bên SA, SB bằng nhau và vuông góc với nhau.

b) Tính số đo của $\widehat{ASC}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

VÍ DỤ 6

Trong Vật lý, ta biết rằng nếu lực $\vec{F}$ tác động vào một vật và làm vật dịch chuyển theo đoạn thẳng từ M đến N , thì công A sinh bởi lực $\vec{F}$ được tính bằng công thức $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN}$. Hãy giải quyết bài toán được đặt ra ở phần Khởi động.

Giải

Theo bài toán nêu ở phần Khởi động thì trong không gian $Oxyz$, một người đã tác động một lực không đổi $\vec{F} = (2; 3; -1)$ vào một vật đang ở gốc tọa độ O và làm cho vật dịch chuyển thẳng từ O đến điểm $M(1; 2; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{OM} = (1; 2; 1)$. Từ đó ta tính được công sinh ra bởi lực $\vec{F}$ là:

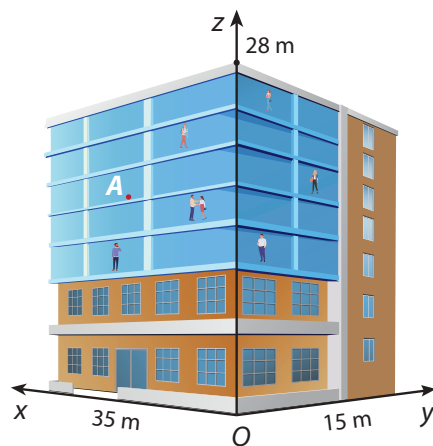
$$A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{OM} = 2.1 + 3.2 + (-1).1 = 7.$$

Như vậy công sinh ra bởi lực $\vec{F}$ trong tình huống này là $A = 7$ (J).

VẬN DỤNG 2

Một toà nhà có dạng hình hộp chữ nhật với kích thước chiều dài 35 m, chiều rộng 15 m, chiều cao 28 m. Người ta định vị các vị trí trong toà nhà dựa vào một hệ trục tọa độ $Oxyz$ như Hình 2.42.

- Chị Hương đang đứng ở vị trí $A(20; 5; 20)$ và di chuyển đến thang máy để xuống sảnh chờ đón khách. Biết vị trí vào thang máy có hoành độ $x = 15$ và tung độ $y = 3$. Hỏi chị Hương mất bao nhiêu giây để di chuyển, nếu từ vị trí A có thể đi thẳng đến cửa thang máy và chị ấy đi bộ với tốc độ 1,5 m/s?
- Chị Hương vừa đặt một bộ phát sóng wifi trong phòng làm việc của mình tại vị trí có tọa độ $(20; 5; 20)$. Do yêu cầu của công việc, sáng nay chị Hương phải đứng ở bàn lễ tân có tọa độ $(5; 0; 0)$ để đón khách. Hỏi trong lúc đứng ở bàn lễ tân chờ khách thì điện thoại của chị có bắt được sóng wifi phát ra từ phòng làm việc của mình hay không? Biết rằng vùng phủ sóng bộ phát wifi nói trên có bán kính 30 mét.

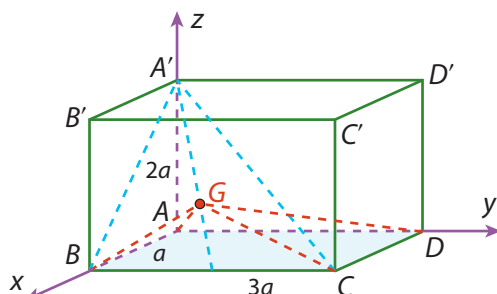


Hình 2.42

BÀI TẬP

- 2.17.** Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (2; -3; 3)$, $\vec{b} = (4; 0; 2)$, $\vec{c} = (-1; 4; -5)$. Tìm:
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + 2\vec{c})$;
 - $|\vec{a} - \vec{b}|$.
- 2.18.** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC . Biết tọa độ các đỉnh là $A(0; 1; 1)$, $B(0; 1; 2)$, $C(-1; 1; 1)$.
- Tính độ dài các cạnh của tam giác.
 - Tính $\widehat{ABC}$.
- 2.19.** Trong không gian $Oxyz$, cho hình tứ diện $ABCD$. Biết rằng $A(1; 0; -1)$, $B(-3; 2; 0)$, $C(1; 1; 4)$, $D(-2; 1; 5)$.
- Tìm tọa độ của điểm E sao cho $\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{AC} - \vec{AD}$.
 - Tìm tọa độ trung điểm M của cạnh AB và trọng tâm G của tam giác ABC .
- 2.20.** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; 0; 1)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$ và $\vec{c} = (-4; 3; m)$.
- Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
 - Tìm m để vectơ $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ vuông góc với $\vec{c}$.

2.21. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc toạ độ và các đỉnh B, D, A' tương ứng thuộc các tia Ox, Oy, Oz như trong Hình 2.43. Cho biết $AB = a, AD = 3a, AA' = 2a$ ($a > 0$). Gọi G là trọng tâm của tam giác $A'BC$.



Hình 2.43

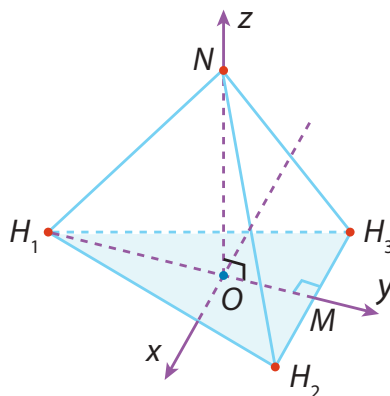
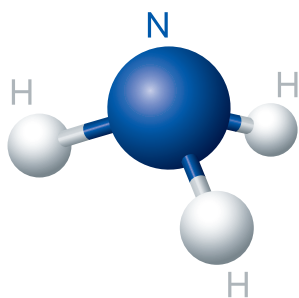
- Tìm toạ độ điểm G .
- Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng $(ABCD)$.
- Tính thể tích khối chóp $G.ABCD$.

2.22. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là km), một máy bay đang bay ở độ cao 10 km, tại vị trí $A(500; 200; 10)$. Theo hành trình dự định, máy bay sẽ phải bay qua vị trí $B(700; 200; 10)$. Tuy nhiên do thời tiết xấu, máy bay phải chuyển hướng bay đến vị trí $C(600; 300; 8)$.

- Tính khoảng cách từ A đến C .
- Hỏi trong quãng thời gian tránh vùng thời tiết xấu, máy bay đã phải bay chệch hướng dự định một góc bao nhiêu độ?

2.23. Trong Hoá học, cấu tạo của phân tử ammoniac (NH_3) có dạng hình chóp tam giác đều mà đỉnh là nguyên tử nitrogen (N) và đáy là tam giác $H_1H_2H_3$ với H_1, H_2, H_3 là vị trí của ba nguyên tử hydrogen (H). Góc tạo bởi liên kết $H-N-H$, có hai cạnh là hai đoạn thẳng nối N với hai trong ba điểm H_1, H_2, H_3 (chẳng hạn như $\widehat{H_1NH_2}$), được gọi là góc liên kết của phân tử NH_3 . Góc này xấp xỉ 107° .

(Nguồn: <https://en.wikipedia.org/wiki/Ammonia>)



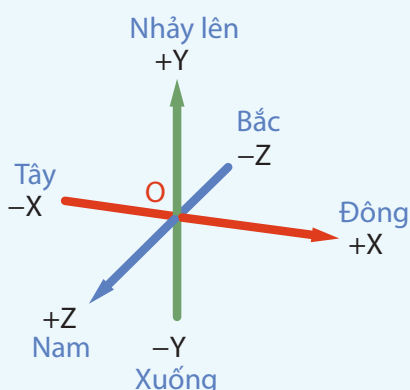
Hình 2.44

Trong không gian $Oxyz$, cho một phân tử NH_3 được biểu diễn bởi hình chóp tam giác đều $N.H_1H_2H_3$ với O là tâm của đáy. Nguyên tử nitrogen được biểu diễn bởi điểm N thuộc trục Oz , ba nguyên tử hydrogen ở các vị trí H_1, H_2, H_3 , trong đó $H_1(0; -2; 0)$ và H_2H_3 song song với trục Ox (Hình 2.44).

- Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử hydrogen.
- Tính khoảng cách giữa nguyên tử nitrogen với mỗi nguyên tử hydrogen (làm tròn các kết quả tính toán đến hàng phần trăm).

Trò chơi Minecraft

Minecraft là một trò chơi mang tính chất khám phá, xây dựng và sáng tạo thế giới trong một không gian ảo. Hiện nay, trò chơi này cũng đã có phiên bản dành cho giáo dục (Minecraft Education). Trong trò chơi này, người chơi sử dụng các khối lập phương (block) để xây dựng công trình, tìm kiếm, thu thập tài nguyên, chế tạo và cũng có thể chiến đấu. Điểm đáng chú ý là thế giới trong trò chơi này được định vị bằng hệ tọa độ (X, Y, Z) gần giống với hệ trục tọa độ trong không gian Oxyz mà chúng ta đang nghiên cứu. Mỗi đơn vị trong hệ tọa độ tương ứng với một khối lập phương mà người chơi xây dựng hoặc xóa bỏ. Mỗi đối tượng trong Minecraft được quy định bằng một tọa độ (X, Y, Z), trong đó:



- Tọa độ X biểu thị khoảng cách dọc theo mặt phẳng nằm ngang từ Đông sang Tây, nhận giá trị dương nếu vật đang ở hướng Đông so với gốc O và nhận giá trị âm nếu vật đang ở hướng Tây so với gốc O;
- Tọa độ Y biểu thị khoảng cách dọc theo mặt phẳng thẳng đứng từ trên xuống dưới. Nếu vật nhảy lên phía trên so với O thì Y nhận giá trị dương và ngược lại Y nhận giá trị âm;
- Tọa độ Z biểu thị khoảng cách về phía Bắc hoặc Nam so với O. Giá trị của Z là số dương nếu vật đang ở hướng Nam so với gốc O và nhận giá trị âm nếu vật đang ở hướng Bắc so với gốc O.

