

NHỮNG GÌ
BẠN LÀM,
ĐỊNH NGHĨA
BẠN LÀ AI.



Toán Thầy Vũ

MỤC LỤC



Chương 1. SỐ HỮU TỈ _____ 1

§1 – TẬP HỢP CÁC SỐ HỮU TỈ _____ 1

- Ⓐ Trọng tâm kiến thức _____ 1
- Ⓑ Các dạng bài tập _____ 2
 - 📁 Dạng : Nhận biết một số hữu tỉ, các quan hệ _____ 2
 - 📁 Dạng : Biểu diễn các số hữu tỉ trên trục số _____ 3
 - 📁 Dạng : So sánh các số hữu tỉ _____ 4
 - 📁 Dạng : Tìm điều kiện để một số hữu tỉ là một số nguyên. _____ 5
- Ⓒ Bài tập vận dụng _____ 5
- Ⓓ Bài tập nâng cao _____ 7

§2 – CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA SỐ HỮU TỈ _____ 9

- Ⓐ Trọng tâm kiến thức _____ 9
- Ⓑ Các dạng bài tập _____ 9
 - 📁 Dạng : Thực hiện phép tính cộng, trừ _____ 9
 - 📁 Dạng : Thực hiện phép tính nhân, chia _____ 10
 - 📁 Dạng : Thực hiện các phép tính cộng, trừ, nhân, chia _____ 11
 - 📁 Dạng : Tìm số chưa biết trong một đẳng thức _____ 12
 - 📁 Dạng : Rút gọn biểu thức có quy luật _____ 12
- Ⓒ Bài tập vận dụng _____ 13
- Ⓓ Bài tập nâng cao _____ 15

§3 – LŨY THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ _____ 17

- Ⓐ Trọng tâm kiến thức _____ 17
- Ⓑ Các dạng bài tập _____ 18
 - 📁 Dạng : Tính giá trị của một lũy thừa hoặc viết một số dưới dạng lũy thừa _____ 18
 - 📁 Dạng : Tính tích, tính thương của hai lũy thừa cùng cơ số và tính lũy thừa của một lũy thừa _____ 18
 - 📁 Dạng : Tính lũy thừa của một tích, lũy thừa của một thương _____ 19
 - 📁 Dạng : Tìm cơ số, tìm số mũ của một lũy thừa _____ 20
 - 📁 Dạng : So sánh hai lũy thừa _____ 21
 - 📁 Dạng : ** Tìm chữ số tận cùng của một lũy thừa _____ 21

(C) Bài tập vận dụng.....	22
(D) Bài tập nâng cao.....	23
§4 – Thứ tự thực hiện phép tính, qui tắc chuyển vế	25
(A) Trọng tâm kiến thức.....	25
(B) Các dạng bài tập.....	25
Dạng : Thực hiện phép tính.....	25
Dạng : Toán tìm x	26
(C) Bài tập vận dụng.....	27
(D) Bài tập nâng cao.....	28
Chương 2. SỐ THỰC	31
§5 – LÀM QUEN VỚI SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN	31
(A) Trọng tâm kiến thức.....	31
(B) Các dạng toán.....	32
Dạng : Nhận biết một phân số viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn.....	32
Dạng : Viết số thập phân hữu hạn, vô hạn tuần hoàn dưới dạng phân số tối giản.....	33
Dạng : So sánh các số thập phân.....	34
Dạng : Làm tròn các số đến một hàng nào đó.....	34
(C) Bài tập vận dụng.....	35
(D) Bài tập nâng cao.....	36
§6 – SỐ VÔ TỈ. CĂN BẬC HAI SỐ HỌC	37
(A) Trọng tâm kiến thức.....	37
(B) Các dạng bài tập.....	37
Dạng : Tìm căn bậc hai của một số và tìm một số biết căn bậc hai của nó.....	37
Dạng : Sử dụng kí hiệu của tập hợp số.....	38
Dạng : Tính giá trị của một biểu thức có chứa dấu căn.....	38
Dạng : Tìm số chưa biết trong một đẳng thức.....	39
Dạng : Số vô tỉ.....	39
(C) Bài tập vận dụng.....	39
(D) Bài tập nâng cao.....	40
§7 – TẬP HỢP CÁC SỐ THỰC	42
(A) Trọng tâm kiến thức.....	42
(B) Các dạng bài tập.....	43

	Dạng : Số đối. Quan hệ giữa phần tử và tập hợp	43
	Dạng : So sánh số thực	44
	Dạng : Giá trị tuyệt đối	45
	Bài tập vận dụng	45
	Bài tập nâng cao	47

Chương 3. Góc và đường thẳng song song 50

§8 – GÓC Ở VỊ TRÍ ĐẶC BIỆT. TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC 50

	Trọng tâm kiến thức	50
	Các dạng bài tập	51
	Dạng : Tính số đo góc	51
	Dạng : Nhận biết hai góc phụ nhau, bù nhau, đối nhau	53
	Dạng : Chứng minh một tia là tia phân giác của một góc cho trước	54
	Bài tập vận dụng	54
	Bài tập nâng cao	57

§9 – HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VÀ DẤU HIỆU NHẬN BIẾT 59

	Tóm tắt lý thuyết	59
	Các dạng toán và phương pháp giải	60
	Dạng : Xác định cặp góc so le trong, cặp góc đồng vị	60
	Dạng : Nhận biết, chứng minh hai đường thẳng song song	60
	Bài tập vận dụng	62
	Bài tập nâng cao	63

§10 – TIÊN ĐỀ EUCLID. TÍNH CHẤT CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG 65

	Trọng tâm kiến thức	65
	Các dạng bài tập	65
	Dạng : Tiên đề Euclid	65
	Dạng : Chứng tỏ hai góc bằng nhau	66
	Dạng : Chứng minh hai đường thẳng song song	66
	Dạng : Chứng minh hai đường thẳng vuông góc	67
	Dạng : Tính số đo góc	68
	Bài tập vận dụng	69
	Bài tập nâng cao	70

§11 – ĐỊNH LÝ VÀ CHỨNG MINH ĐỊNH LÝ 72

	Trọng tâm kiến thức	72
---	---------------------	----

Ⓑ	Các dạng bài tập	72
📁	Dạng : Nhận biết, viết giả thiết, kết luận của một định lý bằng kí hiệu	72
📁	Dạng : Chứng minh các định lý đơn giản	73
Ⓒ	Bài tập vận dụng	73
Ⓓ	Bài tập nâng cao	74
Ⓔ	Bài tập trắc nghiệm	75
Ⓕ	Bài tập vận dụng	76

Chương 4. TAM GIÁC BẰNG NHAU 83

§12 – TỔNG CÁC GÓC TRONG MỘT TAM GIÁC 83

Ⓐ	Trọng tâm kiến thức	83
Ⓑ	Các dạng bài tập	84
📁	Dạng : Tính số đo góc của một tam giác	84
📁	Dạng : Tìm mối quan hệ giữa các góc	85
Ⓒ	Bài tập vận dụng	85
Ⓓ	Bài tập nâng cao	86

§13 – HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ NHẤT CỦA TAM GIÁC 87

Ⓐ	Trọng tâm kiến thức	87
Ⓑ	Các dạng toán	87
📁	Dạng : Xác định các cạnh bằng nhau, các góc bằng nhau của hai tam giác bằng nhau	87
📁	Dạng : Chứng minh hai tam giác bằng nhau	88
📁	Dạng : Sử dụng hai tam giác bằng nhau để chứng minh hai góc bằng nhau	89
Ⓒ	Bài tập vận dụng	90
Ⓓ	Bài tập nâng cao	91

§14 – TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ HAI VÀ THỨ BA CỦA TAM GIÁC 92

Ⓐ	Trọng tâm kiến thức	92
Ⓑ	Các dạng bài tập	92
📁	Dạng : Chứng minh hai tam giác bằng nhau	92
📁	Dạng : Sử dụng các trường hợp bằng nhau của hai tam giác để chứng minh hai góc bằng nhau, hai đoạn thẳng bằng nhau	93
Ⓒ	Bài tập vận dụng	93
Ⓓ	Bài tập nâng cao	94

§15 – CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC VUÔNG	95
(A) Trọng tâm kiến thức	95
(B) Các dạng bài tập	95
Dạng : Chứng minh hai tam giác vuông bằng nhau	95
Dạng : Sử dụng trường hợp bằng nhau của tam giác vuông để chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau	96
(C) Bài tập vận dụng	96
(D) Bài tập nâng cao	97
§16 – TAM GIÁC CÂN. ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA ĐOẠN THẲNG	99
(A) Trọng tâm kiến thức	99
(B) Các dạng bài tập	100
Dạng : Sử dụng tính chất của tam giác cân, tam giác đều, tam giác vuông cân để tính số đo góc.	100
Dạng : Sử dụng tính chất tam giác cân để suy ra hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau	100
Dạng : Nhận biết một tam giác cân, một tam giác đều	101
(C) Bài tập vận dụng	101
(D) Bài tập nâng cao	102
(E) Các dạng bài tập	103
Dạng : Tính số đo góc	103
Dạng : Chứng minh hai tam giác bằng nhau	104
Dạng : Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau	105
Dạng : Chứng minh ba điểm thẳng hàng	105
(F) Bài tập vận dụng	106
Chương 5. THU THẬP VÀ BIỂU DIỄN DỮ LIỆU	110
§17 – THU THẬP VÀ PHÂN LOẠI DỮ LIỆU	110
(A) Trọng tâm kiến thức	110
(B) Các dạng bài tập	111
Dạng : Thu thập và phân loại dữ liệu	111
Dạng : Tính đại diện của dữ liệu	111
(C) Bài tập vận dụng	112
§18 – BIỂU ĐỒ HÌNH QUẠT TRÒN	117
(A) Trọng tâm kiến thức	117
(B) Các dạng bài tập	118

📁 Dạng : Đọc và mô tả biểu đồ hình quạt tròn	118
📁 Dạng : Biểu diễn dữ liệu vào biểu đồ hình quạt tròn	118
📁 Dạng : Phân tích dữ liệu trong biểu đồ hình quạt tròn	119
Ⓢ Bài tập vận dụng	120

§19 – BIỂU ĐỒ ĐOẠN THẲNG 123

Ⓢ Trọng tâm kiến thức	123
Ⓢ Các dạng bài tập	124
📁 Dạng : Đọc và phân tích dữ liệu trong biểu đồ đoạn thẳng	124
📁 Dạng : Vẽ biểu đồ đoạn thẳng	125
Ⓢ Bài tập vận dụng	125
Ⓢ Bài tập trắc nghiệm	131
Ⓢ Bài tập tự luận	132

Chương 6. TỈ LỆ THỨC VÀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ 139

§20 – TỈ LỆ THỨC 139

Ⓢ Trọng tâm kiến thức	139
Ⓢ Các dạng bài tập	139
📁 Dạng : Nhận biết tỉ số - Tỉ lệ thức	139
📁 Dạng : Tìm số chưa biết trong tỉ lệ thức	140
📁 Dạng : Lập tỉ lệ thức từ các số hoặc đẳng thức cho trước	140
📁 Dạng : Chứng minh tỉ lệ thức	141
📁 Dạng : Các bài toán thực tế sử dụng tỉ lệ thức	141
Ⓢ Bài tập vận dụng	141
Ⓢ Bài tập nâng cao	143

§21 – TÍNH CHẤT CỦA DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU 145

Ⓢ Trọng tâm kiến thức	145
Ⓢ Các dạng bài tập	145
📁 Dạng : Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau để tìm các đại lượng chưa biết	145
📁 Dạng : Chứng minh tỉ lệ thức. Tính giá trị biểu thức	146
📁 Dạng : Áp dụng tính chất của dãy hai tỉ số bằng nhau để giải bài toán khác	146
Ⓢ Bài tập vận dụng	147
Ⓢ Bài tập nâng cao	148

§22 – ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN 151

Ⓢ Trọng tâm kiến thức	151
Ⓢ Các dạng bài tập	151

📁 Dạng : Nhận biết đại lượng tỉ lệ thuận.....	151
📁 Dạng : Tìm giá trị của một đại lượng tỉ lệ thuận khi biết giá trị của đại lượng kia.....	152
📁 Dạng : Giải bài toán thực tế về hai đại lượng tỉ lệ thuận.....	153
📁 Dạng : Chia một số M thành những phần x, y, z tỉ lệ thuận với các số a, b, c cho trước.....	153
Ⓒ Bài tập vận dụng.....	154
Ⓓ Bài tập nâng cao.....	156

§23 – ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH 158

Ⓐ Trọng tâm kiến thức.....	158
Ⓑ Các dạng bài tập.....	158
📁 Dạng : Nhận biết đại lượng tỉ lệ nghịch.....	158
📁 Dạng : Tìm giá trị của một đại lượng tỉ lệ nghịch khi biết giá trị của đại lượng kia.....	159
📁 Dạng : Giải bài toán thực tế về hai đại lượng tỉ lệ nghịch.....	160
📁 Dạng : Chia một số M thành những phần x, y, z tỉ lệ nghịch với các số a, b, c cho trước.....	161
Ⓒ Bài tập vận dụng.....	161
Ⓓ Bài tập nâng cao.....	164
Ⓔ Bài tập rèn luyện.....	165
Ⓕ Bài tập bổ sung.....	166

Chương 7. BIỂU THỨC ĐẠI SỐ VÀ ĐA THỨC MỘT BIẾN 168

§24 – BIỂU THỨC ĐẠI SỐ 168

Ⓐ Trọng tâm kiến thức.....	168
Ⓑ Các dạng bài tập.....	168
📁 Dạng : Viết các biểu thức đại số và diễn đạt các biểu thức đại số.....	168
📁 Dạng : Tính giá trị của biểu thức đại số.....	170
📁 Dạng : Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức.....	171
Ⓒ Bài tập vận dụng.....	171
Ⓓ Bài tập nâng cao.....	172

§25 – ĐA THỨC MỘT BIẾN 174

Ⓐ Trọng tâm kiến thức.....	174
Ⓑ Các dạng bài tập.....	175
📁 Dạng : Nhận biết đơn thức một biến. Phép nhân các đơn thức.....	175

📁	Dạng : Cộng, trừ các đơn thức một biến cùng bậc	176
📁	Dạng : Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của đa thức	176
📁	Dạng : Xác định bậc, hệ số của đa thức	177
📁	Dạng : Tính giá trị của đa thức	178
📁	Dạng : Tìm nghiệm của đa thức	179
Ⓒ	Bài tập vận dụng	180
Ⓓ	Bài tập nâng cao	183

§26 – PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ ĐA THỨC MỘT BIẾN 185

Ⓐ	Trọng tâm kiến thức	185
Ⓑ	Các dạng bài tập	185
📁	Dạng : Tính tổng hoặc hiệu của hai đa thức	185
📁	Dạng : Tìm đa thức chưa biết trong một đẳng thức	188
📁	Dạng : Chứng minh đa thức không phụ thuộc vào biến	189
📁	Dạng : Vận dụng	189
Ⓒ	Bài tập vận dụng	191
Ⓓ	Bài tập nâng cao	194

§27 – PHÉP NHÂN ĐA THỨC MỘT BIẾN 196

Ⓐ	Trọng tâm kiến thức	196
Ⓑ	Các dạng bài tập	196
📁	Dạng : Làm tính nhân	196
📁	Dạng : Rút gọn biểu thức	197
📁	Dạng : Tính giá trị biểu thức	198
📁	Dạng : Tìm giá trị chưa biết	198
📁	Dạng : Chứng minh giá trị của biểu thức không phụ thuộc vào biến	198
📁	Dạng : Vận dụng bài toán có lời văn	199
Ⓒ	Bài tập vận dụng	199
Ⓓ	Bài tập nâng cao	200

§28 – PHÉP CHIA ĐA THỨC MỘT BIẾN 202

Ⓐ	Trọng tâm kiến thức	202
Ⓑ	Các dạng bài tập	202
📁	Dạng : Chia đơn thức cho đơn thức	202
📁	Dạng : Chia đa thức cho đơn thức	203
📁	Dạng : Chia đa thức một biến đã sắp xếp	203
📁	Dạng : Tính giá trị của biểu thức	204
📁	Dạng : Tìm x , tìm đa thức thoả đẳng thức cho trước	204

	Dạng : Xác định các hằng số a và b sao cho một phép chia đa thức là phép chia hết.....	204
	Dạng : Tìm số nguyên x sao cho tại giá trị của đa thức A chia hết cho giá trị của đa thức B	205
	Bài tập vận dụng.....	206
	Bài tập nâng cao.....	207
	Bài tập rèn luyện.....	208
	Bài tập bổ sung.....	210

Chương 8. LÀM QUEN VỚI BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ 213

§29 –LÀM QUEN VỚI BIẾN CỐ 213

	Trọng tâm kiến thức.....	213
	Các dạng bài tập.....	213
	Dạng : Nhận biết các loại biến cố.....	213
	Dạng : Tìm điều kiện để một biến cố là biến cố chắc chắn, không thể hay ngẫu nhiên.....	217
	Bài tập vận dụng.....	218
	Bài tập nâng cao.....	222

§30 –LÀM QUEN VỚI XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ 224

	Trọng tâm kiến thức.....	224
	Các dạng bài tập.....	224
	Dạng : Xét tính đồng khả năng của các biến cố.....	224
	Dạng : Tính xác suất của biến cố.....	225
	Bài tập vận dụng.....	227
	Bài tập nâng cao.....	230
	Bài tập rèn luyện.....	232
	Bài tập bổ sung.....	234

Chương 9. QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG MỘT TAM GIÁC 236

§31 –QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN TRONG MỘT TAM GIÁC 236

	Trọng tâm kiến thức.....	236
	Các dạng bài tập.....	236
	Dạng : So sánh các cạnh của một tam giác.....	236
	Dạng : So sánh các góc của một tam giác.....	237
	Dạng : So sánh hai góc hoặc hai cạnh không trong cùng một tam giác.....	238

Ⓒ	Bài tập vận dụng.....	239
Ⓓ	Bài tập nâng cao.....	240

§32 – QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN 241

Ⓐ	Trọng tâm kiến thức.....	241
Ⓑ	Các dạng bài tập.....	241
	📁 Dạng : Xác định đường vuông góc, đường xiên.....	241
	📁 Dạng : So sánh độ dài các đường xiên.....	242
	📁 Dạng : Toán có nội dung thực tế.....	243
Ⓒ	Bài tập vận dụng.....	244
Ⓓ	Bài tập nâng cao.....	245

§33 – QUAN HỆ GIỮA BA CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC 246

Ⓐ	Trọng tâm kiến thức.....	246
Ⓑ	Các dạng bài tập.....	246
	📁 Dạng : Nhận biết ba độ dài có phải là ba cạnh của một tam giác hay không.....	246
	📁 Dạng : Tìm độ dài một cạnh của một tam giác khi biết độ dài của hai cạnh còn lại.....	247
	📁 Dạng : Tính chu vi của tam giác cân.....	247
	📁 Dạng : Chứng minh các bất đẳng thức về độ dài.....	248
	📁 Dạng : Bài toán có nội dung thực tế.....	249
Ⓒ	Bài tập vận dụng.....	249
Ⓓ	Bài tập nâng cao.....	250

§34 – SỰ ĐỒNG QUY CỦA BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN, BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC TRONG MỘT TAM GIÁC 252

Ⓐ	Trọng tâm kiến thức.....	252
Ⓑ	Các dạng bài tập.....	253
	📁 Dạng : Tính tỉ số độ dài các đoạn thẳng.....	253
	📁 Dạng : Chứng minh mối quan hệ giữa các đoạn thẳng.....	253
	📁 Dạng : Tính số đo góc, chứng minh tia phân giác của một góc.....	254
	📁 Dạng : Chứng minh một điểm là trọng tâm của một tam giác, một điểm nằm trên đường phân giác của một góc.....	255
	📁 Dạng : Đường trung tuyến, đường phân giác trong các tam giác đặc biệt.....	256
	📁 Dạng : Bài toán có nội dung thực tế.....	256
Ⓒ	Bài tập vận dụng.....	257
Ⓓ	Bài tập nâng cao.....	259

§35 – SỰ ĐỒNG QUY CỦA BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC, BA ĐƯỜNG CAO TRONG MỘT TAM GIÁC 261

- Ⓐ Trọng tâm kiến thức 261
- Ⓑ Các dạng bài tập 262
 - 📁 Dạng : Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau 262
 - 📁 Dạng : Tính số đo góc 262
 - 📁 Dạng : Bài toán liên quan đến đường trung trực 263
 - 📁 Dạng : Bài toán liên quan đến đường cao 264
 - 📁 Dạng : Bài toán có nội dung thực tế 265
- Ⓒ Bài tập nâng cao 267
- Ⓓ Bài tập rèn luyện 269
- Ⓔ Bài tập bổ sung 271

Chương 10. MỘT SỐ HÌNH KHỐI TRONG THỰC TIỄN 274

§36 – HÌNH HỘP CHỮ NHẬT VÀ HÌNH LẬP PHƯƠNG 274

- Ⓐ Trọng tâm kiến thức 274
- Ⓑ Các dạng bài tập 276
 - 📁 Dạng : Các yếu tố trong hình hộp chữ nhật, hình lập phương 276
 - 📁 Dạng : Nhận dạng hình hộp chữ nhật, hình lập phương 276
 - 📁 Dạng : Tính diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật, hình lập phương 277
 - 📁 Dạng : Tính thể tích của hình hộp chữ nhật, hình lập phương 278
 - 📁 Dạng : Tổng hợp 279
 - 📁 Dạng : Vận dụng vào bài toán thực tế 280
- Ⓒ Bài tập vận dụng 282
- Ⓓ Bài tập nâng cao 286

§37 – HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG TAM GIÁC VÀ HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG TỨ GIÁC 288

- Ⓐ Trọng tâm kiến thức 288
- Ⓑ Các dạng bài tập 289
 - 📁 Dạng : Các yếu tố trong hình lăng trụ đứng tam giác, lăng trụ đứng tứ giác 289
 - 📁 Dạng : Nhận dạng hình lăng trụ đứng tam giác, lăng trụ đứng tứ giác 291
 - 📁 Dạng : Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng 291
 - 📁 Dạng : Tính thể tích của hình lăng trụ đứng 292
 - 📁 Dạng : Vận dụng vào bài toán thực tế 293
- Ⓒ Bài tập vận dụng 294
- Ⓓ Bài tập nâng cao 298

Ⓔ	Bài tập trắc nghiệm.....	300
Ⓕ	Bài tập tự luận.....	301



BÀI 1. TẬP HỢP CÁC SỐ HỮU TỈ

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 SỐ HỮU TỈ

Số hữu tỉ là số viết được dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.

Tập hợp các số hữu tỉ được kí hiệu là $\mathbb{Q}$.

Chú ý

Mỗi số hữu tỉ đều có một số đối. Số đối của số hữu tỉ m là số hữu tỉ $-m$.

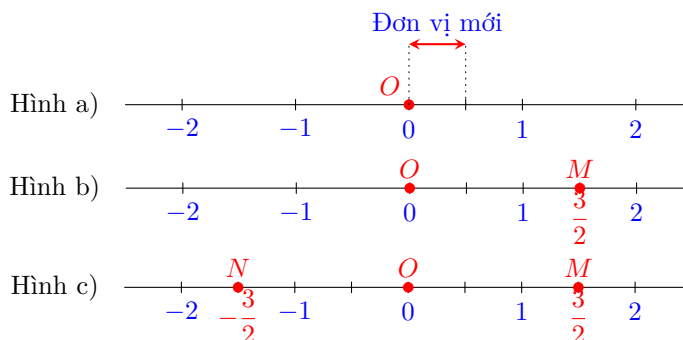
❖ **Nhận xét 1.1.** Vì các số thập phân đã biết đều viết được dưới dạng phân số thập phân nên chúng đều là các số hữu tỉ. Tương tự, số nguyên, hỗn số cũng là các số hữu tỉ.

2 BIỂU DIỄN CÁC SỐ HỮU TỈ TRÊN TRỤC SỐ

a) Tương tự số nguyên, ta có thể biểu diễn các số hữu tỉ trên trục số. Chẳng hạn, để biểu diễn số hữu tỉ $\frac{3}{2}$ ta làm như sau:

- Chia đoạn thẳng đơn vị (chẳng hạn đoạn từ 0 đến 1) thành hai đoạn bằng nhau, lấy một đoạn làm đơn vị mới (đơn vị mới bằng $\frac{1}{2}$ đơn vị cũ) (Hình a)
- Số hữu tỉ $\frac{3}{2}$ được biểu diễn bởi điểm M (nằm sau gốc O) và cách O một đoạn bằng 3 đơn vị mới (Hình b).

b) Tương tự, số hữu tỉ $-\frac{3}{2}$ được biểu diễn bởi điểm N (nằm trước gốc O) và cách O một đoạn bằng 3 đơn vị mới (Hình c). Do đó $OM = ON$.



Chú ý

❖ Số hữu tỉ $\frac{3}{2} = 1,5$ nên 1,5 cũng được biểu diễn bởi điểm M ; Số hữu tỉ $-\frac{3}{2} = -\frac{6}{4}$ nên $-\frac{6}{4}$ cũng được biểu diễn bởi điểm N (Hình c).

❖ Trên trục số, điểm biểu diễn số hữu tỉ a được gọi là điểm a .

❖ **Nhận xét 1.2.** Trên trục số, hai điểm biểu diễn của hai số hữu tỉ đối nhau a và $-a$ nằm về hai phía khác nhau so với điểm O và có cùng khoảng cách đến O .

3 THỨ TỰ TRONG TẬP HỢP CÁC SỐ HỮU TỈ

❖ Ta có thể so sánh hai số hữu tỉ bất kì bằng cách viết chúng dưới dạng phân số rồi so sánh hai phân số đó.

❖ Với hai số hữu tỉ a, b bất kì, ta luôn có hoặc $a = b$ hoặc $a < b$ hoặc $a > b$. Cho ba số hữu tỉ a, b, c . Nếu $a < b$ và $b < c$ thì $a < c$ (tính chất bắc cầu).

❖ Trên trục số, nếu $a < b$ thì điểm a nằm trước điểm b .

Chú ý

Trên trục số, các điểm nằm trước gốc O biểu diễn số hữu tỉ âm (tức số hữu tỉ nhỏ hơn 0); các điểm nằm sau gốc O biểu diễn số hữu tỉ dương (tức số hữu tỉ lớn hơn 0). Số 0 không là số hữu tỉ dương, cũng không là số hữu tỉ âm.

❖ **Nhận xét 1.3.**

❖ Số hữu tỉ lớn hơn 0 gọi là số hữu tỉ dương.

Số hữu tỉ nhỏ hơn 0 gọi là số hữu tỉ âm.

Số hữu tỉ 0, không là số hữu tỉ dương cũng không là số hữu tỉ âm.

❖ Số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ là số hữu tỉ dương nếu a và b cùng dấu, là số hữu tỉ âm nếu a, b khác dấu, bằng 0 nếu $a = 0$.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

 **Dạng : Nhận biết một số hữu tỉ, các quan hệ**

a) Muốn xem một số hữu tỉ hay không, ta hãy biến đổi xem số đó có dạng $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$; $b \neq 0$ hay không.

❖ **Ví dụ 1.** Các số 0, 3; $-1, 35$; $1\frac{3}{4}$; 0; -2 ; 100 có là số hữu tỉ không? Vì sao?

❖ **Ví dụ 2.** Hãy cho biết tính đúng, sai của mỗi khẳng định sau:

- a) $0,45 \in \mathbb{Q}$; b) $-\frac{11}{3} \in \mathbb{Q}$; c) $-123 \notin \mathbb{Q}$; d) $3\frac{1}{2} \notin \mathbb{Q}$;

e) $0 \in \mathbb{Q}$; f) $2023 \notin \mathbb{Q}$; g) $-1\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$; h) $\frac{-2022}{2023} \in \mathbb{Q}$;

🔴 **Ví dụ 3.** Điền kí hiệu ($\in$, $\notin$, $\subset$) thích hợp vào ô vuông:

$-7 \square \mathbb{Z}$; $-1,2 \square \mathbb{N}$; $\frac{1}{3} \square \mathbb{Q}$; $\mathbb{Z} \square \mathbb{Q}$; $3\frac{2}{5} \square \mathbb{Q}$; $\frac{-2}{5} \square \mathbb{N}$; $0 \square \mathbb{Q}$

🔴 **Ví dụ 4.** Điền kí hiệu thích hợp vào ô trống:

a) $-\frac{3}{5} \square \mathbb{Z}$; $-\frac{3}{5} \in \square$. b) $2023 \square \mathbb{N}$; $2023 \in \square$.

🔴 **Ví dụ 5.** Khẳng định nào sau đây là **sai**?

Ⓐ $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$. Ⓑ $-47 \in \mathbb{Q}$. Ⓒ $-47 \in \mathbb{Z}$. Ⓓ $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$.

🔴 **Ví dụ 6.** Dãy số nào sau đây cùng biểu diễn một số hữu tỉ?

a) $-0,3$; $\frac{-3}{10}$; $\frac{-6}{20}$ b) 5 ; $\frac{-5}{-1}$; $\frac{-10}{2}$ c) $\frac{2}{13}$; $\frac{-7}{13}$; $\frac{-14}{26}$

🔴 **Ví dụ 7.** Tìm số đối của các số hữu tỉ sau

a) $-0,25$; b) $\frac{-3}{5}$; c) $\frac{7}{-13}$; d) $-\frac{2}{7}$;
e) $3\frac{1}{5}$; f) $-2\frac{1}{3}$; g) 2023 ; h) $\frac{-13}{-11}$.

🔴 **Ví dụ 8.** Chứng minh rằng không có số hữu tỉ x thỏa mãn $x^2 = 2$.

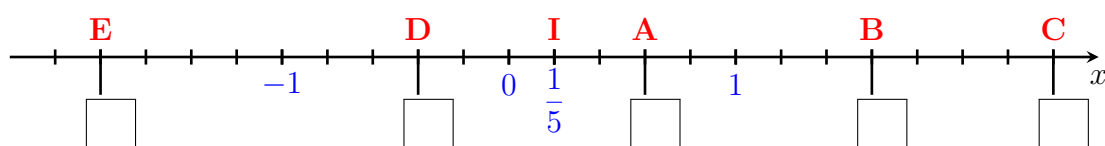
📄 Dạng : Biểu diễn các số hữu tỉ trên trục số

Để biểu diễn số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$), ta chia đoạn thẳng đơn vị (chẳng hạn từ điểm 0 đến điểm 1) thành b phần bằng nhau, lấy một đoạn làm đơn vị mới (bằng $\frac{1}{b}$ đơn vị cũ).

🟢 Nếu $a > 0$ thì số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ được biểu diễn bởi điểm M nằm bên phải của 0 và cách 0 một đoạn bằng a đơn vị mới.

🟣 Nếu $a < 0$ thì số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ được biểu diễn bởi điểm N nằm bên trái của 0 và cách 0 một đoạn bằng $|a| = -a$ đơn vị mới.

🔴 **Ví dụ 1.** Trên trục số, đặt các vạch chia sao cho khoảng cách giữa hai vạch chia kề nhau bằng $\frac{1}{5}$ độ dài đoạn đơn vị cũ (chẳng hạn đoạn từ điểm 0 đến điểm 1 như trong hình dưới đây). Điền số hữu tỉ thích hợp vào ô vuông.



🔴 **Ví dụ 2.** Nêu các bước để biểu diễn số hữu tỉ $\frac{3}{2}$ trên trục số. Từ đó, biểu diễn số hữu tỉ $-\frac{5}{2}$ trên trục số đó.

❶ **Ví dụ 3.** Biểu diễn số hữu tỉ $\frac{5}{6}$ và $\frac{2}{-7}$ trên trục số.

❷ **Ví dụ 4.**

a) Trong các phân số sau, phân số nào biểu diễn số hữu tỉ $\frac{5}{-4}$:

$$\frac{-25}{20}; \frac{15}{-12}; \frac{-30}{24}; \frac{-54}{44} ?$$

b) Biểu diễn số hữu tỉ $\frac{5}{-4}$ trên trục số.

❸ **Ví dụ 5.** Viết 3 đại diện của mỗi số hữu tỉ sau rồi nêu dạng tổng quát của nó.

$$x_1 = -6; x_2 = -\frac{7}{3}; x_3 = \frac{5}{12}; x_4 = -1,25; x_5 = \frac{6}{4}.$$

Chú ý

Chú ý: Để chỉ ra được dạng tổng quát của một số hữu tỉ x ta thực hiện theo các bước

📦 **Bước 1:** Biến đổi x về dạng phân số tối giản, giả sử $x = \frac{m}{n}$.

📦 **Bước 2:** Khi đó, dạng tổng quát của x là $x = \frac{m \cdot k}{n \cdot k}$ với $k \in \mathbb{Z}$ và $k \neq 0$.

📖 Dạng : So sánh các số hữu tỉ

Viết x, y dưới dạng hai phân số cùng mẫu dương $x = \frac{a}{m}, y = \frac{b}{m}$ ($m > 0$).

a) Nếu $a < b$ thì $x < y$;

b) Nếu $a > b$ thì $x > y$;

c) Nếu $a = b$ thì $x = y$.

Chú ý

📦 Nếu $b > 0, d > 0$ thì $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ khi và chỉ khi $ad > bc$.

📦 Nếu $\frac{a}{b} - 1 > \frac{c}{d} - 1$ thì $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$. Nếu $\frac{a}{b} + 1 > \frac{c}{d} + 1$ thì $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

❶ **Ví dụ 1.** Hãy so sánh hai số hữu tỉ

a) $-0,3$ và $\frac{-1}{5}$.

b) $-0,6$ và $\frac{1}{-2}$.

c) $\frac{9}{10}$ và $\frac{5}{42}$;

d) $\frac{-4}{27}$ và $\frac{10}{-73}$.

❷ **Ví dụ 2.** So sánh các số hữu tỉ x và y sau bằng cách nhanh nhất.

a) $x = \frac{999}{556}$ và $y = \frac{1000}{557}$;

b) $x = \frac{-313}{370}$ và $y = \frac{-314}{371}$;

c) $x = \frac{300}{-299}$ và $y = \frac{-500}{507}$;

d) $x = \frac{-2}{15}$ và $y = \frac{-10}{-11}$.

❶ Ví dụ 3. So sánh các số hữu tỉ sau: $\frac{-16}{27}$; $\frac{-16}{29}$; $\frac{-19}{27}$.

❶ Ví dụ 4. Sắp xếp các số hữu tỉ sau theo thứ tự tăng dần:

a) $\frac{19}{33}$; $\frac{6}{11}$; $\frac{13}{11}$;

b) $\frac{-18}{12}$; $\frac{10}{-7}$; $-1, 6$;

c) $\frac{5}{-6}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{-7}{12}$; $\frac{5}{8}$.

❶ Ví dụ 5. Chỉ ra hai phân số có mẫu bằng 7 lớn hơn $\frac{-3}{8}$ và nhỏ hơn $\frac{-1}{8}$.

📄 Dạng : Tìm điều kiện để một số hữu tỉ là một số nguyên.

🔍 Muốn cho số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ là một số nguyên thì b phải là ước của a .

❶ Ví dụ 1. Cho số hữu tỉ $x = \frac{4}{a}$ ($a \in \mathbb{Z}$; $a \neq 0$). Với giá trị nguyên nào của a thì x là một số nguyên?

❶ Ví dụ 2. Cho số hữu tỉ $x = \frac{a+11}{a}$ ($a \in \mathbb{Z}$; $a \neq 0$). Với giá trị nguyên nào của a thì x là một số nguyên?

❶ Ví dụ 3. Cho số hữu tỉ $x = \frac{3m-12}{6}$ với $m \in \mathbb{Z}$. Tìm các giá trị của m để x là số nguyên.

📄 BÀI TẬP VẬN DỤNG

📄 Bài 1. Trong các phân số $\frac{12}{27}$, $\frac{-1}{2}$, $\frac{-20}{-45}$, $\frac{16}{-36}$ phân số nào biểu diễn số hữu tỉ $\frac{-4}{9}$?

📄 Bài 2. Trong các số hữu tỉ sau, số nào là số hữu tỉ âm?

$$\frac{-3}{-8}, \frac{4}{5}, \frac{0}{-7}, \frac{-6}{13}.$$

📄 Bài 3. Tìm số đối của các số hữu tỉ sau

a) $-3,75$;

b) $\frac{-5}{13}$;

c) $\frac{11}{-19}$;

d) $-\frac{3}{10}$;

e) $2\frac{2}{3}$;

f) $-1\frac{1}{4}$;

g) 2022 ;

h) $\frac{-17}{-35}$.

📄 Bài 4. Cho các số hữu tỉ sau: $x = \frac{-12}{30}$, $y = \frac{-3}{-7}$, $z = \frac{10}{-25}$. Khi đó trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

a) $x > y$;

b) $y < z$;

c) $x = z$;

d) $z > x$.

📄 Bài 5. a) Tìm số nhỏ nhất trong các số hữu tỉ sau: $\frac{3}{4}$, $\frac{-5}{7}$, $\frac{7}{-8}$, $\frac{0}{5}$.

b) Tìm số lớn nhất trong các số hữu tỉ sau: $\frac{-6}{11}, \frac{6}{-13}, \frac{-9}{-17}, \frac{6}{11}$.

Bài 6. So sánh các số hữu tỉ

a) $\frac{-15}{16}$ và $\frac{5}{-8}$. b) $-\frac{7}{3}$ và $\frac{-6}{5}$. c) $\frac{13}{9}$ và $\frac{-16}{-3}$. d) $\frac{2}{3}$ và $\frac{6}{7}$.

Bài 7. Sắp xếp các số hữu tỉ sau đây theo thứ tự tăng dần

$$-0,25; \frac{1}{2}; -0,5; \frac{5}{6}; \frac{13}{12}; \frac{-5}{24}; 0; \frac{1}{48}; \frac{2}{3}; \frac{-9}{8}.$$

Bài 8. Chứng minh rằng với mọi $b > 0$, ta có

a) Nếu $\frac{a}{b} > 1$ thì $a > b$. b) Nếu $\frac{a}{b} < 1$ thì $a < b$.

Bài 9. Viết 5 đại diện của mỗi số hữu tỉ sau rồi nêu dạng tổng quát của nó.

$$x_1 = -2,5; x_2 = \frac{5}{6}; x_3 = \frac{-7}{5}; x_4 = -0,36; x_5 = \frac{-9}{-25}; x_6 = \frac{27}{6}.$$

Bài 10. Tìm $x \in \mathbb{Q}$, biết rằng x là số âm lớn nhất được viết bởi ba số 1.

Bài 11. a) Điền tên các tập hợp ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$) thích hợp vào các ô vuông:

a) $-2 \notin \square$; b) $\frac{-3}{4} \notin \square$; c) $\frac{-1}{7} \in \square$; d) $0, 13 \in \square$.

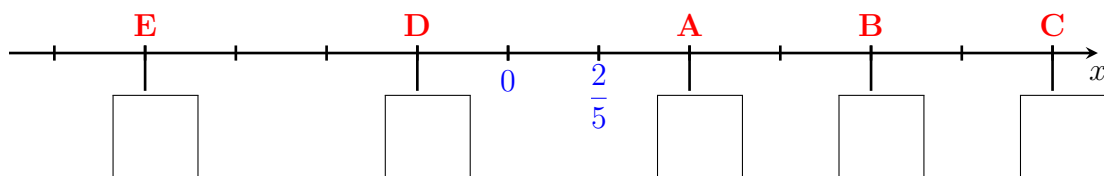
b) Điền kí hiệu ($\notin, \in, \subset$) thích hợp vào các ô vuông:

a) $0 \square \mathbb{Q}$; b) $\frac{-1}{2} \square \mathbb{N}$; c) $3 \square \mathbb{Z}$; d) $\mathbb{Z} \square \mathbb{Q}$.

c) Điền Đ (đúng), S (sai) thích hợp vào các ô vuông:

a) $\square 2, 4 \in \mathbb{Z}$; b) $\square 3, 5 \in \mathbb{Q}$; c) $\square \frac{1}{4} \subset \mathbb{Q}$.

Bài 12. Trên trục số, đặt các vạch chia sao cho khoảng cách giữa hai vạch chia kề nhau bằng $\frac{2}{5}$ độ dài đoạn đơn vị cũ (chẳng hạn đoạn từ điểm 0 đến điểm 1 như trong hình dưới đây). Điền số hữu tỉ thích hợp vào ô vuông.



Bài 13. So sánh các số hữu tỉ

a) $x = \frac{-7}{5}$ và $y = \frac{-11}{9}$ b) $x = \frac{4}{7}$ và $y = \frac{13}{17}$
c) $x = \frac{-7}{3}$ và $y = \frac{13}{-6}$ d) $x = -0,75$ và $y = \frac{3}{-4}$.

Bài 14. Sắp xếp các số hữu tỉ sau theo thứ tự tăng dần

$$-\frac{19}{30}; -\frac{5}{9}; 0; -\frac{25}{47}; -\frac{124}{2011}; \frac{24}{35}; \frac{23}{49}.$$

Bài 15. Tuổi thọ trung bình dự kiến của những người sinh năm 2023 ở một số quốc gia được cho trong bảng sau:

Quốc gia	Australia	Pháp	Tây Ban Nha	Anh	Mỹ
Tuổi thọ trung bình dự kiến	82	81,5	$82\frac{1}{5}$	$80\frac{2}{5}$	$77\frac{1}{2}$

Sắp xếp các quốc gia theo tuổi thọ trung bình dự kiến từ nhỏ đến lớn.

Bài 16. Cho x là số thỏa mãn $x^2 = 21$. Chứng minh rằng x không là số hữu tỉ.

Bài 17. Cho số hữu tỉ $x = \frac{5}{a}$ ($a \in \mathbb{Z}; a \neq 0$). Với giá trị nguyên nào của a thì x là một số nguyên?

Bài 18. Cho số hữu tỉ $x = \frac{a-3}{a}$ ($a \in \mathbb{Z}; a \neq 0$). Với giá trị nguyên nào của a thì x là một số nguyên?

D BÀI TẬP NÂNG CAO

Câu 1. Cho $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng:

a) Nếu $a < b$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+n}{b+n}$; b) Nếu $a > b$ thì $\frac{a}{b} > \frac{a+n}{b+n}$; c) Nếu $a = b$ thì $\frac{a}{b} = \frac{a+n}{b+n}$.

Câu 2. Cho $x = \frac{a}{m}, y = \frac{b}{m}$. Biết $a, b, m \in \mathbb{Z}, m > 0$ và $x < y$. Hãy chứng tỏ rằng $x < \frac{a+b}{2m} < y$.

Câu 3. Cho $a, b \in \mathbb{Z}$ và $b > 0$. So sánh hai số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ và $\frac{a+1}{b+1}$.

Câu 4. Cho $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$. So sánh hai số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ và $\frac{a+2005}{b+2005}$.

Câu 5.

a) Tìm các số hữu tỉ có dạng $\frac{a}{5}$ (a là số nguyên) nằm giữa hai số $\frac{-2}{3}$ và $\frac{-1}{7}$.

b) Có bao nhiêu phân số có tử số bằng 7 và số đó nằm giữa hai số $\frac{2}{7}$ và $\frac{3}{5}$.

Câu 6. Cho 6 số nguyên dương $a < b < c < d < m < n$. Chứng minh rằng

$$\frac{a+c+m+1}{a+b+c+d+m+n} < \frac{1}{2}.$$

❖ **Câu 7.** Cho các số nguyên dương a và b thỏa mãn $8a^2 - 51b^2 \geq 1$ và $\frac{b}{a-2b}$ là số nguyên. Chứng minh rằng a chia hết cho b .

❖ **Câu 8.** Cho hai phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ thỏa $b, d > 0$ và $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

❖ **Câu 9.**

- a) Viết ba số hữu tỉ có mẫu số khác nhau, lớn hơn $\frac{-1}{3}$ nhưng nhỏ hơn $\frac{4}{5}$.
- b) Tìm các số hữu tỉ có dạng $\frac{7}{a}$ biết rằng giá trị của số đó lớn hơn $\frac{-9}{11}$ và nhỏ hơn $\frac{-9}{13}$.
- c) Có bao nhiêu phân số có tử số bằng 9, lớn hơn $\frac{-3}{5}$ và nhỏ hơn $\frac{-4}{9}$?

BÀI 2. CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA SỐ HỮU TỈ

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 CỘNG TRỪ HAI SỐ HỮU TỈ

Ta có thể cộng, trừ hai số hữu tỉ bằng cách viết chúng dưới dạng phân số rồi áp dụng quy tắc cộng, trừ phân số.

Chú ý

Nếu hai số hữu tỉ đều được cho dưới dạng số thập phân thì ta áp dụng quy tắc cộng và trừ đối với số thập phân.

❖ **Nhận xét 2.1.** Trong tập các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, ta cũng có quy tắc dấu ngoặc tương tự như trong tập các số nguyên $\mathbb{Z}$.

Chú ý

Đối với một tổng trong $\mathbb{Q}$, ta có thể đổi chỗ các số hạng, đặt dấu ngoặc để nhóm các số hạng một cách tùy ý như các tổng trong $\mathbb{Z}$.

2 NHÂN VÀ CHIA HAI SỐ HỮU TỈ

Ta có thể nhân, chia hai số hữu tỉ bằng cách viết chúng dưới dạng phân số rồi áp dụng quy tắc nhân, chia phân số.

Chú ý

Nếu hai số hữu tỉ đều được cho dưới dạng số thập phân thì ta có thể áp dụng quy tắc nhân và chia đối với số thập phân, chẳng hạn:

$$1,25 \cdot (-4,6) = -(1,25 \cdot 4,6) = -5,75$$

$$7,8 : (-0,13) = -(7,8 : 0,13) = -60$$

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng : Thực hiện phép tính cộng, trừ

Để thực hiện phép tính cộng, trừ số hữu tỉ ta có thể thực hiện quy tắc cộng, trừ hai số hữu tỉ. Đối với dãy tính có nhiều số hạng ta có thể áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp, quy tắc dấu ngoặc để thực hiện một cách hợp lí nhất.

❶ **Ví dụ 1.** Hãy thực hiện các phép tính.

a) $\frac{9}{17} + \frac{5}{17}$;

b) $\frac{9}{17} - \frac{5}{17}$;

c) $\frac{3}{11} - \frac{5}{-11}$;

d) $3 + \frac{2}{9}$;

e) $\frac{-3}{8} + \frac{-5}{12}$;

f) $\frac{-3}{14} + \frac{4}{35}$;

g) $\frac{24}{126} - \frac{-5}{28}$;

h) $-3\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3}$.

❶ Ví dụ 2. Tính

a) $\frac{-3}{8} + \frac{-5}{12}$;

b) $\frac{-3}{14} + \frac{4}{35}$;

c) $\frac{11}{30} - \frac{19}{20}$;

d) $\frac{7}{15} - \frac{-9}{20}$.

e) $\frac{3}{2} + \frac{2}{-3}$.

f) $-2 - \left(-\frac{3}{7}\right)$;

g) $0,6 + \frac{4}{-3}$.

h) $\frac{3}{7} - (-0,2)$.

❷ Ví dụ 3. Thực hiện các phép tính sau.

a) $\frac{2}{3} - \frac{-1}{4} + \frac{1}{21} + \frac{1}{12}$;

b) $\frac{-1}{3} - \frac{-3}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{43} - \frac{-3}{7} + \frac{-1}{2} - \frac{1}{35}$

❸ Ví dụ 4. Tính giá trị của các biểu thức

a) $A = 2\frac{3}{2} - 3\frac{3}{5} + \frac{1}{4}$.

b) $B = 5\frac{2}{7} - 8\frac{1}{3} + \frac{1}{21}$.

c) $A = \left(6 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(5 + \frac{5}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(3 - \frac{7}{3} + \frac{5}{2}\right)$.

❹ Ví dụ 5. Tính giá trị các biểu thức sau theo cách hợp lí nhất.

a) $A = \left(\frac{1}{3} - \frac{8}{15} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{-7}{15} + 1\frac{1}{7}\right)$;

b) $B = 0,25 + \frac{3}{5} - \left(\frac{1}{8} - \frac{2}{5} + 1\frac{1}{4}\right)$.

❺ Ví dụ 6. Viết số hữu tỉ $\frac{5}{12}$ dưới các dạng sau đây

a) Tổng của hai số hữu tỉ dương.

b) Tổng của một số hữu tỉ dương và một số hữu tỉ âm.

c) Tổng của hai số hữu tỉ dương trong đó một số là $\frac{1}{4}$ **📖 Dạng : Thực hiện phép tính nhân, chia**

Để thực hiện phép tính nhân, chia số hữu tỉ ta viết các số dưới dạng phân số rồi áp dụng các quy tắc của phép tính về phân số. Đối với một tích có nhiều thừa số ta có thể áp dụng các tính chất giao hoán, kết hợp để thực hiện phép tính hợp lí nhất.

❶ Ví dụ 1. Thực hiện phép tính nhân:

a) $\frac{-8}{15} \cdot \frac{35}{-24}$;

b) $-30 \cdot \frac{4}{5}$;

c) $\frac{42}{55} : \frac{-35}{22}$;

d) $\frac{9}{20} : (-18)$.

❷ Ví dụ 2. Tính giá trị của biểu thức

a) $A = \left(\frac{11}{12} : \frac{33}{16}\right) \cdot \frac{3}{5}$;

b) $A = \frac{-3}{4} \cdot \frac{12}{-5} \cdot \left(-\frac{25}{6}\right)$;

c) $B = (-2) \cdot \frac{-38}{21} \cdot \frac{-7}{4} \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)$.

❸ Ví dụ 3. Hãy viết số hữu tỉ $\frac{-7}{15}$ dưới dạng :

a) Tích của hai số hữu tỉ.

b) Thương của hai số hữu tỉ.

Dạng : Thực hiện các phép tính cộng, trừ, nhân, chia

Thực hiện các phép tính theo đúng quy ước thứ tự thực hiện các phép tính và theo đúng quy tắc cộng, trừ hoặc nhân, chia.

Chú ý vận dụng các tính chất giao hoán, kết hợp, phân phối của phép nhân với phép cộng trong trường hợp có thể.

Ví dụ 1. Thực hiện phép tính

$$\text{a) } -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-6}{7}; \quad \text{b) } \frac{1}{2} + 22\frac{1}{2} : \left(-\frac{3}{4}\right); \quad \text{c) } \left(\frac{41}{75} + \frac{17}{100}\right) : \frac{-129}{80}.$$

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{7}{23} \cdot \left(-\frac{8}{6} - \frac{45}{18}\right). & \text{b) } B &= \frac{2}{15} \cdot \frac{5}{8} - \frac{5}{6} \cdot \frac{-2}{3}; \\ \text{c) } C &= \frac{-4}{7} - \frac{5}{13} \cdot \frac{-39}{25} + \frac{-1}{42} : \left(-\frac{5}{6}\right). \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Tính giá trị của các biểu thức sau bằng cách hợp lí nhất:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{7}{38} \cdot \frac{9}{11} + \frac{7}{38} \cdot \frac{4}{11} - \frac{7}{38} \cdot \frac{2}{11}; & \text{b) } B &= 4x - 4y + 5xy \text{ với } x - y = \frac{5}{12}; xy = -\frac{1}{3}; \\ \text{c) } M &= \frac{7}{38} \cdot \frac{9}{11} + \frac{7}{38} \cdot \frac{4}{11} + \frac{7}{38} \cdot \frac{-2}{11}; & \text{d) } N &= 12\frac{3}{5} : \left(\frac{-5}{7}\right) + 2\frac{2}{5} : \left(\frac{-5}{7}\right). \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Tính giá trị của biểu thức

$$\text{a) } A = \left(\frac{-2}{3} + \frac{3}{7}\right) : \frac{4}{5} + \left(\frac{-1}{3} + \frac{4}{7}\right) : \frac{4}{5}; \quad \text{b) } B = \frac{5}{9} : \left(\frac{1}{11} - \frac{5}{22}\right) + \frac{5}{9} : \left(\frac{1}{15} - \frac{2}{3}\right).$$

Ví dụ 5. Rút gọn biểu thức $M = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{6} - 2}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - 2}$.

Ví dụ 6. Tính nhanh giá trị của các biểu thức $A = \frac{0,75 + 0,6 + \frac{3}{7} + \frac{9}{24}}{2,75 + 2,2 + \frac{11}{7} + \frac{33}{24}}$.

Chú ý

Như vậy, bằng việc chuyển các số thập phân về dạng hữu tỉ, rồi thiết lập nhân tử chung, chúng ta đã có được kết quả nhanh chóng.

Ví dụ 7. Thực hiện phép tính

$$\text{a) } A = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}; \quad \text{b) } B = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}.$$

Ví dụ 8. Rút gọn biểu thức

$$\text{a) } A = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{6} - 2}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - 2};$$

$$\text{b) } B = \frac{\frac{4}{115} - \frac{4}{5} - \frac{4}{889}}{\frac{115}{7} - \frac{5}{7} - \frac{889}{7}} + \frac{3}{7}.$$

 **Dạng : Tìm số chưa biết trong một đẳng thức**

○ Ví dụ 1. Tìm x biết

$$\text{a) } x + \frac{1}{3} = \frac{3}{4};$$

$$\text{b) } x - \frac{2}{5} = \frac{5}{7};$$

$$\text{c) } -x - \frac{2}{3} = -\frac{6}{7};$$

$$\text{d) } \frac{4}{7} - x = \frac{1}{3}.$$

○ Ví dụ 2. Tìm số hữu tỉ x , biết:

$$\text{a) } x + \frac{3}{5} = \frac{4}{7};$$

$$\text{b) } x - \frac{5}{6} = \frac{1}{6};$$

$$\text{c) } \frac{-5}{7} - x = \frac{-9}{10};$$

$$\text{d) } \frac{5}{7} - x = 10.$$

○ Ví dụ 3. Tìm số hữu tỉ x , biết:

$$\text{a) } x - \frac{1}{5} = \frac{3}{2} + \frac{1}{6};$$

$$\text{b) } \frac{4}{5} - \left(\frac{-1}{8}\right) = \frac{7}{8} - x;$$

$$\text{c) } -1,25 + \frac{2}{15} - x = 2;$$

$$\text{d) } 2\frac{1}{2} - x + \frac{4}{5} = \frac{2}{3} - \left(\frac{-4}{7}\right).$$

○ Ví dụ 4. Tìm x , biết

$$\text{a) } x - \frac{5}{18} = \frac{8}{27};$$

$$\text{b) } \frac{-2}{3}x + 1 = -\frac{7}{9};$$

$$\text{c) } -\frac{7}{15}x + \frac{5}{6} = \frac{1}{4}.$$

○ Ví dụ 5. Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết $\frac{11}{15} - \frac{9}{10} < x < \frac{11}{15} : \frac{9}{10}$.

○ Ví dụ 6. Tìm x , biết

$$\text{a) } \left(-1\frac{3}{5} + x\right) : \frac{12}{13} = 2\frac{1}{6}.$$

$$\text{b) } \left(x : 2\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{7} = \frac{-3}{8}.$$

○ Ví dụ 7. Tìm giá trị lớn nhất (hoặc giá trị nhỏ nhất) của biểu thức

$$\text{a) } A = \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \text{ với } x \in \mathbb{Q}.$$

$$\text{b) } B = \frac{2}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2} \text{ với } x \in \mathbb{Q}.$$

 **Dạng : Rút gọn biểu thức có quy luật**

$$\text{a) } \frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right);$$

$$\text{b) } \frac{c}{n(n+k)} = \frac{c}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right).$$

○ Ví dụ 1. Thực hiện phép tính

$$\text{a) } A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} \cdots + \frac{1}{19 \cdot 20};$$

$$\text{b) } B = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \cdots + \frac{1}{930}.$$

○ Ví dụ 2. Thực hiện phép tính

$$\text{a) } C = \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 15} + \frac{1}{15 \cdot 19} + \frac{1}{19 \cdot 23};$$

$$\text{b) } D = 1 - \frac{2}{5 \cdot 10} - \frac{2}{10 \cdot 15} - \frac{2}{15 \cdot 20} - \cdots - \frac{2}{2015 \cdot 2020}.$$

○ Ví dụ 3. Cho $M = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100}$. Chứng minh rằng $\frac{7}{12} < M < \frac{5}{6}$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

 **Bài 1.** Tính:

a) $\frac{6}{7} + \frac{-8}{9};$

b) $\frac{-5}{21} - \frac{19}{28};$

c) $\frac{13}{12} + \frac{-17}{36} - \frac{-13}{18}.$

 **Bài 2.** Tính:

a) $\frac{-25}{28} \cdot \frac{21}{100};$

b) $\frac{7}{9} : \frac{-35}{12}.$

 **Bài 3.** Viết số hữu tỉ $\frac{7}{20}$ dưới các dạng sau đây

a) Tổng của một số hữu tỉ dương và một số hữu tỉ âm.

b) Tổng của hai số hữu tỉ dương trong đó một số là $\frac{1}{4}$.

 **Bài 4.** Thực hiện phép tính

a) $\frac{-5}{2} : \frac{3}{4};$

b) $1,25 : (-3,5);$

c) $\frac{1}{5} : \left(-2\frac{4}{5}\right);$

d) $3 - 1\frac{4}{5} : \left(\frac{-3}{4}\right).$

 **Bài 5.** Thực hiện các phép tính:

a) $A = \frac{3}{2} + \frac{2}{-3};$

b) $B = -2 - \left(\frac{-3}{7}\right);$

c) $C = \frac{-90}{189} + \frac{45}{84} - \frac{75}{126};$

d) $D = 2\frac{2}{3} - 3\frac{3}{5} + \frac{1}{4}.$

 **Bài 6.** Thực hiện phép tính

a) $\frac{-8}{15} \cdot 1\frac{1}{4};$

b) $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{-3}{4};$

c) $\left(0,5 - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{5} - 0,4\right);$

d) $1\frac{1}{17} \cdot 1\frac{1}{24} \cdot (-5,1).$

 **Bài 7.** Thực hiện phép tính $A = \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} - \frac{1}{5 \cdot 6} - \frac{1}{6 \cdot 7} - \frac{1}{7 \cdot 8} - \frac{1}{8 \cdot 9} - \frac{1}{9 \cdot 10}.$

 **Bài 8.** Tính giá trị của các biểu thức

a) $A = \frac{-5}{7} + \frac{7}{-5} + \frac{4}{7} + \frac{7}{4}.$

b) $B = \frac{2}{-5} + \frac{-3}{7} + \frac{-7}{10} + \frac{3}{-8}.$

c) $C = \frac{-5}{7} + \frac{2}{-7} + \frac{4}{-9} + \frac{4}{9}.$

d) $D = \left(3 - \frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) - \left(2 + \frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(1 - \frac{7}{3} - \frac{9}{2}\right).$

 **Bài 9.** Tính giá trị của các biểu thức

a) $A = 1\frac{1}{8} - \frac{8}{9} + \frac{3}{25} + \frac{1}{4} - \frac{5}{16} + \frac{19}{25} - \frac{1}{9} + \frac{2}{25} - \frac{1}{81}.$

$$\text{b) } B = \frac{-1}{3} - \frac{8}{35} + \frac{-2}{9} - \frac{1}{35} + \frac{4}{5} + \frac{-4}{9} + \frac{3}{7}.$$

 **Bài 10.** Tính giá trị của các biểu thức

$$\text{a) } A = \left(\frac{-8}{19}\right) \cdot \left(\frac{25}{34}\right) \cdot \left(\frac{-17}{5}\right) \cdot \left(\frac{19}{-27}\right); \quad \text{b) } B = \left(\frac{-12}{35}\right) \cdot \left(\frac{-21}{15}\right) \cdot \left(\frac{25}{9}\right).$$

 **Bài 11.** Thực hiện các phép tính sau (bằng cách hợp lí nếu có thể):

$$\text{a) } \frac{5}{31} \cdot \frac{21}{25} + \frac{5}{31} \cdot \frac{-7}{10} - \frac{5}{31} \cdot \frac{9}{20}; \quad \text{b) } \left(\frac{13}{24} - \frac{29}{30}\right) : \left(-\frac{51}{5}\right).$$

 **Bài 12.** Tính các biểu thức sau bằng cách hợp lí

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{5}{6} \cdot 17\frac{1}{3} - \frac{5}{6} \cdot 47\frac{1}{3}; & \text{b) } & \frac{11}{25} \cdot (-24,8) - \frac{11}{25} \cdot 75,2; \\ \text{c) } & \frac{12}{7} : \frac{1}{19} + \frac{2}{7} : \frac{1}{19}; & \text{d) } & 4,7 : \frac{1}{5} + 0,3 : \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

 **Bài 13.** Tính giá trị các biểu thức sau theo cách hợp lí nhất:

$$\begin{aligned} \text{a) } M &= \left(6 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(5 + \frac{5}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(3 - \frac{7}{3} + \frac{5}{2}\right) \\ \text{b) } P &= \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{5} - \frac{7}{45} - \left(\frac{5}{9}\right) + \frac{1}{12} + \frac{1}{35}; \\ \text{c) } Q &= \left(5 - \frac{3}{4} + \frac{1}{5}\right) - \left(6 + \frac{7}{4} - \frac{8}{5}\right) - \left(2 - \frac{5}{4} + \frac{16}{5}\right). \end{aligned}$$

 **Bài 14.** Tìm số hữu tỉ x , biết

$$\text{a) } x + \frac{2}{7} = \frac{3}{14}; \quad \text{b) } x - \frac{4}{15} = \frac{3}{10}; \quad \text{c) } \frac{-3}{11} - x = \frac{-5}{22}; \quad \text{d) } \frac{7}{20} - \left(\frac{2}{5} + x\right) = \frac{1}{6}.$$

 **Bài 15.** Tìm x biết

$$\begin{aligned} \text{a) } x - \frac{2}{35} &= \frac{-3}{35}. & \text{b) } \frac{-2}{9} - x &= \frac{1}{3}. \\ \text{c) } \frac{11}{12} - \left(x + \frac{2}{5}\right) &= \frac{2}{3}. & \text{d) } \frac{5}{4} - \left(x + \frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

 **Bài 16.** Tìm x , biết

$$\text{a) } \frac{10}{9} : x + \frac{7}{12} = -\frac{2}{3}; \quad \text{b) } \left(\frac{4}{15} - \frac{1}{6}\right) \cdot x = -\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{27}.$$

 **Bài 17.** Tìm x biết

$$\text{a) } x \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) = 0; \quad \text{b) } \frac{2}{3} + \frac{3}{2} : x = \frac{4}{5}.$$

 **Bài 18.** Tìm x biết

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{6}{7}x &= \frac{-5}{28}; & \text{b) } \frac{2}{5} + \frac{1}{4}x &= \frac{-3}{10}; \\ \text{c) } \left(x + \frac{4}{7}\right) \left(x - \frac{8}{9}\right) &= 0; & \text{d) } (3x - 2) \left(2x - \frac{2}{3}\right) &= 0. \end{aligned}$$

 **Bài 19.** Tìm x , biết

a) $1\frac{5}{9} \cdot x = \frac{28}{9}$;

b) $\left(x - \frac{5}{7}\right) : \frac{-2}{3} = \frac{3}{7}$.

 **Bài 20.** Tìm số nguyên x , biết $\frac{-1}{15} - \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{2} < x < \frac{11}{15} : \frac{9}{10}$.

 **Bài 21.** Điền số nguyên thích hợp vào ô trống

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) < \square < \frac{1}{48} - \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{6}\right).$$

 **Bài 22.** Tìm các số nguyên x thỏa mãn $2\frac{3}{11} \cdot 1\frac{1}{12} \cdot (-2,2) < x < \left(0,4 - \frac{4}{5}\right) \left(\frac{3}{4} - 0,2\right)$.

D BÀI TẬP NÂNG CAO

 **Câu 1.** Rút gọn $M = \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}}$.

 **Câu 2.** Tính $A = \frac{\frac{2}{3} - \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \frac{2}{11}}{\frac{3}{13} - \frac{5}{13} - \frac{7}{13} + \frac{11}{13}}$.

 **Câu 3.** Tính nhanh giá trị của biểu thức $A = \frac{0,75 + 0,6 - \frac{3}{7} - \frac{3}{13}}{2,75 + 2,2 - \frac{11}{7} - \frac{11}{13}}$.

 **Câu 4.** Cho hai biểu thức

$$A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{19}\right) \left(1 - \frac{1}{20}\right),$$

$$B = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{81}\right) \left(1 - \frac{1}{100}\right).$$

a) So sánh A với $\frac{1}{21}$;

b) So sánh B với $\frac{11}{21}$.

 **Câu 5.** Tính $A = \left(\frac{1}{10} - 1\right) \left(\frac{1}{11} - 1\right) \left(\frac{1}{12} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{99} - 1\right) \left(\frac{1}{100} - 1\right)$.

 **Câu 6.** Tìm số hữu tỉ x , biết

a) $\frac{x-100}{24} + \frac{x-98}{26} + \frac{x-96}{28} = 3$;

b) $\frac{x-1}{65} + \frac{x-3}{63} = \frac{x-5}{61} + \frac{x-7}{59}$;

c) $\frac{x-28-124}{2011} + \frac{x-124-2011}{28} + \frac{x-2011-28}{124} = 3$.

❖ Câu 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{11}{12}$.

❖ Câu 8. Tính giá trị lớn nhất của các biểu thức

$$\text{a) } B = -\left(x + \frac{18}{1273}\right)^2 - \frac{183}{121}. \quad \text{b) } C = \frac{4}{\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + 5} \quad \text{c) } D = \frac{15}{(x-8)^2 - 4}.$$

❖ Câu 9. Tìm hai số x, y sao cho $x + y = xy = \frac{x}{y}$, với $y \neq 0$.

BÀI 3. LŨY THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

Lũy thừa bậc n của một số hữu tỉ x , kí hiệu x^n , là tích của n thừa số x (n là số tự nhiên lớn hơn 1):

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ thừa số}} \quad (x \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}, n > 1).$$

x^n đọc là x mũ n hoặc x lũy thừa n hoặc lũy thừa bậc n của x . x gọi là cơ số, n gọi là số mũ.

Quy ước: $x^0 = 1 (x \neq 0)$; $x^1 = x$.

Chú ý

Lũy thừa của một tích bằng tích các lũy thừa; Lũy thừa của một thương bằng thương các lũy thừa.

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n; \quad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad (y \neq 0).$$

Ta định nghĩa $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, với n là số nguyên dương, $x \neq 0$.

2 NHÂN VÀ CHIA HAI LŨY THỪA CÙNG CƠ SỐ

🔷 Khi nhân hai lũy thừa cùng cơ số, ta giữ nguyên cơ số và cộng hai số mũ.

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}.$$

🔷 Khi chia hai lũy thừa cùng cơ số khác 0, ta giữ nguyên cơ số và lấy số mũ của lũy thừa bị chia trừ số mũ của lũy thừa chia.

$$x^m : x^n = x^{m-n} \quad (x \neq 0, m \geq n)$$

3 LŨY THỪA CỦA LŨY THỪA

Khi tính lũy thừa của một lũy thừa, ta giữ nguyên cơ số và nhân hai số mũ.

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}.$$

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

 **Dạng :** Tính giá trị của một lũy thừa hoặc viết một số dưới dạng lũy thừa

Vận dụng định nghĩa lũy thừa:

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ thừa số}} \quad (x \in \mathbb{Q}; n \in \mathbb{N}; n > 1).$$

• Ví dụ 1. Tính

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$;

b) $(-0,5)^2$;

c) $\left(-1\frac{1}{4}\right)^3$;

d) $(-3)^3$;

e) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$;

f) $-\left(-\frac{3}{2}\right)^3$.

• Ví dụ 2. Không sử dụng máy tính, hãy tính:

a) $(-2)^{11}$, biết $(-2)^{10} = 1024$;

b) $\left(-\frac{3}{2}\right)^8$, biết $\left(-\frac{3}{2}\right)^7 = \frac{-2187}{128}$.

• Ví dụ 3. Tính

a) $(-1) \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot (-1)^4 \cdots (-1)^9 \cdot (-1)^{10}$;

b) $\left[\frac{1}{100} - 1^2\right] \cdot \left[\frac{1}{100} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \cdot \left[\frac{1}{100} - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] \cdots \left[\frac{1}{100} - \left(\frac{1}{20}\right)^2\right]$.

• Ví dụ 4. Viết các số hữu tỉ sau dưới dạng lũy thừa của một số.

a) $\frac{-27}{125}$;

b) $\frac{16}{81}$.

 **Dạng :** Tính tích, tính thương của hai lũy thừa cùng cơ số và tính lũy thừa của một lũy thừa

Áp dụng các công thức

$$(1) \quad x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$(2) \quad x^m : x^n = x^{m-n} \quad (x \neq 0, m \geq n)$$

$$(3) \quad (x^m)^n = x^{m \cdot n}$$

Có nhiều khi công thức (3) được dùng theo chiều ngược lại $x^{m \cdot n} = (x^m)^n$

• Ví dụ 1. Tính

a) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$;

b) $2^7 : 2^4$;

c) $2^4 : 2^7$;

d) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2$.

❶ Ví dụ 2. Thu gọn và viết biểu thức dưới dạng lũy thừa của một cơ số

a) $\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5$; b) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5$; c) $\left(-\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^5$; d) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^4$.

❷ Ví dụ 3. Có bao nhiêu cách biểu diễn số 5^{12} dưới dạng $(5^m)^n$ với m, n là các số tự nhiên khác 1?

❸ Ví dụ 4. Rút gọn các biểu thức sau

a) $\frac{8^5}{4^7}$; b) $\frac{49^2 \cdot 7^8}{98 \cdot 7^9}$;
c) $A = \frac{25^3 \cdot 5^5}{6 \cdot 5^{10}}$. d) $B = \frac{2^5 \cdot 6^3}{8^2 \cdot 9^2}$.

❹ Ví dụ 5. Chứng minh rằng

a) $11^6 - 11^5 + 11^4$ chia hết cho 111; b) $16^5 + 2^{19} - 8^6$ chia hết cho 10.

❺ Ví dụ 6. Rút gọn biểu thức rồi viết kết quả dưới dạng lũy thừa của một số

$$M = 3^{-2} \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^7 + \left(\frac{2}{3}\right)^7 + \left(\frac{2}{3}\right)^7 + \left(\frac{2}{3}\right)^7 + \left(\frac{2}{3}\right)^7 + \left(\frac{2}{3}\right)^7 \right].$$

Dạng : Tính lũy thừa của một tích, lũy thừa của một thương

Áp dụng các công thức

$$(1) \quad (x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n \qquad (2) \quad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad (y \neq 0).$$

Các công thức trên còn được sử dụng theo chiều ngược lại.

❶ Ví dụ 1. Viết các lũy thừa sau dưới dạng tích hoặc thương của các lũy thừa

a) $\left(5 \cdot \frac{3}{7}\right)^4$; b) $\left(\frac{2}{3} : \frac{5}{6}\right)^3$.

❷ Ví dụ 2. Tính bằng cách hợp lí nhất

a) $(0,125)^3 \cdot 512$; b) $\frac{230^5}{23^5}$.

❸ Ví dụ 3. Viết biểu thức sau dưới dạng lũy thừa của một số

a) $\frac{21^{30}}{63^{15}}$; b) $\frac{28^9 \cdot 30^9}{105^9}$.

❹ Ví dụ 4. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $\frac{(5^5 - 5^4)^3}{50^6}$; b) $\frac{32^3 \cdot 9^5}{8^3 \cdot 6^6}$.

 Dạng : Tìm cơ số, tìm số mũ của một lũy thừa

Có thể sử dụng các tính chất được thừa nhận dưới đây

a) Với $a \neq 0$; $a \neq \pm 1$, nếu $a^m = a^n$ thì $m = n$.

b) Với $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 1$, nếu $a^n = b^n$ thì

a) $a = b$ nếu n lẻ;

b) $a = \pm b$ nếu n chẵn.

❶ Ví dụ 1. Tìm số hữu tỉ x biết rằng:

a) $2^{x+1} = 4$;

b) $3^{2x-9} = 27$.

❷ Ví dụ 2. Tìm số hữu tỉ x biết rằng:

a) $2^x = 32^5 \cdot 64^6$;

b) $\left(\frac{1}{7}\right)^x = \left(\frac{1}{343}\right)^3$.

❸ Ví dụ 3. Tìm số hữu tỉ x biết rằng:

a) $5 \cdot 3^x = 15 \cdot 3^5$.

b) $7^x = 7^2 \cdot 49$.

c) $\frac{3}{5} \cdot 4^x = \frac{3}{5} \cdot 2^7$.

d) $4^{x+2} = 4 \cdot 4^{10} - 3 \cdot 4^{10}$.

❹ Ví dụ 4. Tìm số tự nhiên n , biết

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{8}{27}$;

b) $3^{n+1} = 9^2$.

❺ Ví dụ 5. Tìm số tự nhiên n , biết

a) $\frac{625}{5^n} = 5^3$;

b) $\frac{(-2)^n}{-128} = 4$.

❻ Ví dụ 6. Tìm tất cả các số nguyên n thỏa mãn các đẳng thức sau:

a) $3^{-2} \cdot 9^n = 3^n$.

b) $\left(\frac{9}{25}\right)^n = \left(\frac{3}{5}\right)^{-4}$.

c) $a^{(n+5)(n-8)} = 1$.

d) $\frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 4^2 - 4 \cdot 2^n$.

❼ Ví dụ 7. Tìm x biết:

a) $(x+1)^3 = 216$.

b) $(x-1)^4 = 16$.

c) $(2x-2)^2 = 16$.

d) $3^{x+1} - 3^x = 162$.

e) $(1-x)^3 = 216$.

f) $5^{x+1} - 2 \cdot 5^x = 375$.

❽ Ví dụ 8. Tìm các số tự nhiên n , biết:

a) $4 < 2^n \leq 2 \cdot 16$.

b) $9 \cdot 27 \leq 3^n \leq 243$.

❾ Ví dụ 9. Cho biết $32 < 2^n < 512$ ($n \in \mathbb{N}$). Tìm tập hợp các giá trị của n .

Dạng : So sánh hai lũy thừa

Với $a, b \in \mathbb{Q}; m, n \in \mathbb{Z}$. Ta có:

- a) Tính chất 1: Nếu $a > b > 0$ thì $a^n > b^n$.
- b) Tính chất 2: Nếu $a > b$ thì $a^{2n+1} > b^{2n+1}$.
- c) Tính chất 3: Nếu $a > 1, m > n > 0$ thì $a^m > a^n$.
- d) Tính chất 4: Nếu $0 < a < 1, m > n > 0$ thì $a^m < a^n$.

❶ Ví dụ 1. So sánh 5^6 và $(-2)^{14}$.

❷ Ví dụ 2. So sánh 9^5 và $(27)^3$.

❸ Ví dụ 3. So sánh $\left(\frac{1}{8}\right)^6$ và $\left(\frac{1}{32}\right)^4$.

❹ Ví dụ 4. So sánh các số sau:

- a) 333^{444} và 444^{333} ; b) 5^{300} và 3^{500} ; c) 4^{2222} và 2^{4444} ; d) 3^{420} và 4^{315} .

❺ Ví dụ 5. So sánh: $A = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{49}} + \frac{1}{2^{50}}$ và số 1.

Dạng : ** Tìm chữ số tận cùng của một lũy thừa

- a) Các chữ số tận cùng là 0, 1, 5, 6 khi nâng lũy thừa với số mũ $n \in \mathbb{N}^*$ thì chữ số tận cùng không thay đổi.
- b) Các số tận cùng là 4, 9 khi nâng lũy thừa bậc lẻ thì chữ số tận cùng không đổi.
- c) Các chữ số có tận cùng là 3, 7, 9 khi lũy thừa với số mũ là bội của 4 thì có chữ số tận cùng là số 1.
- d) Các chữ số có tận cùng là 2, 4, 8 khi lũy thừa với số mũ là bội của 4 thì có chữ số tận cùng là số 6.
- e) Một số tự nhiên bất kỳ khi lũy thừa bậc $4n + 1$ với $n \in \mathbb{N}$ thì chữ số tận cùng không thay đổi.
- f) Chữ số tận cùng là 3 khi nâng lên bậc $4n + 3$ thì chữ số tận cùng là 7; chữ số tận cùng là 7 khi nâng lên bậc $4n + 3$ thì chữ số tận cùng là 3.
- g) Chữ số tận cùng là 2 khi nâng lên bậc $4n + 3$ thì chữ số tận cùng là 8; chữ số tận cùng là 8 khi nâng lên bậc $4n + 3$ thì chữ số tận cùng là 2.
- h) Các chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9 khi nâng lũy thừa bậc $4n + 3$ thì chữ số tận cùng không thay đổi.

❶ Ví dụ 1. Tìm chữ số tận cùng của số 187^{324} .

❏ Ví dụ 2. Chứng minh rằng số $8^{102} - 2^{102}$ chia hết cho 10.

❏ Ví dụ 3. Tìm chữ số tận cùng của tổng $S = 2 + 3^5 + 4^9 + \dots + 2017^{8061} + 2018^{8065}$.

C BÀI TẬP VẬN DỤNG

✍ Bài 1. Tính

a) $\left(-2\frac{1}{3}\right)^2$; b) $(-0,75)^3$; c) 2^{-3} .

✍ Bài 2. Viết các số sau dưới dạng lũy thừa của một số

a) $-\frac{8}{27}$; b) $\frac{81}{625}$.

✍ Bài 3. Tính

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$; b) $(-5)^7 : (-5)^5$; c) $(3^2)^3$.

✍ Bài 4. Viết các tích sau dưới dạng lũy thừa của một số

a) $27 \cdot 81$; b) $\frac{2}{5} \cdot \frac{8}{125} \cdot \frac{16}{625}$.

✍ Bài 5. Viết biểu thức sau dưới dạng một lũy thừa:

a) $A = \frac{16^{20}}{8^5}$; b) $B = \frac{15^{30}}{45^{15}}$.

✍ Bài 6. Tính:

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$; b) $\left(-2\frac{1}{3}\right)^2$; c) $(-0.2)^4$; d) $\left(\frac{5}{7}\right)^{13} : \left(\frac{5}{7}\right)^{11}$.

✍ Bài 7. So sánh 2^{20} và 3^{12} .

✍ Bài 8. So sánh hai lũy thừa:

a) 5^6 và $(-2)^{14}$; b) 9^5 và 27^3 ; c) $\left(\frac{1}{8}\right)^6$ và $\left(\frac{1}{32}\right)^4$; d) 2^{20} và 3^{12} .

✍ Bài 9. Tìm số tự nhiên n , biết

a) $5^n = 125$; b) $\left(\frac{3}{7}\right)^n = \frac{81}{2401}$.

✍ Bài 10. Tìm x , biết

a) $x^5 = x^3$; b) $\left(x - \frac{4}{11}\right)^3 = 343$.

✍ Bài 11. Tìm số hữu tỉ x biết rằng:

a) $\left(\frac{5}{3}\right)^{2x-1} = \left(\frac{5}{3}\right)^7$; b) $\left(-\frac{1}{10}\right)^x = \frac{1}{100}$; c) $\left(-\frac{3}{2}\right)^x = \frac{9}{4}$;
d) $\left(\frac{3}{5}\right)^{3x-2} = \frac{9}{25}$; e) $5^x + 5^{x+2} = 650$; f) $4^{x+2} \cdot 3^x = 16 \cdot 12^5$.

 **Bài 12.** Tìm x biết:

a) $x^3 = -27$;

b) $(2x - 3)^2 = 16$.

 **Bài 13.** Tìm x biết:

a) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = \left(\frac{1}{27}\right)^{20}$;

b) $\left(\frac{1}{16}\right)^x = \left(\frac{1}{32}\right)^5$.

 **Bài 14.** Tìm tất cả các số nguyên n thỏa mãn các đẳng thức sau:

a) $5^{-3} \cdot 25^n = 5^{4n}$.

b) $\left(\frac{8}{27}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{-12}$.

c) $a^{(2n+6)(3n-9)} = 1$.

 **Bài 15.** Tìm x biết:

a) $(x - 5)^2 = 25$.

b) $9^{x+1} - 5 \cdot 3^{2x} = 324$.

c) $(1 - x)^5 = 32$.

 **Bài 16.** Tìm x biết:

a) $16^x : 4^x = 16$.

b) $2^{-1} \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x = 72$.

c) $(2x + 1)^3 = -64$.

d) $(3x - 2)^2 = 81$.

 **Bài 17.** Cho số tự nhiên n thỏa $32 < 2^n < 512$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của n .

 **Bài 18.** Tìm số tự nhiên n sao cho $3 < 3^n \leq 243$.

BÀI TẬP NÂNG CAO

 **Câu 1.** Tìm các số tự nhiên n , biết:

a) $8 < 2^n \leq 2 \cdot 32$.

b) $3 \cdot 27 \leq 3^n \leq 243$.

c) $8 \cdot 27 \leq 6^n \leq 36 \cdot 4 \cdot 9$.

d) $\frac{1}{4} \leq 2^n \leq 4$.

e) $9 \cdot 27 \leq \frac{1}{3^n} \leq 27 \cdot 243$.

 **Câu 2.** Tìm số hữu tỉ x, y biết rằng:

a) $2^{x+2} \cdot 3^y = 12^x$;

b) $15^x : 3^y = 75^y$.

 **Câu 3.** Tìm x, y biết $(2x - 4)^{2018} + (3y - 1)^{2020} \leq 0$.

 **Câu 4.** So sánh

a) $A = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{49}} + \frac{1}{2^{50}}$ với 1;

b) $B = \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{99}} + \frac{1}{3^{100}}$ với $\frac{1}{2}$;

c) $C = \frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{999}} + \frac{1}{4^{1000}}$ với $\frac{1}{3}$.

❖ **Câu 5.** Tìm các số hữu tỉ x, y và z biết

a) $xy = \frac{2}{3}; yz = 0,6$ và $zx = 0,625$;

b) $x(x - y + z) = -11; y(y - z - x) = 25$ và $z(z + x - y) = 35$;

c) $(x + 2)^2 + (y - 3)^4 + (z - 5)^6 = 0$

❖ **Câu 6.** Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $(x + 2)^2 + 2(y - 3)^4 < 4$.

❖ **Câu 7.** Tìm chữ số tận cùng của:

a) 2000^{2018} ;

b) 2001^{2019} ;

c) 1234^{5678} ;

d) 2018^{2017} .

❖ **Câu 8.** Chứng minh rằng: $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

❖ **Câu 9.** Chứng minh rằng: $3^{x+1} + 3^{x+2} + \dots + 3^{x+100}$ chia hết cho 120 với $x \in \mathbb{N}$.

BÀI 4. THỨ TỰ THỰC HIỆN PHÉP TÍNH, QUI TẮC CHUYỂN VẾ

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 THỨ TỰ THỰC HIỆN CÁC PHÉP TÍNH

-  Với các biểu thức chỉ có phép cộng và phép trừ hoặc chỉ có phép nhân và phép chia ta thực hiện các phép tính từ trái sang phải.
-  Với các biểu thức không có dấu ngoặc, ta thực hiện theo thứ tự: Luỹ thừa $\rightarrow$ Nhân và chia $\rightarrow$ Cộng và trừ
-  Với các biểu thức có dấu ngoặc, ta thực hiện trong ngoặc trước, ngoài ngoặc sau:

$$() \rightarrow [] \rightarrow \{ \}$$

2 QUY TẮC CHUYỂN VẾ

Khi biến đổi các đẳng thức, ta thường áp dụng các tính chất sau:

-  Nếu $a = b$ thì:

$$b = a; \quad a + c = b + c.$$

Khi chuyển một số hạng từ vế này sang vế kia của một đẳng thức, ta phải đổi dấu số hạng đó: dấu "+" đổi thành dấu "-" và dấu "-" đổi thành dấu "+".

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng : Thực hiện phép tính

-  Đối với biểu thức không có dấu ngoặc chỉ có phép tính cộng, trừ (hoặc nhân, chia), ta thực hiện các phép tính theo thứ tự từ trái sang phải.
-  Đối với biểu thức không có dấu ngoặc có cả các phép tính cộng, trừ, nhân, luỹ thừa, chia, ta thực hiện các phép tính theo thứ tự :

$$\text{Luỹ thừa} \rightarrow \text{Nhân và chia} \rightarrow \text{Cộng và trừ}.$$

-  Đối với biểu thức có dấu ngoặc thực hiện theo thứ tự :

$$\text{Ngoặc tròn } () \rightarrow \text{Ngoặc vuông } [] \rightarrow \text{Ngoặc nhọn } \{ \}.$$

-  Ta thường áp dụng các tính chất của phép tính để làm cho nhanh gọn hơn.

 Ví dụ 1. Thực hiện các phép tính:

a) $5 \cdot 6^2 - 18 : 3$;

b) $5^3 \cdot 35 + 4^3 \cdot 7$.

◉ Ví dụ 2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $1,2 - 3^2 + 7,5 : 3$; b) $9,8 + 1,5 \cdot 6 + (6,8 - 2) : 3$; c) $\frac{3^{12} + 3^{15}}{1 + 3^3}$.

◉ Ví dụ 3. Thực hiện phép tính:

a) $3^4 \cdot 6 - [131 - (15 - 9)^2]$;

b) $18 \cdot \{420 : 6 + [150 - (68 \cdot 2 - 2^3 \cdot 5)]\}$.

◉ Ví dụ 4. Tính một cách hợp lí.

a) $A = -1,2 + (-0,8) + 0,25 + 5,75 - 2021$;

b) $B = -0,1 + \frac{16}{9} + 11,1 + \frac{-20}{9}$;

c) $C = 12,4 \cdot 6\frac{1}{4} + (-12,4) \cdot (-2,5)^2$;

d) $D = 32,125 - (6,325 + 12,125) - (37 + 13,675)$;

e) $E = 4,75 + \left(\frac{-1}{2}\right)^3 + 0,5^2 - 3 \cdot \frac{-3}{8}$;

f) $F = 201,234 \cdot 202,123 + 201,234 \cdot (-202,123)$.

◉ Ví dụ 5. Tính:

a) $\frac{3^6 \cdot 45^4 - 15^{13} \cdot 5^{-9}}{27^4 \cdot 25^3 + 45^6}$;

b) $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot 5^7 + \left(\frac{9}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512}$.

◉ Ví dụ 6. Dùng năm chữ số 5, dấu phép tính, dấu ngoặc để viết thành dãy tính có kết quả là 5.**Dạng : Toán tìm x**

a) Để tìm số hạng chưa biết, cần xác định rõ số chưa biết đó ở vị trí nào (số trừ, số bị trừ, hiệu,...). Từ đó xác định được cách biến đổi.

b) Để tìm số hữu tỉ x ở trong cơ số của một lũy thừa, ta thường biến đổi hai vế của đẳng thức về lũy thừa cùng số mũ, rồi sử dụng nhận xét:

$$A^{2n+1} = B^{2n+1} \Leftrightarrow A = B \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$A^{2n} = B^{2n} \Leftrightarrow A = B \text{ hoặc } A = -B \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

c) Để tìm số x ở số mũ của lũy thừa, ta thường biến đổi hai vế của đẳng thức về lũy thừa cùng cơ số, rồi sử dụng nhận xét

$$A^n = A^m \Leftrightarrow m = n \quad (m, n \in \mathbb{Z}, A \neq 0, A \neq 1).$$

◉ Ví dụ 1. Tìm số tự nhiên x trong mỗi đẳng thức sau:

a) $x - 160 : 40 = 45$; b) $(x + 45) : 15 = 80$; c) $x + 0,25 = \frac{1}{2}$; d) $x - \left(-\frac{5}{7}\right) = \frac{9}{14}$.

◉ Ví dụ 2. Tìm x trong dãy tính sau:

a) $x - \left(\frac{5}{4} - \frac{7}{5}\right) = \frac{9}{20};$

b) $9 - x = \frac{8}{7} - \left(-\frac{7}{8}\right);$

c) $x - 8 : 4 - (46 - 23.2 + 6.3) = 0;$

d) $240 - [23 + (13 + 24.3 - x)] = 132.$

Ví dụ 3. Tìm số tự nhiên n , biết

a) $\frac{625}{5^n} = 5$

b) $\frac{(-2)^n}{16} = -32;$

c) $5^n + 5^{n+2} = 650$

Ví dụ 4. Tìm x biết:

a) $\frac{3}{2} \cdot 4^x + \frac{5}{3} \cdot 4^{x+2} = \frac{3}{2} \cdot 4^8 + \frac{5}{3} \cdot 4^{10};$

b) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot 6^x + 6^{x+2} = 6^7 + 6^4;$

c) $\frac{1}{3} \cdot 3^n = 7.3^2 \cdot 9^2 - 2.3^n.$

d) $3 \cdot 5^{2x+1} - 3 \cdot 25^x = 300.$

BÀI TẬP VẬN DỤNG**Bài 1.** Thực hiện phép tính :

a) $55 \cdot 48 - 110 \cdot 24 + 123;$

b) $456 \cdot 75 + 134 \cdot 68 - 2009;$

c) $4320 : 9 - 8640 : 18 + 450;$

d) $45^2 + 153 : 3^2 - 24 \cdot 3.$

Bài 2. Bỏ dấu ngoặc rồi tính các tổng sau:

a) $\frac{17}{11} - \left(\frac{6}{5} - \frac{16}{11}\right) + \frac{26}{5};$

b) $\frac{39}{5} + \left(\frac{9}{4} - \frac{9}{5}\right) - \left(\frac{5}{4} + \frac{6}{7}\right).$

Bài 3. Tìm x , biết:

a) $2x + \frac{1}{2} = \frac{7}{9};$

b) $\frac{3}{4} - 6x = \frac{7}{13}.$

Bài 4. Tính giá trị của các biểu thức:

a) $A = 2^2 - (-3^2)^3 + 4^{-2} \cdot 16 - 2.5^2.$

b) $B = \left(2^3 : \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{8} + 3^{-2} \cdot 9 - 7 \cdot \left(\frac{14}{25}\right)^0 + 5.$

Bài 5. Tính giá trị của biểu thức:

a) $A = 2^{-3} + (5^2)^3 \cdot 5^{-3} + 4^{-3} \cdot 16 - 2 \cdot 3^2 - 105 \cdot \left(\frac{24}{51}\right)^0.$

b) $B = \left(2^3 : \frac{1}{2^{-2}}\right) \cdot \frac{2}{3} + 4^{-2} \cdot 8 - 7 \cdot \left(\frac{17}{23}\right)^0 + 19.$

Bài 6. Tìm số hữu tỉ x biết rằng

a) $\left(\frac{2}{5} - x\right) : 1\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = -4;$

b) $\left(-3 + \frac{3}{x} - \frac{1}{3}\right) : \left(1 + \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{4};$

c) $\frac{-3x}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{7}\right) = 0;$

d) $3 - \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{x}} = 2\frac{2}{3}.$

D BÀI TẬP NÂNG CAO

❖ **Câu 1.** Tính giá trị của biểu thức sau:

$$\text{a) } C = \frac{15^3 + 5 \cdot 15^2 - 5^3}{18^3 + 6 \cdot 18^2 - 6^3}.$$

$$\text{b) } D = \frac{(7^4 - 7^3)^3}{49^3}.$$

❖ **Câu 2.** Tính:

$$\text{a) } \frac{2^{12} \cdot 5^7 + 4^6 \cdot 25^3}{8^5 \cdot 25^3 + (2^2 \cdot 5)^6};$$

$$\text{b) } \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}.$$

❖ **Câu 3.** Rút gọn các biểu thức sau

$$\text{a) } A = \frac{2 \cdot 8^4 \cdot 27^2 + 4 \cdot 6^9}{2^7 \cdot 6^7 + 2^7 \cdot 40 \cdot 9^4};$$

$$\text{b) } B = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 \cdot (-1)^5}{\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)^3}.$$

ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài 1. Điền kí hiệu thích hợp vào ô trống:

a) $-7 \square \mathbb{N}$; $-\frac{1}{7} \square \mathbb{Q}$;

b) $6 \square \mathbb{Q}$; $0,4 \square \mathbb{Z}$.

Bài 2. 1) Điền tên các tập hợp ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$) thích hợp vào các ô vuông:

a) $-3 \notin \square$; b) $\frac{1}{2} \notin \square$; c) $3 \in \square$; d) $0,12 \in \square$.

2) Điền kí hiệu ($\notin, \in, \subset$) thích hợp vào các ô vuông:

a) $-2 \square \mathbb{Q}$; b) $\frac{3}{4} \square \mathbb{N}$; c) $-5 \square \mathbb{Z}$; d) $\mathbb{N}^* \square \mathbb{Q}$.

3) Điền Đ (đúng), S (sai) thích hợp vào các ô vuông:

a) $\square -2,22 \in \mathbb{Z}$; b) $\square -5,6 \in \mathbb{Q}$; c) $\square \frac{-1}{3} \subset \mathbb{Q}$.

Bài 3. So sánh các số hữu tỉ x và y :

a) $x = -\frac{1}{8}$ và $y = \frac{2}{-7}$.

b) $x = -\frac{2}{3}$ và $y = -0,65$.

Bài 4. Trong các số $-\frac{4}{12}$; $-\frac{33}{99}$; $-0,3333$. Số nào không biểu diễn số hữu tỉ $-\frac{1}{3}$?

Bài 5. Trong các số sau: $0,66$; $-\frac{6}{10}$; $\frac{-9}{-15}$, số nào biểu diễn số hữu tỉ $\frac{3}{5}$?

Bài 6. Cho các tập hợp:

a) $M = \left\{ \frac{0}{-7}; \frac{-2}{-5}; \frac{-1}{4} \right\}$;

b) $N = \left\{ \frac{0}{-7}; \frac{5}{6}; \frac{-8}{13} \right\}$;

c) $P = \left\{ \frac{-4}{9}; \frac{3}{-5}; -0,2 \right\}$;

d) $Q = \left\{ -9; \frac{-6}{-11}; -5,333 \right\}$.

Tập hợp nào chỉ gồm các số hữu tỉ âm?

Bài 7. Sắp xếp các số hữu tỉ sau theo thứ tự tăng dần:

$$\frac{2}{3}; \frac{5}{8}; -\frac{9}{10}; \frac{7}{12}; -\frac{5}{6}.$$

Bài 8. Gọi A là tập hợp các số hữu tỉ x sao cho $\frac{4}{7} < x < \frac{5}{8}$. Hỏi số hữu tỉ $\frac{11}{21} : \frac{17}{28}$ có là phần tử của tập hợp A không?

Bài 9. Tính giá trị của biểu thức

a) $\left(0,75 - \frac{5}{6}\right) : \left(-\frac{4}{7} + \frac{1}{3}\right)$;

b) $5 - \left(1 + \frac{1}{3}\right) : \left(1 - \frac{1}{3}\right)$;

c) $\left(1 + \frac{2}{3} - \frac{5}{4}\right) - \left(1 - \frac{5}{4}\right) + \left(2022 - \frac{2}{3}\right)$;

d) $\frac{17}{11} - \left(\frac{6}{5} - \frac{16}{11}\right) + \frac{26}{5}$;

e) $\frac{39}{5} + \left(\frac{9}{4} - \frac{9}{5}\right) - \left(\frac{5}{4} + \frac{6}{7}\right)$;

f) $-\left(\frac{5}{7} + \frac{7}{9}\right) - \left(-\frac{7}{9} + \frac{2}{7}\right)$,

Bài 10. Thực hiện phép tính

$$\text{a) } 1,4 \cdot \frac{15}{7^2} + \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{-5}{11}.$$

$$\text{b) } \left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{-4144^5}{8288^5} + 25^{19} : 125^{12} + \frac{1}{32}.$$

Bài 11. Cho $M = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{10}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{11}\right)$. Tính $\frac{1}{M}$.

Bài 12. Rút gọn biểu thức

$$\text{a) } M = \frac{9^4 \cdot 3^5}{6^2 \cdot 3^{11}}.$$

$$\text{b) } N = \frac{25^6 + 5^4}{25^5 + 25},$$

Bài 13. Rút gọn các biểu thức sau

$$\text{a) } A = \frac{a^2 \cdot a^7 \cdot b^2 \cdot c^8}{a^5 \cdot b^3 \cdot (-c)^4};$$

$$\text{b) } B = \left(\frac{3}{7}\right)^5 \cdot \frac{(2 \cdot 5)^4 \cdot 7^5}{15^4 \cdot 20^2}.$$

Bài 14. Tìm x biết

$$\text{a) } \frac{25}{12} \cdot x + \frac{11}{15} = \frac{9}{10};$$

$$\text{b) } 0,7^2 \cdot x = 0,49^3;$$

$$\text{c) } x : (-0,5)^3 = (-0,5)^2;$$

$$\text{d) } -x + \frac{7}{4} = \frac{6}{5} - \frac{3}{4};$$

$$\text{e) } 1 - 2x = \frac{9}{8} + \frac{7}{5} : \frac{2}{5};$$

$$\text{f) } (0,5)^2 + 2 \cdot x = (0,7)^2;$$

$$\text{g) } x - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7} - \frac{1}{3};$$

$$\text{h) } \frac{8}{25} = \frac{2^x}{5^{x-1}};$$

$$\text{i) } 9^x : 3^x = 3.$$

Bài 15. Tìm x biết

$$\text{a) } \frac{1}{2}x - 4 = \frac{5}{7};$$

$$\text{b) } \left(x + \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{16};$$

$$\text{c) } x^2 - \frac{3}{4}x = 0;$$

$$\text{d) } 3^x + 3^{x+2} = 7290.$$

Bài 16. Tìm tập hợp các số tự nhiên n sao cho $8 \leq 2^n \leq 256$.

Bài 17. Tìm số hữu tỉ x , biết rằng :

$$\text{a) } (3x - 1)^4 = 81;$$

$$\text{b) } (x + 1)^5 = -32;$$

$$\text{c) } 3^x + 3^{x+3} = 756;$$

$$\text{d) } 5^{x+1} + 6 \cdot 5^{x+1} = 875.$$

Bài 18. Cho $M = 125^7 - 625^5 - 25^9$. Chứng minh rằng $M : 99$.

Bài 19. Tìm tập hợp các giá trị của $n \in \mathbb{N}$ sao cho $81 \leq 3^n \leq 729$.

Bài 20. Chứng minh đẳng thức $\frac{3}{31} + \left(\frac{1}{6} + \frac{-5}{9}\right) : \left(\frac{7}{24} - \frac{13}{18}\right) = (2^3)^4 : 2^{12}$.

Bài 21. Tìm số tự nhiên n biết $32 \leq 2^n \leq 256$.

Bài 22. Tìm x biết

$$\text{a) } \frac{4x - 5}{4} = 0,3 - 9,11;$$

$$\text{b) } \frac{-3}{5} : \frac{3}{14} + 0,5x = 12.$$

Bài 23. Cho $A = -4 + (x - 3)^2$; $B = \frac{1}{2} - (5x + 1)^2$.

a) Tính giá trị nhỏ nhất của A;

b) Tính giá trị lớn nhất của B.

Bài 24. Cho $A = \frac{1}{3} - (x + 1)^2$. Tính giá trị lớn nhất của B.

Bài 25. Tìm các số tự nhiên x, y biết

$$\text{a) } 2^{x+1} \cdot 5^y = 20^x;$$

$$\text{b) } 2^{x-1} \cdot 3^{y+1} = 12^{x+y};$$

$$\text{c) } 3^x = 9^{y-1} \text{ và } 8^y = 2^{x+8}.$$

CHƯƠNG 2.



SỐ THỰC

BÀI 5. LÀM QUEN VỚI SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN

- ❖ Khi chia 5 cho 18, ta thấy phép chia không bao giờ chấm dứt và nếu cứ tiếp tục chia thì trong thương $0,2777\dots$, chữ số 7 được lặp lại mãi. Ta nói phân số $\frac{5}{18}$ viết được dưới dạng số thập phân là $0,2777\dots$. Tương tự, ta có $-\frac{17}{11} = -1,545454\dots$. Các số $0,2777\dots$; $-1,545454\dots$ là những số thập phân vô hạn tuần hoàn.
- ❖ Số $0,2777\dots$ được viết gọn là $0,2(7)$. Kí hiệu (7) được hiểu là chữ số 7 được lặp lại vô hạn lần. Số 7 được gọi là chu kì của số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,2(7)$. Tương tự, $-1,545454\dots$ có chu kì là 54 và được viết gọn là $-1,(54)$.
- ❖ Các số thập phân đã học như $0,8$; $1,25$; $\dots$ còn được gọi là số thập phân hữu hạn.

Chú ý

Mọi số hữu tỉ đều viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn.

2 LÀM TRÒN SỐ THẬP PHÂN CĂN CỨ VÀO ĐỘ CHÍNH XÁC CHO TRƯỚC

Khi làm tròn số đến một hàng nào đó, kết quả làm tròn có độ chính xác bằng một nửa đơn vị hàng làm tròn.

Hàng làm tròn	Độ chính xác
trăm	50
chục	5
đơn vị	0,5
phần mười	0,05
phần trăm	0,005

Chú yí

Muốn làm tròn số thập phân với độ chính xác cho trước, ta có thể xác định hàng làm tròn thích hợp bằng cách sử dụng bảng trên.

◆ Nhận xét 5.1.

- a) Nếu một phân số tối giản với mẫu dương mà mẫu không có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số đó viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.
- b) Nếu một phân số tối giản với mẫu dương mà mẫu có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số đó viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

Nhắc lại *Quy ước làm tròn số*:

TH1: Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số bị bỏ đi nhỏ hơn 5 thì ta giữ nguyên bộ phận còn lại. Trong trường hợp số nguyên thì ta thay các chữ số bị bỏ đi bằng các chữ số 0.

TH2: Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số bị bỏ đi lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cộng thêm 1 vào chữ số cuối cùng của bộ phận còn lại. Trong trường hợp số nguyên thì ta thay chữ số bị bỏ đi bằng các chữ số 0.

B CÁC DẠNG TOÁN

 **Dạng :** Nhận biết một phân số viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn

-  Viết phân số dưới dạng phân số tối giản với mẫu dương.
-  Phân tích mẫu số đó ra thừa số nguyên tố.
-  Nếu mẫu này không có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn. Nếu mẫu này có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

🔴 Ví dụ 1. Trong các số thập phân sau, số nào là số thập phân hữu hạn? Số nào là số thập phân vô hạn tuần hoàn? $0,1; -1, (23); 11,2(3); -6,725$

🔴 **Ví dụ 2.** Sử dụng chu kì, hãy viết gọn số thập phân vô hạn tuần hoàn sau

- a) 0,010101...; b) 2023,12333...;
- c) 23,101101101...; d) 0,123123123....

🔴 **Ví dụ 3.** Thực hiện phép chia, hãy viết các phân số sau dưới dạng số thập phân

$$\frac{1}{99}; \frac{1}{999}; \frac{1}{9999}.$$

🔴 **Ví dụ 4.** Trong ba phân số: $\frac{-49}{140}; \frac{100}{275}; \frac{11}{6}$.

Phân số nào viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn? Phân số nào viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn?

🔴 **Ví dụ 5.** Trong bốn phân số dưới đây, có mấy phân số viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn?

$$\frac{65}{30}; \frac{33}{150}; \frac{63}{140}; \frac{45}{36}.$$

🔴 **Ví dụ 6.** Trong bốn phân số dưới đây, có mấy phân số viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn?

$$\frac{8}{15}; \frac{21}{35}; \frac{12}{27}; \frac{26}{39}.$$

📖 **Dạng : Viết số thập phân hữu hạn, vô hạn tuần hoàn dưới dạng phân số tối giản**

a) Để viết số thập phân hữu hạn dưới dạng phân số tối giản, ta làm như sau :

- Viết số thập phân hữu hạn dưới dạng phân số có tử là số nguyên tạo bởi phần nguyên và phần thập phân của số đó, mẫu là một lũy thừa của 10 với số mũ bằng số chữ số ở phần thập phân của số đã cho. Chẳng hạn

$$a, bcd = \frac{\overline{abcd}}{10^3}.$$

- Rút gọn phân số trên.

b) Để viết số thập phân vô hạn tuần hoàn ra phân số, ta sử dụng nhận xét sau

$$0,(1) = \frac{1}{9}; 0,(01) = \frac{1}{99}; 0,(001) = \frac{1}{999}.$$

- Đối với số thập phân tuần hoàn đơn. Chẳng hạn:

$$0,(abc) = \overline{abc} \cdot 0,(001) = \frac{\overline{abc}}{999}.$$

- Đối với số thập phân tuần hoàn tạp, trước hết ta đưa chúng về dạng tuần hoàn

đơn. Chẳng hạn :

$$0,ab(cde) = 0,ab + \frac{1}{100} \cdot 0,(cde) = \frac{\overline{ab}}{100} + \frac{\overline{cde}}{99900} = \frac{\overline{abcde} - \overline{ab}}{99900}.$$

❶ **Ví dụ 1.** Viết các số thập phân hữu hạn sau dưới dạng phân số tối giản:

a) 0,48;

b) -0,375.

❷ **Ví dụ 2.** Viết các số thập phân hữu hạn sau dưới dạng phân số tối giản:

a) -0,0065;

b) 18,92.

❸ **Ví dụ 3.** Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây dưới dạng phân số tối giản.

a) 0,(35);

b) 0,0(237);

c) -5,1(3).

❹ **Ví dụ 4.** Chứng tỏ rằng:

a) $0,(15) + 0,(84) = 1$;

b) $0,(333) \cdot 3 = 1$.

Dạng : So sánh các số thập phân

 Với hai số thập phân dương khác phần nguyên, số nào có phần nguyên lớn hơn sẽ lớn hơn.

 Với hai số thập phân dương cùng phần nguyên, số nào có phần thập phân lớn hơn sẽ lớn hơn.

 Với hai số thập phân âm, số nào có giá trị tuyệt đối lớn hơn sẽ nhỏ hơn.

❶ **Ví dụ 1.** So sánh các số sau: 0,(35); 0,3(53); 0,353.

❷ **Ví dụ 2.** Tìm số hữu tỉ m sao cho $a \ll m < b$. Biết rằng

a) $a = 209,95(43)$, $b = 2010,97(46)$;

b) $a = -27,(2475)$, $b = -27,2475$.

Dạng : Làm tròn các số đến một hàng nào đó

Áp dụng quy tắc làm tròn số.

❶ **Ví dụ 1.** Làm tròn số 2,37 đến:

a) Hàng phần mười;

b) Hàng đơn vị.

❷ **Ví dụ 2.** Làm tròn số 4562 đến:

a) Hàng chục;

b) Hàng trăm;

c) Hàng nghìn.

🔴 **Ví dụ 3.** Làm tròn số 165,3728 với độ chính xác

- a) 0,0005; b) 0,005; c) 0,05; d) 0,5; e) 5; f) 50;

🔴 **Ví dụ 4.** Một số nguyên sau khi làm tròn đến hàng nghìn thì được 72000. Hỏi số đó lớn nhất là bao nhiêu? Nhỏ nhất là bao nhiêu?

🔴 **Ví dụ 5.** Thực hiện phép chia $31 : 42$ rồi làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

🔴 **Ví dụ 6.** Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{5,37 \cdot 12,8}{24,56}$ rồi làm tròn kết quả với độ chính xác 0,5.

🔴 **Ví dụ 7.** Tìm x trong tỉ lệ thức: $8,5 : x = 3,7 : 0,9$ (làm tròn kết quả với độ chính xác 0,05).

🔴 **Ví dụ 8.** Tính chu vi và diện tích của mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài là 15,34 m và chiều rộng là 5,72 m (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

🔴 **Ví dụ 9.** Hãy ước lượng kết quả của các phép tính sau:

- a) $595 \cdot 53$; b) $91,36 \cdot 5,9$.

📁 BÀI TẬP VẬN DỤNG

📌 **Bài 1.** Trong các phân số sau, phân số nào viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn? Phân số nào viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn?

$$\frac{13}{40}; \frac{8}{15}; \frac{30}{84}; \frac{27}{150}.$$

📌 **Bài 2.** Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn:

- a) $\frac{56}{175}, \frac{915}{120}$; b) $\frac{66}{36}, \frac{135}{198}$.

📌 **Bài 3.** Viết các số thập phân sau dưới dạng phân số tối giản:

- a) 0,475; b) -2,84; c) 7,375.

📌 **Bài 4.** Viết các số thập phân hữu hạn sau đây dưới dạng phân số tối giản.

- a) 0,52; b) -0,725; c) 1,56; d) -2,135.

📌 **Bài 5.** Viết các số thập phân sau dưới dạng phân số tối giản

- a) -4,32; 0,148; -0,4937; b) -4, (32); 0, (148); -0, (4937); c) -4,3(2); 0,14(8); -0,49(37).

📌 **Bài 6.** Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân

$$\frac{4}{9}; \frac{13}{99}; \frac{41}{999}; \frac{97}{9999}.$$

 **Bài 7.** Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân

$$\frac{-8}{9}; \frac{1}{125}; \frac{3}{80}; \frac{-4}{15}; \frac{5}{27}; \frac{13}{14}.$$

 **Bài 8.** Viết các số thập phân sau dưới dạng phân số tối giản

$$0,(8); 1,(25); -2,(38); 7,21(321); 5,(8218).$$

 **Bài 9.** Chứng tỏ rằng:

a) $0,(17) + 0,(82) = 1;$

b) $0,(666) \cdot (-3) = -2.$

 **Bài 10.** So sánh các số sau $-1,37; -1,(37); -1,3(73).$

 **Bài 11.** Sắp xếp các số hữu tỉ sau theo thứ tự từ nhỏ đến lớn $2,(15); 2,(14); 2,15; 1,(15)$

 **Bài 12.** So sánh các số sau

a) $-2,3653$ và $-2,365(3).$

b) $1,432$ và $1,(432);$

c) $0,(2357)$ và $0,2(357);$

d) $0,(428571)$ và $\frac{3}{7}.$

 **Bài 13.** Làm tròn số 7068,524:

a) đến hàng phần mười;

b) với độ chính xác 0,5;

c) với độ chính xác 50.

 **Bài 14.** Tính trung bình cộng của các số sau (làm tròn kết quả đến hàng phần mười):

$$8,5; 7; 9; 6,5; 8; 7,5; 8; 7; 9,5.$$

BÀI TẬP NÂNG CAO

 **Câu 1.** Có bao nhiêu số nguyên sau khi làm tròn trăm cho kết quả là 3500?

 **Câu 2.** Tìm số tự nhiên $x < 10$ sao cho phân số $\frac{x+4}{30}$ viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.

 **Câu 3.** Tìm các số nguyên tố a, b có một chữ số để cho số hữu tỉ $x = \frac{14a}{15b}$ viết được dưới dạng :

a) Số thập phân hữu hạn;

b) Số thập phân vô hạn tuần hoàn.

BÀI 6. SỐ VÔ TỈ. CĂN BẬC HAI SỐ HỌC

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 SỐ VÔ TỈ

Là số viết được dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn. Tập hợp các số vô tỉ kí hiệu là $\mathbb{I}$.

Chú ý

Ta cũng làm tròn số thập phân vô hạn như làm tròn số thập phân hữu hạn, chẳng hạn làm tròn số $0,1010010001\dots$ đến chữ số thập phân thứ ba ta được $0,101$:

$$0,1010010001\dots \approx 0,101.$$

2 CĂN BẬC HAI SỐ HỌC

Căn bậc hai số học của một số a không âm, kí hiệu là $\sqrt{a}$, là số x không âm sao cho $x^2 = a$.

Chú ý

❖ Số dương a có đúng hai căn bậc hai, một số dương kí hiệu là $\sqrt{a}$ và một số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$.

❖ Số 0 chỉ có một căn bậc hai là số 0, cũng viết $\sqrt{0} = 0$.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

 **Dạng :** Tìm căn bậc hai của một số và tìm một số biết căn bậc hai của nó

❖ Nếu $x^2 = a$ thì $x = \pm\sqrt{a}$ (với $a \geq 0$).
 Khi viết $\sqrt{a}$ thì phải có $a \geq 0$ và $\sqrt{a} \geq 0$.
 Khi viết $-\sqrt{a}$ thì phải có $a \geq 0$ và $-\sqrt{a} \leq 0$.

❖ Nếu $\sqrt{x} = a$ ($a \geq 0$) thì $x = a^2$.

🔴 **Ví dụ 1.** Tìm căn bậc hai của 49; 0,25; -4 .

🔴 **Ví dụ 2.** Tìm căn bậc hai của

a) 25;

b) 15;

c) $(-1)^2$;

d) -25 .

🔴 **Ví dụ 3.** Tính $\sqrt{121}$; $\sqrt{(-8)^2}$; $-\sqrt{\frac{16}{81}}$.

🔴 **Ví dụ 4.** Tính:

a) $\sqrt{\frac{25}{16}} - 1$;

b) $\sqrt{13^2 - 5^2}$;

c) $\sqrt{36} + \sqrt{225}$.

🔴 **Ví dụ 5.** Một tấm bìa hình vuông có diện tích là 1296 cm^2 . Tính độ dài cạnh hình vuông.

🔴 **Ví dụ 6.** Có bao nhiêu số nguyên lớn hơn $-\sqrt{6}$ nhưng nhỏ hơn $\sqrt{12}$?

🔴 **Ví dụ 7.** Tìm x biết

a) $\sqrt{x} = 10$;

b) $\sqrt{x} = \frac{1}{3}$.

🔴 **Ví dụ 8.** Tìm x^2 biết $\sqrt{x} = 9$.

Dạng : Sử dụng kí hiệu của tập hợp số

Cần nhớ:

a) Tập hợp các số tự nhiên kí hiệu là $\mathbb{N}$; b) Tập hợp các số nguyên kí hiệu là $\mathbb{Z}$;

c) Tập hợp các số hữu tỉ kí hiệu là $\mathbb{Q}$; d) Tập hợp các số vô tỉ kí hiệu là $\mathbb{I}$;

Quan hệ giữa các tập hợp số nói trên như sau: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

🔴 **Ví dụ 1.** Điền các kí hiệu $\in$, $\notin$, $\subset$ vào các ô trống:

a) $-0, (33) \quad \square \quad \mathbb{Q}$;

b) $0,52(41) \quad \square \quad \mathbb{I}$;

c) $1,4142135\dots \quad \square \quad \mathbb{I}$,

🔴 **Ví dụ 2.** Điền kí hiệu thích hợp vào ô trống để được khẳng định đúng

a) $3 \quad \square \quad \mathbb{I}$;

b) $\sqrt{3} \quad \square \quad \mathbb{I}$.

🔴 **Ví dụ 3.** Chọn phát biểu đúng trong các phát biểu sau:

a) $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$;

b) $\sqrt{9} \in \mathbb{I}$;

c) $\pi \in \mathbb{I}$;

d) $\sqrt{4} \in \mathbb{Q}$.

Dạng : Tính giá trị của một biểu thức có chứa dấu căn

 Phối hợp thực hiện các phép tính theo đúng thứ tự quy ước.

 Nếu có thể thì vận dụng tính chất của các phép toán.

🔴 **Ví dụ 1.** Tính và so sánh

a) $\sqrt{9} \cdot \sqrt{16}$ và $\sqrt{9 \cdot 16}$.

b) $\sqrt{144 + 25}$ và $\sqrt{144} + \sqrt{25}$.

🔴 **Ví dụ 2.** Tính giá trị của biểu thức:

$$M = \left(\sqrt{\frac{1}{9}} + \sqrt{\frac{25}{36}} - \sqrt{\frac{49}{81}} \right) : \sqrt{\frac{441}{324}}.$$

❶ Ví dụ 3. Tính giá trị của các biểu thức sau

$$\text{a) } A = \sqrt{\frac{11}{25} + 1} - \sqrt{20} \left(\sqrt{\frac{1}{80}} - \frac{1}{3\sqrt{10}} \right) + \frac{1}{6}. \quad \text{b) } B = 2\sqrt{\frac{0,01}{1,21}} + 3\frac{2}{\sqrt{10^2 + 2^2 + 40}} - \frac{3}{4}.$$

❷ Ví dụ 4. Tính giá trị của biểu thức (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

$$A = 8(\sqrt{3} - 1) - 4(\sqrt{5} - 2)$$

Dạng : Tìm số chưa biết trong một đẳng thức

-  Sử dụng tính chất của các phép toán.
-  Sử dụng quan hệ giữa các số trong một phép toán.
-  Sử dụng quy tắc *dấu ngoặc*, quy tắc *chuyển vế*.

❶ Ví dụ 1. Tìm x biết $\frac{1}{3} \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right) = \sqrt{2}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

❷ Ví dụ 2. Tìm x biết $5\sqrt{x} - 17 = 108$.

❸ Ví dụ 3. Tìm x biết $(x^2 - 4)(x^2 - 3) = 0$.

Dạng : Số vô tỉ

Để chứng minh a là một số vô tỉ ta có thể chứng minh rằng a không thể là số hữu tỉ. Cụ thể, ta giả sử $a = \frac{m}{n}$, trong đó $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ và $(m, n) = 1$, từ đó lập luận để chứng tỏ rằng giả thiết này là không thể xảy ra.

❶ Ví dụ 1. Chứng minh rằng $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

❷ Ví dụ 2. Chứng tỏ rằng tổng của một số hữu tỉ với một số vô tỉ là một số vô tỉ.

❸ Ví dụ 3. Cho $A = \frac{2}{\sqrt{x} + 1}$. Tìm số nguyên x để A nhận giá trị nguyên.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

 **Bài 1.** Chọn phát biểu đúng trong các phát biểu sau.

$$\text{a) } \sqrt{3} \in \mathbb{I}; \quad \text{b) } \sqrt{25} \in \mathbb{I}; \quad \text{c) } -\pi \in \mathbb{I}; \quad \text{d) } \sqrt{\frac{100}{47}} \in \mathbb{Q}.$$

 **Bài 2.** Tìm căn bậc hai của các số sau:

$$\text{a) } 144; \quad \text{b) } 0,25; \quad \text{c) } \frac{4}{9}.$$

 **Bài 3.** Tìm căn bậc hai của các số sau

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 81; (-9)^2; 9^2; 0; 81. & \text{b) } -101; 95; 1. \\ \text{c) } 5; 0; 2; n^2 (n \in \mathbb{Q}). & \text{d) } n + 1 \quad (n \in \mathbb{N}) \end{array}$$

Bài 4. Tính

a) $\sqrt{169}$; b) $-\sqrt{\frac{49}{225}}$; c) $\sqrt{(-6)^2}$.

Bài 5. Tìm căn bậc hai của các số sau

a) $25; (-7)^2; 193^2; 0,16$. b) $65; 0,21$.
c) $-100; 175; 125$. d) $(n-2)^2 \quad (n \in \mathbb{Q}); n-1 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

Bài 6. Hãy tính

a) $\sqrt{64}$. b) $\sqrt{\frac{25}{64}}$. c) $-\sqrt{(-7)^2}$. d) $-\sqrt{\frac{49}{16}} + 2$.

Bài 7. Tìm $x \in \mathbb{Q}$ biết

a) $\sqrt{x} = 4$; b) $\sqrt{x} = \frac{1}{7}$; c) $\sqrt{x} = 0$.

Bài 8. Tìm $x \in \mathbb{Q}$ biết

a) $x^2 = 400$; b) $x^2 - 64 = 0$; c) $5x^2 + 10 = 9$.

Bài 9. Dùng máy tính để so sánh $\sqrt{5}$ với $2,(23)$.**Bài 10.** Không dùng máy tính, hãy so sánh $\sqrt{103,5}$ với 10 .**Bài 11.** Tìm x biết $2\sqrt{x} - 17 = 3$.**Bài 12.** Hãy tính độ dài cạnh của một tấm bìa hình vuông có diện tích 49 cm^2 .**D BÀI TẬP NÂNG CAO****Câu 1.** Tìm x biết $x + \sqrt{x} = 0$.**Câu 2.** Tìm x biết

a) $x^2 + 5x + 6 = 3x + 34 + 2x - 9$. b) $2\sqrt{x} + 8x + 5 = 5x - 4 + 3x + 19$.
c) $2x^2 + 5x + 8 + \sqrt{x} = x^2 + 3x + 35 + x^2 + 2x - 7$. d) $3\sqrt{x} + 7x + 5 = \sqrt{x} + 4x - 6 + 3x + 18$.
e) $8\sqrt{x} + 2x - 9 = 5x + 7 + 6\sqrt{x} - 3x - 2$. f) $2\sqrt{3x} + 11x - 18 = 5x + 2 + 6\sqrt{3x} + 6x - 21$.

Câu 3. Cho $A = 2018 + \sqrt{2019 - x}$.

- a) Tìm điều kiện của x để A có nghĩa.
b) Tìm giá trị của x để A đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Câu 4. Tìm các số x, y, z biết $\sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(y+3)^2} + |x+y+z| = 0$.**Câu 5.** Liệu rằng các số x và y có thể là số vô tỉ không nếu $x+y$ và $x-y$ đều là số hữu tỉ.

- ❖ **Câu 6.** Tìm số nguyên x nhỏ hơn 10 sao cho $A = \frac{\sqrt{x} - 1}{2}$ nhận giá trị nguyên.
- ❖ **Câu 7.** Trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng? Hãy chứng minh.
- a) Tổng hai số vô tỉ là một số vô tỉ.
 - b) Tích một số vô tỉ với một số hữu tỉ khác 0 là một số vô tỉ.
 - c) Thương của một số vô tỉ và một số hữu tỉ khác 0 là một số vô tỉ.
- ❖ **Câu 8.** Chứng minh rằng $\sqrt{3}$ là số vô tỉ.

BÀI 7. TẬP HỢP CÁC SỐ THỰC

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 KHÁI NIỆM SỐ THỰC VÀ TRỤC SỐ THỰC

Số vô tỉ và số hữu tỉ gọi chung là số thực. Tập hợp số các số thực kí hiệu là $\mathbb{R}$.

Chú ý

- ✿ Cũng như số hữu tỉ, mỗi số thực a đều có một số đối kí hiệu là $-a$;
- ✿ Trong tập số thực cũng có các phép toán với các tính chất như trong tập số hữu tỉ.

Mỗi số thực đều được biểu diễn bởi một điểm trên trục số. Ngược lại, mỗi điểm trên trục số đều biểu diễn một số thực.

Chú ý

Vì mỗi điểm trên trục số đều biểu diễn một số thực nên các số thực lấp đầy trục số. Để nhấn mạnh điều này, người ta cũng gọi trục số là trục số thực.

2 THỨ TỰ TRONG TẬP HỢP CÁC SỐ THỰC

- ✿ Các số thực đều viết được dưới dạng số thập phân (hữu hạn hoặc vô hạn). Vì thế có thể so sánh hai số thực tương tự như so sánh hai số hữu tỉ viết dưới dạng số thập phân.
- ✿ Cũng như với các số hữu tỉ, ta có
 - Với hai số thực a và b bất kì ta luôn có $a = b$ hoặc $a < b$ hoặc $a > b$.
 - Cho ba số thực a, b, c . Nếu $a < b$ và $b < c$ thì $a < c$ (tính chất bắc cầu).
- ✿ Trên trục số thực, nếu $a < b$ thì điểm a nằm trước điểm b . Nói riêng, các điểm nằm trước gốc O biểu diễn các số âm, các điểm nằm sau gốc O biểu diễn các số dương. Bởi vậy ta viết $x < 0$ để nói x là số âm, viết $x > 0$ để nói x là số dương.

Chú ý

Nếu $0 < a < b$ thì $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Ta thường dùng tính chất này để so sánh một căn bậc hai số học với một số hữu tỉ hoặc so sánh hai căn bậc hai số học với nhau. Chẳng hạn, $\sqrt{2} < \sqrt{5}$ vì $2 < 5$.

3 GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ THỰC

Khoảng cách từ điểm a trên trục số đến gốc O là giá trị tuyệt đối của số a , kí hiệu là $|a|$.

✎ Nhận xét 7.1.

Giá trị tuyệt đối của 0 là 0;

Giá trị tuyệt đối của một số dương là chính nó, chẳng hạn $|2| = 2; \left|\frac{5}{8}\right| = \frac{5}{8}$;

Giá trị tuyệt đối của một số âm là số đối của nó, chẳng hạn $|-2| = 2; |-5,1| = 5,1; |-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$.

$$\text{Như vậy: } |a| = \begin{cases} a & \text{khi } a > 0 \\ -a & \text{khi } a < 0 \\ 0 & \text{khi } a = 0 \end{cases}$$

Nhờ nhận xét này ta có thể tính được giá trị tuyệt đối của một số thực bất kì mà không cần biểu diễn số đó trên trục số.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

📄 Dạng : Số đối. Quan hệ giữa phân tử và tập hợp

❶ Ví dụ 1. Cách viết nào sau đây là đúng: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$; $\pi \in \mathbb{I}$; $15 \in \mathbb{R}$.

❷ Ví dụ 2. Các khẳng định sau đúng hay sai? Nếu sai, hãy phát biểu lại cho đúng.

- a) $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$; b) $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$; c) $\frac{2}{3} \notin \mathbb{R}$; d) $-9 \in \mathbb{R}$.

❸ Ví dụ 3. Hãy thay mỗi ? bằng kí hiệu $\in$ hoặc $\notin$ để có phát biểu đúng.

- a) $5 \boxed{?} \mathbb{Z}$; b) $-2 \boxed{?} \mathbb{Q}$; c) $\sqrt{2} \boxed{?} \mathbb{Q}$; d) $\frac{3}{5} \boxed{?} \mathbb{Q}$;
e) $2,31(45) \boxed{?} \mathbb{I}$; f) $7,62(38) \boxed{?} \mathbb{R}$; g) $0 \boxed{?} \mathbb{I}$; h) $2\frac{1}{3} \boxed{?} \mathbb{I}$.

❹ Ví dụ 4. Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a) $\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5}$ là các số thực. b) Số nguyên không là số thực.
c) $-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; -0,45$ là các số thực. d) Số 0 vừa là số hữu tỉ vừa là số vô tỉ.
e) $1; 2; 3; 4$ là các số thực.

❺ Ví dụ 5. Kí hiệu $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}$ theo thứ tự là tập hợp các số tự nhiên, tập hợp các số nguyên, tập hợp các số hữu tỉ, tập hợp các số vô tỉ và tập hợp các số thực. Khẳng định nào sau đây là sai?

- a) Nếu $x \in \mathbb{N}$ thì $x \in \mathbb{Z}$;
 b) Nếu $x \in \mathbb{R}$ và $x \notin \mathbb{Q}$ thì $x \in \mathbb{I}$;
 c) $1 \in \mathbb{R}$;
 d) Nếu $x \notin \mathbb{I}$ thì x viết được thành số thập phân hữu hạn.

❶ Ví dụ 6. Tìm số đối của các số thực sau: $-2,1$; $-0, (1)$; $\frac{2}{\pi}$; $3 - \sqrt{2}$.

Dạng : So sánh số thực

Để so sánh hai số thực a, b ta có thể sử dụng một số kết quả sau:

 Nếu $a > m$ và $m > b$ thì $a > b$.

 Nếu a, b là hai số thực dương thì:

$$* \quad a > b \Leftrightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}.$$

$$* \quad a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2.$$

❶ Ví dụ 1. So sánh số $1,7(32)$ với số $\sqrt{3}$.

❶ Ví dụ 2. Hãy sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần: $-\sqrt{2}$; $1,5$; $1\frac{1}{4}$; π .

❶ Ví dụ 3. Tìm số lớn nhất trong các số sau:

$$\sqrt{(-8)^2}; \quad 8,32; \quad \sqrt{69}; \quad -\sqrt{100}.$$

❶ Ví dụ 4. Tính $(1,7)^2$ và $(1,8)^2$ rồi so sánh hai kết quả với 3. Từ đó suy ra

$$1,7 < \sqrt{3} < 1,8$$

❶ Ví dụ 5. Không dùng máy tính, cho biết trong hai khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

a) $\sqrt{65} + 1 > \sqrt{63} - 1$

b) $\frac{1}{\sqrt{8}} < \frac{1}{\sqrt{7}}.$

❶ Ví dụ 6. So sánh (không dùng máy tính): $\sqrt{34,9}$ và 6.

❶ Ví dụ 7. So sánh hai số sau

a) $-\sqrt{64}$ và $-\sqrt{65}.$

b) 8 và $\sqrt{(-8)^2}.$

c) $\sqrt{(-7)^2}$ và 6.

d) $\sqrt{\frac{74}{25}} - 1$ và $\frac{6}{5}.$

❶ Ví dụ 8. Hãy so sánh $a = 3\sqrt{2}$ và $b = 2\sqrt{3}.$

❶ Ví dụ 9. Hãy so sánh $x = \sqrt{3} + \sqrt{6}$ và $y = \sqrt{2} + \sqrt{7}.$

Dạng : Giá trị tuyệt đối

❶ Ví dụ 1. Tính:

a) $|-3,5|$; b) $\left| \frac{-4}{9} \right|$; c) $|0|$; d) $|2,0(3)|$.

❷ Ví dụ 2. Xác định dấu và giá trị tuyệt đối của mỗi số sau:

a) $a = 1,25$ b) $b = -4,1$; c) $c = -1,414213562\dots$

❸ Ví dụ 3. Xác định dấu và giá trị tuyệt đối của các số thực sau:

a) $-1,3(51)$; b) $1 - \sqrt{2}$; c) $(3 - \sqrt{2})(2 - \sqrt{5})$.

❹ Ví dụ 4. Tính $|6 - \sqrt{35}| + 5 + \sqrt{35}$.

❺ Ví dụ 5. Tìm x , biết

a) $|x| = \frac{4}{7}$; b) $|x - 0,9| = 0,1$.

❻ Ví dụ 6. Tìm x , biết:

a) $\left| 5x + \frac{3}{4} \right| - \frac{5}{4} = 2$; b) $8 - \left| x - \frac{1}{3} \right| = 9$.

❼ Ví dụ 7. Tìm x biết

a) $7|x - 0,5| - \frac{1}{2} = \sqrt{9}$; b) $5|2x - 3,5| - \frac{3}{2} = \sqrt{16}$.

❽ Ví dụ 8. Tìm giá nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $|x + 1,5|$; b) $|x - 2| - \frac{9}{10}$.

❾ Ví dụ 9. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $-|2x - 1|$; b) $4 - |5x + 3|$.

C **BÀI TẬP VẬN DỤNG**

✍ Bài 1. Cách viết nào sau đây là đúng: $\sqrt{5} \in \mathbb{I}$; $2,(3) \in \mathbb{Q}$; $3 - \sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

✍ Bài 2. Các khẳng định sau đúng hay sai? Nếu sai, hãy phát biểu lại cho đúng.

a) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$; b) $-\sqrt{5} \in \mathbb{R}$; c) $4\frac{1}{2} \notin \mathbb{I}$; d) $3,(123) \in \mathbb{R}$.

✍ Bài 3. Hãy thay mỗi ? bằng kí hiệu $\in$ hoặc $\notin$ để có phát biểu đúng.

a) $-3 \boxed{?} \mathbb{Z}$; b) $3,(12) \boxed{?} \mathbb{Q}$; c) $\sqrt{3} \boxed{?} \mathbb{R}$; d) $-\frac{2}{3} \boxed{?} \mathbb{I}$;
e) $2,31(4) \boxed{?} \mathbb{Q}$; f) $7,62(1234) \boxed{?} \mathbb{R}$; g) $2023 \boxed{?} \mathbb{I}$; h) $2\frac{1}{3} \boxed{?} \mathbb{Q}$.

Bài 4. Tìm số đối của các số sau: $-\sqrt{5}$; 12, (3); 0,4599; $\sqrt{10}$; $-\pi$.

Bài 5. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Nếu x là số hữu tỉ thì x là số thực; b) 2 không phải là số hữu tỉ;
c) Nếu x là số nguyên thì $\sqrt{x}$ là số thực; d) Nếu x là số tự nhiên thì $\sqrt{x}$ là số vô tỉ.

Bài 6. In-sơ (inch, số nhiều là inches), kí hiệu là “in”, là đơn vị đo chiều dài thuộc hệ thống đo lường của Anh, Mỹ. Biết $1\text{ in} \approx 2,54\text{ cm}$.

- a) Hỏi 1cm gần bằng bao nhiêu in-sơ (làm tròn với độ chính xác 0,005)?
b) Khi nói “Ti vi 21 in”, ta hiểu là một loại ti vi có đường chéo màn hình bằng 21 in. Vậy các máy ti vi 21 in, 23 in, 27 in và 29 in có đường chéo màn hình gần bằng bao nhiêu xentimet (làm tròn với độ chính xác 0,05)?

Bài 7. So sánh $a = 1,(41)$ và $\sqrt{2}$.

Bài 8. So sánh hai số

- a) $m = \sqrt{9+25}$ và $n = \sqrt{9} + \sqrt{25}$. b) $p = \sqrt{49-16}$ và $q = \sqrt{49} - \sqrt{16}$.
c) $\sqrt{0,04}$ và 0,04. d) 8 và $\sqrt{8}$.

Bài 9. Hãy so sánh các số sau

- a) $-\sqrt{15}$ và $-\sqrt{16}$. b) 7 và $\sqrt{(-8)^2}$.

Bài 10. Hãy so sánh $\sqrt{10+3}$ và $\sqrt{10} + \sqrt{3}$.

Bài 11. So sánh hai số sau

- a) $-\sqrt{64+15}$ và $-\sqrt{15}-8$. b) $7 + \sqrt{(-9)^2}$ và $\sqrt{103}$.
c) $\sqrt{54}$ và $9 - \sqrt{27}$. d) $\sqrt{\frac{81}{25} - \frac{8}{7}}$ và $\frac{9}{5} - \frac{8}{7}$.

Bài 12. Tính $|6 - \sqrt{37}| + 2 - \sqrt{37}$.

Bài 13. Tìm tất cả các số thực x thỏa mãn điều kiện $|x| = 2,5$.

Bài 14. Tìm x biết

- a) $3|2x - 7,5| - \sqrt{4} = \sqrt{25}$; b) $7|x - 1,5| + \frac{4}{3} = \sqrt{49}$.

Bài 15. Tính giá trị tuyệt đối các số sau: 0; $-\frac{3}{7}$; $\frac{-4}{-9}$; $-7, 2$.

Bài 16. Tìm x , biết

- a) $|x| = \frac{10}{13}$; b) $\left|x - \frac{5}{6}\right| = \frac{1}{2}$; c) $\left|x + \frac{4}{9}\right| - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Bài 17. a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|x - 0,4| + 9$;

- b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\frac{1}{8} - |x + 3|$.

D BÀI TẬP NÂNG CAO

- ❖ **Câu 1.** Tìm x, y biết $\left|x - \frac{1}{2}\right| + |x - y| \leq 0$.
- ❖ **Câu 2.** Tìm x và y biết rằng $\left|x - \frac{4}{11}\right| + |5 + y| = 0$.
- ❖ **Câu 3.** Giả sử α là một số thực dương đã cho và x là một số thực thoả mãn: $-\alpha \leq x \leq \alpha$. So sánh $|x|$ với α .
- ❖ **Câu 4.** Biết rằng $\sqrt{2}$ là số vô tỉ. Số $3 - \sqrt{2}$ là số hữu tỉ hay vô tỉ?
- ❖ **Câu 5.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 2 + 3\sqrt{x^2 + 1}$.
- ❖ **Câu 6.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = |x - 1| + |x - 3|$.
- ❖ **Câu 7.** Hãy giải thích tại sao $|x + y| \leq |x| + |y|$ với mọi số thực x, y .

ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài 18. Sắp xếp các số sau theo thứ tự giảm dần

a) $\frac{-1}{2}; \frac{1}{3}; 0,5; 0,(5); 0,3.$

b) $-1,(2); 1,2; 1\frac{1}{5}; \frac{-6}{5}; 1,1(2).$

Bài 19. Sắp xếp các số sau từ nhỏ đến lớn:

a) $\frac{54}{17}; -\frac{4}{5}; \sqrt{8}; 0; -\frac{3}{4}; -\frac{6}{5}; -\frac{5}{4}; \pi.$

b) $\sqrt{625} - \frac{1}{\sqrt{8}}; \sqrt{484} - \frac{1}{\sqrt{5}}; \sqrt{576} - \frac{1}{\sqrt{7}}; \sqrt{529} - \frac{1}{\sqrt{6}}.$

Bài 20. Điền số còn thiếu trong bảng sau

x	9	0,49			$(-2)^4$	-4
$\sqrt{x}$			0,49			
$\frac{1}{\sqrt{x}}$				1		
$-\sqrt{x}$						

Bài 21. Viết các phân số sau thành số thập phân, rồi làm tròn lần lượt các số đó với độ chính xác 0,0005; 0,005; 0,05.

$$\frac{8}{33}; \frac{26}{111}; \frac{5}{24}; \frac{15}{82}; \frac{2}{13}.$$

Bài 22. Làm tròn các số sau 57365; 1946,78 với độ chính xác 5; 50; 500.

Bài 23. a) Tính giá trị gần đúng (làm tròn với độ chính xác 0,05) chu vi và diện tích một sân lõp học hình chữ có các cạnh đo được là 12,4 và 7,12 mét.

b) Một vận động viên giành huy chương vàng ở cự li 200 m. Biết rằng vận động viên đó chạy 200 m hết $23\frac{19}{60}$ giây. Hỏi thời gian gần đúng chính xác tới hàng phần trăm là bao nhiêu?

c) Bạn Phúc đi bộ với vận tốc 3 km/h, bạn Quang đi bộ với vận tốc 4 km/h. Họ xuất phát từ cùng một điểm đi dọc theo một đường tròn quanh công viên với chiều ngược nhau. Sau 6 phút họ gặp nhau. Tính gần đúng đường kính của đường tròn với độ chính xác 0,0005 (chọn $\pi = 3,1416$).

Bài 24. Thực hiện phép tính $M = \left| -2\frac{1}{4} \right| + \left| -3\frac{1}{9} + \frac{2}{9} \right| : \left(-2\frac{8}{9} \right).$

Bài 25. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{0,01} - \sqrt{0,04} - \sqrt{0,25};$

b) $B = 0,3\sqrt{100} + \sqrt{\frac{1}{9}} - \sqrt{\frac{1}{4}}.$

Bài 26. Thực hiện các phép tính sau

$$\text{a) } (|-2, 45| + |3, 1|) \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{4};$$

$$\text{b) } \left| \frac{-3}{7} \right| : \frac{|-12|}{-3} - 0, 15 + 3, 1.$$

Bài 27. Rút gọn các biểu thức sau

$$\text{a) } A = \frac{|-a^3| \cdot a \cdot b^5 \cdot c^{12}}{(-a)^4 \cdot (bc)^5 \cdot (-c)^2};$$

$$\text{b) } B = \left(\frac{a^2 \cdot b^5 \cdot c^4}{|-a^5| \cdot (-b)^3 \cdot c^4} \right)^2.$$

Bài 28. Thực hiện phép tính

$$\text{a) } A = (\sqrt{6,25} - 5 \cdot \sqrt{0,49}) \cdot \left(19 \cdot \sqrt{\frac{36}{361}} - 17 \cdot \sqrt{\frac{81}{289}} \right);$$

$$\text{b) } B = \left(\sqrt{2\frac{14}{25}} - \sqrt{1,21} \right) \cdot \left(1,21 + 2\frac{14}{25} + \sqrt{1,21 \cdot 2\frac{14}{25}} \right).$$

Bài 29. So sánh các số x và y , nếu :

$$\text{a) } x = \sqrt{961} - \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - 1 \right) \text{ và } y = \sqrt{1089} - \left(\frac{1}{\sqrt{7}} + 1 \right);$$

$$\text{b) } x = \sqrt{0,01} + \sqrt{0,04} + \sqrt{0,09} + \sqrt{0,16} + \dots + \sqrt{0,81} \text{ và } y = \sqrt{20 + 0,25};$$

$$\text{c) } x = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{4}} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{36}} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{64}} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{100}} \right) \text{ và } y = \sqrt{0,1}.$$

Bài 30. So sánh hai tổng A và B , nếu:

$$\text{a) } A = \sqrt{20+1} + \sqrt{40+2} + \sqrt{60+3} \text{ và } B = (\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3}) + (\sqrt{20} + \sqrt{40} + \sqrt{60}).$$

$$\text{b) } A = \frac{1}{\sqrt{121}} + \frac{1}{\sqrt{12321}} + \frac{1}{\sqrt{1234321}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{12345678987654321}} \text{ và } B = 0,111111111.$$

Bài 31. Tìm x biết

$$\text{a) } |x| + \frac{3}{7} = \frac{1}{2};$$

$$\text{b) } \left| x + \frac{4}{7} \right| = \frac{1}{2};$$

Bài 32. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left| x - \frac{3}{4} \right| + \frac{1}{4}.$

Bài 33. Cho $A = |2x + 5| + 10$; $B = \frac{1}{3} - (x + 1)^2.$

a) Tính giá trị nhỏ nhất của A ;

b) Tính giá trị lớn nhất của B .

Bài 34. Tìm x biết $|x + 6, 4| + |x + 2, 5| + |x + 8, 1| = 4x.$

Bài 35. Tìm x, y biết $\left| x + \frac{2}{3} \right| + |x - y| \leq 0.$

Bài 36. Xét dấu của hai số hữu tỉ x và y , biết rằng $xy < 0$ và $|x| < y^3.$

Bài 37. Với giá trị nào của x và y thì biểu thức $Q = 100 - |x + 1| - |y - 2|$ có giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Bài 38. Cho a là một số hữu tỉ khác 0, b là một số vô tỉ. Chứng tỏ rằng tích ab là một số vô tỉ.

Bài 39. Chứng minh rằng $1 + \sqrt{2}$ là số vô tỉ.

CHƯƠNG 3.

GÓC VÀ ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

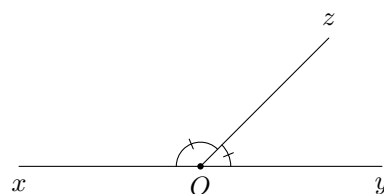
BÀI 8. GÓC Ở VỊ TRÍ ĐẶC BIỆT. TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 GÓC Ở VỊ TRÍ ĐẶC BIỆT

Hai góc có một cạnh chung, hai cạnh còn lại là hai tia đối nhau được gọi là hai góc kề bù.

Ở hình bên hai góc xOz và yOz là hai góc kề bù.



❖ **Tính chất 8.1.** Hai góc kề bù có tổng số đo bằng 180° .

Chú ý

❖ Hai góc kề bù còn được hiểu là hai góc vừa kề nhau, vừa bù nhau. Trong đó:

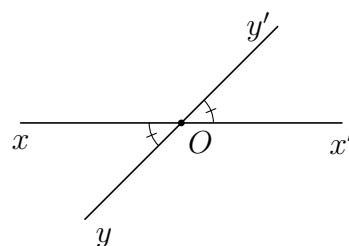
- Hai góc kề nhau là hai góc có một cạnh chung và hai cạnh còn lại nằm khác phía nhau đối với đường thẳng chứa cạnh chung đó.
- Hai góc bù nhau là hai góc có tổng số đo bằng 180° .

❖ Nếu điểm M nằm trong góc xOy thì ta nói tia OM nằm giữa hai cạnh (hai tia) Ox và Oy của góc xOy . Khi đó ta có:

$$\widehat{xOM} + \widehat{MOy} = \widehat{xOy}.$$

Hai góc đối đỉnh là hai góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh của góc kia.

❖ **Tính chất 8.2.** Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.

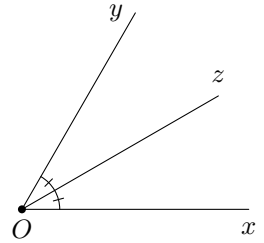


Chú ý

Hai đường thẳng xx', yy' cắt nhau và trong các góc tạo thành có một góc vuông được gọi là hai đường thẳng vuông góc. Kí hiệu là $xx' \perp yy'$.

② TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC

Tia nằm giữa hai cạnh của một góc và tạo với hai cạnh ấy hai góc bằng nhau được gọi là tia phân giác của góc đó.



↔ **Tính chất 8.3.** Khi Oz là tia phân giác của góc xOy thì $\widehat{xOz} = \widehat{yOz} = \frac{1}{2}\widehat{xOy}$.

Chú ý

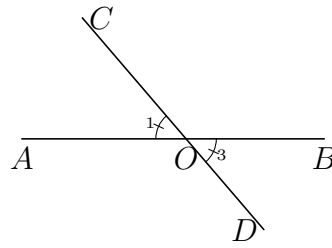
Đường thẳng chứa tia phân giác của một góc gọi là đường phân giác của góc đó.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP**Dạng : Tính số đo góc**

Để tính số đo góc, ta sử dụng các kiến thức sau:

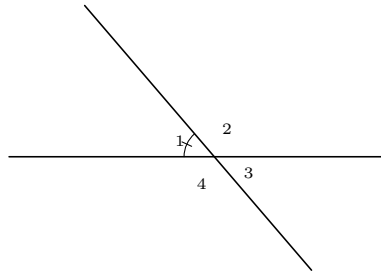
- 🟡 Tính chất cộng góc.
- 🟢 Tính chất góc kề bù, góc đối đỉnh.
- 🟠 Tính chất tia phân giác của một góc.

- 🔴 **Ví dụ 1.** Cho điểm A nằm trong góc BOC . Biết $\widehat{AOC} = 44^\circ$, $\widehat{BOA} = 60^\circ$. Tính $\widehat{BOC}$.
- 🔴 **Ví dụ 2.** Cho tia Ox nằm giữa hai tia Oy, Oz . Biết $\widehat{xOy} = 55^\circ$, $\widehat{yOx} = 95^\circ$. Tính $\widehat{xOz}$.
- 🔴 **Ví dụ 3.** Cho điểm I nằm trong góc AOB . Biết $\widehat{AOB} = 80^\circ$ và $\widehat{BOI} - \widehat{AOI} = 20^\circ$. Tính $\widehat{BOI}; \widehat{AOI}$.
- 🔴 **Ví dụ 4.** Cho hai góc $\widehat{mOn}$ và $\widehat{nOt}$. Biết $\widehat{mOn} = 3\widehat{nOt}$. Tính số đo hai góc $\widehat{mOn}$ và $\widehat{nOt}$.
- 🔴 **Ví dụ 5.** Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại O tạo thành bốn góc không kề góc bẹt. Biết $\widehat{AOC} = 55^\circ$, tính số đo ba góc còn lại.
- 🔴 **Ví dụ 6.** Cho hình bên dưới, biết $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 130^\circ$. Tính số đo của bốn góc AOC, COB, BOD và DOA .

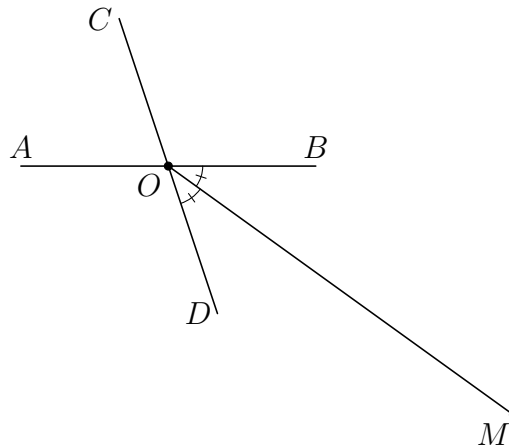


● **Ví dụ 7.** Hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại O tạo thành bốn góc không kể góc bẹt. Biết tổng của ba trong bốn góc này bằng 250° . Tính tổng số đo của bốn góc đó.

● **Ví dụ 8.** Cho hình bên dưới, giả sử góc $\widehat{O_2}$ lớn hơn $\widehat{O_3}$ là 30° . Tính góc $\widehat{O_1}$.



● **Ví dụ 9.** Cho hình bên dưới, tia OM là tia phân giác của góc BOD . Biết $\widehat{AOC} = 72^\circ$. Tính số đo của góc COM .



● **Ví dụ 10.** Cho hai tia Om , On đối nhau. Vẽ tia Ot sao cho $\widehat{mOt} = 40^\circ$. Gọi Oa là tia phân giác của góc mOt . Tính số đo các góc mOa và nOa .

● **Ví dụ 11.** Vẽ hai góc kề bù xOy , yOx' , biết $\widehat{xOy} = 150^\circ$. Gọi Ot là tia phân giác của góc xOy . Tính số đo các góc xOt và $x'Ot$.

● **Ví dụ 12.** Cho hai góc kề bù AOM và BOM trong đó $\widehat{AOM} = 50^\circ$. Vẽ tia ON ở trong góc BOM sao cho $ON \perp OM$. Tính số đo góc BON .

● **Ví dụ 13.** Cho hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau tại O . Tia OM là tia phân giác của góc BOC . Tính số đo của góc AOM .

● **Ví dụ 14.** Cho góc AOB có số đo là 150° . Vẽ vào trong góc này các tia OM và ON sao cho $OM \perp OA$ và $ON \perp OB$.

a) Chứng tỏ rằng $\widehat{AON} = \widehat{BOM}$.

b) Tính số đo góc $\widehat{MON}$.

Dạng : Nhận biết hai góc phụ nhau, bù nhau, đối nhau

Để nhận biết hai góc có phụ nhau hay bù nhau ta thực hiện hai bước sau:

Bước 1: Tính tổng số đo hai góc đó;

Bước 2

Nếu tổng bằng 90° thì hai góc đó phụ nhau.

Nếu tổng bằng 180° thì hai góc đó bù nhau.

Để nhận biết hai góc đối đỉnh ta dựa vào định nghĩa của nó

Ví dụ 1. Cho các góc sau: $\widehat{xOy} = 25^\circ$; $\widehat{aMb} = 80^\circ$; $\widehat{ABC} = 100^\circ$; $\widehat{PNQ} = 155^\circ$; $\widehat{CAB} = 65^\circ$; $\widehat{DEF} = 115^\circ$.

a) Hãy tìm các cặp góc phụ nhau.

b) Hãy tìm các cặp góc bù nhau.

Ví dụ 2. Cho các góc sau: $\widehat{xOy} = 20^\circ$; $\widehat{aMb} = 50^\circ$; $\widehat{ABC} = 70^\circ$; $\widehat{PNQ} = 40^\circ$; $\widehat{CAB} = 130^\circ$; $\widehat{DEF} = 110^\circ$.

a) Hãy tìm các cặp góc phụ nhau.

b) Hãy tìm các cặp góc bù nhau.

Ví dụ 3.

a) Viết tên các cặp góc phụ nhau.

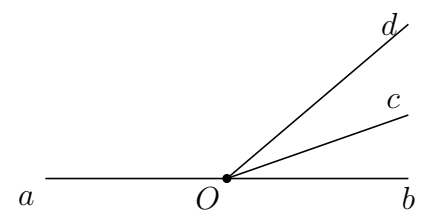
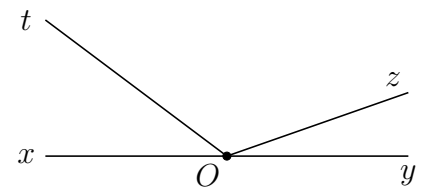
b) Viết tên các cặp góc kề nhau.

c) Viết tên các cặp góc bù nhau.

Ví dụ 4.

a) Viết tên các cặp góc kề bù.

b) Viết tên các cặp góc bù nhau.



Ví dụ 5. Cho hai góc kề bù $\widehat{AOM}$ và $\widehat{BOM}$ trong đó $\widehat{AOM} = 120^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia OM sao cho $\widehat{AON} = 60^\circ$. Hỏi hai góc $\widehat{AON}$ và $\widehat{BOM}$ có phải là hai góc đối đỉnh không? Vì sao?

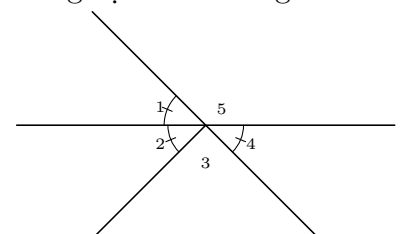
Ví dụ 6. Xem hình bên rồi cho biết trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A). Hai góc $\widehat{O_1}$ và $\widehat{O_2}$ là hai góc đối đỉnh.

(B). Hai góc $\widehat{O_2}$ và $\widehat{O_4}$ là hai góc đối đỉnh.

(C). Hai góc $\widehat{O_1}$ và $\widehat{O_4}$ là hai góc đối đỉnh.

(D). Hai góc $\widehat{O_3}$ và $\widehat{O_5}$ là hai góc đối đỉnh.



Ví dụ 7. Ba đường thẳng AB, CD, EF cắt nhau tại điểm O , chúng tạo thành mấy cặp góc đối đỉnh (không kể góc bẹt)?

Dạng : Chứng minh một tia là tia phân giác của một góc cho trước

Để chứng minh tia Oy là tia phân giác của góc xOz , ta thực hiện theo hai bước sau:

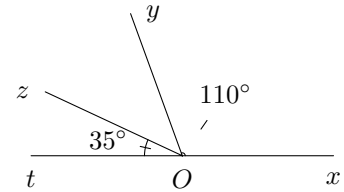
Bước 1: Chứng tỏ tia Oy nằm giữa hai tia Ox, Oz .

Bước 2: Chứng tỏ $\widehat{xOy} = \widehat{zOy}$.

Ví dụ 1.

Cho hình vẽ bên.

Tia Oz có phải là tia phân giác của $\widehat{yOt}$ không? Vì sao?



Ví dụ 2. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa tia AB , vẽ tia AC, AD sao cho $\widehat{BAC} = 50^\circ$, $\widehat{BAD} = 100^\circ$.

- Trong ba tia AB, AC, AD thì tia nào nằm giữa hai tia còn lại? Vì sao?
- So sánh góc BAC và góc CAD .
- Tia AC có phải là tia phân giác của góc BAD không? Vì sao?

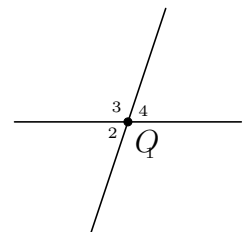
Ví dụ 3. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox , vẽ tia Ot, Oy sao cho $\widehat{xOt} = 35^\circ$, $\widehat{xOy} = 70^\circ$.

- Tia Ot có nằm giữa hai tia Ox và Oy không?
- So sánh góc tOy và góc xOt .
- Tia Ot có là tia phân giác của góc xOy không? Vì sao?

C BÀI TẬP VẬN DỤNG

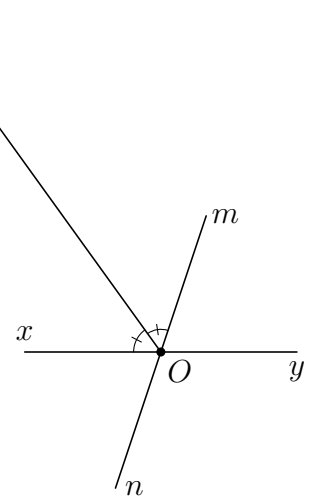
Bài 1.

Cho hình bên dưới, biết $\widehat{O_1} = 3\widehat{O_2}$. Tính số đo các góc $\widehat{O_1}, \widehat{O_2}, \widehat{O_3}, \widehat{O_4}$.



Bài 2. Hai đường thẳng xy và mn cắt nhau tại O .

Vẽ tia phân giác Ot của góc xOm . Biết $\widehat{yOt} = 125^\circ$. Tính số đo các góc xOm và yOn . Tham khảo hình vẽ bên.



Bài 3. Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại O . Vẽ các tia OM , ON lần lượt là các tia phân giác của các góc BOC và AOD . Tính số đo của góc MON .

Bài 4. Cho hai tia đối nhau Oa , Ob . vẽ tia Oc sao cho $\widehat{aOc} - \widehat{bOc} = 50^\circ$. Tính số đo góc $\widehat{aOc}$ và $\widehat{bOc}$.

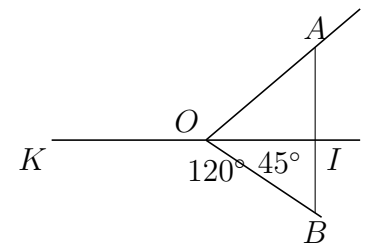
Bài 5. Trên đường thẳng d từ trái sang phải ta lấy các điểm A, D, C, B và lấy các điểm O nằm ngoài đường thẳng d . Biết $\widehat{AOD} = 30^\circ$ và $\widehat{AOB} = 120^\circ$.

- Tính số đo $\widehat{BOD}$.
- Biết $\widehat{DOC} = 2\widehat{BOC}$. Tính $\widehat{DOC}$ và $\widehat{AOC}$.

Bài 6.

Ở hình vẽ bên, hai tia đối OI, OK . Tia OI cắt đoạn thẳng AB tại I . Biết $\widehat{KOA} = 120^\circ$, $\widehat{BOI} = 45^\circ$.

- Tính $\widehat{KOB}$, $\widehat{AOI}$.
- Tính $\widehat{BOA}$.



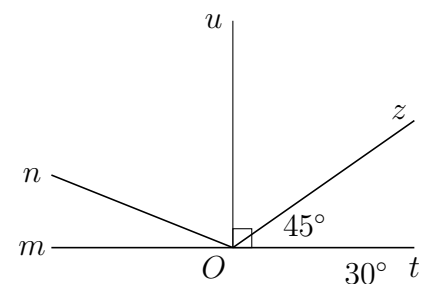
Bài 7. Cho hai tia đối nhau AM và AN . Trên một cùng nửa mặt phẳng bờ MN vẽ các tia AP và AQ sao cho $\widehat{MAP} = 33^\circ$, $\widehat{NAQ} = 58^\circ$ và tia AQ nằm giữa hai tia AN và AP .

- Tính số đo góc $\widehat{PAN}$.
- Tính số đo góc $\widehat{PAQ}$.

Bài 8.

Cho hình vẽ bên

- Gọi tên các cặp góc kề nhau ở đỉnh O trong hình đó.
- Cho biết số đo các góc ở đỉnh O trong hình đó.
- Cho biết cặp góc phụ nhau đỉnh O .
- Cho biết cặp góc bù nhau đỉnh O .
- Cho biết cặp góc kề bù nhau đỉnh O .

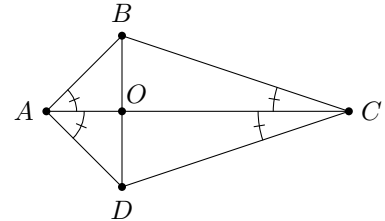


Bài 9.a) Vẽ $\widehat{ABC}$ là góc vuông.b) Vẽ tia phân giác BD của góc ABC ở ý trên.

Bài 10. Cho điểm B nằm giữa hai điểm A và C . Vẽ các tia BA, BC . Lấy điểm D nằm ngoài đường thẳng BC sao cho $\widehat{ABD} = 80^\circ$. Gọi BE là tia phân giác của góc ABD . Tính số đo các góc ABE và EBC .

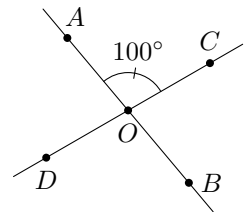
Bài 11. Cho ba tia Ox, Oy, Oz biết Ox, Oy là hai tia đối nhau và $\widehat{xOz} = 50^\circ$. Gọi Om là tia phân giác của góc xOz , On là tia phân giác của góc yOz . Tính số đo các góc yOm và mOn .

Bài 12. Cho hai tia Oy, Oz cùng nằm trên một nửa mặt phẳng có bờ chứa tia Ox . Biết $\widehat{xOy} = 30^\circ, \widehat{xOz} = 80^\circ$. Vẽ tia phân giác Om của $\widehat{xOy}$. Vẽ tia phân giác On của $\widehat{xOz}$.

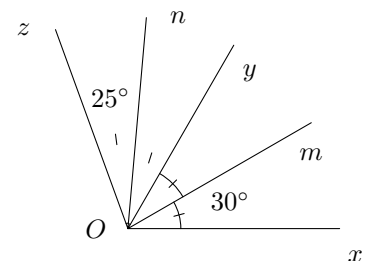
a) Chứng tỏ tia Om nằm giữa hai tia Ox, Oz . Từ đó tính số đo góc zOm .b) Tính số đo góc mOn .**Bài 13.**a) Trong hình bên, tìm tia phân giác của các góc $\widehat{BAD}, \widehat{BCD}$.b) Cho biết $\widehat{BAD} = 80^\circ, \widehat{BCD} = 50^\circ$. Tính số đo của các góc $\widehat{BAO}, \widehat{BCO}$.**Bài 14.**

Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại O và tạo thành $\widehat{AOC} = 100^\circ$ như hình bên.

a) Tính số đo các góc còn lại.

b) Vẽ Ox là tia phân giác của $\widehat{AOD}$. Hãy tính số đo của $\widehat{xOC}$.c) Vẽ Ox' là tia đối của tia Ox . Giải thích tại sao Ox' là tia phân giác của $\widehat{BOC}$.**Bài 15.**

Cho $\widehat{xOy}$ và $\widehat{yOz}$ là hai góc kề nhau, Om là tia phân giác của $\widehat{xOy}$, On là tia phân giác của $\widehat{yOz}$. Biết $\widehat{xOm} = 30^\circ, \widehat{nOz} = 25^\circ$ (xem hình vẽ). Tính số đo của $\widehat{xOz}$.



Bài 16. Cho đường thẳng ac đi qua điểm O . Vẽ tia Ob sao cho $\widehat{aOb} = 120^\circ$. Vẽ tia Od sao cho $\widehat{cOd} = 60^\circ$ và $\widehat{bOd} = 120^\circ$. Gọi Oe là tia phân giác của $\widehat{aOd}$. Các góc $\widehat{bOc}$ và $\widehat{aOe}$ có phải là hai góc đối đỉnh không? Vì sao?

Bài 17. Vẽ hai góc kề bù $\widehat{xOy}$ và $\widehat{yOx'}$, biết $\widehat{xOy} = 140^\circ$. Gọi Oz là tia phân giác của $\widehat{xOy}$, Ot là tia phân giác của $\widehat{xOz}$.

- a) Tính số đo của $\widehat{zOy}$, $\widehat{zOx'}$, $\widehat{xOt}$, $\widehat{tOx'}$.
- b) Vẽ Ot' là tia đối của tia Ot . Tính số đo của góc $\widehat{xOt'}$, $\widehat{yOt'}$, $\widehat{zOt'}$.
- c) Ox' có phải là tia phân giác của $\widehat{yOt'}$ hay không? Vì sao?

Bài 18. Vẽ góc bẹt $\widehat{aOb}$. Vẽ tia phân giác Oc của góc đó. Vẽ tia phân giác Od của $\widehat{aOc}$, vẽ tia phân giác Oe của $\widehat{bOc}$, vẽ Of là tia đối của tia Od .

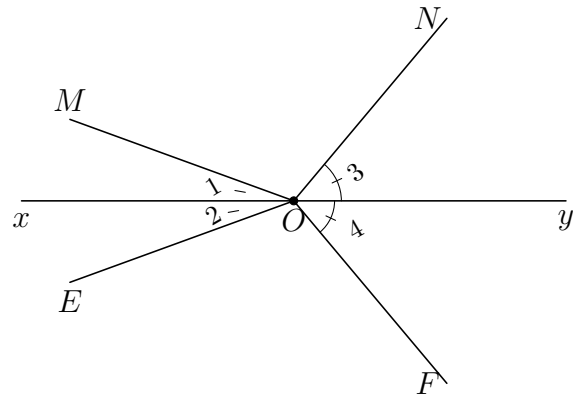
- a) Tính số đo của $\widehat{bOd}$.
- b) Oc có phải là tia phân giác của $\widehat{dOe}$ hay không? Vì sao?
- c) Ob có phải là tia phân giác của $\widehat{eOf}$ hay không? Vì sao?

Bài 19. Cho $\widehat{xOy}$ và $\widehat{yOz}$ là hai góc kề bù, biết $\widehat{xOy} = \frac{1}{2}\widehat{yOz}$.

- a) Tính số đo $\widehat{xOy}$, $\widehat{yOz}$.
- b) Vẽ Ot là tia đối của tia Oy , Oh là tia phân giác $\widehat{xOt}$. Hỏi Ox có phải là tia phân giác $\widehat{yOh}$ hay không? Vì sao?

Bài 20.

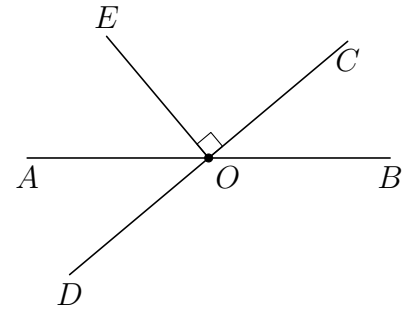
Cho hình bên, biết đường thẳng xy lần lượt chứa các tia phân giác của các góc MOE và NOF . Muốn cho $OE \perp OF$ thì góc MON phải có số đo bằng bao nhiêu độ?



D BÀI TẬP NÂNG CAO

- Câu 1.** Cho tia Om nằm giữa hai tia On, Ot . Biết $\widehat{nOt} = 115^\circ$ và $\widehat{mOt} - \widehat{nOm} = 55^\circ$. Tính $\widehat{mOt}$; $\widehat{nOm}$.
- Câu 2.** Cho điểm M nằm trong góc AOB . Biết $\widehat{AOB} = 120^\circ$ và $\widehat{AOM} = 2\widehat{BOM}$. Tính $\widehat{AOM}$; $\widehat{BOM}$.
- Câu 3.** Cho điểm D nằm trong góc MON . Biết $\widehat{MON} = 60^\circ$ và $\widehat{MOD} = \frac{1}{4}\widehat{MON}$. Tính $\widehat{MOD}$; $\widehat{NOD}$.
- Câu 4.** Cho hình bên,

hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại O và $OE \perp CD$. Biết $\widehat{BOE} = 135^\circ$. Chứng tỏ rằng tia OA là tia phân giác của góc DOE .



❖ **Câu 5.** Cho hai góc kề bù xOy , yOx' , biết $\widehat{xOy} = 120^\circ$. Gọi Ot là tia phân giác của góc xOy và Ot' là tia phân giác của góc $x'Oy$. Tính số đo các góc $x'Ot$ và tOt' .

❖ **Câu 6.** Cho góc bẹt xOy . Vẽ tia phân giác Om của góc đó. Vẽ tia phân giác Oa của góc xOm . Vẽ tia phân giác Ob của góc mOy . Tính số đo các góc yOm , xOb và aOb .

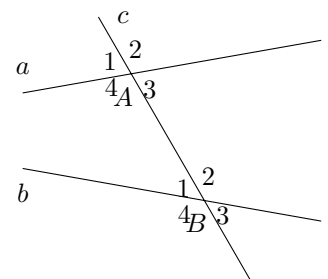
BÀI 9. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VÀ DẤU HIỆU NHẬN BIẾT

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 CÁC GÓC TẠO BỞI 1 ĐƯỜNG THẲNG CẮT 2 ĐƯỜNG THẲNG

1.1. Góc so le trong và hai góc đồng vị

Cho đường thẳng c cắt hai đường thẳng a và b lần lượt tại A và B tạo thành bốn góc đỉnh A , bốn góc đỉnh B được đánh số như hình bên. Ta sắp xếp các góc thành từng cặp. Mỗi cặp gồm một góc đỉnh A và một góc đỉnh B .

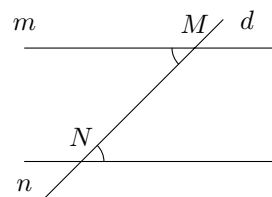
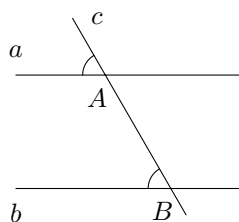


-  Các cặp góc $\widehat{A_3}$ và $\widehat{B_1}$; $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_2}$ gọi là các cặp góc so le trong.
-  Các cặp góc $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_1}$; $\widehat{A_2}$ và $\widehat{B_2}$; $\widehat{A_3}$ và $\widehat{B_3}$; $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_4}$ gọi là các cặp góc đồng vị.

Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng phân biệt a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau thì:

- a) Hai góc so le trong còn lại bằng nhau; b) Hai góc đồng vị bằng nhau.

Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau (hoặc một cặp góc đồng vị bằng nhau) thì a và b song song với nhau.



Lưu ý

Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

B CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

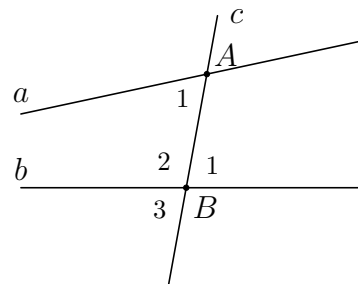
Dạng : Xác định cặp góc so le trong, cặp góc đồng vị

Phải căn cứ vào vị trí của hai góc so với hai đường thẳng và đường thứ ba cắt chúng (cát tuyến)

○ Ví dụ 1. Cho hình bên.

a) Góc nào so le trong với góc A_1 ?

b) Góc nào đồng vị với góc A_1 ?

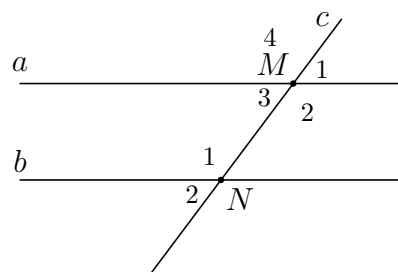


○ Ví dụ 2.

Cho hình bên, hãy kể tên

a) Góc so le trong với góc N_1 ;

b) Góc đồng vị với góc N_2 ;

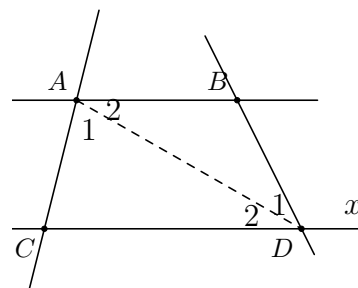


○ Ví dụ 3. Xem hình bên rồi cho biết

a) Cặp góc so le trong của hai đường thẳng AB và CD đối với cát tuyến AD .

b) Cặp góc so le trong của hai đường thẳng AC và BD đối với cát tuyến AD .

c) Cặp góc đồng vị của hai đường thẳng AC và BD đối với cát tuyến Cx .

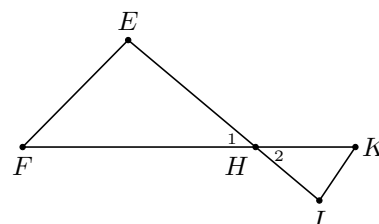


Dạng : Nhận biết, chứng minh hai đường thẳng song song

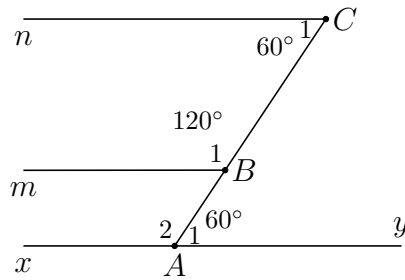
Cần chứng tỏ cặp góc so le trong bằng nhau, hoặc cặp góc đồng vị bằng nhau.

○ Ví dụ 1.

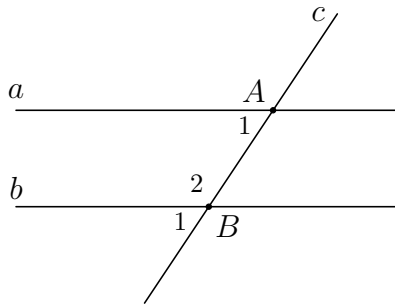
Cho hình bên, biết $\widehat{F} = \widehat{H_1}$, $\widehat{K} = \widehat{H_2}$. Chứng tỏ rằng $EF \parallel IK$.



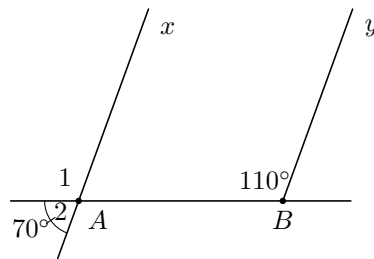
○ Ví dụ 2. Tìm trong hình dưới, các cặp đường thẳng song song.



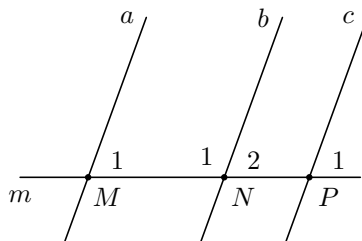
❶ Ví dụ 3. Cho hình bên dưới, biết $\widehat{A_1} = 60^\circ$, $\widehat{B_1} = \frac{1}{2}\widehat{B_2}$. Chứng tỏ rằng $a \parallel b$.



❶ Ví dụ 4. Cho hình bên dưới, biết $\widehat{A_2} = 70^\circ$, $\widehat{B} = 110^\circ$. Chứng tỏ rằng $Ax \parallel By$.

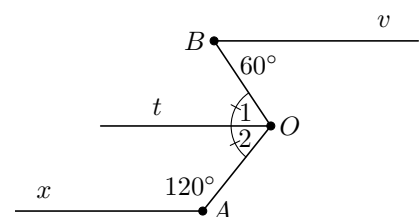


❶ Ví dụ 5. Cho hình bên dưới, biết $\widehat{M_1} = 75^\circ$, $\widehat{N_1} = 105^\circ$, $\widehat{P_1} = 75^\circ$. Hãy kể tên các cặp đường thẳng song song.



❶ Ví dụ 6.

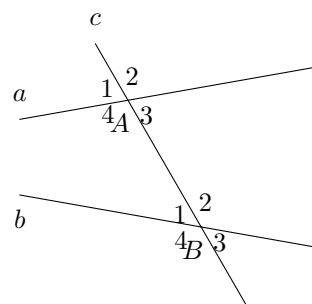
Trên hình vẽ bên, cho $\widehat{AOB} = 120^\circ$ và Ot là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$. Chứng minh rằng $Ax \parallel Ot$ và $By \parallel Ot$.



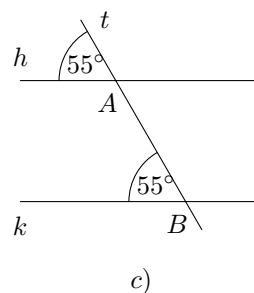
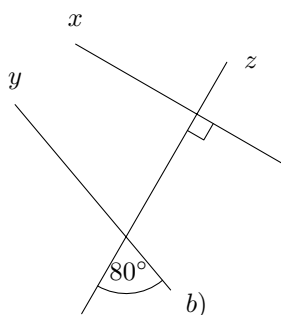
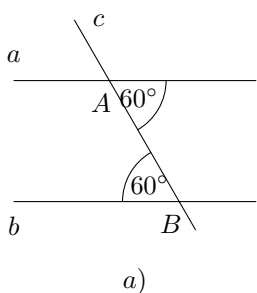
C BÀI TẬP VẬN DỤNG

✎ Bài 1.

Tìm các cặp góc so le và đồng vị trong hình bên.



✎ Bài 2. Tìm các cặp đường thẳng song song trong hình dưới đây và giải thích.

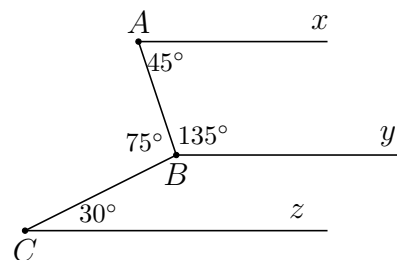


✎ Bài 3.

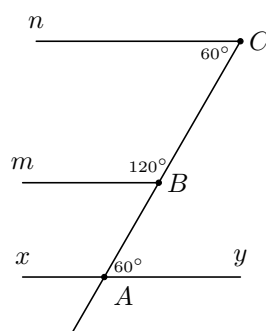
Cho hình dưới, chứng tỏ rằng

a) $Ax \parallel By$;

b) $Cz \parallel By$.

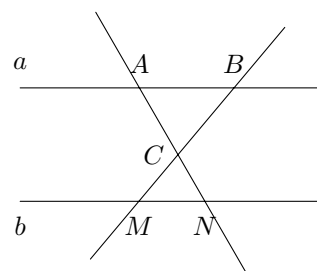


✎ Bài 4. Tìm trong hình bên dưới các cặp đường thẳng song song.



✎ Bài 5.

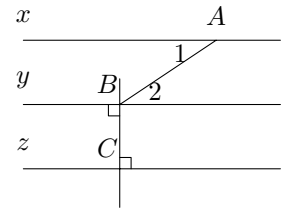
Tìm các cặp góc bằng nhau của hai tam giác ABC và MNC trong hình bên, biết $a \parallel b$.



Bài 6.

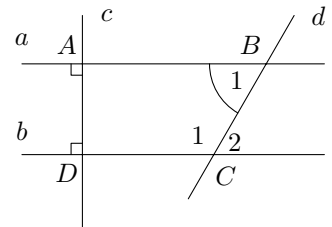
Cho hình bên, biết $\widehat{A}_1 = 25^\circ$, $\widehat{B}_2 = 25^\circ$.

- Đường thẳng x có song song với đường thẳng y không? Vì sao?
- Đường thẳng y có song song với đường thẳng z không? Vì sao?

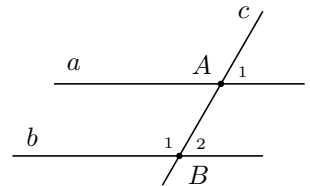
**Bài 7.**

Quan sát hình bên và cho biết

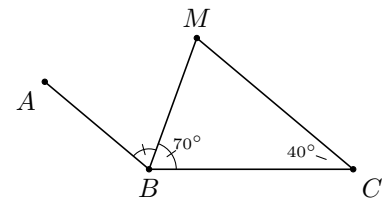
- Vì sao $a \parallel b$?
- Cho $\widehat{B}_1 = 60^\circ$. Số đo của $\widehat{C}_1$, $\widehat{C}_2$ là bao nhiêu?

**D BÀI TẬP NÂNG CAO****Câu 1.**

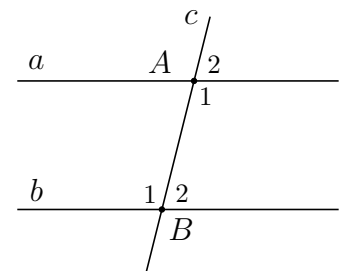
Cho hình bên, biết $\widehat{A}_1 = 72^\circ$, $\widehat{B}_2 = \frac{2}{3}\widehat{B}_1$. Chứng tỏ $a \parallel b$.

**Câu 2.**

Cho hình bên dưới, biết tia BM là tia phân giác của góc ABC , $\widehat{MBC} = 70^\circ$, $\widehat{MCB} = 40^\circ$. Chứng tỏ rằng $AB \parallel MC$.

**Câu 3.**

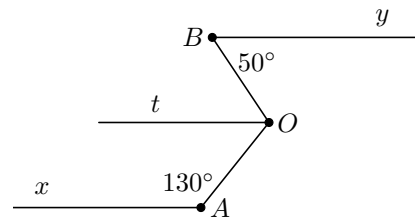
Cho hình dưới, biết $\widehat{A}_1 - \widehat{A}_2 = \widehat{B}_1 - \widehat{B}_2$. Chứng tỏ rằng $a \parallel b$.

**Câu 4.** Chứng minh rằng nếu hai đường thẳng song song bị cắt bởi hai cát tuyến thì

- Hai tia phân giác của một cặp góc so le trong song song với nhau.
- Hai tia phân giác của một cặp góc đồng vị bằng nhau.
- Hai tia phân giác của một cặp góc trong cùng phía vuông góc với nhau.

Câu 5.

Trên hình vẽ bên, cho $\widehat{AOB} = 100^\circ$ và Ot là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$. Chứng minh rằng $Ax \parallel Ot$ và $By \parallel Ot$.



BÀI 10. TIÊN ĐỀ EUCLID. TÍNH CHẤT CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 TIÊN ĐỀ EUCLID VỀ ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

❖ **Nhận xét 10.1.** Nếu điểm M nằm ngoài đường thẳng a thì đường thẳng b đi qua M và song song với a là duy nhất.

Chú ý

Từ tiên đề Euclid ta suy ra được: Nếu một đường thẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng cắt đường thẳng còn lại.

2 TÍNH CHẤT CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì:

- 🟡 Hai góc so le trong bằng nhau;
- 🟡 Hai góc đồng vị bằng nhau.

❖ **Nhận xét 10.2.**

- 🟡 Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia.
- 🟡 Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

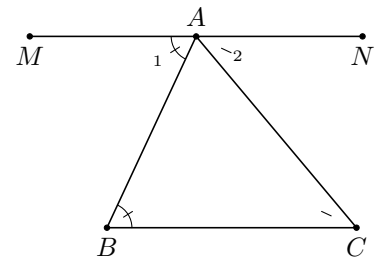
📄 Dạng : Tiên đề Euclid

🔴 **Ví dụ 1.** Cho $a \parallel b$, chứng tỏ rằng nếu đường thẳng c cắt đường thẳng a thì cũng cắt đường thẳng b .

🔴 **Ví dụ 2.** Qua điểm A ở ngoài đường thẳng a vẽ $n + 1$ đường thẳng phân biệt. Chứng minh rằng ít nhất cũng có n đường thẳng cắt a .

🔴 **Ví dụ 3.**

Trong hình vẽ có $\widehat{A_1} = \widehat{B}$; $\widehat{A_2} = \widehat{C}$ và AM , AN cùng bằng BC .
 Chứng tỏ rằng A là trung điểm của MN .

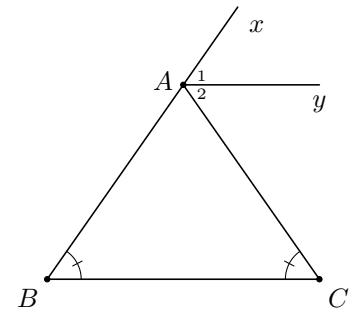


Dạng : Chứng tỏ hai góc bằng nhau

Sử dụng tính chất của hai đường thẳng song song. Có thể dùng góc thứ ba làm trung gian.

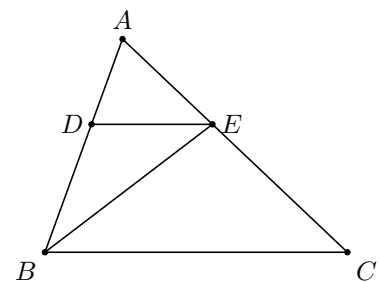
Ví dụ 1.

Trong hình bên dưới có $\widehat{B} = \widehat{C}$ và $Ay \parallel BC$. Chứng tỏ rằng tia Ay là tia phân giác của góc $C Ax$.



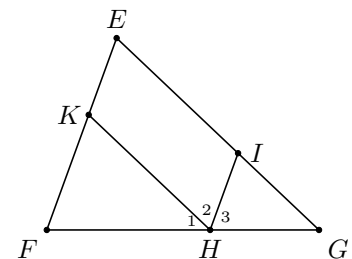
Ví dụ 2.

Trong hình bên dưới có $DE \parallel BC$. Hãy kể tên các cặp góc bằng nhau.



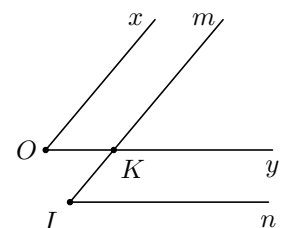
Ví dụ 3. Trong hình bên có $HI \parallel EF$, $HK \parallel EG$.

- Hãy kể tên những góc bằng góc E .
- Nếu $\widehat{F} - \widehat{G} = 25^\circ$ thì hiệu $\widehat{H_3} - \widehat{H_1}$ bằng bao nhiêu độ?



Ví dụ 4.

Cho các góc $\widehat{xOy}$ và $\widehat{mIn}$ là hai góc có cạnh tương ứng song song cùng nhọn; $Ox \parallel Im$; $Oy \parallel In$ (xem hình vẽ). Chứng minh rằng $\widehat{O} = \widehat{I}$.