Chẳng hạn, khi cho hiển thị vị trí mà trên màn hình ghi kết quả **(3, 98, 1)** thì nghĩa là người chơi đang đứng ở vị trí cách gốc O về phía Đông 3 đơn vị (3 block), nhảy lên cao so với mặt đất 98 đơn vị và cách gốc O về phía Nam 1 đơn vị.

Do một số quy định về yếu tố kỹ thuật, hệ trục tọa độ trong thế giới Minecraft có chút khác biệt với hệ trục tọa độ Oxyz ta đã học (chẳng hạn trục OY trong Minecraft có vai trò tương tự trục Oz trong hệ trục tọa độ Oxyz và ngược lại).

Trò chơi cho thấy tầm quan trọng của việc định vị được các tọa độ trong không gian. Trong trò chơi này, khi nắm được tọa độ, người chơi có thể trở về vị trí ban đầu một cách nhanh chóng khi gặp sự cố, định vị các khối xây dựng chính xác tạo nên cấu trúc độc đáo, sáng tạo, hay đánh dấu các kho tài nguyên, vật phẩm để quay trở lại lấy khi cần, v.v...

(Nguồn: https://www.digminecraft.com/getting_started/coordinate_system.php)

BÀI TẬP TỰ LUẬN

2.24. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 3)$, $B(2; -2; 1)$, $C(-1; -2; -3)$.

- Chứng tỏ ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác.
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
- Xác định điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Tìm tọa độ tâm I và chu vi của hình bình hành này.

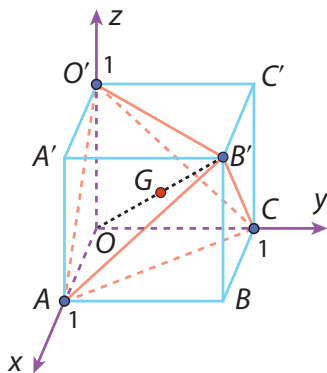
2.25. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc tọa độ O , các đỉnh B, D, A' tương ứng thuộc các tia Ox, Oy, Oz và $AB = 1, AD = 2, AA' = 3$.

- Tìm tọa độ các đỉnh của hình hộp.
- Tìm điểm E trên đường thẳng DD' sao cho $B'E \perp A'C$.

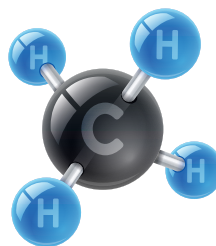
2.26. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$, $D(2; -1; 1)$. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$.

2.27. a) Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $OABC.O'A'B'C'$ với $O'(0; 0; 1)$, $A(1; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$ (Hình 2.45). G là trung điểm của đường chéo OB' của hình lập phương.

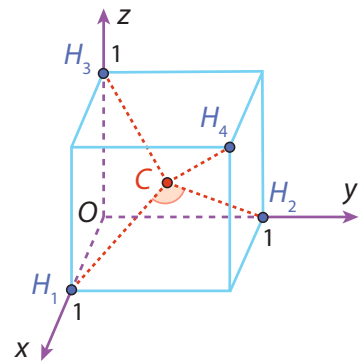
- Chứng minh rằng $ACO'B'$ là một tứ diện đều.
- Tìm tọa độ các điểm B' và G . Chứng minh rằng $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GO'} + \overrightarrow{GB'} = \vec{0}$. Điểm G được gọi là trọng tâm của tứ diện đều $ACO'B'$.



Hình 2.45



Hình 2.46



Hình 2.47

- Methane là một chất khí và là nguồn nguyên liệu quan trọng trong đời sống cũng như trong công nghiệp. Công thức phân tử của methane là CH_4 . Mỗi phân tử CH_4 được cấu tạo bởi bốn nguyên tử hydrogen H và một nguyên tử carbon C . Trong cấu tạo của phân tử methane, bốn nguyên tử hydrogen tạo thành bốn đỉnh của một tứ diện đều và nguyên tử carbon ở vị trí

trọng tâm của tứ diện đó (Hình 2.46). Người ta gọi góc liên kết là góc tạo bởi liên kết H–C–H. Đó là góc có hai cạnh là hai đoạn thẳng nối nguyên tử C với hai trong bốn nguyên tử H, chẳng hạn như $\widehat{H_1CH_2}$ (nguồn: <https://www.worldatlas.com/space/why-methane-can-be-a-sign-of-life-outside-of-earth.html>). Để tính góc liên kết trong phân tử methane, người ta chọn hệ trục tọa độ mà các nguyên tử hydrogen lần lượt nằm ở các vị trí $H_1(1; 0; 0)$, $H_2(0; 1; 0)$, $H_3(0; 0; 1)$, $H_4(1; 1; 1)$ (Hình 2.47). Tính số đo của góc liên kết (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

- 2.28.** Trong không gian Oxyz, lực không đổi $\vec{F} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 10\vec{k}$ làm di chuyển một vật dọc theo đoạn thẳng từ $M(1; 0; 2)$ đến $N(5; 3; 8)$. Tìm công sinh ra nếu khoảng cách được tính bằng mét và lực được tính bằng newton.
- 2.29.** Trong không gian Oxyz, một máy bay đang bay ở vị trí $A(250; 465; 15)$ với tốc độ $\vec{v} = (455; 620; 220)$ thì vào một vùng có gió với tốc độ $\vec{u} = (37; -12; 4)$ (đơn vị tốc độ là km/giờ). Máy bay bay trong vùng gió này mất 30 phút. Tìm vị trí của máy bay sau 30 phút đó.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Đối với các bài toán dưới đây, nếu không nói gì thêm thì ta hiểu là xét trong không gian Oxyz.

- 2.30.** Cho tứ diện ABCD. Khi đó, vectơ $\vec{AB} - \vec{AC}$ bằng

A. $\vec{BC}$.
B. $\vec{AD}$.
C. $\vec{CB}$.
D. $\vec{DA}$.

- 2.31.** Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Khi đó, vectơ $\vec{AB} + \vec{A'D'} + \vec{CC'}$ bằng

A. $\vec{A'C}$.
B. $\vec{AC'}$.
C. $\vec{CA'}$.
D. $\vec{C'A}$.

- 2.32.** Cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 4; 1)$, $\vec{b} = (-4; 0; 4)$. Toạ độ của vectơ $\vec{a} + \vec{b}$ là

A. $(-2; -4; -5)$.
B. $(-2; -4; 5)$.
C. $(-2; 4; 5)$.
D. $(2; 4; -5)$.

- 2.33.** Cho ba điểm $A(3; 5; 2)$, $B(2; 2; 1)$, $C(1; -1; 4)$. Toạ độ của vectơ $\vec{AB} + \vec{AC}$ là

A. $(3; 9; 1)$.
B. $(-3; -9; 1)$.
C. $(6; 6; 7)$.
D. $(1; 3; -3)$.

2.34. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $OABC.O'A'B'C'$ có $A(a; 0; 0)$, $C(0; a; 0)$, $O'(0; 0; a)$. M là trung điểm đoạn AC' . Toạ độ của M là

- A. $\left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$.
 B. $\left(-\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}\right)$.
 C. $\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$.
 D. $\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; -\frac{a}{2}\right)$.

2.35. Cho ba điểm $A(0; 4; 2)$, $B(2; 0; 1)$, $C(1; -1; 0)$. Trọng tâm của tam giác ABC là

- A. $G\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.
 B. $G(3; 3; 3)$.
 C. $G(-1; -1; -1)$.
 D. $G(1; 1; 1)$.

2.36. Tam giác ABC có $A(1; 0; 1)$, $B(0; 2; 3)$, $C(2; 1; 0)$. Độ dài đường trung tuyến AM là

- A. $\frac{1}{2}$.
 B. $\frac{\sqrt{11}}{2}$.
 C. $\frac{\sqrt{12}}{2}$.
 D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

2.37. Cho ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt có cường độ 2 N, 4 N, 5 N được đặt vào chất điểm M . Biết rằng góc tạo bởi hai lực bất kì trong ba lực đều bằng 60° . Cường độ của hợp lực tác dụng lên M là

- A. 45 N.
 B. $\sqrt{45}$ N.
 C. $\sqrt{83}$ N.
 D. 83 N.

2.38. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (1; 1; 1)$ và $\vec{b} = (-1; 2; 1)$ bằng

- A. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$.
 B. $-\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$.
 C. 2.
 D. $\sqrt{2}$.

2.39. Nếu $\vec{a} = (1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; -3)$ thì $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{22}}{11}$.
 B. $\frac{11}{2}$.
 C. $\frac{11}{\sqrt{22}}$.
 D. $\frac{2}{11}$.

2.40. Hình bình hành $ABCD$ có $A(1; 0; 3)$, $B(2; 3; -4)$, $C(-3; 1; 2)$. Toạ độ điểm D là

- A. $(-4; -2; 9)$.
 B. $(2; -4; 5)$.
 C. $(-2; 4; -5)$.
 D. $(4; 2; -9)$.

Hiểu rõ dữ liệu hơn để quyết định hợp lí hơn



CHƯƠNG 3

Các số đặc trưng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm

Dữ liệu thống kê có mặt khắp nơi trong thế giới quanh ta. Biết phân tích dữ liệu là một khả năng cần có của mỗi người trong xã hội. Để phân tích dữ liệu, các số đặc trưng đo xu thế trung tâm và mức độ phân tán là những công cụ quan trọng. Đối với mẫu số liệu ghép nhóm, ta đã nghiên cứu cách tính và ý nghĩa của các số đặc trưng đo xu thế trung tâm. Vậy các số đặc trưng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm thì sao – xác định chúng như thế nào và chúng có ý nghĩa gì?