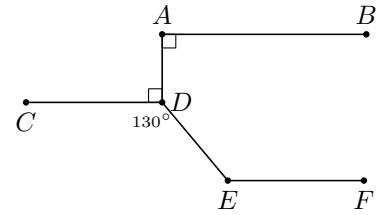


Dạng : Chứng minh hai đường thẳng song song

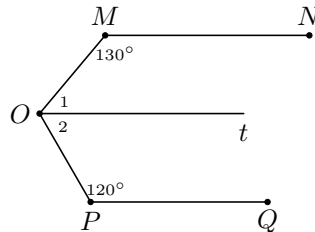
Ngoài những dấu hiệu đã biết trước đây, bạn có thể dựa vào hai dấu hiệu mới: cùng vuông góc hoặc cùng song song với một đường thứ ba.

Ví dụ 1.

Trong hình vẽ có $AB \perp AD$; $CD \perp AD$, $\widehat{CDE} = 130^\circ$ và $\widehat{E} = 130^\circ$. Chứng minh rằng $AB \parallel EF$.

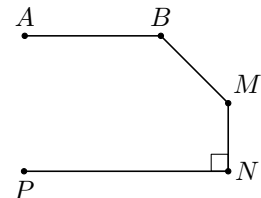


Ví dụ 2. Trong hình vẽ có $\widehat{M} = 130^\circ$, $\widehat{P} = 120^\circ$ và $\widehat{MOP} = 110^\circ$. Biết tia $Ot \parallel MN$. Chứng minh rằng $MN \parallel PQ$.



Ví dụ 3.

Trong hình vẽ có $MN \perp NP$, $\widehat{ABM} = \widehat{BMN} = 135^\circ$. Chứng minh rằng $AB \parallel NP$.



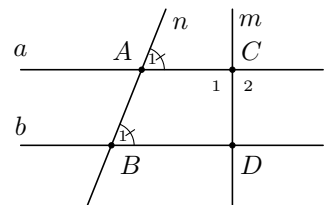
Dạng : Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Ngoài định nghĩa ra, ta có thể dựa vào

- Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia.
- Hai tia phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau.

Ví dụ 1.

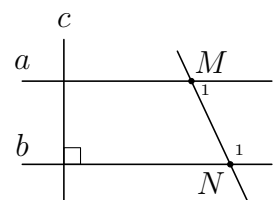
Cho hình vẽ biết $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ và $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$. Chứng minh rằng $m \perp b$.



Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = \widehat{C}$. Tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại D . Vẽ tia Ay nằm trong nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C sao cho $Ay \parallel BC$. Chứng minh rằng $Ay \perp AD$.

Ví dụ 3.

Xem hình vẽ rồi cho biết hai góc $\widehat{M_1}$ và $\widehat{N_1}$ phải có điều kiện gì để cho $c \perp a$?

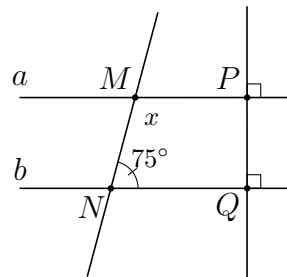


Dạng : Tính số đo góc

Dùng tính chất của hai đường thẳng song song. Nếu biết số đo của một góc thì cũng tính được số đo của góc kia.

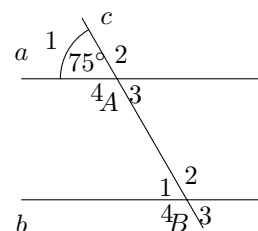
◉ Ví dụ 1.

Cho hình vẽ, biết $a \perp PQ$; $b \perp PQ$ và $\widehat{N} = 75^\circ$. Tính số đo x của góc M .



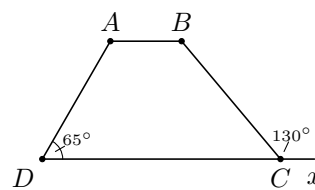
◉ Ví dụ 2.

Trong hình bên, cho biết $a \parallel b$. Tìm số đo các góc đỉnh A và B .



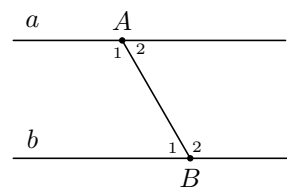
◉ Ví dụ 3.

Cho hình vẽ dưới đây, biết: $AB \parallel CD$, $\widehat{D} = 65^\circ$; $\widehat{BCx} = 130^\circ$. Tính số đo của $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$.



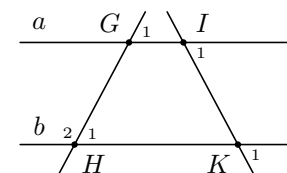
◉ Ví dụ 4.

Cho hình vẽ, biết: $a \parallel b$, $\widehat{A_1} - \widehat{B_1} = 50^\circ$. Tính số đo của $\widehat{A_2}$ và $\widehat{B_2}$.



◉ Ví dụ 5.

Cho hình vẽ, biết: $\widehat{G_1} = 50^\circ$; $\widehat{I_1} = 60^\circ$; $\widehat{K_1} = 60^\circ$. Tính số đo của $\widehat{H_2}$.

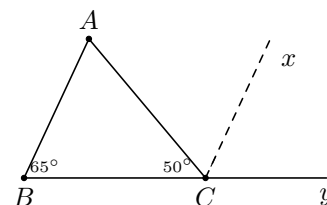


◉ Ví dụ 6.

Cho hình vẽ, biết rằng tia Cx là tia phân giác của $\widehat{ACy}$. Chứng tỏ rằng

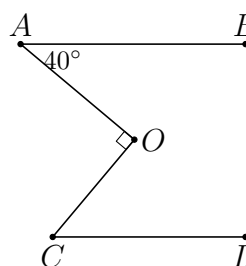
a) $Cx \parallel AB$;

b) Tính số đo của $\widehat{A}$.



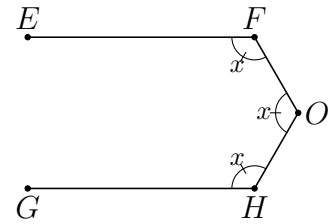
◉ Ví dụ 7.

Cho hình vẽ, biết $AB \parallel CD$; $\widehat{A} = 40^\circ$; $OA \perp OC$. Tính số đo của góc C .



Ví dụ 8.

Cho hình vẽ, biết $EF \parallel GH$; $\widehat{F} = \widehat{O} = \widehat{H} = x$. Tính giá trị của x .

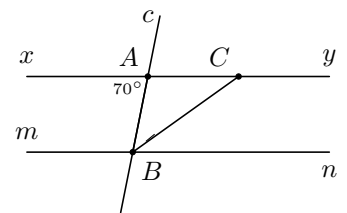


BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Qua điểm O nằm ngoài đường thẳng xy ta vẽ 10 đường thẳng phân biệt. Hỏi ít nhất có mấy đường thẳng cắt xy ?

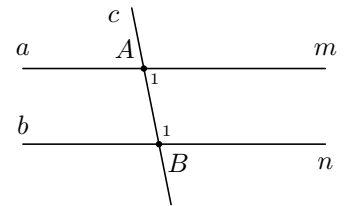
Bài 2.

Trong hình vẽ có $xy \parallel mn$. Tia BC là tia phân giác của $\widehat{ABn}$. Biết $\widehat{BAx} = 70^\circ$, tính $\widehat{ACB}$.



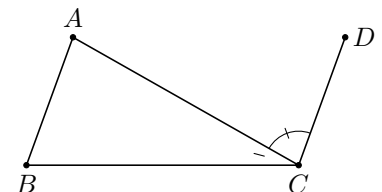
Bài 3.

Trong hình vẽ có $a \parallel b$ và $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$. Chứng tỏ rằng $c \perp a$ và $c \perp b$.



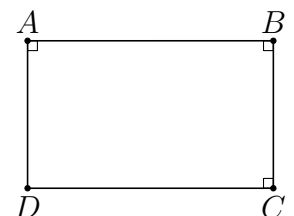
Bài 4.

Trong hình vẽ có $\widehat{BCD} = 115^\circ$; $\widehat{BCA} = 40^\circ$ và $CD \parallel AB$. Tính số đo của $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$.



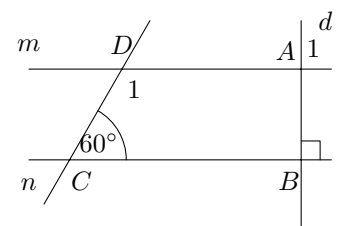
Bài 5.

Trong hình vẽ có $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$. Chứng tỏ rằng $\widehat{D} = 90^\circ$.



Bài 6.

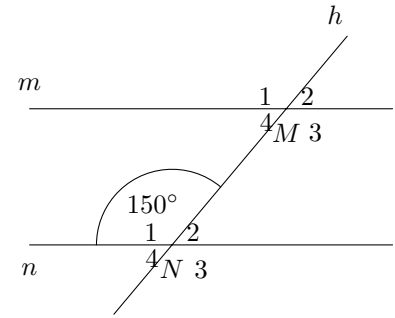
Cho hình bên, biết $m \parallel n$. Tính số đo các góc $\widehat{A_1}$ và $\widehat{D_1}$.



Bài 7.

Cho hình bên, biết $m \parallel n$.

- Chỉ ra góc ở vị trí so le trong, đồng vị với $\widehat{N}_1$.
- Tính số đo các góc $\widehat{M}_2$; $\widehat{M}_4$; $\widehat{N}_2$.
- Tính số đo các góc $\widehat{N}_3$ và $\widehat{M}_3$.



Bài 8. Cho hai góc $\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'O'y'}$, biết $Ox \parallel O'x'$ (cùng chiều) và $Oy \parallel O'y'$ (cùng chiều). Chứng minh rằng $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$.

Bài 9. Cho hai góc $\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'O'y'}$, biết $Ox \parallel O'x'$ (cùng chiều) và $Oy \parallel O'y'$ (ngược chiều). Chứng minh rằng $\widehat{xOy} + \widehat{x'O'y'} = 180^\circ$.

Bài 10. Qua điểm A nằm ngoài đường thẳng a vẽ 100 đường thẳng phân biệt. Chứng minh rằng ít nhất có 99 đường thẳng cắt a .

Bài 11. Cho góc $\widehat{xOy}$ khác góc bẹt và một điểm A ở trong đó. Một đường thẳng a đi qua A và song song với Ox . Chứng minh rằng a cắt Oy .

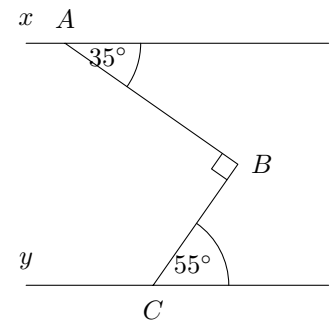
D BÀI TẬP NÂNG CAO

Câu 1. Tính các góc của tứ giác $ABCD$ ($AB \parallel CD$), biết $\widehat{A} = 3\widehat{D}$, $\widehat{B} - \widehat{C} = 30^\circ$.

Câu 2. Cho tam giác ABC . Tính tổng $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$.

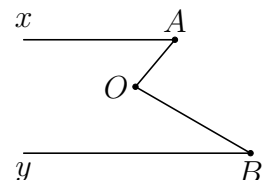
Câu 3.

Quan sát hình bên và cho biết, vì sao $x \parallel y$?



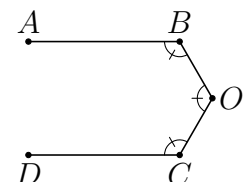
Câu 4.

Trong hình vẽ có $Ax \parallel By$. Chứng tỏ rằng $\widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{AOB}$.



Câu 5.

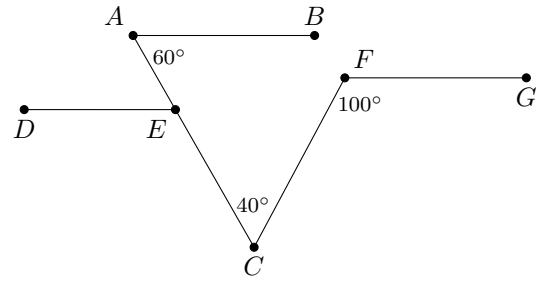
Trong hình vẽ có $\widehat{B} = \widehat{O} = \widehat{C} = 120^\circ$. Chứng tỏ rằng $AB \parallel CD$.



Câu 6.

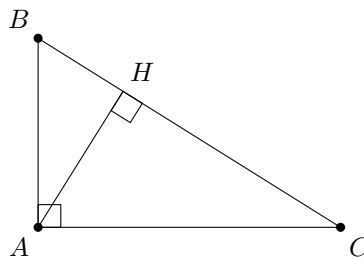
Cho hình vẽ sau, biết rằng DE song song với AB ,
 $\widehat{ECF} = 40^\circ$, $\widehat{CFG} = 100^\circ$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

- Tính số đo góc $\widehat{DEC}$;
- Chứng minh rằng $DE \parallel FG$.



Câu 7. Cho góc nhọn $\widehat{mOn}$ và điểm H thuộc tia Om . Vẽ tia Hx song song với tia On và nằm ngoài góc mOn . Vẽ tia Oy và Ht lần lượt là phân giác của $\widehat{mOn}$ và $\widehat{xHm}$. Chứng minh rằng $Oy \perp Ht$.

Câu 8. Cho hình vẽ sau, hãy chứng minh $\widehat{B} = \widehat{HAC}$.



BÀI 11. ĐỊNH LÝ VÀ CHỨNG MINH ĐỊNH LÝ

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

Định lý là một khẳng định được suy ra từ những khẳng định đúng đã biết. Mỗi định lý thường được phát biểu dưới dạng:

Nếu ... thì ...

Phần giữa từ "nếu" và từ "thì" là *giả thiết* của định lý;

Phần sau từ "thì" là *kết luận* của định lý.

Chứng minh một định lý là dùng lập luận để từ giả thiết và những khẳng định đúng đã biết suy ra kết luận của định lý.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng : Nhận biết, viết giả thiết, kết luận của một định lý bằng kí hiệu

Phải xác định xem đâu là điều đã cho, đâu là điều cần chứng minh. Điều đã cho là phần giả thiết, điều cần chứng minh là kết luận. Nếu định lý được viết dưới dạng “Nếu ... thì ...”, thì phần nằm giữa từ “nếu” và từ “thì” là phần giả thiết, phần sau từ “thì” là phần kết luận.

Ví dụ 1. Cho định lý: "Một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì tạo thành cặp góc đồng vị bằng nhau".

- Hỏi đâu là giả thiết, đâu là kết luận của định lý?
- Ghi giả thiết và kết luận của định lý bằng kí hiệu.

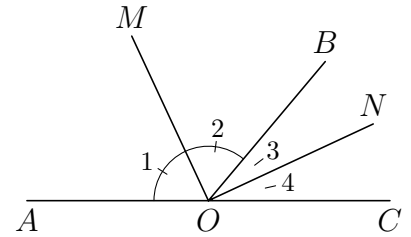
Ví dụ 2. Hãy phát biểu phần còn thiếu của kết luận trong các định lý sau:

- Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì hai góc đồng vị ...?
- Nếu một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng ...? ... với đường thẳng còn lại.

Ví dụ 3. Vẽ hình rồi ghi giả thiết, kết luận của định lý: “Nếu một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia”.

Ví dụ 4. Phát biểu định lý được diễn tả bởi giả thiết, kết luận và hình vẽ sau

GT	$\widehat{AOB}$ và $\widehat{BOC}$ kề bù; $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$; $\widehat{O_3} = \widehat{O_4}$.
KL	$OM \perp ON$.



Dạng : Chứng minh các định lý đơn giản

❶ Ví dụ 1. Cho định lý: "Đường thẳng a cắt đường thẳng b tạo thành bốn góc, nếu một góc là góc vuông thì ba góc còn lại cũng là góc vuông.

- Ghi giả thiết và kết luận của định lý bằng kí hiệu.
- Chứng minh định lý đó.

❷ Ví dụ 2. Hãy viết giả thiết, kết luận bằng kí hiệu và chứng minh định lý: "Hai góc cùng bù một góc thứ ba thì bằng nhau".

BÀI TẬP VẬN DỤNG

✎ Bài 1. Hãy phát biểu phần còn thiếu của giả thiết trong các định lý sau:

- Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng sao cho có một cặp góc đồng vị ...? ... thì hai đường thẳng đó song song.
- Nếu hai đường thẳng xx' và yy' cắt nhau tại O và góc xOy ...? ... thì các góc $\widehat{yOx'}$, $\widehat{x'Oy'}$, $\widehat{y'Ox}$ đều là góc vuông.

✎ Bài 2. Cho định lý: "Một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì tạo thành cặp góc so le trong bằng nhau".

- Hãy chỉ ra giả thiết và kết luận của định lý.
- Vẽ hình minh họa và ghi giả thiết, kết luận bằng kí hiệu.

✎ Bài 3. Cho định lý: "Một đường thẳng cắt hai đường thẳng tạo thành một cặp góc so le trong bằng nhau thì hai đường thẳng đó song song".

- Hãy chỉ ra giả thiết và kết luận của định lý.
- Vẽ hình minh họa và ghi giả thiết, kết luận bằng kí hiệu.

✎ Bài 4. Vẽ hình, viết giả thiết, kết luận của định lý: "Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau".

✎ Bài 5. Vẽ hình, viết giả thiết, kết luận của định lý: "Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau".

✎ Bài 6. Ta gọi hai góc có tổng bằng 90° là hai góc phụ nhau. Hãy viết giả thiết, kết luận bằng kí hiệu và chứng minh định lý: "Hai góc cùng phụ một góc thứ ba thì bằng nhau".

✎ Bài 7. Hãy viết giả thiết, kết luận bằng kí hiệu và chứng minh định lý: "Nếu một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng còn lại".

D BÀI TẬP NÂNG CAO

- ❖ **Câu 1.** Cho định lý: "Tia đối của tia phân giác của một góc là tia phân giác của góc đối đỉnh với góc đó". Hãy vẽ hình, ghi giả thiết, kết luận và chứng minh định lý đó.
- ❖ **Câu 2.** Hãy viết giả thiết, kết luận bằng kí hiệu và chứng minh định lý: "Góc tạo bởi hai tia phân giác của hai góc kề bù là một góc vuông".

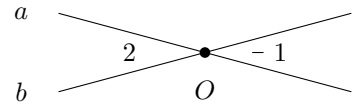
ÔN TẬP CHƯƠNG III

E BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

✍ Bài 8.

Cho hai đường thẳng a và b giao nhau tại O . Biết $\widehat{O_1} = 30^\circ$, số đo của $\widehat{O_2}$ là

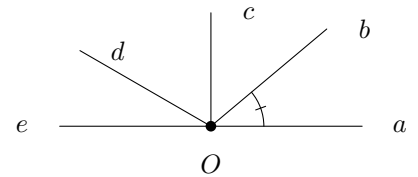
- (A) 35° . (B) 150° . (C) 60° . (D) 30° .



✍ Bài 9.

Góc kề của $\widehat{aOb}$ là

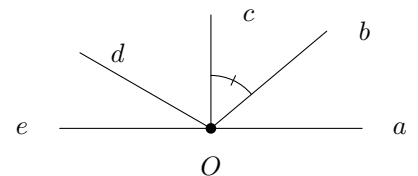
- (A) $\widehat{aOc}$. (B) $\widehat{cOd}$. (C) $\widehat{bOd}$. (D) $\widehat{cOe}$.



✍ Bài 10.

Góc kề của $\widehat{bOc}$ là

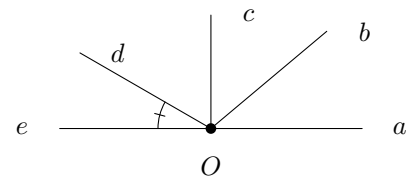
- (A) $\widehat{dOe}$. (B) $\widehat{aOb}$. (C) $\widehat{aOd}$. (D) $\widehat{bOe}$.



✍ Bài 11.

Góc kề bù của $\widehat{eOd}$ là

- (A) $\widehat{dOc}$. (B) $\widehat{dOb}$. (C) $\widehat{dOa}$. (D) $\widehat{eOb}$.



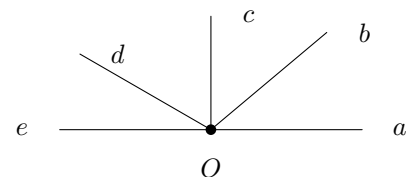
✍ Bài 12. Cho $\widehat{xOy}$ kề bù $\widehat{yOz}$, biết $\widehat{xOy} = 80^\circ$. Số đo của $\widehat{yOz}$ là

- (A) 90° . (B) 100° . (C) 80° . (D) 60° .

✍ Bài 13.

Biết Oc là tia phân giác của $\widehat{aOe}$. Số đo của $\widehat{aOc}$ là

- (A) 90° . (B) 80° . (C) 100° . (D) 45° .



✍ Bài 14. Cho $\widehat{xOy}$ và $\widehat{yOz}$ là hai góc kề nhau, tia Oy nằm trong $\widehat{xOz}$, biết $\widehat{xOy} = 40^\circ$, $\widehat{xOz} = 120^\circ$. Số đo của $\widehat{yOz}$ là

- (A) 100° . (B) 90° . (C) 160° . (D) 80° .

✍ Bài 15. Cho Oc là tia phân giác của $\widehat{aOb}$, biết $\widehat{aOc} = 45^\circ$. Số đo của $\widehat{aOb}$ là

- (A) 90° . (B) 145° . (C) 45° . (D) 135° .

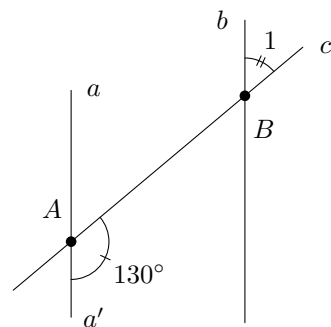
✍ Bài 16. Oa là tia phân giác của $\widehat{bOc}$ thì

- (A) $\widehat{aOb} = \widehat{bOc}$. (B) $\widehat{aOc} = \widehat{bOc}$.
 (C) $\widehat{aOb} = \widehat{aOc} = 2\widehat{bOc}$. (D) $\widehat{aOb} = \widehat{aOc} = \frac{\widehat{bOc}}{2}$.

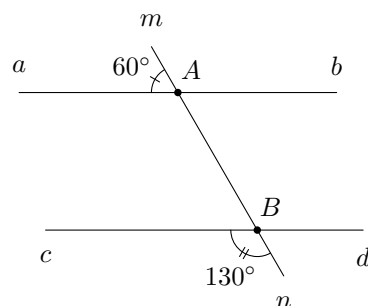
Bài 17.

Quan sát hình vẽ bên. Biết $a \parallel b$, số đo của góc B_1 là

- (A) 40° . (B) 135° . (C) 50° . (D) 70° .

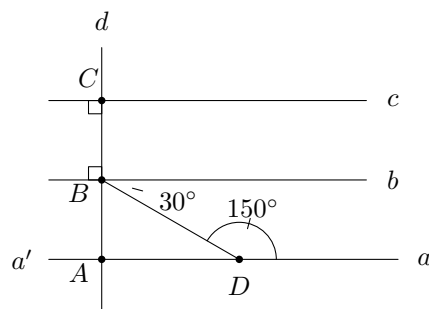
**F BÀI TẬP VẬN DỤNG****Bài 18.**

Cho hình vẽ bên. Chứng minh hai đường thẳng ab và cd song song với nhau.

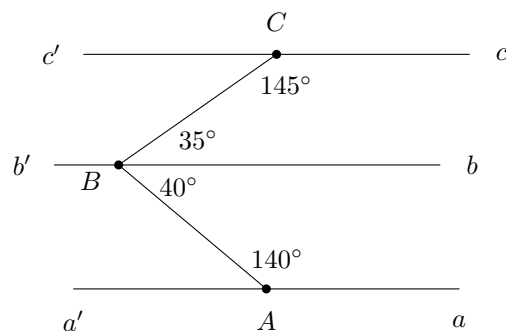
**Bài 19.**

Cho hình vẽ bên.

- Chứng minh $a \parallel b$.
- Chứng minh $b \parallel c$.
- Chứng minh $a \parallel c$.
- Tính số đo $\widehat{a'AB}$.

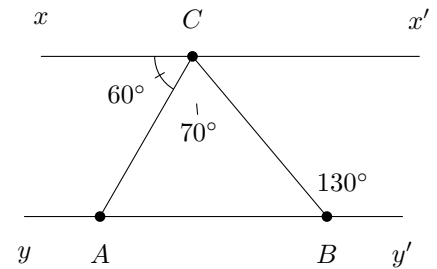
**Bài 20.**

Cho hình vẽ bên. Chứng minh $aa' \parallel cc'$.

**Bài 21.**

Cho hình vẽ bên.

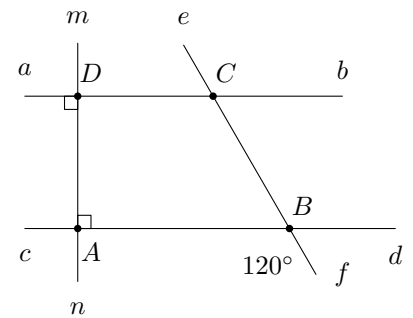
- Chứng minh $xx' \parallel yy'$.
- Tính số đo $\widehat{CAB}$.



Bài 22.

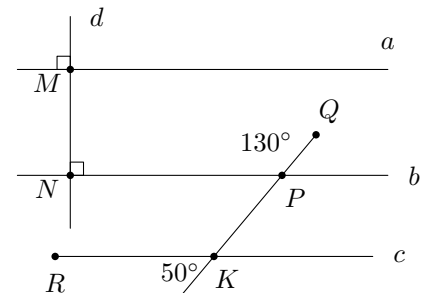
Cho hình vẽ bên.

- Chứng minh $ab \parallel cd$.
- Tính số đo $\widehat{aCe}$.



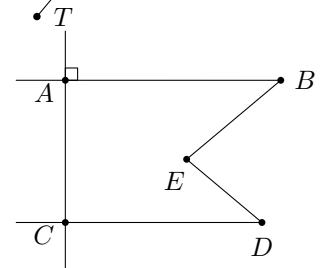
Bài 23.

Cho hình vẽ bên. Chứng minh $a \parallel c$.



Bài 24.

Cho hình vẽ bên. Biết rằng $AB \perp AC$ và $\widehat{BED} = \widehat{ABE} + \widehat{CDE}$. Chứng minh rằng $AC \perp CD$.



Bài 25. Hai đường thẳng cắt nhau tạo thành bốn góc (không kể góc bẹt). Khi đó trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- Nếu bốn góc đó bằng nhau thì hai đường thẳng vuông góc.
- Nếu ba trong bốn góc đó bằng nhau thì hai đường thẳng vuông góc.
- Nếu hai góc kề bằng nhau thì hai đường thẳng vuông góc.

Bài 26. Cho góc MON có số đo là 130° . Vẽ tia OA ở trong góc đó sao cho $\widehat{MOA} = 50^\circ$. Vẽ tia OB là tia đối của tia ON và tia OC là tia phân giác của góc AON . Chứng minh rằng

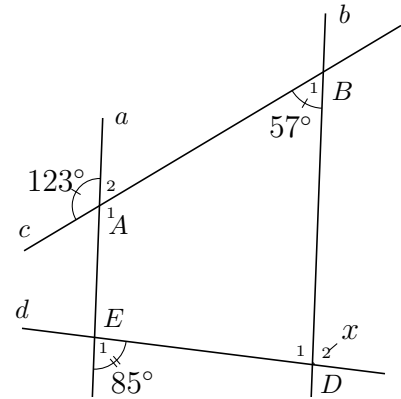
- Tia OM là tia phân giác của $\widehat{AOB}$;
- $OM \perp OC$.

Bài 27. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ$. Từ B vẽ tia Bx sao cho góc CBx bằng và so le trong với góc ACB . Từ C vẽ tia Cy sao cho góc BCy bằng và so le trong với góc ABC . Hãy kể tên các cặp đường thẳng vuông góc.

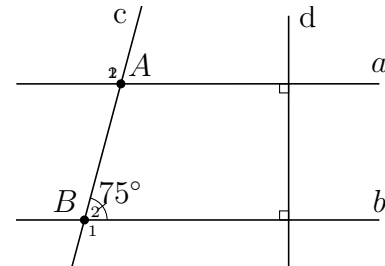
Bài 28.

Trong hình vẽ bên

- a) Đường thẳng a có song song với đường thẳng b không?
Vì sao?
- b) Tính số đo góc x .

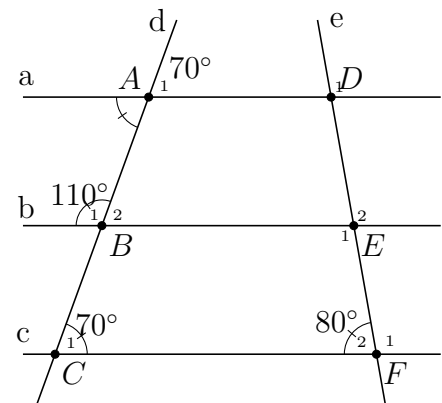
**Bài 29.**

Trong hình vẽ bên, tính tổng $\widehat{A_1} + \widehat{B_1}$.

**Bài 30.**

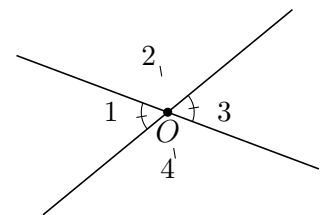
Trong hình vẽ bên, cho biết $\widehat{A_1} = 70^\circ$, $\widehat{B_1} = 110^\circ$, $\widehat{C_1} = 70^\circ$ và $\widehat{F_2} = 80^\circ$.

- a) Ba đường thẳng a, b, c có song song với nhau không? Vì sao?
- b) Tính tổng $\widehat{D_1} + \widehat{E_1} + \widehat{F_1}$.

**Bài 31.**

Trong hình vẽ bên, tính số đo các góc $\widehat{O_1}$; $\widehat{O_2}$; $\widehat{O_3}$; $\widehat{O_4}$ trong các trường hợp sau

- a) $\widehat{O_1} = \frac{1}{2}\widehat{O_2}$;
- b) $\widehat{O_2} - \widehat{O_1} = 40^\circ$;
- c) $\widehat{O_1} + \widehat{O_3} = \frac{1}{2}(\widehat{O_2} + \widehat{O_4})$.



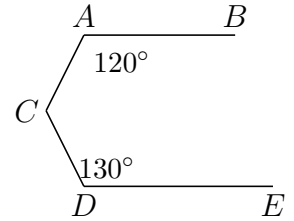
Bài 32. Cho góc AOB tù, vẽ các tia $OM \perp OB$ và $ON \perp OA$.

- a) Chứng minh $\widehat{AOM} = \widehat{BON}$.
- b) Vẽ tia Ox và Oy theo thứ tự là tia phân giác của các góc AOM và BON . Chứng minh $Ox \perp Oy$.

Bài 33. Cho góc nhọn $\widehat{xOy} = \alpha$, điểm A nằm trên tia Oy . Qua A vẽ tia Am . Tính số đo của góc OAm để Am song song với Ox .

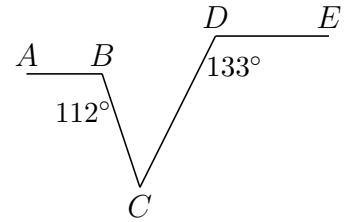
Bài 34.

Trong hình vẽ bên, cho biết $AB \parallel DE$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $\widehat{CDE} = 130^\circ$. Tính $\widehat{BAC} + \widehat{ACD} + \widehat{CDE}$.



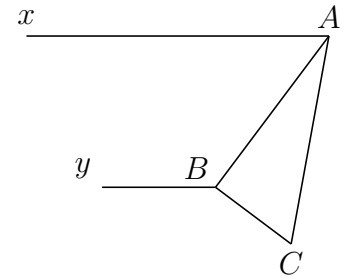
Bài 35.

Trong hình vẽ bên, biết $AB \parallel DE$, tính góc BCD .



Bài 36.

Trong hình vẽ bên, biết $Ax \parallel By$ và $\widehat{CBx} > \widehat{ACB}$. Chứng minh rằng $\widehat{yBC} = \widehat{xAC} + \widehat{ACB}$.

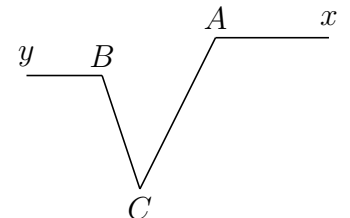


Bài 37.

Trong hình vẽ bên, biết $\widehat{CBx} > \widehat{ACB}$.

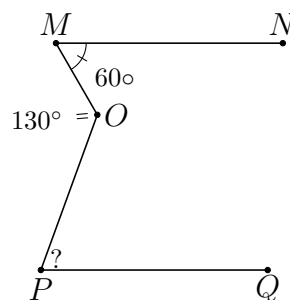
a) Chứng minh rằng nếu $Ax \parallel By$ thì $\widehat{CAx} + \widehat{CBx} - \widehat{ACB} = 180^\circ$.

b) Chứng minh rằng nếu $\widehat{CAx} + \widehat{CBx} - \widehat{ACB} = 180^\circ$ thì $Ax \parallel By$.

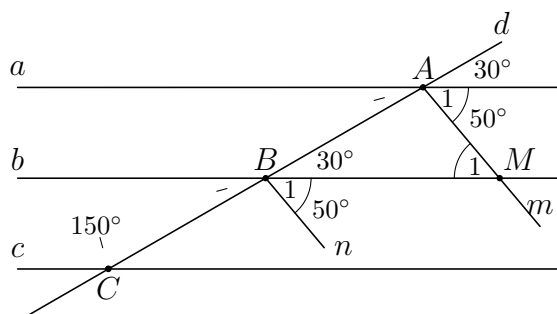


Bài 38. Cho hai đường thẳng xx' và yy' . Gọi A và B là hai điểm lần lượt trên xx' và yy' sao cho hai tia Ax , By cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB . Biết $\widehat{x'AB} + \widehat{yBA} + \widehat{BAx} = 216^\circ$ và $\widehat{BAx} = 4\widehat{x'AB}$. Chứng minh rằng $xx' \parallel yy'$.

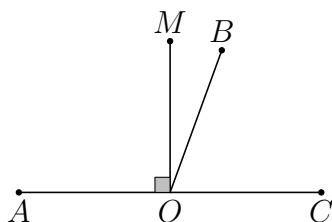
Bài 39. Trong hình vẽ có $\widehat{MOP} = 130^\circ$ và $\widehat{M} = 60^\circ$. Tính số đo của góc P để $MN \parallel PQ$.



Bài 40. Hãy kể tên các cặp đường thẳng song song có trong hình vẽ sau



Bài 41. Cho hình vẽ, biết: số đo của góc AOB lớn hơn số đo của góc BOC là 40° và $OM \perp AC$. Tính số đo của góc MOB .

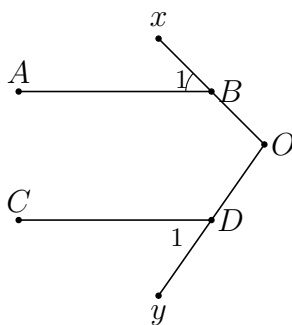


Bài 42. Cho góc AOB có số đo bằng 130° . Vẽ ra ngoài góc đó các tia OM và ON sao cho $OM \perp OA$, $ON \perp OB$.

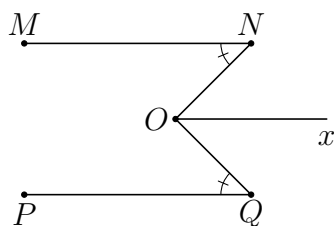
a) Tính số đo góc MON .

b) Vẽ các tia Ox và Oy lần lượt là các tia phân giác của các góc MON và AOB . Chứng minh rằng Ox và Oy là hai tia đối nhau.

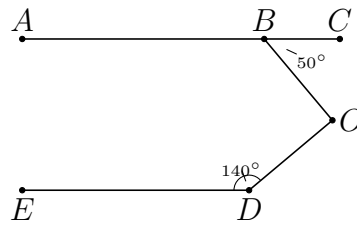
Bài 43. Trong hình vẽ có $\widehat{B_1} = 45^\circ$; $\widehat{D_1} = 55^\circ$ và $AB \parallel CD$. Tính số đo của góc xOy .



Bài 44. Cho hình vẽ, biết $MN \parallel PQ \parallel Ox$ và $\widehat{N} = \widehat{Q}$. Chứng minh rằng tia Ox là tia phân giác của góc NOQ .

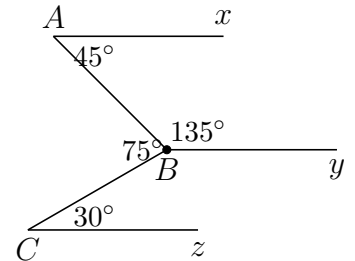


Bài 45. Cho hình vẽ, biết $AB \parallel DE$ và $\widehat{OBC} = 50^\circ$; $\widehat{ODE} = 140^\circ$. Chứng minh rằng tia $OB \perp OD$.

**Bài 46.**

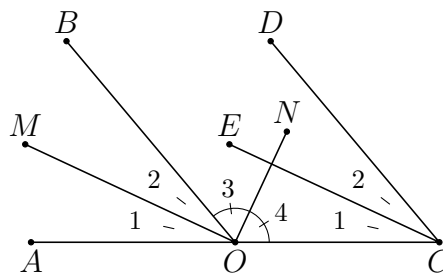
Cho hình vẽ bên. Chứng minh rằng

- a) $Ax \parallel By$;
- b) $Ax \parallel Cz$.



Bài 47. Cho hình vẽ, biết hai góc AOB và BOC kề bù, $CD \parallel OB$. Các tia OM , ON , CE lần lượt là các tia phân giác của các góc AOB , BOC và OCD . Chứng minh rằng

- a) $OM \parallel CE$;
- b) $ON \perp CE$.



Bài 48. Vẽ hình theo thứ tự sau rồi ghi giả thiết, kết luận.

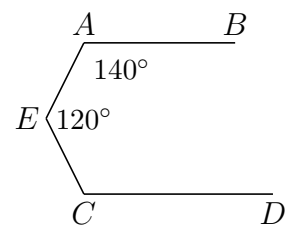
- (i) Cho ba điểm A , B , C không thẳng hàng.
- (ii) Đường thẳng d qua B và vuông góc với đường thẳng AC .
- (iii) Đường thẳng m qua B và song song với đường thẳng AC .

Chứng minh $m \perp d$.

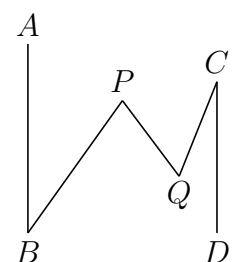
Bài 49.

Trong hình vẽ bên, biết $AB \parallel CD$, $\widehat{BAE} = 140^\circ$ và $\widehat{AEC} = 120^\circ$.

- a) Tính số đo góc ECD .
- b) Chứng minh $\widehat{EAB} + \widehat{ECD} + \widehat{AEC} = 360^\circ$.

**Bài 50.**

Trong hình vẽ bên, biết $AB \parallel CD$, $\widehat{ABP} = 35^\circ$, $\widehat{BPQ} = 80^\circ$, $\widehat{QCD} = 20^\circ$. Tính $\widehat{CQD}$.



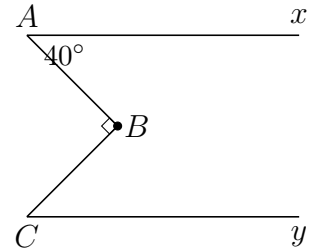
Bài 51. Cho $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ là hai góc có cạnh tương ứng vuông góc. Tính số đo mỗi góc trong các trường hợp sau.

a) $\widehat{A} - \widehat{B} = 30^\circ$;

b) $2\widehat{A} = 3\widehat{B}$.

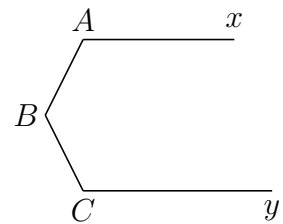
Bài 52.

Trong hình vẽ bên, cho biết $Ax \parallel Cy$, $\widehat{A} = 40^\circ$, $AB \perp BC$. Tính $\widehat{BCy}$.



Bài 53.

Trong hình vẽ bên, cho biết $Ax \parallel Cy$. Chứng minh $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 360^\circ$.



Bài 54. Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$. Trên Oy lấy điểm M , từ M kẻ $MN \perp Ox$ (N thuộc Ox), từ N kẻ $NP \perp Oy$ (P thuộc Oy). Tại P kẻ $PQ \perp Ox$ (Q thuộc Ox), tại Q kẻ $QE \perp Oy$ (E thuộc Oy). Biết $\widehat{OQE} = 40^\circ$, tính số đo của các góc nhọn có trong hình vẽ (trừ $\widehat{xOy}$).

CHƯƠNG 4.



TAM GIÁC BẰNG NHAU

BÀI 12. TỔNG CÁC GÓC TRONG MỘT TAM GIÁC

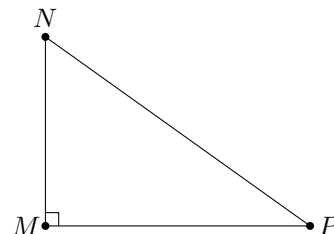
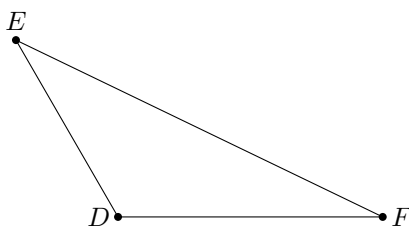
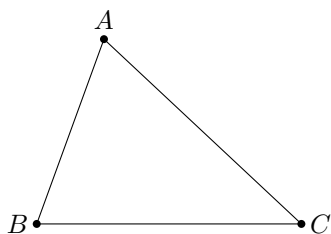
A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 TỔNG CÁC GÓC TRONG MỘT TAM GIÁC

Tổng ba góc trong một tam giác bằng 180° .

Chú ý

- Tam giác ABC có ba góc đều nhọn nên gọi là tam giác nhọn.
- Tam giác DEF có một góc tù nên gọi là tam giác tù.
- Tam giác MNP có một góc vuông nên gọi là tam giác vuông. Trong tam giác MNP vuông tại M , MN và MP là hai cạnh góc vuông, NP là cạnh huyền.



↔ **Nhận xét 12.1.** Hai góc có tổng bằng 90° được gọi là hai góc phụ nhau. Vậy trong tam giác vuông, hai góc nhọn phụ nhau.

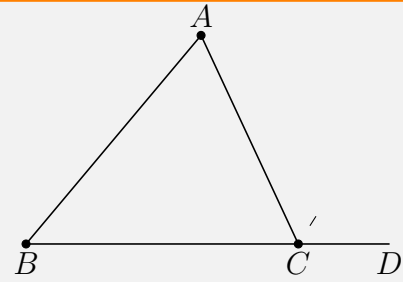
2 GÓC NGOÀI CỦA TAM GIÁC

Góc ngoài của tam giác là góc kề bù với một góc của tam giác.

- ❖ Mỗi góc ngoài của tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó.

$$\widehat{ACD} = \widehat{A} + \widehat{B}.$$

- ❖ Góc ngoài của tam giác lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó.



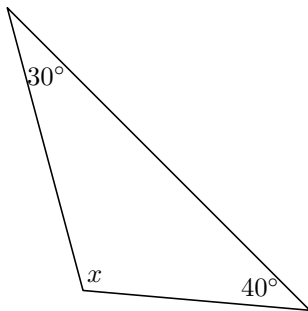
B CÁC DẠNG BÀI TẬP

 Dạng : Tính số đo góc của một tam giác

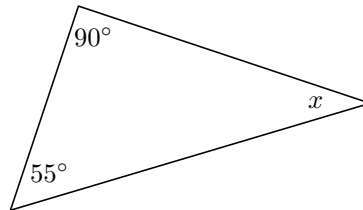
❶ Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$.

- a) Biết $\widehat{A} = 45^\circ$, $\widehat{B} = 80^\circ$. Tính $\widehat{C}$.
- b) Biết $\widehat{A} = 60^\circ$ và $\widehat{B} - \widehat{C} = 10^\circ$. Tính $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.

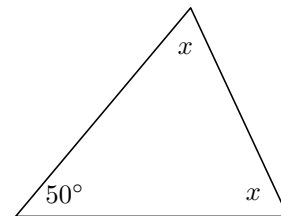
❷ Ví dụ 2. Tính số đo góc x ở các hình sau



Hình a)



Hình b)



Hình c)

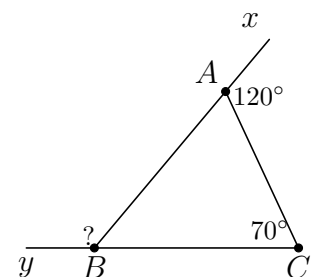
❸ Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 70^\circ$; $\widehat{C} = 40^\circ$. Tia phân giác của góc A cắt BC tại D . Tính $\widehat{ADC}$; $\widehat{ADB}$.

❹ Ví dụ 4. Cho tam giác $\triangle ABC$ có $\widehat{A} - \widehat{B} = 20^\circ$; $\widehat{B} - \widehat{C} = 20^\circ$. Tính số đo góc $\widehat{A}$.

❺ Ví dụ 5. Cho tam giác $\triangle ABC$ vuông tại A . Kẻ $AH \perp BC$, tia phân giác của $\widehat{AHC}$ cắt AC tại D . Biết $\widehat{ABC} = 65^\circ$. Tính số đo $\widehat{ADH}$.

❻ Ví dụ 6.

Cho hình bên, biết $\widehat{C} = 70^\circ$; $\widehat{CAx} = 120^\circ$. Tính số đo góc $\widehat{ABx}$.



 Dạng : Tìm mối quan hệ giữa các góc

 Ghép các góc cần xét và các tam giác, sau đó tìm mối quan hệ giữa các góc.

 So sánh các góc hoặc tìm sự liên hệ giữa chúng.

 **Ví dụ 1.** Cho tam giác nhọn ABC . Vẽ $AH \perp BC$; $BI \perp AC$. Chứng minh $\widehat{IBC} = \widehat{HAC}$.

 **Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi M là điểm nằm bên trong của tam giác đó. Chứng tỏ $\widehat{BMC}$ là góc tù.

 **Ví dụ 3.** Cho góc nhọn tạo bởi các tia phân giác của góc $\widehat{B}$; $\widehat{C}$ của tam giác ABC có số đo bằng 45° . Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông.

 **Ví dụ 4.** Cho tam giác ABC vuông tại A , kẻ $AH \perp BC$. Các tia phân giác của các góc $\widehat{C}$ và $\widehat{BAH}$ cắt nhau tại K . Chứng minh $AK \perp CK$.

 **Ví dụ 5.** Cho $\triangle ABC$, điểm M nằm trong tam giác đó. Tia AM cắt BC tại K . Hãy so sánh các góc

a) $\widehat{CMK}$ với $\widehat{CAK}$;

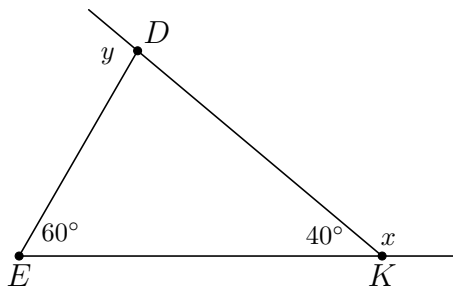
b) $\widehat{CMB}$ với $\widehat{CAB}$.

 **Ví dụ 6.** Cho tam giác ABC có AD là đường phân giác. Chứng minh rằng

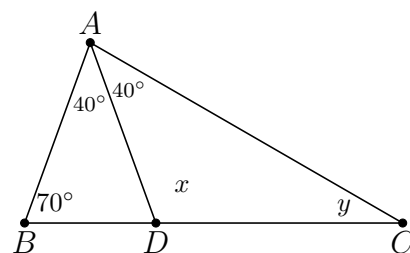
$$\widehat{ADC} - \widehat{ADB} = \widehat{B} = \widehat{C}.$$

 BÀI TẬP VẬN DỤNG

 **Bài 1.** Tính số đo các góc x, y ở các hình dưới

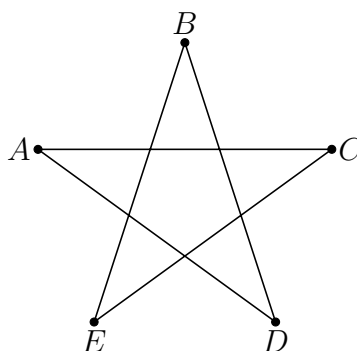


Hình a)



Hình b)

 **Bài 2.** Tính tổng số đo các góc ở đỉnh A, B, C, D, E của một ngôi sao 5 cánh ở hình dưới.



Bài 3. Tính các góc của $\triangle ABC$ biết $\widehat{A} - \widehat{B} = 22^\circ$ và $\widehat{B} - \widehat{C} = 22^\circ$.

Bài 4. Cho tam giác ABC biết $\widehat{A} - \widehat{B} = \widehat{B} - \widehat{C} = 10^\circ$. Tính số đo các góc $\widehat{A}$; $\widehat{B}$; $\widehat{C}$.

Bài 5. Cho tam giác $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 70^\circ$; $\widehat{B} - \widehat{C} = 20^\circ$. Tính số đo các góc $\widehat{B}$; $\widehat{C}$.

Bài 6. Cho tam giác $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 80^\circ$; $\widehat{C} = 40^\circ$. Tia phân giác của $\widehat{B}$ cắt AC tại D . Tính số đo $\widehat{ADB}$.

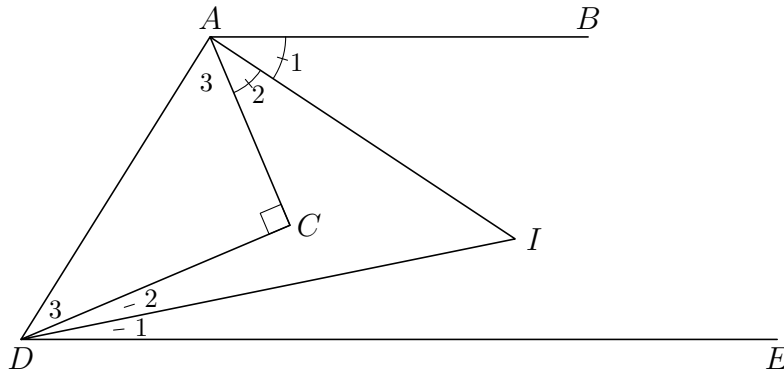
Bài 7. Cho tam giác ABC có điểm M nằm trong tam giác đó. Chứng minh

$$\widehat{BMC} = \widehat{ABM} + \widehat{ACM} + \widehat{BAC}.$$

Bài 8. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} - \widehat{C} = 20^\circ$. Tia phân giác của $\widehat{A}$ cắt BC tại D . Kẻ $AH \perp BC$. Tính $\widehat{HAD}$.

D BÀI TẬP NÂNG CAO

Câu 1. Ở hình dưới ta có $AB \parallel DE$, $\widehat{ACD} = 90^\circ$. Các tia phân giác của $\widehat{CAB}$ và $\widehat{CDE}$ cắt nhau ở I . Tính $\widehat{AID}$.



Câu 2. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} - \widehat{C} = 20^\circ$. Đường phân giác trong của $\widehat{A}$ cắt BC tại D . Tính số đo của $\widehat{ADB}$ và $\widehat{ADC}$.

Câu 3. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} > \widehat{C}$. Đường phân giác ngoài của $\triangle ABC$ tại đỉnh A cắt đường thẳng BC tại E .

a) Chứng minh rằng $\widehat{AEB} = \frac{\widehat{ABC} - \widehat{ACB}}{2}$.

b) Tính $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$, biết rằng $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và $\widehat{AEB} = 15^\circ$.

Câu 4. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Vẽ $AH \perp BC$. Các tia phân giác của các góc $\widehat{C}$ và $\widehat{BAH}$ cắt nhau tại I . Chứng minh rằng $\widehat{AIC} = 90^\circ$.

Câu 5. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Vẽ đường phân giác trong BD của $\widehat{B}$ ($D \in AC$), giả sử $\widehat{ADB} = \alpha$.

a) Chứng minh rằng $45^\circ < \alpha < 90^\circ$.

b) Tính theo α số đo của $\widehat{C}$.

BÀI 13. HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ NHẤT CỦA TAM GIÁC

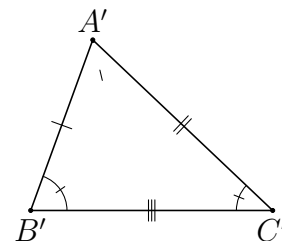
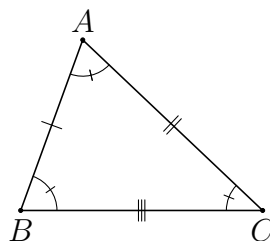
A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh tương ứng bằng nhau, các góc tương ứng bằng nhau.

$$\triangle ABC = \triangle A'B'C'$$

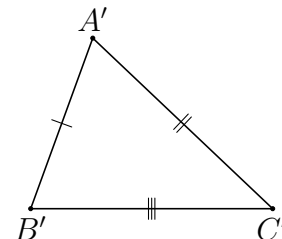
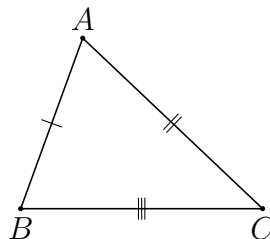
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \\ AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases}$$



2 TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ NHẤT CỦA TAM GIÁC: CẠNH-CẠNH-CẠNH (C.C.C)

Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$$\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C' \text{ (c.c.c)}$$



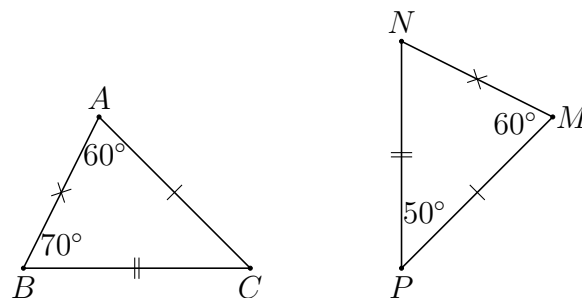
B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng : Xác định các cạnh bằng nhau, các góc bằng nhau của hai tam giác bằng nhau

Căn cứ vào cách viết các đỉnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau theo đúng thứ tự, ta viết được các góc bằng nhau, các đoạn thẳng bằng nhau.

Ví dụ 1.

Hai tam giác trong các hình sau có bằng nhau không? Nếu có, hãy viết kí hiệu sự bằng nhau của hai tam giác đó.



❖ **Nhận xét 13.1.** Qua ví dụ trên, ta thấy ngay được việc có thể giảm bớt một yếu tố giả thiết về góc mà hai tam giác vẫn bằng nhau. Điều này chính là lí do để chúng ta cần thiết đi xem xét “Có bao nhiêu trường hợp bằng nhau của hai tam giác”.

🔴 **Ví dụ 2.** Cho $\triangle ABC = \triangle HIK$.

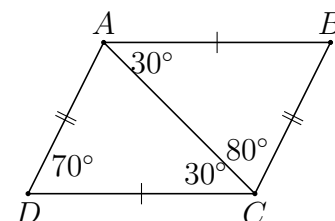
- Tìm cạnh tương ứng với cạnh BC . Tìm góc tương ứng với góc H .
- Tìm các cạnh bằng nhau, tìm các góc bằng nhau.

🔴 **Ví dụ 3.** Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$.

- Viết đẳng thức trên dưới một dạng khác.
- Biết $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm và $MP = 5$ cm. Tính chu vi của mỗi tam giác nói trên.

🔴 **Ví dụ 4.**

Cho hình vẽ, chứng tỏ rằng hai tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle ADC$ bằng nhau.



🔴 **Ví dụ 5.** Cho $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 80^\circ$. Tính số đo của các góc $\hat{B}$, $\hat{C}$ biết rằng tam giác $\triangle ABC = \triangle ACB$.

🔴 **Ví dụ 6.** Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$. Biết có $\hat{A} = 80^\circ$, $\hat{N} = 75^\circ$. Tính số đo các góc còn lại của tam giác.

🔴 **Ví dụ 7.** Cho $\triangle ABC = \triangle DEF = \triangle MNP$ và $AC = 5$ cm; $DE = 6$ cm; $NP = 7$ cm. Xác định độ dài các cạnh còn lại của mỗi tam giác.

🔴 **Ví dụ 8.** Cho $\triangle ABC = \triangle HIK = \triangle MNP$, có $\hat{A} = 70^\circ$; $\hat{I} = 50^\circ$. Xác định các góc còn lại của mỗi tam giác.

🔴 **Ví dụ 9.** Cho $\triangle ABC = \triangle DEF$. Biết $AB + DE = 10$ cm, $EF = 6$ cm, $AC = 7$ cm. Tính chu vi $\triangle ABC$.

📄 **Dạng : Chứng minh hai tam giác bằng nhau**

🔍 Xét hai tam giác;

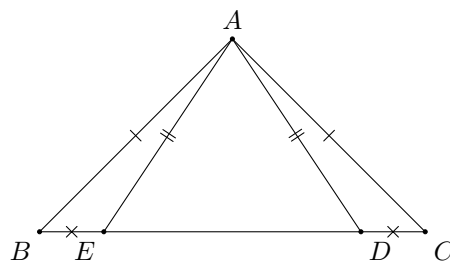
❖ Kiểm tra ba điều kiện bằng nhau: cạnh-cạnh-cạnh;

❖ Kết luận hai tam giác đó bằng nhau.

❖ **Ví dụ 1.** Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh $\triangle ABM = \triangle ACM$.

❖ **Ví dụ 2.**

Tìm các cặp cạnh bằng nhau trong hình vẽ dưới.



❖ **Ví dụ 3.** Cho đoạn thẳng AB . Vẽ hai cung tròn tâm A , tâm B bán kính AB , chúng cắt nhau tại C và D . Chứng minh rằng

a) $\triangle ABC = \triangle ABD$;

b) $\triangle ACD = \triangle BCD$.

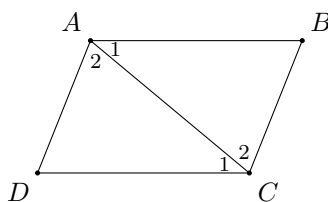
📄 **Dạng :** Sử dụng hai tam giác bằng nhau để chứng minh hai góc bằng nhau

❖ Chọn hai tam giác có hai góc cần chứng minh bằng nhau.

❖ Chứng minh hai tam giác ấy bằng nhau theo trường hợp c.c.c.

❖ Suy ra hai góc tương ứng bằng nhau.

❖ **Ví dụ 1.** Cho hình vẽ dưới, biết $AB = CD$; $AD = BC$. Chứng minh $AB \parallel BC$.



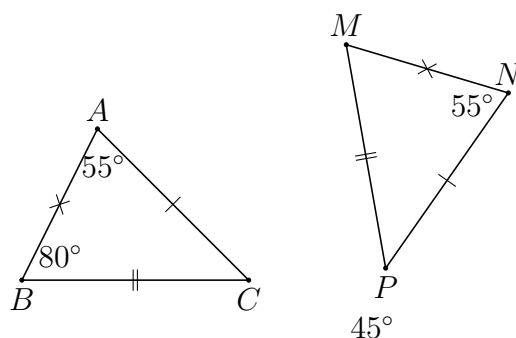
❖ **Ví dụ 2.** Cho đoạn thẳng AB , hai điểm C và D cách đều A , B (C và D khác phía đối với AB). Biết CD cắt AB tại I . Chứng minh CD là tia phân giác của góc ACB .

❖ **Ví dụ 3.** Cho $\triangle ABC$. Vẽ cung tròn tâm A bán kính BC , vẽ cung tròn tâm C bán kính BA , chúng cắt nhau tại D (D và B nằm khác phía đối với AC). Chứng minh rằng $AD \parallel BC$.

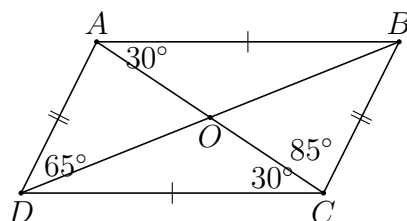
❖ **Ví dụ 4.** Cho góc $\widehat{xOy}$. Vẽ cung tròn tâm O , cung này cắt Ox , Oy theo thứ tự tại A và B . Vẽ các cung tròn tâm A và tâm B có cùng bán kính sao cho chúng cắt nhau tại điểm C . Nối O với C . Chứng minh rằng OC là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

C BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Hai tam giác trong hình sau có bằng nhau không? Nếu có, hãy viết kí hiệu sự bằng nhau của hai tam giác đó.



Bài 2. Hãy chỉ ra các tam giác bằng nhau trong hình sau. Hãy kí hiệu sự bằng nhau của hai tam giác đó.



Bài 3. Tính các góc của $\triangle ABC$ biết $\triangle ABC = \triangle ACB = \triangle BCA$.

Bài 4. Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$. Biết $\widehat{A} = 30^\circ$, $\widehat{N} = 60^\circ$. Tính số đo các góc còn lại của mỗi tam giác đó.

Bài 5. Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$.

- Viết đẳng thức trên dưới một dạng khác.
- Biết $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm và $MP = 5$ cm. Tính chu vi của mỗi tam giác nói trên.

Bài 6. Cho $\triangle ABC = \triangle ADC$.

- Viết đẳng thức trên dưới một dạng khác và thử vẽ hình minh họa.
- Biết $AB = 6$ cm, $DC = 8$ cm và $AC = 10$ cm. Tính chu vi của mỗi tam giác nói trên.

Bài 7. Cho $\triangle ABC = \triangle CDA$.

- Viết đẳng thức trên dưới một dạng khác và thử vẽ hình minh họa.
- Biết $AB = 8$ cm, $AD = 15$ cm và $AC = 16$ cm. Tính chu vi của mỗi tam giác nói trên.

Bài 8. Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$. Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng AM là đường phân giác của góc $\widehat{A}$.

Bài 9. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 40^\circ$, $AB = AC$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính các góc của mỗi tam giác AMB và AMC .

Bài 10. Cho tam giác ABC . Vẽ cung tâm A có bán kính bằng BC , vẽ cung tâm C có bán kính bằng AB , chúng cắt nhau ở M (M và B nằm khác phía đối với AC). Chứng minh rằng $AM \parallel BC$.

Bài 11. Cho tam giác ABC . Vẽ đoạn thẳng AD vuông góc với AB (D và C nằm khác phía đối với AB), $AD = AB$. Vẽ đoạn thẳng AE vuông góc với AC (E và B nằm khác phía đối với AC), $AE = AC$. Biết rằng $DE = BC$. Tính $\widehat{BAC}$.

Bài 12. Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$. Biết $\widehat{A} = 42^\circ$; $\widehat{P} = 54^\circ$. Tính số đo góc N .

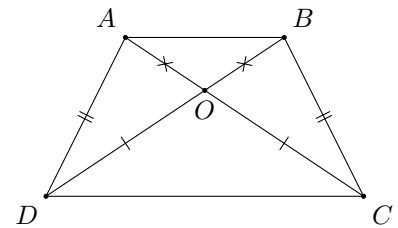
Bài 13. Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$, biết $AC = 6$ cm; $AB + BC = 8$ cm; $MN - NP = 2$ cm. Tính số đo các cạnh của $\triangle MNP$.

Bài 14. Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$. Biết $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm, $NP = 7$ cm. Tính chu vi của $\triangle MNP$.

Bài 15.

Cho hình vẽ bên

- Tìm các cặp tam giác bằng nhau theo trường hợp cạnh - cạnh - cạnh.
- Chứng minh $AB \parallel CD$.



D BÀI TẬP NÂNG CAO

Câu 1. Cho $\triangle ABC = \triangle DEF$; biết $\widehat{B} - \widehat{C} = 10^\circ$; $\widehat{E} + \widehat{F} = 120^\circ$.

Tính số đo các góc của hai tam giác.

Câu 2. Cho góc xOy . Trên tia Ox lấy điểm A , trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OA = OB$. Lấy hai điểm M, N đều thuộc miền trong của góc xOy sao cho $MA = MB$, $NA = NB$. Chứng minh rằng

- OM là tia phân giác của góc xOy ;
- Ba điểm O, M, N thẳng hàng.

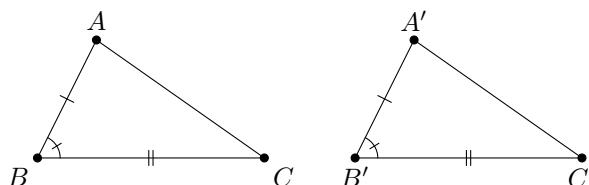
BÀI 14. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ HAI VÀ THỨ BA CỦA TAM GIÁC

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ HAI CỦA TAM GIÁC: CẠNH - GÓC - CẠNH (C.G.C)

Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

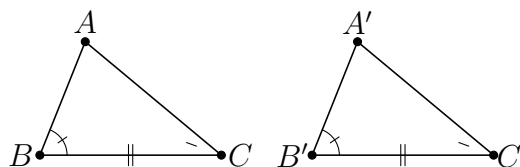
$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ BC = B'C' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C' \text{ (c.g.c).}$$



2 TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ BA CỦA TAM GIÁC: GÓC-CẠNH-GÓC (G.C.G)

Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B} = \widehat{B'} \\ BC = B'C' \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C' \text{ (g.c.g)}$$



B CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng : Chứng minh hai tam giác bằng nhau

- Xét hai tam giác;
- Kiểm tra ba điều kiện bằng nhau: cạnh - góc - cạnh, góc - cạnh - góc;
- Kết luận hai tam giác bằng nhau.

Ví dụ 1. Cho góc xOy khác góc bẹt. Trên cạnh Ox lấy hai điểm A và B , trên cạnh Oy lấy hai điểm C và D sao cho $OA = OC$; $OB = OD$.

- a) Chứng minh $\triangle OAD = \triangle OCB$. b) Chứng minh $\triangle ACD = \triangle CAB$.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$. Gọi AD là đường phân giác góc A của $\triangle ABC$. Gọi ME là đường phân giác góc M của $\triangle MNP$. Chứng minh $\triangle ABD = \triangle MNE$.

Ví dụ 3. Cho góc nhọn xOy có tia Oz là tia phân giác. Qua điểm A thuộc tia Ox , vẽ đường thẳng song song với Oy cắt Oz tại M . Qua M vẽ đường thẳng song song với Ox cắt Oy tại B .

- a) Chứng minh $\triangle OAM = \triangle MBO$.

b) Từ M vẽ $MH \perp Ox$; $MK \perp Oy$. Chứng minh $MH = MK$.

Dạng : Sử dụng các trường hợp bằng nhau của hai tam giác để chứng minh hai góc bằng nhau, hai đoạn thẳng bằng nhau

-  Chọn hai tam giác có cạnh (góc) là hai đoạn thẳng (góc) cần chứng minh bằng nhau.
-  Chứng minh hai tam giác ấy bằng nhau theo trường hợp (c.g.c), (g.c.g).
-  Suy ra hai cạnh (góc) tương ứng bằng nhau.

🔴 Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$. Gọi O và G lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và NP . Chứng minh $AO = MG$.

❶ Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có M và N lần lượt là trung điểm của cạnh AB và AC . Trên tia đối của tia NB lấy điểm D sao cho $ND = NB$. Trên tia đối của tia MC lấy điểm E sao cho $ME = MC$. Chứng minh

- a) $AD = BC$. b) $AE \parallel BC$. c) A là trung điểm của DE .

❶ Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 2 \cdot \widehat{C}$. Tia phân giác của góc B cắt AC tại D . Trên tia đối của tia BD lấy điểm N sao cho $BN = AC$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm P sao cho $CP = AB$.

- a) Chứng minh $AN = AP$.
b) Tìm điều kiện của góc ACB để $AN \perp AP$.

🔴 **Ví dụ 4.** Cho tam giác ABC có $BC = 5$ cm. Trên tia AB lấy hai điểm K và D sao cho $AK = BD$. Vẽ $KI \parallel BC$, $DE \parallel BC$ ($I, E \in AC$).

- a) Chứng minh $AI = CE$. b) Tính độ dài $DE + KI$.

 BÀI TẬP VẬN DỤNG

 Bài 1. Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AB . Chứng minh rằng $BM = CN$.

 **Bài 2.** Cho tam giác nhọn ABC có M là trung điểm BC . Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Trên tia đối của tia HA lấy điểm E sao cho $HE = HA$. Trên tia đối của tia MA lấy điểm F sao cho $MF = MA$. Chứng minh rằng

- a) $BE = CF$; b) $ME = MF$.

 **Bài 3.** Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Tia phân giác góc B cắt AC tại D . Trên tia BC lấy M sao cho $BM = BA$. Chứng minh $DM \perp BC$.

 Bài 4. Qua trung điểm M của đoạn AB kẻ đường thẳng xx' vuông góc với AB . Trên tia Mx lấy điểm C và D sao cho $MC < MD$. Trên tia Mx' lấy E . Chứng minh

- a) $AC = BC$; b) $\triangle ACD = \triangle BCD$; c) $\widehat{EAD} = \widehat{EBD}$.

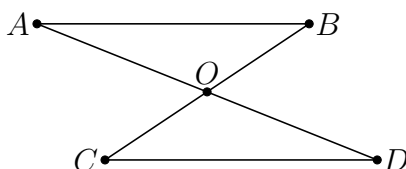
Bài 5. Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$) có M là trung điểm của BC . Vẽ BI và CK vuông góc với đường thẳng AM . Chứng minh rằng:

a) $BI = CK$.

b) $CI \parallel BK$.

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90^\circ$. Tia phân giác của góc $\widehat{B}$ và góc $\widehat{C}$ cắt cạnh AC , AB lần lượt tại D , E và cắt nhau tại O . Chứng minh rằng $BE + CD = BC$.

Bài 7. Cho hình vẽ sau, trong đó $AB \parallel CD$, $AB = CD$. Chứng minh rằng: $OA = OD$, $OB = OC$.



Bài 8. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = AC$. Lấy M thuộc BC ($BM > MC$). Kẻ BD và CE vuông góc với đường thẳng AM . Chứng minh rằng

a) $\triangle ABD = \triangle CAE$.

b) $BD - CE = DE$.

Bài 9. Cho hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn. Lấy I bất kỳ trên AD . Tia IO cắt BC tại K . Chứng minh $DI = CK$, $OI = OK$.

Bài 10. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của AB . Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt AC tại N , qua N kẻ đường thẳng song song với AB cắt BC tại E . Chứng minh rằng $AM = NE$, $AN = NC$.

D BÀI TẬP NÂNG CAO

Câu 1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Kẻ $AH \perp BC$. Kẻ HP vuông góc với AB và kéo dài để có $PE = PH$. Kẻ HQ vuông góc với AC và kéo dài để có $QF = QH$. Chứng minh rằng

a) $\triangle APE = \triangle APH$, $\triangle AQH = \triangle AQF$;

b) Ba điểm E , A , F thẳng hàng và A là trung điểm của EF ;

c) $BE \parallel CF$.

Câu 2. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn. Vẽ đoạn thẳng $AM \perp AB$; $AM = AB$ sao cho M và C khác phía đối với đường thẳng AB . Vẽ đoạn thẳng $AN \perp AC$ và $AN = AC$ sao cho N và B khác phía đối với đường thẳng AC . Gọi I , K lần lượt là trung điểm của BN và CM . Chứng minh

a) $\triangle AMC = \triangle ABN$.

b) $MC = BN$ và $MC \perp BN$.

c) $AI = AK$ và $AI \perp AK$.

Câu 3. Cho tam giác ABC có $AB = AC$ và M là trung điểm của BC .

a) Chứng minh AM là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

b) Chứng minh $AM \perp BC$.

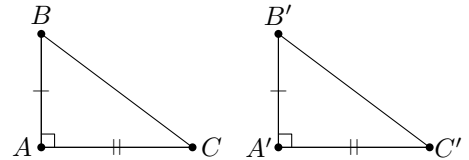
c) Qua C kẻ đường thẳng d song song với AB cắt tia AM tại N . Chứng minh M là trung điểm của AN .

BÀI 15. CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC VUÔNG

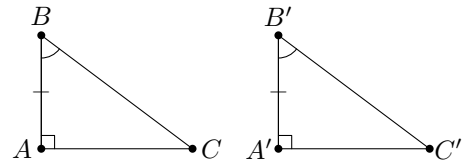
A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 BA TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC VUÔNG

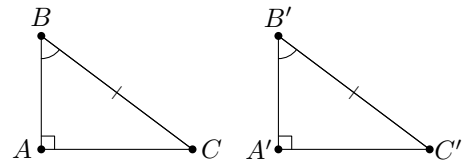
Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này lần lượt bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.



Nếu một cạnh góc vuông và góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

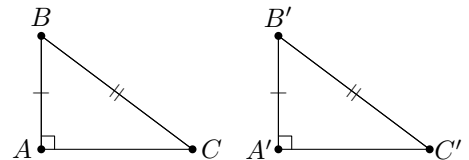


Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.



2 TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU ĐẶC BIỆT CỦA TAM GIÁC VUÔNG

Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.



B CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng : Chứng minh hai tam giác vuông bằng nhau

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = AC$. Qua A kẻ đường thẳng d cắt BC . Vẽ BM, CN cùng vuông góc với d . Chứng minh rằng $\triangle BAM = \triangle ACN$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC tại A có $AB = AC$. Trên cạnh BC lấy hai điểm D và E sao cho $BD = CE < \frac{BC}{2}$. Đường thẳng kẻ từ D vuông góc với BC cắt AB ở M , đường thẳng kẻ từ E vuông góc với BC cắt AC tại N . Chứng minh rằng

a) $\triangle DBM = \triangle ECN$;

b) $\triangle DME = \triangle END$;

c) Tam giác ADE có $AD = AE$.

Dạng : Sử dụng trường hợp bằng nhau của tam giác vuông để chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau

-  Chọn hai tam giác vuông có cạnh là hai đoạn thẳng (hoặc có góc là hai góc) cần chứng minh bằng nhau.
-  Chứng minh hai tam giác ấy bằng nhau.
-  Suy ra điều phải chứng minh.

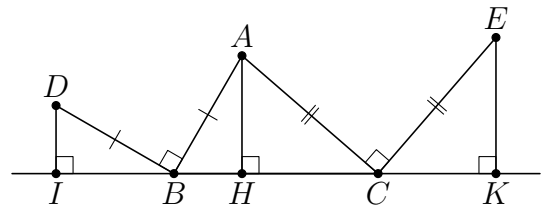
Ví dụ 1. Gọi M là trung điểm của cạnh BC của $\triangle ABC$. Vẽ BI, CK vuông góc với đường thẳng AM . Chứng minh $BI = CK$.

Ví dụ 2. Cho góc nhọn xOy , lấy điểm A thuộc Ox , điểm B thuộc Oy sao cho $OA = OB$. Vẽ AC vuông góc với Oy ($C \in Oy$), BD vuông góc với Ox ($D \in Ox$).

- a) Chứng minh $AC = BD$;
- b) Gọi I là giao điểm AC và BD . Chứng tỏ OI là tia phân giác của xOy .

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ có AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Vẽ BD vuông góc và bằng AB , vẽ CE vuông góc và bằng AC . Vẽ DI, EK vuông góc với đường thẳng BC như hình bên. Chứng minh rằng

- a) $BI = AH$;
- b) $BI = CK$;
- c) $DI + EK = BC$.



Ví dụ 4. Cho góc xOy khác góc bẹt. Lấy điểm A trên tia Ox , điểm B trên tia Oy sao cho $OA = OB$. Dựng đường thẳng vuông góc với Ox tại A , dựng đường thẳng vuông góc với Oy tại B , hai đường này cắt nhau tại C .

- a) Chứng minh rằng OC là tia phân giác của góc xOy ;
- b) Gọi I là điểm bất kì thuộc tia OC . Gọi M, N theo thứ tự là chân các đường vuông góc hạ từ I đến Ox, Oy . Chứng minh rằng $IM = IN$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?
Cho hai tam giác ABC và DEF có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$.

- a) Nếu $BC = EF$ và $AC = DE$ thì hai tam giác trên bằng nhau.
- b) Nếu $BC = EF$ và $\widehat{B} = \widehat{F}$ thì hai tam giác trên bằng nhau.
- c) Nếu $AB = DE$ và $\widehat{B} = \widehat{E}$ thì hai tam giác trên bằng nhau.

d) Nếu $AC = DE$ và $\widehat{B} = \widehat{E}$ thì hai tam giác trên bằng nhau.

 **Bài 2.** Cho tam giác ABC có $AB = AC$, $\hat{A} < 90^\circ$. Kẻ $BD \perp AC$ ($D \in AC$), kẻ $CE \perp AB$ ($E \in AB$). Gọi I là giao điểm của BD và CE . Chứng minh rằng

- a) $AD = AE$; b) AI là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

 **Bài 3.** Cho tam giác ABC có $AB = AC$, $\hat{A} < 90^\circ$. Kẻ $BH \perp AC$ ($H \in AC$), $CK \perp AB$ ($K \in AB$). BH cắt CK tại O . Chứng minh rằng

- a) $AH = AK$; b) $\triangle BKO = \triangle CHO$;

c) AO là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

 Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = AC$. Qua A kẻ đường thẳng xy bất kì không cắt đoạn BC . Kẻ BM và CN vuông góc với xy .

- Chứng minh $\triangle ACN = \triangle BAM$;
- Chứng minh $CN + BM = MN$;

 **Bài 5.** Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$, Kẻ $CH \perp AB$ ($H \in AB$). Kẻ đường thẳng d qua C vuông góc với AC . Kẻ $BK \perp d$ ($K \in d$). Chứng minh $CK = CH$.

 BÀI TẬP NÂNG CAO

Câu 1. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ nhọn. Vẽ phía ngoài $\triangle ABC$, $\triangle ABD$ vuông tại B , $BA = BD$ và $\triangle ACE$ vuông tại C , $CA = CE$. Vẽ $DI \perp BC$ và $EK \perp BC$ ($I, K \in BC$). Chứng minh

- a) $BI = CK$. b) $BC = ID + EK$.

Câu 2. Cho tam giác ABC . Các đường phân giác của các góc ngoài tại B và C cắt nhau tại I . Chứng minh rằng AI là tia phân giác của góc A .

Câu 3. Cho tam giác ABC . Dựng ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác ABD và ACE là các tam giác vuông tại đỉnh A và thỏa mãn $AB = AD, AC = AE$. Kẻ $AH \perp BC$. Đường thẳng AH cắt DE tại M . Vẽ DI và EK cùng vuông góc với AH . Chứng minh rằng

- a) $DI = EK = AH$; b) M là trung điểm của DE .

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC . Về phía ngoài $\triangle ABC$, vẽ các tam giác vuông tại A là tam giác ABD và tam giác ACE thỏa mãn $AB = AD, AC = AE$. Kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Gọi I là giao điểm HA và DE .

- a) Kẻ DN và EM vuông góc với HA ($N, M \in HA$). Chứng minh rằng $DN = EM$, $EM = AH$.
- b) Chứng minh rằng $DI = IE$.

❖ **Câu 5.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = AC$, M là trung điểm của BC , điểm E nằm giữa M và C . Kẻ BH , CK vuông góc với AE (H và K thuộc đường thẳng AE). Chứng minh rằng

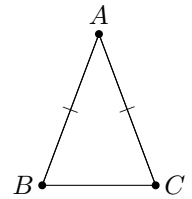
- a) $BH = AK$;
- b) $\triangle MBH = \triangle MAK$;
- c) Tam giác MHK là tam giác vuông tại M và $MH = MK$.

BÀI 16. TAM GIÁC CÂN. ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA ĐOẠN THẲNG

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

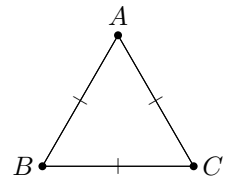
1 TAM GIÁC CÂN VÀ TÍNH CHẤT

Tam giác cân là tam giác có hai cạnh bằng nhau.



Trong một tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau. Ngược lại, một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

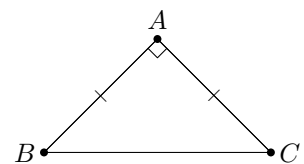
Tam giác có ba cạnh bằng nhau là tam giác đều



Trong một tam giác đều, ba góc bằng nhau và bằng 60° . Ngược lại, một tam giác có ba góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.

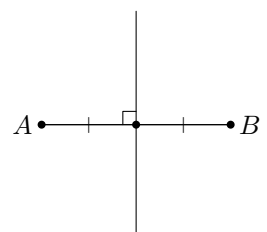
Chú ý

Tam giác vừa vuông vừa cân gọi là tam giác vuông cân. Trong tam giác vuông cân, mỗi góc ở đáy có số đo 45° .



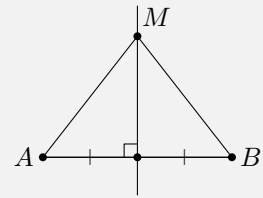
2 ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG

Đường thẳng vuông góc với một đoạn thẳng tại trung điểm của nó được gọi là đường trung trực của đoạn thẳng đó.



Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai mút của đoạn thẳng đó.

Nếu M thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB thì $MA = MB$.



❖ **Nhận xét 16.1.** Đường trung trực của đoạn thẳng AB là tập hợp tất cả các điểm cách đều hai mút của đoạn thẳng đó.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng : Sử dụng tính chất của tam giác cân, tam giác đều, tam giác vuông cân để tính số đo góc.

Sử dụng tính chất về hai góc ở đáy tam giác cân bằng nhau, mỗi góc của tam giác đều bằng 60° , góc nhọn của tam giác vuông cân là 45° .

❶ **Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{B} = 50^\circ$. Tính số đo các góc $\widehat{C}$, $\widehat{A}$.

❷ **Ví dụ 2.** Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$, $\widehat{B} = 2\widehat{A}$. Tính số đo các góc của tam giác ABC .

❸ **Ví dụ 3.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Vẽ tam giác đều ABD ở phía ngoài tam giác ABC . Tính số đo các góc của tam giác BDC .

❹ **Ví dụ 4.** Cho $\triangle ABC$ biết $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ và $BC = 2AB$. Tính số đo các góc của tam giác ABC .

Dạng : Sử dụng tính chất tam giác cân để suy ra hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau

Sử dụng định nghĩa, tính chất của tam giác cân để suy ra hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau.

Góc ngoài ở đỉnh tam giác cân bằng hai lần góc ở đáy.

❶ **Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC có các tia phân giác trong của các góc B và C cắt nhau tại I . Qua I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại M, N . Chứng minh $MN = MB + NC$.

❷ **Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC có tia phân giác góc $\widehat{A}$ cắt BC tại D . Trên tia đối của tia AC lấy điểm M sao cho $AM = AB$. Chứng tỏ $AD \parallel BM$.

❸ **Ví dụ 3.** Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = \widehat{C} = 40^\circ$. Kẻ BD là tia phân giác của góc B ($D \in AC$). Chứng minh $AD + BD = BC$.

❹ **Ví dụ 4.** Cho tam giác ABC ($AB < AC$). Tia phân giác của góc A cắt đường trung trực của BC tại I . Kẻ IH vuông góc với AB ($H \in AB$), kẻ IK vuông góc với AC ($K \in AC$). Chứng minh rằng

a) $IB = IC$;

b) $AH = AK$;

c) $BH = CK$.

 Dạng : Nhận biết một tam giác cân, một tam giác đều

❶ Ví dụ 1. Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh AB, AC lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $AM = AN$. Gọi giao điểm BN và CM là I . Chứng minh tam giác BIC cân.

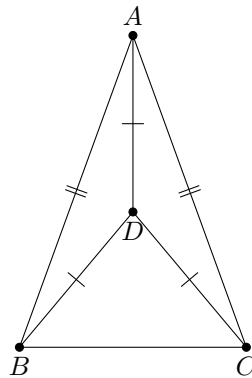
❷ Ví dụ 2. Cho tam giác ABC đều. Trên cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy M, N, P sao cho $AM = BN = CP$. Chứng minh tam giác MNP là tam giác đều.

❸ Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ, \widehat{B} > \widehat{C}$. K là trung điểm của BC , đường trung trực của cạnh BC cắt AC tại D . Kẻ $AH \perp BC$ tại H , AH cắt BD tại E . Chứng minh tam giác ADE đều.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

✎ Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm D, E sao cho $AD = AE$. Chứng minh $DE \parallel BC$.

✎ Bài 2. Kể tên các tam giác cân có trong hình 152.



✎ Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A , có $\widehat{B} = \widehat{A} + 30^\circ$. Tính số đo của góc $\widehat{A}$.

✎ Bài 4. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 50^\circ$. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D , trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = BA, CE = CA$. Tính góc $\widehat{DAE}$.

✎ Bài 5. Cho tam giác ABC đều. Vẽ bên ngoài tam giác này hai tam giác vuông cân: $\triangle ABD$ vuông cân tại B , $\triangle ACE$ vuông cân tại C . Tính số đo góc nhọn của $\triangle ADE$.

✎ Bài 6. Cho $\triangle ABC$ đều. Lấy điểm D trên cạnh BC sao cho $BC = 3BD$. Vẽ $DE \perp BC$ ($E \in AB$), vẽ $DF \perp AC$ ($F \in AC$). Chứng minh $\triangle DEF$ là tam giác đều.

✎ Bài 7. Cho góc xOy khác góc bẹt, lấy điểm A thuộc tia Ox , điểm B thuộc tia Oy sao cho $OA = OB$. Đường vuông góc với OA tại A , đường vuông góc với OB tại B cắt nhau ở C . Gọi D là giao điểm của BC và Ox , gọi E là giao điểm của AC và Oy . Chứng minh rằng:

- OC là tia phân giác của góc xOy ;
- Tam giác ODE là tam giác cân;
- OC vuông góc với DE .

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A . Từ A kẻ $AH \perp BC$. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$. Kẻ $EK \perp AC$ ($K \in AC$). Chứng minh rằng $AK = AH$.

Bài 9. Cho $\widehat{xOy}$ nhọn, M là điểm nằm trong góc đó.

- Vẽ các điểm A và B sao cho Ox là đường trung trực của MA và Oy là đường trung trực của MB .
- Chứng minh rằng điểm O thuộc đường trung trực của AB .
- Tính số đo của góc $\widehat{AOB}$, biết $\widehat{xOy} = \alpha$.
- Hãy xác định vị trí của điểm O khi $\widehat{xOy} = 90^\circ$.

D BÀI TẬP NÂNG CAO

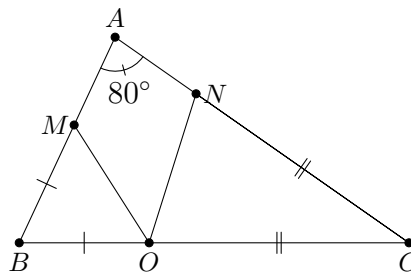
Câu 1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Trên cạnh BC lấy hai điểm M và N sao cho $BM = BA$, $CN = CA$. Tính số đo của góc $\widehat{MAN}$.

Câu 2. Cho tam giác ABC có $BC = 2AB$. Gọi M là trung điểm của BC và D là trung điểm của BM . Chứng minh rằng $AC = 2AD$.

Câu 3. Cho tam giác ABC cân tại A . Trên tia đối của tia BC lấy điểm D , trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Kẻ $BH \perp AD$ ($H \in AD$), kẻ $CK \perp AE$ ($K \in AE$). Chứng minh rằng

- $BH = CK$;
- $\triangle AHB = \triangle AKC$;
- BC song song với HK .

Câu 4. Cho tam giác ABC như hình bên dưới, có $\widehat{A} = 80^\circ$. Biết $BO = BM$, $CO = CN$. Tính số đo góc $\widehat{MON}$.



ÔN TẬP CHƯƠNG IV

E CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng : Tính số đo góc

Vận dụng tính chất

- Tổng ba góc trong của một tam giác, góc ngoài của tam giác.
- Tam giác cân, tam giác đều, tam giác vuông, tam giác vuông cân.

● **Ví dụ 1.** Cho $\triangle ABC$. Tính $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$.

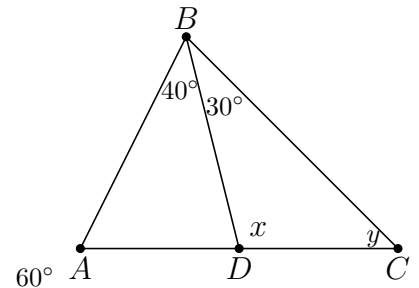
● **Ví dụ 2.** Tính tổng ba góc ngoài của một tam giác.

● **Ví dụ 3.** Cho $\triangle ABC$, biết $\widehat{A} = 45^\circ$ và $\widehat{B} = 80^\circ$. Tính số đo của góc $\widehat{C}$.

● **Ví dụ 4.** Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 60^\circ$ và $\widehat{B} - \widehat{C} = 10^\circ$. Tính $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.

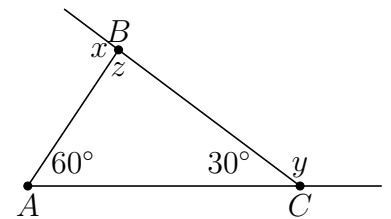
● **Ví dụ 5.**

Tính số đo x và y ở hình vẽ bên.



● **Ví dụ 6.**

Tính số đo x , y và z ở hình vẽ bên



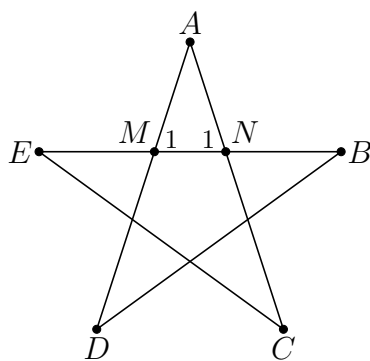
● **Ví dụ 7.** Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 80^\circ$, $\widehat{C} = 30^\circ$. Tia phân giác của góc A cắt BC ở D . Tính số đo các góc $\widehat{A}$, $\widehat{ADB}$, $\widehat{ADC}$.

● **Ví dụ 8.** Cho $\triangle ABC$, điểm M nằm trong tam giác đó. Tia AM cắt BC tại K . Hãy so sánh các góc:

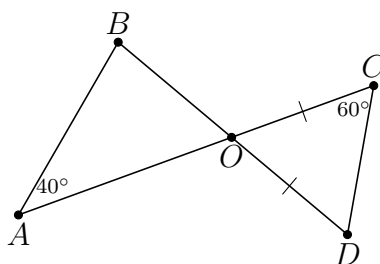
a) $\widehat{CMK}$ với $\widehat{CAK}$.

b) $\widehat{CMB}$ với $\widehat{CAB}$.

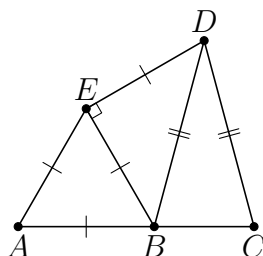
● **Ví dụ 9.** Cho hình sau. Tính tổng của các góc $\widehat{A}$; $\widehat{B}$; $\widehat{C}$; $\widehat{D}$; $\widehat{E}$.



● **Ví dụ 10.** Cho hình sau, biết $\widehat{A} = 40^\circ$; $\widehat{C} = 60^\circ$; $OC = OD$. Tính số đo góc $\widehat{B}$.



● **Ví dụ 11.** Chi hình sau, biết $AB = BE = EA = ED$; $BD = DC$; $\widehat{BED} = 90^\circ$. Tính số đo góc $\widehat{BDC}$.



Dạng : Chứng minh hai tam giác bằng nhau

Vận dụng tính chất

Dùng dấu hiệu nhận biết hai tam giác bằng nhau (c.c.c); (c.g.c); (g.c.g).

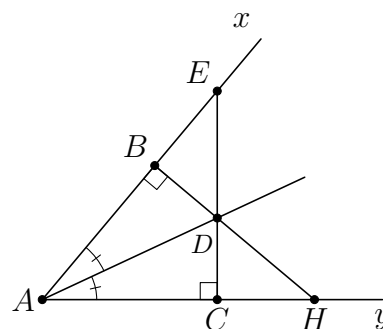
Dùng dấu hiệu nhận biết hai tam giác vuông bằng nhau.

● **Ví dụ 1.**

Cho hình bên, biết $\widehat{EAD} = \widehat{HAD}$, $HB \perp AE$, $EC \perp AH$.

Chứng minh rằng

- $\triangle ABD = \triangle ACD$;
- $\triangle DBE = \triangle DCH$;
- $\triangle ABH = \triangle ACE$.



● **Ví dụ 2.** Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A. Kẻ tia phân giác của góc A cắt BC tại H. Trên cạnh AB, AC lấy N, M sao cho $BN = AM$. Chứng minh rằng

- a) $\triangle AHN = \triangle CHM$; b) $\triangle AHM = \triangle BHN$; c) $\triangle MHN$ vuông cân.

 **Dạng : Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau**

-  Ghép hai đoạn thẳng hoặc hai góc vào hai tam giác và chứng minh hai tam giác đó bằng nhau.
-  Để chứng minh hai góc bằng nhau, bạn có thể chứng tỏ hai góc đó cùng phụ hoặc cùng bù với góc thứ ba.

❶ Ví dụ 1. Cho $\widehat{xOy}$ (khác góc bẹt). Trên tia Ox lấy điểm A , trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OA = OB$. Tia phân giác Oz của góc $\widehat{xOy}$ cắt AB tại C .

- a) Chứng minh $\triangle AOC = \triangle BOC$, từ đó suy ra $OC \perp AB$;
b) Trên tia đối của tia CO lấy điểm D sao cho $CD = CO$. Chứng minh $AD = BO$ và $AD \parallel BO$.

❷ Ví dụ 2. Cho tam giác ABC , gọi D và E lần lượt là trung điểm của AB và AC . Trên tia đối của tia ED lấy điểm F sao cho $DE = EF$. Chứng minh rằng

- a) $BD = CF$ và $BD \parallel CF$; b) $\triangle BCD = \triangle FDC$;
c) $DE \parallel BC$ và $DE = \frac{1}{2}BC$; d) $\widehat{BDC} = \widehat{DAF}$.

❸ Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ nhọn. Kẻ $BD \perp AC$ ($D \in AC$), $CE \perp AB$ ($E \in AB$). Trên tia đối của tia BD lấy điểm H sao cho $BH = AC$. Trên tia đối của tia CE lấy điểm K sao cho $CK = AB$. Chứng minh rằng

- a) $\widehat{ABH} = \widehat{ACK}$; b) $AH = AK$.

 **Dạng : Chứng minh ba điểm thẳng hàng**

Chứng tỏ rằng ba điểm đó tạo thành một góc có số đo 180° .

❶ Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Gọi I là trung điểm của AC . Trên tia đối của tia IB lấy điểm K sao cho $IK = IB$.

- a) Chứng minh $IC \perp CK$;
b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và AK . Chứng minh ba điểm M, I, N thẳng hàng.

❷ Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 60^\circ$. Dựng ra phía ngoài tam giác đó các tam giác đều ABM và ACN .

- a) Chứng minh ba điểm M, A, N thẳng hàng;
b) Chứng minh $BN = CM$;
c) Gọi giao điểm của BN và CM là O . Tính $\widehat{BOC}$.

F BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Qua B kẻ đường thẳng a song song với AC , qua C kẻ đường thẳng b song song với AB . Giả sử a, b cắt nhau tại D . Chứng minh rằng $\triangle BCD$ vuông.

Bài 2. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng hai tia phân giác trong và tia phân giác ngoài của góc $\widehat{A}$ vuông góc với nhau.

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ nhọn. Vẽ BH vuông góc với AC ($H \in AC$), vẽ CK vuông góc với AB ($K \in AB$). Chứng minh rằng $\widehat{ABH} = \widehat{ACK}$.

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Vẽ AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Lấy điểm M bất kì trên cạnh AC , vẽ MN vuông góc với BC ($N \in BC$).

- a) Tìm góc bằng góc $\widehat{B}$.
b) Tìm góc bằng góc $\widehat{C}$.
c) Tìm góc bù với góc $\widehat{B}$.

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Vẽ AH vuông góc với BC . Các tia phân giác của các góc $\widehat{C}$ và $\widehat{BAH}$ cắt nhau tại I . Chứng minh rằng $\widehat{AIC} = 90^\circ$.

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Vẽ đường phân giác BD , giả sử $\widehat{ADB} = \alpha$.

- a) Chứng minh rằng $45^\circ < \alpha < 90^\circ$.
b) Tính theo α số đo của góc $\widehat{C}$.

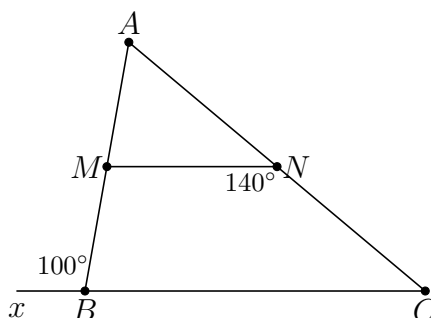
Bài 7. Cho $\triangle ABC$. Đường phân giác của góc $\widehat{B}$ và đường phân giác ngoài của góc $\widehat{C}$ cắt nhau tại M . Đường phân giác của góc $\widehat{C}$ và đường phân giác ngoài của góc $\widehat{B}$ cắt nhau tại N . Chứng minh rằng:

$$\widehat{BMC} = \widehat{BNC} = \frac{1}{2}\widehat{A}.$$

Bài 8. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} > \widehat{C}$. Gọi AD, AE theo thứ tự là đường phân giác trong, phân giác ngoài của góc $\widehat{A}$ (D, E thuộc đường thẳng BC).

- a) Chứng minh rằng $\widehat{ADC} - \widehat{ADB} = \widehat{B} - \widehat{C}$.
b) Kẻ đường cao AH . Chứng minh rằng: $\widehat{AEB} = \widehat{HAD} = \frac{1}{2}(\widehat{B} - \widehat{C})$.
c) Tính số đo của các góc $\widehat{ADB}, \widehat{ADC}$ và $\widehat{HAD}$, biết $\widehat{B} - \widehat{C} = 40^\circ$.

Bài 9. Cho $\triangle ABC$, dựng $MN \parallel BC$ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $\widehat{ABx} = 100^\circ, \widehat{MNC} = 140^\circ$. Tính số đo $\widehat{BAC}$.



Bài 10. Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$ và phân giác AD ($D \in BC$). Trên AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Trên tia AB lấy điểm F sao cho $AF = AC$.

- a) Chứng minh $DB = DE$; $BF = CE$; b) Chứng minh ba điểm F, D, E thẳng hàng;
c) Chứng minh $BE \parallel FC$ và $AD \perp FC$; d) Chứng minh $\widehat{ADC}$ là góc tù.

Bài 11. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{C} = 40^\circ$; $\widehat{B} = 70^\circ$. Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Tia phân giác của góc C cắt AH tại E . Trên CA lấy điểm K sao cho $CK = CH$.

- a) Chứng minh $\triangle HCE = \triangle KCE$;
b) Chứng minh $HK \parallel AB$;
c) Tính các góc của $\triangle CKE$;
d) Trên tia đối của tia AH lấy điểm F sao cho $AF = BH$. Trên nửa mặt phẳng bờ BA không chứa điểm C , lấy điểm D sao cho $BD \perp AB$, $BA = BD$. Chứng minh $BF = DH$.

Bài 12. Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Lấy điểm M trên cạnh BC ($MB < MC$), trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho $BM = CN$. Đường thẳng qua M vuông góc với BC cắt AB tại E . Đường thẳng qua N vuông góc với BC cắt AC tại F .

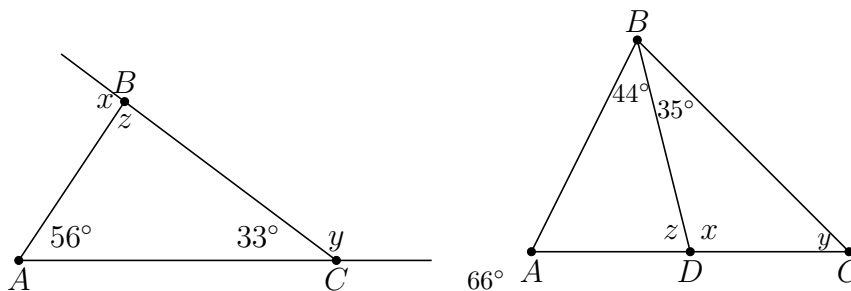
- a) Chứng minh $EM = FN$;
b) Qua E kẻ $ED \parallel AC$ ($D \in AC$). Chứng minh $MB = MD$;
c) EF cắt BC tại O . Chứng minh $OE = OF$.

Bài 13. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , $\widehat{A} = 100^\circ$. Trên tia AC lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Tính góc $\widehat{CBD}$.

Bài 14. Cho $\triangle ABC$. Tính số đo của góc $\widehat{C}$, biết:

- a) $\widehat{A} = 45^\circ$ và $\widehat{B} = 85^\circ$. b) $\widehat{A} = 40^\circ$ và $\widehat{B} = 30^\circ$.
c) $\widehat{A} = \widehat{B} = 39^\circ$. d) $\widehat{A} = 36^\circ$ và $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Bài 15. Tìm số đo x, y, z ở các hình vẽ bên.



Bài 16. Tính các góc $\widehat{B}, \widehat{C}$ của $\triangle ABC$, biết:

a) $\widehat{A} = 80^\circ$ và $\widehat{B} - \widehat{C} = 20^\circ$.

b) $\widehat{A} = 100^\circ$ và $\widehat{B} - \widehat{C} = 20^\circ$.

c) $\widehat{A} = 60^\circ$ và $\widehat{B} - \widehat{C} = 60^\circ$.

d) $\widehat{A} = 40^\circ$ và $\widehat{B} - \widehat{C} = 30^\circ$.

Bài 17. Cho $\triangle ABC$. Hai tia phân giác của góc B và C cắt nhau tại I . Tính số đo góc $\widehat{BIC}$, biết:

a) $\widehat{B} = 80^\circ, \widehat{C} = 40^\circ$.

b) $\widehat{A} = 100^\circ$.

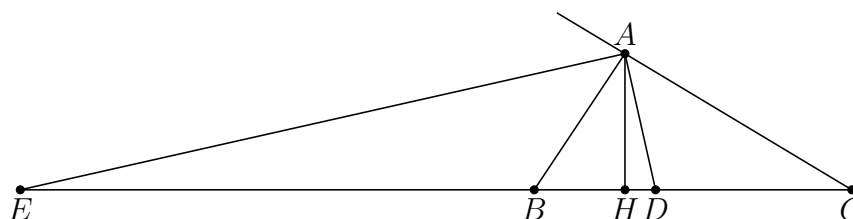
Bài 18. Cho $\triangle ABC$. Tia phân giác của góc A cắt BC ở D . Tính số đo các góc $\widehat{A}, \widehat{ADB}, \widehat{ADC}$, biết:

a) $\widehat{B} = 80^\circ, \widehat{C} = 44^\circ$.

b) $\widehat{B} = 80^\circ, \widehat{C} = 30^\circ$.

c) $\widehat{B} = 50^\circ, \widehat{C} = 60^\circ$.

Bài 19. Điền số đo các góc vào hình vẽ sau, biết $\widehat{BAD} = 45^\circ, \widehat{ABC} = 60^\circ$, AD, AE theo thứ tự là đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\widehat{A}$.



Bài 20. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Gọi M là một điểm nằm trong tam giác đó. Chứng minh rằng $\widehat{BMC}$ là góc tù.

Bài 21. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 80^\circ, \widehat{C} = 60^\circ$. Gọi AD, AE theo thứ tự là đường phân giác trong, phân giác ngoài của góc $\widehat{A}$ (D, E thuộc đường thẳng BC).

a) Tính số đo của các góc $\widehat{ADC}, \widehat{ADB}$.

b) Kẻ đường cao AH . Tính số đo của các góc $\widehat{AEB}, \widehat{HAD}$.

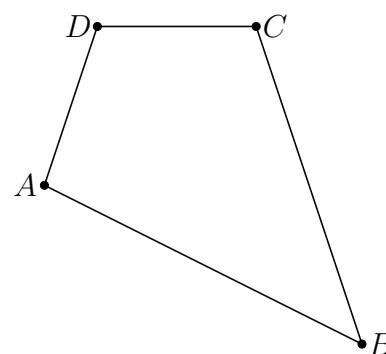
Bài 22. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} - \widehat{C} = 30^\circ$. Gọi AD, AE theo thứ tự là đường phân giác trong, phân giác ngoài của góc $\widehat{A}$ (D, E thuộc đường thẳng BC).

a) Tính số đo của các góc $\widehat{ADC}, \widehat{ADB}$.

b) Kẻ đường cao AH . Tính số đo của các góc $\widehat{AEB}, \widehat{HAD}$.

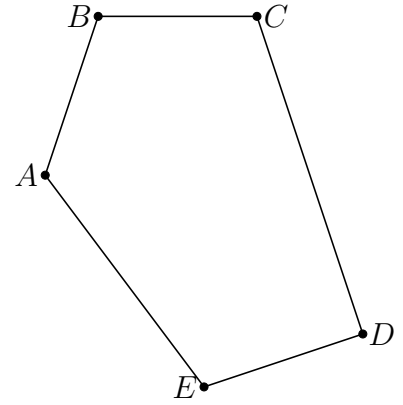
Bài 23.

Chứng minh rằng $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$, với các góc $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}$ được cho trong hình vẽ.



Bài 24.

Xác định $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} + \widehat{E}$, với các góc $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}, \widehat{E}$ được cho trong hình vẽ.



Bài 25. Chứng minh rằng với một tam giác bất kì, bao giờ cũng tồn tại một góc ngoài nhỏ hơn 120° .

Bài 26. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = \widehat{C} = 50^\circ$. Gọi Ax là tia phân giác ngoài của góc $\widehat{A}$. Chứng minh rằng $Ax \parallel BC$.

Bài 27. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 3\widehat{C}$. Vẽ tia Ax là tia đối của tia AC . Phân giác ngoài của góc $\widehat{A}$ cắt BC tại E . Vẽ tia phân giác Ay của góc $\widehat{EAx}$. Chứng minh rằng:

a) $\triangle AEC$ là tam giác cân.

b) $Ay \parallel BE$.

CHƯƠNG 5.



THU THẬP VÀ BIỂU DIỄN DỮ LIỆU

BÀI 17. THU THẬP VÀ PHÂN LOẠI DỮ LIỆU

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 THU THẬP VÀ PHÂN LOẠI DỮ LIỆU

Ta có thể thu thập dữ liệu từ những nguồn: văn bản, bảng biểu, hình ảnh trong thực tiễn.

Để tiện trong mô tả và xử lí, người ta thường phải phân loại dữ liệu.

- Dữ liệu định lượng được biểu diễn bằng số thực.
- Dữ liệu định tính được biểu diễn bằng từ, chữ cái, kí hiệu, ...

Chú ý

Dữ liệu không là số có thể phân thành hai loại, loại không thể sắp thứ tự (chẳng hạn dữ liệu về tên các tỉnh: Nam Định, Thái Bình,...) và loại có thể sắp thứ tự (chẳng hạn dữ liệu về đánh giá chất lượng dịch vụ khách sạn với các mức Rất tốt, Tốt, Trung bình, Kém).

2 TÍNH ĐẠI DIỆN CỦA DỮ LIỆU

❖ **Nhận xét 17.1.** Để có thể đưa ra các kết luận hợp lí, dữ liệu thu được phải đảm bảo tính đại diện cho toàn bộ đối tượng đang được quan tâm.

Chẳng hạn, khi đối tượng quan tâm là toàn thể học sinh thì không thể chỉ lấy ý kiến các bạn nam hoặc chỉ lấy ý kiến của các bạn trong câu lạc bộ Toán học,... mà phải lấy ý kiến của các học sinh được chọn một cách ngẫu nhiên.

Chú ý

Để đảm bảo tính hợp lí, dữ liệu cần phải đáp ứng đúng các tiêu chí toán học đơn giản.

- Tổng tỉ lệ phần trăm của tất cả các thành phần phải bằng 100%.
- Số lượng của bộ phận phải nhỏ hơn số lượng của toàn thể; ...
- Phải có tính đại diện đối với vấn đề cần thống kê.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng : Thu thập và phân loại dữ liệu

🔴 Ví dụ 1. Bình đã phỏng vấn các bạn trong lớp và thu được các dãy dữ liệu sau.

(1) Cân nặng (đơn vị kilôgam) của năm bạn trong lớp:

43; 41; 48; 45; 52.

(2) Tên một số tỉnh thuộc đồng bằng sông Hồng:

Nam Định, Thái Bình, Hưng Yên, Bắc Ninh.

(3) Đánh giá của bốn bạn học sinh về chất lượng bài giảng môn Toán:

Tốt, Xuất sắc, Khá Tốt, Trung bình.

Em hãy xác định mỗi dãy dữ liệu đó thuộc loại nào.

🔴 Ví dụ 2. An đã phỏng vấn các bạn trong lớp và thu được các dãy dữ liệu sau.

(1) Vật nuôi yêu thích của 5 bạn trong lớp:

Chó, mèo, chuột, thỏ, rùa.

(2) Thời gian (giờ) của 5 bạn trong lớp dành cho hoạt động thể thao trong ngày:

1; 1,5; 2; 2,5; 3.

Em hãy xác định mỗi dãy dữ liệu đó thuộc loại nào.

Dạng : Tính đại diện của dữ liệu

🔴 Ví dụ 1. Một hãng hàng không muốn khảo sát ý kiến của khách hàng trên một chuyến bay để đánh giá mức độ hài lòng về chất lượng phục vụ trên chuyến bay đó.

a) Em hãy cho biết đối tượng mà hãng hàng không này cần lấy ý kiến.

b) Trong hai cách khảo sát sau, cách nào hợp lí hơn?

Cách 1. Lấy ý kiến của 20 hành khách ở khoang hạng thương gia.

Cách 2. Đánh số ngẫu nhiên 100 hành khách trên chuyến bay và xin ý kiến của những hành khách số 5; 10; 15; 20; ...; 100.

❶ Ví dụ 2. Một công ty dược phẩm đã khảo sát hiệu quả sử dụng của một loại thuốc trị cảm cúm bằng cách cho 100 người bệnh ở độ tuổi từ 20 đến 30 sử dụng loại thuốc này. Kết quả cho thấy có 95 người đã khỏi bệnh sau ba ngày sử dụng thuốc.

Công ty đưa ra thông tin quảng cáo về sản phẩm: "*Tỉ lệ người dùng khỏi bệnh sau ba ngày sử dụng thuốc đạt 95%*".

Theo em, dựa vào khảo sát trên mà đưa ra kết luận như trong quảng cáo thì có hợp lí không? Vì sao?

❶ Ví dụ 3. Kết quả tìm hiểu sự yêu thích của các bạn học sinh lớp 7D với một số môn thể thao được cho bởi bảng thống kê sau:

Một số môn thể thao được yêu thích trong lớp 7D		
Môn thể thao	Số học sinh yêu thích	Tỉ lệ phần trăm
Bóng đá	18	45%
Bóng chuyền	8	20%
Bóng rổ	6	15%
Cầu lông	3	8%
Bơi lội	5	13%
Tổng	40	101%

- Hãy phân loại các dữ liệu trong bảng thống kê trên dựa trên tiêu chí định tính hay định lượng.
- Xét tính hợp lí của các dữ liệu cho trong bảng thống kê.

C BÀI TẬP VẬN DỤNG

✍ Bài 1. Phân loại các dữ liệu sau dựa trên các tiêu chí định tính và định lượng.

- Thời gian làm mỗi câu (tính theo phút) trong bài thi môn Toán của bạn An: 15; 15; 15; 20; 25.
- Số điểm đạt được của An với ba môn Toán, Văn, Ngoại ngữ: 10; 9; 10.
- Những môn thi An được 9,5 điểm: Giáo dục công dân, Tin học, Khoa học tự nhiên.
- Những bạn trong tổ An được 10 điểm môn Toán: Nam, Hải, Mai, Linh, Hùng.
- Những bạn đạt học lực giỏi trong tổ An: Mai, Nam, Hải.

✍ Bài 2. Kết quả thăm dò ý kiến của 10 bạn trong tổ của An về mức độ yêu thích đối với bài hát “Mang tiền về cho mẹ” của rapper Đen Vâu được cho trong bảng thống kê sau:

STT	Tuổi	Giới tính	Mức độ yêu thích
1	14	Nam	Rất thích
2	15	Nữ	Thích
3	14	Nữ	Thích
4	13	Nam	Không thích
5	15	Nam	Thích
6	13	Nam	Thích
7	13	Nữ	Không thích
8	14	Nam	Rất thích
9	15	Nữ	Thích
10	13	Nam	Thích

Hãy cho biết:

- Các loại mức độ thể hiện sự yêu thích đối với bài hát “Mang tiền về cho mẹ” của các bạn trong tổ An.
- Có bao nhiêu bạn học sinh nam, bao nhiêu bạn học sinh nữ trong tổ của An?
- Độ tuổi trung bình của các bạn trong tổ của An.
- Số bạn thích bài hát nhiều hơn số bạn không thích bài hát là bao nhiêu bạn?
- Dữ liệu nào là định tính? Dữ liệu nào là định lượng?

 **Bài 3.** Phân loại các dữ liệu sau dựa trên các tiêu chí định tính và định lượng.

- Một số trái cây của hàng bác Hai đang bán: cam, dưa hấu, xoài, ổi, chuối.
- Khối lượng mỗi loại trái cây (tính theo kg) bác Hai bán được trong một ngày: (18, 10, 12, 25, 8).
- Bác Hai bán cam được nhiều hơn 15 kg một ngày vào: thứ Hai, thứ Tư, thứ Bảy, Chủ nhật.
- Bác Hai bán thêm các loại trái cây khác: thanh long, măng cầu, bưởi, đu đủ vào ngày 15 trong mỗi tháng.

 **Bài 4.** Đọc đoạn văn bản dưới đây và cho biết đâu là dữ liệu định tính? Đâu là dữ liệu định lượng?

Kể từ đầu dịch đến nay Việt Nam có 1876394 ca nhiễm, đứng thứ 28/224 quốc gia và vùng lãnh thổ, trong khi với tỷ lệ số ca nhiễm/1 triệu dân, Việt Nam đứng thứ 143/224 quốc gia và vùng lãnh thổ (bình quân cứ 1 triệu người có 19019 ca nhiễm). Trong đợt dịch thứ tư, số ca nhiễm mới ghi nhận trong nước là 1870417 ca, trong đó có 1485221 bệnh nhân đã được công bố khỏi bệnh; các địa phương ghi nhận số nhiễm tích lũy cao trong đợt này: Thành phố Hồ Chí Minh (507338), Bình Dương (291329), Đồng Nai (98650), Tây Ninh (81722), Hà Nội (64965). (Nguồn: <https://suckhoedoisong.vn>)

Bài 5. Thống kê về số ly trà sữa chị Hà bán được trong ngày Chủ nhật được cho trong bảng dữ liệu sau:

STT	Loại trà sữa	Số lượng (ly)	Số tiền mỗi ly (đồng)
1	Trà sữa trân châu	25	15 000
2	Trà sữa khoai môn	18	18 000
3	Trà sữa matcha	22	20 000
4	Trà sữa caramel	28	22 000
5	Trà sữa cà phê	20	18 000
6	Trà sữa Olong	24	18 000
7	Trà sữa Thái	26	20 000
8	Trà sữa Pudding	30	25 000

- Hãy phân loại các dữ liệu có trong bảng thống kê trên dựa vào hai tiêu chí định tính và định lượng.
- Loại trà sữa nào chị Hà bán được nhiều nhất, ít nhất trong ngày Chủ nhật.
- Tính tổng số ly trà sữa các loại mà chị Hà bán được trong ngày Chủ nhật.
- Tính tổng số tiền bán trà sữa chị Hà thu được trong ngày Chủ nhật.
- Nếu tiền vốn cho mỗi ly trà sữa trung bình là 10000 đồng. Hỏi số tiền lãi chị Hà thu được từ bán trà sữa trong ngày Chủ nhật là bao nhiêu?

Bài 6. Thống kê về các loại xe mà một đại lý xe máy bán ra trong một tuần được cho trong bảng dữ liệu sau:

STT	loại xe	Số lượng	Màu xe
1	Lead	18	Trắng
2	Vision	15	Đỏ
3	AirBlack	10	Đen
4	SH Mode	7	Xanh
5	Winner	9	Xanh
6	Vario	8	Đen
7	Wave Alpha	6	Trắng

- Hãy phân loại các dữ liệu có trong bảng thống kê dựa trên hai tiêu chí định tính và định lượng.
- Loại xe nào đại lý bán được nhiều nhất, ít nhất?
- Tính tổng số xe mà đại lý bán được trong một tuần.
- Mỗi chiếc xe bán ra đại lý được lãi 7500000 đồng. Em hãy tính số tiền lãi đại lý thu được trong một tuần.

Bài 7. Xét tính hợp lí của dữ liệu trong bảng thống kê sau:

Số học sinh đạt học lực khá, giỏi của các lớp khối 7 trường THCS X		
Lớp	Sĩ số	Số học sinh đạt học lực khá, giỏi
7A1	40	24
7A2	42	26
7A3	40	30
7A4	38	40
7A5	42	27
Tổng	202	147

Bài 8. Kết quả tìm hiểu về mức độ yêu thích đối với món bánh mì của các bạn học sinh lớp 7A được cho bởi bảng thống kê sau:

Mức độ yêu thích	Không thích	Thích	Rất thích
Số bạn nam	5	12	7

- Hãy phân loại các dữ liệu trong bảng thống kê trên dựa trên tiêu chí định tính hay định lượng.
- Dữ liệu trên có đại diện được cho mức độ yêu thích đối với món bánh mì của tất cả các bạn học sinh lớp 7A hay không?

Bài 9. Kết quả tìm hiểu về khả năng giao tiếp tiếng Anh của các bạn học sinh lớp 7B được cho bởi bảng thống kê sau:

Khả năng giao tiếp tiếng Anh	Chưa tốt	Tốt	Rất tốt
Số bạn nữ	3	10	7

- Hãy phân loại các dữ liệu trong bảng thống kê trên dựa trên tiêu chí định tính hay định lượng.
- Dữ liệu trên có đại diện được cho khả năng giao tiếp tiếng Anh của tất cả các bạn học sinh lớp 7B hay không?

Bài 10. Xét tính hợp lí của dữ liệu trong bảng thống kê sau:

Tỉ lệ phần trăm yêu thích của các bạn học sinh lớp 7C với một số ngoại ngữ	
Môn ngoại ngữ	Tỉ lệ phần trăm
Tiếng Anh	110%
Tiếng Pháp	18%
Tiếng Nhật	16%
Tiếng Nga	12%
Tiếng Trung Quốc	20%
Tổng	176%

 **Bài 11.** Bạn An lập bảng thống kê số điểm 10 môn Toán trong kì thi học kì 1 của các tổ trong lớp, nhưng bạn lại quên ghi số liệu của tổ 4. Em hãy tìm các số liệu x và y để đảm bảo tính hợp lí của bảng thống kê bạn An lập.

Số điểm 10 môn Toán trong kì thi học kì 1 của mỗi tổ		
Tổ	Số điểm 10	Tỉ lệ phần trăm
1	4	20%
2	6	30%
3	3	15%
4	x	$y\%$

BÀI 18. BIỂU ĐỒ HÌNH QUẠT TRÒN

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 ĐỌC VÀ MÔ TẢ BIỂU ĐỒ HÌNH QUẠT TRÒN

-  Biểu đồ hình quạt tròn dùng để so sánh các phần trong toàn bộ dữ liệu.
-  Trong biểu đồ hình quạt tròn, phần chính là hình tròn biểu diễn dữ liệu được chia thành nhiều hình quạt (được tô màu khác nhau). Mỗi hình quạt biểu diễn tỉ lệ của một phần so với toàn bộ dữ liệu. Cả hình tròn biểu diễn toàn bộ dữ liệu, tức là ứng với 100%.

✎ Nhận xét 18.1.

-  Hai hình quạt giống nhau biểu diễn cùng một tỉ lệ.
-  Phần hình quạt ứng với một nửa hình tròn biểu diễn tỉ lệ 50%.

Chú ý

Để đọc một biểu đồ hình quạt tròn, ta cần thực hiện như sau:

-  Xác định số đối tượng được biểu thị bằng cách đếm số hình quạt có trong hình tròn.
-  Đọc ghi chú của biểu đồ để biết tên các đối tượng.
-  Xác định tỉ lệ phần trăm của từng đối tượng so với toàn thể bằng cách đọc số ghi trên biểu đồ.

2 BIỂU DIỄN DỮ LIỆU VÀO BIỂU ĐỒ HÌNH QUẠT TRÒN

Để biểu diễn thông tin từ bảng thống kê vào biểu đồ hình quạt tròn, ta thực hiện các bước sau:

-  Bước 1: Xử lí số liệu
 -  Tính tổng các số liệu.
 -  Tính tỉ lệ phần trăm của từng số liệu so với toàn thể.
-  Bước 2: Biểu diễn số liệu
 -  Ghi tên biểu đồ.
 -  Ghi chú tên các đối tượng.
 -  Ghi chú các tỉ lệ phần trăm trên biểu đồ.

3 PHÂN TÍCH DỮ LIỆU TRONG BIỂU ĐỒ HÌNH QUẠT TRÒN

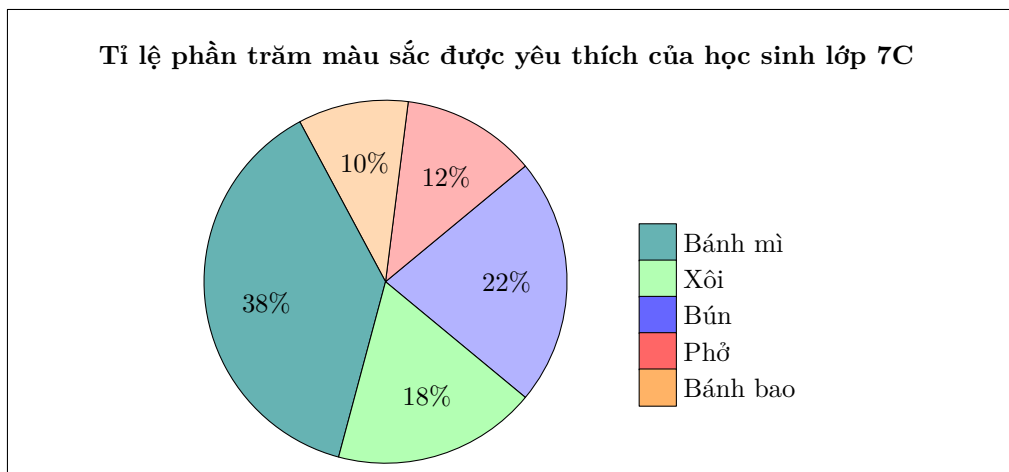
Muốn phân tích dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ hình quạt tròn, ta nên chú ý các đặc điểm sau:

- 🔲 Biểu đồ biểu diễn các thông tin về vấn đề gì?
- 🔲 Có bao nhiêu đối tượng được biểu diễn?
- 🔲 Đối tượng nào chiếm tỉ lệ phần trăm cao nhất?
- 🔲 Đối tượng nào chiếm tỉ lệ phần trăm thấp nhất?
- 🔲 Tương quan về tỉ lệ phần trăm giữa các đối tượng.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

📄 **Dạng : Đọc và mô tả biểu đồ hình quạt tròn**

🔴 **Ví dụ 1.** Sử dụng các thông tin từ biểu đồ sau để trả lời các câu hỏi bên dưới.



- a) Biểu đồ biểu diễn các thông tin về vấn đề gì?
- b) Có bao nhiêu đối tượng được biểu diễn?
- c) Tỉ lệ phần trăm của mỗi đối tượng so với toàn thể là bao nhiêu?
- d) Đối tượng nào chiếm tỉ lệ phần trăm cao nhất?
- e) Đối tượng nào chiếm tỉ lệ phần trăm thấp nhất?

📄 **Dạng : Biểu diễn dữ liệu vào biểu đồ hình quạt tròn**

🔴 **Ví dụ 1.** Bảng số liệu sau cho biết tỉ lệ các loại sách ở một thư viện trường học:

Loại sách	Sách giáo khoa	Sách tham khảo	Sách truyện	Sách khác
Tỉ lệ	40%	20%	30%	10%

Hãy vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn dữ liệu từ bảng trên.

❶ Ví dụ 2. Bảng sau cho biết tỉ lệ các bạn trong trường dự đoán đội vô địch giải bóng đá học sinh khối 7.

Đội tuyển lớp	7 A	7 B	7C	7D
Tỉ lệ dự đoán	15%	30%	20%	35%

Hãy vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn dữ liệu từ bảng trên.

❷ Ví dụ 3. Sau một năm thực hiện đề án phổ cập bơi, người ta tiến hành thu thập dữ liệu về kĩ năng bơi của học sinh tiểu học ở một huyện, được kết quả như sau:

Tình trạng	Bơi thành thạo	Biết bơi nhưng chưa thành thạo	Chưa biết bơi
Số học sinh	250	175	75

Hãy vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn dữ liệu từ bảng số liệu trên.

❸ Ví dụ 4. Bảng số liệu sau cho biết tỉ lệ áo đồng phục theo kích cỡ của các bạn học sinh lớp 7A.

Cỡ áo	S	M	L	XL
Tỉ lệ	15%	50%	30%	5%

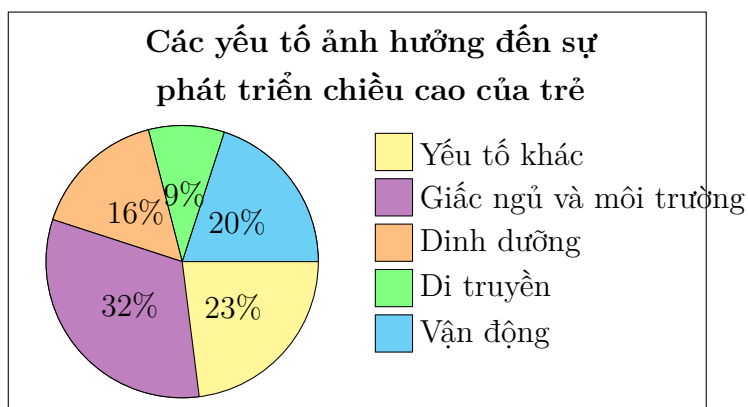
Hãy vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn dữ liệu từ bảng số liệu trên.

Dạng : Phân tích dữ liệu trong biểu đồ hình quạt tròn

❶ Ví dụ 1.

Cho biểu đồ bên.

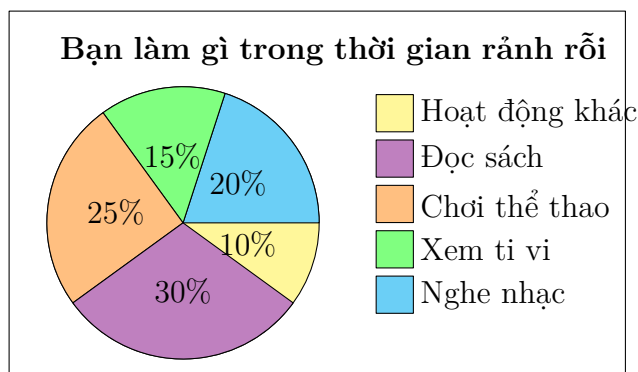
- Em hãy lập bảng thống kê về mức độ ảnh hưởng (đơn vị %) của các yếu tố đến chiều cao của trẻ.
- Ngoài yếu tố di truyền, ba yếu tố ảnh hưởng nhiều nhất đến chiều cao là gì? Ba yếu tố đó chiếm tổng cộng bao nhiêu phần trăm?



❷ Ví dụ 2.

Biểu đồ bên cho biết các hoạt động của học sinh khối 7 tại một trường trung học trong thời gian rảnh rỗi.

Hãy dự đoán trong 200 học sinh khối 7 của trường đó có khoảng bao nhiêu bạn thích chơi thể thao trong thời gian rảnh rỗi.



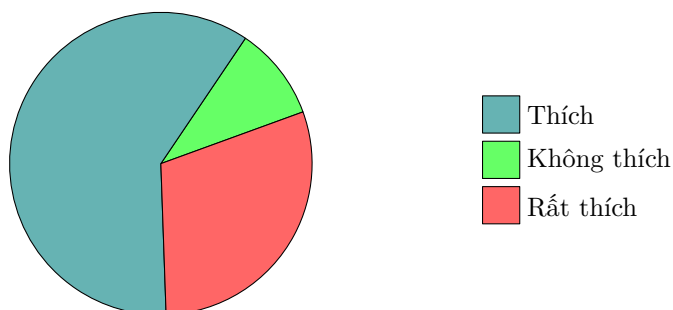
C BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Hãy biểu diễn dữ liệu từ bảng thống kê sau đây vào biểu đồ cho tương ứng bên dưới

Tỉ lệ phần trăm mức độ yêu thích đối với môn bóng đá của học sinh lớp 7B	
Mức độ yêu thích	Tỉ lệ phần trăm
Không thích	10%
Thích	60%
Rất thích	30%

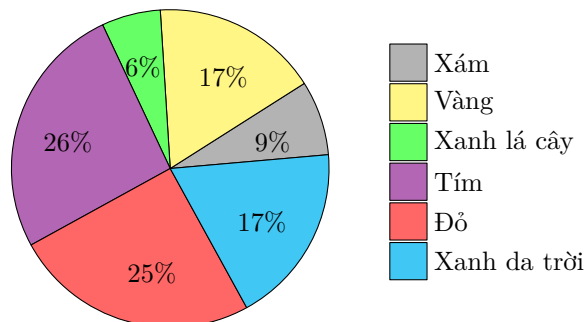
Biểu đồ

Tỉ lệ phần trăm mức độ yêu thích đối với môn bóng đá của học sinh lớp 7B



Bài 2. Hãy phân tích dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ sau

Tỉ lệ phần trăm màu sắc được yêu thích của học sinh lớp 7C



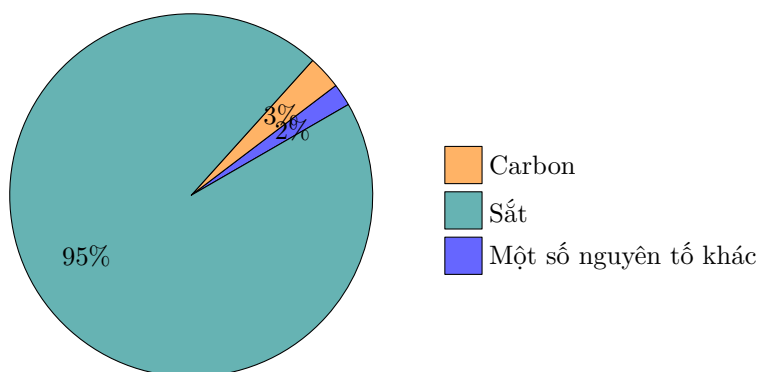
Bài 3. Một đại lý xe ô tô X muốn khảo sát tỉ lệ phần trăm của năm mẫu xe bán ra trong một tháng được cho bởi bảng thống kê dưới đây.

Tỉ lệ phần trăm của năm mẫu xe bán ra trong một tháng của đại lý X					
Mẫu xe	A	B	C	D	E
Tỉ lệ	20%	28%	19%	$x\%$	$y\%$

- a) Trong quá trình lập bảng thống kê, nhân viên đại lý đã ghi thiếu hai số liệu x và y . Em hãy tìm hai số liệu x, y còn thiếu; biết x là một số chính phương, y là một số nguyên tố và hiệu của hai số là một số chính phương.
- b) Từ đó, em hãy vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng thống kê trên. Biết trong tháng đó, mẫu xe A bán được 20 chiếc. Hỏi các mẫu xe B, C, D, E mỗi mẫu bán được bao nhiêu chiếc trong tháng đó?

 **Bài 4.** Hãy đọc thông tin từ biểu đồ dưới đây và lập bảng thống kê tương ứng

Tỉ lệ phần trăm các nguyên tố hoá học chứa trong gang



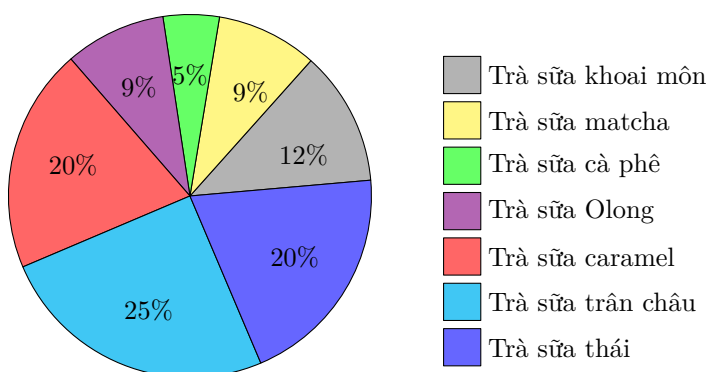
 **Bài 5.** Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn các thông tin được ghi trong bảng dữ liệu sau

Tỉ lệ phần trăm các khí trong bầu khí quyển của Trái đất			
Thành phần	Nitơ	Ôxi	Các khí khác
Tỉ lệ phần trăm	78%	21%	1%

 **Bài 6.**

- a) Hãy phân tích dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ sau

Tỉ lệ phần trăm các loại trà sữa yêu thích của học sinh lớp 7A



- b) Dựa trên sự phân tích biểu đồ trên, trong buổi liên hoan cuối năm, lớp 7A nên mua những loại trà sữa gì? Loại nào nên mua nhiều nhất?

Bài 7. Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn dữ liệu từ bảng thống kê sau

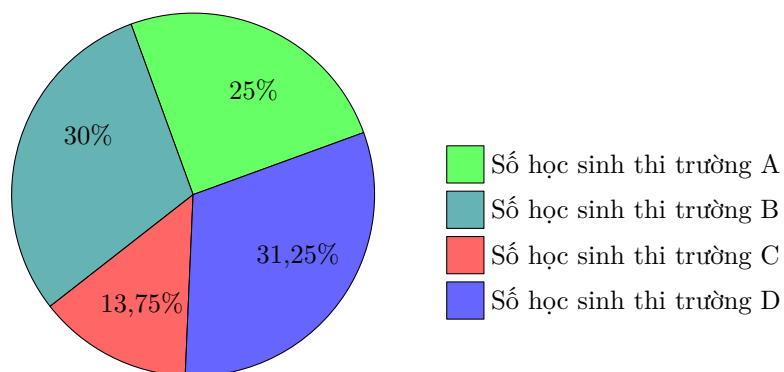
Tổng thu nhập một tháng của gia đình anh Nam	
Nguồn thu	Thu nhập (đồng)
Lương	30.000.000
Kinh doanh online	10.000.000
Nhà cho thuê	8.000.000
Tiền thưởng	2.000.000
Tổng	50.000.000

Bài 8. Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn dữ liệu từ bảng thống kê sau

Tiền lãi thu được của mỗi đại lý một công ty X trong một tháng				
Đại lý	A	B	C	D
Số tiền lãi (triệu đồng)	450	480	510	560

Bài 9. Cho biểu đồ hình quạt tròn dưới đây

Tỉ lệ phần trăm học sinh trường THCS X thi vào các trường THPT A, B, C, D



- a) Hãy phân tích dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.
- b) Biết có 200 học sinh đăng kí thi vào trường Trung học phổ thông A. Hãy tính số học sinh đăng kí vào các trường Trung học phổ thông B, C, D.
- c) Biết tỉ lệ học sinh trúng tuyển khi thi vào các trường Trung học phổ thông A, B, C, D lần lượt là 80%, 60%, 50% và 90%. Hãy tính tổng số học sinh của trường trung học cơ sở X trúng tuyển vào các trường Trung học phổ thông A, B, C, D.

BÀI 19. BIỂU ĐỒ ĐOẠN THẲNG

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 GIỚI THIỆU BIỂU ĐỒ ĐOẠN THẲNG

Biểu đồ đoạn thẳng thường được dùng để biểu diễn sự thay đổi của một đại lượng theo thời gian. Các thành phần của biểu đồ đoạn thẳng gồm:

-  Trục ngang biểu diễn thời gian;
-  Trục đứng biểu diễn đại lượng ta đang quan tâm;
-  Mỗi điểm biểu diễn giá trị của đại lượng tại một thời điểm. Hai điểm liên tiếp được nối với nhau bằng một đoạn thẳng.
-  Tiêu đề của biểu đồ thường ở dòng trên cùng.

2 ĐỌC VÀ PHÂN TÍCH DỮ LIỆU TRONG BIỂU ĐỒ ĐOẠN THẲNG

Muốn đọc và phân tích dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ đoạn thẳng, ta cần chú ý các đặc điểm sau

-  Biểu đồ biểu diễn các thông tin về vấn đề gì?
-  Đơn vị thời gian là gì?
-  Thời điểm nào số liệu cao nhất?
-  Thời điểm nào số liệu thấp nhất?
-  Số liệu tăng trong những khoảng thời gian nào?
-  Số liệu giảm trong những khoảng thời gian nào?

❖ **Nhận xét 19.1.** Biểu đồ đoạn thẳng giúp ta dễ dàng nhận ra xu thế của đại lượng ta đang quan tâm theo thời gian.

Chú ý

Đôi khi người ta biểu diễn nhiều bộ số liệu trên cùng một biểu đồ để dễ so sánh (mỗi đường có chú giải ứng với một bộ số liệu).

3 VẼ BIỂU ĐỒ ĐOẠN THẲNG

Để vẽ biểu đồ đoạn thẳng, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Vẽ hai trục ngang và dọc vuông góc với nhau.

-  Trục ngang: Ghi các mốc thời gian.

Trục dọc: Chọn khoảng chia thích hợp với số liệu và ghi số ở các vạch chia.

Bước 2. Tại mỗi mốc thời gian trên trục ngang, đánh dấu một điểm cách điểm mốc thời gian theo chiều thẳng đứng một khoảng bằng số liệu tại mốc thời gian đó, tương ứng với khoảng chia trên trục dọc.

Vẽ các đoạn thẳng nối từng cặp điểm tương ứng với cặp mốc thời gian liên tiếp, ta được một đường gấp khúc biểu diễn sự thay đổi của số liệu theo thời gian.

Bước 3. Hoàn thiện bản đồ

Ghi tên cho biểu đồ.

Ghi chú các giá trị số liệu tại các đầu đoạn thẳng.

Ghi đơn vị trên hai trục.

❖ **Nhận xét 19.2.** Độ dốc của biểu đồ phụ thuộc vào việc chọn đơn vị của trục đứng. Khi số liệu lớn trong khi đơn vị độ dài của trục đứng nhỏ thì ta không nên vẽ trục đứng bắt đầu từ 0.

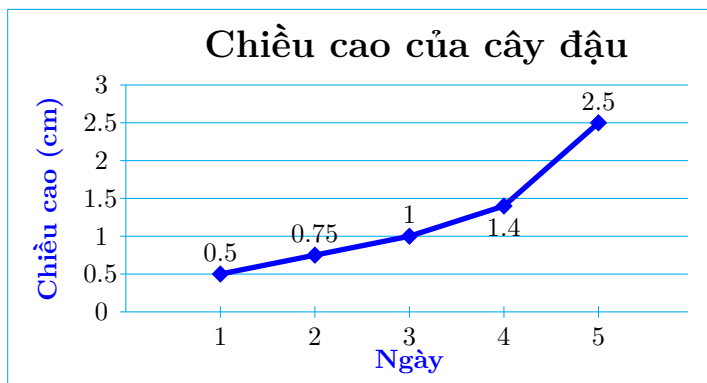
B CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng : Đọc và phân tích dữ liệu trong biểu đồ đoạn thẳng

❖ Ví dụ 1.

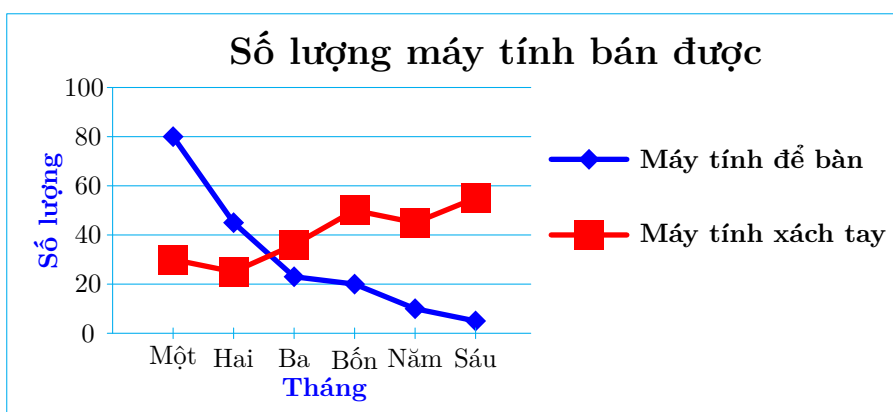
Cho biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn chiều cao của một cây đậu trong 5 ngày như hình bên.

- Từ biểu đồ, em hãy lập bảng thống kê về chiều cao của cây đậu qua từng ngày;
- Theo em, ngày nào chiều cao của cây đậu tăng nhiều nhất so với các ngày còn lại?



❖ Ví dụ 2. Cho biểu đồ đoạn thẳng bên.

- Biểu đồ này cho ta biết thông tin gì?
- Trong tháng Sáu, cửa hàng bán được loại máy tính nào nhiều hơn?
- Phân tích xu thế về số lượng máy tính mỗi loại mà cửa hàng bán được. Thời gian tiếp theo cửa hàng nên nhập nhiều loại máy tính nào?



Dạng : Vẽ biểu đồ đoạn thẳng

Ví dụ 1. Bảng thống kê sau đây cho biết thành tích của một vận động viên chạy cự li 1500 m trong thời gian luyện tập từ tuần 1 đến tuần 7.

Tuần	1	2	3	4	5	6	7
Thành tích (phút)	8	8	8	7	6,5	6,5	6

Hãy vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn bảng số liệu trên.

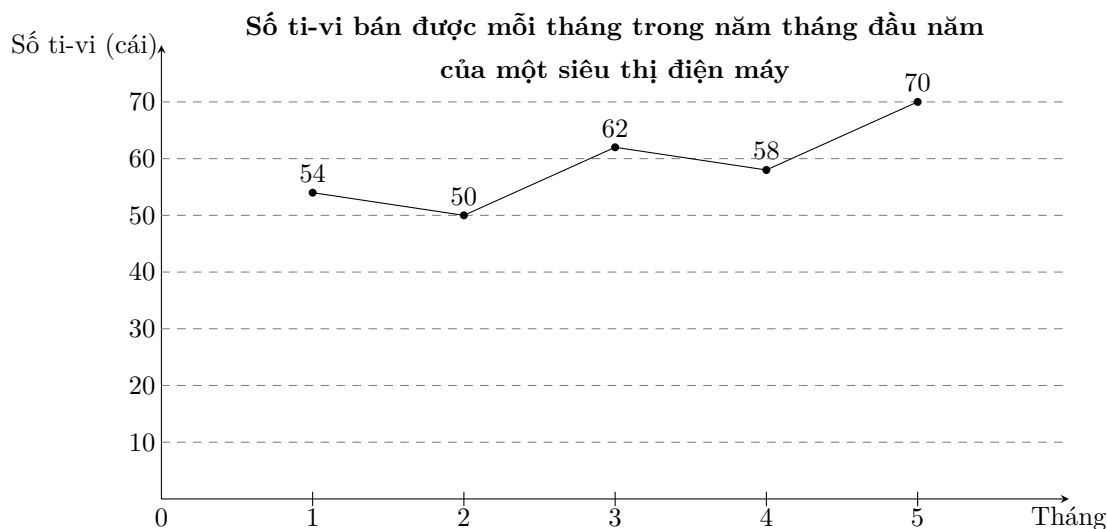
Ví dụ 2. Bảng sau cho biết nhiệt độ tại thủ đô Hà Nội vào mùa thu

Thời điểm (giờ)	8	10	12	14	16	18	20
Nhiệt độ ($^{\circ}\text{C}$)	23	25	34	32	26	22	18

Hãy vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn bảng số liệu trên.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Biểu đồ đoạn thẳng dưới đây cho biết số ti-vi bán được của một siêu thị điện máy trong mỗi tháng của năm tháng đầu năm.



- a) Dựa vào biểu đồ đoạn thẳng ở trên, em hãy lập bảng thông kê tương ứng.
- b) Tháng nào trong năm tháng đầu năm, siêu thị điện máy bán được số ti-vi nhiều nhất?
- c) Tháng nào trong năm tháng đầu năm, siêu thị điện máy bán được số ti-vi ít nhất?
- d) Tổng số ti-vi siêu thị điện máy bán được trong năm tháng đầu năm là bao nhiêu cái?
- e) So với tháng Một, tháng Hai siêu thị bán được nhiều hơn hay ít hơn bao nhiêu cái ti-vi?
Tháng Năm siêu thị bán nhiều hơn tháng Tư bao nhiêu cái ti-vi?
- f) Mỗi cái ti-vi có giá vốn 5 000 000 đồng, siêu thị bán với giá niêm yết 8 500 000 đồng.
Em hãy tính số tiền lãi mà siêu thị thu được trong năm tháng đầu năm từ bán ti-vi.

 **Bài 2.** Bảng thống kê dưới đây cho biết nhiệt độ vào buổi trưa ở Thành phố Hồ Chí Minh từ ngày 01/01/2022 đến ngày 06/01/2022.

Nhiệt độ vào buổi trưa ở Thành phố Hồ Chí Minh từ ngày 01/01/2022 đến ngày 06/01/2022	
Ngày	Nhiệt độ ($^{\circ}\text{C}$)
01/01/2022	32
02/01/2022	31
03/01/2022	33
04/01/2022	30
05/01/2022	32
06/01/2022	31

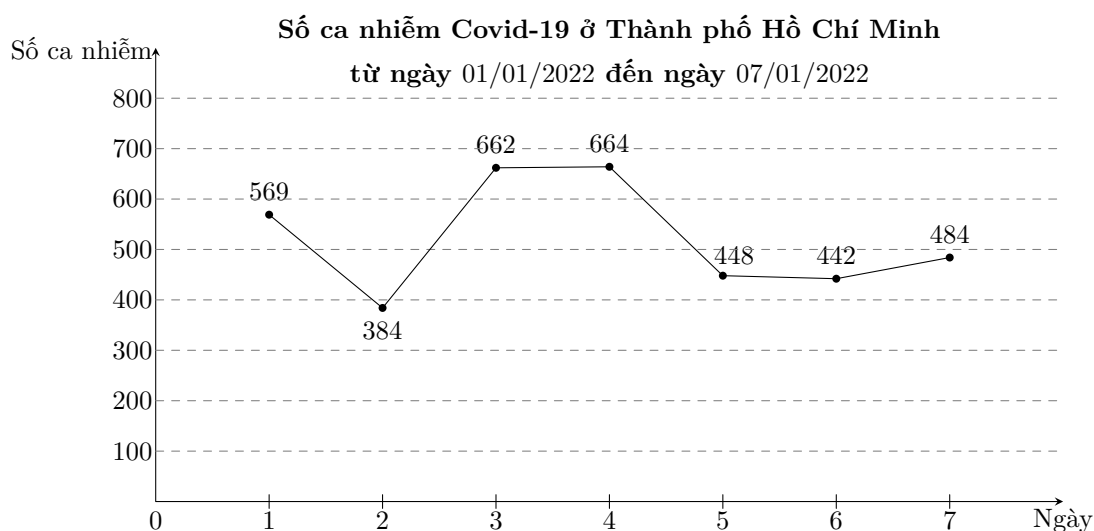
- a) Vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn dữ liệu trong bảng thống kê trên.
- b) Nhiệt độ vào buổi trưa ở Thành phố Hồ Chí Minh cao nhất trong ngày nào?
- c) Nhiệt độ vào buổi trưa ở Thành phố Hồ Chí Minh thấp nhất trong ngày nào?
- d) Chênh lệch giữa ngày có nhiệt độ cao nhất và ngày có nhiệt độ thấp nhất là bao nhiêu độ?
- e) Nhiệt độ tăng giữa những ngày nào?
- f) Nhiệt độ giảm giữa những ngày nào?

 **Bài 3.** Bảng dữ liệu sau cho biết số ki-lô-gam mà bác Hai bán được mỗi ngày trong một tuần.

Số ki-lô-gam cam bác Hai bán được mỗi ngày trong một tuần	
Ngày	Số cam bán được (kg)
Thứ Hai	42
Thứ Ba	50
Thứ Tư	48
Thứ Năm	54
Thứ Sáu	51
Thứ Bảy	57
Chủ Nhật	60

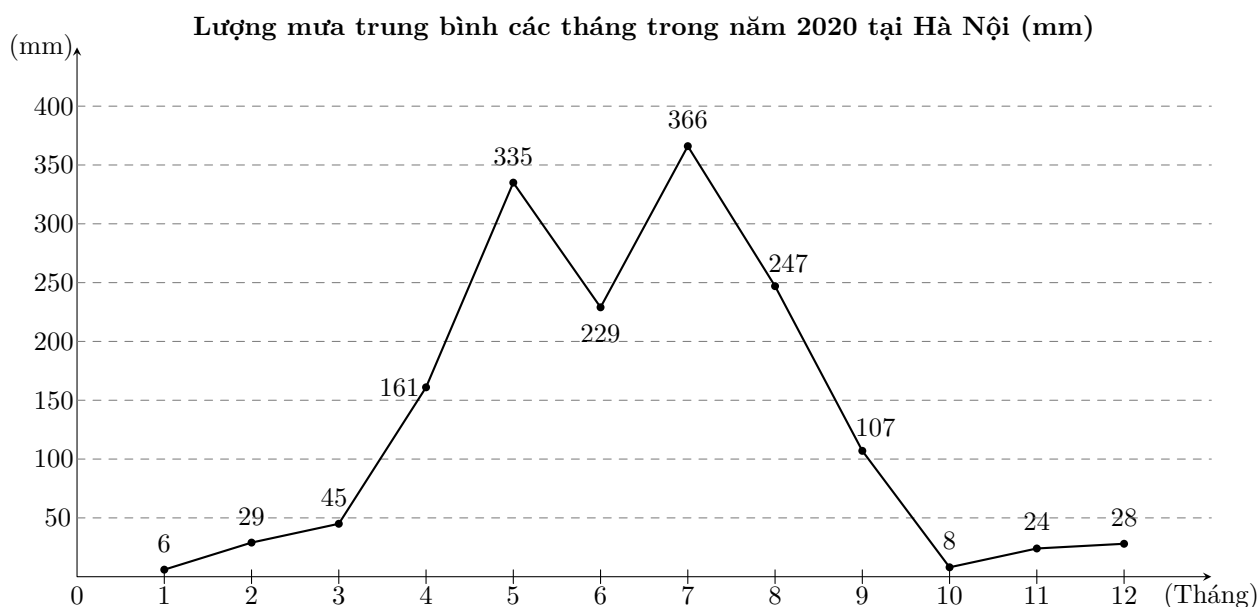
- Em hãy vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn bảng dữ liệu này.
- Vào ngày nào bác Hai bán được nhiều cam nhất?
- Vào ngày nào bác Hai bán được ít cam nhất?
- Số ki-lô-gam cam bác Hai bán được tăng giữa những ngày nào?
- Số ki-lô-gam cam bác Hai bán được giảm giữa những ngày nào?
- Tổng số ki-lô-gam cam bác Hai bán được trong một tuần là bao nhiêu?
- Biết mỗi ki-lô-gam cam bác Hai bán với giá 15000 đồng. Hỏi số tiền bán cam bác Hai thu được trong một tuần là bao nhiêu?

 **Bài 4.** Quan sát biểu đồ dưới đây và trả lời các câu hỏi



- Biểu đồ biểu diễn các thông tin về vấn đề gì?
- Đơn vị thời gian là gì?
- Ngày nào số ca nhiễm Covid-19 ở Thành phố Hồ Chí Minh nhiều nhất?
- Ngày nào số ca nhiễm Covid-19 ở Thành phố Hồ Chí Minh ít nhất?
- Số ca nhiễm Covid-19 ở Thành phố Hồ Chí Minh tăng trong những khoảng thời gian nào?
- Số ca nhiễm Covid-19 ở Thành phố Hồ Chí Minh giảm trong những khoảng thời gian nào?
- Tổng số ca nhiễm Covid-19 ở Thành phố Hồ Chí Minh từ ngày 01/01/2022 đến ngày 07/01/2022 là bao nhiêu ca?

Bài 5. Hãy phân tích biểu đồ đoạn thẳng sau

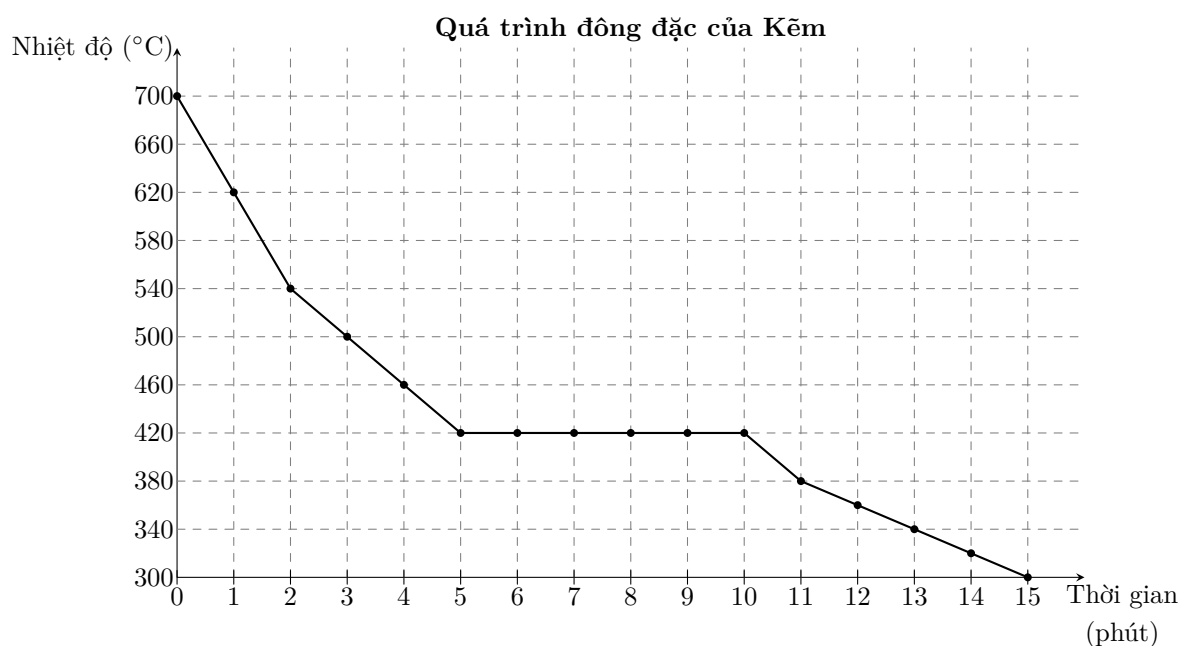


Bài 6. Bảng dữ liệu sau cho biết nhiệt độ không khí trung bình các tháng trong năm 2020 tại Hà Nội (đơn vị $^{\circ}\text{C}$).

Nhiệt độ không khí trung bình các tháng trong năm 2020 tại Hà Nội	
Tháng	Nhiệt độ trung bình (°C)
1	17,2
2	18,1
3	20,7
4	24,2
5	26,6
6	29,8
7	29,2
8	29,1
9	28,3
10	26,1
11	23,1
12	19,3

- Em hãy vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn bảng dữ liệu này.
- Nhiệt độ không khí trung bình tại Hà Nội cao nhất vào tháng nào?
- Nhiệt độ không khí trung bình tại Hà Nội thấp nhất vào tháng nào?
- Chênh lệch nhiệt độ không khí trung bình tại Hà Nội giữa tháng cao nhất và tháng thấp nhất là bao nhiêu độ C?
- Nhiệt độ không khí trung bình tại Hà Nội tăng trong những khoảng thời gian nào?
- Nhiệt độ không khí trung bình tại Hà Nội giảm trong những khoảng thời gian nào?
- Nếu quy ước nhiệt độ không khí trung bình vào mùa hè ở Hà Nội phải lớn hơn $26,5^{\circ}\text{C}$ và bạn An muốn tới tham quan Hà Nội vào mùa hè thì bạn nên tới Hà Nội vào những tháng nào trong năm?

 **Bài 7.** Đồ thị đoạn thẳng dưới đây mô tả quá trình đông đặc của kẽm. Em hãy quan sát và trả lời các câu hỏi.



- Biểu đồ biểu diễn các thông tin về vấn đề gì?
- Đơn vị thời gian là gì?
- Nhiệt độ của kẽm giảm trong khoảng thời gian nào?
- Nhiệt độ của kẽm không thay đổi trong khoảng thời gian nào?
- Để nhiệt độ của kẽm giảm từ 380°C xuống còn 300°C cần thời gian bao nhiêu phút?
- Nếu quy ước nhiệt độ của kẽm lớn hơn 420°C thì kẽm ở thể lỏng và nhiệt độ nhỏ hơn 420°C thì kẽm ở thể rắn. Em hãy cho biết kẽm ở thể lỏng trong khoảng thời gian nào? Kẽm ở thể rắn trong khoảng thời gian nào?

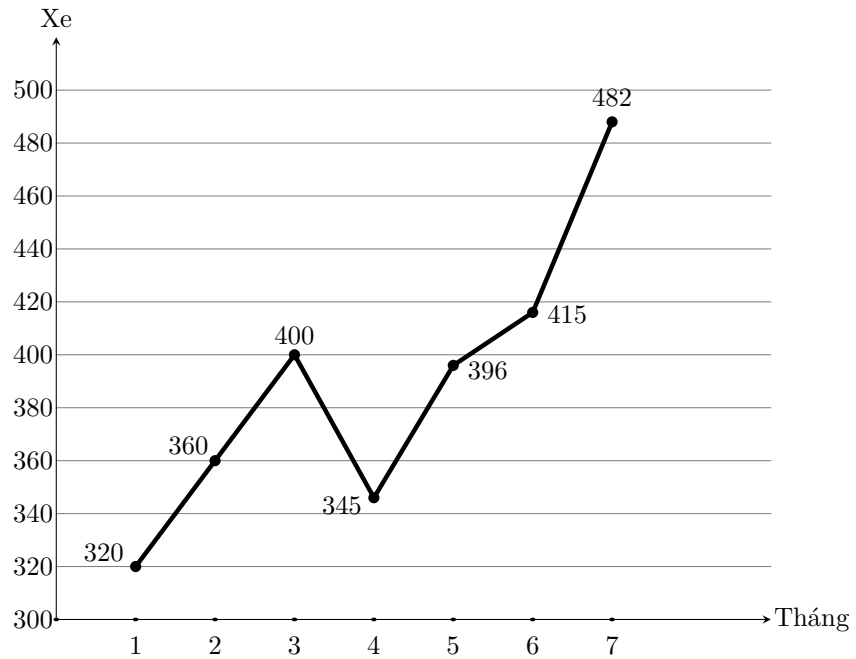
Bài 8. Một công nhân trong tháng Một làm được 320 sản phẩm, tháng Hai làm được nhiều hơn tháng Một 25 sản phẩm, tháng Ba làm ít hơn tháng Một 10 sản phẩm, số sản phẩm làm được trong tháng Tư bằng trung bình cộng số sản phẩm làm được của tháng Một và tháng Ba, tháng Năm làm được số sản phẩm bằng trung bình cộng số sản phẩm làm được của tháng Hai và tháng Tư, số sản phẩm làm được trong tháng Sáu bằng trung bình cộng số sản phẩm làm được của năm tháng đầu năm, tháng Bảy làm được ít hơn tháng Sáu 5 sản phẩm.

- Lập bảng thống kê biểu diễn số sản phẩm làm được trong mỗi tháng của người công nhân đó.
- Vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn số sản phẩm người công nhân đó làm được trong mỗi tháng.
- Số sản phẩm làm được của người công nhân đó tăng trong khoảng thời gian nào?
- Số sản phẩm làm được của người công nhân đó giảm trong khoảng thời gian nào?
- Tổng số sản phẩm mà người công nhân đó làm được trong bảy tháng là bao nhiêu?

ÔN TẬP CHƯƠNG V

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dựa vào các thông tin được biểu diễn trên biểu đồ để chọn câu trả lời đúng.



Số xe bán được của một hãng xe ô tô trong bảy tháng đầu năm 2021

Bài 9. Số xe ô tô của hàng bán được nhiều nhất vào tháng

- (A) Tháng Ba. (B) Tháng Năm. (C) Tháng Sáu. (D) Tháng Bảy.

Bài 10. Số xe ô tô của hàng bán được ít nhất vào tháng

- (A) Tháng Hai. (B) Tháng Tư. (C) Tháng Một. (D) Tháng Bảy.

Bài 11. Số xe ô tô của hàng bán được giảm giữa các tháng

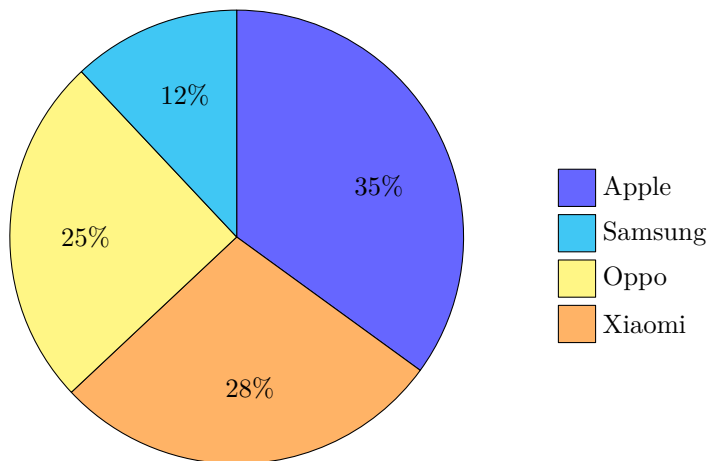
- (A) 1 – 2. (B) 3 – 4. (C) 5 – 6. (D) 4 – 5.

Bài 12. Tổng số xe ô tô của hàng bán được trong bảy tháng đầu năm là

- (A) 2718 chiếc. (B) 2780 chiếc. (C) 2318 chiếc. (D) 2719 chiếc.

Dựa vào các thông tin được biểu diễn trên biểu đồ để chọn câu trả lời đúng

Tỉ lệ phần trăm các hãng điện thoại được người dùng yêu thích năm 2021



Bài 13. Hãng điện thoại được người dùng yêu thích nhiều nhất năm 2021 là

- (A) Apple. (B) Samsung. (C) Oppo. (D) Xiaomi.

Bài 14. Hãng điện thoại được người dùng ít yêu thích nhất năm 2021 là

- (A) Apple. (B) Samsung. (C) Oppo. (D) Xiaomi.

Bài 15. Tỉ lệ phần trăm người dùng yêu thích Hãng Apple nhiều hơn hãng Samsung là

- (A) 8%. (B) 5%. (C) 7%. (D) 9%.

(E) BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 16. Bảng thống kê dưới đây biểu diễn dữ liệu về thu thập của bác An từ mô hình V-A-C (vườn - ao - chuồng). Em hãy phân loại dữ liệu dựa trên hai tiêu chí định tính và định lượng

Thu nhập của bác An từ mô hình V-A-C		
Mục thu nhập	Liệt kê chi tiết	Tỉ lệ phần trăm
Vườn	Bưởi, chuối, xoài,...	25%
Ao	Cá chép, trắm cỏ, rô phi,...	30%
Chuồng	Bò, gà, vịt,...	45%

Bài 17. Bảng thống kê dưới đây cho biết hàm lượng protein và năng lượng có trong 100 gam một số loại thực phẩm. Em hãy phân loại dữ liệu dựa trên hai tiêu chí định tính và định lượng.

Hàm lượng protein và năng lượng có trong 100 gam một số loại thực phẩm		
Thực phẩm	Protein (gam)	Năng lượng (kcal)
Ức gà	53	284
Thịt vịt	18	267
Cá hồi	39	179
Thịt heo	27	242
Thịt bò	22	184
Đậu nành	17	173
Đậu Hà Lan	22	342
Yến mạch	13	303
Bông cải xanh	3	31
Hạnh nhân	21	575

Bài 18. Thống kê một số món ăn yêu thích của 10 bạn học sinh lớp 7A gồm: Gà rán (G), phô mai quê (P), xúc xích (X), cá viên chiên (C), khoai tây chiên (K), ta được dãy số liệu sau: G, G, K, P, G, X, X, P, G, C.

Dữ liệu trên có đại diện cho sự yêu thích đối với mỗi món ăn được liệt kê của học sinh lớp 7A hay không? Biết lớp 7A có tất 40 học sinh.

Bài 19. Cho bảng thống kê sau:

Tỉ lệ phần trăm mỗi món ăn được đặt trong ngày trên một trang thương mại điện tử X		
Món ăn	Liệt kê chi tiết	Tỉ lệ phần trăm
Phở	Phở bò, phở gà,...	35%
Bún	Bún bò Huế, bún riêu,...	32%
Mì	Mì vịt tiềm, mì Quảng,...	18%
Bánh canh	Bánh canh cá lóc, bánh canh sườn	16%
Hủ tiếu	Hủ tiếu Nam Vang, hủ tiếu xương,...	15%

- Hãy phân loại các dữ liệu trong bảng thống kê trên dựa theo tiêu chí định tính và định lượng.
- Tìm điểm chưa hợp lý trong bảng thống kê trên.

Bài 20. Xét tính hợp lý của dữ liệu trong bảng thống kê sau

Số học giấy mỗi bạn An, Bình, Cường, Mai, Đào gấp được		
Học sinh	Số lượng (con)	Tỉ lệ phần trăm
An	35	18%
Bình	32	17%
Cường	40	21%
Mai	42	22%
Đào	45	23%
Tổng	194	101%

- a) Hãy phân loại các dữ liệu trong bảng thống kê trên dựa theo tiêu chí định tính và định lượng.
- b) Tìm điểm chưa hợp lý trong bảng thống kê trên.

 **Bài 21.** Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng thống kê sau

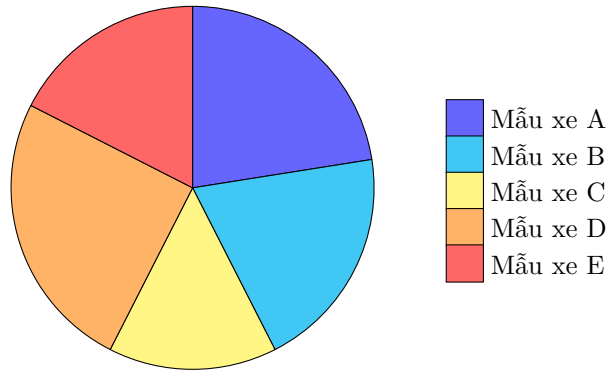
Các loại cá nuôi trong hồ của bác An						
Loại cá	Cá chép	Cá trắm cỏ	Cá rô phi	Cá mè	Cá trôi	Cá trê
Số lượng (con)	900	1200	750	800	850	500

 **Bài 22.** Hãy biểu diễn dữ liệu từ bảng thống kê sau đây vào biểu đồ tương ứng bên dưới

Số chiếc xe bán ra của mỗi loại mẫu xe A, B, C, D, E trong một tháng của đại lí X	
Mẫu xe	Số lượng xe bán ra (chiếc)
A	45
B	40
C	30
D	50
E	35

Biểu đồ

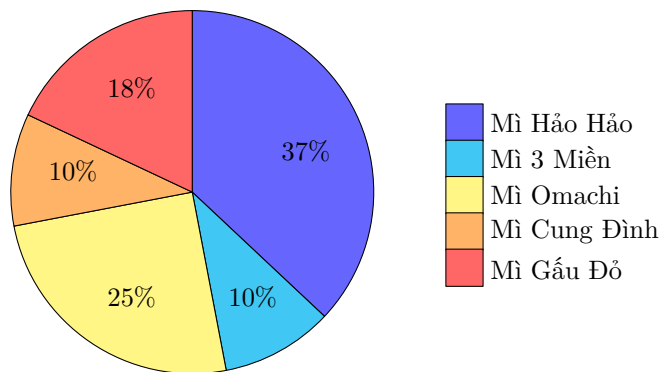
Tỉ lệ phần trăm số chiếc xe bán ra một tháng của đại lí X theo các loại mẫu xe



Bài 23.

a) Hãy phân tích dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ sau.

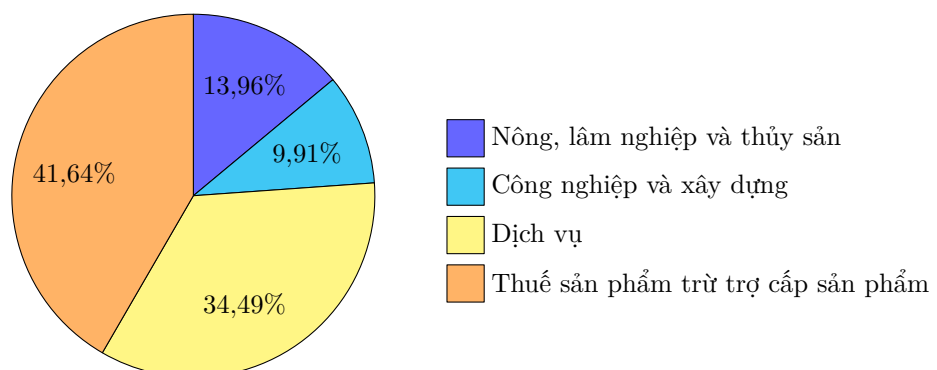
Tỉ lệ phần trăm các loại mì tôm được bán tại cửa hàng cô Hoa



b) Biết cửa hàng cô Hoa bán tất cả 200 gói mì Omachi. Hỏi cửa hàng cô Hoa bán bao nhiêu gói mỗi loại?

Bài 24. Sử dụng các thông tin từ biểu đồ sau để trả lời các câu hỏi

Tỉ lệ phần trăm đóng góp của các khu vực kinh tế vào GDP nước ta năm 2019



a) Biểu đồ biểu diễn các thông tin về vấn đề gì?

b) Có bao nhiêu đối tượng được biểu diễn?

- c) Khu vực kinh tế nào đóng góp vào GDP nhiều nhất?
- d) Khu vực kinh tế nào đóng góp vào GDP ít nhất?
- e) Khu vực dịch vụ đóng góp vào GDP nhiều hơn khu vực Nông, lâm nghiệp và thủy sản bao nhiêu phần trăm? (GDP: Gross Domestic Product - tổng sản phẩm quốc nội).

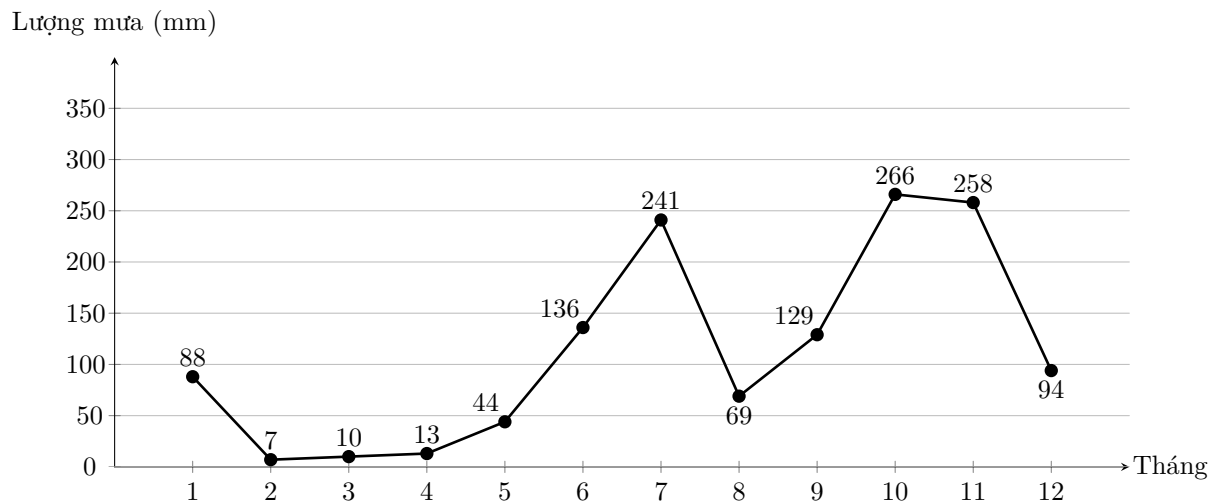
 Bài 25.

- a) Bảng dữ liệu sau cho biết số xe đạp bán ra mỗi tháng tại một cửa hàng trong năm 2021. Em hãy vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn bảng dữ liệu này.

Số xe đạp bán ra mỗi tháng của một cửa hàng trong năm 2021	
Tháng	Số xe bán ra (chiếc)
Tháng 1	30
Tháng 2	35
Tháng 3	38
Tháng 4	45
Tháng 5	42
Tháng 6	48
Tháng 7	44
Tháng 8	56
Tháng 9	41
Tháng 10	57
Tháng 11	53
Tháng 12	60

- b) Vào tháng nào cửa hàng bán được nhiều xe nhất?
- c) Vào tháng nào cửa hàng bán được ít xe nhất?
- d) Số xe bán ra của cửa hàng tăng giữa những khoảng thời gian nào?
- e) Số xe bán ra của cửa hàng giảm trong những khoảng thời gian nào?
- f) Tính tổng số xe cửa hàng bán ra trong năm 2021.

 Bài 26. Hãy phân tích biểu đồ đoạn thẳng sau để trả lời các câu hỏi.



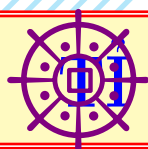
Lượng mưa trung bình các tháng trong năm 2021 tại Đà Nẵng (mm)

- Biểu đồ biểu diễn các thông tin về vấn đề gì?
- Đơn vị thời gian là gì?
- Vào tháng nào trong năm 2021 lượng mưa trung bình tại Đà Nẵng cao nhất?
- Vào tháng nào trong năm 2021 lượng mưa trung bình tại Đà Nẵng thấp nhất?
- Lượng mưa trung bình tăng trong khoảng thời gian nào?
- Có hai tháng liên tiếp lượng mưa trung bình giảm 172 mm, em hãy cho biết đó là hai tháng nào?

Bài 27. Em hãy vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn dữ liệu của bảng thống kê sau.

Nhiệt độ không khí trung bình các tháng tại Đà Nẵng	
Tháng	Nhiệt độ không khí trung bình (°C)
Tháng 1	21,9
Tháng 2	21,2
Tháng 3	24,1
Tháng 4	26,5
Tháng 5	28,4
Tháng 6	29,2
Tháng 7	28,3
Tháng 8	28,9
Tháng 9	27,3
Tháng 10	25
Tháng 11	24,3
Tháng 12	21,8

CHƯƠNG 6.



TỈ LỆ THỨC VÀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ

BÀI 20. TỈ LỆ THỨC

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 TỈ LỆ THỨC

Tỉ lệ thức là đẳng thức của hai tỉ số $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Chú ý

Tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ còn được viết dưới dạng $a : b = c : d$.

2 TÍNH CHẤT CỦA TỈ LỆ THỨC

Tính chất của tỉ lệ thức:

🔮 Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $ad = bc$.

🔮 Nếu $ad = bc$ (với $a, b, c, d \neq 0$) thì ta có bốn tỉ lệ thức:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}.$$

🔗 **Nhận xét 20.1.** Từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($a, b, c, d \neq 0$) suy ra

$$a = \frac{bc}{d}; \quad b = \frac{ad}{c}; \quad c = \frac{ad}{b}; \quad d = \frac{bc}{a}.$$

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

📄 Dạng : Nhận biết tỉ số - Tỉ lệ thức

🔴 **Ví dụ 1.** Thay tỉ số sau đây bằng tỉ số giữa các số nguyên:

a) $\frac{8}{12} : \frac{4}{15}$; b) $0,75 : 2,5$; c) $\frac{-5}{3} : 1,5$; d) $0,45 : 1,35$; e) $\frac{3}{2} : \frac{9}{16}$.

🔴 **Ví dụ 2.** Thay tỉ số sau đây bằng tỉ số giữa các số nguyên:

a) $\frac{21}{16} : \frac{15}{20}$; b) $2,3 : 1,65$; c) $\frac{-11}{9} : 2,7$; d) $5\frac{1}{4} : 5\frac{5}{6}$; e) $25,5 : 1\frac{9}{42}$.

❶ **Ví dụ 3.** Tìm các tỉ số bằng nhau trong các tỉ số sau rồi lập tỉ lệ thức:

a) $18 : 24$; b) $\frac{8}{15} : \frac{2}{3}$; c) $2,7 : 3,6$.

❷ **Ví dụ 4.** Tìm các tỉ số bằng nhau trong các tỉ số sau rồi lập tỉ lệ thức:

a) $(-10) : (-35)$; b) $\frac{14}{11} : \frac{49}{11}$; c) $1,8 : (-6,3)$.

 Dạng : Tìm số chưa biết trong tỉ lệ thức

❶ **Ví dụ 1.** Tìm x trong các tỉ lệ thức sau:

a) $\frac{x}{6} = \frac{15}{8}$; b) $\frac{12}{x} = \frac{3}{-8}$; c) $\frac{x}{16} = \frac{-11}{12}$;
d) $\frac{11}{10} = \frac{-20}{x}$; e) $\frac{x}{0,9} = \frac{5}{6}$; f) $\frac{-6}{x} = \frac{9}{-15}$;
g) $\frac{2x}{6} = \frac{5}{3}$; h) $\frac{x}{8} = \frac{5}{4}$; i) $\frac{x^2}{6} = \frac{24}{25}$.

❷ **Ví dụ 2.** Tìm x trong các tỉ lệ thức sau

a) $\frac{14}{15} : \frac{9}{10} = x : \frac{3}{7}$; b) $1\frac{3}{5} : 8 = 2,5 : x$; c) $\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$; d) $\frac{3x-7}{8} = \frac{5}{2}$.

❸ **Ví dụ 3.** Tìm tỉ số $\frac{x}{y}$, biết $\frac{x-y}{x+2y} = \frac{3}{4}$.

 Dạng : Lập tỉ lệ thức từ các số hoặc đẳng thức cho trước

❶ **Ví dụ 1.** Lập một tỉ lệ thức từ các số sau

$$3 : 11; 0,75 : 2\frac{1}{2}; 4\frac{1}{5} : 14.$$

❷ **Ví dụ 2.** Từ bốn số $-2; 3; 4; -6$ có thể lập được một tỉ lệ thức không? Nếu có, hãy lập tất cả các tỉ lệ thức từ bốn số đó.

❸ **Ví dụ 3.** Cho năm số $3; 4; 4\frac{1}{2}; 5; 6$. Hãy chọn ra bốn số để lập thành tất cả các tỉ lệ thức.

❹ **Ví dụ 4.** Lập tất cả các tỉ lệ thức có thể có được từ 4 số $-25; -2; 4; 50$.

❺ **Ví dụ 5.** Cho sáu số $1; 2; 3; 4; 4\frac{1}{2}; 6$. Hãy lập bộ bốn số trong sáu số đó sao cho mỗi bộ số này có thể lập thành một tỉ lệ thức. Với mỗi bộ bốn số hãy lập thành một tỉ lệ thức.

❻ **Ví dụ 6.** Cho tập hợp các số $A = \{4; 8; 16; 32; 64\}$. Hãy liệt kê tất cả các tỉ lệ thức mà các số hạng của nó là 4 số khác nhau trong các số đã cho.

❼ **Ví dụ 7.** Lập tất cả các tỉ lệ thức có thể được từ đẳng thức $3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$.

❽ **Ví dụ 8.** Lập tất cả các tỉ lệ thức có thể được từ tỉ lệ thức $\frac{-4}{12} = \frac{-5}{15}$.

❾ **Ví dụ 9.** Lập tất cả các tỉ lệ thức có thể thu được từ đẳng thức: $18 \cdot (-20) = (-8) \cdot 45$.

❿ **Ví dụ 10.** Lập tất cả các tỉ lệ thức có thể thu được từ đẳng thức: $(-10) \cdot 20 = (-25) \cdot 8$.

Dạng : Chứng minh tỉ lệ thức

🔴 Ví dụ 1. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$. Chứng minh rằng $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. (Giả thiết các tỉ số đều có nghĩa).

🔴 Ví dụ 2. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$. (Giả thiết các tỉ số đều có nghĩa).

Dạng : Các bài toán thực tế sử dụng tỉ lệ thức.

🔴 Ví dụ 1. Phương cùng các bạn dự định làm các lá quốc kì Việt Nam bằng giấy đảm bảo tỉ lệ quy định, chiều rộng 14 cm để tham gia Hội khoẻ Phù Đổng. Tính chiều dài của lá cờ.

🔴 Ví dụ 2. Để gói 10 chiếc bánh chưng, bà Nam cần 5 kg gạo nếp. Nếu bà muốn gói 45 chiếc bánh chưng cùng loại gửi cho người dân vùng lũ thì bà cần bao nhiêu kilôgam gạo nếp?

🔴 Ví dụ 3. Theo công thức làm một loại bánh, cứ 100 gam bột bánh thì cần 15 gam nho khô. Hỏi nếu có 36 gam nho khô thì cần bao nhiêu gam bột bánh để làm loại bánh đó?

🔴 Ví dụ 4. Để làm 12 kg mứt tết, bác Nam cần dùng 2 kg đường. Hỏi nếu bác muốn làm 15 kg mứt tết cùng loại thì cần bao nhiêu kg đường?

🔴 Ví dụ 5. 15 người thợ may xong một đơn hàng trong 20 ngày. Hỏi nếu muốn hoàn thành đơn hàng đó trong 12 ngày thì cần bao nhiêu người thợ (biết năng suất các người thợ là như nhau)?

🔴 Ví dụ 6. Để sửa xong một đoạn đường cần 8 người công nhân làm trong 10 ngày. Hỏi nếu muốn sửa xong đoạn đường đó trong 5 ngày thì cần bao nhiêu người công nhân (biết năng suất của các công nhân là như nhau)?

BÀI TẬP VẬN DỤNG

🔴 Bài 1. Thay tỉ số sau đây bằng tỉ số giữa các số nguyên:

a) $\frac{9}{25} : \frac{27}{40}$

b) $1,25 : 0,225$

c) $\frac{-3}{8} : 0,2$

🔴 Bài 2. Thay tỉ số giữa các số hữu tỉ sau bằng tỉ số giữa các số nguyên:

a) $3,75 : 18\frac{3}{4}$.

b) $2,16 : 9,3$.

c) $6\frac{1}{2} : 73\frac{2}{3}$.

🔴 Bài 3. Thay tỉ số giữa các số hữu tỉ sau bằng tỉ số giữa các số nguyên:

$$0,1 : 0,105; \quad 1 : 0,0004; \quad 18,75 : 0,0375; \quad 46,2 : 0,1232$$

🔴 Bài 4. Tìm các tỉ số bằng nhau trong các tỉ số sau rồi lập tỉ lệ thức:

$$(-21) : (-56)$$

$$\frac{6}{15} : \frac{-16}{15}$$

$$0,375 : 1$$

Bài 5. Tìm x trong các tỉ lệ thức sau

$$a) \frac{x}{1,2} = \frac{5}{6};$$

$$b) \frac{5}{9} : x = \frac{7}{4} : \frac{3}{10}.$$

Bài 6. Tìm x trong các tỉ lệ thức sau:

$$a) \frac{x}{-16} = \frac{-9}{12}.$$

$$b) \frac{27}{x} = \frac{-9}{3}.$$

Bài 7. Tìm số hữu tỉ x trong các tỉ lệ thức sau:

$$a) x : 4\frac{1}{6} = 7\frac{1}{2} : 2\frac{1}{4}.$$

$$b) 7,5 : 3\frac{1}{8} = (48x) : 5\frac{1}{4}.$$

$$c) 16 : x^2 = x : (-4).$$

$$d) x : 0,27 = 3 : x.$$

$$e) 0,81 : \frac{x}{2} = \frac{16}{x^4} : (-0 \cdot 9).$$

$$f) x : y = 3 : 2; y : z = 2 : 1 \text{ và } z : 1 = 1 : 1\frac{1}{4}.$$

$$g) 7 : (8x) = 10 : y; 9 : (2y) = 5 : (3z); 10 : z = 9 : 4.$$

Bài 8. Lập tất cả các tỉ lệ thức có thể thu được từ đẳng thức:

$$a) (-3) \cdot 12 = 4 \cdot (-9);$$

$$b) 5 \cdot 125 = 25^2;$$

$$c) 6 \cdot 63 = 9 \cdot 42.$$

Bài 9. Cho tỉ lệ thức $\frac{8}{3} = \frac{12}{4,5}$ (1). Hãy hoán vị tỉ lệ thức này để được ba tỉ lệ thức khác.