- ◆ Tính được các số đặc trưng đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu ghép nhóm: khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, phương sai, độ lệch chuẩn;
- ◆ Giải thích được ý nghĩa và vai trò của các số đặc trưng đo mức độ phân tán trong phân tích mẫu số liệu, từ đó rút ra được những kết luận hợp lí cho một số trường hợp đơn giản;
- ◆ Nhận biết được mối liên hệ giữa thống kê với thực tiễn.

KHOẢNG BIẾN THIÊN VÀ KHOẢNG TƯ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Khởi động: Công ty sản xuất giống cây trồng đã trồng thử nghiệm giống dứa mới E. Đến mùa thu hoạch, công ty xem xét sản phẩm thì thấy độ ngọt và hàm lượng các loại vitamin nói chung là đạt yêu cầu.

Để có thêm thông tin cho việc quyết định có đưa vào sản xuất đại trà giống dứa E hay không, công ty muốn đánh giá sự đồng đều về khối lượng của các quả dứa đã thu hoạch. Nhằm phân tích sự đồng đều này, anh Thành, kĩ sư của công ty, dự định tính khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu được cung cấp – một mẫu số liệu ghép nhóm.



Nhưng mẫu số liệu ghép nhóm không cho thông tin chi tiết về khối lượng của từng quả dứa nên anh Thành không thể tính chính xác khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu. Anh ấy đã sử dụng phương pháp nào để ước tính hai số đặc trưng này cho mẫu ghép nhóm đã có?

I Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm

HOẠT ĐỘNG 1

Dưới đây là bảng số liệu ghép nhóm về khối lượng 100 quả dứa mà người ta lấy ngẫu nhiên trong số dứa đã thu hoạch:

Bảng 3.1. Khối lượng của 100 quả dứa giống E

Khối lượng (gam)	Số quả	Khối lượng (gam)	Số quả
[700; 800)	6	[1 100; 1 200)	15
[800; 900)	10	[1 200; 1 300)	22
[900; 1 000)	14	[1 300; 1 400)	6
[1 000; 1 100)	23	[1 400; 1 500)	4

Khối lượng của quả nặng nhất và quả nhẹ nhất có thể chênh lệch nhau nhiều nhất là bao nhiêu?

Ta đã biết rằng khoảng biến thiên của một mẫu số liệu không ghép nhóm (mẫu số liệu gốc) là hiệu giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đó. Ở đây, do không biết khối lượng của quả nhẹ nhất và quả nặng nhất nên người ta lấy sự chênh lệch lớn nhất có thể có giữa khối lượng các quả dứa để ước tính khoảng biến thiên cho mẫu số liệu.

Tổng quát, người ta định nghĩa:



Khoảng biến thiên của một mẫu số liệu ghép nhóm (có tần số của nhóm đầu tiên và nhóm cuối cùng đều dương), kí hiệu R , là hiệu số giữa đầu mút phải của nhóm cuối cùng và đầu mút trái của nhóm đầu tiên.

Như vậy với mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi *Bảng 3.2* dưới đây, trong đó $n_1 > 0$ và $n_k > 0$, thì khoảng biến thiên là $R = a_{k+1} - a_1$.

Bảng 3.2

Nhóm	$[a_1; a_2)$	$[a_2; a_3)$	...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

NHẮC LẠI

Trong *Bảng 3.2*, cỡ mẫu là $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Ý nghĩa của khoảng biến thiên

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là một giá trị xấp xỉ cho khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc, được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu. Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

VÍ DỤ 1

Bảng 3.3 biểu thị kết quả điều tra thời gian sử dụng Internet hằng ngày của một số người.

Bảng 3.3. Thời gian sử dụng Internet hằng ngày

Thời gian (phút)	[30; 60)	[60; 90)	[90; 120)	[120; 150)	[150; 180)
Số người	2	4	10	5	3

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu đã cho. Kết quả cho biết điều gì?

Giải

Đầu mút phải của nhóm ghép cuối cùng là 180, đầu mút trái của nhóm ghép đầu tiên là 30. Vậy khoảng biến thiên của mẫu số liệu là $R = 180 - 30 = 150$.

Kết quả này cho biết thời gian sử dụng Internet hằng ngày của các thành viên thuộc nhóm người được điều tra chênh lệch nhau nhiều nhất là 150 phút.

LUYỆN TẬP 1

Bảng 3.4 thống kê thành tích nhảy xa của một số học sinh lớp 12. Tìm khoảng biến thiên thành tích nhảy xa của số học sinh này.

Bảng 3.4. Thành tích nhảy xa của một số học sinh lớp 12

Thành tích (cm)	[150; 180)	[180; 210)	[210; 240)	[240; 270)	[270; 300)
Số học sinh	3	5	28	14	8

VÍ DỤ 2

Để chuẩn bị mở một trung tâm thể dục thể thao, anh Dũng đã tiến hành điều tra tuổi thọ của máy chạy bộ do hai hãng X, Y sản xuất. *Bảng 3.5* biểu thị hai mẫu số liệu mà anh thu thập được qua Internet.

Bảng 3.5. Tuổi thọ của máy chạy bộ (đơn vị: năm)

Tuổi thọ	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)
Số máy của hãng X	7	20	36	20	17
Số máy của hãng Y	0	20	35	35	10

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu nào lớn hơn? Từ đó có thể nói là máy chạy bộ do hãng nào sản xuất có tuổi thọ phân tán hơn?

Giải

Khoảng biến thiên của tuổi thọ máy chạy bộ do hãng X và hãng Y sản xuất tương ứng là $R_X = 12 - 2 = 10$ và $R_Y = 12 - 4 = 8$. Vì $R_X > R_Y$ nên có thể nói là máy do hãng X sản xuất có tuổi thọ phân tán hơn so với máy của hãng Y.

LUYỆN TẬP 2

Người ta tiến hành phỏng vấn hai nhóm khán giả về một bộ phim mới công chiếu. Nhóm A gồm những khán giả thuộc lứa tuổi 20 – 30, nhóm B thuộc lứa tuổi trên 30. Người được hỏi ý kiến phải đánh giá bộ phim bằng cách cho điểm theo một số tiêu chí nêu trong phiếu điều tra và sau đó lấy tổng số điểm (thang điểm 100). Bảng dưới đây trình bày kết quả điều tra hai nhóm khán giả:

Bảng 3.6. Điểm đánh giá của khán giả

Điểm	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100)
Số người của nhóm A	6	10	14	12	8
Số người của nhóm B	0	8	14	28	0

Ý kiến đánh giá của nhóm khán giả nào phân tán hơn?

Nhận xét:

Khoảng biến thiên là một đại lượng dễ tính toán. Tuy nhiên do chỉ sử dụng đầu mút trái của nhóm đầu tiên và đầu mút phải của nhóm cuối cùng, bỏ qua thông tin về tất cả các giá trị ở giữa, nên khoảng biến thiên rất dễ bị ảnh hưởng bởi những giá trị bất thường. Khi điều này xảy ra, khoảng biến thiên mang lại một bức tranh "phóng đại" về sự phân tán của mẫu số liệu. Nếu loại những giá trị bất thường này thì khoảng biến thiên của mẫu các số liệu còn lại có thể sẽ nhỏ hơn nhiều.



Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Ta đã biết *khoảng tứ phân vị* cũng là một số đặc trưng được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc bằng $Q_3 - Q_1$, trong đó Q_1 và Q_3 tương ứng là tứ phân vị thứ nhất và thứ ba của mẫu.

Với mẫu số liệu ghép nhóm thì ta đã biết cách ước tính các tứ phân vị của nó.

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm có thể được ước tính như thế nào?

NHẮC LẠI

Cách tính các tứ phân vị Q_1, Q_2, Q_3 của mẫu số liệu ghép nhóm:

Nhóm chứa Q_i ($i = 1, 2, 3$) là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $\frac{iN}{4}$ và

$$Q_i = L_i + \frac{i \cdot \frac{N}{4} - T_i}{n_i} \cdot h$$

trong đó: N là cỡ mẫu;

L_i, n_i và h lần lượt là đầu mút trái, tần số và độ dài của nhóm chứa Q_i ;

T_i là tần số tích lũy của nhóm trước nhóm chứa Q_i .

HOẠT ĐỘNG 2

Trở lại với *Bảng 3.1* về khối lượng của 100 quả dưa giống E. Để tiện tính toán, ta biểu diễn dữ liệu bằng một bảng hai cột như bảng bên.

- Hãy tính các tứ phân vị của mẫu số liệu cho trong bảng.
- Đề xuất một cách ước tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho.

Khối lượng (gam)	Số quả
[700; 800)	6
[800; 900)	10
[900; 1 000)	14
[1 000; 1 100)	23
[1 100; 1 200)	15
[1 200; 1 300)	22
[1 300; 1 400)	6
[1 400; 1 500)	4

Trong trường hợp tổng quát, đối với mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi *Bảng 3.2*, ta có:



Nếu mẫu số liệu ghép nhóm có các tứ phân vị thứ nhất, thứ ba lần lượt là Q_1, Q_3 thì hiệu số $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$ được gọi là **khoảng tứ phân vị** của mẫu số liệu đó.

Ý nghĩa của khoảng tứ phân vị

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là một giá trị xấp xỉ cho khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc, được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu. Khoảng tứ phân vị càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

VÍ DỤ 3

Điểm kiểm tra cuối khoá môn Tiếng Anh của hai lớp ở một trung tâm ngoại ngữ được thống kê trong các Bảng 3.7a và 3.7b.