Bài 10. Lập tất cả các tỉ lệ thức có thể được

$$a) \text{ Từ bốn số } 3; 4; 15; 20.$$

$$b) \text{ Từ bốn trong năm số } 2; 3; 5; 6; 9.$$

Bài 11. Tìm các tỉ số bằng nhau trong các tỉ số sau rồi lập thành một tỉ lệ thức:

$$\frac{15}{26}; \frac{2929}{37037}; \frac{124}{281}; \frac{1515}{2626}; \frac{124124}{281281}; \frac{5}{8\frac{2}{3}}$$

Bài 12. Cho tập hợp các số $A = \{3; 9; 27; 81; 243\}$. Hãy liệt kê tất cả các tỉ lệ thức mà các số hạng của nó là bốn số khác nhau trong tập hợp A .

Bài 13. Cách giải sau đúng hay sai? Giải thích/

a) Bốn số $1,05; 1,47; 42; 30$ lập thành một tỉ lệ thức vì nếu sắp xếp các số theo thứ tự tăng dần $1,05 < 1,47 < 30 < 42$, ta có $1,05 \cdot 42 = 1,47 \cdot 30 (= 44,1)$.

b) Bốn số $-0,2; 0,1; -0,1; 0,2$ không lập thành một tỉ lệ thức vì nếu sắp xếp theo thứ tự tăng dần $-0,2 < -0,1 < 0,1 < 0,2$ ta có $(-0,2) \cdot 0,2 \neq (-0,1) \cdot 0,1$ (vì $-0,04 \neq -0,01$).

Bài 14. Có thể lập được một tỉ lệ thức từ các nhóm bốn số sau không?

a) $4, 2; 77\frac{7}{9}; 0,03$ và $\frac{5}{9}$.

b) $15, 381125; 5, 35; 2, 3$ và $0, 8$.

c) $3, 4; 17; 0, 312$ và $1, 56$.

d) $3^2; 2^5; 1! + 2! + 3!$ và $2! + 3! + 4!$.

Bài 15. Có thể chọn ra bốn trong nhóm năm số (mỗi số chỉ chọn một lần) để lập thành một tỉ lệ thức được không?

a) $1; 3; 9; 27; 81$

b) $4; 5; 6; 7; 8$

c) $2^1; 2^2; 2^3; 2^4; 2^5$.

d) $3^{-1}; 3^{-3}; 3^{-5}; 3^{-7}; 3^{-9}$

e) $\frac{31}{57}; \frac{181818}{292929}; \frac{1818}{2929}; \frac{3131}{5757}; \frac{18}{29}$.

Bài 16. Có thể lập được một tỉ lệ thức từ các số sau hay không, nếu được hãy viết tỉ lệ thức đó (chỉ viết một tỉ lệ thức đại diện của nhóm)?

a) $0, 7; 0, 3; 0, 9$ và $2, 1$.

b) $1, 1; 0, 22; 3, 3$ và $0, 66$.

c) $\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{12}; \frac{1}{6}$.

d) $\frac{1}{4}; 1\frac{5}{16}; 1\frac{3}{4}; \frac{1}{6}$.

e) $-6; 4, 15; 2, 075$ và $-0, 3$.

f) $a = (1 + 2 + 3)^3; b = 3^3 + 4^3 + 5^3;$
 $c = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3; d = (1 + 2 + 3 + 4)^3$

Bài 17. Bớt ở số hạng trên và dưới của cả hai tỉ số $\frac{26}{39}$ và $\frac{38}{57}$ cùng một số tự nhiên x vào để ta được hai tỉ số mới lập thành một tỉ lệ thức?

Bài 18. Nhân dịp Tết Nguyên đán, một cửa hàng có chương trình khuyến mãi: mỗi khi khách hàng mua 5 hộp cam thì được tặng 2 hộp mít. Hỏi nếu muốn được tặng 14 hộp mít theo chương trình khuyến mãi đó thì khách hàng cần mua bao nhiêu hộp cam?

Bài 19. Để chảy đầy một bể cạn, 3 máy bơm cần chảy trong 2 giờ. Hỏi nếu có 6 máy bơm cùng chảy vào bể cạn đó thì sau bao lâu sẽ đầy bể?

B BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 20. Tìm số hữu tỉ x , biết:

a) $(x - 2, 5) : 1\frac{1}{2} = x : 2$.

b) $\left(\frac{1}{3} + x\right) : \left(x + \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{9}$.

Bài 21. Tìm x , nếu:

a) $y : 40 = 36 : 26; z : y = 25 : 20; x : z = 0, 65 : 1$.

b) $(x \cdot y \cdot z) : (y \cdot z \cdot 72) = 6300 : 7500$.

c) $(17 \cdot 16 \cdot 12) : (z \cdot 12x \cdot y) = (3 \cdot 51 \cdot 32) : (y \cdot 6 \cdot z)$.

d) $x : y = 3 : 2; y : z = 2 : 1$ và $z : 1 = 1 : 1, 25$.

Bài 22. Tìm x nếu $x : y = 2 : 3$ và $xy = 54$.

Bài 23. Tìm số hữu tỉ x mà:

a) Cùng thêm x vào số hạng trên và số hạng dưới của tỉ số $\frac{26}{39}$ ta được một tỉ số có giá trị bằng $\frac{6}{7}$.

b) Thêm x vào số hạng trên và bớt x ở số hạng dưới của tỉ số $\frac{26}{39}$ ta được một tỉ số bằng $\frac{5}{8}$.

Bài 24. Cho tỉ lệ thức $\frac{5x - 2y}{3x + 4y} = \frac{3}{4}$. Tính tỉ số $x : y$.

Bài 25. Tìm số nguyên x mà:

a) Cùng thêm vào tử và mẫu của phân số $\frac{26}{39}$ ta được một phân số mới có giá trị bằng $\frac{6}{7}$.

b) Thêm vào tử và bớt ở mẫu của phân số $\frac{26}{39}$ ta được một phân số mới có giá trị bằng $\frac{6}{7}$.

Bài 26. Chứng minh rằng nếu $\frac{a+b}{c+d} = \frac{b+c}{d+a}$, trong đó $a+b+c+d \neq 0$ thì $a=c$.

Bài 27. Chứng minh nếu các số a, b, c, d lập thành tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì ta cũng có các tỉ lệ thức sau:

a) $\frac{2a+b}{3a-b} = \frac{2c+d}{3c-d}$

b) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{c^2+d^2}{c^2-d^2}$

Bài 28. Tìm số hạng thứ tư lập thành một tỉ lệ thức với ba số hạng sau:

a) 36; 324; 9 b) $\frac{-2}{3}; 0, 03; 1\frac{7}{9}$ c) $(-2)^5; (-2)^3; (-2)^7$. d) 1!; 2!; 3!

BÀI 21. TÍNH CHẤT CỦA DẪY TỈ SỐ BẰNG NHAU

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 TÍNH CHẤT CỦA DẪY HAI TỈ SỐ BẰNG NHAU

Từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ suy ra $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$.
(Giả thiết các tỉ số đều có nghĩa).

2 MỞ RỘNG TÍNH CHẤT CHO DẪY TỈ SỐ BẰNG NHAU

Từ dãy tỉ số bằng nhau $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ suy ra:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a-c+e}{b-d+f}.$$

(Giả thiết các tỉ số đều có nghĩa).

Chú ý

Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, ta còn nói các số a, c, e tỉ lệ với các số b, d, f .
Khi đó ta cũng viết $a : c : e = b : d : f$.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

 **Dạng :** Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau để tìm các đại lượng chưa biết

🔴 **Ví dụ 1.** Tìm x, y, z biết $\frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{z}{10}$ và $x - y + z = 70$.

🔴 **Ví dụ 2.** Tìm x, y, z biết $\frac{x}{8} = \frac{y}{5} = \frac{z}{12}$ và $-x + y - z = 60$.

🔴 **Ví dụ 3.** Tìm x, y, z biết $\frac{x}{7} = \frac{y}{4} = \frac{z}{2}$ và $x - 3z = 9$.

🔴 **Ví dụ 4.** Cho biết $\frac{x}{y} = \frac{7}{10}$; $\frac{y}{z} = \frac{10}{13}$ và $x + y + z = 120$.

Tìm x, y, z .

🔴 **Ví dụ 5.** Tìm x, y, z biết $3x = 4y = 5z$ và $x - y - z = -42$.

🔴 **Ví dụ 6.**

a) Tìm hai số x và y , biết: $\frac{x}{8} = \frac{y}{12}$ và $x + y = 60$.

b) Tìm hai số x và y , biết: $\frac{x}{6} = \frac{y}{10}$ và $x - y = 12$.

c) Tìm ba số x, y và z , biết: $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{4}$ và $2x - 4y + z = -6$.

◉ Ví dụ 7.

a) Tìm hai số a và b , biết: $\frac{a}{11} = \frac{b}{8}$ và $a + b = 38$.

b) Tìm hai số a và b , biết: $\frac{a}{15} = \frac{b}{7}$ và $b - a = 16$.

c) Tìm ba số a, b và c , biết: $\frac{a}{2} = \frac{b}{-4} = \frac{c}{6}$ và $a - 5b + 4c = 23$.

◉ Ví dụ 8.

a) Tìm ba số x, y và z , biết: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ và $xyz = 480$.

b) Tìm ba số x, y và z , biết: $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-4}$ và $x^2 + z^2 = 80$.

◉ Ví dụ 9. Tìm x, y, z biết $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$ và $x \cdot y \cdot z = 288$.

◉ Ví dụ 10.

a) Tìm ba số a, b và c , biết: $\frac{a}{8} = \frac{b}{6} = \frac{c}{4}$ và $abc = -24$.

b) Tìm ba số a, b và c , biết: $\frac{a}{4} = \frac{b}{8} = \frac{c}{16}$ và $a^2 - b^2 = -60$.

📄 Dạng : Chứng minh tỉ lệ thức. Tính giá trị biểu thức

◉ Ví dụ 1. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng $\frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2} = \frac{ac}{bd}$ (giả thiết các tỉ số đều có nghĩa).

◉ Ví dụ 2. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng $\frac{a + 2c}{b + 2d} = \frac{a - 3c}{b - 3d}$ (giả thiết các tỉ số đều có nghĩa).

◉ Ví dụ 3. Cho các số a, b, c, d thỏa mãn $a + b + c \neq 0$ và $\frac{a + b - c}{c} = \frac{a + c - b}{b} = \frac{b + c - a}{a}$. Tính giá trị biểu thức:

$$A = \frac{(a + b)(b + c)(a + c)}{abc}.$$

◉ Ví dụ 4. Chứng minh rằng nếu $\frac{a + b}{c + d} = \frac{a - b}{c - d}$ thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

📄 Dạng : Áp dụng tính chất của dãy hai tỉ số bằng nhau để giải bài toán khác

◉ Ví dụ 1. Chia số 69 thành ba phần tỉ lệ với các số $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$ và $\frac{3}{4}$.

- 🔴 **Ví dụ 2.** Chu vi của một tam giác là 81 cm. Các cạnh của nó tỉ lệ với 2, 3, 4. Tính độ dài mỗi cạnh.
- 🔴 **Ví dụ 3.** Một khu vườn hình chữ nhật có diện tích là 960 m^2 . Chiều dài và chiều rộng tỉ lệ với 5 và 3. Tính chiều dài và chiều rộng của khu vườn.
- 🔴 **Ví dụ 4.** Tỉ số số viên sỏi của Minh và Nam là 1,25. Hỏi mỗi bạn có bao nhiêu viên sỏi, biết rằng Minh có nhiều hơn Nam là 10 viên sỏi?
- 🔴 **Ví dụ 5.** Tỉ số số học sinh nam và số học sinh nữ của lớp 7A là 0,75. Biết rằng số học sinh nam ít hơn số học sinh nữ là 5 bạn. Hỏi lớp 7A có bao nhiêu học sinh nam và học sinh nữ?
- 🔴 **Ví dụ 6.** Ba đội công nhân có tất cả 75 người và số công nhân của đội I, đội II và đội III tỉ lệ với 3; 5; 7. Tính số công nhân của mỗi đội.
- 🔴 **Ví dụ 7.** Số bàn thắng ba đội bóng A, B, C ghi được tỉ lệ với 8, 10, 11. Hỏi mỗi đội ghi được bao nhiêu bàn thắng biết cả ba đội ghi được 58 bàn thắng?

📁 BÀI TẬP VẬN DỤNG

- ✍ **Bài 1.** Tính x và y , biết $\frac{x}{y} = \frac{5}{9}$ và $x + y = 70$.
- ✍ **Bài 2.** Tính x và y , biết $\frac{x}{15} = \frac{y}{7}$ và $x - 2y = 16$.
- ✍ **Bài 3.** Tìm hai số x và y , biết: $\frac{x}{13} = \frac{y}{7}$ và $x + y = 80$.
- ✍ **Bài 4.** Tìm hai số a và b , biết: $\frac{a}{3} = \frac{b}{7}$ và $a - b = 16$.
- ✍ **Bài 5.** Cho biết $\frac{x}{5} = \frac{y}{2}$ và $xy = 1000$. Tìm x và y .
- ✍ **Bài 6.** Tìm ba số m , n và p , biết: $m : n : p = 6 : 8 : 9$ và $m - n + p = 21$.
- ✍ **Bài 7.** Tìm x , y , z , biết $\frac{x}{13} = \frac{y}{7} = \frac{z}{5}$ và $x - y - z = 6$.
- ✍ **Bài 8.** Tìm x , y , z , biết
- a) $\frac{x}{y} = \frac{8}{11}; \frac{y}{z} = \frac{11}{3}$ và $x + y - z = 80$. b) $\frac{x}{4} = \frac{y}{3}; \frac{y}{6} = \frac{z}{11}$ và $x \cdot y \cdot z = -528$.
- ✍ **Bài 9.** Cho x , y , z là ba số dương phân biệt. Biết $\frac{x-y}{z} = \frac{3y}{x-z} = \frac{x}{y}$. Chứng minh rằng $x = 2y$ và $y = 2z$.
- ✍ **Bài 10.** Cùng thêm một số khác 0 vào tử và mẫu của một phân số mà giá trị của phân số không đổi. Tìm phân số đã cho.
- ✍ **Bài 11.** Cho $\frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = \frac{2x+3y-1}{6x}$. Tìm x và y .
- ✍ **Bài 12.** Trong một thùng hoa quả, tỉ số số quả cam và số quả xoài là 2,5. Biết số quả cam nhiều hơn số quả xoài là 15. Tính số quả cam và quả xoài trong thùng.
- ✍ **Bài 13.** Số quyển vở của ba bạn Ánh, Ngọc và Hằng tỉ lệ với 9; 5; 7. Hỏi mỗi bạn có bao nhiêu quyển vở biết cả ba bạn có 63 quyển vở?

Bài 14. Tìm hai số x và y , biết:

a) $\frac{x}{6} = \frac{y}{7}$ và $4x - y = 34$; b) $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ và $xy = 24$; c) $\frac{x}{-2} = \frac{y}{3}$ và $x^2 - y^2 = -45$.

Bài 15. Tìm các số a, b, c nếu:

a) $5a - 3b - 3c = -536$ và $\frac{a}{4} = \frac{b}{6}, \frac{b}{5} = \frac{c}{8}$. b) $3a - 5b + 7c = 86$ và $\frac{a+3}{5} = \frac{b-2}{3} = \frac{c-1}{7}$.

c) $a - 2b + c = 46$ và $\frac{a}{7} = \frac{b}{6}, \frac{b}{5} = \frac{c}{8}$. d) $5a = 8b = 3c$ và $a - 2b + c = 34$.

e) $3a = 7b$ và $a^2 - b^2 = 160$. f) $15a = 10b = 6c$ và $abc = -1920$.

g) $a^2 + 3b^2 - 2c^2 = -16$ và $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$. h) $a^3 + b^3 + c^3 = 792$ và $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$.

Bài 16. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh các tỉ lệ thức sau:

$$\frac{a^2 - b^2}{ab} = \frac{c^2 - d^2}{cd}; \quad \frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2} = \frac{(c+d)^2}{c^2 + d^2}.$$

Bài 17. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^3 = \frac{a^3 + b^3}{c^3 + d^3}$.

Bài 18. Cho tỉ lệ thức $\frac{a+b}{b+c} = \frac{c+d}{d+a}$, với $a, b, c, d > 0$. So sánh a và c .

Bài 19. Chứng minh rằng nếu $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} = \dots = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ thì

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n+1}}\right)^n = \frac{a_1}{a_{n+1}}.$$

D BÀI TẬP NÂNG CAO

Câu 1. Tìm x , biết:

a) $(x + 15) : x = 4 : 3$. b) $(7, 5 - x) : (3, 5 + x) = 5 : 6$.

c) $(x - 20) : (x - 10) = (x + 40) : (x + 70)$.

D

Câu 2. Tìm các số x, y, z , biết rằng:

a) $\frac{x}{20} = \frac{y}{9} = \frac{z}{6}$ và $x - 2y + 4z = 13$. b) $4x = 3y, 7y = 5z$ và $x - y + z = -46$.

c) $\frac{x}{2} = \frac{2y}{5} = \frac{4z}{7}$ và $3x + 5y + 7z = 123$. d) $\frac{x}{2} = \frac{2y}{3} = \frac{3z}{4}$ và $xyz = -108$.

❖ **Câu 3.** Chứng minh rằng nếu có $(a + b + c + d)(a - b - c + d) = (a - b + c - d)(a + b - c - d)$ thì bốn số a, b, c và d lập thành một tỉ lệ thức.

❖ **Câu 4.** Cho $abc \neq 0$ và $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$. Tính $P = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right)$.

❖ **Câu 5.** Tìm x, y và z , nếu: $x + y + z = \frac{x}{y+z-2} = \frac{y}{z+x-3} = \frac{z}{x+y+5}$.

❖ **Câu 6.** Cho dãy tỉ số bằng nhau $\frac{x}{a+2b+c} = \frac{y}{2a+b-c} = \frac{z}{4a-4b+c}$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{x+2y+z} = \frac{b}{2x+y-z} = \frac{c}{4x-4y+z} \text{ (giả thiết các tỉ số đều có nghĩa).}$$

❖ **Câu 7.** Cho $\frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c}$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

❖ **Câu 8.** Chứng minh rằng nếu có dãy tỉ số $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ thì giá trị của tỉ số $\frac{ak^2+bk+c}{xk^2+yk+z}$ không phụ thuộc vào giá trị của k .

❖ **Câu 9.** Biết các số tự nhiên a, b, c, x, y, z khác 0 và lập thành một dãy tỉ số bằng nhau $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$. Chứng minh rằng nếu c là số dư của phép chia số a cho số b thì z là số dư của phép chia số x cho số y .

❖ **Câu 10.** Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, chứng minh tỉ lệ thức $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$.

❖ **Câu 11.** Cho $abcd \neq 0, b^2 = ca$ và $c^2 = bd$. Chứng minh tỉ lệ thức $\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3} = \frac{a}{d}$.

❖ **Câu 12.** Cho tỉ lệ thức $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{b}{c}$ với $c \neq 0$. Chứng minh tỉ lệ thức $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{a}{c}$.

❖ **Câu 13.** Cho dãy tỉ số bằng nhau $\frac{\overline{ab}}{b} = \frac{\overline{bc}}{c} = \frac{\overline{ca}}{a}$. Chứng minh rằng $a = b = c$.

❖ **Câu 14.** Cho tỉ lệ thức $\frac{\overline{ab}}{a+b} = \frac{bc}{b+c}$. Chứng minh tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ với giả thiết $c \neq 0$.

❖ **Câu 15.** Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, với a, b, c và d là các số tự nhiên khác 0. Kí hiệu $(x; y)$ và $[x; y]$ tương ứng là ước chung lớn nhất và bội chung nhỏ nhất của hai số tự nhiên x và y . Chứng minh rằng $\frac{(a; d)}{(b; c)} = \frac{[b; c]}{[a; d]}$.

❖ **Câu 16.** Cho a, b, c đôi một khác nhau và khác 0. Biết $\overline{ab}$ là số nguyên tố và $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{b}{c}$. Tìm số $\overline{abc}$.

❖ **Câu 17.** Cho tỉ lệ thức $\frac{\overline{abc}}{a+\overline{bc}} = \frac{\overline{bca}}{b+\overline{ca}}$, chứng minh tỉ lệ thức $\frac{a}{\overline{bc}} = \frac{b}{\overline{ca}}$.

❖ **Câu 18.** Cho dãy tỉ số $\frac{\overline{ab}+\overline{bc}}{a+b} = \frac{\overline{bc}+\overline{ca}}{b+c} = \frac{\overline{ca}+\overline{ab}}{c+a}$, chứng minh rằng $a = b = c$.

❖ **Câu 19.** Cho tỉ lệ thức $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{a}{c}$, chứng minh rằng $\frac{\overbrace{a \overline{bbb \dots b}}^n}{\underbrace{bbb \dots b}_n c} = \frac{a}{c}$ với n là số tự nhiên.

❖ Câu 20. Tính giá trị của k , viết rằng:

$$\text{a) } k = \frac{\overline{ab}}{\overline{abc}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{bca}} = \frac{\overline{ca}}{\overline{cab}}.$$

$$\text{b) } k = \frac{\overline{abc}}{\overline{ab+c}} = \frac{\overline{bca}}{\overline{bc+a}} = \frac{\overline{cab}}{\overline{ca+b}}.$$

BÀI 22. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

① ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

Đại lượng y *tỉ lệ thuận* với đại lượng x theo *hệ số tỉ lệ* a (a là hằng số khác 0) nếu $y = ax$. Khi đó đại lượng x cũng *tỉ lệ thuận* với đại lượng y (theo hệ số tỉ lệ $\frac{1}{a}$), vì vậy ta cũng nói x và y là *hai đại lượng tỉ lệ thuận* (với nhau).

② TÍNH CHẤT:

Nếu đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x thì:

 Tỉ số hai giá trị tương ứng của chúng luôn không đổi (và bằng hệ số tỉ lệ):

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \dots = a.$$

 Tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}; \frac{y_1}{y_3} = \frac{x_1}{x_3}; \frac{y_2}{y_3} = \frac{x_2}{x_3}; \dots$$

③ MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN:

Để giải toán về đại lượng tỉ lệ thuận, ta cần nhận biết hai đại lượng tỉ lệ thuận trong bài toán. Từ đó ta có thể lập các tỉ số bằng nhau và dựa vào tính chất của dãy tỉ số bằng nhau để tìm các yếu tố chưa biết.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

 **Dạng : Nhận biết đại lượng tỉ lệ thuận**

 **Ví dụ 1.** Theo bảng giá trị dưới đây, hai đại lượng x và y có phải là hai đại lượng tỉ lệ thuận không?

a)

x	3	-4	8	-7
y	15	-20	40	-35

b)

x	2	-3	7	-7
y	6	9	21	-21

 **Ví dụ 2.** Theo bảng giá trị dưới đây, hai đại lượng a và b có phải là hai đại lượng tỉ lệ thuận không?

a)

a	10	-20	25	-30
b	2	-4	5	-5

b)

a	8	-4	12	-14
b	4	-2	6	7

 **Ví dụ 3.** Các giá trị tương ứng của y và x được cho trong bảng sau:

x	2	5	8	15
y	14	35	56	105

Hỏi hai đại lượng y và x có tỉ lệ thuận với nhau không?

🔴 **Ví dụ 4.** Các giá trị tương ứng của y và x được cho trong bảng sau:

x	3	4	5	6
y	-12	-16	20	24

Hỏi hai đại lượng y và x có tỉ lệ thuận với nhau không?

🔴 **Ví dụ 5.** Các giá trị tương ứng của y và x được cho trong bảng sau:

x	2	4	5	7
y	-3	-6	-7,5	-10,5

Xét các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

(A) Đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ $-\frac{3}{2}$.

(B) Đại lượng x tỉ lệ thuận với đại lượng y theo hệ số tỉ lệ $\frac{2}{3}$.

🔴 **Ví dụ 6.** Cho biết x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ 3, y tỉ lệ thuận với z theo hệ số tỉ lệ -4. Hỏi x tỉ lệ thuận với z không? Nếu có thì hệ số tỉ lệ là bao nhiêu?

🔴 **Ví dụ 7.** Cho biết m tỉ lệ thuận với n theo hệ số tỉ lệ 5, n tỉ lệ thuận với p theo hệ số tỉ lệ 2. Hỏi m tỉ lệ thuận với p không? Nếu có thì hệ số tỉ lệ là bao nhiêu?

 **Dạng :** Tìm giá trị của một đại lượng tỉ lệ thuận khi biết giá trị của đại lượng kia

🔴 **Ví dụ 1.** Cho biết y và x là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau:

x	$x_1 = -4$	$x_2 = -1$	$x_3 = 2$	
y	$y_1 = 20$			$y_4 = 2$

🔴 **Ví dụ 2.** Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Điền số thích hợp vào bảng sau:

x	2	3	7			
y	-4			-10	12	-2

Viết công thức mô tả mối quan hệ phụ thuộc giữa hai đại lượng x và y .

🔴 **Ví dụ 3.** Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Điền số thích hợp vào bảng sau:

x	-3	-4	2			
y	-12			16	-20	24

Viết công thức mô tả mối quan hệ phụ thuộc giữa hai đại lượng x và y .

🔴 **Ví dụ 4.** Cho biết đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ $k = -\frac{2}{5}$. Cặp giá trị nào dưới đây là cặp giá trị tương ứng của hai đại lượng nói trên:

a) $x = -4; y = 10;$

b) $x = 10; y = -4;$

🔴 **Ví dụ 5.** Cho biết hai đại lượng y và x tỉ lệ thuận với nhau. Nếu $x = 5$ thì $y = -4$. Hai đại lượng y và x liên hệ với nhau theo công thức nào?

 **Dạng : Giải bài toán thực tế về hai đại lượng tỉ lệ thuận**

🔴 **Ví dụ 1.** Cứ xay xát 50 kg thóc thì được 36 kg gạo. Hỏi nếu xay xát 175 kg thóc thì được bao nhiêu ki-lô-gam gạo?

🔴 **Ví dụ 2.** Mua 6 gói kẹo thì hết 45000 đồng. Khi đó với 60000 đồng thì mua được mấy gói kẹo như thế?

🔴 **Ví dụ 3.** Một ô tô chạy quãng đường 225 km trong 4,5 giờ. Với vận tốc đó xe chạy 150 km trong bao lâu?

🔴 **Ví dụ 4.** Hai bình nước cùng có dạng hình trụ với đáy là những hình tròn bằng nhau. Chiều cao của cốc nhỏ bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của cốc to và dung tích cốc nhỏ bé hơn dung tích cốc lớn là 150 ml. Tính dung tích của mỗi cốc.

🔴 **Ví dụ 5.** Hai bức tranh hình chữ nhật có chiều rộng bằng nhau nhưng chiều dài bức tranh lớn gấp 3 chiều dài bức tranh nhỏ. Biết để sơn toàn bộ bề mặt của bức tranh nhỏ cần dùng 250 ml sơn, tính lượng sơn cần dùng để sơn toàn bộ bề mặt của bức tranh lớn.

🔴 **Ví dụ 6.** Một vị tử phú chia gia tài trị giá 10,5 tỉ đồng cho ba người con sao cho số tiền ba người con nhận được tỉ lệ thuận với 6; 7; 8. Hỏi mỗi người con được chia bao nhiêu tiền?

🔴 **Ví dụ 7.** Bác An chia 84 chiếc bút chì vào ba hộp cỡ nhỏ, trung bình và lớn. Biết số bút chì trong ba hộp nhỏ, trung bình và lớn tương ứng tỉ lệ thuận với 1; 2; 4; tính số bút chì có trong mỗi hộp.

 **Dạng : Chia một số M thành những phần x, y, z tỉ lệ thuận với các số a, b, c cho trước**

🔴 **Ví dụ 1.** Chia số 850 thành ba phần tỉ lệ thuận với 3, 5, 9.

🔴 **Ví dụ 2.** Số đo các góc $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ của $\triangle ABC$ tỉ lệ thuận với 2, 3, 4. Hãy tính số đo mỗi góc của tam giác đó.

🔴 **Ví dụ 3.** Độ dài ba cạnh của một tam giác tỉ lệ thuận với 4, 7, 9. Biết cạnh nhỏ nhất là 20 cm, tính độ dài của cạnh lớn nhất.

🔴 **Ví dụ 4.** Chiều dài và chiều rộng của một hình chữ nhật tỉ lệ thuận với 5 và 3. Biết chu vi của hình chữ nhật là 144 cm. Tính diện tích hình chữ nhật đó.

C BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho biết a và b là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Điền số thích hợp vào bảng sau:

a	9	12	-27			
b	-3			5	-6	-9

Viết công thức mô tả mối quan hệ phụ thuộc giữa hai đại lượng a và b .

Bài 2. Theo bảng giá trị dưới đây, hai đại lượng x và y có phải là hai đại lượng tỉ lệ thuận không?

a)

x	4	-6	8	-2
y	6	-9	12	-3

b)

x	4	-8	-12	24
y	1	-2	3	6

Bài 3. Cho biết y và x là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Hãy điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau:

x	3	6	9	
y	2			8

Bài 4. Các giá trị tương ứng của hai đại lượng y và x được cho trong các bảng sau:

a)

x	1	2	3	4
y	2,5	5	7,5	-10

b)

x	-2	-1	1	3
y	8	4	-4	-12

Hỏi hai đại lượng y và x có tỉ lệ thuận không?

Bài 5. Cho các giá trị tương ứng của x và y trong bảng dưới.

Bảng I	x	0,65	2,75	0,6	1,34	37
	y	5,2	22	4,8	10,72	296

Bảng II	x	-2^5	-2^3	-2^1	2^2	2^4
	y	128	32	4	-16	-64

a) Trong mỗi bảng, các đại lượng x và y có tỉ lệ thuận với nhau không?

b) Nếu các đại lượng x và y tỉ lệ thuận với nhau, hãy chỉ ra hệ số tỉ lệ và viết công thức biểu thức biểu thị sự tương quan đó.

Bài 6. Biết x và y trong bảng sau là hai đại lượng tỉ lệ thuận, điền số thích hợp vào ô trống

x	1	2			5
y	$-\frac{2}{3}$		-2	$-2\frac{2}{3}$	

Tìm giá trị tương ứng của y với x , có thể dùng 1 trong 2 tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận.

Bài 7. Cho x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Kí hiệu x_1 và x_2 là hai giá trị của đại lượng x mà $x_1 = -1$ và $x_2 = -3$. Gọi y_1 và y_2 là hai giá trị tương ứng của đại lượng y mà $y_1 - y_2 = -2$.

- Tìm các giá trị y_1 và y_2 .
- Đại lượng x và y liên hệ với nhau theo công thức nào?

Bài 8. Cứ 100 kg thóc cho 65 kg gạo. Chất bột chứa trong gạo là 80%.

- Hỏi trong 30 kg thóc có bao nhiêu ki lô gam chất bột?
- Từ 1 kg gạo người ta làm ra được 2,2 kg bún tươi. Hỏi để làm ra 14,3 kg bún tươi cần bao nhiêu ki-lô-gam thóc?

Bài 9. Có hai đội công nhân. Đội một có 35 người, nếu mỗi người làm trong 16 ngày thì đào được 864 m³ đất. Hỏi 20 người của đội hai, mỗi người làm trong 14 ngày sẽ đào được bao nhiêu mét khối đất? (giả thiết năng suất lao động của mỗi người là như nhau).

Bài 10. Biết 78 người hoàn thành một công việc trong 65 ngày.

- Nếu năng suất lao động của mỗi người như nhau thì cần thêm bao nhiêu người nữa để hoàn thành công việc đó trong 39 ngày?
- Nếu cải tiến công cụ để năng suất lao động tăng thêm 20% thì cần giảm bao nhiêu người mà vẫn hoàn thành công việc đó trong 65 ngày?

Chú ý

Trong bài toán này con số 65 ngày chỉ để minh họa cho số ngày là một số không đổi.

Bài 11. Cà phê hạ giá $23\frac{1}{7}\%$. Với số tiền trước đây mua được 53,8 kg cà phê thì nay mua được bao nhiêu kg cà phê hạ giá?

Bài 12. Để truyền một chuyển động, người ta có thể dùng dây cu-roa, dùng xích hoặc dùng bánh xe có răng. Ta xét một bộ máy truyền chuyển động có hai bánh răng được khớp vào nhau dưới đây:

- Nếu bánh xe thứ nhất có 65 răng và quay 36 vòng/phút thì bánh xe thứ hai có 45 răng sẽ quay được bao nhiêu vòng/phút?
- Muốn bánh xe thứ hai quay 78 vòng/phút thì bánh xe thứ nhất cần thiết kế có bao nhiêu răng?

Bài 13. Cho biết x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ 6, y tỉ lệ thuận với z theo hệ số tỉ lệ 7. Hỏi x tỉ lệ thuận với z không? Nếu có thì hệ số tỉ lệ là bao nhiêu?

Bài 14. Hai bình đựng nước có dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài và chiều rộng tương ứng bằng nhau. Thể tích bình nhỏ và bình lớn lần lượt là 500 ml và 1 lít. Biết chiều cao của bình lớn là 40 cm, tính chiều cao của bình nhỏ.

 Bài 15. Bạn Nhi chia 6,3 kg gạo vào ba túi sao cho lượng gạo trong ba túi tỉ lệ thuận với 2; 3; 4. Tính khối lượng gạo có trong mỗi túi.

 **Bài 16.** Bốn người thợ sửa 20 m đường trong 1,5 giờ. Hỏi trong 3 giờ, 8 người thợ sửa được bao nhiêu mét đường (biết các người thợ có cùng năng suất)?

 **Bài 17.** Lúc 7 giờ, hai xe cùng xuất phát từ Hà Nội và đi trên cùng tuyến đường. Đến 9 giờ, khoảng cách giữa hai xe là 20 km. Biết vận tốc xe thứ nhất gấp 1,5 lần vận tốc xe thứ hai, tính quãng đường mỗi xe đã đi.

 **Bài 18.** Hai đơn vị vận tải cùng chuyên chở đất đến công trường xây dựng. Đơn vị I có 12 xe, đơn vị II có 15 xe, trọng tải các xe đều như nhau. Biết đơn vị I trở được 60 cm^3 đất, hỏi đơn vị II trở được bao nhiêu mét khối đất?

 Bài 19. Chia số 455 thành ba phần tỉ lệ thuận với:

a) 3, 4, 6.

b) $\frac{3}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}$.

 **Bài 20.** Đoạn đường AB dài 275 km. Cùng một lúc, một ô tô chạy từ A và một xe máy chạy từ B , đi ngược chiều để gặp nhau. Vận tốc ô tô là 60 km/h; vận tốc của xe máy là 50 km/h. Tính xem đến khi gặp nhau thì mỗi xe đã đi được một quãng đường là bao nhiêu?

 **Bài 21.** Một xe đạp và một xe máy cùng đi một lúc từ thành phố A đến thành phố B . Vì vận tốc của xe đạp nhỏ hơn vận tốc của xe máy là 18 km/h , nên khi xe máy tới B thì xe đạp mới tới C , cách B một quãng đường bằng $0,6$ quãng đường AB . Tìm vận tốc mỗi xe.

 **Bài 22.** Chia số 38 thành ba số sao cho số thứ nhất và số thứ hai tỉ lệ theo $0,8 : 0,375$, còn số thứ hai và số thứ ba tỉ lệ theo $0,25$ và $1,75$.

 BÀI TẬP NÂNG CAO

Câu 1. Một cửa hàng có ba súc vải cùng khổ và có tổng độ dài là 86,1 m. Khi bán 28% súc vải thứ nhất, 40% súc vải thứ hai và 64% súc vải thứ ba thì chiều dài bs súc vải còn lại đều bằng nhau. Hỏi chiều dài mỗi súc vải khi chưa bán?

Câu 2. Một nông trường trồng rừng phòng hộ vào ba lô đất. Biết diện tích lô thứ nhất bằng 40% diện tích cả ba lô. Còn diện tích lô thứ hai và thứ ba tỉ lệ theo 1,5 và 1,(3). Nếu diện tích lô thứ nhất lớn hơn diện tích lô thứ ba $\lg 1,2$ ha, thì diện tích của cả ba lô là bao nhiêu hecta?

Câu 3. Một người thợ làm một chiếc hộp hình chữ nhật có dung tích 8900 cm^3 . Biết chiều dài và chiều cao tỉ lệ theo 5 và 2, còn chiều rộng và chiều cao tỉ lệ theo 7 và 8. Tìm kích thước chiếc hộp.

Câu 4. Chia số 38 thành ba số sao cho số thứ nhất và số thứ hai tỉ lệ theo 0,8 và 0,375; còn số thứ hai và số thứ ba tỉ lệ theo 0,25 và 1,75.

Câu 5. Nhà trường dự định chia vở viết cho ba lớp 7A, 7B và 7C tỉ lệ theo số học sinh là $7 : 6 : 5$. Nhưng sau đó vì có học sinh chuyển giữa ba lớp nên phải chia lại theo tỉ lệ $6 : 5 : 4$. Như vậy có lớp đã nhận được ít hơn theo dự định là 12 quyển vở. Tính số vở mỗi lớp nhận được.

- ❖ **Câu 6.** Tìm ba phân số có tổng bằng $9\frac{9}{70}$, biết các tử số tỉ lệ theo $3 : 4 : 5$ và các mẫu số tương ứng tỉ lệ theo $5 : 1 : 2$.
- ❖ **Câu 7.** Hiện nay tuổi cha bằng 2,2 lần tuổi con. Trước đây 25 năm tuổi con bằng $\frac{5}{41}$ tuổi cha. Hỏi khi tuổi cha gấp 3 lần tuổi con thì con bao nhiêu tuổi?
- ❖ **Câu 8.** Anh hơn em 3 tuổi. Tìm tuổi anh và tuổi em, biết tuổi anh hiện nay bằng 2 lần tuổi em khi tuổi anh bằng tuổi em hiện nay.
- ❖ **Câu 9.** Một người đi xe đạp và một người đi xe máy cùng đi một lúc từ A tới B . Vì vận tốc xe đạp nhỏ hơn vận tốc của xe máy là 18 km/giờ nên khi xe đạp tới C thì xe máy đã tới D quá C một đoạn bằng 0,6 quãng đường AD . Tính vận tốc của mỗi xe.
- ❖ **Câu 10.** Một chuyển động phải đi một quãng đường 900 km với vận tốc 10 km/giờ. Một chuyển động thứ hai phải đi với quãng đường 400 km nhưng với vận tốc 20 km/giờ. Nếu cả hai cùng khởi hành một lúc thì sau bao lâu quãng đường còn lại của chuyển động thứ nhất sẽ gấp 4 lần quãng đường còn lại của chuyển động thứ hai?

BÀI 23. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

Nếu đại lượng y tỉ lệ nghịch với đại lượng x theo công thức $y = \frac{a}{x}$ (a là hằng số khác 0) thì ta nói y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ a .

Chú ý

Nếu y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ a thì x cũng tỉ lệ nghịch với y theo hệ số tỉ lệ a . Khi đó ta nói hai đại lượng x và y tỉ lệ nghịch với nhau.

2 TÍNH CHẤT

Nếu hai đại lượng x và y tỉ lệ nghịch với nhau thì:

✦ Tích hai giá trị tương ứng của chúng luôn không đổi (và bằng hệ số tỉ lệ):

$$x_1y_1 = x_2y_2 = x_3y_3 = \dots = a \text{ hay } \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \dots = a.$$

✦ Tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng nghịch đảo của tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1}; \frac{y_1}{y_3} = \frac{x_3}{x_1}; \frac{y_2}{y_3} = \frac{x_3}{x_2}; \dots$$

3 MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

Để giải toán về đại lượng tỉ lệ nghịch, ta cần nhận biết được hai đại lượng tỉ lệ nghịch trong bài toán. Từ đó ta có thể lập các tỉ số bằng nhau và dựa vào tính chất của dãy tỉ số bằng nhau để tìm các yếu tố chưa biết.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng : Nhận biết đại lượng tỉ lệ nghịch

🔴 **Ví dụ 1.** Theo bảng giá trị dưới đây, hai đại lượng x và y có phải là hai đại lượng tỉ lệ nghịch không?

a)

x	20	-10	4	2
y	3	-6	15	30

b)

x	10	-4	50	-100
y	10	25	2	-1

🔴 **Ví dụ 2.** Theo bảng giá trị dưới đây, hai đại lượng a và b có phải là hai đại lượng tỉ lệ nghịch không?

a)

a	9	2	-3	-6
b	6	27	-18	-9

b)

a	8	-4	16	32
b	4	-8	-2	1

❶ Ví dụ 3. Các giá trị tương ứng của hai đại lượng y và x được cho trong bảng sau:

x	2	3	4	5
y	12	8	6	4,8

Hỏi hai đại lượng y và x có tỉ lệ nghịch với nhau không?

❶ Ví dụ 4. Các giá trị tương ứng của x và y được cho trong bảng sau

x	-2	-1	4	8
y	-8	-16	4	2

Hai đại lượng x và y có tỉ lệ nghịch với nhau hay không? Vì sao?

❶ Ví dụ 5. Các giá trị tương ứng của hai đại lượng y và x được cho trong bảng sau:

x	-2	-3	6	9
y	27	18	-8	6

Hỏi hai đại lượng y và x có tỉ lệ nghịch với nhau không?

❶ Ví dụ 6. Bảng sau cho biết giá trị tương ứng của y và x :

x	2	3	4	6
y	6	4	3	2

Khi đó thì trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng, khẳng định nào sai?

- a) Hai đại lượng y và x tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số tỉ lệ $a = \frac{1}{3}$.
- b) Hai đại lượng y và x tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số tỉ lệ $a = 12$.

❶ Ví dụ 7. Cho biết y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ 20, x tỉ lệ nghịch với z theo hệ số tỉ lệ 16. Hỏi y tỉ lệ thuận hay tỉ lệ nghịch với z và hệ số tỉ lệ bằng bao nhiêu?

❶ Ví dụ 8. Cho biết y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ -10, x tỉ lệ nghịch với z theo hệ số tỉ lệ 15. Hỏi y tỉ lệ thuận hay tỉ lệ nghịch với z và hệ số tỉ lệ bằng bao nhiêu?

📄 Dạng : Tìm giá trị của một đại lượng tỉ lệ nghịch khi biết giá trị của đại lượng kia

❶ Ví dụ 1. Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Điền số thích hợp vào bảng sau:

x	3	1	-2			
y	-4			18	12	-1

Viết công thức mô tả mối quan hệ phụ thuộc giữa hai đại lượng x và y .

❶ Ví dụ 2. Cho biết a và b là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Điền số thích hợp vào bảng sau:

a	6	9	-4			
b	-6			3	-2	12

Viết công thức mô tả mối quan hệ phụ thuộc giữa hai đại lượng a và b .

❶ Ví dụ 3. Cho biết y và x là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Hãy điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau:

x	$x_1 = 8$	$x_2 = 6$	
y	$y_1 = -9$		$y_3 = 18$

❷ Ví dụ 4. Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Điền các số thích hợp vào ô trống trong bảng sau

x	0,5	-1,2			4	6
y			3	-2	1,5	

❸ Ví dụ 5. Cho x và y tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số tỉ lệ $k = \frac{1}{2}$.

a) Hãy biểu diễn y theo x .

b) Tính giá trị của y khi $x = -\frac{1}{16}$.

❹ Ví dụ 6. Cho biết hai đại lượng x và y tỉ lệ nghịch với nhau và khi $x = 8$ thì $y = 15$.

a) Tìm hệ số tỉ lệ k .

b) Hãy biểu diễn y theo x .

c) Tính giá trị của y khi $x = 6$, $x = 10$.

❺ Ví dụ 7. Cho biết hai đại lượng y và x là tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số tỉ lệ $a = 6$. Cặp giá trị nào dưới đây là cặp giá trị tương ứng của hai đại lượng nói trên:

a) $x = 12$; $y = 2$;

b) $x = 9$; $y = \frac{2}{3}$;

❻ Ví dụ 8. Cho biết hai đại lượng y và x tỉ lệ nghịch với nhau. Nếu $x = -3$ thì $y = 8$. Hỏi hai đại lượng y và x liên hệ với nhau theo công thức nào?

Dạng : Giải bài toán thực tế về hai đại lượng tỉ lệ nghịch

❶ Ví dụ 1. Một ô tô chạy từ A đến B với vận tốc 60 km/h thì hết 2,5 giờ. Lúc từ B về A xe chạy với vận tốc 50 km/h thì mất bao lâu?

❷ Ví dụ 2. Để hoàn thành một công việc cần 12 người làm trong 10 ngày. Nếu muốn làm xong sớm hơn 2 ngày thì cần điều động thêm bao nhiêu người (với năng suất như nhau)?

❸ Ví dụ 3. Một ô tô chạy từ A đến B với vận tốc 50 km/h rồi chạy từ B về A xe chạy với vận tốc 40 km/h. Cả đi lẫn về mất 4 giờ 30 phút. Tính thời gian đi và thời gian về.

❹ Ví dụ 4. Giá mỗi kg gạo loại II bằng 60% giá mỗi kg gạo loại I. Hỏi với cùng số tiền để mua 12 kg gạo loại I có thể mua bao nhiêu kg gạo loại II?

🔴 **Ví dụ 5.** Giá mỗi chai nước lớn bằng 125% giá mỗi chai nước nhỏ. Hỏi với cùng số tiền để mua 8 chai nước lớn có thể mua bao nhiêu chai nước nhỏ?

🔴 **Ví dụ 6.** Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc 60 km/h và trở về A với vận tốc 48 km/h. Cả đi lẫn về (không tính thời gian nghỉ) mất 13 giờ 30 phút. Tính độ dài quãng đường AB .

🔴 **Ví dụ 7.** Ba nhóm học sinh cùng tham gia trồng cây (mỗi nhóm đều phải trồng n cây). Nhóm I trồng xong trong 3 ngày, nhóm II trồng xong trong 5 ngày, nhóm III trồng xong trong 6 ngày. Hỏi mỗi nhóm có bao nhiêu học sinh? Biết rằng nhóm II có nhiều hơn nhóm III 1 học sinh (năng suất trồng cây của mỗi học sinh bằng nhau).

🔴 **Ví dụ 8.** Ba đội công nhân sửa ba đoạn đường có cùng chiều dài. Đội thứ nhất sửa xong trong 3 ngày, đội thứ hai trong 4 ngày và đội thứ ba trong 9 ngày. Biết đội thứ hai có nhiều hơn đội thứ ba là 5 người, tính số công nhân của mỗi đội (năng suất các công nhân như nhau).

🔴 **Ví dụ 9.** Ba xe khởi hành cùng một lúc để chở nguyên liệu từ kho đến phân xưởng. Thời gian ba xe di chuyển lần lượt là 10 giờ, 15 giờ và 25 giờ. Biết vận tốc xe thứ nhất lớn hơn vận tốc xe thứ hai là 5 km/h, tính vận tốc của mỗi xe.

📄 **Dạng :** Chia một số M thành những phần x, y, z tỉ lệ nghịch với các số a, b, c cho trước

🔴 **Ví dụ 1.** Chia số 200 thành ba phần tỉ lệ nghịch với 7, 4, 2.

🔴 **Ví dụ 2.** Chia số 116 thành ba phần tỉ lệ nghịch với $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$ và 3.

🔴 **Ví dụ 3.** Ba người A, B, C mua tất cả 5,75 m vải để may áo cỡ như nhau. Khổ vải mà A, B, C đã mua lần lượt là 0,8 m, 0,9 m và 1,2 m. Hỏi mỗi người mua mấy mét vải?

📁 BÀI TẬP VẬN DỤNG

🔴 **Bài 1.** Biết y và x là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Hãy điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau:

x	2	3	4	
y	18			-6

🔴 **Bài 2.** Cho biết a và b là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Thay mỗi dấu “?” trong bảng sau bằng số thích hợp.

a	15	10	-30			
b	-20			-6	60	-50

Viết công thức mô tả mối quan hệ phụ thuộc giữa hai đại lượng a và b .

🔴 **Bài 3.** Theo bảng giá trị dưới đây, hai đại lượng x và y có phải là hai đại lượng tỉ lệ nghịch không?

a)

x	-8	2	-4	1
y	8	-32	16	-64

b)

x	4	-8	-12	24
y	30	-15	10	5

Bài 4. Các giá trị tương ứng của hai đại lượng y và x được cho trong các bảng sau. Hỏi hai đại lượng y và x có tỉ lệ nghịch không?

a)

x	2	-3	4	24
y	-12	8	6	-1

b)

x	1	2	4	-5
y	10	5	2,5	-2

Bài 5. Cho hai đại lượng x và y tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số tỉ lệ $k = 16$.

a) Hãy biểu diễn y theo x .

b) Tính giá trị của y khi $x = -\frac{1}{4}$.

Bài 6. Cho biết hai đại lượng x và y tỉ lệ nghịch với nhau và khi $x = 2$ thì $y = 9$.

a) Tìm hệ số tỉ lệ k .

b) Hãy biểu diễn y theo x .

c) Tính giá trị của y khi $x = -2$, $x = 1$, $x = 3$, $x = 8$.

Bài 7. Cho biết hai đại lượng x và y tỉ lệ nghịch với nhau và khi $x = 4$ thì $y = 9$.

a) Tìm hệ số tỉ lệ k .

b) Hãy biểu diễn y theo x .

c) Tính giá trị của y khi $x = -9$, $x = -6$, $x = 3$, $x = 12$, $x = 36$.

Bài 8. Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Điền các số thích hợp vào ô trống trong bảng sau

x	-20	-12	2	3	4	5	
y		-5					10

Bài 9. Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Điền các số thích hợp vào ô trống trong bảng sau

x	-9	-1		3
y		-27	27	

Bài 10. Các giá trị tương ứng của x và y được cho trong bảng sau

x	2	3	5	6
y	15	10	6	5

Hai đại lượng x và y có tỉ lệ nghịch với nhau hay không? Vì sao?

Bài 11. Cho biết y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ 7, x tỉ lệ nghịch với z theo hệ số tỉ lệ -5. Hỏi y tỉ lệ thuận hay tỉ lệ nghịch với z và hệ số tỉ lệ bằng bao nhiêu?

Bài 12. Thể tích chai lớn bằng 140% thể tích chai nhỏ. Hỏi với cùng lượng nước để làm đầy 20 chai nước lớn có thể làm đầy bao nhiêu chai nước nhỏ?

Bài 13. Ba nhóm thợ cùng may một số lượng áo như nhau. Nhóm thứ nhất may xong trong 10 giờ, nhóm thứ hai trong 12 giờ và nhóm thứ ba trong 20 giờ. Biết nhóm thứ ba có ít hơn nhóm thứ nhất là 3 người, tính số thợ may của mỗi nhóm (năng suất các thợ may như nhau).

Bài 14. Bốn hộp bánh có giá bằng nhau và chứa tổng cộng 34 gói bánh. Hỏi mỗi hộp chứa bao nhiêu gói bánh biết giá mỗi gói bánh trong các hộp lần lượt là 3000 đồng, 6000 đồng, 8000 đồng và 12000 đồng?

Bài 15. 20 công nhân cùng làm một công việc thì hết 6 giờ. Nếu có thêm 4 công nhân nữa cùng làm thì sẽ xong sớm công việc được mấy giờ?

Bài 16. Chia số 7567 thành ba phần tỉ lệ nghịch với:

a) 4, 7, 6.

b) $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{3}{8}$.

Bài 17. Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc ô tô là 50 km/h. Lúc đi từ B về A xe chạy với vận tốc là 60 km/h. Biết thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút. Tính thời gian đi và thời gian về.

Bài 18. Một xe tải chạy từ thành phố A đến hải cảng B gồm ba chặng đường dài bằng nhau, nhưng chất lượng mặt đường tốt xấu khác nhau nên vận tốc trên mỗi chặng đường lần lượt bằng 40, 24 và 60 (km/h). Biết tổng thời gian đi từ A đến B là 5 giờ, tính độ dài quãng đường AB .

Bài 19. Một người mang một số tiền vào siêu thị hoa quả và nhắm tính thấy với số tiền đó có thể mua được 3 kg nho, hoặc 4 kg táo, hoặc 5 kg mận. Tính giá tiền mỗi loại, biết 3 kg táo đắt hơn 2 kg mận là 210000 đồng.

Bài 20. Một nhân viên văn phòng có thể đánh máy được 160 từ trong 2,5 phút. Hỏi cần bao nhiêu phút để người đó đánh được 800 từ? (giả thiết rằng thời gian để đánh được các từ là như nhau).

Bài 21. Một ô tô đi từ A đến B hết 6 giờ. Hỏi khi từ B quay về A nó đi hết mấy giờ? Biết rằng vận tốc lúc về bằng 1,5 lần vận tốc lúc đi.

Bài 22. Biết 3 học sinh khi làm vệ sinh lớp học hết 3 phút. Hỏi 5 học sinh (cùng năng suất) sẽ làm vệ sinh lớp học hết bao nhiêu phút?

Bài 23. 36 em học sinh chia làm bốn nhóm cùng tham gia trồng cây (mỗi nhóm đều phải trồng n cây). Nhóm I trồng xong trong 4 ngày, nhóm II trồng xong trong 6 ngày, nhóm III trồng xong trong 10 ngày, nhóm IV trồng xong trong 12 ngày. Hỏi mỗi nhóm có bao nhiêu học sinh? Biết rằng năng suất trồng cây của mỗi học sinh bằng nhau.

Bài 24. Tìm độ dài ba cạnh của tam giác biết chu vi tam giác là 62 cm và độ dài ba cạnh tỉ lệ nghịch với 2; 3; 5.

Bài 25. Ba đội máy cày, cày trên ba cánh đồng có cùng diện tích. Đội I cày xong cánh đồng trong 8 ngày; đội II cày xong trong 9 ngày; đội III cày xong trong 12 ngày. Hỏi mỗi đội có bao nhiêu máy cày, biết rằng cả ba đội có 69 máy cày (giả sử năng suất mỗi máy cày là như nhau).

 **Bài 26.** Để phục vụ cho việc in tài liệu học tập môn Toán cho học sinh khối 7, ba xưởng in dành ra tổng cộng 12 máy in (cùng năng suất), và mỗi xưởng được giao in số lượng sách như nhau. Xưởng thứ nhất in xong trong 4 ngày, xưởng thứ hai in xong trong 6 ngày, xưởng thứ ba in xong trong 12 ngày. Hỏi mỗi xưởng có bao nhiêu máy in để phục vụ công tác này?

BÀI TẬP NÂNG CAO

 **Câu 1.** Hai bà mua gạo hết cùng một số tiền. Bà thứ nhất mua loại 4000 đồng/kg, bà thứ hai mua loại 4800 đồng/kg. Biết bà thứ nhất mua nhiều hơn bà thứ hai là 2 kg. Hỏi mỗi bà đã mua bao nhiêu kg gạo?

 **Câu 2.** Hai cạnh của một tam giác dài 25 cm và 36 cm. Tổng độ dài hai đường cao tương ứng là 48,8 cm. Tính độ dài của mỗi đường cao nói trên.

 **Câu 3.** Để làm xong một công việc, một số công nhân cần làm trong một số ngày. Một bạn học sinh lập luận rằng nếu tăng số công nhân thêm $\frac{1}{3}$ thì thời gian sẽ giảm đi $\frac{1}{3}$. Lập luận của bạn học sinh đó **đúng** hay **sai**?

 **Câu 4.** Một xe chạy từ A đến B gồm ba chặng đường dài bằng nhau nhưng chất lượng mặt đường tốt xấu khác nhau. Biết vận tốc trên mỗi chặng đường lần lượt là 72 km/giờ; 60 km/giờ; 40 km/giờ. Biết tổng thời gian xe chạy từ A đến B là 4 giờ. Tính quãng đường AB .

 **Câu 5.** Hai ô tô cùng đi từ A đến B . Xe thứ nhất đi hết 1 giờ 20 phút, xe thứ hai đi hết 1 giờ 30 phút. Tính vận tốc trung bình của mỗi xe, biết rằng trung bình 1 phút xe thứ nhất đi nhanh hơn xe thứ hai 100 m.

 **Câu 6.** Một ô tô chạy từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu ô tô chạy với vận tốc 54 km/h thì đến nơi sớm được 1 giờ. Nếu ô tô chạy với vận tốc 63 km/h thì đến nơi sớm được 2 giờ. Tính quãng đường AB và thời gian dự định đi.

 **Câu 7.** Để làm xong công việc thì 21 công nhân cần phải làm trong 15 ngày. Do cải tiến công cụ lao động nên năng suất lao động của mỗi người tăng thêm 25%. Hỏi 18 công nhân phải làm bao lâu mới xong việc đó?

ÔN TẬP CHƯƠNG VI

E BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 27. Lập tất cả các tỉ lệ thức có thể được từ bốn số sau: $0,2; \frac{1}{60}; \frac{-2}{9}; \frac{-8}{3}$.

Bài 28. Lập tất cả các tỉ lệ thức có thể được từ bốn số sau: $0,25; \frac{25}{18}; 1,5; \frac{25}{3}$.

Bài 29. Tìm thành phần chưa biết x trong các tỉ lệ thức sau:

a) $\frac{x}{20} = \frac{1,5}{6}$.

b) $\frac{-9}{x} = \frac{x}{-4}$.

Bài 30. Tìm thành phần chưa biết x trong các tỉ lệ thức sau:

a) $\frac{x}{2,6} = \frac{-8}{3,9}$

b) $\frac{25}{x} = \frac{x}{4}$

Bài 31. Từ tỉ lệ thức $\frac{a}{4} = \frac{b}{5}$ (với a, b khác 0) có thể suy ra những tỉ lệ thức nào?

Bài 32. Từ tỉ lệ thức $\frac{x}{7} = \frac{6}{y}$ (với x, y khác 0) có thể suy ra những tỉ lệ thức nào?

Bài 33. Các giá trị tương ứng của hai đại lượng x và y được cho trong bảng sau

x	1	3	5	7
y	5	15	25	35

a) Đại lượng y có tỉ lệ thuận với đại lượng x không ?

b) Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không ?

Nếu y là hàm số của x , hãy viết công thức của hàm số đó.

Bài 34. Cho biết đại lượng x tỉ lệ thuận với đại lượng y theo hệ số tỉ lệ k . Đại lượng y tỉ lệ nghịch với đại lượng z theo hệ số tỉ lệ k . Khi đó, xét các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

a) Đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ k .

b) Đại lượng x tỉ lệ nghịch với đại lượng z theo hệ số tỉ lệ k .

c) Đại lượng x tỉ lệ nghịch với đại lượng z theo hệ số tỉ lệ $2k$.

d) Đại lượng x tỉ lệ nghịch với đại lượng z theo hệ số tỉ lệ k^2 .

Bài 35. Cứ xay xát 100 kg thóc thì được 74 kg gạo. Muốn được 185 kg gạo thì phải xay xát bao nhiêu ki-lô-gam thóc ?

Bài 36. 10 công nhân làm xong một công việc trong 18 ngày. Hỏi muốn làm xong công việc đó trong 12 ngày thì cần bao nhiêu công nhân ?

Bài 37. Chia số 1316 thành ba phần

a) tỉ lệ thuận với $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{4}$ và 2;

b) tỉ lệ nghịch với $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{4}$ và 2.

Bài 38. Trong một phân xưởng may, ba tổ nhận may một số hàng như sau. Tổ I có 10 người, tổ II có 12 người, tổ III có 15 người. Biết năng suất lao động của mỗi người là như nhau và số ngày làm của tổ I hơn số ngày làm của tổ II là 3 ngày. Tính số ngày làm của mỗi tổ.

Bài 39. Dặm là tên của một đơn vị chiều dài trong Hệ đo lường Anh. Biết rằng 1 dặm $\approx 1,6$ km.

a) Hỏi một con đường dài 3 km sẽ có chiều dài là bao nhiêu dặm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

b) Độ dài của một vật thể tính theo km có tỉ lệ thuận với độ dài của vật thể đó tính theo dặm không? Nếu có thì hệ số tỉ lệ là bao nhiêu?

Bài 40. Pound (đọc là pao và viết tắt là lb) là tên một đơn vị khối lượng trong hệ đo lường Anh. Biết rằng 1 lb $\approx 0,4$ kg.

a) Hỏi một người có khối lượng 60 kg sẽ có khối lượng là bao nhiêu pound (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

b) Khối lượng của một người tính theo kg có tỉ lệ thuận với khối lượng của người đó tính theo pound không? Nếu có thì hệ số tỉ lệ là bao nhiêu?

Bài 41. Số đo ba góc $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ của tam giác ABC tỉ lệ với 2; 3; 4. Tính số đo ba góc của tam giác đó.

Bài 42. Số đo ba góc $\widehat{D}$, $\widehat{E}$, $\widehat{F}$ của tam giác DEF tỉ lệ nghịch với 2; 3; 6. Tính số đo ba góc của tam giác đó.

Bài 43. Ba đội xe tải cùng vận chuyển một lượng hàng hóa như nhau. Đội thứ nhất vận chuyển xong trong 2 giờ, đội thứ hai trong 2,5 giờ và đội thứ ba trong 3 giờ. Biết đội thứ nhất nhiều hơn đội thứ ba là 10 xe, tính số xe của mỗi đội (lượng hàng hóa mỗi xe chở được là như nhau).

Bài 44. Ba nhóm thợ thực hiện xây các ngôi nhà giống nhau. Nhóm thứ nhất xây xong trong 40 ngày, nhóm thứ hai trong 60 ngày và nhóm thứ ba trong 50 ngày. Biết nhóm thứ ba có ít hơn nhóm thứ nhất là 3 người thợ, tính số người thợ của mỗi nhóm (năng suất các người thợ là như nhau).

F BÀI TẬP BỔ SUNG

Bài 45. Lập tất cả các tỉ lệ thức có thể được từ bốn số sau: 0,6; $\frac{-3}{4}$; 16; -20.

Bài 46. Tìm thành phần chưa biết x trong các tỉ lệ thức sau:

a) $\frac{14}{x} = \frac{-21}{15}$;

b) $\frac{x}{-4} = \frac{-16}{x}$.

 **Bài 47.** Từ tỉ lệ thức $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$ (với x, y, m, n khác 0) có thể suy ra những tỉ lệ thức nào.

 **Bài 48.** Cho y và x là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Biết rằng khi $x = 3$ thì $y = 5$.

- a) Hỏi y và x liên hệ với nhau theo công thức nào?
- b) Tìm x khi $y = 7,5$.

 **Bài 49.** Cho y và x là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Biết rằng $x = -2$ thì $y = 3$.

- a) Hỏi y và x liên hệ với nhau theo công thức nào?
- b) Tìm y khi $x = 5$.

 **Bài 50.** Chia số 351 thành ba phần

- a) tỉ lệ thuận với 3; 4; 6;
- b) tỉ lệ nghịch 3; 4; 6.

 **Bài 51.** Gallon (đọc là ga-lông và viết tắt là gal) là tên một đơn vị thể tích trong Hệ đo lường Anh. Biết rằng $1 \text{ gal} \approx 3,79 \text{ l}$.

- a) Hỏi một can có dung tích 5 l sẽ có dung tích là bao nhiêu gallon (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn)?
- b) Dung tích của một vật tính theo l có tỉ lệ thuận với dung tích của vật đó tính theo gallon không? Nếu có thì hệ số tỉ lệ là bao nhiêu?

 **Bài 52.** Số đo ba góc $\widehat{M}$, $\widehat{N}$, $\widehat{P}$ của tam giác MNP tỉ lệ với 5; 7; 8. Tính số đo ba góc của tam giác đó.

 **Bài 53.** Ba bạn Hoàng, Tuấn và Minh cùng đi một con đường từ sân bóng đá tới trường. Thời gian ba bạn di chuyển lần lượt là 10 phút, 12 phút và 15 phút. Biết mỗi phút bạn Minh đi chậm hơn bạn Hoàng là 10 m, tính chiều dài quãng đường mỗi bạn đi.

 **Bài 54 (*).** Một tam giác có chu vi bằng 36 cm và độ dài ba đường cao tỉ lệ nghịch với 3; 4; 5. Tính diện tích tam giác đó.

 **Bài 55.** Thời gian một người thợ làm 6 cái bánh bằng thời gian một máy tự động làm 15 cái bánh. Hỏi mất bao lâu để người thợ đó làm được số bánh bằng số bánh máy tự động làm trong 24 giờ?



BIỂU THỨC ĐẠI SỐ VÀ ĐA THỨC MỘT BIẾN

BÀI 24. BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

- Biểu thức không chứa chữ gọi là biểu thức số. Biểu thức chỉ chứa số hoặc chỉ chứa chữ hoặc chứa cả số và chữ gọi chung là biểu thức đại số.
- Trong một biểu thức đại số, các chữ (nếu có) dùng để thay thế hay đại diện cho những số nào đó được gọi là các biến số (gọi tắt là các biến).

Chú ý

- Để cho gọn, khi viết các biểu thức đại số, ta không viết dấu nhân giữa các biến, cũng như giữa biến và số.
Chẳng hạn: $a \cdot b = ab$; $3 \cdot a = 3a$; ...
- Thông thường ta không viết thừa số 1 trong tích.
Chẳng hạn: $1 \cdot xy = xy$; $(-1) \cdot ab = -ab$.
- Với các biến, ta cũng có thể áp dụng các quy tắc và tính chất của các phép tính đối với các số.

$$x + x + x = 3x; y \cdot y = y^2; x + y = y + x.$$

$$x(y + z) = xy + xz; -(x - y + z) = -x + y - z; \dots$$

2 GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

Muốn tính giá trị của một biểu thức đại số tại những giá trị cho trước của các biến, ta thay giá trị đã cho của mỗi biến vào biểu thức rồi thực hiện các phép tính.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng : Viết các biểu thức đại số và diễn đạt các biểu thức đại số

🔴 **Ví dụ 1.** Viết các biểu thức đại số để biểu thị

- a) Tổng các bình phương của x và y ;
- b) Bình phương của tổng hai số a và b ;
- c) Tích của 2 lần x với hiệu các bình phương của x và y ;
- d) Trung bình cộng của x và y .

🔴 **Ví dụ 2.** Viết các biểu thức đại số để biểu thị

- a) Lập phương của tổng hai số x và y ;
- b) Tổng các lập phương của hai số a và b ;
- c) Thương của tổng x và y với 3 lần y ;
- d) Trung bình cộng của x, y và z .

🔴 **Ví dụ 3.** Viết các biểu thức đại số để biểu thị

- a) Chu vi hình vuông có cạnh bằng x ;
- b) Chu vi hình chữ nhật có hai cạnh là x và y .
- c) Chu vi của hình tròn có bán kính là R .

🔴 **Ví dụ 4.** Viết các biểu thức đại số để biểu thị

- a) Diện tích hình vuông có cạnh bằng x ;
- b) Diện tích hình thang có đáy lớn là a , đáy nhỏ là b và chiều cao là h ;
- c) Diện tích hình chữ nhật có chiều rộng là x (cm) và chiều dài là 5 (cm).

🔴 **Ví dụ 5.** Viết các biểu thức đại số để biểu thị

- a) Tích của hai số tự nhiên lẻ liên tiếp;
- b) Tổng các bình phương của hai số tự nhiên lẻ bất kì;
- c) Nghịch đảo của tổng hai số x và y .

🔴 **Ví dụ 6.** Viết các biểu thức đại số để biểu thị

- a) Tích của hai số tự nhiên chẵn liên tiếp;
- b) Hiệu các bình phương của hai số tự nhiên lẻ bất kì;
- c) Tổng các nghịch đảo của hai số x và y .

🔴 **Ví dụ 7.** Bưởi da xanh có giá 45 nghìn đồng một kilôgam, cam xanh có giá 40 nghìn đồng một kilôgam. Hãy viết biểu thức biểu thị cho số tiền ứng với x kilôgam bưởi và y kilôgam cam.

 Dạng : Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

🔴 Ví dụ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức

a) $A = (x - 3)^2 + 1;$

b) $B = |3x + 1| - 5.$

🔴 Ví dụ 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức

a) $A = 5 + (-2x + 1)^2;$

b) $B = |5y - 2| + (x - 1)^2 + 3.$

🔴 Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức

a) $A = -(3x - 1)^2 + 2;$

b) $B = 4 - |3x - 2|.$

🔴 Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức

a) $A = 13 - x^2;$

b) $B = 5 - (2x + 5)^4.$

🔴 Ví dụ 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

a) $A = (x - 3)^2 + 9;$

b) $B = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + 10;$

c) $C = |x - 1| + (2y - 1)^4 + 1.$

🔴 Ví dụ 6. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

a) $P = -2(x - 3)^2 + 5;$

b) $Q = \frac{5}{(x - 14)^2 + 21}.$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

 **Bài 1.** Viết các biểu thức đại số biểu thị

a) Tổng ba số nguyên liên tiếp;

b) Tổng các bình phương hai số lẻ liên tiếp;

c) Tích của số a và bình phương của số b .

 **Bài 2.** Viết biểu thức để diễn đạt ý

a) Hiệu các bình phương của a và b ;

b) Bình phương của hiệu a và b ;

c) Tích của x và y lập phương;

d) Tích của tổng a và b với hiệu của a và b .

 **Bài 3.** Viết các biểu thức đại số biểu thị

a) Tổng các bình phương của hai số a và b ;

b) Tổng của hai lần bình phương số a và số b ;

c) Tổng của x bình phương và y lập phương;

d) Nửa tổng các bình phương của hai số a và b .

 **Bài 4.** Viết các biểu thức đại số để biểu thị

- a) Tích của tổng hai số x, y và hiệu các bình phương của hai số đó;
- b) Tích ba số tự nhiên liên tiếp;
- c) Một số tự nhiên chia 4 dư 3;
- d) Chu vi của một tam giác đều có cạnh bằng a .

 **Bài 5.** Diễn đạt các biểu thức đại số sau bằng lời.

- a) $3xyz$;
- b) $2(2x - y)$;
- c) $\frac{x + y + z}{3}$.

 **Bài 6.** Một người thuê nhà với giá 3 triệu đồng một tháng và người đó phải trả tiền dịch vụ giới thiệu là 1 triệu đồng (tiền dịch vụ chỉ trả 1 lần)

- a) Hãy biểu thị giá tiền người đó phải trả khi thuê nhà trong x tháng.
- b) Tính số tiền người đó phải trả sau khi ở 2 tháng, 5 tháng.

 **Bài 7.** a) Tính giá trị của biểu thức $A = 3x^2 - 4x + 2$ tại $x = -3$ và $x = \frac{2}{3}$;

- b) Tính giá trị của biểu thức $B = (x + 3y)^2 + 2x - y$ tại $x = -2$; $y = 1$.

 **Bài 8.** Tính giá trị của biểu thức

- a) $A = \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{x + y}$ tại $x = 1$; $y = -\frac{2}{3}$;
- b) $B = 3x^3 - x^2 + 1$ tại $x = -3$; $x = 0,5$.

 **Bài 9.** Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

- a) $A = (2x + 1)^2 + \sqrt{3}$;
- b) $B = (x - 2y)^2 + |y - 1| + 3$.

BÀI TẬP NÂNG CAO

 **Câu 1.** Tính giá trị của biểu thức $A = 2x + \frac{x - y}{x + 2y}$, biết x, y thỏa $(x - 2)^2 + |y - 1| = 0$.

 **Câu 2.** Tính giá trị biểu thức $B = \frac{3a - b}{4a + b}$, biết $\frac{a}{b} = \frac{5}{2}$.

 **Câu 3.** Tính giá trị của biểu thức

- a) $C = \frac{5x - 4y}{11x - 2y}$ biết $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$;
- b) $D = (x^3 - y^2 + 1)(2x + 2y)$ tại $x = -y$.

 **Câu 4.** Cho biểu thức $M = 2x + 2y + 3xy(x + y) + 5x^2y^3 + 5x^3y^2 + 2$. Với $x + y = 0$ thì giá trị của biểu thức M bằng bao nhiêu?

 **Câu 5.** Tính giá trị của biểu thức $P = 3x + \frac{x - y}{x + y}$ với x, y thỏa mãn

$$|x - 2| + (y - 1)^2 = 0.$$

❖ Câu 6. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{21 \cdot x - 14 \cdot y}{73 \cdot x + 79 \cdot y}$ với $\frac{x}{y} = -\frac{2}{3}$.

❖ Câu 7. Cho biểu thức $N = 2x^4 + 3x^2y^2 + y^4 + y^2$. Với $x^2 + y^2 = 1$, tính giá trị của biểu thức N .

❖ Câu 8. Tính giá trị của biểu thức sau $Q = \frac{4x - 3}{3x + y} - \frac{4y + 3}{3y + x}$ biết $x - y = 3$.

❖ Câu 9. Tìm giá trị nguyên của x để $A = \frac{x - 5}{x - 3}$ có giá trị nguyên.

❖ Câu 10. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức

a) $C = 4 - 2(3x + 1)^2$;

b) $D = \frac{3}{(x - 3)^2 + 5}$.

BÀI 25. ĐA THỨC MỘT BIẾN

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 ĐƠN THỨC MỘT BIẾN

 Đơn thức một biến (gọi tắt là đơn thức) là biểu thức đại số có dạng $a \cdot x^n$, trong đó số thực $a \neq 0$ được gọi là hệ số, số mũ n (n nguyên dương) của lũy thừa của biến gọi là bậc của đơn thức.

Chẳng hạn: $-0,5x^3$ là đơn thức một biến x , với hệ số là $-0,5$; bậc là 3.

Chú ý

 Số 0 cũng được coi là một đơn thức. Đơn thức này không có bậc.

 Một số khác 0 là một đơn thức bậc 0.

 Cộng (hay trừ) hai đơn thức cùng bậc cùng biến: Để cộng (hay trừ) hai đơn thức cùng bậc ta cộng(hay trừ) các hệ số với nhau và giữ nguyên lũy thừa của biến. Tổng nhận được là một đơn thức.

 Nhân hai đơn thức: Để nhân hai đơn thức, ta nhân hai hệ số với nhau và nhân hai lũy thừa của biến với nhau. Tích nhận được cũng là một đơn thức.

2 ĐA THỨC MỘT BIẾN

 Đa thức một biến (gọi tắt là đa thức) là tổng của những đơn thức của cùng một biến; mỗi đơn thức trong tổng gọi là một hạng tử của đa thức đó.

 Số 0 cũng được coi là một đa thức, gọi là đa thức không.

 Một đơn thức cũng là một đa thức.

Chú ý

Ta thường kí hiệu đa thức bằng một chữ cái in hoa. Đôi khi còn viết thêm kí hiệu biến trong ngoặc đơn. Chẳng hạn:

$$A = A(x) = 6x^3 - 5x^2 - 4x^3 + 7.$$

3 THU GỌN, SẮP XẾP ĐA THỨC MỘT BIẾN

 Đa thức một biến thu gọn: là đa thức không chứa hai đơn thức nào cùng bậc.

 Đa thức một biến thường được sắp xếp theo lũy thừa tăng hoặc giảm của biến.

4 BẬC VÀ CÁC HỆ SỐ CỦA MỘT ĐA THỨC

Trong một đa thức thu gọn và khác đa thức không

-  Bậc của hạng tử có bậc cao nhất gọi là *bậc của đa thức* đó.
-  Hệ số của hạng tử có bậc cao nhất gọi là *hệ số cao nhất* của đa thức đó.
-  Hệ số của hạng tử bậc 0 gọi là *hệ số tự do* của đa thức đó.

Chú ý

- Đa thức không là đa thức không có bậc.
- Trong một đa thức thu gọn, hệ số cao nhất phải khác 0 (các hệ số khác có thể bằng 0).
- Muốn tìm bậc của một đa thức chưa thu gọn, ta phải thu gọn đa thức đó.

5 NGHIỆM CỦA ĐA THỨC MỘT BIẾN

-  Nếu tại $x = a$, đa thức $F(x)$ có giá trị bằng 0, tức là $F(a) = 0$, thì ta gọi a (hoặc $x = a$) là một *nghiệm* của đa thức $F(x)$.
-  Một đa thức (khác đa thức không) có thể có một nghiệm, hai nghiệm, ... hoặc không có nghiệm. Số nghiệm của một đa thức (khác đa thức không) không vượt qua bậc của đa thức đó.

❖ **Nhận xét 25.1.** Nếu một đa thức có hệ số tự do bằng 0 thì $x = 0$ là một nghiệm của đa thức đó. Chẳng hạn, trong ví dụ trên cho thấy đa thức $A(x) = 2x^2 + 6x$ có hệ số tự do bằng 0 và có nghiệm $x = 0$.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

 **Dạng :** Nhận biết đơn thức một biến. Phép nhân các đơn thức

❶ **Ví dụ 1.** Trong các biểu thức sau biểu thức nào là đơn thức một biến, khi đó hãy xác định phần hệ số, phần biến của đơn thức đó.

- | | | |
|--------------------------------------|-------------------------|--|
| a) $-3x^6$. | b) $\frac{1}{4}xy^3z$. | c) $-\frac{6}{5}$. |
| d) $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{5}x^2$. | e) $-3(x^3)^2$. | f) $\frac{1}{7}x^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)y^3$. |

❷ **Ví dụ 2.** Trong các biểu thức sau biểu thức nào không là đơn thức một biến.

- | | | | | | |
|-------------|-------------------------|-------|---------------------------|----------------------------|--------------|
| a) $9x^2$; | b) $-\frac{3}{4}xy^3$; | c) 0; | d) $1 + \frac{1}{3}x^2$; | e) $3 \cdot 5 \cdot t^3$; | f) xy^2z . |
|-------------|-------------------------|-------|---------------------------|----------------------------|--------------|

❸ **Ví dụ 3.** Thực hiện phép tính và viết kết quả dưới dạng một đơn thức. Chỉ ra hệ số và bậc của đơn thức đó.

a) $\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \cdot 2x^2 \cdot \frac{3}{4};$

b) $\left(\frac{3}{5}x^3\right) \cdot 0, 2x \cdot 5x^2;$

c) $(-4x) \cdot (8x^2) \cdot \frac{1}{16};$

d) $(-0.25x) \cdot (8x^2) \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right).$

◉ Ví dụ 4. Thực hiện phép tính và viết kết quả dưới dạng một đơn thức. Chỉ ra hệ số và bậc của đơn thức đó.

a) $-x^4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{3}{4}x^2\right)$

b) $(0,6x) \cdot \left(1\frac{1}{2}x^3\right) \cdot 5x^2;$

c) $\frac{2}{3}x^2 \cdot (-3x)^2 \cdot \frac{x}{2}.$

d) $(2x^3)(-5x^2) \cdot 7.$

Dạng : Cộng, trừ các đơn thức một biến cùng bậc

◉ Ví dụ 1. Tính tổng các đơn thức sau:

a) $3x^2; \frac{2}{3}x^2; -2x^2;$

b) $y; 3y; -7y;$

c) $5z^3; -\frac{1}{3}z^3; -4z^3;$

d) $-t^2; 2t^2; \frac{5}{6}t^2.$

◉ Ví dụ 2. Thực hiện phép cộng đơn thức và viết kết quả dưới dạng một đơn thức. Chỉ ra hệ số và bậc của đơn thức đó.

a) $\frac{7}{4}x^5 - \frac{5}{4}x^5 + (-2x^5)$

b) $\left(-\frac{2}{3}y^3\right) + 3y^3 - 2y^3 + y^3.$

◉ Ví dụ 3. Thực hiện phép cộng đơn thức và viết kết quả dưới dạng một đơn thức. Chỉ ra hệ số và bậc của đơn thức đó.

a) $-5z - 3z + (-2)^3z$

b) $2t^2 + 2, 5t^2 - 3t^2 - |-2t^2|.$

◉ Ví dụ 4. Một bác nông dân sử dụng hai máy bơm để tưới nước cho cánh đồng. Máy bơm thứ nhất mỗi giờ bơm được 20 m^3 nước. Máy bơm thứ hai mỗi giờ bơm được 18 m^3 nước. Sau khi cả hai máy chạy trong x giờ, bác tắt máy thứ hai và để máy thứ nhất chạy thêm trong $0,5$ giờ nữa rồi tắt. Hãy viết đa thức (biến x) biểu thị dung tích nước bác đã bơm cho cánh đồng. Tìm hệ số cao nhất và hệ số tự do của đa thức đó.

◉ Ví dụ 5. Ở một cửa hàng sách giá một chiếc bút bi là 4 nghìn đồng và một quyển vở là 9 nghìn đồng. Hãy viết đa thức biểu thị số tiền bạn Nam mua 2 hộp bút trong đó mỗi hộp có x chiếc bút; x quyển vở và Nam mua thêm một hộp bút chì màu giá 75 nghìn đồng. Tìm hệ số cao nhất và hệ số tự do của đa thức đó.

Dạng : Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của đa thức

◉ Ví dụ 1. Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến

a) $A(x) = 3x^4 - x^2 + 5 - x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^4 - 2.$

b) $B(x) = -2x^2 + 5x^5 - x^4 + 4 + 3x^2 + 2x^4 + x^3 - 5x^5.$

c) $C(x) = 2x^3 - x^5 + 2x^4 - x^2 + 3x^5 - 2x^2 - x^4 + 1.$

❶ Ví dụ 2. Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của đa thức theo lũy thừa tăng dần của biến

a) $A(x) = x^7 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - x^4 - x + x^7 - x^3 + 3.$

b) $B(x) = 6x^4 + 7x^3 - 2x + \frac{1}{2}x + 3 - 5x^3.$

c) $C(x) = x^4 - 3x^2 + \frac{1}{2} - x + x^5 - 2x^2 + 1.$

❷ Ví dụ 3. Hãy sắp xếp các hạng tử của mỗi đa thức sau theo lũy thừa giảm của biến:

$$A(x) = 2 + 5x^7 - 6x^2 - 8 - 11x^7 + x^5 + 7x^2;$$

$$B(x) = 8x^5 + 7x - 6x^2 - 3x^5 + 2x + 15.$$

❸ Ví dụ 4. Hãy sắp xếp các hạng tử của mỗi đa thức sau theo lũy thừa tăng của biến.

$$P(x) = 6x^3 - 8x^2 + 12 + 2x + 7x^2 - 3x^3.$$

$$Q(x) = -x - 3 + 2x^2 + 6x.$$

Dạng : Xác định bậc, hệ số của đa thức

❶ Ví dụ 1. Xác định bậc và hệ số tự do, hệ số cao nhất của mỗi đa thức sau

a) $A(x) = 3x^3 - \frac{2}{5}x^2 + 7x - 3.$

b) $B(x) = 2x + 8 - 3x^2 + 2x^3 - 4x^4 + x^5.$

c) $C(x) = 1 + 3x^2 - 4x + 8x^2 - 5x + 4x + 3x^3 - 2.$

❷ Ví dụ 2. Xác định bậc và hệ số tự do, hệ số cao nhất của mỗi đa thức sau

a) $A(x) = -\frac{1}{2}x^5 + x^4 - \frac{3}{5}x^2 + 5x + 1.$

b) $B(x) = x^4 + 4x^3 + 5x - 2 - 9x^2.$

c) $C(x) = 0,5x^4 - x^5 + 4x^3 - 2x - 2x^3 + x + 1, 5.$

❸ Ví dụ 3. Viết đa thức $M(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

 Bậc của $M(x)$ bằng 5.

 Hệ số của x^3 bằng hệ số của x bằng -3 .

 Hệ số cao nhất của $M(x)$ bằng 5 và hệ số tự do bằng 1.

🔴 **Ví dụ 4.** Viết đa thức $N(x)$ có bốn hạng tử mà hệ số cao nhất bằng 3 và hệ số tự do bằng -5 .

🔴 **Ví dụ 5.** Tìm bậc của mỗi đa thức sau

$$A(x) = 8 - 5x^2 + 3x^7 - 6x^3 + 2x - 3x^7;$$

$$B(x) = 0,3x^2 - 6x^4 - 7x^5 + 8 - x + 9x^3 - 9 + 6x.$$

🔴 **Ví dụ 6.** Cho đa thức $A(x) = (2a + 1)x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 3x^3 - 5x^4$. Xác định giá trị của a để đa thức $A(x)$ có bậc là 3.

🔴 **Ví dụ 7.** Tìm các hệ số của đa thức sau

$$P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3x + 5 - 8x^3.$$

🔴 **Ví dụ 8.** Tìm bậc và các hệ số của đa thức sau (liệt kê đầy đủ các hệ số từ lũy thừa 0 đến lũy thừa cao nhất)

$$Q(x) = 4x^3 - 6x^2 + 5 - 8x^6.$$

🔴 **Ví dụ 9.** Cho đa thức

$$P(x) = x^5 + 2x^3 - x^4 - 6x^2 + 3x^4 + 2x - x^5 + 3x^3 - 7x + 9.$$

- Thu gọn và sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến.
- Tìm hệ số tự do và hệ số cao nhất của đa thức $P(x)$.

Dạng : Tính giá trị của đa thức

Để tính giá trị của đa thức ta làm như sau

 **Bước 1.** Thu gọn đa thức (nếu cần)

 **Bước 2.** Thay giá trị của biến vào đa thức rồi thực hiện các phép tính.

Lưu ý

Giá trị của đa thức $P(x)$ tại $x = a$ được kí hiệu là $P(a)$.

🔴 **Ví dụ 1.** Cho đa thức $P(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4 - 3x + 3x^2 - 3x^3 - 5x^2 + 3$.

- Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của $P(x)$ theo lũy thừa giảm dần của biến.
- Tính $P(0)$; $P(-1)$; $P\left(\frac{2}{3}\right)$.

❶ **Ví dụ 2.** Cho đa thức: $Q(x) = x^2 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + \frac{5}{3} - 3x + x^2 + \frac{1}{3} + 3x^4$.

a) Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của $Q(x)$ theo lũy thừa tăng dần của biến.

b) Tính $Q(1)$; $Q(-1)$; $Q\left(\frac{1}{2}\right)$.

❷ **Ví dụ 3.** Tính giá trị của đa thức $P(x) = x^2 - 5x + 4$ tại $x = 4$ và $x = -4$.

❸ **Ví dụ 4.** Tính giá trị của đa thức $P(x) = 5x^{100} + 5x^{99} + 5x^{98} + \dots + 5x + 9$ tại $x = -1$.

❹ **Ví dụ 5.** Theo trung tâm dự báo thời tiết của Nga, nhiệt độ ngoài trời ở thành phố Matxcova của nước này vào một ngày của tháng 4 tại một số múi giờ được cho bởi bảng sau

Thời gian	0 (giờ)	2 (giờ)	5 (giờ)
Nhiệt độ ($^{\circ}\text{F}$)	28,4	32	33,8

Dựa vào công thức đổi độ F sang độ C là $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Em hãy:

a) Đổi nhiệt độ từ các múi giờ cho trên ra đơn vị độ C.

b) Cho biết nước đóng băng ở nhiệt độ bao nhiêu?

❺ **Ví dụ 6.** Giá trị của một chiếc máy tính bảng sau khi sử dụng x năm được cho bởi công thức:

$$F(x) = 10\,200\,000 - 1\,100\,000x \text{ (đồng)}$$

a) Hãy tính $F(1)$; $F(2)$; $F(3)$. Và cho biết $F(1)$; $F(2)$; $F(3)$ có nghĩa là gì?

b) Sau bao nhiêu năm thì giá trị của máy tính bảng là 4 700 000 đồng.

Dạng : Tìm nghiệm của đa thức

❶ **Ví dụ 1.** Cho đa thức $P(x) = x^2 + x - 2$. Trong các số 0; 1; -1; 2; -2, số nào là nghiệm của đa thức $P(x)$.

❷ **Ví dụ 2.** Cho các giá trị 1; 2; -2; -6; 8. Giá trị nào là nghiệm của đa thức

$$Q(x) = x^2 + 5x - 6.$$

❸ **Ví dụ 3.** Cho đa thức $F(x) = (2x^2 + 7x) - (x^2 + 4x + 1) - 9$.

a) Thu gọn đa thức $F(x)$.

b) Chứng minh rằng 2 và -5 đều là nghiệm của $F(x)$.

❹ **Ví dụ 4.** Cho đa thức $G(x) = -2x^2 - 3 + 5x + 3x^2 - 7x$.

- a) Thu gọn đa thức $G(x)$.
- b) Chứng minh rằng -1 và 3 đều là nghiệm của $G(x)$.

◉ Ví dụ 5. Tìm nghiệm của đa thức:

- a) $x + 5$. b) $2x - 1$. c) $-3x + \frac{3}{4}$. d) $x^2 - x$. e) $2x^2 + 6x$. f) $3x^2 + \frac{1}{2}x$.

◉ Ví dụ 6. Tìm nghiệm của đa thức:

- a) $x - 7$. b) $12 - 3x$. c) $2x + \frac{1}{4}$. d) $4x - x^2$. e) $2x^2 - 32x$. f) $x + x^2$.

◉ Ví dụ 7. Chứng tỏ các đa thức sau không có nghiệm

- a) $x^2 + 2$. b) $2x^2 + 1$. c) $x^8 + 7$.

◉ Ví dụ 8. Chứng tỏ các đa thức sau không có nghiệm

- a) $x^2 + 5$. b) $3x^2 + 2$. c) $x^4 + 10$.

◉ Ví dụ 9. Cho đa thức $P(x) = 5x + a - 2$. Tìm a để đa thức $P(x)$ có nghiệm

- a) $x = -1$. b) $x = 2$. c) $x = \frac{3}{4}$.

◉ Ví dụ 10. Cho đa thức $Q(x) = -3ax + 2a - 1$. Tìm a để đa thức $P(x)$ có nghiệm

- a) $x = 3$. b) $x = -5$. c) $x = -\frac{2}{3}$.

© BÀI TẬP VẬN DỤNG

✍ Bài 1. Tính

- a) $7x^5 - 3\frac{3}{4}x^5$ b) $-\frac{1}{2}x^4 - \left(-\frac{5}{8}x^4\right) + \frac{1}{4}x^4$.
- c) $5x \cdot (3x)^2 \cdot \frac{-1}{5}x^3$. d) $-\frac{1}{2}x \cdot \frac{6}{5}x^2 \cdot 3x^5$.

✍ Bài 2. Thu gọn và sắp xếp các đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến. Tìm bậc và hệ số tự do của chúng.

$$P(x) = x^6 - 3x^3 + 3x^2 - 6x + 2x^3 + 10 - 3x^2 - x^6;$$

$$Q(x) = 3x^2 - 5x + 2 - 6x^2 + 4x^3 + 5 - 8x^5 - x^3.$$

✍ Bài 3. Thu gọn và sắp xếp các đa thức sau theo lũy thừa tăng dần của biến. Tìm bậc và hệ số tự do của chúng.

- a) $f(x) = 5 - 7x^4 + 3x^3 + 2x + 6x^4 + 2x^2 + 4x^4$;
- b) $g(x) = x^5 + 2x^4 - 3x + 8 - 3x^4 - x^5$.

b) Đa thức $3x^2 + x - \frac{2}{3}$ có nghiệm là $x = \frac{1}{3}$ và $x = -\frac{2}{3}$.

Bài 11. Trong các giá trị $0; \frac{1}{2}; 1; 1\frac{1}{2}; 2$, giá trị nào là nghiệm của đa thức

$$P(x) = 2x^2 - 5x + 2.$$

Bài 12. Tìm nghiệm của đa thức sau

a) $M(x) = 7x + 3;$ b) $N(x) = \frac{1}{3}x - 2;$ c) $Q(x) = -2x + \frac{1}{3}.$

Bài 13. Tìm nghiệm của đa thức

a) $P(x) = (x - 3) \cdot (x + 4);$ b) $Q(x) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right) \cdot \left(2x - \frac{2}{3}\right).$

Bài 14. Tìm nghiệm của đa thức

a) $P(x) = x^2 - 9;$ b) $Q(x) = 4x^2 - 25;$ c) $R(x) = x^2 - 3.$

Bài 15. Nhà may A sản xuất một lô áo gồm 200 chiếc áo với giá vốn ban đầu là 30 000 000 đồng và bán mỗi áo giá 300 000 đồng. Khi đó gọi T là số tiền lãi (hoặc lỗ) của nhà may thu được khi bán x chiếc áo ($0 \leq x \leq 200$).