Bảng 3.7a. Điểm của lớp A

Điểm	Số học viên (tần số)
[50; 60)	8
[60; 70)	20
[70; 80)	50
[80; 90)	17
[90; 100)	5

Bảng 3.7b. Điểm của lớp B

Điểm	Số học viên (tần số)
[50; 60)	15
[60; 70)	20
[70; 80)	30
[80; 90)	20
[90; 100)	15

- Tìm khoảng biến thiên của mỗi mẫu số liệu. Có thể dùng khoảng biến thiên để biết điểm của lớp nào đồng đều hơn không?
- Tìm các tứ phân vị và khoảng tứ phân vị của mỗi mẫu số liệu.
- Mẫu số liệu nào có độ phân tán lớn hơn? Minh hoạ câu trả lời bằng cách biểu diễn các tứ phân vị và khoảng tứ phân vị của mỗi mẫu số liệu trên trục số.

Giải

- Hai mẫu số liệu đều có khoảng biến thiên là $R = 100 - 50 = 50$ nên không thể căn cứ vào đó để nói điểm của lớp nào đồng đều hơn.
- Kích thước của hai mẫu số liệu đều là $N = 100$. Ta có $\frac{N}{4} = 25$; $\frac{N}{2} = 50$; $\frac{3N}{4} = 75$.
 - Đối với mẫu số liệu về điểm của lớp A, ta tìm các tứ phân vị Q_1^A , Q_2^A , Q_3^A và khoảng tứ phân vị Δ_Q^A qua bảng tần số tích lũy dưới đây:

Điểm	Tần số	Tần số tích lũy
[50; 60)	8	8
[60; 70)	20	28
[70; 80)	50	78
[80; 90)	17	95
[90; 100)	5	100

Nhóm chứa Q_1^A là [60; 70).

$$Q_1^A = 60 + \frac{25 - 8}{20} \cdot 10 = 68,5.$$

Nhóm chứa Q_2^A là [70; 80).

$$Q_2^A = 70 + \frac{50 - 28}{50} \cdot 10 = 74,4.$$

Nhóm chứa Q_3^A là [70; 80).

$$Q_3^A = 70 + \frac{75 - 28}{50} \cdot 10 = 79,4.$$

$$\text{Vậy } \Delta_Q^A = 79,4 - 68,5 = 10,9.$$

- Gọi Q_1^B, Q_2^B, Q_3^B là các tứ phân vị và Δ_Q^B là khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu về điểm của lớp B. Ta lập bảng tần số tích lũy và tính được:

Điểm	Tần số	Tần số tích lũy
[50; 60)	15	15
[60; 70)	20	35
[70; 80)	30	65
[80; 90)	20	85
[90; 100)	15	100

Nhóm chứa Q_1^B là [60; 70).

$$Q_1^B = 60 + \frac{25 - 15}{20} \cdot 10 = 65.$$

Nhóm chứa Q_2^B là [70; 80).

$$Q_2^B = 70 + \frac{50 - 35}{30} \cdot 10 = 75.$$

Nhóm chứa Q_3^B là [80; 90).

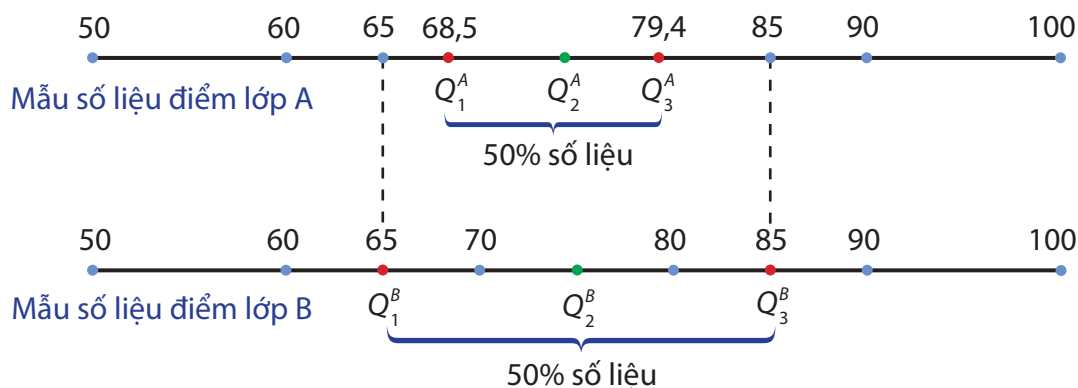
$$Q_3^B = 80 + \frac{75 - 65}{20} \cdot 10 = 85.$$

$$\text{Vậy } \Delta_Q^B = 85 - 65 = 20.$$

- c) $\Delta_Q^B > \Delta_Q^A$ nên điểm của lớp B phân tán hơn điểm của lớp A. Minh họa trên trục số: Mỗi mẫu đều có 100 số liệu thuộc khoảng [50; 100]. Có 50% số liệu ở giữa của bảng điểm lớp B thuộc khoảng (Q_1^B, Q_3^B) . Bảng điểm lớp A cũng có 50% số liệu ở giữa thuộc khoảng (Q_1^A, Q_3^A) . Vì $(Q_1^A, Q_3^A) \subset (Q_1^B, Q_3^B)$ nên ta có thể nói là điểm của lớp B phân tán hơn so với điểm lớp A.

NHẮC LẠI

Các tứ phân vị chia mẫu số liệu thành bốn phần, mỗi phần chứa 25% số liệu.



Hình 3.1

Nhận xét:

Khoảng tứ phân vị cho thông tin về sự biến thiên của 50% số liệu nằm giữa mẫu. Khác với khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị không bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường (nếu có). Hơn nữa, khoảng tứ phân vị cần thiết cho việc so sánh mức độ phân tán của hai mẫu số liệu có kích thước không quá khác nhau và có khoảng biến thiên như nhau.

LUYỆN TẬP 3

Ở một phòng điều trị nội trú của bệnh viện, dữ liệu thống kê thời gian ngủ hằng đêm của hai bệnh nhân trong suốt một tháng được tổng hợp bởi hai bảng dưới đây:

Bảng 3.8a. Thời gian ngủ của bệnh nhân A

Thời gian (phút)	Số đêm (tần số)
[180; 240)	5
[240; 300)	5
[300; 360)	10
[360; 420)	6
[420; 480)	4

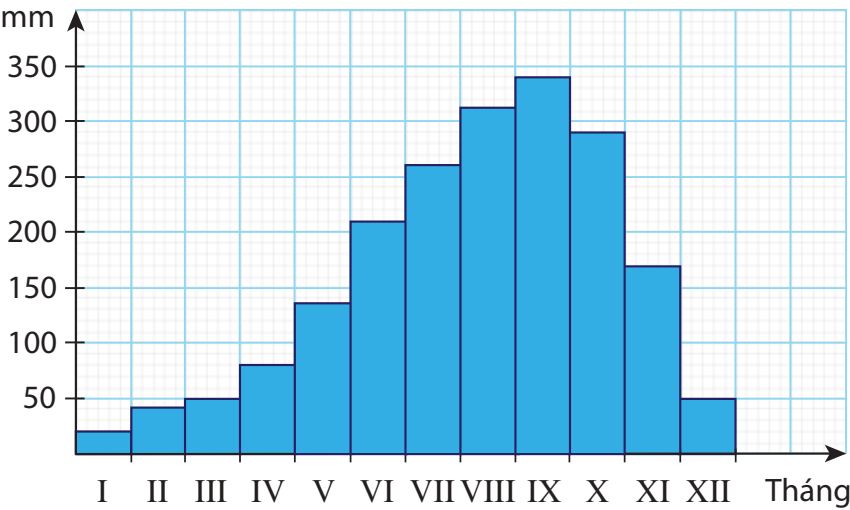
Bảng 3.8b. Thời gian ngủ của bệnh nhân B

Thời gian (phút)	Số đêm (tần số)
[180; 240)	2
[240; 300)	9
[300; 360)	12
[360; 420)	5
[420; 480)	2

Bệnh nhân nào có thời gian ngủ ổn định hơn?

VÍ DỤ 4

Hình 3.2 là biểu đồ biểu diễn lượng mưa trung bình của các tháng trong năm ở thành phố A.



Hình 3.2. Biểu đồ lượng mưa ở thành phố A

- Lập bảng số liệu ghép nhóm về lượng mưa của thành phố A, với độ dài các nhóm là 50 và đầu mút phải của nhóm cuối cùng là 350.
- Xác định khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).
Nêu ý nghĩa của kết quả tìm được.

Giải

a) Bảng số liệu về lượng mưa của thành phố A:

Lượng mưa (mm)	Tần số	Tần số tích lũy
[0; 50)	2	2
[50; 100)	3	5
[100; 150)	1	6
[150; 200)	1	7
[200; 250)	1	8
[250; 300)	2	10
[300; 350)	2	12

b) $N = 12$ nên $\frac{N}{4} = 3$; $\frac{3N}{4} = 9$.

Nhóm chứa Q_1 là [50; 100).

$$Q_1 = 50 + \frac{3-2}{3} \cdot 50 \approx 67.$$

Nhóm chứa Q_3 là [250; 300).

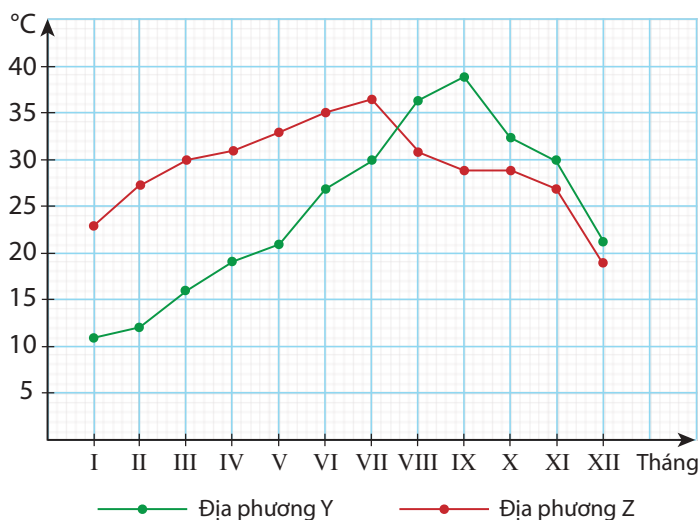
$$Q_3 = 250 + \frac{9-8}{2} \cdot 50 = 275.$$

$$\text{Vậy } \Delta_Q = 275 - 67 = 208.$$

Kết quả tìm được cho thấy: Hằng năm, ở thành phố A có 3 tháng có lượng mưa trung bình không vượt quá 67 mm và 3 tháng có lượng mưa trung bình ít nhất là 275 mm. Trong 6 tháng còn lại, lượng mưa trung bình đạt từ 67 mm đến 275 mm và như vậy là lượng mưa của 6 tháng này có thể chênh lệch nhau đến 208 mm.