- Thiết lập đa thức biểu thị số tiền lãi (hoặc lỗ) của nhà may sau khi bán được x chiếc áo.
- Tính số tiền khi bán được 150 chiếc áo. Khi đó nhà may lãi hay lỗ?
- Hỏi cần phải bán bao nhiêu chiếc áo mới có thể thu hồi được vốn ban đầu?

Bài 16. Đa thức $P(x) = ax^2 + 5a - 2$ có một nghiệm là 1 thì hệ số của a là bao nhiêu?

Bài 17. Cho đa thức $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 5$. Tính giá trị của $f(x)$ tại $x = 1; x = -1; x = -\frac{1}{2}$.

Bài 18. Tính giá trị của đa thức

a) $M(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1$ tại $x = -2;$
b) $P(x) = x^{199} + x^{198} + x^{197} + \dots + x^2 + x$ tại $x = -1.$

Bài 19. Cho đa thức $f(x) = -x^4 + x + 7x^2 - 6x^3 + 3x^4 - 6x^2 + 6x^3 - 2x^4 - 6.$

- Thu gọn, rồi sắp xếp các số hạng của đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến x .
- Chứng minh rằng các giá trị $-2, 1$ và 3 không là nghiệm của đa thức $f(x)$.
- Tìm nghiệm của đa thức.

Bài 20. Xác định m để đa thức $f(x) = mx^2 - 2x + 8$ có nghiệm là -1 .

 **Bài 21.** Tìm nghiệm của các đa thức sau:

a) $f(x) = 2014x - 1.$

b) $h(x) = (x - 2014) \cdot (2015 - x).$

c) $g(x) = x^2 - 81.$

d) $\varphi(x) = 125x - x^4.$

 **Bài 22.** Trong tập hợp số $\{-3; -2; -1; 0\}$ thì số nào là nghiệm của đa thức $f(x) = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$?

 **Bài 23.** Trong tập hợp số $\{2; 0; 1; 4\}$ thì số nào là nghiệm, số nào không là nghiệm của đa thức sau: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$?

BÀI TẬP NÂNG CAO

 **Câu 1.** Tìm nghiệm của đa thức

a) $x^2 - 7x + 12;$

b) $2x^2 - 5x + 2.$

 **Câu 2.** Chứng tỏ rằng các đa thức sau không có nghiệm.

a) $x^4 + 4;$

b) $x^2 + 2x + 2;$

c) $x^2 - 6x + 10.$

 **Câu 3.** Tìm nghiệm của các đa thức sau:

a) $A = x^3 - 3x.$

b) $B = x^2 - 5x + 6.$

c) $C = x^3 + x^2 + x + 1.$

d) $D = x^2 + \sqrt{2015}.$

 **Câu 4.** Chứng minh rằng các đa thức sau vô nghiệm (không có nghiệm):

a) $f(x) = x^2 + 2015.$

b) $h(x) = x^2 + 6x + 10.$

 **Câu 5.** Cho đa thức $P(x) = 2x^2 + mx - 10.$

a) Tìm m để $P(x)$ có một nghiệm là 2.

b) Tìm nghiệm còn lại.

 **Câu 6.** Cho đa thức $P(x) = x^2 - ax + 2.$

a) Xác định a để $P(x)$ nhận 2 là nghiệm.

b) Tìm tập hợp nghiệm của $P(x)$ ứng với giá trị vừa tìm được của $a.$

 **Câu 7.** Tìm giá trị của m để:

a) Đa thức $f(x) = mx^3 + x^2 + x + 1$ có nghiệm là 1.

b) Đa thức $g(x) = x^4 + m^2x^3 + mx^2 + mx - 1$ có nghiệm là 1.

c) Đa thức $h(x) = x^3 - 2x^2 + m$ có nghiệm là $-3.$

 **Câu 8.** Cho đa thức $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{2014} + x^{2015}.$ Tính $f(-1)$, $f(0)$ và $f(1).$

- ❖ **Câu 9.** Cho đa thức $f(x) = ax^3 - bx^2 + cx - d$ ($a \neq 0$). Biết đa thức $f(x)$ có hai nghiệm là ± 3 . Tìm nghiệm còn lại.
- ❖ **Câu 10.** Bạn BEE cho rằng đa thức $f(x) = x^3 - 1$ là một đa thức bậc ba, nên ngoài nghiệm là 1 thì đa thức $f(x)$ còn có hai nghiệm nữa. Các bạn thấy thế nào?
- ❖ **Câu 11.** Chứng minh rằng đa thức $f(x) = x^3 + 1$ chỉ có một nghiệm duy nhất là -1 .
- ❖ **Câu 12.** Cho các đa thức $f(x) = ax + b$ và $g(x) = bx + a$ ($a, b \neq 0$). Giả sử đa thức $f(x)$ có nghiệm là x_0 , tìm nghiệm của đa thức $g(x)$.
- ❖ **Câu 13.** Tìm các hệ số a, b, c, d của đa thức $ax^3 + bx^2 + cx + d$. Biết $f(0) = -5$, $f(1) = 4$, $f(2) = 31$, $f(3) = 88$.
- ❖ **Câu 14.** Cho đa thức $\varphi(x) = ax^3 - bx^2 + cx - d$ ($a \neq 0$).
- a) Tìm sự liên hệ giữa các hệ số a và c , b và d sao cho $\varphi(x)$ có hai nghiệm là -1 và 1 .
- b) Biết đa thức $\varphi(x)$ có hai nghiệm là ± 2 , tìm nghiệm thứ ba còn lại.

BÀI 26. PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ ĐA THỨC MỘT BIẾN

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 CỘNG, TRỪ HAI ĐA THỨC MỘT BIẾN

Để cộng hoặc trừ hai đa thức một biến, ta có thể thực hiện theo một trong hai cách sau

Cách 1. Cộng, trừ đa thức theo “hàng ngang”: Viết hai đa thức trong dấu ngoặc; bỏ dấu ngoặc theo quy tắc dấu ngoặc và nhóm các hạng tử cùng bậc để thu gọn đa thức.

Cách 2. Cộng, trừ đa thức theo “cột dọc”: Sắp xếp các hạng tử của hai đa thức cùng theo lũy thừa giảm (hoặc tăng) của biến, rồi đặt phép tính theo cột dọc (chú ý đặt các hạng tử cùng bậc thẳng cột với nhau). Cộng (trừ) hai đơn thức trong từng cột, ta có tổng (hiệu) cần tìm.

2 CHÚ Ý

Chú ý

Phép cộng đa thức cũng có các tính chất như phép cộng các số thực. Cụ thể là:

-  Tính chất giao hoán: $A + B = B + A$.
-  Tính chất kết hợp: $(A + B) + C = A + (B + C)$.
-  Cộng với đa thức không: $A + 0 = 0 + A = A$.

Chú ý

Tương tự như các số, đối với các đa thức P, Q, R , ta cũng có:

-  Nếu $Q + R = P$ thì $R = P - Q$.
-  Nếu $R = P - Q$ thì $Q + R = P$.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

 **Dạng :** Tính tổng hoặc hiệu của hai đa thức

 **Ví dụ 1.** Tìm tổng của hai đa thức sau (trình bày bằng hai cách)

- a) $2x^2 - 0,5x + 5$ và $3x^2 + 2,5x + 4$;
- b) $7 - 4y^2 + 3y + y^3$ và $-3y^3 + 4y^2 + 1$;

c) $-z^4 + 3z^3 + 3z + 5$ và $3z^2 + z^4 + 5 - z$;

d) $\frac{3}{4}t^5 - 2t^4 + 3t^2 - t + 1$ và $\frac{-1}{4}t^5 + 4t^4 + t^3 - 2t^2 - 3$.

🔴 **Ví dụ 2.** Tìm tổng của hai đa thức sau (trình bày bằng hai cách)

a) $-2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 5x - 1$ và $4x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + 6$

b) $5y^3 + 3y - 2y^2 + 3y^4 - 13$ và $-4y^3 + 5y^2 + y + 9$;

c) $-\frac{3}{2}z^4 + z^3 - 3z + 1$ và $-\frac{1}{2}z^4 + z^3 + 5z - 3$;

d) $t^5 - 3t^2 + 7t^4 - 9t$ và $t^2 - 3t^4 + t^3 - t^5 - 3$.

🔴 **Ví dụ 3.** Tìm hiệu sau theo hai cách

a) $(3x^3 - 5x^2 + 6x + 5) - (x^3 - x^2 + 4x - 1)$

b) $(5x^3 - 2x^2 + x - 3) - (4x^3 + 5x - 1)$;

c) $(x^4 + 3x^2 + 5) - (x^4 - x^3 + 2x^2 + 4x + 1)$;

d) $(14x^3 + 2x^2 + 7x) - (11x^3 + x^2 + 5x - 4)$.

🔴 **Ví dụ 4.** Tìm hiệu sau theo hai cách

a) $(2x^3 + x^2 - 6x + 7) - (-x^2 + 3x - 6)$

b) $\left(\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + 5x - 3\right) - \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 1\right)$

c) $(4x^4 - 5x^2 + 1) - (3x^4 + x^3 - 4x^2 + 4x - 3)$;

d) $(7x^3 + 3,5x^2 + 2x) - (5x^3 + 1,5x^2 + 5x - 1)$.

🔴 **Ví dụ 5.** Cho hai đa thức

$$A = -x^4 + 7x^2 + 2x^3 - 10 + 6x^4 - 3x^3 + 5x$$

$$B = 2x^4 + 6 - x^3 + 5x - 5x^2 - x^4 + 4x^3$$

Tính $A + B$ và $A - B$.

🔴 **Ví dụ 6.** Cho hai đa thức

$$C = -2 - 4x + x^2 + 6x^3 + 3x^4$$

$$D = 7 + 3x + x^2 - x^3$$

Tính $C + D$ và $C - D$.

❶ Ví dụ 7. Cho các đa thức

$$A = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$$

$$B = -x^3 + 2x^2 - 5x + 7$$

$$C = 2x^3 + x^2 - x - 1$$

Tính $A + B + C$; $A - B + C$ và $A - B - C$.

❶ Ví dụ 8. Cho các đa thức

$$A = \frac{3}{4}x^4 + 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$$

$$B = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + x^2 - 5x + 4$$

$$C = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 1$$

Tính $A + B + C$; $A - B + C$ và $A - B - C$.

❶ Ví dụ 9. Cho hai đa thức

$$P(x) = 7x^4 - \frac{1}{5}x^3 + x^2 - 2x + 7$$

$$Q(x) = 3x^4 + x^3 - x^2 + 3x - 5$$

a) Tìm $P(x) + Q(x)$ và $P(x) - Q(x)$.

b) Tìm hệ số cao nhất, hệ số tự do của các đa thức tìm được ở câu a).

❶ Ví dụ 10. Cho hai đa thức

$$P(x) = \frac{2}{3}x^5 - x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x + \frac{1}{4}$$

$$Q(x) = 2x^5 + x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x - \frac{3}{4}$$

a) Tìm $P(x) + Q(x)$ và $P(x) - Q(x)$.

b) Tìm hệ số cao nhất, hệ số tự do và hệ số của x^3 của các đa thức thu được ở câu a).

❶ Ví dụ 11. Cho hai đa thức

$$M(x) = 3x^4 - 5x^2 - 2x^3 - 4x + 6x^2 + 8x^3 - 2$$

$$N(x) = \sqrt{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 3x^3 - \sqrt{2}x^4 + 5x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x - 3$$

a) Thu gọn các đa thức trên;

b) Gọi $G(x)$ là tổng của hai đa thức $M(x)$ và $N(x)$. Tìm $G(x)$;

c) Tìm bậc, hệ số cao nhất, hệ số tự do của đa thức $G(x)$;

d) Trong tập hợp $\{0; 1; -2; 3\}$, những số nào là nghiệm của $G(x)$.

🔴 **Ví dụ 12.** Cho hai đa thức

$$\begin{aligned}P(x) &= \sqrt{3}x^5 - 2x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 4x^2 + x + 3 - x^2 + 3x^4 \\Q(x) &= \sqrt{3}x^5 + 2x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 2x^2 - 4x + \frac{1}{2}x^3 - x^4 + 3.\end{aligned}$$

- Thu gọn các đa thức trên;
- Đặt $H(x) = P(x) - Q(x)$. Tìm $H(x)$;
- Tìm bậc, hệ số cao nhất, hệ số tự do của đa thức $H(x)$;
- Trong tập hợp $\{0; 1; 2; -3\}$, những số nào là nghiệm của $H(x)$.

📄 **Dạng :** Tìm đa thức chưa biết trong một đẳng thức

🔴 **Ví dụ 1.** Cho đa thức $A(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1$. Tìm các đa thức $B(x), C(x), D(x)$ sao cho

- $A(x) + B(x) = 5x^4 + 3x^3 - 4x^2 + x - 2$;
- $A(x) - C(x) = -3x^4 + x^2 - x + 3$;
- $D(x) - A(x) = -4x^4 + 5x^3 + x^2 - 2x - 3$.

🔴 **Ví dụ 2.** Cho đa thức $M(x) = \frac{3}{4}x^3 + 2x^2 - 5x + \frac{1}{2}$. Tìm các đa thức $N(x), P(x), Q(x)$ sao cho

- $M(x) + N(x) = 3x^3 + x^2 + x - \frac{3}{2}$;
- $M(x) - P(x) = -\frac{1}{4}x^3 - x + 3$;
- $Q(x) - M(x) = x^2 + x - 3$.

🔴 **Ví dụ 3.** Tìm đa thức $P(x)$ sao cho

- $P(x) + \left(x^3 - 2x^2 + 7x + \frac{1}{3}\right) = x^3 - x^2 + 1$;
- $P(x) - (2x^4 - x^3 + x - 3) = -x^4 - x^3 + 5x^2 + 4x + 2$;
- $(5x^3 - 2x^2 + 4x + 4) - P(x) = 6x^3 - x^2 + 3x - 2$.

🔴 **Ví dụ 4.** Tìm đa thức $Q(x)$ sao cho

- $Q(x) + \left(x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 1\frac{1}{2}\right) = x^5 + x^3 + 3x^2 + 1$;
- $Q(x) - \left(-2x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x - 1\right) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x + 1$;
- $\left(3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 6x + \frac{2}{3}\right) - Q(x) = -x^2 + 3x + 1$.

 Dạng : Chứng minh đa thức không phụ thuộc vào biến

❶ Ví dụ 1. Chứng minh rằng các đa thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến

a) $(3x^2 - 2x + 5) - (4x^2 - 4x + 1) - 2x + x^2 - 4;$

b) $4x^3 - 5x^2 + 1 - (4x^3 - x + 2x^2) + (7x^2 - x + 8);$

c) $\left(\frac{2}{5}x^3 - x^2 + 1\right) - (x^3 - 3x + x^2 - 5) - 0,4x^3 + 2x^2 - 3x + x^3.$

❷ Ví dụ 2. Chứng minh rằng các đa thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến

a) $(2x^2 - 0,5x + 5) - (3x^2 + 2,5x + 4) + (3x + x^2 + 4);$

b) $x^3 - 2x^2 - (3x^3 - x + 2) + (x^3 - x + 4) + 2x^2 + x^3;$

c) $-(x^4 - 3x^2 + 3x - 1) - x^3 + 1 + \left(x^4 + x^3 - 3x^2 - \frac{5}{2}\right) + 3x.$

 Dạng : Vận dụng

❶ Ví dụ 1. Bạn Hoài được phân công mua một số đồ dùng cho buổi tham quan dã ngoại của lớp. Hoài cần mua $3x + 7$ chiếc cốc giấy, $2x + 17$ chiếc bát giấy và x gói khăn ướt.

Đồ dùng	Giá bán một đồ dùng (đồng)
Cốc giấy	1 500
Bát giấy	2 500
Khăn ướt	15 000

a) Viết các đa thức biểu thị số tiền Hoài cần phải trả cho mỗi loại đồ dùng.

b) Tìm đa thức biểu thị tổng số tiền Hoài phải trả để mua số đồ dùng trên.

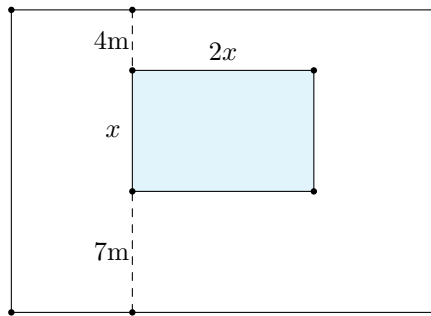
c) Biết rằng Hoài cần chuẩn bị 10 gói khăn ướt cho cả lớp. Tính tổng số tiền Hoài cần trả khi mua số đồ dùng trên.

❷ Ví dụ 2. Bác Nhung đi siêu thị để lựa chọn một số loại đồ ăn cho bữa tiệc của gia đình. Bác lên danh mục, khối lượng cần mua cho từng loại và được liệt kê dưới bảng sau

Đồ ăn	Khối lượng (kg)	Giá bán/1kg (đồng)
Thịt lợn	$\frac{1}{2}x + 0,5$	150 000
Thịt bò	x	250 000
Ngao	$\frac{3}{4}x - 0,5$	35 000
Tôm	$x + 0,5$	280 000
Mực	$x - 1$	260 000
Khoai lang	$\frac{1}{2}x$	25 000

- Viết các đa thức biểu thị số tiền bác Nhung cần phải trả cho mỗi loại đồ ăn.
- Tìm đa thức biểu thị tổng số tiền bác Nhung phải trả để mua số đồ ăn trên.
- Biết rằng bác mua 2 kilôgam thịt bò. Tính tổng số tiền bác phải trả khi đi siêu thị.

◉ Ví dụ 3. Trên một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài 45 mét, người ta định đào một cái ao có chiều rộng x mét, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Sơ đồ và kích thước cụ thể được cho như hình vẽ. Tìm đa thức (biến x)



- Biểu thị diện tích của bể bơi.
- Biểu thị diện tích của mảnh đất.
- Biểu thị diện tích phần đất xung quanh bể.

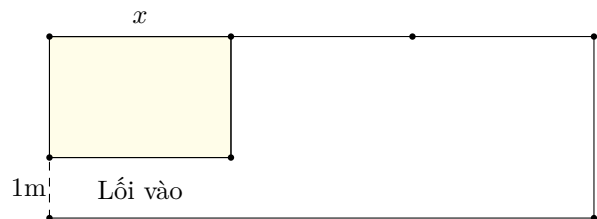
◉ Ví dụ 4.

Trên một thửa ruộng hình chữ nhật có hai kích thước theo tỉ lệ

$$\text{Chiều dài} : \text{chiều rộng} = 3 : 1.$$

Bác Hương dự định xây một khu đất hình chữ nhật nhỏ để trồng hoa

với chiều dài bằng chiều rộng của thửa ruộng, và để một lối đi rộng 1 mét như hình vẽ. Phần đất còn lại bác trồng rau. Gọi chiều rộng thửa ruộng là x (mét). Tìm đa thức (biến x)



- Biểu thị diện tích của thửa ruộng.
- Biểu thị chu vi của khu đất trồng hoa.
- Biểu thị chu vi phần đất còn lại để trồng rau.

◉ Ví dụ 5. Một xe đạp đi từ A lúc 13 giờ 15 phút đến B với vận tốc 15km /giờ. Đến 13 giờ 45 phút, một xe máy cũng chuyển động từ A đến B với vận tốc 45km/ giờ. Cả hai xe đều không nghỉ dọc đường.

- Gọi $M(x)$ là đa thức biểu thị quãng đường xe đạp đi được và $N(x)$ là đa thức biểu thị quãng đường xe máy đi được kể từ khi xuất phát cho đến khi xe đạp đi được x giờ. Tìm $M(x)$, $N(x)$.
- Đặt $f(x) = N(x) - M(x)$. Tìm nghiệm của đa thức $f(x)$ và giải thích ý nghĩa nghiệm đó.

❶ Ví dụ 6. Một người đi ô tô từ A đến B với vận tốc 50km/giờ . Sau đó 1 giờ, một xe khách đi từ B về A với vận tốc 60 km/giờ . Và sau x giờ (kể từ khi ô tô chuyển động) thì hai xe gặp nhau.

- Viết đa thức (biến x) biểu thị độ dài quãng đường AB .
- Tính độ dài quãng đường AB biết sau 3 giờ (kể từ khi ô tô chuyển động) thì hai xe gặp nhau.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

✎ Bài 1. Cho hai đa thức

$$\begin{aligned} A(x) &= 3x^5 - 4x^2 + x^4 - \frac{1}{2}x - 2x^5 + 7x^2 - 3x^4 \\ B(x) &= 2x^5 + x^4 + \frac{1}{2}x + 2 + x^2 - 3x^5 + 4x^4 + x - 8 \end{aligned}$$

- Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của mỗi đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến.
- Tính tổng $C(x) = A(x) + B(x)$ và hiệu $D(x) = A(x) - B(x)$.
- Tìm hệ số cao nhất, hệ số tự do của các đa thức $C(x)$ và $D(x)$.
- Trong tập hợp $\{0; 1; -1; 2\}$, những số nào là nghiệm của $C(x)$?

✎ Bài 2. Tính tổng $f(x)$ và $g(x)$ với

- $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ và $g(x) = -x^2 + 3x$.
- $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 3$ và $g(x) = 4x^2 - 2x + 6$.

✎ Bài 3. Tính hiệu $f(x) - g(x)$ với

- $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ và $g(x) = 3x^2 + 5x$;
- $f(x) = 5x^2 - 3x + 7$ và $g(x) = -2x^2 + 3x + 4$.

✎ Bài 4. Cho $f(x) = 2x^2 + 5$; $g(x) = 3x^2 + 2x + 4$; $h(x) = x^2 - 4$. Tính

- $f(x) + g(x) - h(x)$;
- $f(x) - g(x) + h(x)$.

✎ Bài 5. a) Cho $f(x) = -5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x$ và $g(x) = 3x^3 - 12x^2 + 3x + 8$; Tính $f(x) + g(x)$.

- Cho hai đa thức $P(x) = x^2 - 1$ và $Q(x) = x + 1$. Tính hiệu $P(x) - Q(x)$.

✎ Bài 6. Cho hai đa thức

$$\begin{aligned} M(x) &= x^3 + 2x^2 + 1 \\ N(x) &= x^2 - 2x + 3 \end{aligned}$$

a) Tính $M(x) + N(x)$; $M(x) - N(x)$; $N(x) - M(x)$.

b) Tính $M(x) - 2N(x)$; $\frac{1}{2}M(x) + N(x)$.

Bài 7. Cho $P(x) = 4x^2 - 5$; $Q(x) = -3x^2 + x$ và $R(x) = x^2 + 2x - 5$. Thực hiện phép tính

$$P(x) + Q(x) - R(x).$$

Bài 8. Cho các đa thức:

$$C(x) = -1 + 5x^6 - 6x^2 - 5 - 9x^6 + 4x^3 - 3x^2$$

$$D(x) = 2 - 5x^2 + 3x^3 - 4x^2 + 2x + x^3 - 6x^5 - 7x.$$

a) Thu gọn và sắp xếp các số hạng của đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến.

b) Tìm bậc, hệ số cao nhất và hệ số tự do của mỗi đa thức.

c) Tính giá trị của đa thức $C(x)$ tại $x = 1$, đa thức $D(x)$ tại $x = -1$.

Bài 9. Cho các đa thức

$$F(x) = 2x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 1$$

$$G(x) = -5x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 5x + 7$$

$$H(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^2 - x - 3$$

a) Tính $F(x) + G(x) + H(x)$.

b) Tính $F(x) + G(x) - H(x)$.

c) Tính $F(x) - G(x) + H(x)$.

d) Tính $F(x) - G(x) - H(x)$.

Bài 10. Cho đa thức

$$F(x) = 3x^5 - 7x^2 + 8x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x^4 - 1$$

$$G(x) = 3 - x^6 - 5x^4 - 2x^2 - 3x^4 + 2$$

a) Thu gọn các đa thức trên và sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của biến.

b) Tính $F(x) + G(x)$ và $F(x) - G(x)$.

Bài 11. Cho các đa thức

$$G(x) = 2x(x + 3) - (4x^2 - 1 - x)$$

$$H(x) = -x(2x + 3) + 5 - (3x - 2x^2)$$

a) Tính $G(x) + H(x)$ và $H(x) - G(x)$.

b) Tính $G\left(-\frac{1}{3}\right)$.

c) Tìm x để $H(x) = 0$.

 **Bài 12.** Cho hai đa thức

$$P(x) = 2x^2(x - 1) - 5(x + 2) - 2x(x - 2)$$

$$Q(x) = x^2(2x - 3) - x(x + 1) - (3x - 2)$$

a) Thu gọn $P(x)$ và $Q(x)$.

b) Tìm x để $H(x) = P(x) - Q(x) = 0$.

 **Bài 13.** Tính $f(x) + g(x)$ sau khi sắp xếp chúng theo lũy thừa giảm của biến

$$f(x) = -7x^3 + 6x - \frac{1}{3} + 8x^4 + 7x^2 - \frac{1}{5}x;$$

$$g(x) = 28 - 5x^4 - 7x^3 - 3x^2 - 3x^4 - \frac{2}{3}.$$

 **Bài 14.** Tính $f(x) - g(x)$ sau khi sắp xếp chúng theo lũy thừa giảm của biến

$$f(x) = 4 - x^3 + \frac{1}{3}x^2;$$

$$g(x) = -\frac{2}{3}x^2 - x^3 + 4 + x.$$

 **Bài 15.** Cho

$$f(x) = 6x^7 - 5x^3 + 1;$$

$$g(x) = -3 + 2x - 4x^7;$$

$$h(x) = -2x^7 + 2x + 7x^2.$$

a) Tính $f(x) + g(x) + h(x)$

b) Tính $f(x) + g(x) - h(x)$

 **Bài 16.** Cho $M(x) = 2x^3 - x^2 + x$ và $N(x) = 2x^2 - 2x^3 + 2x - 1$. Tìm bậc của đa thức tổng $M(x) + N(x)$.

 **Bài 17.** Tìm đa thức $Q(x)$ biết rằng:

a) $Q(x) + (x^3 - x^2 + 2x + 1) = 2x^3 + 5x^2 - 3x$.

b) $\left(3x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 7x + \frac{1}{2}\right) - Q(x) = x^3 + 2x^2 - 1$.

 **Bài 18.** Tìm đa thức $f(x)$ biết

a) $f(x) + (3x^2 - 5x) = 2x^2 - 4x.$

b) $(2x^2 - 3x - 4) - f(x) = 3x^2 + 4x - 5.$

 **Bài 19.** Cho đa thức $P(x) = -x^4 + 11x^3 - 5x^2 + 6x - 3$. Tìm các đa thức $Q(x), H(x), R(x)$ sao cho

a) $P(x) + Q(x) = x^5 - 2x^4 + 10x^3 - x^2 + 5x - 2;$

b) $P(x) - H(x) = -x^4 + 5x^3 + 5x - 1;$

c) $R(x) - P(x) = x^4 - 10x^3 - 4x^2 - x + 5.$

 **Bài 20.** Cho một hình thang có các kích thước đáy lớn, đáy bé và hai cạnh bên lần lượt là $2x + 7; x + 5; x; x$ (mét) ($x > 0$).

a) Tìm đa thức (biến x) biểu thị chu vi của hình thang.

b) Nếu hai cạnh bên của hình thang bằng 5 mét thì chu vi của hình thang bằng bao nhiêu?

 **Bài 21.** Bốn bạn An, Bình, Dũng và Trí rủ nhau đến cửa hàng truyện để mua truyện cũ được bán đồng giá (nghĩa là các quyển truyện cũ trong cửa hàng đó đều được bán với cùng một giá). An mua 3 quyển truyện và mua thêm 1 cuốn báo có giá 3 000 đồng, Bình mua 5 quyển, Dũng mua 5 quyển và Trí mua 7 quyển. Gọi x (đồng) là giá bán một quyển truyện cũ.

a) Tìm đa thức biểu thị tổng số tiền cả bốn bạn phải trả.

b) Nếu mỗi quyển truyện cũ đều có giá 8 000 đồng thì tổng số tiền cả bốn bạn phải trả là bao nhiêu?

BÀI TẬP NÂNG CAO

 **Câu 1.** Cho

$$P(x) + Q(x) = 5x^2 - 4x + 1;$$

$$P(x) - Q(x) = x^2 + 2x - 5.$$

Tìm đa thức $P(x); Q(x)$.

 **Câu 2.** Cho các đa thức

$$A(x) = 2x^5 - 4x^3 + x^2 - 2x + 2;$$

$$B(x) = x^5 - 2x^4 + x^2 - 5x + 2;$$

$$C(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 8x + 2\frac{3}{4}.$$

a) Tính $M(x) = A(x) - 2 \cdot B(x) + C(x);$

b) Tính giá trị của $M(x)$ khi $x = -\sqrt{0,25}.$

c) Có giá trị nào của x để $M(x) = 0$ không?

❖ **Câu 3.** Cho hai đa thức

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - 4x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 3 + 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2 \\ Q(x) &= -x^4 + x^3 + 3x^2 - 2x + 4 - x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x \end{aligned}$$

a) Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của mỗi đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến.

b) Tính $P(1)$ và $Q(-2)$.

c) Tính $G(x) = P(x) + Q(x)$.

d) Chứng minh rằng $G(x)$ luôn dương với mọi giá trị của x .

❖ **Câu 4.** Cho đa thức $Q(x) = x^3 + x$.

a) Tính $Q(0)$, $Q(-1)$, $Q(1)$.

b) Chứng minh rằng $Q(-a) = -Q(a)$ với mọi a .

❖ **Câu 5.** Chứng minh rằng tổng của năm số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 5.

❖ **Câu 6.** Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$, biết $13a + b + 2c = 0$. Chứng tỏ $f(-2) \cdot f(3) \leq 0$.

❖ **Câu 7.** Cho đa thức

$$Q(x) = ax^4 + 2x^3 - bx^3 + 3x^2 - x + c - x^2 + 4.$$

Tìm a , b , c biết rằng đa thức $Q(x)$ có bậc ba, hệ số cao nhất là -4 và hệ số tự do là 7 .

❖ **Câu 8.** Cho $P(x) = mx^4 + 3x^2 + 2$ và $Q(x) = x^3 - 2mx + 7$ (với m là hằng số).

Tìm m để $P(-1) = Q(2)$.

BÀI 27. PHÉP NHÂN ĐA THỨC MỘT BIẾN

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 NHÂN ĐƠN THỨC VỚI ĐA THỨC

Quy tắc: Muốn nhân một đơn thức với một đa thức, ta nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau.

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

2 NHÂN ĐA THỨC VỚI ĐA THỨC

Quy tắc: Muốn nhân một đa thức với một đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau.

$$(A + B) \cdot (C + D) = A \cdot C + A \cdot D + B \cdot C + B \cdot D$$

Chú ý

Ta có thể trình bày phép nhân trên bằng cách đặt tính nhân. Khi trình bày theo cách này ta cần:

Nhân lần lượt mỗi hạng tử ở dòng dưới với đa thức ở dòng trên và viết kết quả trong một dòng riêng.

Viết các dòng sao cho các hạng tử cùng bậc thẳng cột với nhau (để thực hiện phép cộng theo cột).

Phép nhân đa thức cũng có các tính chất:

Giao hoán: $A \cdot B = B \cdot A$.

Kết hợp: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

Phân phối đối với phép cộng: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng : Làm tính nhân

Chú ý các phép tính lũy thừa:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; (a^m)^n = a^{m \cdot n}; a^0 = 1 (\forall a \neq 0)$$

Ví dụ 1. Thực hiện các phép tính nhân sau:

a) $x(x^2 - 2x + 5)$;

b) $5x(x^4 - 3x^2 + 5x + 2)$;

c) $(-3,5x^2) \left(2x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 1\right);$

d) $1\frac{3}{4}x^3 \left(2x^3 + x^2 - \frac{2}{5}x + 2\right).$

❶ Ví dụ 2. Thực hiện các phép tính nhân sau:

a) $-x(x^3 - 2x^2 + 4x - 3);$

b) $-\frac{1}{2}x^2(2x^4 - 3x^2 + x + 1);$

c) $(1,2x^2)(6x^3 - 5x^2 + 4x - 7);$

d) $(-3)^2x^2(-x^3 - 2x^2 + 5x + 1).$

❷ Ví dụ 3. Thực hiện các phép tính nhân sau:

a) $(x - 1)(2x^2 - 3x + 1);$

b) $(1 - x^2)(3x^3 + 2x^2 - x - 9);$

c) $(0,2x^2 - x)(x^2 + 7x - 3);$

d) $5(x^3 - x)(x^2 + 2x - 3).$

❸ Ví dụ 4. Thực hiện các phép tính nhân sau:

a) $(2x + 1)(x^3 - 4x + 5);$

b) $\left(-\frac{1}{2}x - x^3\right)(2x^3 + x^2 - 1);$

c) $(x^2 - 5x)(-5x^2 - 4x + 5);$

d) $(2x - x^2) \cdot 3 \cdot (x^2 + 3x + 1).$

Dạng : Rút gọn biểu thức**❶ Ví dụ 1.** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $5x^2(3x^2 - 1) - 6x(4x^3 - 3x + 1) - 2x^3(3x - 1);$

b) $\frac{1}{2}x \left(x^2 - \frac{2}{5}x + 2\right) - \frac{3}{4}x^2 \left(x + \frac{1}{3}\right) - x(x + 1);$

c) $1\frac{1}{2}x^2(x^2 - 2x) - 2x(x^3 + x^2 + 1) + 2(x - 1);$

d) $x(x^3 - 2x^2) + 5x \left(x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right) - x^2(x^2 - x + 1).$

❷ Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $3x(-x^2 - 5) + 5x(x^3 + 7) - 3x^2(x^2 - x + 5) + 2(4 - x);$

b) $25x - 4(3x - 1) + 7x(5 - 2x^2);$

c) $4x(x^3 - 4x^2) + 2x(2x^3 - 3x^2 + 7x + 1);$

d) $-\frac{4}{3}x^2(3x^2 - 6x + 9) + 8x(x^3 - 3x^2 + 2x - 1) - x(x^2 - 2x).$

❸ Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $(4x - 1)(3x + 2) - 5x(x - 3);$

b) $(5x - 2)(x + 1) - 2x(x^2 + x - 3);$

c) $(x + 1)(2x - 1) + x(x^2 - x + 1);$

d) $(3x^2 + x + 2) \cdot 3 - (2x + 1) \cdot 2 \cdot (3 + x).$

❹ Ví dụ 4. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $-2x(x^2 + 3x + 1) + (x + 1)(x^2 - 2);$

b) $\frac{2}{3}x \left(\frac{9x}{2} + \frac{1}{4}\right) - (x - 1)(3x + 1);$

c) $3x^2(x - 1) + 4(1 - x)(x + 1);$

d) $-(3x - 5)(x - 4) + (2x + 3)(x + 4).$

 Dạng : Tính giá trị biểu thức

❶ Ví dụ 1. Tính giá trị biểu thức:

a) $5x(2x - 1)(2x + 3) + 10x(3x - 2) - 2x(10x^2 - 5x - 2)$ với $x = 2$;

b) $(x - 1)(x^2 + x + 1) - x(x^2 + 2x + 3) + 2(x^2 - 2x + 1)$ với $x = \frac{1}{7}$.

❷ Ví dụ 2. Tính giá trị biểu thức:

a) $5x(x^2 - 4x + 1) - (x^2 + 1)(5x - 1) + 20(1 - x)(1 + x)$ với $x = -1$.

b) $(2 - x)(x^2 + 2x + 4) + x(x^2 - 1) + \frac{1}{2}(8x - 3)$ với $x = \frac{1}{6}$.

 Dạng : Tìm giá trị chưa biết

❶ Ví dụ 1. Tìm x :

a) $(2x - 1)(x^2 - x + 1) + x^2(3 - 2x) = 2$; b) $3(1 - 4x)(x - 2) + 4(3x + 1)(x + 2) = 24$;

c) $(x + 1)(x + 2)(x + 3) - x^3 - 8x(x + 2) = 6$; d) $(x + 1)(x^2 + 2x + 4) - x^2(x + 3) + 8 = 0$.

❷ Ví dụ 2. Tìm x :

a) $(2x - 3)(x - 2) - x(2x + 1) - 6 = 0$;

b) $5(2x - 1)(x + 2) - 2(5x - 3)(x + 2) = 5$;

c) $2x^2 + 3(x - 2)(x + 2) - 5x(x + 3) = 0$;

d) $(7 - 3x)(x + 2) + 3(x - 2)(x + 1) + 2(3x - 2)(x + 2) = 0$.

 Dạng : Chứng minh giá trị của biểu thức không phụ thuộc vào biến

❶ Ví dụ 1. Chứng tỏ rằng các biểu thức sau có giá trị không phụ thuộc vào biến:

a) $A = (3x - 2)(2x + 10) - (2x + 2)(3x + 10)$;

b) $B = (x - 5)(2x + 7) - 2x(x - 5) - 7x + 2$.

❷ Ví dụ 2. Chứng tỏ rằng các biểu thức sau có giá trị không phụ thuộc vào biến:

a) $C = 2(x - 2)(x + 3) - x(5x - 4) + 3x(x - 2) + 7$;

b) $D = x(3x - 1) - x^2(x + 3) + (x - 1)(x^2 + x + 2)$.

 Dạng : Vận dụng bài toán có lời văn

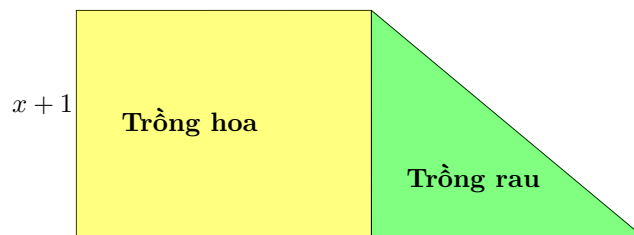
❶ Ví dụ 1. Cho một hình thang có các độ dài đáy lớn, đáy bé và chiều cao lần lượt là $2x + 1$; $x + 5$; x (m) ($x > 0$). Viết đa thức biểu thị diện tích (đơn vị: m^2) của hình thang.

❷ Ví dụ 2. Giả sử ba kích thước của hình hộp chữ nhật là: $x + 1$; $2x + 3$; $x - 3$ (cm) với $x > 3$. Viết đa thức biểu thị thể tích (đơn vị: cm^3) của hình hộp chữ nhật đó.

❸ Ví dụ 3. Có hai hình chữ nhật. Hình thứ nhất có chiều dài hơn chiều rộng $10m$. Chiều rộng của hình chữ nhật thứ hai hơn chiều rộng hình chữ nhật thứ nhất là $5m$ và có chiều dài hơn chiều dài hình thứ nhất là $15m$.

- Tìm hai đa thức biểu thị diện tích của mỗi hình chữ nhật trên.
- Biết diện tích hình thứ hai hơn diện tích hình thứ nhất $325m^2$. Tính kích thước mỗi hình.

❹ Ví dụ 4. Cho một thửa ruộng hình thang vuông có đáy nhỏ lớn hơn chiều cao $4m$ và đáy lớn hơn đáy bé $5m$. Bác Huệ chia thửa ruộng ra thành hai phần, một phần hình chữ nhật để trồng hoa với chiều rộng bằng chiều cao của hình thang và phần còn lại hình tam giác vuông để trồng rau (Hình vẽ minh họa). Biết chiều cao của thửa ruộng là $x + 1(m)$.



- Tìm đa thức biểu thị diện tích của cả thửa ruộng hình thang, phần diện tích trồng hoa và phần diện tích trồng rau.
- Biết diện tích trồng hoa lớn hơn hai lần diện tích trồng rau là $20m^2$. Tính kích thước của thửa ruộng.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

 **Bài 1.** Thực hiện phép nhân hai đa thức sau:

- $2x - 1$ và $4x^3 - x^2 + 1$;
- $3x^3 - 4$ và $-x^3 + 3x^2 - 2$.

 **Bài 2.** Rút gọn các biểu thức sau:

- $-x(x^3 - 2x) - 2x(x - 1)(x + 2)$;
- $(x^2 - 5)(x + 3) - x(2x - 1) + 5$;
- $(x^2 - 2x + 3)\left(\frac{1}{2}x - 5\right) + (-1)^{10}(x - 1)$.

 **Bài 3.** Rút gọn rồi tính giá trị biểu thức:

- a) $(x - 6)(x - 4) - x(x + 90) + 76$ với $x = 0,98$;
 b) $(2x + 3)(2x - 5) - x(4x + 1)$ với $x = -16,2$;
 c) $2x(x + 1)(x - 3) - x^2(2x - 1) + 5(x^2 - 1)$ với $x = -1$;
 d) $(3x - 2)(2x^3 + x^2 - x - 1) - 5x^2(x^2 - 1) - 2 + x^3$ với $x = 1$.

 **Bài 4.** Tìm x

- a) $5x(x - 3) - x(5x + 1) = 16$; b) $(3x^2 - x + 1)(x + 1) + x^2(4 - 3x) = 1$;
 c) $3x^2 + 2(x - 3)(x + 3) - 5x(x + 3) = 0$; d) $(5x - 3)(1 + x) - (3x - 1)(x + 1) = 0$.

 **Bài 5.** Chứng tỏ rằng các đa thức sau không phụ thuộc vào biến:

- a) $M = (2x + 1)(5x - 3) - (5x + 2)(2x - 7) - 30(x - 5)$;
 b) $N = (x - 3)(3x + 1) - 3x(x - 5) - 7x + 8$;
 c) $P = x(6 - x)(x + 1) + x^2(x - 5) - 6(x + 7)$.

 **Bài 6.** Đo đoán tuổi. Bạn hãy lấy tuổi của mình:

 Cộng thêm 7;

 Được bao nhiêu đem nhân với 4;

 Lấy kết quả vừa tìm được cộng với 12;

 Nhân kết quả vừa tìm được với 2,5;

 Đọc kết quả cuối cùng sau khi đã trừ đi 100. Tôi sẽ đoán được tuổi của bạn. Giải thích tại sao?

BÀI TẬP NÂNG CAO

 **Câu 1.** Làm tính nhanh

- a) $x^2(2x^{m-2} - x^{n+1})$; b) $2y^3(y^{m+2} - 3y^{n+1})$;
 c) $y^{k-1}(2y^{2k-1} + 5y^{3-k})$; d) $2x^{k-2}(x^{2k+2} + 3x^{5-2k})$;

 **Câu 2.** Tìm 3 số tự nhiên chẵn liên tiếp, biết tích của hai số sau lớn hơn tích của hai số đầu là 200.

 **Câu 3.** Tìm 3 số tự nhiên lẻ liên tiếp. Biết tích của hai số sau lớn hơn tích của hai số đầu là 36.

- ❖ **Câu 4.** Một khu đất hình chữ nhật có chu vi là 100 m. Nếu chiều dài và chiều rộng cùng giảm đi a (mét) trong đó $a < 50$ thì diện tích khu đất này giảm đi bao nhiêu mét vuông?
- ❖ **Câu 5.** Cho ba số nguyên liên tiếp. Lập các tích của hai trong ba số nguyên đó. Tìm đa thức biểu thị tổng của các tích đã được lập.
- ❖ **Câu 6.** Ông Toàn có một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều rộng là x mét, chiều dài hơn chiều rộng 4 mét. Ông đã cắt bớt 1 mét ở chiều rộng và 2 mét ở chiều dài để làm đường đi. Tìm chiều rộng biết diện tích đường đi là 68 m^2 .
- ❖ **Câu 7.** Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng hơn kém nhau 3 đơn vị. Nếu tăng chiều dài thêm 3 m và giảm chiều rộng đi 1 m thì diện tích tăng lên bao nhiêu?
- ❖ **Câu 8.** Một hình thang có đáy bé nhỏ hơn đáy lớn 2 đơn vị. Viết đa thức biểu thị diện tích của hình thang đã cho biết chiều cao của hình thang lớn gấp hai lần đáy lớn.

BÀI 28. PHÉP CHIA ĐA THỨC MỘT BIẾN

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

Nếu A và B là hai đa thức đã cho (trong đó B là đa thức khác đa thức 0) thì bằng cách đặt tính chia ta luôn có thể tìm được các đa thức Q và R thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

a) $A = B \cdot Q + R$.

b) Đa thức R phải bằng 0 hoặc đa thức R có bậc nhỏ hơn bậc của B .

- Nếu $R = 0$ thì $A = B \cdot Q$, khi đó ta nói A chia hết cho B và Q là thương của phép chia đa thức A (đa thức bị chia) cho đa thức B (đa thức chia) và viết $A : B = Q$ hoặc $Q = \frac{A}{B}$.
- Nếu $R \neq 0$ thì ta nói phép chia đa thức A cho đa thức B là phép chia có dư với đa thức thương là Q và đa thức dư là R .

Chú ý

Cho hai đơn thức ax^m và bx^n ($m, n \in \mathbb{N}$; $a, b \in \mathbb{R}$ và $b \neq 0$). Khi đó nếu $m \geq n$ thì phép chia ax^m cho bx^n là phép chia hết và ta có:

$$ax^m : bx^n = \frac{a}{b}x^{m-n} \text{ (quy ước: } x^0 = 1\text{)}.$$

Chú ý

Khi chia đa thức A cho đa thức B :

🔴 Đa thức dư R phải bằng 0 hoặc có bậc nhỏ hơn bậc của B .

🟢 Nếu thương là đa thức Q , dư là R thì ta có đẳng thức $A = BQ + R$.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

📄 Dạng : Chia đơn thức cho đơn thức

Cho hai đơn thức ax^m và đơn thức bx^n ($m, n \in \mathbb{N}$; $a, b \in \mathbb{R}$ và $b \neq 0$). Khi đó nếu $m \geq n$ thì phép chia ax^m cho bx^n là phép chia hết và ta có:

$$ax^m : bx^n = \frac{a}{b}x^{m-n} \text{ (quy ước: } x^0 = 1\text{)}.$$

🔴 Ví dụ 1. Tính:

a) $9x^4 : 3x$. b) $125x^5 : (-25x^3)$. c) $\frac{5}{6}(-x)^2 : \frac{1}{3}x$. d) $\frac{-8}{3}x^7 : (-2x)^4$.

🔴 Ví dụ 2. Tính:

a) $10x^5 : 2x^2$. b) $(-120x^7) : (-6x)^3$. c) $\frac{3}{4}x^8 : \left(\frac{-3}{2}x^4\right)$. d) $(-x)^6 : (-2, 5x^3)$.

 Dạng : Chia đa thức cho đơn thức

🔴 Ví dụ 1. Thực hiện các phép chia đa thức sau:

a) $(-10x^4 + 25x^3 + 16x^2) : (-5x^2)$. b) $(4x^5 - 5x^3 + 2x^2) : 2x^2$.
c) $\left(6x^4 + 5x^3 - 11x^2 + \frac{3}{4}x\right) : \frac{1}{2}x$. d) $(-7x^5 + 13x^4 - x^3) : \left(-\frac{1}{7}x^2\right)$.

🔴 Ví dụ 2. Thực hiện các phép chia đa thức sau:

a) $(x^3 - 9x^2 + 28x) : 7x$. b) $(-4x^6 + 5x^5 + 3x^4 - 5x^3) : (-2x^2)$.
c) $(3x^7 - 7x^5 + x^3) : \left(-\frac{1}{3}x^2\right)$. d) $(x^8 - x^7 + 5x^6 - 4x^4) : (2x^3)$.

 Dạng : Chia đa thức một biến đã sắp xếp

🔴 Ví dụ 1. Làm tính chia

a) $(x^2 + 3x - 10) : (x - 2)$. b) $(x^3 + x^2 - 19x + 21) : (x - 3)$.

🔴 Ví dụ 2. Làm tính chia

a) $(x^3 + 6x^2 + 2x - 3) : (x^2 + 5x - 3)$. b) $(2x^3 + x^2 - 5x + 2) : (x^2 + x - 2)$.

🔴 Ví dụ 3. Làm tính chia

a) $(x^3 + 2 + x) : (x + 1)$. b) $(x^4 + 3x - 1 + 3x^3) : (x^2 + 1)$.

🔴 Ví dụ 4. Vận dụng hằng đẳng thức đáng nhớ để làm phép chia

a) $(x^4 - 2x^2 + 1) : (1 - x^2)$. b) $(27x^3 - 8) : (3x - 2)$.

🔴 Ví dụ 5. Thực hiện các phép chia đa thức sau bằng cách đặt tính chia.

a) $(2x^3 - 5x^2 + 4x - 1) : (x - 1)$. b) $(-2x^6 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1) : (2x^2 + 1)$.
c) $(2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 9x - 27) : (x^2 - 3)$. d) $(2x^3 + 3x^2 - 3x - 2) : (2x + 1)$.
e) $(x^3 - 5x^2 + x - 5) : (x^2 + 1)$. f) $(3x^4 + 2x^3 + 11x^2 + 4x + 10) : (x^2 + 2)$.

🔴 Ví dụ 6. Thực hiện phép tính:

a) $(3x^2 + 7x + 9) : (x - 1)$.

b) $(5x^3 + 3x^2 - 4) : (x + 2)$.

c) $(4x^3 - 6) : (x^2 - 1)$.

d) $(2x^3 + 13x^2 + 15x - 3) : (2x + 3)$.

◉ Ví dụ 7. Trong mỗi trường hợp sau đây, tìm thương $Q(x)$ và dư $R(x)$ trong phép chia $A(x)$ cho $B(x)$ rồi biểu diễn $A(x)$ dưới dạng: $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$

a) $A(x) = 3x^3 - 10x^2 + 6x - 5; B(x) = x^2 - x + 1$.

b) $A(x) = 6x^3 - x^2 - 24x + 21; B(x) = -2x + 3$.

c) $A(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 1; B(x) = 2x + 1$.

Dạng : Tính giá trị của biểu thức

◉ Ví dụ 1. Tính giá trị của biểu thức A tại $x = -2$.

$$A = (5x^5 + 5x^4) : 5x^2 - (2x^4 - 8x^2 - 6x + 12) : (2x - 4).$$

◉ Ví dụ 2. Tính giá trị của biểu thức B tại $x = -5$, biết

$$B = (3x^4 - x^2 - 2x) : (3x^2 + 3x + 2) + (x^4 - x^2) : (x^2 - x).$$

Dạng : Tìm x , tìm đa thức thỏa đẳng thức cho trước

◉ Ví dụ 1. Tìm x , biết $(x^2 + 4x - 12) : (2 - x) + (x^3 - 125) : (x - 5) = 15$.

◉ Ví dụ 2. Tìm x biết: $(x^2 - 4) : (x + 2) - (4x^2 - 4x + 1) : (2x - 1) = 10$.

◉ Ví dụ 3. Tìm đa thức A biết $A \cdot (5x^2 + 3x - 2) = 15x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 14x - 8$.

◉ Ví dụ 4. Tìm đa thức M biết:

a) $(x^3 - 7x^2 + x - 7) = (x - 7) \cdot M$.

b) $(x^2 - 4x - 3) \cdot M = 2x^3 - 7x^2 - 10x - 3$.

c) $(3x^6 - x^4 - 3x^2 + 1) = M(3x^2 - 1)$.

d) $M \cdot (x^2 + x + 1) = x^4 - 2x^3 - x + 2$.

◉ Ví dụ 5. Tìm đa thức N biết:

a) $(-3x + 5) \cdot N = -3x^3 + 5x^2 - 9x + 15$.

b) $5x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 4x - 8 = N \cdot (x - 1)$.

c) $N \cdot (x - 2) = x^3 - 8$.

d) $(x^2 - 6x + 9) \cdot N = x^3 - 2x^2 - 15x + 36$.

Dạng : Xác định các hằng số a và b sao cho một phép chia đa thức là phép chia hết

🔴 **Ví dụ 1.** Xác định a để A chia hết cho B với:

a) $A = x^3 - 4x + a - 3$ và $B = x - 2$.

b) $A = x^3 - 9x^2 + 17x - 25 + a$ và $B = x^2 - 2x + 3$.

🔴 **Ví dụ 2.** Xác định b để C chia hết cho D với:

a) $C = x^4 - 3x^2 - 18x + b + 2$ và $D = x - 3$.

b) $C = 5x^3 + 3x^2 - 7x + 2b + 1$ và $D = 5x - 2$.

🔴 **Ví dụ 3.** Xác định a và b để:

a) $2x^3 - x^2 + ax + b$ chia hết cho $x^2 - 1$.

b) $x^4 - 7x^3 + 4x^2 + ax + b - 1$ chia hết cho $x^2 - 7x + 3$.

🔴 **Ví dụ 4.** Xác định m và n để:

a) $2x^6 - x^4 - 2x^2 + (m - 2)x + n$ chia hết cho $2x^2 - 1$.

b) $x^5 + 3x^4 - 2x^3 + (m - 1)x^2 + nx + 3$ chia hết cho $x^2 + x + 1$.

🔴 **Ví dụ 5.** Tìm các giá trị của m để đa thức $A = x^3 - x^2 - 11x + m$ chia hết cho đa thức $B = x - 3$.

🔴 **Ví dụ 6.** Tìm các giá trị của m và n để đa thức $A = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + mx + n$ chia hết cho đa thức $B = x^2 + 1$.

📄 **Dạng :** Tìm số nguyên x sao cho tại giá trị của đa thức A chia hết cho giá trị của đa thức B

Bước 1. Thực hiện phép chia như chia đa thức cho đa thức.

Bước 2. Để giá trị của đa thức A chia hết cho giá trị của đa thức B thì giá trị của đa thức dư phải chia hết cho giá trị của đa thức chia.

Bước 3. Áp dụng các tính chất chia hết (tính chất chia hết của một tích, một tổng) để giải quyết bài toán.

🔴 **Ví dụ 1.** Tìm x nguyên để giá trị của đa thức A chia hết cho giá trị của đa thức B .

a) $A = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 2$ và $B = 2x - 1$.

b) $A = -3x^3 - x^2 + 15x - 6$ và $B = 3x + 1$.

🔴 **Ví dụ 2.** Tìm x nguyên để giá trị của đa thức C chia hết cho giá trị của đa thức D .

a) $C = 3x^3 + 2x^2 - 10x + 5$ và $D = 3x - 1$.

b) $C = -5x^3 + 3x^2 + 37x + 24$ và $D = 5x + 2$.

🔴 **Ví dụ 3.** Tìm các giá trị nguyên x để giá trị của đa thức $A = 6x^3 + 15x^2 - 4x - 7$ chia hết cho giá trị của đa thức $B = 2x + 5$.

🔴 **Ví dụ 4.** Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của đa thức $A = x^3 - 2x^2 + 3x + 50$ chia hết cho giá trị của đa thức $B = x + 3$.

C BÀI TẬP VẬN DỤNG

 **Bài 1.** Thực hiện phép tính:

a) $55(-x)^3 : 11x^2$. b) $\frac{3}{2}x^7 : (-2x^5)$. c) $-3,5x^8 : (-7x^5)$. d) $1\frac{3}{4}x^6 : \frac{1}{14}x^3$.

 **Bài 2.** Thực hiện các phép chia đa thức sau:

a) $(-2x^6 + 4x^4 - x^3 + 3x^2) : 0,5x^2$. b) $\left(x^4 + 3x^3 - \frac{1}{2}x^2\right) : \frac{1}{3}x^2$.
c) $(5x^4 - 3x^3 + x^2) : 3x^2$. d) $\left(-5x^5 + 2x^4 - \frac{1}{3}x^3\right) : \left(-\frac{1}{2}x^3\right)$.

 **Bài 3.** Thực hiện phép tính:

a) $(16x^2 - 9) : (4x + 3)$. b) $(x^3 + 2x^2 - x - 2) : (x + 2)$.
c) $(x^4 - x^3 - 4x^2 - 5x - 3) : (x^2 + x + 1)$. d) $(6x^4 - 4x^3 + x^2 + x) : (2x^2 - 2x + 1)$.

 **Bài 4.** Làm tính chia

a) $(x^3 + 6x^2 + 2x - 3) : (x^2 + 5x - 3)$. b) $(125x^3 + 8) : (25x^2 - 10x + 4)$.

 **Bài 5.** Tìm dư trong phép tính.

a) $(10x^3 - x^2 - 36x + 24) : (2x^2 + x - 7)$. b) $(-x^3 + 3x^2 + 2x - 10) : (x - 3)$.

 **Bài 6.** Cho đa thức $A = -3x^3 + 20x^2 + 20x + 10$. Chia đa thức A cho đa thức B được thương là $3x + 1$ và dư $x + 6$. Tìm đa thức B .

 **Bài 7.** Tìm đa thức M biết:

a) $M \cdot \left(\frac{1}{2}x + 3\right) = \frac{1}{2}x^3 + 4x^2 + 7,5x + 9$. b) $x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 2 = (x^3 + 3x^2 - 1) \cdot M$.

 **Bài 8.** Trong mỗi trường hợp sau đây, tìm thương Q và dư R trong phép chia đa thức A cho đa thức B rồi biểu diễn dưới dạng: $A = B \cdot Q + R$

a) $A = 5x^3 + 14x^2 + 12x - 5; B = x + 2$. b) $A = -\frac{3}{2}x^3 + 5x^2 - 7x + 11; B = -3x + 4$.

 **Bài 9.** Rút gọn biểu thức sau: $\left(\frac{5}{2}x^4 - 3x^2\right) : 2x^2 + \left(\frac{1}{4}x^3 + x^2\right) : x + \frac{3}{2}x(2x - 1)(x + 1)$.

 **Bài 10.** Tìm $n \in \mathbb{N}$ để:

a) Đơn thức $18x^{n+2}$ chia hết cho đơn thức $-6x^5$.

 **Bài 11.** Tìm x , biết:

a) $(18x^3 - 15x^2) : (-3x^2) = 2$.
b) $(12x^5 - 15x^4) : 3x^3 - (8x^3 + 6x) : 2x = 7$.

 **Bài 12.** Tìm x , biết $(x^3 - 1) : (x - 1) - (9x^2 - 1) : (3x - 1) = 0$.

 **Bài 13.** Tìm x , biết:

a) $(4x^4 + 3x^3) : (-x^2) + (9x^2 - 3x) : 3x + x(x-1)(x+1) - x^3 = -1.$

b) $\left(x^3 - \frac{1}{2}x\right) : 2x - \frac{1}{2}x(x-1) = 0.$

c) $(42x^3 - 12x) : (-6x) + 7x(x+2) = 10.$

d) $(25x^2 - 10x) : 5x + 3(-x+1) = 4.$

BÀI TẬP NÂNG CAO

 **Câu 1.** Tìm số tự nhiên n để mỗi phép chia sau đều là phép chia hết

a) $8x^n : 4x^5.$

b) $2x^3 : x^{n+1}.$

 **Câu 2.** Chứng minh rằng giá trị của biểu thức A luôn luôn dương với mọi giá trị của x

$$A = (7x^4 - 21x^2) : 7x^2 + (10x + 5x^2) : 5x.$$

 **Câu 3.** Tìm các số a, b sao cho đa thức A chia hết cho đa thức B .

a) $A = x^3 - 2x^2 + (a-3)x - a - 1; B = x - 3.$

b) $A = 2x^3 + 10x^2 + (a-1)x + b - a; B = 2x^2 + 5.$

 **Câu 4.** Tìm các giá trị m và n để

a) Đa thức $2x^3 + 9x^2 - 9x + m$ chia hết cho đa thức $2x - 1.$

b) Đa thức $2x^4 - 8x^3 + 5x^2 + mx + n$ chia hết cho đa thức $2x^2 - 1.$

 **Câu 5.** Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của đa thức $A = 10x^4 - 13x^3 - 9x^2 + x + 18$ chia hết cho giá trị của đa thức $B = 2x - 3$

 **Câu 6.** Tìm số nguyên x để giá trị của đa thức A chia hết cho giá trị của đa thức B .

a) $A = 6x^3 + 13x^2 - 8x + 6; B = 3x - 1.$

b) $A = -6x^3 + x^2 + 3x + 2; B = 2x - 1.$

ÔN TẬP CHƯƠNG VII

E BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 14. Tính tích các đơn thức sau rồi xác định hệ số, bậc của mỗi đơn thức nhận được:

a) $A = -2x^4; B = \frac{3}{4}x^6;$

b) $A = \frac{1}{5}x^3; B = \left(-\frac{4}{3}x\right)^2; C = 2x.$

Bài 15. Tính tích các đơn thức sau rồi xác định hệ số, bậc của mỗi đơn thức nhận được:

a) $M = x^3 \cdot \left(-\frac{5}{4}x^2\right); N = \frac{2}{5}x^7;$

b) $M = -\frac{3}{4}x^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2; N = -\frac{8}{9}x^2; P = x.$

Bài 16. Trong một xưởng sản xuất đồ gia dụng có tổng cộng 1200 thùng hàng và mỗi ngày nhân viên sẽ lấy đi 40 thùng hàng để đi phân phối cho đại lí.

a) Gọi x là số ngày nhân viên đã đến lấy thùng hàng. Hãy lập biểu thức biểu thị số thùng hàng còn lại sau x ngày.

b) Sau bao nhiêu ngày thì xưởng sẽ vận chuyển hết được 1200 thùng hàng?

Bài 17. Tìm giá trị của x , biết rằng:

a) $3 - \frac{5}{2}x = 0;$

b) $(x - 2)(x + 3) = 0;$

c) $x^2 - \frac{1}{4} = 0;$

d) $3x^2 + 2x = 0;$

e) $x^3 + 2x = 0;$

f) $(5x + 3) - (2x + 1) = 0;$

g) $3x(x - 4) - x(5 + 3x) = 17;$

h) $(x^3 + 2x^2) : x^2 + 3(x - 1) = 0.$

Bài 18. Kiểm tra xem

a) $x = -2$ có là nghiệm của đa thức $f(x) = x^2 - 4$ không?

b) $x = \frac{1}{2}$ và $x = -3$ có là nghiệm của đa thức $g(x) = 2x^2 + 5x - 3$ không?

Bài 19. Tìm nghiệm của các đa thức sau

a) $-4x + 3;$

b) $5x + 12;$

c) $x^2 - 4x;$

d) $x^2 + 4x;$

e) $x^2 + 4x + 3;$

f) $4x^2 - 9.$

Bài 20. Chứng tỏ rằng đa thức sau không có nghiệm

a) $x^2 + 2;$

b) $x^2 + 4x + 5;$

c) $2x^2 - 2x + 3.$

Bài 21. Chứng tỏ rằng đa thức sau không có nghiệm

a) $P(x) = x^2 + (x - 3)^2;$

b) $Q(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1.$

Bài 22. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến.

a) $5x^2 - (2x + 1)(x - 2) - 3x(x + 1) + 7$; b) $(3x - 1)(2x + 3) - (x - 5)(6x - 1) - 38x$.

Bài 23. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $(x + 1)(x^2 + 2x + 4) - x^2(x + 3)$ với $x = -\frac{10}{3}$.

b) $4\left(\frac{3}{4}x - 1\right) + (12x^2 - 3x) : (-3x) - (2x - 1)$ với $x = 3$.

Bài 24. Cho đa thức

$$\begin{aligned}f(x) &= -3x^2 + x - 1 + x^4 - x^3 - x^2 + 3x^4; \\g(x) &= x^4 + x^2 - x^3 + x - 5 + 5x^3 - x^2.\end{aligned}$$

- a) Thu gọn và sắp xếp các đa thức trên theo lũy thừa giảm dần của biến;
b) Tính $f(x) - g(x)$; $f(x) + g(x)$;
c) Tính $g(x)$ tại $x = -1$.

Bài 25. Cho đa thức $f(x) = -6x^2 + 3x - 4$.

- a) Tính giá trị của đa thức $f(x)$ tại $x = 2$; $x = -\frac{2}{3}$;
b) Tìm đa thức $g(x)$ sao cho $g(x) - f(x) = 2x^2 + 7x - 2$;
c) Tìm đa thức $h(x)$ sao cho $f(x) - h(x) = -7x^2 + 2x - 6$.

Bài 26. Cho hai đa thức:

$$\begin{aligned}A(x) &= 7x^3 - 9 - x^2 + \frac{1}{3}x + 2x^2 - 7x^3 - \frac{2}{3}x \\B(x) &= -7x^3 + x^2 - x + 3 + \frac{1}{3}x + 2 - 4x^2.\end{aligned}$$

- a) Rút gọn và sắp xếp hai đa thức trên theo lũy thừa bậc giảm dần của x ;
b) Tính $A(x) + B(x)$; $A(x) - B(x)$; $B(x) - A(x)$;
c) Đặt $H(x) = A(x) + B(x)$. Tìm hệ số cao nhất và hệ số tự do của $H(x)$;
d) Tính $H(0)$; $H(-1)$; $H\left(\frac{1}{2}\right)$;
e) Tìm giá trị của x để $H(x) + 4 = 0$.

Bài 27. Thực hiện phép tính:

- a) $(-3x^3 + x^2 + 17x - 2) : (-3x + 7)$. b) $(2x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 3x - 10) : (x^2 + x + 3)$.
c) $(2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 9) : (2x - 3)$. d) $(x^3 - 2x^2 + 15x + 24) : (x + 4)$.

Bài 28. Trong mỗi trường hợp sau đây, tìm thương $Q(x)$ và dư $R(x)$ trong phép chia $F(x)$ cho $G(x)$ rồi biểu diễn $F(x)$ dưới dạng: $F(x) = G(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

a) $F(x) = 35x^3 + 11x^2 + 15x - 5; G(x) = 5x - 2$.

b) $F(x) = x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 20x + 10; G(x) = x^2 - 2x + 4$.

c) $F(x) = x^3 + x^2 - x + 15; G(x) = x^2 - 2x + 5$.

Bài 29. Xác định a, b sao cho $3x^3 + ax^2 + bx + 9 : x^2 - 9$.

F BÀI TẬP BỔ SUNG

Bài 30. Cho hai đa thức:

$$M(x) = -5x^4 + 3x^5 + x(x^2 + 5) + 14x^4 - 6x^5 - x^3 + x - 1$$

$$N(x) = x^4(x - 5) - 3x^3 + 3x + 2x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 5$$

a) Thu gọn và sắp xếp hai đa thức trên theo lũy thừa tăng dần của biến;

b) Tính $H(x) = M(x) + Q(x); G(x) = M(x) - N(x)$;

c) Tìm hệ số cao nhất và hệ số tự do của $H(x)$ và $G(x)$;

d) Tính $H(-1); H(1); G(1); G(0)$;

e) Tìm nghiệm của đa thức $H(x)$.

Bài 31. Rút gọn biểu thức sau:

a) $\left(\frac{1}{2}x^5 - 3x^2\right) : x^2 - x\left(\frac{1}{2}x^2 + 5\right) + 2x(x - 2)(x + 2) - (x^3 - 27) : (x - 3)$;

b) $(7x^3 - 2x^2) : (-2x^2) + \left(\frac{5}{4}x^2 - 3x\right) : x - \frac{1}{2}x(x - 1)(2x + 1)$.

Bài 32. Tìm x , biết:

a) $(6x^3 + x^2) : 2x - 3x(x - 1) + 2 = 0$;

b) $(5x^4 - 3x^2) : x^2 - x(5x + 6) = 0$;

c) $(2x - 1)(4x^2 + 1) = 0$;

d) $(x^2 - 3x)(x^4 + 1) = 0$.

Bài 33. Tính giá trị của biểu thức sau

$$P = 3xy(x + y) + 2x^3y + 2x^2y^2 + 5, \text{ với } x + y = 0$$

$$Q = 3x^2 + 2xy - 2y^2 \text{ tại } x = 1; y = -1.$$

Bài 34. Tìm nghiệm của đa thức $x^2 - x$.

 **Bài 35.** Tìm bậc của đa thức sau

$$M = x^5 + y^6 + x^4y^4 + 1;$$

$$N = 4x^4 + 2x^3 - x^4 - x^2 + 2x^2 - 3x^4 - x + 5;$$

$$P = x^2 + y^3.$$

 **Bài 36.** Để đa thức $ax + 6$ có nghiệm là $x = -\frac{3}{2}$ thì giá trị của a bằng bao nhiêu?

 **Bài 37.** Cho hai đa thức

$$P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x - 2x^3 - 3x^2 + 6;$$

$$Q(x) = 3x^4 + 2x^2 - 3x^4 - 4x - 6.$$

- Thu gọn và sắp xếp các đa thức trên theo lũy thừa giảm dần của biến;
- Tính $P(2)$ và $Q(-1)$;
- Tìm $F(x) = P(x) + Q(x)$;
- Tìm nghiệm của đa thức $F(x)$.

 **Bài 38.** Cho hai đa thức

$$A(x) = -3x^3 + 5x^5 + 2x^4 + x^2 + 2;$$

$$B(x) = 4x^2 - \frac{1}{2} + 3x^3 - 5x^5.$$

- Tính $P(x) = A(x) + B(x)$;
- Chứng tỏ đa thức $P(x)$ không có nghiệm.

 **Bài 39.** Cho các đa thức

$$F(x) = 4x^2 + 3x - 2;$$

$$G(x) = 3x^2 - 2x + 5;$$

$$H(x) = 5x^2 - 2x + 3.$$

- Tính $F(1)$; $G\left(\frac{-1}{3}\right)$; $H(-2)$.
- Tìm x để $F(x) + G(x) - H(x) = 0$;
- Chứng tỏ $F(x) - 3x + 5$ luôn dương với mọi x .

 **Bài 40.** Cho $f(x) = x^3 - 2ax + a^2$ và $g(x) = x^2 + (3a + 1)x + a^2$.

- Tìm a sao cho $f(1) = g(3)$;
- Với a tìm được, hãy tính $f(x) - g(x)$.

Bài 41. (*) Cho biểu thức $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$.

- Tính $f(7)$;
- Tìm x để $f(x) = \frac{1}{4}$;
- Tìm x là số nguyên để $f(x)$ có giá trị nguyên;
- Tìm điều kiện của x để $f(x) > 1$.

Bài 42. Cho đa thức $Q = ax^2y^2 - 2xy + 3xy - 2x^2y^2 + 5$. Biết rằng đa thức Q có bậc là 4 và a là số nguyên tố nhỏ hơn 5. Tìm giá trị của a .

Bài 43. Một hình chữ nhật có kích thước là 25 cm và 45 cm. Người ta tăng mỗi kích thước thêm x cm.

- Hãy lập đa thức biểu thị chu vi của hình chữ nhật mới.
- Tính chu vi của hình chữ nhật mới trong các trường hợp $x = 3$ (cm); $x = 5$ (cm).

Bài 44. Một tam giác vuông có độ dài hai cạnh góc vuông lần lượt là: $n - 3$; $2n - 9$ (đơn vị là mét và $n > 4,5$).

- Hãy lập đa thức biểu diễn công thức tính diện tích của tam giác vuông đó.
- Tính diện tích của tam giác vuông trên trong các trường hợp $n = 6$; $n = 7$.

Bài 45. Một xí nghiệp đang dự tính chuyển hàng bằng hai xe tải và đang phân vân giữa việc mua hẳn hai xe tải hay mượn hai xe tải. Nếu mua hai xe và mỗi xe giá 200000000 đồng thì mỗi ngày xí nghiệp phải tốn 5000000 đồng cho tất cả tài xế và nhiên liệu. Còn nếu thuê xe thì giá thuê một xe tải là 10000000 đồng/ngày (đã bao gồm tiền công cho tài xế và nhiên liệu).

- Gọi A là đa thức biểu thị tổng số tiền xí nghiệp bỏ ra để vận chuyển sau x ngày. Xác định đa thức A đối với mỗi phương án.
- Nếu muốn vận chuyển 1500 thùng hàng và mỗi ngày mỗi xe phải chở 75 thùng thì phương án nào sẽ tiết kiệm hơn.

CHƯƠNG 8.



LÀM QUEN VỚI BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

BÀI 29. LÀM QUEN VỚI BIẾN CỐ

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

- 🏠 Các hiện tượng, sự kiện trong tự nhiên, cuộc sống được gọi chung là biến cố.
- 🏠 Các loại biến cố.
 - 🍃 Biến cố chắc chắn là biến cố biết trước được luôn xảy ra.
 - 🍃 Biến cố không thể là biến cố biết trước được không bao giờ xảy ra.
 - 🍃 Biến cố ngẫu nhiên là biến cố không thể biết trước được có xảy ra hay không.

Chú ý

Để cho tiện ta kí hiệu các mặt xuất hiện của đồng xu như sau: mặt ngửa là N , mặt sấp là S .

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

📄 Dạng : Nhận biết các loại biến cố

🔴 **Ví dụ 1.** Trong các biến cố sau, biến cố nào là biến cố chắc chắn, biến cố không thể, biến cố ngẫu nhiên?

- 🏠 A: "Năm 2021 là một năm nhuận."
- 🏠 B: "Tháng Bảy năm 2022 có 31 ngày (theo Dương lịch)."
- 🏠 C: "Khi tung một đồng xu thì mặt xuất hiện của đồng là mặt ngửa."

🔴 **Ví dụ 2.** Hộp bút của Bình có ba đồ dùng học tập gồm một bút nhớ, một bút bi và một bút chì. Bình lấy ra một dụng cụ học tập từ hộp bút. Trong các biến cố sau, biến cố nào là biến cố chắc chắn, biến cố không thể hay biến cố ngẫu nhiên?

- 🏠 A: "Bình lấy được một cái bút bi".
- 🏠 B: "Bình lấy được một cục tẩy".

🎲 C: "Bình lấy được một cái bút".

🔴 **Ví dụ 3.** Một hộp đựng ba quả bóng màu đỏ được đánh số 1; 3; 5 và hai quả bóng màu xanh được đánh số 2; 4. Bạn Hoa lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ trong hộp. Mỗi biến cố sau là biến cố ngẫu nhiên, biến cố chắc chắn hay biến cố không thể?



Biến cố	Loại biến cố
A: "Lấy được quả bóng màu đỏ. "	
B: "Lấy được quả bóng màu đỏ có ghi số chẵn."	
C: "Lấy được quả bóng có ghi số nhỏ hơn 6."	
D: "Lấy được quả bóng có ghi số lẻ."	

🔴 **Ví dụ 4.** Tung một đồng xu hai lần. Hỏi trong các biến cố sau, biến cố nào là biến cố chắc chắn, biến cố không thể, biến cố ngẫu nhiên?

🎲 A: "Có bốn kết quả về mặt xuất hiện khi tung một đồng xu hai lần".

🎲 B: "Có ba mặt sấp xuất hiện khi tung đồng xu như trên".

🎲 C: "Xuất hiện hai mặt giống nhau trong hai lần tung".

🔴 **Ví dụ 5.** Chọn từ thích hợp (ngẫu nhiên, chắc chắn, không thể) thay vào dấu "?" để được câu đúng. Bạn Mai rút ngẫu nhiên một thẻ trong số 5 thẻ có ghi đầy đủ các số 1; 2; 3; 4; 5.

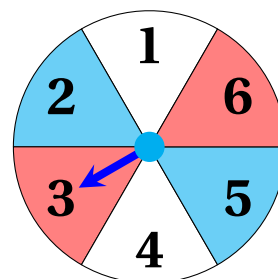
🎲 Biến cố "Thẻ lấy được ghi số 0 "là biến cố...?"

🎲 Biến cố "Thẻ lấy được ghi số lẻ" là biến cố...?"

🎲 Biến cố "Thẻ lấy được ghi số nhỏ hơn 6" là biến cố...?"

🔴 **Ví dụ 6.**

Bạn An quay mũi tên ở vòng quay trong hình bên và quan sát xem khi dừng lại nó chỉ ô nào. Trong các biến sau, hãy chỉ ra biến cố nào là chắc chắn, không thể, ngẫu nhiên.



🎲 A: "Kim chỉ vào ô ghi số lớn hơn 0".

🎲 B: "Kim chỉ vào ô có màu đỏ".

🎲 C: "Kim chỉ vào ô có màu vàng".

🔴 **Ví dụ 7.** Tổ hai của lớp 7A có bốn học sinh nữ là: Dung, Linh, Mai, Quỳnh và sáu học sinh nam là: Đức, Hưng, Toàn, Minh, Vũ, Hải. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong tổ hai của lớp 7A. Các biến cố sau biến cố nào là biến cố ngẫu nhiên, biến cố chắc chắn, biến cố không thể?

 M: "Bạn học sinh được chọn ra có tên là Lan".

 N: "Bạn học sinh được chọn ra là học sinh lớp 7A".

 P: "Bạn học sinh được chọn ra là nữ".

 **Ví dụ 8.** Gieo một con xúc xắc sáu mặt cân đối. Xét các biến cố sau, biến cố nào là biến cố chắc chắn, biến cố không thể, biến cố ngẫu nhiên?

 A: "Mặt xuất hiện có số chấm nhỏ hơn 8".

 B: "Mặt xuất hiện có số chấm chia hết cho 7".

 C: "Mặt xuất hiện có số chấm lớn hơn 4".

 D: "Mặt xuất hiện có số chấm nhỏ hơn 2".

 **Ví dụ 9.** Trong một chiếc hộp có năm tấm thẻ ghi số 1; 2; 3; 5; 6. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ trong hộp. Xét các biến cố sau:

 A: "Rút được thẻ ghi số lớn hơn 8".

 B: "Rút được thẻ ghi số là số nguyên tố".

 C: "Rút được thẻ ghi số nhỏ hơn 7".

Biến cố nào là biến cố chắc chắn, biến cố không thể, biến cố ngẫu nhiên?

 **Ví dụ 10.** Trong cặp sách của Ngọc có một cái bút bi, một cái bút chì và một cái thước kẻ. Ngọc lấy cùng lúc ra hai dụng cụ học tập từ cặp. Hỏi các biến cố sau là chắc chắn, không thể hay ngẫu nhiên?

 A: "Ngọc lấy được ít nhất một cái bút".

 B: "Ngọc lấy được hai cái thước kẻ".

 C: "Ngọc lấy được một cái bút bi và một cái thước kẻ".

 **Ví dụ 11.** Trong hộp có 4 quả bóng vàng, 3 quả bóng xanh và 1 quả bóng đỏ. Hoàng lấy ra 5 bóng từ trong hộp. Trong các biến cố dưới đây, đâu là biến cố không thể, biến cố ngẫu nhiên, biến cố chắc chắn?

 H: "Có ít nhất một quả bóng vàng trong 5 quả bóng lấy ra".

 I: "5 quả bóng lấy ra có cùng màu".

 K: "5 quả bóng lấy ra có đủ cả ba màu xanh, đỏ, vàng".

 **Ví dụ 12.** Trong các biến cố sau đây, biến cố nào là biến cố chắc chắn, biến cố không thể, biến cố ngẫu nhiên?

🟡 Đến năm 2060, con người tìm được sự sống bên ngoài Trái Đất.

🟡 Ở trường em, có một giáo viên sinh năm 1800.

🟡 Trong điều kiện bình thường, nước đóng băng ở 0°C .

🔴 **Ví dụ 13.** Gieo hai con xúc xắc cân đối và quan sát số chấm xuất hiện ở mặt trên mỗi con xúc xắc. Hãy đánh giá xem các biến cố sau là chắc chắn, không thể hay ngẫu nhiên?

🟡 A: "Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 0".

🟡 B: "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc lớn hơn 1".

🟡 C: "Hai mặt xúc xắc xuất hiện cùng số chấm".

🔴 **Ví dụ 14.** Có hai chiếc hộp, hộp A đựng năm quả bóng ghi các số 1; 3; 5; 7; 9; hộp B đựng năm quả bóng ghi các số 2; 4; 6; 8; 10. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ mỗi hộp. Điền vào bảng một trong số các từ sau: chắc chắn, không thể, ngẫu nhiên. Giải thích.

Biến cố	Loại biến cố
Tổng các số ghi trên hai quả bóng lớn hơn 2	
Tích các số ghi trên hai quả bóng bằng 30	
Chênh lệch giữa hai số ghi trên hai quả bóng bằng 10	

🔴 **Ví dụ 15.** Trong hộp có sáu thanh gỗ được gắn số từ 1 đến 6. Lấy đồng thời hai thanh gỗ từ hộp trên. Trong các biến cố sau, biến cố ngẫu nhiên, biến cố không thể, biến cố chắc chắn? Tại sao?

🟡 P: "Tích các số gắn trên hai thanh gỗ là bội của 7".

🟡 Q: "Hai thanh gỗ lấy ra gắn số chẵn".

🟡 R: "Hiệu các số gắn trên hai thanh gỗ không nhỏ hơn 1".

🟡 S: "Tổng các số gắn trên hai thanh gỗ nhỏ hơn 12".

🔴 **Ví dụ 16.** Điểm thi môn Toán vào lớp 10 THPT (đã làm tròn tới hàng đơn vị) của lớp 9A1 được thống kê trong bảng sau:

Điểm	5	6	7	8	9	10
Số học sinh	1	5	15	12	8	3

Lựa chọn ngẫu nhiên một trong số các biến cố dưới đây để báo cáo, nên chọn biến cố nào để chắc chắn đưa ra được số liệu đúng?

🟡 A: "Tổng số học sinh của lớp 9A1 là 45".

🟡 B: "Tỉ lệ học sinh đạt điểm 8 là 27,3%".

🟡 C: "Điểm thi môn Toán vào lớp 10 THPT của lớp 9A1 không có học sinh nào dưới 5".

 D: "Tỉ lệ học sinh đạt điểm 9 và 10 là 20".

 **Ví dụ 17.** Một nhà phân tích thị trường chứng khoán xem xét triển vọng của các chứng khoán của nhiều công ty đang phát hành. Một năm sau 20% số chứng khoán tỏ ra tốt hơn nhiều so với trung bình của thị trường (giá sẽ tăng), 30% số chứng khoán tỏ ra xấu hơn nhiều so với trung bình của thị trường (giá sẽ giảm) và 50% bằng trung bình của thị trường (giá sẽ giữ nguyên). Biến cố nào sau đây là biến cố chắc chắn, biến cố không thể, biến cố ngẫu nhiên?

 E: "Sau một năm, tất cả số chứng khoán tỏ ra xấu hơn nhiều so với trung bình của thị trường".

 G: "Nhà đầu tư sẽ có lãi 10 triệu đồng khi đầu tư 100 triệu đồng vào chứng khoán sau một năm".

 H: "Số chứng khoán bằng trung bình của thị trường sau một năm chiếm một nửa tổng số chứng khoán".

 **Dạng :** Tìm điều kiện để một biến cố là biến cố chắc chắn, không thể hay ngẫu nhiên.

 **Ví dụ 1.** Có hai hộp kín đựng một số chiếc thẻ cùng loại. Hộp thứ nhất tất cả các thẻ là màu đỏ. Bạn Tuấn lấy ngẫu nhiên mỗi hộp một chiếc thẻ và sẽ thắng cuộc nếu trong hai thẻ lấy ra có thẻ màu xanh. Trong hộp thứ hai cần có những thẻ màu gì để biến cố A: “Bạn Tuấn là người chơi thắng cuộc” là:

- a) Biến cố không thể. b) Biến cố chắc chắn. c) Biến cố ngẫu nhiên.

 **Ví dụ 2.** Chọn ngẫu nhiên một số trong tập hợp $\{1; 3; 4; 5; 7; 9; x\}$ (với x là một số tự nhiên). Xét biến cố B: “số được chọn nhỏ hơn 10”. Tìm x để biến cố B là

- a) Biến cố chắc chắn b) Biến cố ngẫu nhiên.

 **Ví dụ 3.** Cho hai chiếc hộp kín A, B đựng một số quả bóng có cùng kích thước, trong đó tất cả các quả bóng ở hộp B có màu vàng. Bạn An lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp một quả bóng và sẽ nhận được phần quà nếu trong hai quả bóng lấy ra có quả bóng màu xanh dương. Trong hộp A cần có những quả bóng màu gì để biến cố “Bạn An nhận được quà” là:

- a) Biến cố chắc chắn? b) Biến cố ngẫu nhiên? c) Biến cố không thể?

 **Ví dụ 4.** Động đất hay Địa chấn là sự rung chuyển trên bề mặt Trái Đất do kết quả của sự giải phóng năng lượng bất ngờ ở lớp vỏ Trái Đất và phát sinh ra sóng địa chấn. Để đo lường mức độ động đất tác động, con người hay dùng thang cường độ Richter như sau.

Các thang cường độ	
1–2 trên thang Richter	Không thể nhận biết
2–4 trên thang Richter	Có thể nhận biết nhưng không gây thiệt hại
4–5 trên thang Richter	Mặt đất rung chuyển, nghe tiếng nổ, thiệt hại không đáng kể
5–6 trên thang Richter	Nhà cửa rung chuyển, một số công trình có hiện tượng bị nứt
6–7 trên thang Richter	Kích hoạt sạt lở, núi lửa có thể phun trào
7–8 trên thang Richter	Mạnh, phá hủy hầu hết các công trình xây dựng thông thường, có vết nứt lớn hoặc hiện tượng sụt lún trên mặt đất
8–9 trên thang Richter	Rất mạnh, phá hủy gần hết cả thành phố hay đô thị, có vết nứt lớn, vài tòa nhà bị lún
>9 trên thang Richter	Rất hiếm khi xảy ra
>10 trên thang Richter	Cực hiếm khi xảy ra, phá hủy toàn bộ

- a) Hãy chỉ ra một biến cố ngẫu nhiên, một biến cố không thể, một biến cố chắc chắn.
- b) Hãy tìm điều kiện để biến cố “Kích hoạt sạt lở, núi lửa có thể phun trào do động đất gây ra” xảy ra.

❶ Ví dụ 5. Chung và Hằng hẹn nhau tại Hồ Gươm lúc 9h sáng cuối tuần này với điều kiện người tới trước sẽ đợi người tới sau tối đa 15 phút, sau đó đi khỏi. Chung luôn đi đúng giờ nên tới đúng 9h sáng Chung sẽ có mặt tại điểm hẹn. Tìm điều kiện để biến cố "Chung và Hằng gặp được nhau" là:

- a) Biến cố chắc chắn. b) Biến cố không thể. c) Biến cố ngẫu nhiên.

❶ Ví dụ 6. Thống kê 2000 sinh viên một khóa của trường đại học theo giới tính và ngành học thu được các số liệu sau:

	Nam	Nữ
Học tài chính ngân hàng	400	500
Học quản trị kinh doanh	800	300

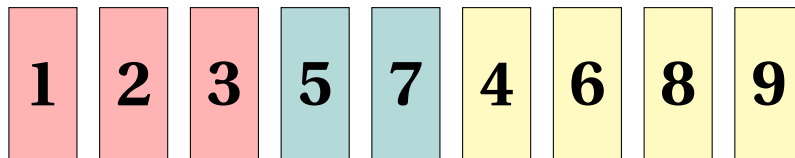
- a) Lấy ngẫu nhiên một sinh viên khóa đó. Hãy chỉ ra một biến cố chắc chắn, một biến cố ngẫu nhiên, một biến cố không thể.
- b) Tìm điều kiện để biến cố "Sinh viên nam nhiều hơn sinh viên nữ" xảy ra.

C BÀI TẬP VẬN DỤNG

✍ Bài 1. Trong các biến cố sau, biến cố nào là biến cố chắc chắn, biến cố không thể, biến cố ngẫu nhiên?

-  A: “Năm 2024 là một năm nhuận.”
-  B: “Tháng Bảy sang năm lượng mưa ở khu vực Bắc Bộ sẽ tăng so với tháng Bảy năm nay.”
-  C: “Khi gieo hai con xúc xắc được tổng số chấm bằng 8.”
-  D: “Khi gieo hai con xúc xắc được tổng số chấm bằng 13.”

 **Bài 2.** Một hộp có chứa 9 chiếc thẻ cùng loại. Trong đó các thẻ đánh số 1, 2, 3 có màu đỏ; các thẻ đánh số 5, 7 có màu xanh và các thẻ đánh số 4, 6, 8, 9 có màu vàng. Bạn A liên tục rút ngẫu nhiên một thẻ từ trong hộp. Mỗi biến cố sau là biến cố ngẫu nhiên, biến cố chắc chắn hay biến cố không thể?



Biến cố	Loại biến cố
A: “Rút được thẻ màu vàng.”	
B: “Rút được thẻ ghi số nguyên tố.”	
C: “Rút được thẻ ghi số nhỏ hơn 11.”	
D: “Rút được thẻ màu xanh và ghi số chẵn.”	
E: “Rút được thẻ màu đỏ ghi số lẻ.”	
F: “Rút được thẻ màu đỏ và số được ghi là hợp số.”	
G: “Rút được thẻ màu vàng và số được ghi lớn hơn 6.”	

 **Bài 3.** Tung một đồng xu 3 lần. Trong các biến cố sau, biến cố nào là biến cố chắc chắn, biến cố không thể, biến cố ngẫu nhiên?

-  A: “Có 2 lần xuất hiện mặt S .”
-  B: “Số lần xuất hiện mặt S xuất hiện mặt N bằng nhau.”
-  C: “Cả ba lần xuất hiện mặt N .”
-  D: “Số lần xuất hiện mặt N và số lần xuất hiện mặt S không bằng nhau.”

 **Bài 4.** Gieo một con xúc xắc 2 lần. Trong các biến cố sau, biến cố nào là biến cố chắc chắn, biến cố không thể, biến cố ngẫu nhiên?

-  A: “Tổng số chấm xuất hiện bằng 1.”
-  B: “Số chấm xuất hiện trong cả hai lần gieo đều là số nguyên tố.”
-  C: “Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo nhỏ hơn 13.”
-  D: “Số chấm xuất hiện trong hai lần gieo nhỏ hơn 13.”

 **Bài 5.** Bạn Hoàng tham gia trò chơi “Bốc thăm trúng thưởng” và sẽ thắng nếu bốc được que thăm có ghi số chia hết cho 9. Có tất cả năm que thăm, trong đó số ghi trên các que thăm thuộc tập hợp $\{100; 200; 300; 500; x\}$ (x là số tròn trăm). Tìm giá trị của x để biến cố A: “Bạn Hoàng thắng cuộc” là:

- a) Biến cố không thể. b) Biến cố ngẫu nhiên. c) Biến cố chắc chắn.

 **Bài 6.** Trong một bình có 5 quả cầu trắng và 3 quả cầu đen. Lấy ngẫu nhiên 1 quả cầu. Xét xem các biến cố sau, đâu là biến cố chắc chắn, biến cố ngẫu nhiên, biến cố không thể?

-  A: “Lấy được quả cầu trắng”.
-  B: “Lấy được quả cầu đỏ”.
-  C: “Trong bình có tổng 8 quả cầu”.

 **Bài 7.** Gieo một con xúc xắc 3 lần. Các biến cố sau là biến cố ngẫu nhiên, chắc chắn hay không thể?

-  D: “Lần gieo thứ nhất mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm nhỏ hơn 7”.
-  E: “Xúc xắc xuất hiện mặt 3 chấm ở lần gieo thứ hai”.
-  F: “Ở lần gieo thứ ba, mặt xuất hiện của xúc xắc là 8 chấm”.

 **Bài 8.** Trong một hộp kín có các thanh gỗ ghi các số 4; 8; 12; 16; 20; 24. Lấy ngẫu nhiên một thanh gỗ trong hộp. Điền từ thích hợp vào dấu “?” để được câu trả lời đúng. Giải thích.

-  Biến cố “Lấy được thanh gỗ có ghi số chia hết cho 4” là biến cố ...?...
-  Biến cố “Lấy được thanh gỗ có ghi số chia hết cho 6” là biến cố ...?...
-  Biến cố “Lấy được thanh gỗ có ghi số chia hết cho 7” là biến cố ...?...