LUYỆN TẬP 4

Hình 3.3 là biểu đồ biểu diễn nhiệt độ trung bình hằng tháng của hai địa phương Y, Z.



Hình 3.3. Biểu đồ nhiệt độ trung bình hằng tháng của hai địa phương

- Lập bảng số liệu ghép nhóm về nhiệt độ của hai địa phương Y, Z, với độ dài các nhóm là 5 và đầu mút phải của nhóm cuối cùng là 40.
- Tìm khoảng tứ phân vị của nhiệt độ mỗi địa phương và cho biết nhiệt độ của địa phương nào ít biến động hơn.

BÀI TẬP

3.1. Dưới đây là kết quả điều tra thời gian hoàn thành bài tập ở nhà môn Toán của 30 học sinh lớp 9:

Bảng 3.9. Thời gian hoàn thành bài tập ở nhà môn Toán (đơn vị: phút)

42	45	47	47	53	54	58	58	58	59
61	63	64	64	67	68	68	68	70	73
75	75	77	77	78	78	82	82	82	87

- Tìm trung bình, các tứ phân vị và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đã cho.
- Lập mẫu số liệu ghép nhóm với các nhóm ghép có độ dài bằng 10 và nhóm đầu tiên là $[40; 50)$.
- Tìm trung bình, khoảng biến thiên, các tứ phân vị và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm lập ở câu b.
- So sánh các kết quả tìm được ở câu a và c. Giải thích vì sao có sự khác biệt.

3.2. Thời gian trung bình hằng ngày mà một số nhân viên đi từ nhà đến công ty được thống kê trong *Bảng 3.10*. Tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của thời gian di chuyển đến công ty của các nhân viên (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Bảng 3.10

Thời gian (phút)	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)
Số người	8	8	10	6	7	1

3.3. *Bảng 3.11* trình bày dữ liệu về tốc độ của 100 xe ô tô lưu thông trên một đoạn đường cao tốc vào giờ cao điểm, được trích xuất từ camera của cơ quan cảnh sát giao thông. Hãy tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị). Nêu ý nghĩa của các kết quả tìm được.

Bảng 3.11

Tốc độ (km/h)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100)	[100; 110)
Số xe	10	20	20	35	15

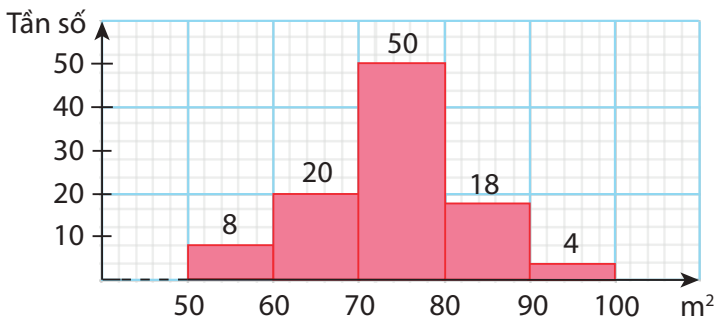
3.4. Một ngân hàng thống kê ở bảng dưới số tiền mà khách hàng rút từ một máy ATM (máy rút tiền tự động) trong một buổi sáng.

Bảng 3.12

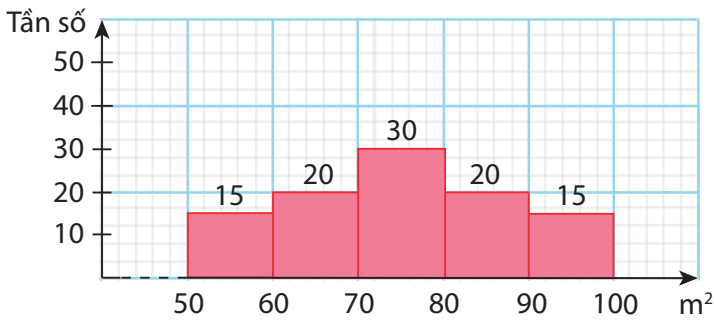
Số tiền rút (nghìn đồng)	Tần số	Số tiền rút (nghìn đồng)	Tần số
[0; 500)	11	[1 500; 2 000)	15
[500; 1 000)	16	[2 000; 2 500)	10
[1 000; 1 500)	12	[2 500; 3 000)	16

Tìm khoảng tứ phân vị của số tiền rút (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị). Nêu ý nghĩa của các kết quả tìm được.

3.5. Điều tra một số hộ gia đình thu nhập ở mức trung bình sinh sống trên hai địa bàn A, B, người ta thấy diện tích nhà ở của họ đều nhỏ hơn 100 m². Hai biểu đồ dưới biểu diễn kết quả thống kê. Số liệu về diện tích nhà ở của cư dân thuộc địa bàn nào phân tán hơn?



Hình 3.4a. Diện tích nhà ở của cư dân địa bàn A



Hình 3.4b. Diện tích nhà ở của cư dân địa bàn B

PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHEP NHOM

Khởi động: Qua phỏng vấn, anh Bình, một người mới tốt nghiệp đại học, được hai công ty M và N đồng ý tuyển dụng. Để quyết định gia nhập vào công ty nào, ngoài việc tìm hiểu những điều kiện như môi trường công tác, khả năng thăng tiến,..., anh Bình còn quan tâm đến lương của nhân viên trong mỗi công ty.

Anh muốn chọn nơi mà sự chênh lệch lương giữa các nhân viên có tuổi nghề dưới 5 năm không quá lớn.

Anh Bình không nắm số liệu gốc về lương của từng người nhưng có được bảng lương của nhân viên có thâm niên dưới 5 năm đã được ghép nhóm của công ty M (40 nhân viên) và công ty N (42 nhân viên). Anh nên sử dụng số đặc trưng gì để phân tích hai mẫu số liệu ghép nhóm đó và tính nó như thế nào?



HOẠT ĐỘNG

Bảng 3.13 là mẫu số liệu ghép nhóm về lương của 40 nhân viên công ty M mà anh Bình có.

Bảng 3.13. Lương của 40 nhân viên công ty M

Mức lương (triệu đồng)	Tần số (số người)
[3; 5)	4
[5; 7)	6
[7; 9)	17
[9; 11)	12
[11; 13)	1

- Hãy ước tính lương trung bình $\bar{x}_M$ của 40 nhân viên.
- Điều anh Bình quan tâm là độ lệch trung bình giữa lương của mỗi nhân viên so với lương trung bình $\bar{x}_M$. Anh Bình có thể ước lượng độ lệch giữa lương của những nhân viên thuộc nhóm thứ nhất (nhóm lương từ 3 đến dưới 5 triệu đồng) so với số trung bình qua giá trị nào?
- Dựa vào công thức tính trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm và hai công thức tính phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu không ghép nhóm, hãy đề xuất một cách ước tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc mà anh Bình không có (bảng lương của từng người).

Lưu ý:

Để ước tính lương trung bình của 40 nhân viên, ta đã biết là phải sử dụng giá trị đại diện của các nhóm. Nếu gọi c_i là giá trị đại diện của nhóm thứ i thì c_i bằng trung bình cộng của đầu mút trái và đầu mút phải của nhóm đó. Nhằm tạo thuận lợi cho tính toán, người ta lập thêm cột ghi các giá trị đại diện như bảng bên.

Mức lương (triệu đồng)	Giá trị đại diện c_i	Tần số n_i
[3; 5)	4	4
[5; 7)	6	6
[7; 9)	8	17
[9; 11)	10	12
[11; 13)	12	1

Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi bảng sau:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[a_1; a_2)$	c_1	n_1
$[a_2; a_3)$	c_2	n_2
...	...	...
$[a_k; a_{k+1})$	c_k	n_k
		$N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$

NHẮC LẠI

Nếu mẫu số liệu ghép nhóm có kích thước N , gồm k nhóm, trong đó nhóm thứ i ($i = 1, 2, \dots, k$) có tần số n_i và giá trị đại diện là c_i , thì số trung bình của mẫu được tính theo công thức:

$$\bar{x} = \frac{n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_k c_k}{N}.$$



Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu s^2 , là giá trị được tính theo công thức:

$$s^2 = \frac{n_1 (c_1 - \bar{x})^2 + n_2 (c_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k (c_k - \bar{x})^2}{N}$$

trong đó $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Căn bậc hai số học của phương sai, kí hiệu s , được gọi là **độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó**, nghĩa là $s = \sqrt{s^2}$.

Ý nghĩa:

- Phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu gốc. Chúng phản ánh mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm quanh số trung bình.
- Khi hai mẫu số liệu ghép nhóm có cùng đơn vị đo và có số trung bình bằng nhau (hoặc xấp xỉ nhau), mẫu số liệu nào có độ lệch chuẩn nhỏ hơn thì mức độ phân tán (so với số trung bình) của các số liệu trong mẫu đó sẽ thấp hơn.

Nhận xét:

- Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với mẫu số liệu.
- Khác với khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị, phương sai (độ lệch chuẩn) đã xem xét tất cả các giá trị của mẫu số liệu nên có thể mang lại một nhận định đầy đủ hơn về mức độ phân tán của mẫu số liệu quanh số trung bình.