 **Bài 9.** Một tủ quỹ có một chùm chìa khóa gồm 9 chiếc chìa giống hệt nhau trong đó chỉ có 2 chìa có thể mở được tủ sắt. Anh ta thử ngẫu nhiên từng chìa (chìa không trúng được bỏ ra trong lần thử kế tiếp). Cho các biến cố sau, đâu là biến cố không thể, biến cố ngẫu nhiên, biến cố chắc chắn? Vì sao?

-  A: “Anh ta mở được tủ sắt ngay lần đầu tiên”.
-  B: “Anh ta không thể mở được tủ sắt sau khi thử 10 lần”.
-  C: “Lâu nhất tới lần thử thứ 8, anh ta mở được tủ sắt”.

 **Bài 10.** Gieo ngẫu nhiên hai xúc xắc. Biến cố nào là biến cố chắc chắn, biến cố không thể, biến cố ngẫu nhiên trong số các biến cố sau? Giải thích.

 G: “Tổng số chấm xuất hiện của hai xúc xắc là hợp số”.

 H: “Tổng số chấm xuất hiện của hai xúc xắc là ước của 8”.

 I: “Tổng số chấm xuất hiện của hai xúc xắc là số chia hết cho 13”.

 **Bài 11.** Tỷ lệ chữa khỏi bệnh A của một phương pháp điều trị là 90%. Với 10 người bị bệnh A được điều trị bằng phương pháp này, có các biến cố sau, đâu là biến cố chắc chắn, biến cố không thể, biến cố ngẫu nhiên? Tại sao?

 K: “Cả 10 người bị bệnh A đều khỏi bệnh với phương pháp này”.

 L: “Có ít nhất 8 người bị bệnh A trên khỏi bệnh với phương pháp này”.

 M: “Người đầu tiên trong số 10 người bị bệnh A trên chữa bằng phương pháp này khỏi bệnh”.

 **Bài 12.** Điền tên từng loại biến cố tương ứng với các biến cố bên trái ở bảng sau, giải thích:

Tên biến cố	Loại biến cố
A: "Tung một đồng xu hai lần, lần thứ hai xuất hiện mặt sấp".	
B: "Lấy ngẫu nhiên một quả bóng trong hộp có ba quả bóng màu xanh, đỏ, vàng, quả bóng lấy ra có màu tím".	
C: "Gieo ngẫu nhiên một con xúc xắc. Mặt xuất hiện là số lẻ".	
D: "Có 52 số tự nhiên liên tiếp từ số 48 đến số 99".	

 **Bài 13.** Có 2 xạ thủ loại I và 8 xạ thủ loại II, tỉ lệ bắn trúng đích của các loại xạ thủ loại I là 0,9 và loại II là 0,7. Chọn ngẫu nhiên ra một xạ thủ và xạ thủ đó bắn một viên đạn. Cho các biến cố sau, đâu là biến cố chắc chắn, biến cố không thể, biến cố ngẫu nhiên?

 C: "Viên đạn trúng đích".

 D: "Chọn được xạ thủ loại I bắn và tỉ lệ bắn trúng là 90%".

 E: "Tỉ lệ viên đạn trúng đích là 70% khi chọn được xạ thủ loại II bắn".

 **Bài 14.** Trong thùng có 1 quả cầu xanh, 2 quả cầu đỏ và 3 quả cầu trắng. Phong lấy ra ngẫu nhiên cùng lúc 4 quả cầu từ trong thùng. Biến cố P: "Phong sẽ nhận được phần quà khi lấy được quả cầu xanh" là biến cố gì? Nêu những kết quả thuận lợi của biến cố này.

 **Bài 15.** Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên chẵn có hai chữ số.

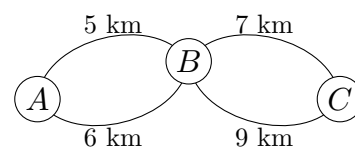
a) Viết tập hợp S gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số tự nhiên được viết ra.

b) Nêu một biến cố chắc chắn, một biến cố ngẫu nhiên, một biến cố không thể của trường hợp trên.

D BÀI TẬP NÂNG CAO

❖ Câu 1.

Có các tuyến đường với độ dài như hình vẽ để nối các điểm du lịch A, B và C . Bạn Dương đi từ A qua B rồi đến C . Trong các biến cố sau, biến cố nào là biến cố chắc chắn, biến cố ngẫu nhiên, biến cố không thể?



❖ A: "Quãng đường Dương đi có độ dài là một số chính phương".

❖ B: "Quãng đường Dương đi không vượt quá 15 km".

❖ C: "Quãng đường Dương đi có độ dài là một số nguyên tố".

❖ D: "Chênh lệch quãng đường Dương đi giữa hai cách đi là ước của 9".

❖ Câu 2. Một cơn bão rất mạnh đã vượt qua đảo Lu-Dông (Philippin) đang tiến vào bờ biển của Việt Nam. Cơ quan khí tượng thủy văn dự báo chắc chắn sau 48 giờ tới bão sẽ đổ bộ vào đất liền của Việt Nam. Đường đi của cơn bão rất phức tạp, hướng đi thay đổi liên tục nên cơ quan khí tượng thủy văn không thể biết được bão sẽ đổ bộ vào tỉnh ven biển nào của nước ta.

a) Các biến cố dưới đây, đâu là biến cố chắc chắn, biến cố không thể, biến cố ngẫu nhiên?

❖ L: "Sau 48 giờ tới bão sẽ đổ bộ vào đất liền của Việt Nam".

❖ M: "Cơn bão sẽ đổ bộ vào Pháp".

❖ N: "Sức gió của cơn bão đạt cấp 13".

b) P là biến cố "Cơn bão sẽ đổ bộ vào một trong số các tỉnh thuộc vùng Bắc Trung Bộ" là biến cố gì? Cơn bão có thể đổ bộ vào cụ thể các tỉnh nào?

❖ Câu 3. Đánh đề hiện nay là một vấn nạn trong xã hội, vậy đánh đề được lời hay lỗ mà nhiều người lại đam mê đến vậy? Bằng cách dùng phương pháp xác suất, các biến cố, chúng ta sẽ có Câu trả lời nhanh chóng. Bạn đặt một số tiền, nói đơn giản là x (đồng) vào một số từ 00 đến 99. Mục đích của người chơi đề là làm sao số này trùng vào hai chữ số cuối cùng của giải đặc biệt "Xổ số miền Bắc". Nếu số của bạn trúng, bạn sẽ được $70x$ (đồng) (tức 70 lần số tiền đầu tư). Nếu không trúng, bạn sẽ mất x (đồng) đặt cược lúc đầu.

Rất nhiều người nghĩ như sau: Giả sử bỏ ra số tiền là 100 000 đồng để chơi đề. Nếu trúng là sẽ được 7 triệu đồng tức là lời được 6,9 triệu. Tuy nhiên, nếu thua chỉ có bị lỗ là 100 000 đồng. Quá lời!!! Vậy đâu là sai lầm trong cách nghĩ này. Các bạn không tính đến xác suất trúng có lớn hay không, vì khi xác suất nhỏ, bạn sẽ đánh mãi mà không thắng. Có nghĩa là bạn luôn bị lỗ.

Hãy chỉ ra một biến cố chắc chắn, một biến cố không thể, một biến cố ngẫu nhiên của vấn đề trên.

❖ Câu 4. Trong kỳ thi THPT Quốc gia, môn Toán có hình thức thi trắc nghiệm 50 Câu hỏi, mỗi Câu có 4 phương án trả lời. Bạn Đông vốn là một học sinh không chăm chỉ trong học tập tham gia dự thi môn Toán khi không học gì, chọn khoanh bừa các đáp án.

a) Hãy xem các biến cố sau, biến cố nào là biến cố chắc chắn, biến cố không thể?

❖ A: "Nếu không học thi THPT Quốc gia Nam có thể không bị điểm không nhưng rất khó đạt điểm cao".

❖ B: "Khi đi thi, Nam chọn tất cả các đáp án là B và kết quả đạt được điểm 10".

b) Hãy chỉ ra một biến cố ngẫu nhiên.

❖ **Câu 5.** Thống kê trên 10000 dân thành phố A cho thấy có 52 người bị bệnh cao huyết áp, 98 người bị bệnh tiểu đường. Trên 12000 dân thành phố B cho thấy có 60 người bị bệnh cao huyết áp, 110 người bị bệnh tiểu đường. Lấy ngẫu nhiên một người trong mỗi thành phố. a) Hãy chỉ ra một biến cố chắc chắn trong trường hợp trên. b) Các biến cố sau là biến cố gì? Tại sao? D: "Tỉ lệ người bị bệnh cao huyết áp của thành phố A thấp hơn tỉ lệ người bị bệnh cao huyết áp của thành phố B". E: "Tỉ lệ người bị bệnh của thành phố A thấp hơn tỉ lệ người bị bệnh của thành phố B".

❖ **Câu 6.** Một nhà máy gồm ba phân xưởng A, B, C. Kiểm tra một lô hàng của nhà máy gồm 1000 sản phẩm trong đó không may có một số sản phẩm bị lỗi, người ta thấy có 252 sản phẩm của phân xưởng A, 349 của phân xưởng B và 399 của phân xưởng C. Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm. Tìm ra các biến cố ngẫu nhiên, biến cố chắc chắn, biến cố không thể trong số các biến cố sau.

❖ M: "Sản phẩm lấy ra thuộc phân xưởng D".

❖ N: "Sản phẩm lấy ra khả năng thuộc phân xưởng C là lớn nhất".

❖ P: "Các phân xưởng A, B, C tương ứng làm ra 25%; 35%; 40% tổng sản lượng nhà máy".

❖ Q: "Sản phẩm lấy ra là sản phẩm bị lỗi của phân xưởng B".

❖ **Câu 7.** Một lớp học có 50 học sinh trong kỳ thi giỏi Toán và Văn, trong đó có 20 người giỏi Toán, 25 người giỏi Văn, 10 người giỏi cả Toán lẫn Văn. Chọn ngẫu nhiên một học sinh lớp này.

a) Tìm một biến cố không thể, một biến cố ngẫu nhiên, một biến cố chắc chắn.

b) Tính số học sinh được chọn giỏi Toán hoặc Văn chiếm bao nhiêu phần trăm của lớp học?

BÀI 30. LÀM QUEN VỚI XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

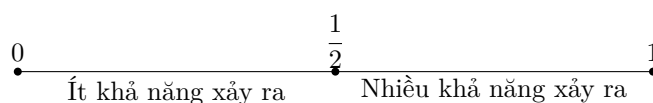
A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

Một biến cố có thể có, không thể, ít khả năng, nhiều khả năng, chắc chắn xảy ra.

Khả năng xảy ra của một biến cố được đo lường bởi một số nhận giá trị từ 0 đến 1, gọi là xác suất của biến cố đó.

Xác suất của một biến cố càng gần 1 thì biến cố đó có nhiều khả năng xảy ra. Xác suất của biến cố đó càng gần 0 thì biến cố đó ít khả năng xảy ra.

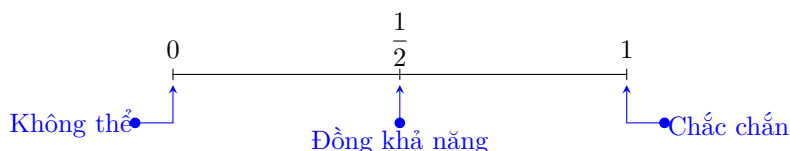


2 XÁC SUẤT CỦA MỘT BIẾN CỐ ĐƠN GIẢN

⚙ Khi các biến cố có khả năng xảy ra như nhau ta nói các biến cố đó đồng khả năng. Nếu chỉ xảy ra hoặc A hoặc B và hai biến cố A, B là đồng khả năng thì xác suất của chúng bằng nhau và bằng 0,5.

🎲 Biến cố chắc chắn luôn có xác suất bằng 1.

🎲 Biến cố không thể luôn có xác suất bằng 0.



Trong một thí nghiệm, nếu có k biến cố đồng khả năng và luôn xảy ra duy nhất một biến cố trong k biến cố này thì xác suất của mỗi biến cố đều bằng $\frac{1}{k}$.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

📄 **Dạng : Xét tính đồng khả năng của các biến cố**

🔴 **Ví dụ 1.** Xét xem các biến cố sau có đồng khả năng hay không? Tại sao?

- a) Lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ trong hộp kín có chứa 2 quả bóng cùng loại gồm 1 quả màu xanh và 1 quả màu vàng. Xét hai biến cố sau A: “Lấy được quả bóng màu xanh”.
B: “Lấy được quả bóng màu vàng”.

- b) Gieo ngẫu nhiên 1 con xúc xắc cân đối. Xét sáu biến cố sau A: “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 1”.
- B: “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 2”.
- C: “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 3”.
- D: “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 4”.
- E: “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 5”.
- F: “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 6”.

❶ Ví dụ 2. Lớp 7A có 20 học sinh nam và 18 học sinh nữ. Giáo viên chọn ngẫu nhiên một bạn để kiểm tra bài cũ. Xét xem hai biến cố sau có đồng khả năng không? Tại sao?

 A: “Bạn được gọi là nam”.

 B: “Bạn được gọi là nữ”.

❶ Ví dụ 3. Một nhóm học sinh có 8 học sinh nam, 5 học sinh nữ. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 1 bạn để đi trải nghiệm. Xét 2 biến cố sau

 A: “bạn được chọn là bạn nam”.

 B: “bạn được chọn là bạn nữ”.

Hỏi hai biến cố A và B có phải là 2 biến cố đồng khả năng không? Vì sao?

 Dạng : Tính xác suất của biến cố

❶ Ví dụ 1. Gieo ngẫu nhiên một con xúc xắc cân đối một lần. Tìm xác suất của các biến cố sau:

- a) A: “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc không vượt quá 6.”
- b) B: “Số chấm trên con xúc xắc ít nhất là 7.”
- c) C: “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 2.”
- d) D: “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là một số chẵn.”

❶ Ví dụ 2. Tung một đồng xu cân đối 2 lần. Tìm xác suất của các biến cố sau:

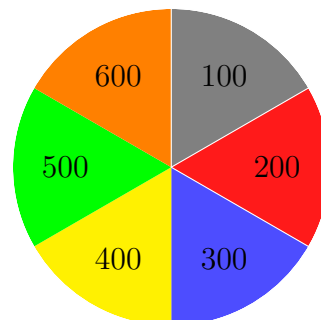
- a) A: “Lần đầu xuất hiện mặt S, lần hai xuất hiện mặt N.”
- b) B: “Cả 2 lần xuất hiện mặt S.”
- c) C: “Số lần xuất hiện mặt S và mặt N bằng nhau.”

❶ Ví dụ 3. Bạn Mai tham gia trò chơi rút thẻ trúng lì xì. Có tất cả 8 thẻ giống hệt nhau được ghi các số khác nhau bao gồm: 10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80. Bạn Mai sẽ rút ngẫu nhiên một lần và nhận được số tiền lì xì tương ứng (nghìn đồng) với số được ghi trên thẻ. Tìm xác suất của các biến cố sau:

- a) A: “Bạn Mai không nhận được tiền lì xì.”
- b) B: “Bạn Mai nhận được số tiền lì xì là ít hơn 100 nghìn đồng.”
- c) C: “Bạn Mai nhận được số tiền lì xì là 50 nghìn đồng.”
- d) D: “Bạn Mai nhận được số tiền lì xì ít nhất là 50 nghìn đồng.”

🔴 Ví dụ 4.

Trong trò chơi vòng quay may mắn, mỗi người chơi sẽ tham gia quay đĩa một lần. Đĩa quay được chia đều thành 6 phần bằng nhau và ghi số điểm tương ứng là 100; 200; 300; 400; 500; 600. Tính xác suất của các biến cố sau:



- a) A: “Người chơi nhận được số điểm nhỏ hơn 700.”
- b) B: “Người chơi nhận được số điểm là 700.”
- c) C: “Người chơi nhận được số điểm là 500.”
- d) D: “Người chơi nhận được số điểm là một số không vượt quá 200.”

🔴 Ví dụ 5. Gieo 1 con xúc xắc cân đối đồng chất. Tính xác suất để gieo được mặt 6 chấm.

🔴 Ví dụ 6. Có 10 tấm bìa được đánh số từ 1 đến 10. Lấy ngẫu nhiên 1 tấm bìa. Tính xác suất để lấy được tấm bìa ghi số 3.

🔴 Ví dụ 7. Trong trò chơi Hộp quà bí mật, có hộp quà, người ta đặt 1 phần thưởng vào 1 hộp quà. Người chơi chỉ được mở 1 hộp quà. Tính xác suất để người chơi nhận được phần thưởng.

🔴 Ví dụ 8. Có 100 quả bóng được đánh số từ 1 đến 100. Lấy ngẫu nhiên 1 quả. Tính xác suất để quả bóng lấy được có số chia hết cho 2.

🔴 Ví dụ 9. Trong 1 cuộc thi bắn súng. Mỗi xạ thủ được bắn đúng 1 lần. Tính xác suất để 1 xạ thủ bắn trúng bia.

🔴 Ví dụ 10. Một người gọi điện thoại nhưng lại quên hai số cuối của số điện thoại. Tính xác suất để người đó chỉ bấm số một lần đúng số cần gọi.

🔴 Ví dụ 11. Tính xác suất của các biến cố sau:

- 🟢 A: "Tháng Một có nhiều hơn 31 ngày".
- 🟢 B: "Nước sôi ở 100°C."
- 🟢 C: "Mặt Trời quay xung quanh Trái Đất".

🔴 Ví dụ 12. Theo dự đoán của giáo viên bộ môn Toán về điểm thi giữa kỳ II của bạn An: trên 9 điểm là 65%; trên 8 điểm và dưới 9 điểm là 25% và dưới 8 điểm là 10%. Theo nhận định trên, bạn An có khả năng đạt điểm nào cao nhất?

❶ Ví dụ 13. Khi tung một con xúc xắc được chế tạo cân đối. Tìm xác suất của các biến cố sau:

- a) A: "Số chấm xuất hiện nhỏ hơn 8".
- b) B: "Số chấm xuất hiện bằng 0".

❷ Ví dụ 14. Một hộp có 50 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1; 2; 3; ...; 49; 50 hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

- a) A: "Số xuất hiện trên thẻ nhỏ hơn 53".
- b) B: "Số xuất hiện trên thẻ là số thập phân".

❸ Ví dụ 15. Trong một hộp gỗ có 5 thanh gỗ được đánh số thứ tự từ 24; 25; 26; 27; 28. Lấy ngẫu nhiên một thanh gỗ từ hộp trên. Tính xác suất biến cố sau:

- a) A: "Lấy được thanh gỗ lớn hơn 30".
- b) B: "Lấy được thanh gỗ lớn hơn 23".

❹ Ví dụ 16. Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên hai chữ số. Tính xác suất của biến cố sau:

- a) A: "Số được viết là bội của 100".
- b) B: "Số được viết là bội của 1".

❺ Ví dụ 17. Trong một hộp chứa các trái banh đều nhau được đánh số 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14. Lấy ngẫu nhiên một trái banh. Tính xác suất của biến cố sau:

- a) A: "Trái banh được lấy có số là ước nguyên tố của 29".
- b) B: "Trái banh được lấy có số dạng $2k$ ($k \in \mathbb{N}$)".

❻ BÀI TẬP VẬN DỤNG

✎ Bài 1. Bạn Đức gieo một đồng xu cân đối hai lần một cách ngẫu nhiên. Xét xem các biến cố sau có đồng khả năng hay không?

A: "Trong hai lần tung có đúng một lần xuất hiện mặt S."

B: "Số mặt xuất hiện trong hai lần gieo giống nhau."

✎ Bài 2. Bạn Suni muốn mua một chiếc bánh Pizza. Cửa hàng có 3 loại với hai kích cỡ trung bình và lớn, số lượng mỗi loại được cho ở bảng sau:

Loại Cỡ	Loại		
	Pizza hải sản	Pizza phô mai	Pizza bò
Trung bình (23 cm)	20	25	35
Lớn (30 cm)	35	35	20

Bạn Suni chọn ngẫu nhiên một chiếc bánh. Trong các biến cố sau, những biến cố nào là đồng khả năng?

- A: “Bạn Suni chọn Pizza hải sản cỡ trung bình.”
 B: “Bạn Suni chọn Pizza hải sản cỡ lớn.”
 C: “Bạn Suni chọn Pizza phô mai cỡ trung bình.”
 D: “Bạn Suni chọn Pizza phô mai cỡ lớn.”
 E: “Bạn Suni chọn Pizza bò cỡ trung bình.”
 F: “Bạn Suni chọn Pizza bò cỡ lớn.”

Bài 3. Một hộp kín đựng 20 quả bóng cùng kích cỡ, khối lượng bao gồm 10 quả bóng màu xanh và 10 quả bóng màu vàng. Chọn ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp. Tìm xác suất của các biến cố A: “Chọn được quả bóng màu vàng hoặc xanh.”

B: “Chọn được quả bóng màu xanh.”

C: “Chọn được quả bóng màu vàng.”

Bài 4. Bạn Pi và bạn Tròn mỗi người gieo con xúc xắc cân đối 1 lần một cách ngẫu nhiên. Tìm xác suất của các biến cố sau A: “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc đều không vượt quá 6.”

B: “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 14.”

C: “Hiệu số chấm trên hai con bằng 7.”

Bài 5.

Bạn Hà tham gia trò chơi “Vòng quay may mắn”. Đĩa quay được chia thành 6 quạt tròn như nhau và được ghi các số: 97, 98, 99, 101, 102, 103 như hình dưới đây. Bạn Hà sẽ quay một lượt.

Bạn sẽ được 100 điểm nếu quay được vào quạt có số nguyên tố.

Bạn sẽ được 200 điểm nếu quay được vào quạt có số là hợp số.

Bạn sẽ được 300 điểm nếu quay được vào quạt có số nguyên tố nhỏ hơn 100.

Tính xác suất của các biến cố sau:

a) A: “Bạn Hà được 100 điểm.”

B: “Bạn Hà được 200 điểm.”

b) C: “Bạn Hà được 300 điểm.”

Bài 6. Bạn An gieo một đồng xu cân đối hai lần một cách ngẫu nhiên. Tìm xác suất của các biến cố sau A: “Cả hai lần tung cùng xuất hiện mặt S.”

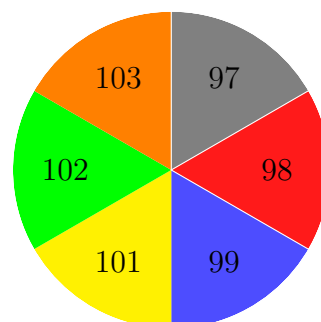
B: “Cả hai lần tung cùng xuất hiện mặt N.”

Bài 7. Chọn ngẫu nhiên một số trong 6 số 30; 31; 32; 33; 34; 35. Tìm xác suất để:

a) A: “Chọn được số nhỏ hơn 40.”

b) B: “Chọn được số có ba chữ số.”

c) C: “Chọn được số là số nguyên tố.”



d) D: "Chọn được số là số chẵn."

 **Bài 8.** Gieo 1 đồng xu cân đối đồng chất. Tính xác suất để gieo được mặt ngửa.

 **Bài 9.** Một cái hộp đựng 5 quả bóng: 1 quả màu xanh, 1 quả màu đỏ, 1 quả màu vàng, 1 quả màu trắng, 1 quả màu đen. Lấy ngẫu nhiên 1 quả bóng. Tính xác suất để lấy được quả bóng màu đỏ.

 **Bài 10.** Gieo 1 con xúc xắc cân đối đồng chất. Tính xác suất để gieo được mặt lẻ chấm.

 **Bài 11.** Gieo một con xúc xắc cân đối đồng chất. Tính xác suất để gieo được số chấm nhỏ hơn 7.

 **Bài 12.** Lớp 7A của một trường có 45 học sinh. Kết quả cuối năm có 15 bạn đạt học sinh giỏi, 15 bạn đạt học sinh khá và 15 bạn là học sinh trung bình. Cô giáo chọn ngẫu nhiên 1 học sinh. Tính xác suất để học sinh được chọn là học sinh giỏi?

 **Bài 13.** Trong một hộp gỗ có 14 ngôi sao đỏ, 16 ngôi sao xanh, 20 ngôi sao vàng, có cùng kích thước. Lấy ngẫu nhiên một ngôi sao trong hộp. Hỏi khả năng lấy được ngôi sao màu nào lớn nhất?

 **Bài 14.** Biết thành phần không khí gồm 78% khí nitrogen; 21% khí oxygen; 1% hơi nước, khí carbonic và các khí khác. Hãy cho biết khả năng thu được thành phần nào là thấp nhất trong 1 lít không khí.

 **Bài 15.** Có hai cái bánh Pizza, mỗi cái hình tròn được chia thành 6 phần bằng nhau được đánh số 1; 2; 3; 4; 5; 6. Bạn Mai và Quỳnh mỗi bạn chọn một phần từ hai cái bánh đó. Tính xác suất của biến cố.

a) A: "Tổng hai lần chọn lớn hơn 12."

b) B: "Tích hai lần chọn bằng 0."

 **Bài 16.** Trong một hộp đựng 5 quả bóng đỏ và 6 quả bóng vàng. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng. Tính xác suất các biến cố sau:

a) A: "Lấy được một quả bóng".

b) B: "Lấy được một quả cầu".

 **Bài 17.** Một nhóm 8 vận động viên đến từ các tỉnh: Cần Thơ, Đồng Tháp, Vĩnh Long, Trà Vinh, Hậu Giang, Kiên Giang, Long An; Tiền Giang; mỗi tỉnh chỉ có đúng một vận động viên. Chọn ngẫu nhiên một vận động viên trong nhóm đó. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) A: "Vận động viên được chọn ra đến từ Đồng Bằng Sông Cửu Long."

b) B: "Vận động viên được chọn ra đến từ Hà Nội."

 **Bài 18.** Chọn ngẫu nhiên một học sinh cấp THCS chỉ tính các học sinh học đúng tuổi và không ở lại lớp. Tính xác suất các biến cố sau:

- a) A: "Học sinh có tuổi là số chính phương".
- b) B: "Học sinh đã được tiêm ngừa vaccine phòng bệnh Covid-19".

 **Bài 19.** Có 6 bạn cùng gieo một con xúc xắc đồng chất. Tính xác suất biến cố sau:

- a) A: "Tổng các mặt tung nhỏ hơn 6".
- b) B: "Tích các mặt tung nhỏ hơn 7776".

BÀI TẬP NÂNG CAO

 **Câu 1.** Mật mã của một chiếc két sắt nhà Nam là một số có 3 chữ số được lập từ các chữ số 1, 2, 3. Mẹ Nam muốn mở két sắt mà quên mất mật mã. Tính xác suất để mẹ Nam mở 1 lần đúng được mật mã.

 **Câu 2.** Gieo 3 lần 1 đồng xu cân đối đồng chất. Tính xác suất để gieo ít nhất một mặt mặt ngửa.

 **Câu 3.** Gieo 2 lần một con xúc xắc cân đối đồng chất. Tính xác suất để tích 2 lần gieo được kết quả là số lẻ.

 **Câu 4.** Gieo 2 lần một con xúc xắc cân đối đồng chất. Tính xác suất để tích 2 lần gieo được kết quả là số chẵn.

 **Câu 5.** Có 10 quyển sách khác nhau trong đó có 5 quyển sách Toán khác nhau, 3 quyển sách Văn khác nhau và 2 quyển sách Lý khác nhau. Tính xác suất để lấy được hai quyển sách Toán.

 **Câu 6.** Một bể cá có 6 con cá được đánh số 1; 4; 9; 16; 25. Bắt ngẫu nhiên một con cá trong bể. Tính xác suất biến cố sau

- a) A: "Con cá bắt được là số chính phương".
- b) B: "Con cá bắt được là số nguyên tố".

 **Câu 7.** Trong trò chơi khoanh số từ 1; 2; 3; ...; 88; 89; 90. Các số được viết thành 3 nhóm trên tờ giấy. Nhóm I gồm các số chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 2. Nhóm II gồm các số chia hết cho 5 và 2. Nhóm III gồm các số còn lại. Tính xác suất các biến cố sau

- a) A: "Xác suất chọn ngẫu nhiên một số trong nhóm I là số lẻ"
- b) B: "Xác suất chọn ngẫu nhiên một số trong nhóm II là số lẻ"

 **Câu 8.** Viết ngẫu nhiên một số gồm ba chữ số. Số nào được viết ra mà có các chữ số tận cùng là 0; 5 thì bỏ số đó đi. Chọn ngẫu nhiên một số. Tính xác suất các biến cố sau:

- a) A: "Số được chọn là số chia hết cho 5".
- b) B: "Số được chọn không vượt quá 10 lập phương".

❖ **Câu 9.** Chọn ngẫu nhiên một số trong các số 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43. Tính xác suất của biến cố sau:

- a) A: "Số được chọn là nguyên tố".
- b) B: "Số được chọn là ước nguyên tố của 125".

❖ **Câu 10.** Quỳnh gieo một xúc xắc 10 lần. Tính xác suất biến cố sau:

- a) A: "Tích hai lần gieo của các mặt bằng 0".
- b) B: "Tổng các mặt không vượt quá 60".

ÔN TẬP CHƯƠNG VIII

E BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 20. Trong các biến cố sau, biến cố nào là biến cố chắc chắn, biến cố không thể, biến cố ngẫu nhiên?

-  A: "Sang năm nên nhiệt mùa hè sẽ cao hơn năm nay".
-  B: "Tháng Hai năm 2028 có 29 ngày (theo Dương lịch)".
-  C: "Gieo một con xúc xắc thì số chấm xuất hiện là số có một chữ số".
-  D: "Gieo một con xúc xắc thì số chấm xuất hiện là một số tròn chục".

Bài 21. Một hộp kín đựng 10 lá phiếu được đánh số 1; 3; 5; 7; 9; 10; 12; 14; 16; 18. Rút ngẫu nhiên một phiếu từ trong hộp. Mỗi biến cố sau là biến cố ngẫu nhiên, biến cố chắc chắn hay biến cố không thể?

Biến cố	Loại biến cố
A: "Rút được phiếu ghi số chẵn"	
B: "Rút được phiếu ghi số có hai chữ số"	
C: "Rút được phiếu ghi số có một chữ số và là số chẵn"	
D: "Rút được phiếu ghi số nhỏ hơn 20"	

Bài 22. Có hai hộp kín đựng một số quả bóng cùng loại. Hộp thứ nhất tất cả các quả bóng đánh số chẵn. Bạn Minh lấy ngẫu nhiên mỗi hộp một quả bóng và sẽ thắng cuộc nếu trong hai quả lấy ra có quả đánh số lẻ. Trong hộp thứ hai cần có những quả bóng đánh số như nào để biến cố A: "Bạn Minh là người chơi thắng cuộc" là

- a) Biến cố không thể; b) Biến cố chắc chắn; c) Biến cố ngẫu nhiên.

Bài 23. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp $\{2; 3; 5; x\}$ (với x là một số tự nhiên có một chữ số). Tìm x để biến cố M: "Chọn được số là hợp số" là

- a) Biến cố không thể; b) Biến cố chắc chắn; c) Biến cố ngẫu nhiên.

Bài 24. Thầy giáo có 20 chiếc hộp giống hệt nhau, mỗi hộp đựng một phần quà. Trong đó có 5 hộp chứa quà là một hộp bút, có 10 hộp chứa quà là một quyển sổ, có 5 hộp chứa quà là một bộ thước kẻ. Bạn Hương chọn ngẫu nhiên một hộp. Hỏi khả năng bạn Hương nhận được quà gì là lớn nhất?

Bài 25. Tung một đồng xu cân đối 2 lần, xét xem các biến cố sau có đồng khả năng không?

A: "Có đúng một lần xuất hiện mặt N ".

B: "Số lần xuất hiện mặt S và mặt N không bằng nhau".

Bài 26. Gieo ngẫu nhiên một con xúc xắc cân đối. Tìm xác suất của các biến cố sau:

- a) A : "Số chấm xuất hiện là một số chia hết cho 5".
- b) B : "Số chấm xuất hiện là một số chia hết cho 3".

Bài 27. Rút ngẫu nhiên một thẻ từ một hộp kín đựng 12 chiếc thẻ cùng loại được đánh số từ 1; 2; 3; ... 12. Tìm xác suất của các biến cố sau

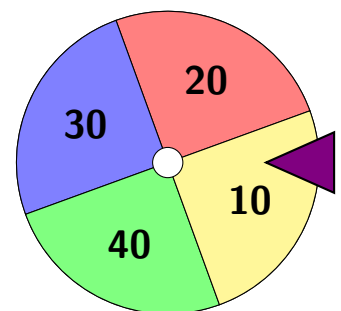
- a) A : "Rút được thẻ ghi số có ba chữ số".
- b) B : "Rút được thẻ ghi số nhỏ hơn 13".
- c) C : "Rút được thẻ ghi số tròn chục".
- d) D : "Rút được thẻ ghi số không vượt quá 6".

Bài 28. Sắp vào năm học mới, bạn Hân cân mua một chiếc balô. Cửa hàng vừa nhập về các loại ba lô màu hồng, đen, xanh, ghi với hai cỡ vừa và lớn (các loại ba lô theo từng cỡ đều có cùng số lượng). Bạn Hân chọn ngẫu nhiên một cái. Tìm xác suất của các biến cố sau:

- a) A : "Bạn Hân chọn mua chiếc ba lô màu hồng cỡ vừa".
- b) B : "Bạn Hân chọn mua chiếc ba lô cỡ vừa".
- c) C : "Bạn Hân chọn mua chiếc ba lô màu ghi".

Bài 29.

Bạn Hà và Nam tham gia trò chơi vòng quay may mắn. Đĩa quay được chia thành 4 quạt bằng nhau và số điểm được ghi trên các quạt là 10; 20; 30; 40. Mỗi bạn sẽ quay một lần. Tìm xác suất của các biến cố sau:



- a) A : "Tổng số điểm của hai bạn là 100".
- b) B : "Điểm số của hai bạn không lệch nhau quá 30 điểm".
- c) C : "Điểm số của hai bạn bằng nhau".

Bài 30. Gieo 1 con xúc xắc cân đối đồng chất. Tính xác suất để gieo được mặt 3 chấm.

Bài 31. Gieo 1 con xúc xắc cân đối đồng chất. Tính xác suất để gieo được mặt chẵn chấm.

Bài 32. Trong một thùng đựng 10 thẻ bài đỏ, 15 thẻ bài xanh, 35 thẻ bài vàng, có cùng kích thước. Bạn Ngân lấy ngẫu nhiên một thẻ bài. Hỏi khả năng Ngân lấy được thẻ bài màu gì là lớn nhất?

Bài 33. Cho 3 ví dụ về biến cố chắc chắn.

Bài 34. Cho 3 ví dụ về biến cố không thể.

F BÀI TẬP BỔ SUNG

 **Bài 35.** Trong các biến cố sau, biến cố nào là biến cố chắc chắn, biến cố không thể, biến cố ngẫu nhiên?

- a) A : "Tuần sau giá xăng sẽ tăng".
- b) B : "Ngày mai Mặt Trời quay quanh Trái Đất".
- c) C : "Tung một đồng xu ba lần, cả ba lần xuất hiện mặt giống nhau"
- d) D : "Khi chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên nhỏ hơn 10, chọn được số có một chữ số".

 **Bài 36.** Rút ngẫu nhiên một thẻ từ một hộp đựng 8 chiếc thẻ có đánh số: 1,2,3,4,5,6,7, x . Tìm số tự nhiên x để biến cố H : "Rút được thẻ là số tự nhiên có hai chữ số là

- a) Biến cố không thể.
- b) Biến cố chắc chắn.
- c) Biến cố ngẫu nhiên.

 **Bài 37.** Một hộp kín có chứa các quả bóng cùng loại, bao gồm: 6 quả bóng màu đỏ, 8 quả bóng màu vàng và 6 quả bóng màu đen. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng trong hộp. Trong các biến cố sau, những biến cố nào là đồng khả năng?

-  A : "Lấy được quả bóng màu đỏ".
-  B : "Lấy được quả bóng màu vàng".
-  C : "Lấy được quả bóng màu đen".

 **Bài 38.** Gieo một con xúc xắc cân đối. Trong các biến cố sau, những biến cố nào là đồng khả năng?

-  A : "Số chấm xuất hiện là một số lẻ".
-  B : "Số chấm xuất hiện là một số chẵn".
-  C : "Số chấm xuất hiện là một số nguyên tố lớn hơn 3"

 **Bài 39.** Gieo một con xúc xắc cân đối. Tính xác suất của các biến cố sau

- a) A : "Số chấm xuất hiện là 10 chấm".
- b) B : "Số chấm xuất hiện là một số chia hết cho 6".
- c) C : "Số chấm xuất hiện là một số nguyên tố".

 **Bài 40.** Bạn Hải tham gia trò chơi vòng quay may mắn. Đĩa quay được chia thành 8 quạt bằng nhau và số điểm được ghi trên các quạt là 1;2; $\dots$;8. Bạn Hải sẽ quay một lần. Tìm xác suất của các biến cố sau

- a) A : "Bạn Hà quay được số điểm là số có hai chữ số".

b) B : "Bạn Hà quay được số điểm là số chia 2 dư 1".

c) C : "Bạn Hà quay được số điểm ít nhất là 7".

 **Bài 41.** Một hộp kín đựng 3 chiếc thẻ cùng loại được đánh số 1; 2; 3. Bạn Tuấn và Hương mỗi người rút thẻ một lần (mỗi bạn rút xong thì lại hoàn trả thẻ vào hộp). Tìm xác suất của các biến cố sau

a) A : "Tổng số ghi trên hai thẻ rút được bằng 7".

b) B : "Hiệu số ghi trên hai thẻ rút được không vượt quá 2".

c) C : "Số ghi trên hai thẻ rút được là bằng nhau".

 **Bài 42.** Một hộp có 15 quả cầu giống hệt nhau, trong đó có 5 quả màu xanh được đánh số từ 1 đến 5 và 10 quả màu hồng được đánh số từ 6 đến 15. Lấy ngẫu nhiên một quả trong hộp. Tìm xác suất của các biến cố

a) A : "Lấy được quả cầu màu đỏ".

b) B : "Lấy được quả cầu màu xanh hoặc hồng".

c) C : "Lấy được quả cầu màu xanh".

 **Bài 43.** Có 10 tấm bìa được đánh số từ 1 đến 10. Lấy ngẫu nhiên 1 tấm bìa. Tính xác suất để lấy được tấm bìa ghi số 5.

 **Bài 44.** Có 200 quả bóng được đánh số từ 1 đến 200. Lấy ngẫu nhiên 1 quả. Tính xác suất để quả bóng lấy được có số không chia hết cho 2.

 **Bài 45.** Theo dự đoán khả năng vào vòng tiếp theo của 4 đội trong trận đấu vòng bảng "U23 châu Á" như sau: Hàn Quốc 90%; Thái Lan 65%; Việt Nam 86%; Malaysia 50%. Hỏi theo dự đoán trên, khả năng đội nào được vào vòng tiếp theo cao nhất? Loại nào có khả năng bị loại cao nhất?



QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG MỘT TAM GIÁC

BÀI 31. QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN TRONG MỘT TAM GIÁC

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

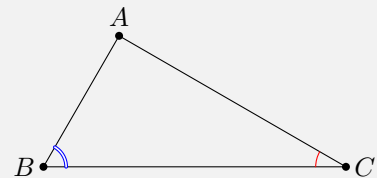
1 GÓC ĐỐI DIỆN VỚI CẠNH LỚN HƠN TRONG MỘT TAM GIÁC

Định lý 31.1.

Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.

Chú ý

Ở hình bên: $\triangle ABC$, $AC > AB \Rightarrow \widehat{B} > \widehat{C}$.



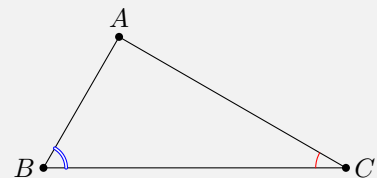
2 CẠNH ĐỐI DIỆN VỚI GÓC LỚN HƠN TRONG MỘT TAM GIÁC

Định lý 31.2.

Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

Chú ý

Ở hình bên: $\triangle ABC$, $\widehat{B} > \widehat{C} \Rightarrow AC > AB$.



⇒ Nhận xét 31.1.

- Trong tam giác vuông, góc vuông là góc lớn nhất nên cạnh đối diện với góc vuông (tức là cạnh huyền) là cạnh lớn nhất.
- Tương tự trong tam giác tù, cạnh đối diện với góc tù là cạnh lớn nhất.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng : So sánh các cạnh của một tam giác

Ví dụ 1. So sánh các cạnh của tam giác ABC , biết $\widehat{A} = 100^\circ$, $\widehat{B} = 50^\circ$.

🔴 **Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 80^\circ, \widehat{C} = 50^\circ$.

- a) Tìm cạnh lớn nhất của tam giác ABC . b) Tam giác ABC là tam giác gì?

🔴 **Ví dụ 3.** Cho tam giác MNP có $\widehat{M} = 105^\circ, \widehat{N} = 35^\circ$.

- a) Tìm cạnh nhỏ nhất của tam giác MNP . b) Tam giác MNP là tam giác gì?

🔴 **Ví dụ 4.** Cho tam giác DEF có $\widehat{D} = 60^\circ, \widehat{E} = 50^\circ$.

- a) Tính số đo của góc F . b) So sánh các cạnh của tam giác DEF .

🔴 **Ví dụ 5.** Cho tam giác XYZ có $\widehat{Y} = 47^\circ, \widehat{Z} = 58^\circ$.

- a) Tính số đo của góc X .
b) So sánh các cạnh của tam giác XYZ .

🔴 **Ví dụ 6.** Cho tam giác HIK cân tại H có $\widehat{H} = 50^\circ$.

- a) Tính số đo góc I và góc K .
b) So sánh các cạnh của tam giác HIK .

🔴 **Ví dụ 7.** Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{B} = 70^\circ$.

- a) Tính số đo góc A và góc C .
b) So sánh các cạnh của tam giác ABC .

🔴 **Ví dụ 8.** Cho tam giác MPD cân tại M có số đo góc ngoài tại đỉnh M bằng 120° .

- a) Tính số đo các góc của tam giác MPD .
b) So sánh các cạnh của tam giác MPD .

🔴 **Ví dụ 9.** Cho tam giác HMN cân tại H có số đo góc ngoài tại đỉnh H bằng 160° .

- a) Tính số đo các góc của tam giác HMN .
b) So sánh các cạnh của tam giác HMN .

 Dạng : So sánh các góc của một tam giác

🔴 **Ví dụ 1.** Cho tam giác DEF có $DE = 5$ cm, $DF = 6$ cm, $EF = 7$ cm. Hãy so sánh các góc của tam giác DEF .

🔴 **Ví dụ 2.** Cho tam giác MNP có $MN = 5$ cm, $NP = 12$ cm, $MP = 16$ cm. Hãy so sánh các góc của tam giác MNP .

🔴 **Ví dụ 3.** Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = 12$ cm và chu vi tam giác ABC bằng 60 cm. Hãy so sánh các góc của tam giác ABC .

🔴 **Ví dụ 4.** Cho tam giác IKL cân tại I có $LK = 17$ cm và chu vi tam giác IKL bằng 45 cm. Hãy so sánh các góc của tam giác IKL .

🔴 **Ví dụ 5.** Cho tam giác PQR vuông tại P có $PQ = 6$ cm, $PR = 8$ cm. Hãy so sánh các góc của tam giác PQR .

🔴 **Ví dụ 6.** Cho tam giác UVX vuông tại U có $UV = 21$ cm, $UX = 29$ cm. Hãy so sánh các góc của tam giác UVX .

🔴 **Ví dụ 7.** Cho $\triangle ABC$ có $AB = 4$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 9$ cm. So sánh các góc của tam giác ABC .

📄 **Dạng :** So sánh hai góc hoặc hai cạnh không trong cùng một tam giác

🔴 **Ví dụ 1.** Cho tam giác nhọn DEF có $DE = 6$ cm, $DF = 9$ cm.

- a) So sánh các góc E và góc F .
- b) Kẻ DK vuông góc với EF tại K . So sánh các góc $\widehat{EDK}$ và $\widehat{FDK}$.

🔴 **Ví dụ 2.** Cho tam giác MNP có $MN = 16$ cm, $MP = 7$ cm.

- a) So sánh các góc N và góc P .
- b) So sánh hai góc ngoài tại đỉnh N và đỉnh P của tam giác MNP

🔴 **Ví dụ 3.** Cho tam giác MNP , biết $\widehat{M} + \widehat{N} = 130^\circ$, $\widehat{M} - \widehat{N} = 40^\circ$.

- a) So sánh các cạnh của tam giác MNP .
- b) Tia phân giác của góc M cắt NP ở D . So sánh độ dài các đoạn thẳng ND và PD .

🔴 **Ví dụ 4.** Cho tam giác DEF , biết $\widehat{D} : \widehat{E} : \widehat{F} = 1 : 2 : 3$.

- a) So sánh các cạnh của tam giác DEF .
- b) Tia phân giác của góc D cắt EF ở M . So sánh độ dài các đoạn thẳng EM và FM .

🔴 **Ví dụ 5.** Cho tam giác ABC có góc B nhọn và $AB < AC$. Tia phân giác của góc A cắt cạnh BC ở M . Trên cạnh AC lấy điểm N sao cho $AB = AN$

- a) Chứng minh rằng $BM = MN$.
- b) So sánh BM và MC .

🔴 **Ví dụ 6.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC > AB$. Tia phân giác của góc B cắt cạnh AC ở D . Kẻ DE vuông góc với BC tại E .

- a) Chứng minh rằng $AD = DE$.
- b) So sánh AD và DC .

C BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho tam giác MNP có $MN = 5$ cm, $NP = 7$ cm, $MP = 8$ cm. So sánh độ lớn ba góc tam giác MNP .

Bài 2. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 70^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$. So sánh độ dài ba cạnh tam giác ABC .

Bài 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 50^\circ$, $\widehat{B} : \widehat{C} = 2 : 3$. So sánh các cạnh của tam giác ABC .

Bài 4. a) So sánh các góc của tam giác PQR biết rằng: $PQ = 7$ cm; $QR = 7$ cm; $PR = 5$ cm.

b) So sánh các cạnh của tam giác HIK biết rằng $\widehat{H} = 75^\circ$; $\widehat{K} = 35^\circ$.

Bài 5. Cho tam giác ABC cân tại A có chu vi bằng 20 cm, cạnh $BC = 8$ cm. So sánh các góc của tam giác ABC .

Bài 6. Cho tam giác DEF , biết $\widehat{D} : \widehat{E} : \widehat{F} = 5 : 7 : 3$. Hãy so sánh các cạnh của tam giác DEF .

Bài 7. Cho tam giác MNP vuông tại M , lấy điểm E trên cạnh MP .

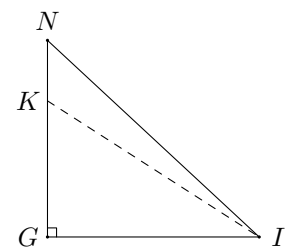
a) So sánh NM và NE .

b) Chứng minh tam giác NEP là tam giác tù.

c) Chứng minh $NM < NE < NP$.

Bài 8.

Ba địa điểm G , N , I là ba đỉnh của một tam giác vuông tại G , biết $GI = 20$ m. Người ta buộc một con bò tại điểm I . Nếu đặt một bó rơm tại một điểm K nằm giữa G và N thì con bò có tới ăn được không biết dây buộc dài 20 m.



Bài 9. Cho tam giác PQR có $PQ < PR$. Gọi E là trung điểm của cạnh QR . Trên tia đối của EP lấy điểm F sao cho $PE = EF$.

a) Chứng minh $\triangle PQE = \triangle FRE$.

b) So sánh góc $\widehat{QPE}$ và góc $\widehat{EPR}$.

Bài 10. Cho tam giác ABC có $AB < AC$, $\widehat{B} < 90^\circ$. Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). So sánh góc $\widehat{HAB}$ và góc $\widehat{HAC}$.

Bài 11. Cho tam giác ADC biết $\widehat{DAC} > 90^\circ$. Lấy điểm B nằm giữa C và A . So sánh AD ; BD và CD .

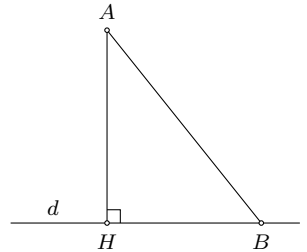
- a) Tính số đo góc tam giác ABC .

BÀI 32. QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 KHÁI NIỆM ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN

- ❖ Từ một điểm A không nằm trên đường thẳng d , kẻ đường thẳng vuông góc với d tại H .
- ❖ Đoạn thẳng AH gọi là đoạn vuông góc hay đường vuông góc kẻ từ điểm A đến đường thẳng d . Ta gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống d .
- ❖ Lấy một điểm M trên d (M khác H), kẻ đoạn thẳng AM . Đoạn thẳng AM gọi là một đường xiên kẻ từ A đến đường thẳng d .



2 SO SÁNH ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN

Định lý 32.1. Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó thì đường vuông góc là đường ngắn nhất.

Chú ý

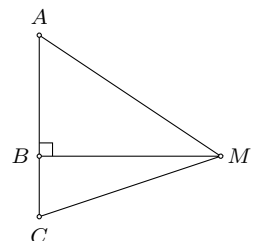
- ❖ Vì độ dài đoạn AH là ngắn nhất trong các đoạn thẳng kẻ từ A đến d nên độ dài đoạn AH được gọi là khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d .
- ❖ Khi điểm A nằm trên đường thẳng d thì khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d bằng 0.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng : Xác định đường vuông góc, đường xiên

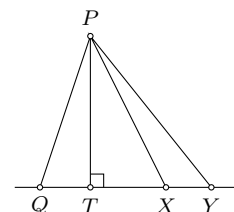
❖ Ví dụ 1.

Cho hình vẽ, hãy xác định đường xiên, đường vuông góc kẻ từ điểm M đến đường thẳng AC .



❖ Ví dụ 2.

Cho hình vẽ, hãy xác định đường xiên, đường vuông góc kẻ từ điểm P đến đường thẳng QY .



Ví dụ 3. Vẽ hình theo diễn đạt sau:

- 1. Vẽ đường thẳng a
- 2. Vẽ điểm G không nằm trên đường thẳng a
- 3. Vẽ đường vuông góc GK từ điểm G đến đường thẳng a , K thuộc a
- 4. Vẽ các đường xiên GM, GN, GP

Ví dụ 4. Vẽ hình theo diễn đạt sau:

- 1. Vẽ các đường thẳng x, y không trùng nhau
- 2. Vẽ điểm D không nằm trên đường thẳng x cũng không nằm trên đường thẳng y
- 3. Vẽ đường vuông góc DA từ điểm D đến đường thẳng x , A thuộc x và đường vuông góc DB từ điểm D đến đường thẳng y , B thuộc y
- 4. Vẽ các đường xiên DM, DN kẻ từ D đến đường thẳng x và đường xiên DE kẻ từ D đến đường thẳng y .

Dạng : So sánh độ dài các đường xiên

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên tia đối của BA lấy hai điểm M và N sao cho M nằm giữa B và N .

- a) So sánh CM và CN .
- b) Sắp xếp các đoạn thẳng CA, CB, CM, CN theo thứ tự độ dài giảm dần.

Ví dụ 2. Cho tam giác MNP vuông tại M . Trên cạnh MN lấy hai điểm A và B sao cho $MA < MB$.

- a) So sánh PA và PB .
- b) Sắp xếp các đoạn thẳng PM, PN, PB, PA theo thứ tự độ dài tăng dần.

Ví dụ 3. Cho tam giác DEF vuông tại D . Trên tia đối của các tia ED và FD lần lượt lấy các điểm P và Q .

- a) Chứng minh $PF < PQ$;
- b) Chứng minh $EF < PQ$.

Ví dụ 4. Cho tam giác TAB vuông tại T . Trên cạnh AT lấy điểm U , trên cạnh TB lấy điểm V .

a) Chứng minh $AB > AV$;b) Chứng minh $AB > UV$.

🔴 **Ví dụ 5.** Cho tam giác XYZ có $\widehat{X} > \widehat{Y}$. Kẻ ZH vuông góc với XY .

a) So sánh ZX và ZY .b) Trong ba đoạn thẳng ZX, ZH, ZY thì đoạn thẳng ngắn nhất là đoạn thẳng nào?

🔴 **Ví dụ 6.** Cho tam giác GHI có $\widehat{GHI} < \widehat{GIH}$. Kẻ GK vuông góc với HI .

a) So sánh GH và GI .b) Trong ba đoạn thẳng GK, GI, GH đoạn thẳng ngắn nhất là đoạn thẳng nào, đoạn thẳng dài nhất là đoạn thẳng nào?

🔴 **Ví dụ 7.** Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên tia đối của tia BA lấy điểm D .

a) So sánh CB và CD .b) Lấy điểm E trên cạnh AC . Chứng minh $BE < DC$.

🔴 **Ví dụ 8.** Cho tam giác DEM vuông tại D . Trên cạnh MD lấy điểm F .

a) So sánh EF và EM .b) Lấy điểm N trên cạnh DE . Chứng minh $EM > NF$.

🔴 **Ví dụ 9.** Cho $\triangle ABC$ nhọn, điểm D nằm giữa B và C sao cho AD không vuông góc với BC . Gọi H và K là chân đường vuông góc kẻ từ B và C đến đường thẳng AD .

a) So sánh $BH + CK$ với $AB + AC$.b) So sánh $BH + CK$ với BC .

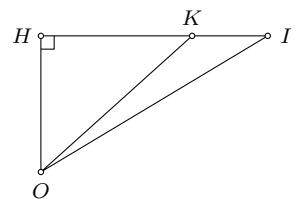
🔴 **Ví dụ 10.** Cho tam giác ABC vuông tại B . Gọi M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = AM$. Chứng minh

a) $\triangle ABM = \triangle ECM$.b) $AC > CE$.

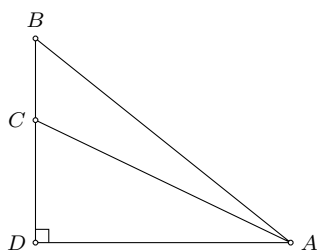
📄 Dạng : Toán có nội dung thực tế

🔴 **Ví dụ 1.**

Bạn Mai tập bơi. Đường bơi ngày thứ nhất, ngày thứ hai, ngày thứ ba của Mai lần lượt là các đoạn OH, OK, OI . Hỏi Mai có đạt mục tiêu đề ra là đường bơi ngày hôm sau dài hơn ngày hôm trước không (biết thời gian bơi của các ngày là như nhau)?



🔴 **Ví dụ 2.** Bạn Liên chuẩn bị cho kỳ thi chạy ngắn ở trường bằng cách tập chạy và được kết quả như sau:



Ngày thứ nhất Liên chạy được quãng đường AB .

Ngày thứ hai Liên chạy được quãng đường AC .

Ngày thứ hai Liên chạy được quãng đường AD .

Biết các quãng đường Liên chạy được trong ba ngày đều được đo trong thời gian là 15 phút. Theo em, kết quả luyện tập đó của Liên có đạt được mục tiêu đề ra là quãng đường ngày hôm sau phải dài hơn ngày hôm trước chưa?

C BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho tam giác ABC có góc B là góc tù. Trên cạnh BC lấy điểm D . Chứng minh rằng: $AB < AD < AC$.

Bài 2. Cho tam giác DEF vuông tại D . Trên cạnh DE và DF lần lượt lấy hai điểm P và Q .

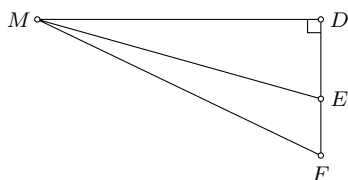
- Chứng minh rằng $PD < PQ$.
- Chứng minh rằng $PQ < PF$.
- Chứng minh rằng $PF < EF$.
- Hãy sắp xếp các đoạn thẳng FP, FE, QP và DP theo thứ tự độ dài giảm dần.

Bài 3. Cho tam giác MNP nhọn. Gọi ME là đường vuông góc kẻ từ điểm M đến cạnh NP .

- So sánh EN và NM .
- Chứng minh rằng $NP < NM + MP$.

Bài 4. Cho tam giác HIK , vẽ HM vuông góc với IK (M thuộc đoạn IK). Gọi D là điểm nằm giữa H và M , E là điểm nằm giữa I và M , N là điểm nằm giữa M và K . Chứng minh rằng chu vi tam giác DEN nhỏ hơn chu vi tam giác HIK .

Bài 5. Nhà A-Lùng muốn đào một các giếng khoan để dùng. Sau khi thăm dò thì vị trí D, E, F là những vị trí thuận lợi nhất để đào giếng (có mạch nước). Nếu nhà A-Lùng ở vị trí M thì nên đào giếng ở đâu để khoảng cách từ nhà đến giếng là gần nhất?



BÀI 33. QUAN HỆ GIỮA BA CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

Định lí 33.1.

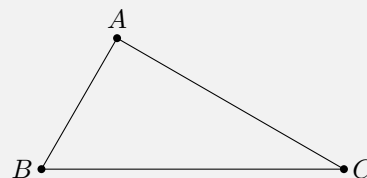
Trong một tam giác, độ dài của một cạnh bất kỳ luôn nhỏ hơn tổng độ dài hai cạnh còn lại.

Chú ý

Với $\triangle ABC$, ta có: $AB < AC + BC$

$$AC < AB + BC$$

$$BC < AB + AC$$



↔ **Tính chất 33.1.** Trong một tam giác, độ dài của một cạnh bất kỳ luôn lớn hơn hiệu độ dài hai cạnh còn lại.

↔ **Nhận xét 33.1.** Nếu kí hiệu a, b, c là độ dài ba cạnh tùy ý của một tam giác thì $b - c < a < b + c$.

Chú ý

Để kiểm tra ba độ dài có là độ dài ba cạnh của một tam giác hay không, ta chỉ cần so sánh độ dài lớn nhất có nhỏ hơn tổng hai độ dài còn lại hoặc độ dài nhỏ nhất có lớn hơn hiệu hai độ dài còn lại hay không.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng : Nhận biết ba độ dài có phải là ba cạnh của một tam giác hay không

Để kiểm tra ba độ dài có phải là độ dài ba cạnh của một tam giác hay không, ta chỉ cần so sánh độ dài lớn nhất có nhỏ hơn tổng hai độ dài còn lại hoặc độ dài nhỏ nhất có lớn hơn hiệu hai độ dài còn lại hay không.

Ví dụ 1. Cho các bộ ba đoạn thẳng có độ dài như sau:

a) 6 cm, 8 cm, 10 cm.

b) 12 dm, 4 dm, 19 dm.

c) 23 m, 4 m, 27 m.

Hỏi bộ ba nào không thể là độ dài ba cạnh của một tam giác? Vì sao? Với mỗi bộ ba còn lại, hãy vẽ một tam giác có độ dài ba cạnh được cho trong bộ ba đó.

🔴 **Ví dụ 2.** Cho các bộ ba đoạn thẳng có độ dài như sau:

- a) 4 cm, 5 cm, 6 cm. b) 2 dm, 14 dm, 16 dm. c) 22 m, 4 m, 27 m.

Hỏi bộ ba nào không thể là độ dài ba cạnh của một tam giác? Vì sao? Với mỗi bộ ba còn lại, hãy vẽ một tam giác có độ dài ba cạnh được cho trong bộ ba đó.

🔴 **Ví dụ 3.** Có thể có tam giác nào mà độ dài ba cạnh như sau không?

- a) 8 cm; 4 cm; 13 cm. b) 5 cm; 9 cm; 7 cm. c) 7 cm; 4 cm; 3 cm.

📄 **Dạng :** Tìm độ dài một cạnh của một tam giác khi biết độ dài của hai cạnh còn lại.

🔴 **Ví dụ 1.** Độ dài hai cạnh của một tam giác bằng 9 cm và 1 cm. Tính độ dài của cạnh còn lại biết rằng độ dài đó là một số nguyên (cm). Khi đó tam giác với độ dài các cạnh đã biết là tam giác gì?

🔴 **Ví dụ 2.** Độ dài hai cạnh của một tam giác bằng 5 cm và 2 cm. Tính độ dài của cạnh còn lại biết rằng độ dài đó là một số nguyên lẻ (cm). Khi đó tam giác với độ dài các cạnh đã biết là tam giác gì?

🔴 **Ví dụ 3.** Cho tam giác ABC có $AB = 2$ cm, $BC = 8$ cm và BC là cạnh lớn nhất. Hãy tìm độ dài cạnh AC biết rằng đó là một số nguyên (cm).

🔴 **Ví dụ 4.** Cho tam giác XYZ có $XY = 3$ cm, $YZ = 12$ cm và YZ là cạnh lớn nhất. Hãy tìm độ dài cạnh XZ biết rằng đó là một số nguyên chẵn (cm).

🔴 **Ví dụ 5.** Cho tam giác DEF cân tại D có độ dài hai cạnh là 12 cm và 5 cm. Tìm độ dài cạnh còn lại.

🔴 **Ví dụ 6.** Cho tam giác MNP cân tại P có độ dài hai cạnh là 6 cm và 9 cm. Tìm độ dài cạnh còn lại.

🔴 **Ví dụ 7.** Tam giác ABC có $AB = 1$ cm, $BC = 5$ cm, cạnh CA có độ dài là một số nguyên (cm). Tính độ dài cạnh AC .

📄 **Dạng :** Tính chu vi của tam giác cân.

Vận dụng định nghĩa của tam giác cân (hai cạnh bên bằng nhau) và bất đẳng thức của tam giác để tìm cạnh còn lại, từ đó tính chu vi của tam giác (bằng tổng độ dài ba cạnh của tam giác).

🔴 **Ví dụ 1.** Tính chu vi của tam giác cân ABC , biết:

- a) $AB = 14$ cm, $AC = 6$ cm. b) $AB = 5$ cm, $AC = 8$ cm.

🔴 **Ví dụ 2.** Tính chu vi của tam giác cân GHI biết:

- a) $GH = 23$ cm, $HI = 11$ cm. b) $GH = 15$ cm, $HI = 31$ cm.

🔴 **Ví dụ 3.** Tính chu vi của một tam giác cân biết độ dài hai cạnh của nó là 7,5 cm và 3,5 cm.

🔴 **Ví dụ 4.** Biết chu vi của một tam giác cân bằng 55,7 cm và độ dài một cạnh của nó bằng 11,2 cm. Tính độ dài các cạnh còn lại của tam giác cân đó.

🔴 **Ví dụ 5.** Tính chu vi của một tam giác cân có hai cạnh là 6 cm, 13 cm.

 Dạng : Chứng minh các bất đẳng thức về độ dài.

🔵 Sử dụng bất đẳng thức của một tam giác nếu kí hiệu a, b, c là độ dài ba cạnh tùy ý của một tam giác thì: $b - c < a < b + c$.

🔵 Sử dụng các phép biến đổi:

🌿 Cộng vào cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số: $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

🌿 Cộng từng vế của hai bất đẳng thức cùng chiều:

$$\left. \begin{array}{l} a > b \\ c > d \end{array} \right\} \Rightarrow a + c > b + d.$$

🔴 **Ví dụ 1.** Cho $\triangle ABC$, lấy điểm N nằm giữa A và B . Chứng tỏ $NB + NC < AB + AC$.

🔴 **Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC . Gọi M, N là trung điểm cạnh AB, AC . Chứng minh rằng BC nhỏ hơn chu vi tam giác AMN .

🔴 **Ví dụ 3.** Cho tam giác ABC có M là trung điểm cạnh BC . Chứng minh rằng $AB + AC > 2 \cdot AM$.

🔴 **Ví dụ 4.** Cho tam giác BAC có $AB = x, AC = y$ ($x > y$). Dựa vào bất đẳng thức tam giác, hãy chứng minh rằng chu vi của tam giác ABC lớn hơn $2x$ nhưng nhỏ hơn $2(x + y)$.

🔴 **Ví dụ 5.** Cho tam giác MNP có $MN = u, NP = v$ ($u > v$). Dựa vào bất đẳng thức tam giác, hãy chứng minh rằng chu vi của tam giác MNP lớn hơn $2u$ nhưng nhỏ hơn $2(u + v)$.

🔴 **Ví dụ 6.** Cho tam giác MNP , trên cạnh NP lấy điểm E khác N và P .

🔵 So sánh ME với $MN + NE$.

🔵 Chứng minh $ME + EP < MN + NP$.

🔵 Lấy điểm F thuộc đoạn ME .

Chứng minh rằng $FM + FP < EM + EP$. Từ đó suy ra $FM + FP < MN + NP$.

🔴 **Ví dụ 7.** Cho tam giác DEF , trên cạnh EF lấy điểm H (khác E và F).

🔵 So sánh $DE + EH$ với DH .

🔵 Chứng minh $DE + EF > DH + HF$.

🔵 Lấy điểm I thuộc đoạn DH .

Chúng minh rằng $HD + HF > ID + IF$. Từ đó suy ra $DE + EF > ID + IF$.

❶ Ví dụ 8. Cho tam giác ABC . Trên cạnh BC lấy điểm D (khác B và C).

❶ Chứng minh $AB + BD > AD$.

❷ So sánh $2AD$ với $AB + AC + BC$.

❸ Chứng minh rằng AD nhỏ hơn nửa chu vi tam giác ABC .

❶ Ví dụ 9. Cho tam giác XYZ . Trên cạnh YZ lấy điểm M (khác Y và Z).

❶ Chứng minh $XY + YM > XM$.

❷ So sánh $XY + YZ + ZX$ với $2XM$.

❸ Chứng minh rằng nửa chu vi tam giác XYZ lớn hơn XM .

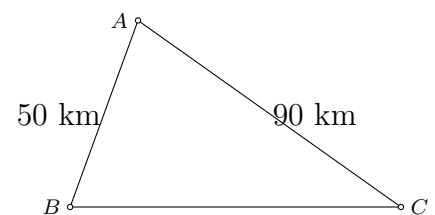
📄 Dạng : Bài toán có nội dung thực tế.

❶ Ví dụ 1.

Ba thành phố A, B, C trên bản đồ là ba đỉnh của một tam giác trong đó $AB = 50$ km, $AC = 90$.

❶ Nếu đặt ở B máy truyền phát tín hiệu có bán kính hoạt động bằng 50 km thì ở thành phố C có nhận được tín hiệu không? Vì sao?

❷ Nếu đặt ở B máy truyền phát tín hiệu có bán kính hoạt động bằng 150 km thì ở thành phố C có nhận được tín hiệu không? Vì sao?

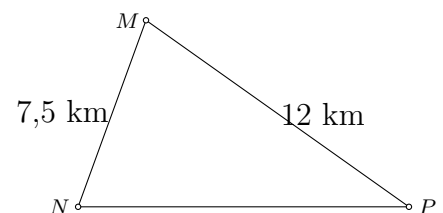


❶ Ví dụ 2.

Ba ngôi làng M, N, P trên bản đồ là ba đỉnh của một tam giác trong đó $MN = 7,5$ km, $MP = 12$ km.

❶ Nếu đặt ở N máy phát sóng có bán kính hoạt động bằng 4 km thì ở thành phố P có nhận được tín hiệu không? Vì sao?

❷ Nếu đặt ở N máy phát sóng có bán kính hoạt động bằng 15 km thì ở thành phố P có nhận được tín hiệu không? Vì sao?



📌 BÀI TẬP VẬN DỤNG

📝 Bài 1. Dựa vào bất đẳng thức tam giác, hãy kiểm tra xem bộ ba đoạn thẳng có độ dài dưới đây có thể tạo thành một tam giác hay không?

- a) 5 cm, 12 cm, 13 cm. b) 5 cm, 11 cm, 5 cm. c) 7 cm, 9 cm, 16 cm.

Bài 2. Có thể tam giác nào mà độ dài ba cạnh như sau không?

- a) 4 cm; 10 cm; 5 cm. b) 5,2 cm; 3,1 cm; 2,1 cm. c) 5 cm; 6 cm; 10 cm.

Bài 3. Chu vi của một tam giác cân là 57 cm, một cạnh dài 17 cm. Tính độ dài hai cạnh còn lại của tam giác đó.

Bài 4. Một tam giác cân có độ hai cạnh là 5 cm; 11 cm. Tính chu vi của tam giác đó.

Bài 5. Một tam giác cân có độ ba cạnh là 3 cm; 10 cm; p cm. Nếu p là số nguyên tố thì p có thể là bao nhiêu?

Bài 6. Ba cạnh của tam giác tỉ lệ với 6 : 8 : 10. Cạnh lớn nhất lớn hơn cạnh nhỏ nhất là 12 cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác.

Bài 7. Chu vi của một tam giác cân là 30 cm, một cạnh dài 6 cm. Tính độ dài hai cạnh còn lại của tam giác.

Bài 8. Cho tam giác DEF . Gọi I là trung điểm của cạnh EF . Chứng minh rằng $ID < \frac{DE + DF + EF}{2}$.

Bài 9. Cho tam giác MNP và điểm O nằm trong tam giác đó. Chứng minh rằng $OM + OP < NM + NP$.

Bài 10. Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Chứng minh rằng

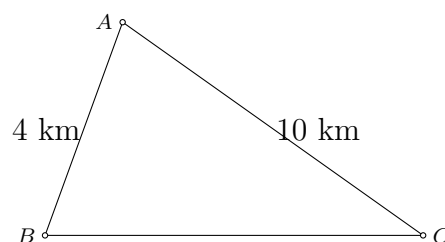
$$\frac{AC - AB}{2} < AM < \frac{AB + AC}{2}.$$

Bài 11. Cho tam giác GHK có $GH > GK$, tia phân giác của góc G cắt cạnh HK tại M . Gọi N là điểm nằm giữa G và M . Chứng minh $GH - GK > NH - NK$.

Bài 12.

Ba trạm biển áp tạo thành tam giác có các đỉnh là A, B, C .
Biết $AB = 4$ km, $AC = 10$ km.

- a) Tính BC biết BC là số nguyên nhỏ nhất (km).
b) Bạn Mai tính rằng tổng đường dây điện nối giữa các trạm biển áp là 21000 m. Hỏi bạn Mai tính đúng không?



D BÀI TẬP NÂNG CAO

Câu 1. Cho $\triangle ABC$ cân. Tính AC, BC biết chu vi tam giác ABC bằng 23 (cm) và $AB = 5$ (cm).

Câu 2. Cho tam giác ABC và điểm O nằm trong tam giác. Chứng minh rằng $OA + OC < BA + BC$.

❖ **Câu 3.** Cho điểm M nằm trong tam giác ABC .

- a) So sánh $MB + MC$ với BC .
- b) Chứng minh $MA + MB + MC > \frac{AB + BC + CA}{2}$.

❖ **Câu 4.** Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ$. Kẻ BI là phân giác của góc ABC ($I \in AC$). Kẻ $ID \perp BC$ tại D . Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $EA = CD$.

- a) $AB = BD$.
- b) $IC > IA$.
- c) Ba điểm E, I, D thẳng hàng.

❖ **Câu 5.** Cho $\triangle MNQ$ vuông tại M ; NK là tia phân giác của góc N ($N \in MQ$). Kẻ KH vuông góc với NQ ($H \in NQ$). Chứng minh rằng

- a) $\triangle NHK = \triangle NMK$. b) NK là đường trung trực của MH . c) $MK < KQ$.

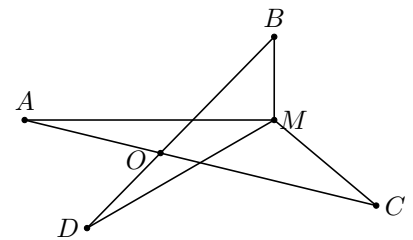
❖ **Câu 6.** Cho góc nhọn xOy . Trên Ox lấy hai điểm M và N (Điểm M nằm giữa O và N), trên Oy lấy hai điểm E và F (E nằm giữa O và F). I là giao điểm của MF và NE .

- a) Chứng minh $MN < MI + NI$.
- b) Chứng minh $MN + EF < MF + NE$.

❖ **Câu 7.** Cho hai điểm A, B cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ a . Tìm vị trí điểm M thuộc a sao cho $AM + BM$ nhỏ nhất.

❖ **Câu 8.**

Cho bốn xã là A, B, C, D như hình vẽ bên. Người ta muốn xây một trạm biến thế sao cho tổng độ dài đường dây dẫn đến bốn xã là ngắn nhất. Em hãy xác định vị trí đó.



❖ **Câu 9.** Cho $\triangle ABC$ có ($AB < AC$) và AD là phân giác góc A ($D \in BC$). Gọi E là một điểm bất kì thuộc cạnh AD (E khác A). Chứng minh $AC - AB > EC - EB$.

BÀI 34. SỰ ĐỒNG QUY CỦA BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN, BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC TRONG MỘT TAM GIÁC

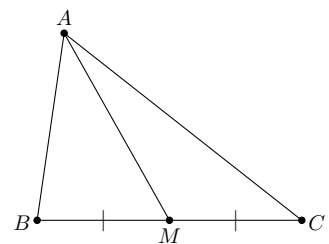
A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 SỰ ĐỒNG QUY CỦA BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN TRONG MỘT TAM GIÁC

1.1. Đường trung tuyến của tam giác

Đoạn thẳng AM nối đỉnh A của tam giác ABC với trung điểm M của cạnh BC gọi là đường trung tuyến (xuất phát từ đỉnh A hoặc ứng với cạnh BC) của tam giác ABC .

Mỗi tam giác có ba đường trung tuyến.



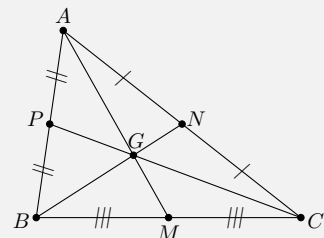
1.2. Sự đồng quy của ba đường trung tuyến

Định lý 34.1.

Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm (hay đồng quy tại một điểm). Điểm đó cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.

Chú ý

Điểm đồng quy của ba đường trung tuyến gọi là trọng tâm của tam giác.



Trong hình vẽ trên, tam giác ABC có ba đường trung tuyến AM , BN , CP đồng quy tại trọng tâm G , ta có:

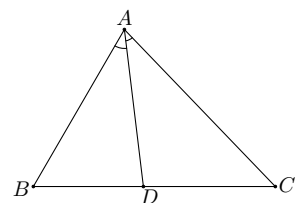
$$\frac{GA}{AM} = \frac{GB}{BN} = \frac{GC}{CP} = \frac{2}{3}.$$

2 SỰ ĐỒNG QUY CỦA BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC TRONG TAM GIÁC.

2.1. Đường phân giác của tam giác

Trong tam giác ABC , tia phân giác của góc A cắt cạnh BC tại điểm D thì đoạn thẳng AD được gọi là đường phân giác (xuất phát từ đỉnh A) của tam giác ABC .

Mỗi tam giác có ba đường phân giác.



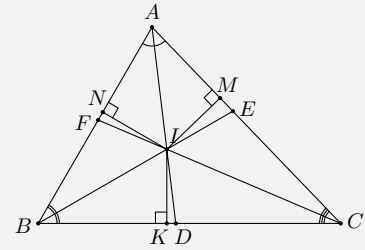
2.2. Sự đồng quy của ba đường phân giác

Định lý 34.2.

Ba đường phân giác của một tam giác đồng quy tại một điểm.
Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác đó.

Chú ý

Chẳng hạn, trong tam giác ABC có ba đường phân giác AD, BE, CF đồng quy tại điểm I , ta có $IK = IM = IN$.



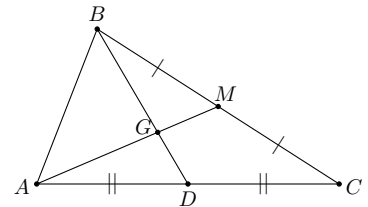
B CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng : Tính tỉ số độ dài các đoạn thẳng

Ví dụ 1.

Cho hình vẽ, hãy điền vào dấu ... các số thích hợp để hoàn thành các đẳng thức sau.

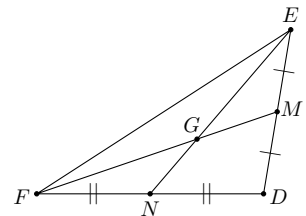
- $GA = \dots AM$; $GM = \dots AM$; $GM = \dots GA$.
- $GB = \dots BD$; $GD = \dots BD$; $GD = \dots GB$.
- $BD = \dots BG$; $AM = \dots GM$.



Ví dụ 2.

Cho hình vẽ, hãy điền vào dấu ... các số thích hợp để hoàn thành các đẳng thức sau.

- $GE = \dots EN$; $GN = \dots EN$; $GE = \dots GN$
- $GF = \dots FM$; $GM = \dots FM$; $GM = \dots FG$.
- $FM = \dots FG$; $EN = \dots GN$.



Dạng : Chứng minh mối quan hệ giữa các đoạn thẳng

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ có hai đường trung tuyến AM, BN vuông góc với nhau, trọng tâm G . Biết $AM = 4,5 \text{ cm}$, $BN = 6 \text{ cm}$. Tính độ dài AB .

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có trung tuyến BN, CP và trọng tâm G . Chứng minh rằng $BN + CP > \frac{3}{2}BC$

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ có hai đường trung tuyến BM, CN cắt nhau tại G . Trên tia đối của tia MG lấy điểm I sao cho $MI = MG$. Trên tia đối của tia NG lấy điểm K sao cho $NK = NG$. Chứng minh rằng $IK = BC$ và $IK \parallel BC$.

◉ Ví dụ 4. Cho tam giác DEF có ba đường trung tuyến DM, EN, FP đồng quy tại G . Trên tia đối của GD lấy điểm Q sao cho $GD = GQ$. Chứng minh rằng

- Các cạnh EG, GQ, QE của tam giác EGQ bằng $\frac{2}{3}$ các đường trung tuyến của tam giác DEF .
- Các đường trung tuyến GK, EM, QH của tam giác EGQ lần lượt bằng nửa các cạnh DE, EF, FD của tam giác DEF .

◉ Ví dụ 5. Cho tam giác MNP có ba đường trung tuyến MI, NK, PL đồng quy tại G . Trên tia đối của GM lấy điểm O sao cho $GO = GM$. Chứng minh rằng

- Các đường trung tuyến MI, NK, PL của tam giác MNP lần lượt bằng $\frac{3}{2}$ các cạnh của tam giác NGO .
- Các cạnh MN, NP, PM của tam giác MNP lần lượt gấp hai lần các đường trung tuyến GD, NI, OE của tam giác NGO .

◉ Ví dụ 6. Cho tam giác XYZ . Trên tia đối của XY lấy điểm T sao cho $XY = XT$. Trên cạnh XZ lấy điểm V sao cho $XV = \frac{1}{3}XZ$. Tia YV cắt TZ tại điểm U . Chứng minh rằng:

- U là trung điểm của TZ .
- XU song song với YZ .
- $XU = \frac{1}{2}YZ$.

◉ Ví dụ 7. Cho tam giác GHI . Trên tia đối của GH lấy điểm N sao cho $GH = GN$. Trên cạnh GI lấy điểm M sao cho $GI = 3GM$. Tia HM cắt NI tại điểm P . Chứng minh

- P là trung điểm của NI .
- $HI = 2GP$.
- GP song song với HI .

◉ Ví dụ 8. Cho góc nhọn xAy . Từ một điểm E trên tia phân giác của góc A , kẻ các đường vuông góc EB, EC đến hai cạnh Ax, Ay .

- So sánh EB và EC .
- Chứng minh $AB = AC$.

◉ Ví dụ 9. Cho góc mOn khác góc tù. Kẻ tia phân giác Ot của góc mOn và tia phân giác Oz của góc ngoài kề bù với góc mOn . Chứng minh:

- Ot vuông góc với Oz .
- Khoảng cách từ điểm A bất kỳ trên tia Oz đến hai đường tia Om và On là bằng nhau.

Dạng : Tính số đo góc, chứng minh tia phân giác của một góc

◉ Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 70^\circ$. Tia phân giác của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại I . Tính $\widehat{AIC}$.

◉ Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 80^\circ$. Hai đường phân giác góc ngoài đỉnh A và C cắt nhau tại K . Tính $\widehat{BKC}$.

❶ Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$. Trên tia đối của tia BC lấy M sao cho $BM = BA$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho $CN = CA$. Qua M kẻ đường thẳng song song với AB và qua N kẻ đường thẳng song song với AC , chúng cắt nhau tại S . Chứng minh SA là tia phân giác của $\widehat{MSN}$.

❶ Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 120^\circ$. Các đường phân giác AD và CE cắt nhau ở O . Đường thẳng chứa tia phân giác ngoài tại đỉnh B của tam giác ABC cắt đường thẳng AC tại F .

- Chứng minh $BO \perp BF$.
- Chứng minh DF là tia phân giác góc ADB .

📄 Dạng : Chứng minh một điểm là trọng tâm của một tam giác, một điểm nằm trên đường phân giác của một góc

❶ Ví dụ 1. Cho tam giác DEF . Vẽ trung tuyến EM . Trên tia EM lấy hai điểm G và N sao cho $EG = \frac{2}{3}EM$ và M là trung điểm của GN . Gọi P là trung điểm của NF , GP cắt MF tại O . Chứng minh rằng:

- O là trọng tâm của tam giác NGF .
- Lấy I thuộc đoạn GF sao cho $GI = \frac{1}{3}GF$. Chứng minh rằng 3 điểm E, I, P thẳng hàng.
- $GO = \frac{1}{3}EF$.

❶ Ví dụ 2. Cho tam giác MNP . Vẽ trung tuyến NQ . Trên tia NQ lấy hai điểm G và K sao cho $NQ = \frac{3}{2}GN$ và Q là trung điểm của GK . Gọi E là trung điểm của KP , GE cắt PQ tại F . Chứng minh rằng:

- F là giao điểm các đường trung tuyến của tam giác KGP .
- $NP = 3GF$.

❶ Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có hai đường phân giác BE, CF cắt nhau tại I . Chứng minh rằng I cách đều AB và AC .

❶ Ví dụ 4. Cho tam giác GHI có hai đường phân giác GM, HN cắt nhau tại P . Chứng minh rằng P thuộc tia phân giác của góc GIH .

❶ Ví dụ 5. Cho góc mAn khác góc bẹt. Trên tia Am lấy hai điểm D và E , trên tia An lấy hai điểm F và H sao cho $AD = AF, AE = AH$. Gọi K là giao điểm của DH và EF . Chứng minh rằng:

- $EF = DH$.
- Tam giác EKD và tam giác HKF bằng nhau.
- AK là tia phân giác của góc mAn .

❶ Ví dụ 6. Cho tam giác DEF cân tại D . Trên cạnh DE và DF lần lượt lấy hai điểm H và K sao cho $DH = DK$. Gọi giao điểm của EK và FH là O . Chứng minh rằng:

- a) $EK = FH$.
- b) Tam giác HOE và tam giác KOF bằng nhau.
- c) DO vuông góc với EF

📖 Dạng : Đường trung tuyến, đường phân giác trong các tam giác đặc biệt

Vận dụng tính chất của tam giác cân, tam giác vuông, tam giác đều và tính chất ba đường trung tuyến trong tam giác để giải bài tập.

❶ Ví dụ 1. Cho tam giác ABC cân tại A có đường trung tuyến AM .

- a) Chứng minh $AM \perp BC$.
- b) Cho $AB = 13\text{ cm}$, $BC = 10\text{ cm}$. Tính AM .

❶ Ví dụ 2. Chứng minh rằng một tam giác có hai đường trung tuyến bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

❶ Ví dụ 3. Cho tam giác đều ABC có G là trọng tâm. Chứng minh rằng $GA = GB = GC$.

❶ Ví dụ 4. Cho tam giác đều DEF có O là giao điểm của hai đường trung tuyến trong tam giác. Chứng minh rằng $OD = OE = OF$.

❶ Ví dụ 5. Cho tam giác ABC vuông tại A , trung tuyến AD . Chứng minh rằng $AD = \frac{1}{2}BC$.

❶ Ví dụ 6. Cho tam giác MNP vuông tại M . Trên cạnh NP lấy điểm E sao cho $NP = 2ME$. Chứng minh rằng ME là trung tuyến ứng với cạnh NP .

❶ Ví dụ 7. Cho tam giác GHK có đường trung tuyến GM . Biết rằng $GM = \frac{1}{2}HK$. Chứng minh rằng tam giác GHK vuông tại G .

❶ Ví dụ 8. Cho tam giác XYZ có E là trung điểm của YZ sao cho $YZ = 2XE$. Chứng minh rằng tam giác XYZ vuông tại X .

❶ Ví dụ 9. Cho tam giác ABC cân tại A , có G là trọng tâm của tam giác và I là giao điểm các đường phân giác của tam giác. Chứng minh rằng ba điểm A, G, I thẳng hàng.

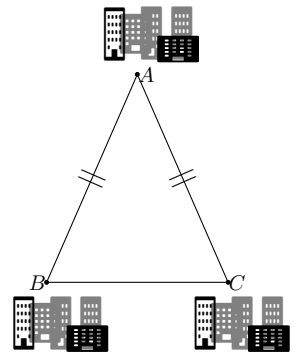
❶ Ví dụ 10. Chứng minh rằng trong tam giác ABC , đường trung tuyến AM đồng thời là đường phân giác thì tam giác ABC là tam giác cân tại A .

📖 Dạng : Bài toán có nội dung thực tế

Vận dụng tính chất về ba đường trung tuyến, ba đường phân giác của tam giác để giải.

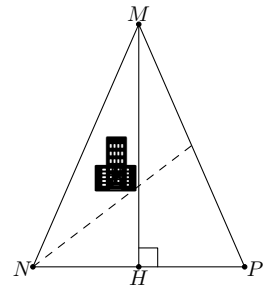
❶ Ví dụ 1.

Ba thành phố A, B, C trên bản đồ là ba đỉnh của một tam giác cân tại A có $\widehat{A} = 50^\circ$. Người ta cần đặt một trạm phát sóng tại một điểm I sao cho khoảng cách từ trạm phát sóng I đến các cạnh AB, BC, CA là bằng nhau. Tính số đo góc BIC .



❷ Ví dụ 2.

Ba địa điểm M, N, P trên bản đồ là ba đỉnh của một tam giác cân tại M . Gọi $MH = 90$ cm là khoảng cách từ M đến cạnh NP . Người ta muốn xây một trạm biến áp tại trọng tâm của tam giác MNP . Bạn Vinh tính được khoảng cách từ trạm biến áp đến điểm M là 35 cm. Hỏi bạn Vinh tính có đúng không?



❸ BÀI TẬP VẬN DỤNG

✎ Bài 1. Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC = 5$ cm. $BC = 8$ cm. Đường trung tuyến AM , trọng tâm G . Tính độ dài đoạn AG .

✎ Bài 2. Cho $\triangle ABC$ có hai đường trung tuyến BN, CP vuông góc với nhau tại G . Biết độ dài $BC = 5$ cm. Tính độ dài đoạn AG .

✎ Bài 3. Cho $\triangle ABC$ có AM là đường trung tuyến, G là trọng tâm. Trên tia đối của tia MG lấy điểm D sao cho $MD = MG$. Chứng minh rằng CG là đường trung tuyến của $\triangle ACD$.

✎ Bài 4. Cho $\triangle ABC$. Các tia phân giác ở góc B và C cắt nhau ở I .

- Biết $\widehat{A} = 70^\circ$, tính số đo $\widehat{BIC}$.
- Biết $\widehat{BIC} = 140^\circ$, tính số đo góc A .
- Chứng minh $\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$.

✎ Bài 5. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 70^\circ$; $\widehat{B} = 60^\circ$. Tia phân giác của $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ cắt nhau tại I . Kẻ đường thẳng qua C song song với AB cắt tia BI tại M . Tính các góc của $\triangle MIC$.

✎ Bài 6. Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$) có I là giao điểm các đường phân giác góc B , góc C . Kẻ AI cắt BC tại J . Kẻ $IH \perp BC$. Chứng minh $\widehat{BIH} = \widehat{CID}$.

✎ Bài 7. Cho tam giác ABC . Trên tia đối của tia AB lấy E sao cho $AE = 2AB$. Trên tia đối của tia BC lấy D sao cho $BD = BC$.

- Chứng minh A là trọng tâm của $\triangle CDE$.
- Chứng minh CA đi qua trung điểm DE .

Bài 8. Cho $\triangle ABC$ có hai đường trung tuyến BM, CN cắt nhau tại G . Biết $BM = CN$. Chứng minh rằng $AG \perp BC$.

Bài 9. Cho tam giác MNP . Gọi I là giao điểm hai phân giác của hai góc N và M . Qua I kẻ đường thẳng song song với NP , cắt MN tại E và cắt MP tại F . Chứng minh rằng $EF = NE + PF$.

Bài 10. Cho tam giác TUV . Các tia phân giác của góc U và V cắt nhau tại O . Gọi A, B, C lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ O đến TU, TV, UV . Tia TO cắt UV tại D . Chứng minh rằng

- a) $OA = OB = OC$.
- b) Góc UOC và góc DOV bằng nhau.

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A , trung tuyến AM . Trên tia đối của MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$.

- a) Tính góc $\widehat{ABD}$.
- b) Chứng minh $\triangle ABD = \triangle BAC$.
- c) Chứng minh rằng $AM = \frac{1}{2}BC$.

Bài 12. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BP, CQ cắt nhau tại G . Trên tia đối của PB , lấy điểm E sao cho $PE = PG$. Trên tia đối của QG lấy điểm F sao cho $QF = QG$.

- a) Chứng minh $GB = GE$.
- b) Chứng minh $GC = GF$.
- c) Chứng minh $EF = BC$.
- d) Chứng minh $EF \parallel BC$.

Bài 13. Cho $\triangle ABC$, các đường trung tuyến BD, CE . Chứng minh $BD + CE > \frac{3}{2}BC$.

Bài 14. Trên đường trung tuyến AD của tam giác ABC , lấy điểm I và G thuộc đoạn AD sao cho $AI = IG = GD$. Gọi E là trung điểm của AC .

- a) Chứng minh B, G, E thẳng hàng và so sánh BE với GE .
- b) CI cắt GE tại điểm O . Chứng minh $BE = 9OE$.

Bài 15. Cho tam giác ABC , trên BC lấy M sao cho $BM = 2MC$. Lấy D thuộc tia đối của tia CA sao cho $CD = CA$.

- a) Điểm M là gì của tam giác ABD ?
- b) DM cắt AB ở E . Chứng minh E là trung điểm của AB .

Bài 16. Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Kẻ các tia phân giác BD, CE . Lấy M là trung điểm của BC .

- a) Chứng minh AM là tia phân giác của góc BAC .

b) Ba đường thẳng AM, BD, CE đồng quy tại H .

c) Giả sử có $AB = AC = BC$, tính tỉ số $\frac{AH}{AM}$.

Bài 17. Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Đường phân giác BD, CE của $\widehat{B}, \widehat{C}$ cắt nhau tại O . Kẻ OK, OH lần lượt vuông góc với AC và AB . Chứng minh

- a) $\triangle BCD = \triangle CBE$; b) $OB = OC$; c) $OH = OK$.

D BÀI TẬP NÂNG CAO

Câu 1. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{C} = 45^\circ$ và $\widehat{A} > 90^\circ$. Kẻ tia BD cắt tia đối của tia CA ở D sao cho $\widehat{CBD} = \widehat{ABC}$. Kẻ $AH \perp BD$ tại H . Tính $\widehat{CHD}$.

Câu 2. Cho $\triangle ABC$ ($\widehat{A} = 90^\circ$), $AB < AC$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = BA$. Gọi AH là đường vuông góc hạ từ A tới BC và DK là đường vuông góc hạ từ D tới AC . Chứng minh,

- a) $\widehat{BDA} = \widehat{ADK}$.
b) AD là tia phân giác của $\widehat{HAC}$ và $AK = AH$.
c) $AB + AC < BC + AH$.

Câu 3. Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AD . Từ D kẻ DE song song với AB (E thuộc AC). Biết $AE = ED$ và BE cắt AD tại G . Chứng minh rằng:

- a) Tam giác ABC cân tại A .
b) G là trọng tâm của tam giác ABC .