VÍ DỤ 1

Điều tra thời gian phải làm thêm trung bình hằng tuần của các bác sĩ ở một bệnh viện, người ta thu được số liệu sau:

Bảng 3.14. Thời gian làm thêm hằng tuần của một số bác sĩ (đơn vị: giờ)

5	6	7	8	8	8	9	9	9
9	9	10	10	10	10	11	11	11
12	12	12	13	13	14	14		

- a) Chuyển mẫu số liệu đã cho về mẫu số liệu ghép nhóm với độ dài các nhóm ghép bằng 2 và nhóm đầu tiên là [5; 7).
- b) Tính số trung bình, phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm lập ở câu a (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
- c) So sánh và nêu ý nghĩa các kết quả tìm được ở câu b với các kết quả tương ứng của mẫu số liệu gốc.

Giải

- a) Căn cứ vào giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của mẫu số liệu, ta thấy khoảng biến thiên là $R = 9$ nên nếu muốn mỗi nhóm có độ dài bằng 2 và nhóm đầu tiên là [5; 7) thì phải chia số liệu thành 5 nhóm, với 4 nhóm ghép tiếp theo là [7; 9), [9; 11), [11; 13), [13; 15). Đếm số lần xuất hiện các giá trị trong mỗi nhóm, ta lập được bảng sau:

Bảng 3.15a. Thời gian làm thêm hằng tuần của một số bác sĩ (đơn vị: giờ)

Nhóm	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)
Tần số	2	4	9	6	4

- b) Bổ sung thêm giá trị đại diện của mỗi nhóm vào bảng lập ở trên, ta có *Bảng 3.15b*:

Bảng 3.15b

Nhóm	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)	
Giá trị đại diện	6	8	10	12	14	
Tần số	2	4	9	6	4	$N = 25$

Sử dụng *Bảng 3.15b* để tính số trung bình $\bar{x}_N$ của mẫu số liệu ghép nhóm:

$$\bar{x}_N = \frac{2.6 + 4.8 + 9.10 + 6.12 + 4.14}{25} = \frac{262}{25} = 10,48 \text{ (giờ)}.$$

Suy ra phương sai s_N^2 của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$s_N^2 = \frac{2(6 - 10,48)^2 + 4(8 - 10,48)^2 + 9(10 - 10,48)^2 + 6(12 - 10,48)^2 + 4(14 - 10,48)^2}{25}$$

$$= \frac{130,24}{25} = 5,2096 \approx 5,21.$$

Độ lệch chuẩn s_N của mẫu số liệu ghép nhóm là $s_N = \sqrt{s_N^2} \approx 2,28$.

- c) Gọi $\bar{x}_G, s_G^2, s_G$ tương ứng là trung bình, phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc. Để tính giá trị của các số đặc trưng này, ta lập bảng tần số:

Thời gian (giờ)	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
Tần số	1	1	1	3	5	4	3	3	2	2	$N = 25$

Sử dụng các công thức tính trung bình, phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu không ghép nhóm, ta có:

$$\bar{x}_G = \frac{5 + 6 + 7 + 3 \cdot 8 + 5 \cdot 9 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 11 + 3 \cdot 12 + 2 \cdot 13 + 2 \cdot 14}{25} = 10.$$

Phương sai:

$$s_G^2 = \frac{1(5 - 10)^2 + 1(6 - 10)^2 + 1(7 - 10)^2 + \dots + 3(12 - 10)^2 + 2(13 - 10)^2 + 2(14 - 10)^2}{25}$$

$$= \frac{132}{25} = 5,28.$$

Độ lệch chuẩn: $s_G = \sqrt{s_G^2} = \sqrt{5,28} \approx 2,30$.

Quan sát kết quả tìm được ở hai câu b và c, ta thấy $\bar{x}_N \approx \bar{x}_G$; $s_N^2 \approx s_G^2$; $s_N \approx s_G$.

Như vậy số trung bình, phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm tương ứng xấp xỉ với số trung bình, phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ban đầu, khi chưa ghép nhóm. Nếu chỉ có mẫu số liệu ghép nhóm thì ta có thể kết luận là thời gian làm thêm trung bình hằng tuần của 25 bác sĩ được điều tra là 10,48 giờ và so với số này thì thời gian làm thêm của các bác sĩ chênh lệch trung bình khoảng 2,28 giờ.

LUYỆN TẬP 1

Bảng dưới đây tổng hợp thời gian hoàn thành bài kiểm tra IQ của 50 học sinh lớp 9:

Bảng 3.16. Thời gian (phút) hoàn thành bài kiểm tra IQ

Nhóm	[0; 6)	[6; 12)	[12; 18)	[18; 24)	[24; 30)
Tần số	1	11	10	18	10

Tính trung bình và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đã cho. Nêu ý nghĩa của kết quả tìm được.

TRẮC NGHIỆM

Chỉ số IQ là gì?

IQ là viết tắt tiếng Anh của từ Intelligence Quotient, được hiểu là chỉ số thông minh của não bộ con người. Một người có chỉ số IQ cao đồng nghĩa với việc người đó có tư duy và phản xạ nhanh nhạy.

Lưu ý:

Từ công thức tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm, ta dễ dàng chứng minh được:

$$s^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 \quad (*)$$

trong đó $\overline{x^2} = \frac{1}{N}(n_1c_1^2 + n_2c_2^2 + \dots + n_kc_k^2)$ được gọi là *trung bình cộng của các bình phương số liệu thống kê*.

Việc sử dụng công thức (*) vừa tiện lợi hơn cho tính toán, vừa có thể giúp tránh sai số (nếu có) trong các phép tính trung gian.

VÍ DỤ 2

Chiều dài của 40 bé trai sơ sinh 12 ngày tuổi chọn ngẫu nhiên ở một bệnh viện được nhà nghiên cứu thống kê trong *Bảng 3.17* dưới đây:

Bảng 3.17. Chiều dài của 40 bé trai sơ sinh

Chiều dài (cm)	[44; 46)	[46; 48)	[48; 50)	[50; 52)	[52; 54)	[54; 56)
Số trẻ	3	3	10	15	7	2

Tính số trung bình và độ lệch chuẩn của chiều dài nhóm 40 bé trai sơ sinh (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Giải

Bổ sung thêm các giá trị đại diện vào *Bảng 3.17*, ta lập được bảng sau:

Chiều dài của 40 bé trai sơ sinh (đơn vị: cm)

Nhóm	c_i	n_i
[44; 46)	45	3
[46; 48)	47	3
[48; 50)	49	10
[50; 52)	51	15
[52; 54)	53	7
[54; 56)	55	2
		$N = 40$

Từ mẫu số liệu đã cho, ta tính được số trung bình là:

$$\overline{x} = \frac{3.45 + 3.47 + 10.49 + 15.51 + 7.53 + 2.55}{40} = \frac{2\,012}{40} = 50,3.$$

$\overline{x}$ không phải là số nguyên nên ta chọn công thức (*) để tính phương sai:

$$\overline{x^2} = \frac{3.45^2 + 3.47^2 + 10.49^2 + 15.51^2 + 7.53^2 + 2.55^2}{40} = 2\,536.$$

Do đó $s^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = 2\,536 - 50,3^2 = 2\,536 - 2\,530,09 = 5,91$.

Vậy mẫu số liệu về chiều dài của 40 trẻ sơ sinh có độ lệch chuẩn là $s = \sqrt{5,91} \approx 2,43$.

LUYỆN TẬP 2

Số tiền ghi trên hoá đơn của 150 khách hàng lấy ngẫu nhiên trong một ngày được siêu thị ghi lại ở bảng dưới đây:

Bảng 3.18. Số tiền trên hoá đơn của 150 khách hàng

Số tiền (nghìn đồng)	[50; 100)	[100; 150)	[150; 200)	[200; 250)	[250; 300)
Tần số	6	9	39	66	30

Tìm phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu về số tiền ghi trên hoá đơn.

VẬN DỤNG 1

Bộ phận kiểm tra chất lượng sản phẩm dùng máy để đo (chính xác đến 0,001 mm) độ dày của một chi tiết máy. Kết quả đo một số sản phẩm được thống kê trong bảng sau:

Bảng 3.19. Độ dày của chi tiết máy

Độ dày (mm)	[18; 19)	[19; 20)	[20; 21)	[21; 22)	[22; 23)
Tần số	3	7	23	25	2



- Tính phương sai, độ lệch chuẩn của độ dày chi tiết máy.
- Giải thích tầm quan trọng của việc có độ lệch chuẩn nhỏ trong trường hợp này.

VẬN DỤNG 2

Trở lại với vấn đề của anh Bình.

Ta đã biết *Bảng 3.13* là số liệu anh Bình có về lương của 40 nhân viên có tuổi nghề dưới 5 năm thuộc công ty M. Để tiện tính toán, ta chép lại dưới đây *Bảng 3.13*. Đối với công ty N, anh Bình cũng thu thập được một mẫu số liệu ghép nhóm về lương của 42 nhân viên có tuổi nghề dưới 5 năm (*Bảng 3.20*).

Bảng 3.13.

Lương của 40 nhân viên công ty M

Mức lương (triệu đồng)	Tần số (số người)
[3; 5)	4
[5; 7)	6
[7; 9)	17
[9; 11)	12
[11; 13)	1

Bảng 3.20.

Lương của 42 nhân viên công ty N

Mức lương (triệu đồng)	Tần số (số người)
[3; 5)	6
[5; 7)	8
[7; 9)	13
[9; 11)	10
[11; 13)	5

Nếu muốn làm việc ở nơi mà lương giữa các nhân viên có tuổi nghề dưới 5 năm chênh lệch nhau ít hơn thì anh Bình nên chọn công ty M hay N?

BÀI TẬP

- 3.6. Điều tra chi phí thuê nhà ở hằng tháng của một số nhân viên độc thân, công ty X thu được số liệu dưới đây:

Bảng 3.21

Tiền thuê nhà (trăm nghìn đồng)	[3; 6)	[6; 9)	[9; 12)	[12; 15)	[15; 18)
Số nhân viên	64	40	84	56	16

Tính trung bình và độ lệch chuẩn chi phí thuê nhà hằng tháng của những nhân viên được điều tra.

- 3.7. Nhà máy đường kiểm tra khối lượng các gói đường do một máy đóng gói tự động thực hiện. Kết quả kiểm tra được biểu diễn trong bảng dưới đây:

Bảng 3.22. Khối lượng các gói đường

Khối lượng (g)	Số gói	Khối lượng (g)	Số gói
[494; 496)	2	[502; 504)	28
[496; 498)	6	[504; 506)	15
[498; 500)	8	[506; 508)	7
[500; 502)	32	[508; 510)	2

- Tính trung bình và độ lệch chuẩn của khối lượng các gói đường.
- Có thể nói là máy vận hành tốt hay không nếu như tiêu chuẩn mong muốn của nhà máy là khối lượng trung bình nằm trong khoảng 500 – 504 gam và độ lệch chuẩn nhỏ hơn 3 gam?

3.8. Trong 30 ngày, một nhà đầu tư đã theo dõi giá cổ phiếu của hai công ty G và H vào phiên mở cửa mỗi ngày. Thông tin được ghi lại ở hai bảng dưới đây:

Bảng 3.23a. Giá cổ phiếu của công ty G

Giá (nghìn đồng)	[50; 52)	[52; 54)	[54; 56)	[56; 58)	[58; 60)
Tần số	3	7	9	8	3

Bảng 3.23b. Giá cổ phiếu của công ty H

Giá (nghìn đồng)	[40; 42)	[42; 44)	[44; 46)	[46; 48)	[48; 50)
Tần số	6	7	5	7	5

Giá cổ phiếu của công ty nào ít biến động hơn (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

3.9. Bạn Mai dự định đăng kí xét tuyển vào đại học các ngành khối A00 (thi Toán, Vật lí, Hoá học) và A01 (thi Toán, Vật lí, Tiếng Anh). Bạn tìm hiểu điểm chuẩn năm trước của một số trường đóng trên những địa bàn không quá xa nơi gia đình mình sinh sống. Thông tin bạn thu được là:

Bảng 3.24a. Điểm chuẩn các ngành tuyển khối A00 của 20 trường trong vùng

19	19,5	20,2	20,5	20,5	20,7	20,85	21	21,3	21,5
21,5	21,5	21,7	21,7	21,8	22,2	22,5	22,8	23	23,5

Bảng 3.24b. Điểm chuẩn các ngành tuyển khối A01 của 20 trường trong vùng

19,2	19,5	19,5	19,8	20	20,4	20,8	21	21	21,5
21,5	21,7	22	22	22,5	22,5	22,5	23	23,5	23,8

- a) Lập mẫu số liệu ghép nhóm cho hai mẫu số liệu bạn Mai thu thập được, với độ dài các nhóm ghép là 1 và nhóm đầu tiên là [19; 20).
- b) Những trường mà bạn Mai tìm hiểu có điểm chuẩn khối nào ổn định hơn?

BÀI TẬP TỰ LUẬN

3.10. Chiều cao của 500 học sinh một trường trung học cơ sở được thống kê trong *Bảng 3.25*.

Bảng 3.25

Chiều cao (cm)	[150; 154)	[154; 158)	[158; 162)	[162; 166)	[166; 170)
Số học sinh	25	50	200	175	50

- Tính khoảng tứ phân vị, trung bình và độ lệch chuẩn chiều cao của 500 học sinh.
- Kết quả tìm được cho biết điều gì về chiều cao của 500 học sinh này?

3.11. Một trang trại phân 1 000 quả trứng thành 5 loại, tùy theo khối lượng (đã được làm tròn) của chúng (*Bảng 3.26*).

Bảng 3.26

Khối lượng (g)	[30; 36)	[36; 42)	[42; 48)	[48; 54)	[54; 60)
Số quả trứng	45	190	500	250	15

- Ước tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, phương sai và độ lệch chuẩn của khối lượng những quả trứng này (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
- Hãy phân tích sự đồng đều về khối lượng các quả trứng của trang trại.

3.12. Hàm lượng protein (trong 100 g) của một số loại thực phẩm được cho trong bảng sau:

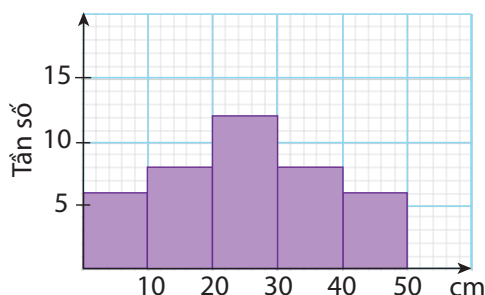
Bảng 3.27

Hàm lượng protein (g)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)	[16; 18)	[18; 20)
Tần số	4	12	16	14	2	2

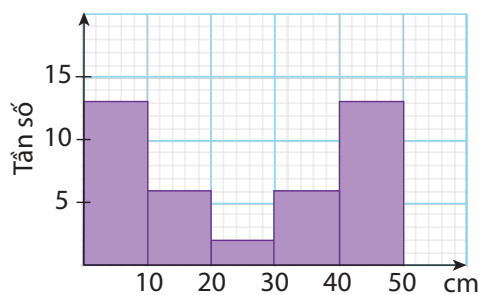
- Tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
- Nêu ý nghĩa của các kết quả tìm được.

3.13. Một công ty giống cây trồng đã thử nghiệm hai phương pháp chăm sóc khác nhau cho cây hướng dương. Sau hai tuần, người ta thấy cây được chăm sóc theo cả hai phương pháp đều thấp hơn 50 cm. *Hình 3.5a* và *3.5b* biểu diễn chiều cao của một số cây.





Hình 3.5a. Chiều cao của cây được chăm sóc theo phương pháp A



Hình 3.5b. Chiều cao của cây được chăm sóc theo phương pháp B

- Ước tính số trung bình và độ lệch chuẩn của chiều cao các cây được chăm sóc theo mỗi phương pháp.
- So sánh hiệu quả của các phương pháp trên hai phương diện:
 - Chiều cao trung bình của cây;
 - Sự đồng đều về chiều cao của cây.

3.14. Hai bảng dưới đây trình bày kết quả thống kê lượng cà phê (tính theo cm^3) được pha chế trong mỗi cốc do hai máy bán cà phê tự động A, B thực hiện trong một ngày:

Bảng 3.28a. Lượng cà phê trong mỗi cốc do máy A pha chế

Lượng cà phê (cm^3)	[242; 246)	[246; 250)	[250; 254)	[254; 258)	[258; 262)
Tần số	6	5	28	7	4

Bảng 3.28b. Lượng cà phê trong mỗi cốc do máy B pha chế

Lượng cà phê (cm^3)	[242; 246)	[246; 250)	[250; 254)	[254; 258)	[258; 262)
Tần số	5	8	17	14	6

- Ước tính giá trị trung bình và độ lệch chuẩn của lượng cà phê trong những cốc được pha chế bởi:
 - Máy A;
 - Máy B.
- Giả sử lượng cà phê mong muốn trong mỗi cốc là 250 cm^3 . Nếu định kinh doanh cà phê bằng hình thức bán hàng tự động thì anh Hùng nên chọn mua loại máy nào?



3.15. Hai bảng dưới đây biểu diễn kết quả đo đường kính (tính theo mm) của một số ổ bi được sản xuất bởi các máy X và Y:

Bảng 3.29a. Đường kính của 60 ổ bi do máy X sản xuất

Đường kính (mm)	[28; 29)	[29; 30)	[30; 31)	[31; 32)	[32; 33)
Tần số	2	23	25	7	3

Bảng 3.29b. Đường kính của 60 ổ bi do máy Y sản xuất

Đường kính (mm)	[28; 29)	[29; 30)	[30; 31)	[31; 32)	[32; 33)
Tần số	9	8	20	17	6

- Ước tính giá trị trung bình và độ lệch chuẩn của đường kính các ổ bi được sản xuất bởi mỗi máy.
- Biết rằng đường kính mong muốn cho các ổ bi là 30,4 mm. Hãy phân tích chất lượng sản phẩm do mỗi máy sản xuất.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Mẫu số liệu cho ở Bảng 3.30 dưới đây được sử dụng cho các bài **3.16**, **3.17**, **3.18**.

Bảng 3.30

Nhóm	[1,5; 2,5)	[2,5; 3,5)	[3,5; 4,5)	[4,5; 5,5)	[5,5; 6,5)
Tần số	2	3	7	2	1

3.16. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu cho bởi Bảng 3.30 là

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

3.17. Gọi Δ_Q là khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu cho bởi Bảng 3.30. Khi đó

- A. $\Delta_Q \in [1; 2)$. B. $\Delta_Q \in [2; 3)$.
C. $\Delta_Q \in [3; 4)$. D. $\Delta_Q \in [4; 5)$.

3.18. Phương sai của mẫu số liệu cho bởi Bảng 3.30 là

- A. $s^2 = \frac{8}{15} - \left(\frac{7}{15}\right)^2$. B. $s^2 = \frac{233}{15} - \left(\frac{50}{15}\right)^2$.
C. $s^2 = \frac{8}{15} - \left(\frac{57}{15}\right)^2$. D. $s^2 = \frac{233}{15} - \left(\frac{57}{15}\right)^2$.

3.19. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- Phương sai luôn luôn là số không âm.
- Phương sai là bình phương của độ lệch chuẩn.
- Phương sai càng lớn thì độ phân tán của các giá trị quanh số trung bình càng lớn.
- Phương sai luôn luôn lớn hơn độ lệch chuẩn.

TÍNH PHƯƠNG SAI, ĐỘ LỆCH CHUẨN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHEP NHÓM BẰNG MÁY TÍNH CẦM TAY

(BÀI ĐỌC THÊM)

Để tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm, ta đã lấy giá trị đại diện của mỗi nhóm thay thế cho tất cả các giá trị thuộc nhóm đó. Như vậy có thể xem như ta đã chuyển từ mẫu số liệu ghép nhóm về một mẫu không ghép nhóm với các giá trị là đại diện của các nhóm.

Lúc này, ta có thể sử dụng máy tính cầm tay để tính phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm theo cách đã sử dụng cho mẫu số liệu không ghép nhóm. Cách tính này đã được giới thiệu ở lớp 10 và được nhắc lại thông qua Ví dụ dưới đây:

VÍ DỤ

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu cho ở bảng sau:

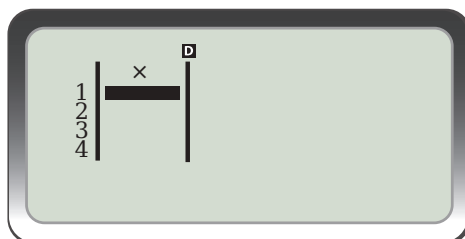
Nhóm	[0; 4)	[4; 8)	[8; 12)	[12; 16)	[16; 20)
Tần số	7	12	14	11	9

Bước ① Xác định giá trị đại diện của từng nhóm

Nhóm	[0; 4)	[4; 8)	[8; 12)	[12; 16)	[16; 20)
Giá trị đại diện	2	6	10	14	18
Tần số	7	12	14	11	9

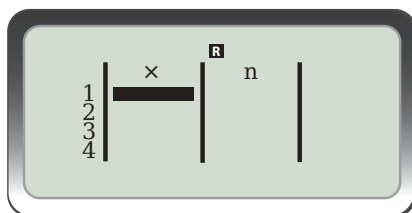
Bước ② Nhập số liệu thống kê vào bộ nhớ của máy tính cầm tay

Muốn nhập lần lượt từng giá trị của dấu hiệu điều tra, ta bấm    để vào chức năng "tính thống kê 1 biến". Lúc này, màn hình máy tính sẽ hiển thị cột để ta nhập số liệu thống kê như Hình 3.6.



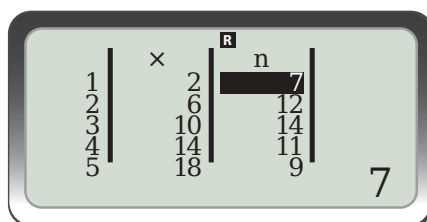
Hình 3.6

Để bật cột tần số, bấm     . Máy tính chọn chế độ hiển thị thêm cột tần số và màn hình nhập liệu hiện ra hai cột như ở Hình 3.7.



Hình 3.7

Nhập các giá trị đại diện là 2, 6, 10, 14, 18 vào cột thứ nhất (cột x). Sau đó nhập các tần số tương ứng là 7, 12, 14, 11, 9 vào cột thứ hai (cột n) (Hình 3.8).

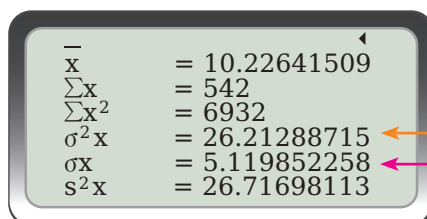


Hình 3.8

Sau khi hoàn tất việc nhập dữ liệu, ta bấm nút  để trở về màn hình tính toán.

Bước 3 Làm hiển thị kết quả tính toán

Bấm  , màn hình máy tính sẽ hiển thị đầy đủ các số đặc trưng thống kê như Hình 3.9.



Hình 3.9

Bước 4 Kết luận – làm tròn số (nếu cần)

Phương sai: $s^2 \approx 26,21$.

Độ lệch chuẩn: $s \approx 5,12$.

Để khôi phục lại chế độ ban đầu của máy tính, ta bấm      .

BẢNG TRA CỨU TỪ NGỮ

Điểm cực đại	6	Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm	89
Điểm cực tiểu	6	Mặt phẳng tọa độ	67
Điểm cực trị	6	Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm	97
Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm	97	Quy tắc hình hộp	56
Đường tiệm cận đứng	17	Tích của một số với một vectơ trong không gian	58
Đường tiệm cận ngang	15	Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian	62
Đường tiệm cận xiên	19	Tính đơn điệu	3
Giá trị cực đại	6	Tọa độ của một điểm	68
Giá trị cực tiểu	6	Tọa độ của vectơ	70
Giá trị cực trị (cực trị)	6	Tổng của hai vectơ trong không gian	55
Giá trị lớn nhất	10	Vectơ	51
Giá trị nhỏ nhất	10		
Góc giữa hai vectơ	61		
Hệ trục tọa độ Oxyz	67		
Hiệu của hai vectơ trong không gian	57		
Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm	87		

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

Thuật ngữ	Giải thích
Điểm cực đại	Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$. Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0 .
Điểm cực tiểu	Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$. Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 .
Điểm cực trị	Điểm cực đại và điểm cực tiểu của hàm số được gọi chung là điểm cực trị.

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm	Căn bậc hai số học của phương sai, kí hiệu s , nghĩa là $s = \sqrt{s^2}$.
Đường tiệm cận đứng	Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty.$
Đường tiệm cận ngang	Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0.$
Đường tiệm cận xiên	Đường thẳng $y = ax + b$, $a \neq 0$ được gọi là đường tiệm cận xiên (hay tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.
Giá trị cực đại	Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số, kí hiệu là f_{CD} hay y_{CD} .
Giá trị cực tiểu	Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số, kí hiệu là f_{CT} hay y_{CT} .
Giá trị cực trị	Giá trị cực đại (còn gọi là cực đại) và giá trị cực tiểu (còn gọi là cực tiểu) được gọi chung là giá trị cực trị (hay cực trị) của hàm số.
Giá trị lớn nhất	Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D . Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \leq M$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$, kí hiệu $M = \max_D f(x)$.
Giá trị nhỏ nhất	Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D . Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \geq m$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$, kí hiệu $m = \min_D f(x)$.
Hệ trục toạ độ trong không gian	Là hệ gồm ba trục Ox , Oy , Oz đôi một vuông góc với nhau.
Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm	Khoảng biến thiên của một mẫu số liệu ghép nhóm là hiệu số giữa đầu mút phải của nhóm cuối cùng và đầu mút trái của nhóm đầu tiên.
Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm	Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu s^2, là giá trị được tính theo công thức: $s^2 = \frac{n_1(c_1 - \bar{x})^2 + n_2(c_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(c_k - \bar{x})^2}{N}.$

Quy tắc hình hộp	Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.
Sơ đồ khảo sát hàm số	Các bước thực hiện khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị một hàm số.
Toạ độ của một điểm trong không gian	Trong không gian $Oxyz$, với mỗi điểm M , bộ ba số $(x; y; z)$ duy nhất thoả mãn đẳng thức $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là toạ độ của điểm M , kí hiệu $M(x; y; z)$ hoặc $M = (x; y; z)$.
Toạ độ của vectơ trong không gian	Trong không gian $Oxyz$, với mỗi vectơ $\vec{a}$, bộ ba số duy nhất $(x; y; z)$ thoả mãn đẳng thức $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là toạ độ của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu $\vec{a} = (x; y; z)$ hoặc $\vec{a}(x; y; z)$.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC HUẾ

07 Hà Nội, Phường Vĩnh Ninh, Thành phố Huế, Tỉnh Thừa Thiên Huế

Điện thoại: (0234) 3834486

Email: nxbdhue@hueuni.edu.vn - Website: <http://huph.hueuni.edu.vn>

TOÁN 12_TẬP 1 (Bản mẫu)

LÊ THỊ HOÀI CHÂU (Tổng Chủ biên), **TRẦN ANH DŨNG** (Chủ biên), **TRẦN TRÍ DŨNG**, **LÊ ĐẠI DƯƠNG**, **LÊ CHÂN ĐỨC**,
NGÔ MINH ĐỨC, **PHẠM DUY KHÁNH**, **HỒ LỘC THUẬN**

Chịu trách nhiệm xuất bản: Giám đốc - Tổng biên tập Trần Bình Tuyên

Biên tập viên: Trương Thị Mỹ Vân

Trình bày bìa: Nguyễn Diễm Quỳnh, Trần Thị Thuỳ

Sửa bản in: Lại Thị Kiều Vi, Trịnh Thái Phương, Đàm Huỳnh Phương Thảo,
Chương Ái Đào, Nguyễn Hương Quỳnh, Trịnh Khánh Vy, Nguyễn Đoan Trang,
Nguyễn Văn Vĩnh, Nguyễn Vũ Khánh Linh, Trần Thị Thu Nguyệt

Đối tác liên kết: Công ty TNHH Education Solutions Việt Nam

Địa chỉ: Tầng 1, toà nhà Vietphone Building, 64 Nguyễn Đình Chiểu,
Phường Đa Kao, Quận 1, Thành phố Hồ Chí Minh

Bản quyền hình ảnh từ Shutterstock.

In cuốn, khổ 19 × 26.5 cm tại

Địa chỉ:

Số xác nhận đăng ký xuất bản:

Quyết định xuất bản số:

Kí ngày / /2024

In và nộp lưu chiểu năm 2024.

Mã số sách tiêu chuẩn quốc tế - ISBN:

TOÁN 12

Tập 1



Ứng dụng đạo hàm để khảo sát
và vẽ đồ thị của hàm số



Vector và hệ tọa độ trong không gian



Các số đặc trưng đo mức độ phân tán
của mẫu số liệu ghép nhóm