Câu 4. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm HA, HC . Kẻ CE vuông góc với BC cắt IK tại E , chứng minh,

- a) $\triangle ACI = \triangle EIC$. b) $IK \parallel AC, IK = \frac{BC}{2}$ c) $BI \perp AK$.

Câu 5. Cho hai đoạn thẳng AC, BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD . Đoạn thẳng AM, AN cắt BD lần lượt tại I và K . Chứng minh $BI = IK = KD$.

Câu 6. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BA$. Trên cạnh BC lấy điểm G sao cho $BG = \frac{1}{3}BC$. Gọi E là giao điểm của AG và CD .

- a) Chứng minh $DE = EC$.
b) Lấy I thuộc tia AE sao cho E là trung điểm của AI , chứng minh $\triangle DAI$ là tam giác vuông.
c) Chứng minh $AE = \frac{1}{2}DC$.

d) Cho $AC = 6$ cm. Chứng minh $AE + BC > 9$ cm.

❖ **Câu 7.** Cho tam giác DEF có $\widehat{D} = 120^\circ$. Các tia phân giác DM, FN cắt nhau tại O . Tia phân giác góc ngoài tại đỉnh E cắt tia FD tại P . Chứng minh rằng:

- a) EO vuông góc với EP .
- b) Góc EMP và góc PMD bằng nhau.
- c) Ba điểm M, N, P thẳng hàng.

❖ **Câu 8.** Cho tam giác DEF . Gọi I là giao điểm các đường phân giác trong của hai góc E và F và K là giao điểm các đường phân giác ngoài của hai góc E và F . Chứng minh rằng D, I, K thẳng hàng.

❖ **Câu 9.** Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, đường cao AH . Vẽ HM, HN lần lượt vuông góc với AB, AC . Trên tia đối của tia MH lấy điểm D sao cho $MD = MH$, trên tia đối của tia NH lấy điểm E sao cho $NE = NH$. Gọi I, K là giao điểm của DE với AB và AC . Chứng minh rằng

- a) IB là tia phân giác của $\widehat{HID}$;
- b) HA là tia phân giác của $\widehat{IHK}$;
- c) IC là tia phân giác của $\widehat{HIK}$;
- d) $IB \perp IC$.

❖ **Câu 10.** Cho tam giác ABC , trung tuyến AI . Trên tia đối của tia AI , lấy điểm D sao cho $IA = ID$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AC và CD , các điểm E, F là giao điểm của BM, BN với AD .

- a) Chứng minh $\triangle AIB = \triangle DIC$.
- b) Chứng minh $AE = FD$.
- c) Chứng minh $EF = \frac{1}{3}AD$.

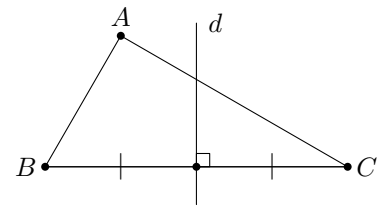
BÀI 35. SỰ ĐỒNG QUY CỦA BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC, BA ĐƯỜNG CAO TRONG MỘT TAM GIÁC

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 SỰ ĐỒNG QUY CỦA BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC TRONG MỘT TAM GIÁC

1.1. Đường trung trực của tam giác

- Trong một tam giác, đường trung trực của mỗi cạnh gọi là đường trung trực của tam giác.
- Mỗi tam giác có ba đường trung trực.



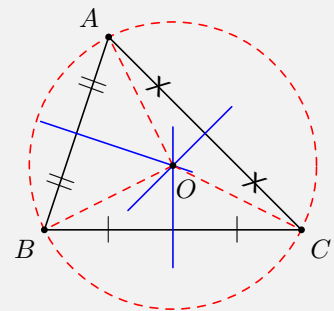
1.2. Sự đồng quy của ba đường trung trực

Định lý 35.1.

Ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua một điểm (hay đồng quy tại một điểm). Điểm đó cách đều ba đỉnh của tam giác.

Chú ý

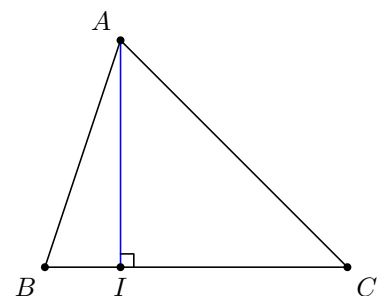
- Trên hình vẽ bên, tam giác ABC có ba đường trung trực đồng quy tại điểm O , ta có $OA = OB = OC$.
- O là tâm đường tròn đi qua ba đỉnh của A, B, C .



2 SỰ ĐỒNG QUY CỦA BA ĐƯỜNG CAO TRONG MỘT TAM GIÁC

2.1. Đường cao của tam giác

- Trong tam giác ABC , đoạn thẳng AI là một đường cao (xuất phát từ đỉnh A hay ứng với cạnh BC) của tam giác ABC .
- Mỗi tam giác có ba đường cao.



2.2. Sự đồng quy của ba đường cao

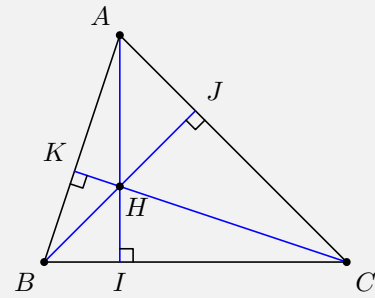
Định lí 35.2.

Ba đường cao của một tam giác đồng quy tại một điểm.
Điểm đó gọi là trực tâm của tam giác.

Chú y

Trên hình vẽ, tam giác ABC có ba đường cao AI , BJ , CK đồng quy tại H . H được gọi là trực tâm của tam giác ABC .

-  Khi $\triangle ABC$ nhọn thì H nằm bên trong tam giác.
-  Khi $\triangle ABC$ vuông tại A thì H trùng với A (kí hiệu là $H \equiv A$).
-  Khi $\triangle ABC$ tù thì H nằm bên ngoài tam giác.



CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng : Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau

🔴 Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Đường trung trực của cạnh AB cắt đường cao AH tại I . Lấy điểm D thuộc cạnh AB , điểm $E \in AC$ sao cho $AD = CE$. Chứng minh

- a) $IA = IC$; b) $ID = IE$.

🔴 Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ cân tại A ($\widehat{A} \neq 90^\circ$), hai đường cao BD , CE cắt nhau tại H , tia AH cắt BC tại M . Chứng minh rằng:

- a) $BD = CE$; b) $MB = MC$; c) $HB = HC$.

🔴 Ví dụ 3. Cho tam giác nhọn MNP ($MN < MP$), đường cao MH , đường trung tuyến MI . Trên tia đối của HM lấy điểm E sao cho $HM = HE$, trên tia đối của IM lấy điểm F sao cho $IM = IF$. Chứng minh rằng $NE = PF$.

🔴 Ví dụ 4. Cho tam giác nhọn DEF ($DE > DF$), đường cao DA , đường trung tuyến DI . Trên tia đối của AD lấy điểm C sao cho $AD = AC$, trên tia đối của ID lấy điểm H sao cho $ID = IH$. Chứng minh rằng

- a) $FC = EH$. б) $IC = \frac{1}{2}DH; HC \parallel FE$.

 Dạng : Tính số đo góc

❶ Ví dụ 1. Cho $\widehat{mOn} = 50^\circ$ và điểm A nằm trong đó. Vẽ điểm B sao cho Om là đường trung trực của AB , vẽ điểm C sao cho On là đường trung trực của AC .

- a) Chứng minh tam giác BOC cân. b) Tính góc BOC .

❷ Ví dụ 2. Cho $\widehat{xAy} = 75^\circ$ và điểm M nằm trong góc đó. Vẽ điểm N sao cho Ax là đường trung trực của MN , vẽ điểm P sao cho Ay là đường trung trực của MP . Tính góc NAP .

❸ Ví dụ 3. Cho tam giác XYZ cân tại X . Tia trung trực của XZ cắt XY tại điểm A . Biết ZA là phân giác của góc XZY . Tính các góc của tam giác XYZ .

❹ Ví dụ 4. Cho tam giác DEF cân tại D . Tia phân giác của góc DFE cắt cạnh DE tại điểm M sao cho $MD = MF$. Tính các góc của tam giác DEF .

❺ Ví dụ 5. Cho góc $\widehat{xAy} = 50^\circ$. Trên tia Ax lấy điểm M . Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với Ay tại H , trên tia đối của HA lấy điểm N . Qua N kẻ đường thẳng vuông góc với Ax tại P và MN cắt HP tại I .

- a) Chứng minh AI vuông góc với NP . b) Tính góc MIN .

❻ Ví dụ 6. Cho tam giác nhọn ABC có góc $\widehat{BAC} = 70^\circ$. Kẻ BK vuông góc với AC tại K và CI vuông góc với AB tại I . Giao điểm của BK và CI là H .

- a) Chứng minh AH vuông góc với BC . b) Tính góc BHC .

Dạng : Bài toán liên quan đến đường trung trực

❶ Ví dụ 1. Cho góc nhọn xOy và một điểm nằm trong góc ấy. Từ M kẻ các đường vuông góc MA, MB lần lượt xuống Ox, Oy . Gọi C là trung điểm của đoạn thẳng OM , P là trung điểm của đoạn thẳng AB . Chứng minh rằng CP là một đường trung trực của tam giác ABC .

❷ Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Kẻ $AH \perp BC$, $H \in BC$. Tia phân giác của $\widehat{HAB}$ cắt BC tại D , tia phân giác của $\widehat{HAC}$ cắt BC tại E . Chứng minh rằng, điểm cách đều ba cạnh của $\triangle ABC$ chính là điểm cách đều ba đỉnh của tam giác ADE .

❸ Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$. Trên cạnh BA lấy điểm M , trên cạnh CA lấy điểm N sao cho $BM + CN = BC$. Chứng minh rằng đường trung trực của MN luôn đi qua điểm cố định.

❹ Ví dụ 4. Cho tam giác DEF cân tại D , trung tuyến DM , đường trung trực của DE cắt DM tại O . Chứng minh rằng O cách đều ba đỉnh của tam giác DEF .

❺ Ví dụ 5. Cho tam giác MNP là tam giác đều có G là trọng tâm. Chứng minh rằng G cách đều ba đỉnh của tam giác MNP .

❻ Ví dụ 6. Cho tam giác GHI có $GH < GI$. Đường trung trực của HI cắt GI tại M . Chứng minh rằng $GM + MH = GI$.

❼ Ví dụ 7. Cho tam giác ABC có góc C nhỏ hơn góc B . Đường trung trực của BC cắt AC tại K . Chứng minh rằng $AK + KB = AC$.

❶ Ví dụ 8. Cho tam giác MNP vuông tại M có $\widehat{P} = 30^\circ$. Đường trung trực của NP cắt MP tại Q . Chứng minh rằng NQ là phân giác của MNP .

❷ Ví dụ 9. Cho tam giác DEF vuông tại D có $\widehat{F} = 40^\circ$. Đường trung trực của EF cắt DF tại K . Tính góc DEK .

❸ Ví dụ 10. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường phân giác BK (K thuộc AC). Từ K kẻ KE vuông góc với BC (E thuộc BC). Giao điểm của AB và KE là H . Chứng minh rằng

- a) BK là đường trung trực của AE ; b) BK là đường trung trực của CH .

❹ Ví dụ 11. Cho tam giác DEF vuông tại D , đường phân giác EM (M thuộc DF). Từ M kẻ MN vuông góc với EF (N thuộc EF). Giao điểm của DE và MN là O . Chứng minh rằng

- a) EM vuông góc với DN ; b) EM là đường phân giác của góc OEF .

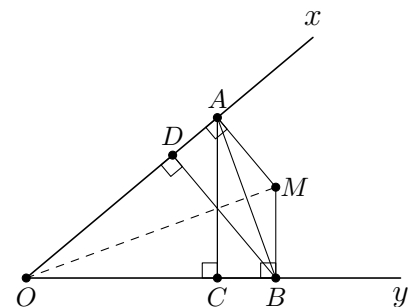
❺ Ví dụ 12. Cho góc nhọn xAy và điểm O cố định nằm trong góc đó. Xác định vị trí của các điểm M thuộc Ax , N thuộc Ay sao cho chu vi tam giác OMN là nhỏ nhất.

❻ Ví dụ 13. Cho đường thẳng a và hai điểm E, F nằm về cùng một phía đối với đường thẳng a sao cho EF không vuông góc với đường thẳng a . Hãy tìm trên đường a một điểm P sao cho $|PE - PF|$ có giá trị nhỏ nhất.

Dạng : Bài toán liên quan đến đường cao

❶ Ví dụ 1.

Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$. Trên tia Ox lấy điểm A , trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OA = OB$. Kẻ $AC \perp Oy$; $BD \perp Ox$. Đường thẳng vuông góc với Ox kẻ từ A cắt đường thẳng vuông góc với Oy kẻ từ B tại M . Chứng minh OM, AC, BD đồng quy.



❷ Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có BD là đường phân giác. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$. Vẽ CH vuông góc với BD . Chứng minh BA, DE, CH đồng quy.

❸ Ví dụ 3. Cho đoạn thẳng MN và điểm P nằm giữa M và N sao cho $PM < PN$. Từ điểm P kẻ tia Px vuông góc với MN tại P . Trên tia Px lấy điểm Q và R sao cho $PQ = PM, PR = PN$. Giao điểm của MQ và RN là S . Chứng minh rằng

- a) MQ vuông góc với RN . b) R là trực tâm của tam giác MQN .

❹ Ví dụ 4. Cho đoạn thẳng EF và điểm A nằm giữa hai điểm E và F sao cho $AE < AF$. Từ A kẻ tia At vuông góc với EF tại A . Trên tia At lấy điểm B và C sao cho $AB = AE, AC = AF$. Giao điểm của EB và CF là D . Chứng minh rằng B là trực tâm của tam giác ECF .

❺ Ví dụ 5. Cho tam giác DEF cân tại D , hai đường cao EH và FK cắt nhau tại I . Tia DI cắt EF tại M . Chứng minh rằng

- a) M là trung điểm của EF ;

- b) Tam giác MHK cân.

🔴 Ví dụ 6. Cho tam giác ABC cân tại A , hai đường cao BM và CN cắt nhau tại H . Tia AH cắt BC tại E . Chứng minh rằng

- a) AE là phân giác của góc BAC ;

- b) Tam giác EMN cân.

🔴 Ví dụ 7. Cho tam giác XYZ vuông tại X , đường cao XH . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của XH và HZ . Chứng minh rằng

- a) M là trực tâm của tam giác XYN ;

- b) YM vuông góc với XN .

❶ Ví dụ 8. Cho tam giác TUV vuông tại T , đường cao TA . Gọi B, C lần lượt là trung điểm của TA và AV . Chứng minh rằng

- a) BC song song với TV ;

- b) UB vuông góc với TC .

🔴 Ví dụ 9. Cho tam giác nhọn GHK có $GH < GK$, đường cao GA . Trên đoạn AK lấy điểm D sao cho $AH = AD$. Từ D kẻ DE vuông góc với GK (E thuộc GK). Từ K kẻ KF vuông góc với GD tại F . Chứng minh

- a) Tam giác GHD cân;

- b) GA , DE và KF đồng quy tại một điểm.

🔴 **Ví dụ 10.** Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$, đường cao AD . Trên đoạn DC lấy điểm E sao cho $DB = DE$.

- a) Chứng minh rằng tam giác ABE cân;

- b) Từ E kẻ EF vuông góc với AC (F thuộc AC). Từ C kẻ CK vuông góc với AE (K thuộc AE). Chứng minh ba đường thẳng AD , EF và CK đồng quy tại một điểm.

 Dạng : Bài toán có nội dung thực tế

🔴 Ví dụ 1. Ba thành phố A, B, C trên bản đồ là ba đỉnh của một tam giác đều có độ dài đường cao $AH = 12$ cm. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Xác định khoảng cách từ G đến các đỉnh B và C trên bản đồ.

🔴 Ví dụ 2. Ba thành phố A, B, C trên bản đồ là ba đỉnh của một tam giác đều có G là trọng tâm. Biết $GB = 10\text{cm}$. Tính độ dài đường cao AH trên bản đồ.

muc

 **Bài 1.** Ba ngôi làng D, E, F trên bản đồ là ba đỉnh của một tam giác. Người ta cần đặt một trạm biến áp để kéo điện về với các ngôi làng. Vậy phải đặt trạm biến áp tại đâu để khoảng cách từ trạm biến áp đến các ngôi làng là như nhau?

 **Bài 2.** Chứng minh rằng nếu một tam giác có một đường trung tuyến đồng thời là đường trung trực thì tam giác đó là tam giác cân.

Bài 3. Chứng minh rằng nếu một tam giác có một đường trung tuyến đồng thời là đường cao thì tam giác đó là tam giác cân.

Bài 4. Cho tam giác đều ABC . Trên các cạnh AB, BC, AC lần lượt lấy các điểm D, E, F sao cho $AD = BE = CF$.

- Chứng minh rằng tam giác DEF đều.
- Gọi O là giao điểm các đường trung trực của tam giác ABC . Chứng minh rằng O cũng là giao điểm các đường trung trực của tam giác DEF .
- Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng H cũng là trực tâm của tam giác DEF .

Bài 5. Cho tam giác tù MNP có $\widehat{NMP} = 135^\circ$. Từ N và P lần lượt kẻ NA vuông góc với MP , PB vuông góc với MN tại A và B . Kẻ đường cao MH của tam giác MNP .

- Chứng minh rằng các tam giác MNA, MPB là các tam giác vuông cân.
- Chứng minh ba đường thẳng MH, NA, PB đồng quy tại một điểm.

Bài 6. Cho tam giác DEF vuông cân tại D . Trên cạnh DE lấy điểm H , trên tia đối của tia DF lấy điểm K sao cho $DH = DK$.

- Chứng minh rằng KH vuông góc với EF .
- Chứng minh rằng FH vuông góc với EK .

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G cách đều ba đỉnh A, B, C . Chứng minh rằng $\triangle ABC$ đều.

Bài 8. Cho $\triangle ABC$ cân ($AB = AC$), O là giao điểm hai đường trung trực của hai cạnh AB, BC (O nằm trong tam giác). Trên tia đối của hai tia AB và CA lấy hai điểm M và N sao cho $AM = CN$.

- Chứng minh $\widehat{OAB} = \widehat{OCA}$;
- Chứng minh $\triangle AOM = \triangle CON$;
- Hai đường trung trực của OM và ON cắt nhau tại I . Chứng minh OI là tia phân giác của $\widehat{MON}$.

Bài 9. Cho $\triangle ABC$ nhọn, $\widehat{A} = 70^\circ$. Đường trung trực của AB, AC cắt nhau tại O . Tính số đo của $\widehat{BOC}$.

Bài 10. Cho $\triangle ABC$. Đường trung trực của AC cắt đường trung trực của BC tại O . Đường vuông góc với OA tại A cắt đường vuông góc với OB tại B ở D . Chứng minh OD là đường trung trực của AB .

Bài 11. Cho $\triangle ABC$ nhọn có đường cao AE và BD cắt nhau tại H . Biết rằng $AH = BC$. Tính $\widehat{BAC}$.

Bài 12. Cho đoạn thẳng AB có điểm M nằm giữa. Kẻ từ Mx vuông góc với AB . Trên Mx lấy D, C sao cho $MD = AM, MC = MB$. Chứng minh $BC \perp AD$.

C BÀI TẬP NÂNG CAO

Câu 1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $\widehat{C} = 60^\circ$. Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AC$.

- Tam giác DBC là tam giác gì? Vì sao?
- Chứng minh $AC = \frac{1}{2}BC$.
- Trên tia BA lấy điểm O sao cho $BO = \frac{2}{3}BA$. Chứng minh O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DBC .

Câu 2. Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Các đường trung trực của các cạnh AB và AC cắt nhau tại O . Lấy điểm D thuộc cạnh AB . Điểm E thuộc cạnh AC sao cho $BD = CE$. Chứng minh:

- $\triangle DOB = \triangle EOC$.
- AO là đường trung trực của DE .
- $DE \parallel BC$.

Câu 3. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , lấy điểm E trên cạnh BC sao cho $BE = BA$. Từ E kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại H .

- Chứng minh BH là đường trung trực của đoạn thẳng AE .
- So sánh AH và HC .
- Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Chứng minh DH là tia phân giác của góc BDC .
- Cho $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$ và $BC = 10\text{cm}$. Tính chu vi tam giác BDC .

Câu 4. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $\widehat{C} = 30^\circ$. Kẻ đường trung trực của đoạn thẳng AC , cắt AC tại H và cắt BC tại D . Nối A với D .

- Chứng minh tam giác ABD đều.
- Kẻ phân giác góc B cắt AD tại K , cắt DH kéo dài tại I . Chứng minh I là tâm đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ADC .
- Gọi E, F là hình chiếu vuông góc của I xuống các đường thẳng BC, BA . Chứng minh $IE = IF = IK$.
- Tính số đo góc DAI .

Câu 5. Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^\circ$), đường phân giác AD . Kẻ đường cao BE . Gọi H là giao điểm của BE và AD .

- a) Chứng minh $CH \perp AB$.
- b) Gọi F là giao điểm của CH và AB . Chứng minh AD là trung trực của EF .
- c) Kẻ $EI \perp HC$; $FJ \perp HB$ với $I \in HC$; $J \in HB$. Chứng minh các đường thẳng EI , FJ , AD cùng đi qua một điểm, kí hiệu điểm đó là O .
- d) Chứng minh $AC - AF > OF - OC$.

❖ **Câu 6.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường phân giác BF . Gọi H là hình chiếu của điểm C trên tia BF . Trên tia đối của tia HB lấy điểm E sao cho $HE = HF$. Gọi K là hình chiếu của F trên BC . Chứng minh:

- a) Tam giác CEF cân.
- b) So sánh FA và FC .
- c) Tam giác EBC vuông.
- d) Ba đường thẳng CH , FK , AB cùng đi qua một điểm.

❖ **Câu 7.** Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH . Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BA = BM$.

- a) Chứng minh AM là tia phân giác của góc HAC .
- b) Gọi K là hình chiếu vuông góc của M trên AC . Chứng minh AM là trung trực của HK .
- c) Gọi I là hình chiếu vuông góc của C trên tia AM . Chứng minh AH , KM , CI đồng quy.
- d) Chứng minh $AB + AC < AH + BC$.

❖ **Câu 8.** Cho tam giác ABC có $AB < AC$; AD là phân giác. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Trên tia AB lấy điểm F sao cho $AF = AC$. Chứng minh:

- a) $\triangle ABD = \triangle ADE$.
- b) $\widehat{FBD} = \widehat{CED}$.
- c) $AD \perp CF$.
- d) $FD = DC$.
- e) Ba điểm F , D , E thẳng hàng.

❖ **Câu 9.** Cho $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 90^\circ$. Đường trung trực của AB cắt AB tại D và cắt BC tại E .

- a) Chứng minh $EA = EB$.
- b) Từ E kẻ $EH \perp AC$ ($H \in AC$). Chứng minh $EH \perp ED$.
- c) Chứng minh $EH = AD$.
- d) Chứng minh $DH \parallel BC$ và $DH = \frac{BC}{2}$.

ÔN TẬP CHƯƠNG IX

D BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 13. Cho tam giác DEF có $\widehat{D} = 30^\circ$, $\widehat{E} = 105^\circ$. So sánh độ dài các cạnh của tam giác DEF .

Bài 14. Cho tam giác MNP có $\widehat{N} = 25^\circ$, $\widehat{P} = 127^\circ$. So sánh độ dài các cạnh của tam giác MNP .

Bài 15. Cho tam giác ABC có $AB = 3\text{ cm}$, $AC = 4\text{ cm}$, $BC = 5\text{ cm}$. Hãy so sánh các góc của tam giác ABC .

Bài 16. Cho tam giác GHI có $GH = 13\text{ cm}$, $HI = 7\text{ cm}$, $GI = 9\text{ cm}$. Hãy so sánh các góc của tam giác GHI .

Bài 17. Cho tam giác PQR có $\widehat{P} = 100^\circ$, tia phân giác của góc Q và góc R cắt nhau tại M . Tính $\widehat{QMR}$.

Bài 18. Cho tam giác XYZ có $\widehat{X} = 40^\circ$, tia phân giác của góc Y và góc Z cắt nhau tại K . Tính $\widehat{ZKY}$.

Bài 19. Cho $\triangle ABC$ có góc B bằng 45° , góc C bằng 120° . Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2BC$. Tính góc $\widehat{ADC}$.

Bài 20. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{C} < \widehat{B} < 90^\circ$.

- Chứng minh rằng $AB < AC$.
- Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $AM = AB$. Chứng minh tam giác ABM là tam giác đều.
- So sánh các cạnh của tam giác ABC .
- So sánh các cạnh của tam giác BMC .

Bài 21. Cho tam giác TUV có $\widehat{T} = 60^\circ$, $\widehat{V} > 90^\circ$.

- Trên cạnh TU lấy điểm K sao cho $TV = TK$. Chứng minh rằng tam giác TVK là tam giác đều.
- So sánh các cạnh của tam giác TUV .
- So sánh các cạnh của tam giác KUV .

Bài 22. Cho tam giác nhọn DEF có đường cao DI , đường trung tuyến DM . Chứng minh rằng:

- $DI < \frac{1}{2}(DE + DF)$.
- $DM < \frac{1}{2}(DE + DF)$.

Bài 23. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{B} = 105^\circ$. So sánh độ dài ba cạnh của $\triangle ABC$.

Bài 24. Cho tam giác ABC có $AB = 11$ cm, $AC = 8$ cm, $BC = 6$ cm. So sánh độ lớn ba góc của tam giác ABC .

Bài 25. Cho năm đoạn thẳng có độ dài là 2 cm, 3 cm, 5 cm, 7 cm, 11 cm. Hỏi có thể vẽ được bao nhiêu tam giác phân biệt với ba cạnh là ba trong năm đoạn đó?

Bài 26. Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Lấy điểm M bất kì thuộc cạnh BC (M khác B và C). Chứng minh $AM < AB$.

Bài 27. Cho tam giác nhọn MNP có đường cao MH , đường trung tuyến MK . Chứng minh rằng:

a) $MH < \frac{1}{2}(MN + MP)$.

b) $2MK < MN + MP$.

Bài 28. Cho tam giác PQR có đường phân giác của góc P cắt cạnh QR tại điểm A sao cho $QA = 2AR$. Trên tia đối của RP lấy điểm B sao cho $RP = RB$. Chứng minh tam giác PQB là tam giác cân.

Bài 29. Cho tam giác ABC có phân giác của góc A cắt cạnh BC tại điểm D sao cho $DC = \frac{1}{2}DB$. Trên tia đối của CA lấy điểm E sao cho $CA = CE$. Chứng minh rằng tam giác ABE là tam giác cân.

Bài 30. Cho tam giác ABC . Kẻ AH vuông góc với BC . Trên tia đối của tia AH lấy D sao cho $AH = AD$. Gọi E là trung điểm của HC , F là giao điểm của AC và DE . Chứng minh

a) $AF = \frac{1}{3}AC$;

b) H, F và trung điểm M của DC thẳng hàng;

c) $HF = \frac{1}{3}CD$.

Bài 31. Cho $\triangle ABC$ có I là giao điểm các đường phân giác trong AD và BE . Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BE cắt BC tại K . Chứng minh $\widehat{AIC} = \widehat{AKC}$.

Bài 32. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AC > AB$). Gọi I là trung điểm của BC . Vẽ đường trung trực của cạnh BC cắt AC tại D . Trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AD$. Gọi F là giao điểm của BE và đường thẳng AI . Chứng minh

a) $CD = BE$;

b) $\widehat{BEC} = 2\widehat{BCE}$;

c) $\triangle AEF$ cân;

d) $AC = BF$.

Bài 33. Cho tam giác nhọn ABC có BD và CE là hai đường cao cắt nhau tại H . Gọi M, N là trung điểm của AH và BC . Chứng minh

a) MN là đường trung trực của DE ;

b) $\widehat{MDN} = 90^\circ$.

E BÀI TẬP BỔ SUNG

Bài 34. Cho tam giác đều DEF . Tia phân giác của góc E cắt cạnh DF tại M . Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với DE , đường thẳng này cắt tia EM tại N và cắt tia EF tại P . Chứng minh rằng:

- a) Tam giác DNF là tam giác cân.
- b) NF vuông góc với EF .
- c) Tam giác DFP là tam giác cân.

Bài 35. Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao BD và CE . Trên tia đối của BD , lấy điểm M sao cho $BM = AC$. Trên tia đối của CE lấy điểm N sao cho $CN = AB$. Chứng minh rằng:

- a) $\widehat{ABM} = \widehat{ACN}$.
- b) $\triangle ABM = \triangle NCA$.
- c) Tam giác MAN là tam giác vuông cân.

Bài 36. Cho tam giác DEF cân tại D , đường cao DH , G là trọng tâm. Trên tia đối của HG lấy điểm K sao cho $HG = HK$.

- a) Chứng minh rằng $EG = GF = FK = KE$.
- b) Chứng minh $\triangle DEK = \triangle DFK$.
- c) Nếu $FG = \frac{1}{2}DK$ thì tam giác DKF là tam giác gì? Vì sao?

Bài 37. Cho tam giác PQR , các đường phân giác ngoài của góc Q và R cắt nhau tại I . Từ P kẻ các đường thẳng vuông góc với hai đường phân giác ngoài trên, cắt cạnh QR tại điểm H và K . Chứng minh rằng:

- a) Chu vi của tam giác PQR bằng HK .
- b) Đường trung trực của HK đi qua điểm I .
- c) PI là tia phân giác của góc QPR .

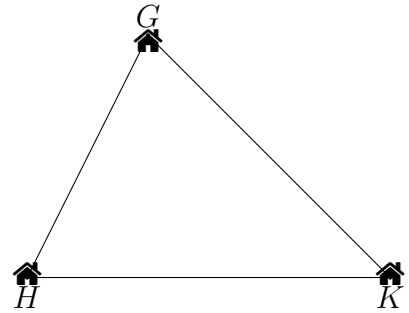
Bài 38. Cho tam giác cân MNP ($MN = MP > NP$). Đường trung trực của MP cắt tia PN tại điểm A . Trên tia đối của MA , lấy điểm B sao cho $MB = AN$. Chứng minh rằng:

- a) Tam giác MAP là tam giác cân.
- b) Tam giác BAP là tam giác cân.

Bài 39.

Ba thôn G, H, K tạo thành ba đỉnh của một tam giác. Nhà nước muốn xây dựng một trường tiểu học cho ba thôn đó.

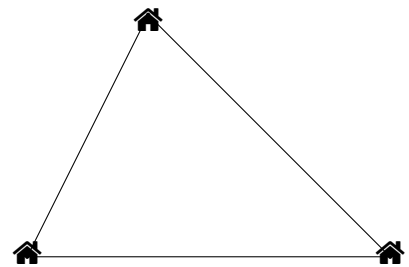
- Vậy cần đặt vị trí trường học ở đâu để khoảng cách từ trường tới ba thôn là như nhau?
- Nối giữa các thôn có một con đường duy nhất. Vậy cần đặt vị trí trường học ở đâu để khoảng cách từ trường học tới ba con đường nối giữa các thôn là như nhau?



Bài 40.

Ba bạn Mai, Linh, Bách học cùng lớp và chơi rất thân với nhau. Ba bạn muốn trồng một cây xanh và chăm sóc cho cây xanh đó lớn. Biết rằng nhà ba bạn là ba đỉnh của một tam giác.

- Vậy cần trồng cây xanh ở đâu để khoảng cách từ cây xanh đến nhà ba bạn là như nhau?
- Ba bạn muốn đến nhà nhau chỉ có một con đường duy nhất. Vậy cần trồng cây xanh ở đâu để khoảng cách từ cây đến các con đường nối nhà ba bạn là như nhau?



Bài 41. Cho tam giác DEF cân tại D . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DF và DE . Kẻ DH vuông góc với EF .

- Chứng minh rằng $EM = FN$ và $\widehat{DEM} = \widehat{DFN}$.
- Gọi giao điểm của EM và FN là K . Chứng minh rằng $KE = KF$.
- Chứng minh EM, FN, DH đồng quy.

Bài 42. Cho $\triangle ABC$ có tia phân giác của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại I . Biết $IB < IC$. Chứng minh $AB < AC$.

Bài 43. Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Gọi AD là tia phân giác của góc A (D thuộc BC). Chứng minh rằng

- $\widehat{ADB} < \widehat{ADC}$;
- $DB < DC$.

Bài 44. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Đường phân giác của $\widehat{B}$ cắt AC tại M . Kẻ $ME \perp BC$ ($E \in BC$). Đường thẳng EM cắt BA tại I .

- Chứng minh $\triangle ABM = \triangle EBM$;
- Chứng minh BM là đường trung trực của AE ;
- So sánh AM và MC ;
- Chứng minh $\triangle BCI$ cân.

Bài 45. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , vẽ đường trung tuyến AM . Từ M vẽ ME vuông góc với AB , vẽ MF vuông góc với AC .

- Chứng minh $\triangle CFM = \triangle BEM$;
- Chứng minh AM là đường trung trực của EF ;
- Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với AB tại B , từ C kẻ đường thẳng vuông góc với AC tại C , hai đường này cắt nhau ở D . Chứng minh ba điểm A, M, D thẳng hàng.

Bài 46. Cho $\triangle ABC$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC . Trên tia đối của tia FB lấy P sao cho $PF = BF$. Trên tia đối của tia EC lấy điểm Q sao cho $QE = CE$.

- Chứng minh A là trung điểm của PQ ;
- Chứng minh $BQ \parallel AC$ và $CP \parallel AB$;
- Gọi R là giao điểm của hai đường thẳng PC và QB . Chứng minh chu vi $\triangle PQR$ bằng hai lần chu vi $\triangle ABC$;
- Chứng minh AR, BP, CQ cắt nhau tại một điểm.



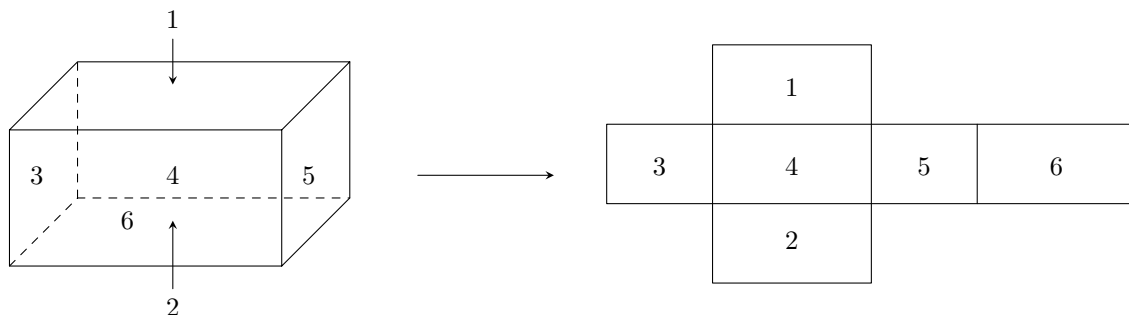
MỘT SỐ HÌNH KHỐI TRONG THỰC TIỄN

BÀI 36. HÌNH HỘP CHỮ NHẬT VÀ HÌNH LẬP PHƯƠNG

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

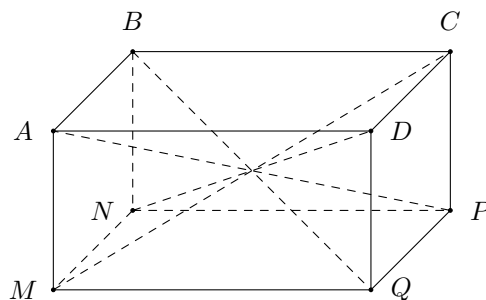
1 HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

Hình hộp chữ nhật có sáu mặt là hình chữ nhật. Hai mặt đáy (mặt 1 và mặt 2), và bốn mặt bên (mặt 3, mặt 4, mặt 5 và mặt 6).



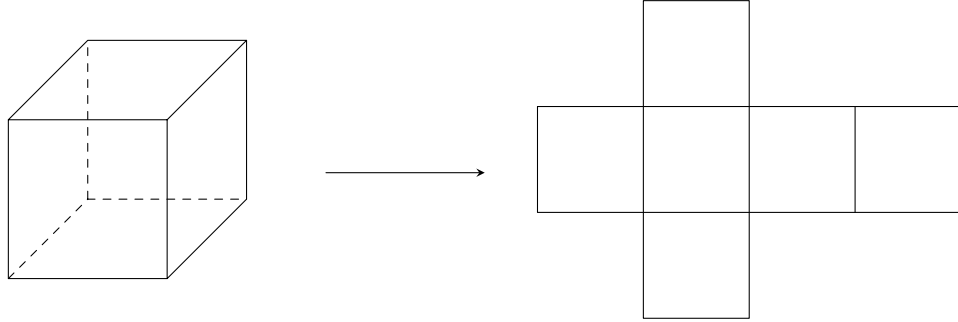
Hình hộp chữ nhật $ABCD.MNPQ$ trong hình bên có

- Tám đỉnh A, B, C, D, M, N, P, Q .
- Mười hai cạnh: $AB, BC, CD, AD, MN, NP, PQ, MQ, AM, BN, CP, DQ$.
- Ba góc vuông ở mỗi đỉnh. Chẳng hạn, ba góc vuông ở đỉnh A : góc $\widehat{BAD}$, góc $\widehat{BAM}$, góc $\widehat{DAM}$.
- Bốn đường chéo: AP, BQ, CM, DN .



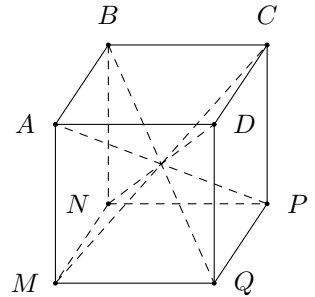
2 HÌNH LẬP PHƯƠNG

Hình lập phương có sáu mặt là hình vuông.



Hình lập phương $ABCD.MNPQ$ trong hình bên có:

- 🟡 Tám đỉnh A, B, C, D, M, N, P, Q .
- 🟢 Mười hai cạnh: $AB, BC, CD, AD, MN, NP, PQ, MQ, AM, BN, CP, DQ$.
- 🟢 Ba góc vuông ở mỗi đỉnh. Chẳng hạn, ba góc vuông ở đỉnh A : góc $\widehat{BAD}$, góc $\widehat{BAM}$, góc $\widehat{DAM}$.
- 🟢 Bốn đường chéo: AP, BQ, CM, DN .



🔗 Nhận xét 36.1.

- 🟡 Hình hộp chữ nhật có 6 mặt là các hình chữ nhật, 8 đỉnh, 12 cạnh, 4 đường chéo, các cạnh bên song song và bằng nhau.
- 🟢 Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có 6 mặt là các hình vuông.

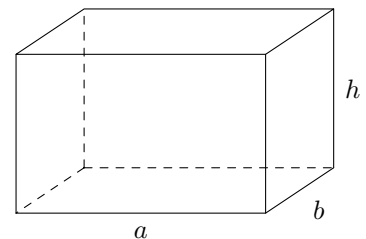
③ DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH HỘP CHỮ NHẬT, HÌNH LẬP PHƯƠNG

3.1. Hình hộp chữ nhật

Ta kí hiệu S_{xq} là diện tích xung quanh, V là thể tích.

$$\text{🟡 } S_{xq} = 2 \cdot (a + b) \cdot h$$

$$\text{🟢 } V = a \cdot b \cdot h$$

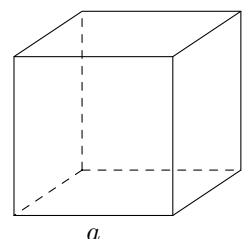


3.2. Hình lập phương

Ta kí hiệu S_{xq} là diện tích xung quanh, V là thể tích.

$$\text{🟡 } S_{xq} = 4a^2$$

$$\text{🟢 } V = a^3$$



Chú ý

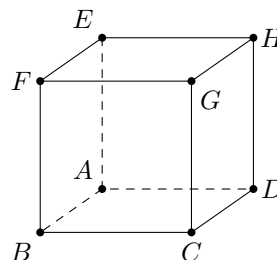
Khi tính diện tích, thể tích của một hình, các kích thước của nó phải cùng đơn vị độ dài.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

 **Dạng :** Các yếu tố trong hình hộp chữ nhật, hình lập phương

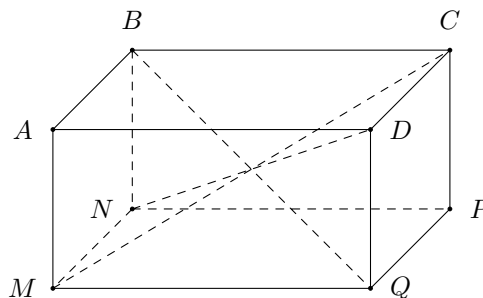
○ Ví dụ 1.

Gọi tên các đỉnh, các cạnh, các mặt, các mặt đáy, đường chéo của hình hộp chữ nhật ở hình vẽ bên.

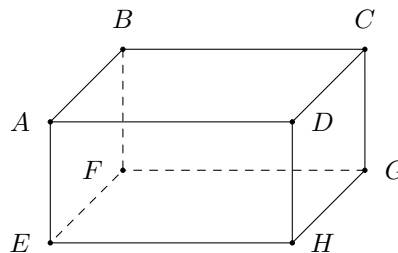
**○ Ví dụ 2.**

Quan sát hình hộp chữ nhật $ABCD.MNPQ$ và thực hiện các yêu cầu sau:

- Nêu các góc ở đỉnh P .
- Nêu các đường chéo được vẽ trong hình.
- Nêu các đường chéo chưa được vẽ trong hình.

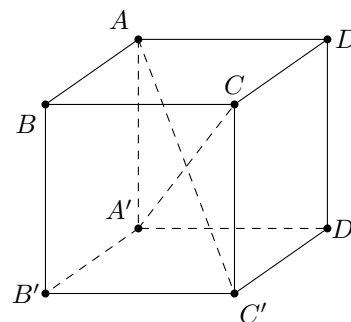
**○ Ví dụ 3.**

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$ có $BC = 14$ cm, $GH = 8$ cm, $BF = 6$ cm. Tính độ dài các cạnh AB , EH , DH .

**○ Ví dụ 4.**

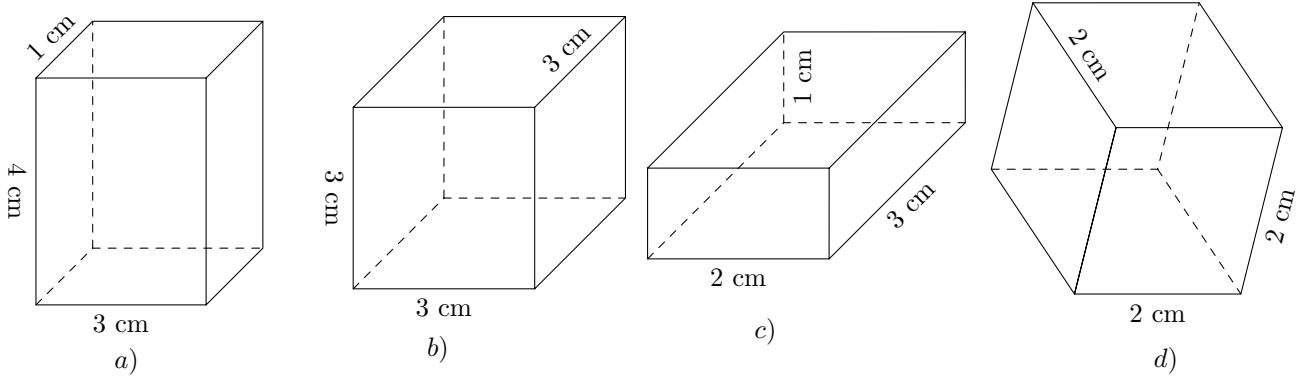
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 5$ cm.

- Tìm độ dài các cạnh BC , CC' .
- Nêu các góc ở đỉnh C .
- Nêu các đường chéo chưa được vẽ.

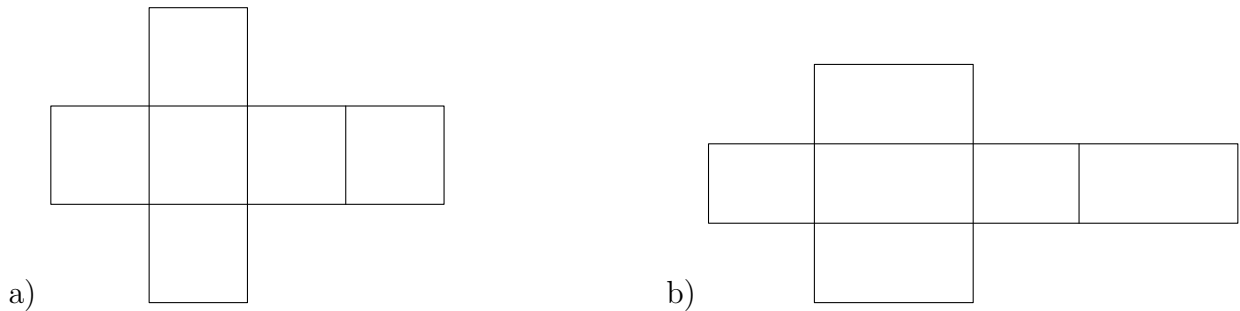


 **Dạng :** Nhận dạng hình hộp chữ nhật, hình lập phương

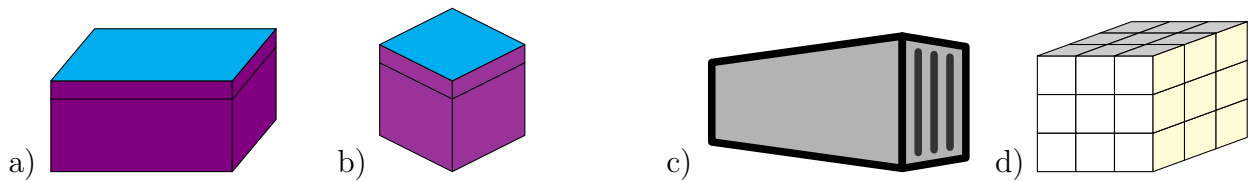
○ Ví dụ 1. Trong các hình dưới đây, hình nào là hình hộp chữ nhật, hình nào là hình lập phương?



❶ Ví dụ 2. Trong hai tấm bìa ở hình dưới đây, tấm bìa nào gấp được hình hộp chữ nhật? tấm bìa nào gấp được hình lập phương?



✎ Bài 1. Quan sát các vật dưới đây và cho biết, vật nào có dạng hình hộp chữ nhật? vật nào có dạng hình lập phương?



📄 Dạng : Tính diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật, hình lập phương.

❶ Ví dụ 1. Tính diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật có độ dài hai cạnh đáy là 30 m và 20 m, chiều cao 50 m.

❶ Ví dụ 2. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình lập phương có cạnh 10 cm.

❶ Ví dụ 3. Tính diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật biết chiều dài là 20 m, chiều rộng là 10 m, chiều cao là 30 m.

❶ Ví dụ 4. Tính diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật biết chiều dài là 30 m, chiều rộng là 18 m, chiều cao là 35 m.

❶ Ví dụ 5. Tính diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật biết chiều dài là 2,3 m; chiều rộng là $\frac{2}{5}$ m, chiều cao là 1,2 m.

❶ Ví dụ 6. Tính diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật biết chiều dài là $\frac{2}{3}$ m, chiều rộng là $\frac{1}{3}$ m, chiều cao là $\frac{4}{9}$ m.

- **Ví dụ 7.** Một hình hộp chữ nhật có diện tích đáy bằng 72 cm^2 . Chiều rộng hơn chiều cao là 4 cm, chiều cao bằng $\frac{1}{2}$ chiều rộng. Tính diện tích xung quanh.
- **Ví dụ 8.** Một hình hộp chữ nhật có diện tích đáy bằng 30 cm^2 . Chiều rộng hơn chiều cao là 2 cm, chiều cao bằng $\frac{1}{3}$ chiều rộng. Tính diện tích xung quanh.
- **Ví dụ 9.** Tính diện tích xung quanh của hình lập phương có độ dài cạnh là 30 m.
- **Ví dụ 10.** Tính diện tích xung quanh của hình lập phương biết độ dài cạnh là số tự nhiên tròn chục lớn nhất có hai chữ số, đơn vị cm.
- **Ví dụ 11.** Tính diện tích xung quanh của hình lập phương biết cạnh là số tự nhiên nhỏ nhất có hai chữ số, đơn vị cm.
- **Ví dụ 12.** Tính diện tích xung quanh của hình lập phương biết diện tích một mặt là 20 cm^2 .
- **Ví dụ 13.** Một hình lập phương có diện tích đáy bằng 32 cm^2 . Tính diện tích xung quanh của hình lập phương.
- **Ví dụ 14.** Một hình lập phương có chiều cao là 5 m. Tính diện tích xung quanh của lập phương.

 Dạng : Tính thể tích của hình hộp chữ nhật, hình lập phương

- **Ví dụ 1.** Tính thể tích của hình hộp chữ nhật biết chiều dài là 2 m, chiều rộng là 1 m, chiều cao là 3 m.
- **Ví dụ 2.** Tính thể tích của hình hộp chữ nhật biết chiều dài là 30 dm, chiều rộng là 12 dm, chiều cao là 350 cm.
- **Ví dụ 3.** Tính thể tích của hình hộp chữ nhật biết chiều dài gấp hai lần chiều rộng, chiều rộng bằng nửa chiều cao, biết chiều cao là 4 m.
- **Ví dụ 4.** Tính thể tích của hình hộp chữ nhật biết chiều rộng bằng $\frac{1}{3}$ chiều dài, chiều dài bằng $\frac{1}{2}$ chiều cao, biết chiều cao là 6 m.
- **Ví dụ 5.** Tính thể tích của hình hộp chữ nhật biết chiều dài bằng chiều rộng cùng bằng 2 m, chiều cao bằng 4 m.
- **Ví dụ 6.** Tính thể tích của hình hộp chữ nhật biết chiều dài bằng chiều rộng cùng bằng 2 dm, chiều cao bằng 42 cm.
- **Ví dụ 7.** Tính thể tích của hình lập phương biết cạnh là 8 cm.
- **Ví dụ 8.** Tính thể tích của hình lập phương diện tích một mặt là 64 m^2 .
- **Ví dụ 9.** Tính thể tích của hình lập phương biết rằng chu vi một mặt là 16 m.
- **Ví dụ 10.** Tính thể tích của hình lập phương biết thể tích của hình lập phương bằng thể tích của hình hộp chữ nhật có chiều rộng bằng $\frac{1}{3}$ chiều dài, chiều dài bằng $\frac{1}{2}$ chiều cao, biết chiều cao là 6 m.

🔴 **Ví dụ 11.** Tính thể tích của hình lập phương biết độ dài một cạnh là một số nguyên tố chẵn, đơn vị cạnh hình lập phương là xen-ti-met.

🔴 **Ví dụ 12.** Tính thể tích của hình lập phương biết diện tích toàn phần 150 m^2 .

 Dạng : Tổng hợp

🔴 **Ví dụ 1.** Một hình hộp chữ nhật có chiều dài 35 cm, chiều rộng 25 cm và chiều cao 20 cm. Tính:

- Chu vi mặt đáy của hình hộp chữ nhật.
- Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật.
- Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật.

🔴 **Ví dụ 2.** Một hình hộp chữ nhật có diện tích xung quanh là 420 cm^2 và có chiều cao là 7 cm. Tính chu vi đáy của hình hộp chữ nhật đó.

🔴 **Ví dụ 3.** Một hình hộp chữ nhật có chiều dài 4,8 cm, chiều rộng 2,2 cm và chiều cao 3,5 cm. Tính:

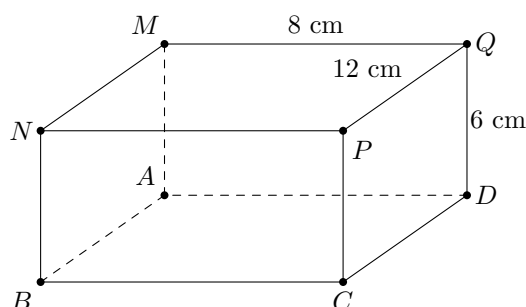
- Chu vi mặt đáy của hình hộp chữ nhật.
- Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật.
- Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật.

🔴 **Ví dụ 4.** Một hình hộp chữ nhật có diện tích xung quanh là 560 cm^2 và có chiều cao là 8 cm. Tính chu vi đáy của hình hộp chữ nhật đó.

🔴 **Ví dụ 5.** Một cái bể nước có dạng hình hộp chữ nhật, diện tích xung quanh là $8,3 \text{ m}^2$ và chiều cao 0,9 m. Tính chu vi đáy của bể nước, chiều dài và chiều rộng của bể, biết chiều dài hơn chiều rộng 1,5 m.

🔴 **Ví dụ 6.** Một cái bể nước có dạng hình hộp chữ nhật, diện tích xung quanh là $6,2 \text{ m}^2$ và chiều cao 1,2 m. Tính chu vi đáy của bể nước, chiều dài và chiều rộng của bể, biết chiều dài hơn chiều rộng 0,5 m.

🔴 **Ví dụ 7.** Cho hình hộp chữ nhật như hình vẽ dưới, biết độ dài các cạnh $QD = 6 \text{ cm}$; $QP = 12 \text{ cm}$; $QM = 8 \text{ cm}$.



a) Hãy cho biết độ dài các cạnh CP , MN , PN .

b) Tính diện tích của mặt đáy $MNPQ$ và các mặt bên $ABNM$, $ADQM$.

◉ Ví dụ 8. Một hình hộp chữ nhật có diện tích đáy bằng 108 cm^2 . Chiều dài hơn chiều cao 12 cm , chiều cao bằng $\frac{1}{3}$ chiều dài. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần hình hộp chữ nhật.

◉ Ví dụ 9. Một hình lập phương có cạnh bằng $a \text{ cm}$, diện tích xung quanh bằng 324 cm^2 . Hỏi thể tích của hình lập phương đó bằng bao nhiêu?

◉ Ví dụ 10. Một chiếc hộp hình lập phương có cạnh là 45 cm với khung bằng nhựa, đáy và các mặt xung quanh bọc vải. Hỏi diện tích vải dùng để làm chiếc hộp đó là bao nhiêu (coi phần các mép vải khâu nối không đáng kể)?

◉ Ví dụ 11. Một chiếc khay làm đá để trong tủ lạnh có 20 ngăn nhỏ hình lập phương với cạnh 3 cm . Hỏi tổng thể tích của toàn bộ các viên đá lạnh đựng đầy trong khay là bao nhiêu?

◉ Ví dụ 12. Một cái thùng hình lập phương cạnh 17 dm có chứa nước, độ sâu của nước là 14 dm . Người ta thả 35 viên gạch dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài 2 dm , chiều rộng 1 dm và chiều cao $0,5 \text{ dm}$ vào thùng. Hỏi nước trong thùng dâng lên cách miệng thùng bao nhiêu đề-xi-mét (giả sử toàn bộ gạch ngập trong nước và chúng hút nước không đáng kể).

Dạng : Vận dụng vào bài toán thực tế

◉ Ví dụ 1. Một cái hộp dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài 60 cm , chiều rộng 50 cm và chiều cao 30 cm . Bạn Chung dán giấy màu đỏ vào các mặt xung quanh và giấy màu vàng vào hai mặt đáy của cái hộp đó (chỉ dán mặt ngoài). Hỏi diện tích giấy màu nào lớn hơn và lớn hơn bao nhiêu xăng-ti-mét vuông?

◉ Ví dụ 2. Một cái hộp dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài $3,2 \text{ cm}$, chiều rộng $2,5 \text{ cm}$ và chiều cao $1,5 \text{ cm}$. Bạn An dán giấy màu vàng vào các mặt xung quanh và giấy màu xanh vào hai mặt đáy của cái hộp đó (chỉ dán mặt ngoài). Hỏi diện tích giấy màu nào lớn hơn và lớn hơn bao nhiêu xăng-ti-mét vuông?

◉ Ví dụ 3. Một bể hình hộp chữ nhật có chiều dài 15 m , chiều rộng 6 m và sâu $3,5 \text{ m}$. Hỏi người thợ phải dùng bao nhiêu viên gạch men để lát đáy và xung quanh thành bể? Biết rằng mỗi viên gạch có kích thước $40 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$ và diện tích mạch vữa lát là không đáng kể.

◉ Ví dụ 4. Một hồ bơi dài 18 m , rộng $4,5 \text{ m}$ và sâu $2,2 \text{ m}$. Người ta lát ở đáy và xung quanh hồ bơi bằng những viên gạch men hình vuông cạnh 2 dm . Tính diện tích lát gạch và số gạch cần dùng.

◉ Ví dụ 5. Một cái hộp làm bằng tôn (không có nắp) dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài 50 cm , chiều rộng 40 cm và chiều cao 20 cm . Tính diện tích dùng tôn để làm cái hộp đó (không tính mép hàn).

❶ Ví dụ 6. Người ta quét vôi một căn phòng có dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài 10 m, chiều rộng 5 m và chiều cao 3,5 m. Tính diện tích cần quét vôi của căn phòng (riêng nền nhà không quét). Biết tổng diện tích của các cửa là 8 m^2 .

❷ Ví dụ 7. Phải dùng tờ giấy màu có diện tích bao nhiêu để dán mặt ngoài một cái hộp chữ nhật có chiều dài 38 cm, chiều rộng 2,3 dm và chiều cao 1,2 dm?

❸ Ví dụ 8. Một cái thùng sắt hình hộp chữ nhật có chiều rộng bằng $\frac{5}{8}$ chiều dài và kém chiều dài 3,6 m; chiều cao bằng 2,5 m. Hỏi:

a) Diện tích toàn phần của cái thùng?

b) Nếu người ta sơn bên ngoài cái thùng cứ $3,6 \text{ m}^2$ tốn 3 kg sơn thì cần bao nhiêu ki-lô-gam sơn?

❹ Ví dụ 9. Một cái bể nước có dạng hình hộp chữ nhật, diện tích xung quanh là $6,2 \text{ m}^2$ và chiều cao 1,2 m. Tính chu vi đáy của bể nước, chiều dài và chiều rộng của bể, biết chiều dài hơn chiều rộng 1,5 m.

❺ Ví dụ 10. Một bể nước có dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài 5 m. Lúc đầu không có nước, sau khi đổ vào bể 120 thùng nước, mỗi thùng chứa 50 lít nước thì mực nước của bể dâng cao 1,2 m.

a) Tính chiều rộng của bể nước.

b) Người ta đổ thêm 50 thùng nước nữa thì đầy bể. Hỏi bể cao bao nhiêu mét?

❻ Ví dụ 11. Người ta dùng miếng bìa cứng làm thành một cái hộp không có nắp hình lập phương có cạnh dài 3 dm. Tính diện tích miếng bìa đó, biết rằng diện tích các mép dán không đáng kể.

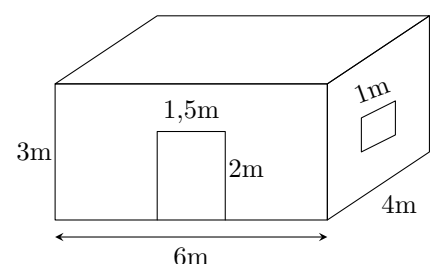
❼ Ví dụ 12. Hỏi cần bao nhiêu ki - lô - gam sơn để sơn bên trong và ngoài một thùng hình lập phương không có nắp có chu vi đáy $12,5 \text{ m}$? Biết cứ 2 m^2 tốn 1 kg sơn.

❽ Ví dụ 13. Từ một tờ giấy hình chữ nhật có chiều dài 15 cm, chiều rộng 5 cm có thể cắt dán để làm thành một hình lập phương có cạnh 4 cm được không? Tại sao?

❾ Ví dụ 14. Một cái bể nước dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài 2m, rộng 1,5m, cao 1,2 m. Bể đang chứa đầy nước, người ta lấy từ bể ra 45 thùng nước, mỗi thùng 20 lít. Hỏi mực nước còn lại trong bể cao bao nhiêu?

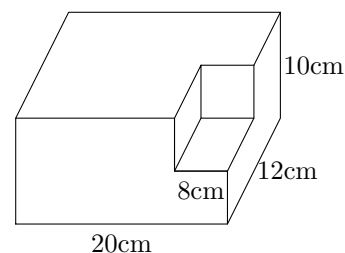
❿ Ví dụ 15.

Căn phòng của anh Nam có một cửa lớn hình chữ nhật và một cửa sổ hình vuông với kích thước như hình bên. Anh Nam cần tốn bao nhiêu tiền để sơn bốn bức tường bên trong căn phòng này (không sơn cửa)? Biết rằng để sơn mỗi mét vuông tốn 30 nghìn đồng.



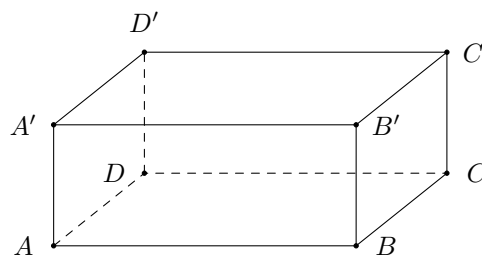
◉ Ví dụ 16.

Một khối gỗ dạng hình hộp chữ nhật có kích thước như 20 cm, 12 cm, 10 cm. Người ta cắt đi một phần khối gỗ có dạng hình lập phương cạnh 8 cm. Tính thể tích phần còn lại của khối gỗ.

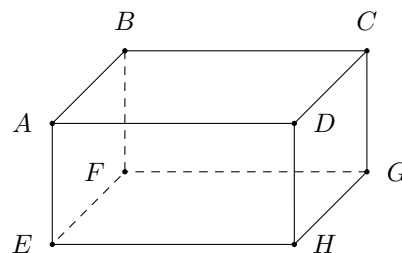
**© BÀI TẬP VẬN DỤNG****✎ Bài 1.**

Quan sát hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$

- Nêu các cạnh và đường chéo.
- Nêu các góc ở đỉnh C và B' .
- Kể tên những cạnh bằng nhau.

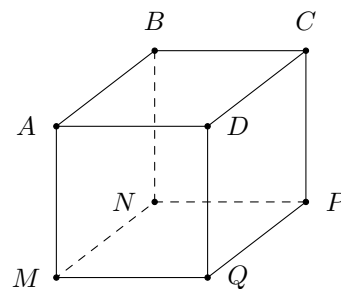
**✎ Bài 2.**

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$ có $BC = 7$ cm, $GH = 4$ cm, $BF = 3$ cm. Tính độ dài các cạnh AB , EH , DH .

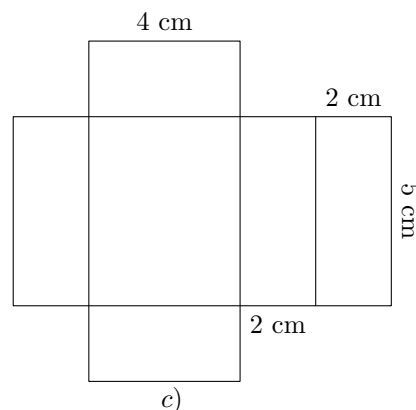
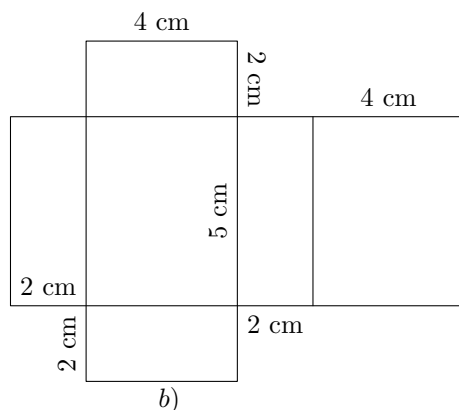
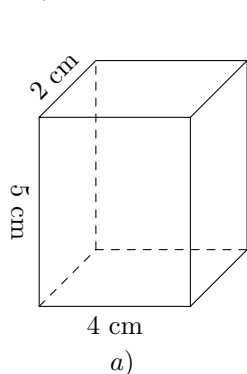
**✎ Bài 3.**

Quan sát hình lập phương $ABCD.MNPQ$ ở hình bên.

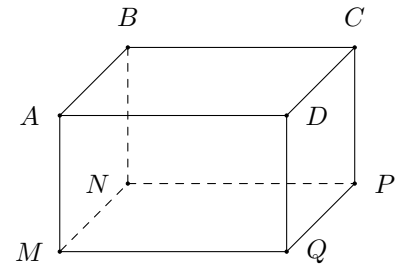
- Biết $NP = 5$ cm. Độ dài các cạnh AD , BN , PQ bằng bao nhiêu?
- Nêu tên các đường chéo của hình lập phương.



✎ Bài 4. Trong hai tấm bìa ở các hình b và hình c, tấm bìa nào có thể gấp được hình hộp chữ nhật ở hình a?

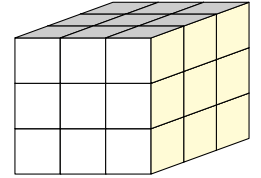
**✎ Bài 5.**

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.MNPQ$, biết rằng diện tích mặt bên $BCPN$ bằng 48 cm^2 và gấp đôi diện tích mặt bên $ABNM$, độ dài cạnh $BC = 8 \text{ cm}$. Tính độ dài cạnh AB .



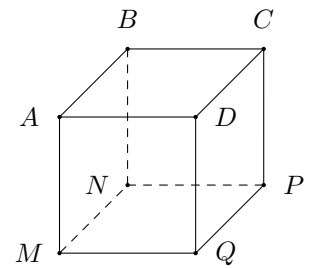
Bài 6.

Trong hình bên có tất cả bao nhiêu hình lập phương?

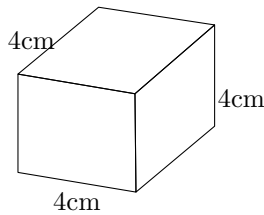


Bài 7.

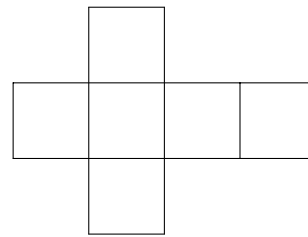
Một con kiến đang ở vị trí A của hình lập phương $ABCD.MNPQ$. Biết độ dài cạnh AB bằng 1 cm . Em hãy chỉ ra những đường gấp khúc mà con kiến có thể đi để đến vị trí P sao cho tổng quãng đường đi bằng 3 cm .



Bài 8. An làm một con xúc xắc hình lập phương có kích thước như hình a từ tấm bìa có hình dạng như hình b. Em hãy tính diện tích tấm bìa và thể tích con xúc xắc.

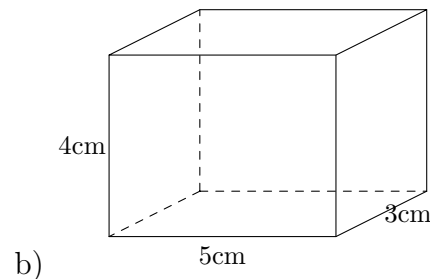
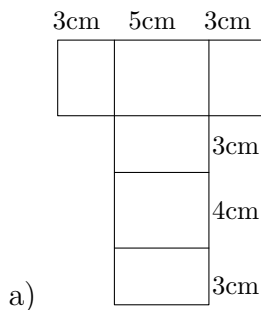


Hình a



Hình b

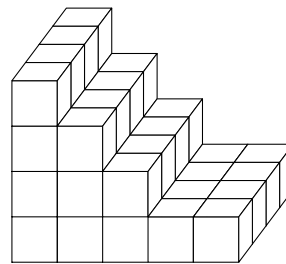
Bài 9. Hãy vẽ và gấp tấm bìa có kích thước như hình a thành một hình hộp chữ nhật như hình b. Tính tổng diện tích các mặt và thể tích của hình hộp.



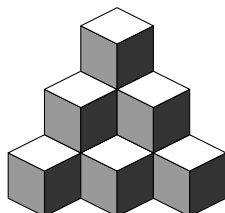
Bài 10. Bác Bình thuê thợ sơn xung quanh bốn mặt ngoài của thành bể nước có dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài $4,5 \text{ m}$, chiều rộng $2,5 \text{ m}$, chiều cao $1,5 \text{ m}$ với giá 25000 đồng/m . Hỏi bác Bình phải trả chi phí là bao nhiêu?

Bài 11.

Sử dụng một số khối lập phương nhỏ, ta xếp thành hình khối như hình vẽ. Sau đó ta tô màu tất cả các mặt ngoài của khối. Hỏi có bao nhiêu khối lập phương nhỏ có đúng 3 mặt được tô?

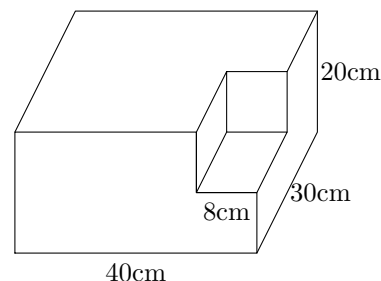


Bài 12. Có bao nhiêu khối lập phương xếp thành hình dưới đây?



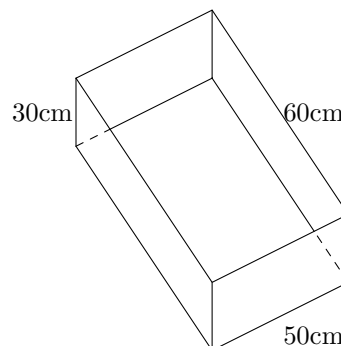
Bài 13.

Một chiếc bánh kem có dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài 40 cm, chiều rộng 30 cm và chiều cao 20 cm. Người ta cắt đi một miếng bánh có dạng hình lập phương cạnh 8 cm. Tính thể tích phần còn lại của chiếc bánh kem.



Bài 14.

Một chiếc khay nhựa đựng đồ có dạng hình hộp chữ nhật như hình bên. Dựa vào kích thước trên hình (coi mép khay nhựa không đáng kể), em hãy tính

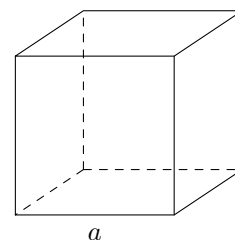


- Diện tích xung quanh của chiếc khay.
- Diện tích nhựa để làm chiếc khay trên.

Bài 15. Một hộp sữa có dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài 12,5 cm, chiều rộng 10,5 cm, chiều cao 22,5 cm. Biết rằng lượng sữa trong hộp chỉ chiếm 80% thể tích hộp. Hỏi trong hộp chứa bao nhiêu lít sữa? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bài 16.

An có một chiếc hộp dạng hình lập phương có cạnh bằng a cm, diện tích xung quanh bằng 400 cm^2 . Hỏi thể tích chiếc hộp của bạn An bằng bao nhiêu xăng-ti-mét vuông?



Bài 17. Một chiếc thùng giữ nhiệt có lồng trong có dạng một hình hộp chữ nhật với chiều dài 50 cm, chiều rộng 40 cm và chiều cao 50 cm. Người ta xếp những viên nước đá có dạng hình lập phương cạnh 10 cm vào thùng. Hỏi người ta có thể xếp vào thùng bao nhiêu viên nước đá?

Bài 18. Một xe container có thùng hàng dạng hình hộp chữ nhật, kích thước lòng trong thùng hàng dài 5,8 m, rộng 3,2 m, cao 2 m.

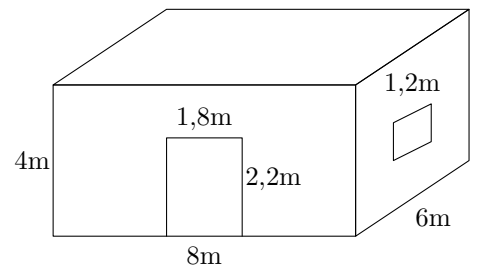
- Tính thể tích của lòng thùng container.
- Người ta xếp vào thùng xe container những thùng hàng có dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài 50 cm, chiều rộng 40 cm và chiều cao 20 cm. Hỏi người ta có thể xếp nhiều nhất bao nhiêu thùng hàng vào trong thùng xe container?

Bài 19. Một hộp sữa tươi có dạng hình hộp chữ nhật với dung tích 180 ml, chiều cao 14 cm, chiều rộng 3,2 cm.

- Tính chiều dài của hộp sữa (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).
- Tính diện tích vật liệu dùng để làm vỏ hộp sữa? (Coi như phần mép hộp không đáng kể).

Bài 20.

Căn phòng của bác An có một cửa lớn hình chữ nhật và một cửa sổ hình vuông với kích thước như hình bên. Bác An cần tốn bao tiền để sơn bức xung quanh của căn phòng này (không sơn cửa)? Biết rằng, để sơn mỗi mét vuông phải tốn 25000 đồng.



Bài 21. Một chiếc khay làm đá để trong tủ lạnh có 20 ngăn nhỏ hình lập phương với cạnh 2,5cm. Hỏi tổng thể tích của toàn bộ các viên đá lạnh đựng đầy trong khay là bao nhiêu?

Bài 22. Một chiếc cốc có dạng hình trụ, chứa đầy nước. Người ta bỏ vào cốc một số viên đá dạng hình lập phương có cạnh 2cm thì nước tràn ra ngoài cốc là 40ml. Hỏi người ta đã bỏ vào cốc bao nhiêu viên đá?

Bài 23. Người ta dự định xây một căn phòng dạng hình hộp chữ nhật có thể chứa được 500 người. Căn phòng đó 25m, rộng 15m. Hỏi người ta phải xây phòng đó cao bao nhiêu mét? Biết rằng mỗi người 3 m³ không khí.

Bài 24. Một cái bể hình hộp chữ nhật có chiều dài 2m, chiều rộng 1,5m. Lúc đầu bể không chứa nước, sau đó người ta đổ vào bể 2700 lít nước thì mực nước trong bể cao đến $\frac{3}{4}$ bể. Tính chiều cao cái bể.

Bài 25. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật có kích thước chiều dài là 20 m, chiều rộng là 12 m, chiều cao là 3 m.

Bài 26. Hình lập phương A có cạnh 10 cm. Hình lập phương B có cạnh gấp hai lần cạnh hình lập phương A. Hỏi thể tích hình lập phương B gấp bao nhiêu lần thể tích hình lập phương A?

Bài 27. Một chiếc thùng rác dạng hình hộp chữ nhật làm bằng gỗ có kích thước chiều dài là 30 cm, chiều rộng là 25 cm, chiều cao là 55 cm. Hỏi thể tích của thùng là bao nhiêu? (coi độ dày của gỗ là không đáng kể).

Bài 28. Một phòng học hình hộp chữ nhật có chiều dài 10 m, chiều rộng 8 m, chiều cao 4 m. Tính diện tích toàn phần phòng học?

Bài 29. Một xe đông lạnh có thùng hàng dạng hình hộp chữ nhật, kích thước lòng thùng dài 6,8 m, rộng 2,2 m, cao 2,5 m. Tính thể tích của lòng thùng hàng.

Bài 30. Một viên gạch dạng hình hộp chữ nhật, có diện tích xung quanh là 72 cm^2 , chu vi đáy là 12 cm. Tính chiều cao của viên gạch?

Bài 31. Một khối kim loại hình lập phương có cạnh $\frac{1}{2} \text{ m}$, biết mỗi cm^3 kim loại nặng 5 g. Hỏi khối kim loại đó cân nặng bao nhiêu kg?

Bài 32. Có hai bể cá hình hộp chữ nhật:

🟩 Bể lớn đang cạn dài 1,2 m; rộng 0,8 m; cao 1,2 m.

🟩 Bể nhỏ chứa đầy nước dài 1 m; rộng 0,6 m; cao 0,8 m.

Người ta đổ hết nước từ bể nhỏ sang bể lớn thì mực nước cách miệng bể bao nhiêu?

Bài 33. Một bể cá hình lập phương có cạnh 10 dm, mực nước trong bể là 8 dm. Khi thả vào bể một cây san hô thì mực nước trong bể là 9 dm. Hỏi cây san hô chiếm thể tích là bao nhiêu đề - xi - mét khối?

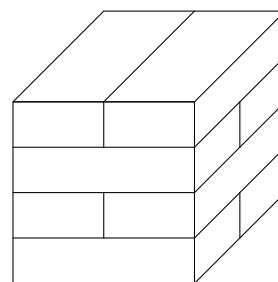
D BÀI TẬP NÂNG CAO

Câu 1. Tính thể tích của một hình hộp chữ nhật biết diện tích xung quanh của hình hộp đó bằng 10000 cm^2 , chiều cao bằng 50 cm chiều dài hơn chiều rộng 12 cm.

Câu 2. Một hình lập phương có cạnh $a \text{ cm}$, nếu gấp cạnh của hình lập phương lên ba lần thì S_{xq} và S_{tp} của nó thay đổi như thế nào? Tại sao?

Câu 3.

Người ta xếp một số viên gạch dạng hình hộp chữ nhật tạo thành một khối hình lập phương cạnh 40cm như hình bên.

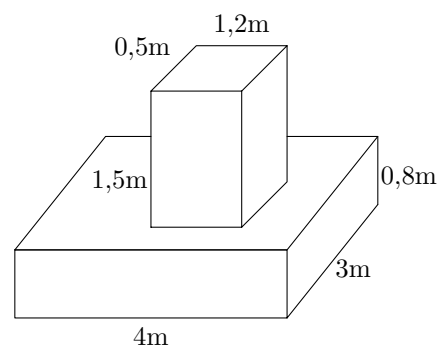


a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của khối gạch hình lập phương.

b) Tính thể tích mỗi viên gạch.

Câu 4.

Một khối bê tông được đặt trên mặt đất, có kích thước như hình bên.



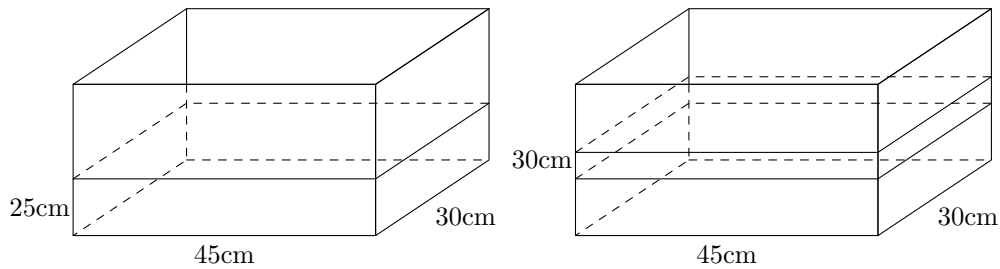
a) Người ta muốn sơn tất cả các mặt của khối bê tông từ mặt đất. Hỏi chi phí để sơn là bao nhiêu? Biết rằng để sơn mỗi mét vuông tốn 20000 đồng.

b) Tính thể tích của khối bê tông.

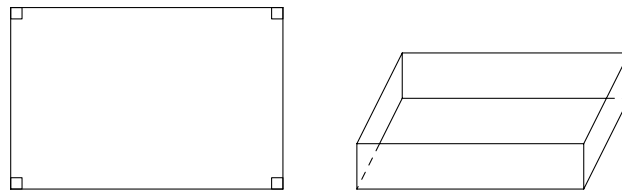
Câu 5. Để tính thể tích của một hòn đá, bạn An đã thực hiện như sau

-  Bạn ấy đổ nước vào một cái bể kính hình hộp chữ nhật có hai đáy là 45cm, 30cm, mực nước đo được là 25cm (hình a).
-  Sau đó bạn ấy đặt hòn đá vào bể thì thấy nước ngập hòn đá và mực nước đo được là 30cm (hình b).

Em hãy giúp bạn An tính thể tích của hòn đá.



Câu 6. Một miếng tôn hình chữ nhật có chu vi bằng 22dm, chiều dài hơn chiều rộng 1dm. Người ta cắt bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc, mỗi hình có diện tích 100cm^2 rồi gấp lên thành một cái thùng có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp. Hỏi để đổ lấy nước vào cái thùng này thì cần phải đổ vào bao nhiêu chai nước dung tích 500ml?



Câu 7. Thiết bị máy được xếp vào các hình lập phương có diện tích toàn phần bằng 96 dm^2 . Người ta xếp các hộp vào trong một thùng hình lập phương làm bằng tôn không có nắp. Khi gò thùng như thế hết $3,2\text{ m}^2$ tôn (diện tích các mép hàn không đáng kể). Hỏi mỗi thùng đựng được bao nhiêu hộp thiết bị? Em hãy trình bày cách xếp các hộp thiết bị vào thùng.

BÀI 37. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG TAM GIÁC VÀ HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG TỨ GIÁC

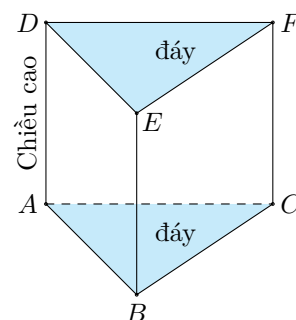
A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG TAM GIÁC

Hình $ABC.DEF$ là hình lăng trụ đứng tam giác.

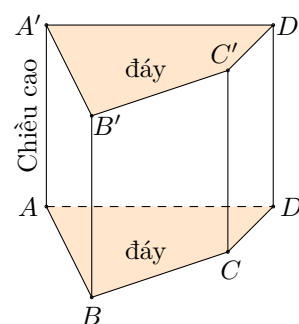
Trong hình này

- ❖ A, B, C, D, E, F gọi là các đỉnh
- ❖ Ba mặt bên $ACFD, BCFE$ và $ABED$ là các hình chữ nhật
- ❖ Các đoạn thẳng AD, BE, CF bằng nhau và song song với nhau, chúng được gọi là các cạnh bên.
- ❖ Mặt ABC, DEF song song với nhau và được gọi là hai mặt đáy (gọi tắt là đáy).
- ❖ Độ dài cạnh AD gọi là chiều cao của hình lăng trụ.
- ❖ Hình lăng trụ đứng ở trên có hai đáy là hình tam giác nên được gọi là lăng trụ đứng tam giác.



2 HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG TỨ GIÁC

Hình $ABCD.A'B'C'D'$ có hai đáy là hình tứ giác và các mặt bên là hình chữ nhật nên được gọi là lăng trụ đứng tứ giác.



❖ Nhận xét 37.1. Trong hình lăng trụ đứng tam giác (tứ giác):

- ❖ Hai mặt đáy song song với nhau.
 - ❖ Các mặt bên là những hình chữ nhật.
 - ❖ Các cạnh bên song song và bằng nhau.
- Độ dài một cạnh bên gọi là chiều cao của lăng trụ đứng.

Chú ý

Hình hộp chữ nhật, hình lập phương là các hình lăng trụ đứng tứ giác.

3 DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng bằng chu vi đáy nhân với chiều cao.

$$S_{xq} = C_{\text{đáy}} \cdot h$$

trong đó $C_{\text{đáy}}$ là chu vi đáy, h là chiều cao.

Diện tích toàn phần của hình lăng trụ đứng bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích hai đáy.

Thể tích hình lăng trụ đứng bằng diện tích đáy nhân với chiều cao.

$$V = S_{\text{đáy}} \cdot h$$

trong đó $S_{\text{đáy}}$ là diện tích đáy, h là chiều cao.

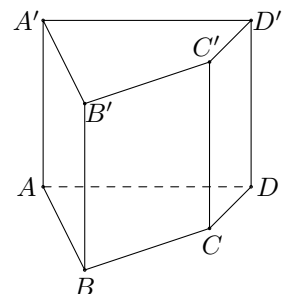
B CÁC DẠNG BÀI TẬP

 Dạng : Các yếu tố trong hình lăng trụ đứng tam giác, lăng trụ đứng tứ giác

Ví dụ 1.

Cho lăng trụ đứng tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$.

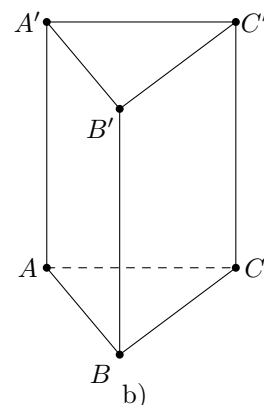
- Hãy chỉ ra các mặt đáy và mặt bên của lăng trụ đứng tứ giác.
- Cạnh bên AA' bằng các cạnh nào?



Ví dụ 2. Hộp kẹo sôcôla (hình a) được vẽ lại như hình b có dạng hình lăng trụ đứng. Hãy chỉ rõ mặt đáy, mặt bên, cạnh bên của hình lăng trụ đó.



a)

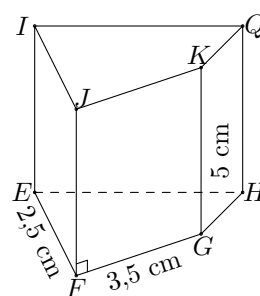
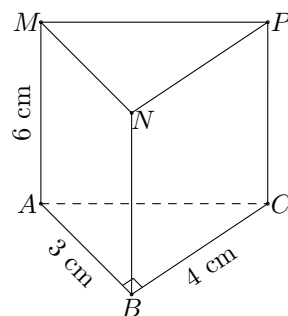


b)

Ví dụ 3.

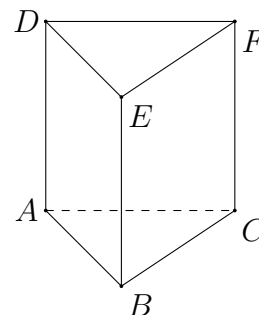
Quan sát hai hình lăng trụ đứng trong hình bên. Tìm độ dài các cạnh

- a) MN, NP, BN, CP
b) IE, HQ, IJ, JK



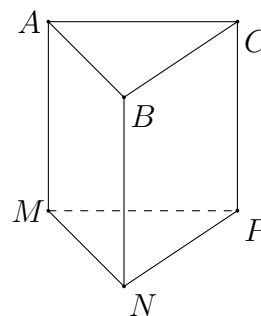
Ví dụ 4.

Hãy cho biết đỉnh, cạnh đáy, cạnh bên, mặt đáy, mặt bên của hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.DFE$ ở hình bên.



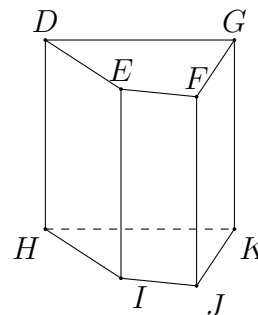
Ví dụ 5.

Quan sát và gọi tên các mặt đáy, mặt bên, cạnh đáy, cạnh bên của hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.MNP$ ở hình bên.



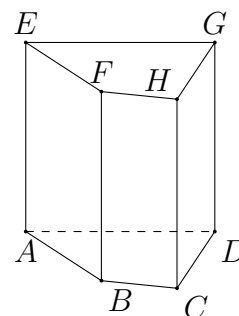
Ví dụ 6.

Viết tên đỉnh, cạnh, mặt bên, mặt đáy của hình lăng trụ đứng tứ giác ở hình bên.



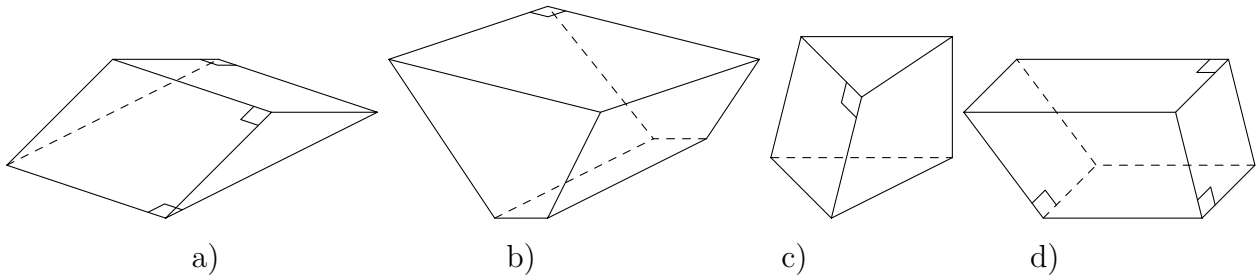
Ví dụ 7.

Hãy chỉ tên các cạnh song song với HC .



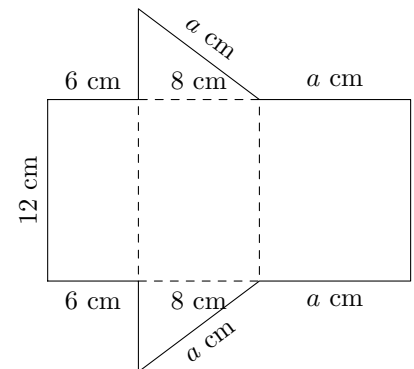
Dạng : Nhận dạng hình lăng trụ đứng tam giác, lăng trụ đứng tứ giác

Ví dụ 1. Em hãy quan sát các hình dưới đây và cho biết hình nào là hình lăng trụ đứng tam giác, hình nào là lăng trụ đứng tứ giác?



Ví dụ 2.

Tấm bìa ở hình bên có thể tạo lập thành một hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông. Hãy cho biết độ dài hai cạnh góc vuông của đáy và chiều cao của lăng trụ.



Dạng : Tính diện tích xung quanh của của hình lăng trụ đứng

Ví dụ 1. Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng tam giác, biết độ dài ba cạnh của tam giác lần lượt là 2 cm; 3 cm; 4 cm và chiều cao là 6 cm.

Ví dụ 2. Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng tam giác, biết độ dài ba cạnh của tam giác lần lượt là 3,2; 4,3; 6,5 (cm) và chiều cao là 2,5 (cm).

Ví dụ 3. Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng tam giác, biết chu vi đáy là 20 cm và chiều cao là 8 cm.

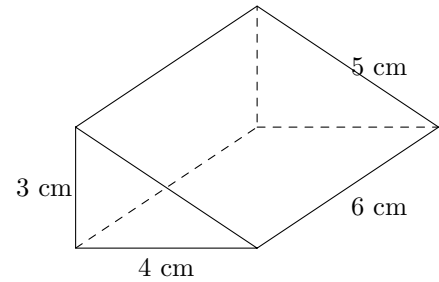
Ví dụ 4. Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng tam giác, biết chu vi đáy là 35,5 cm và chiều cao là 12,5 cm.

Ví dụ 5. Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng tứ giác, biết chu vi đáy là 46 cm và chiều cao là 25 cm.

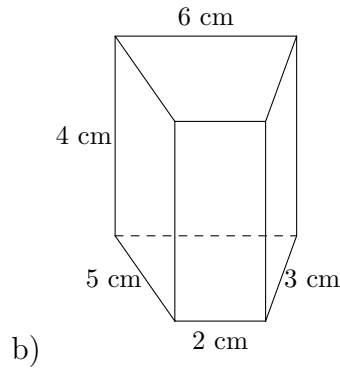
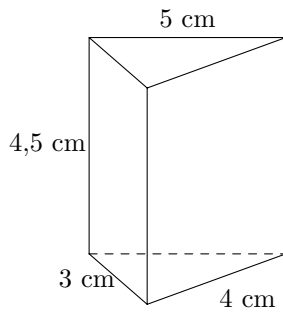
Ví dụ 6. Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng tứ giác, biết chu vi đáy là 62,8 cm và chiều cao là 12,7 cm.

Ví dụ 7.

Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng trong hình bên.



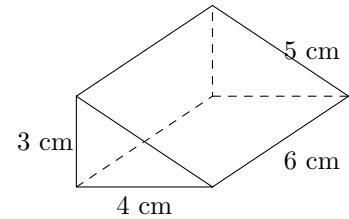
❶ Ví dụ 8. Tính diện tích xung quanh của các hình lăng trụ đứng dưới đây



Dạng : Tính thể tích của của hình lăng trụ đứng

❶ Ví dụ 1.

Tính thể tích của hình lăng trụ đứng trong hình bên.

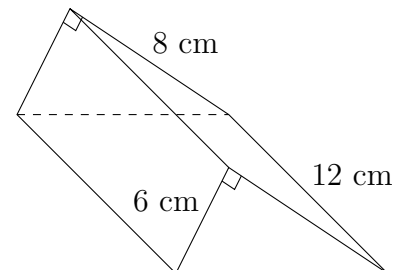


❶ Ví dụ 2. Tính thể tích của hình lăng trụ đứng, biết đáy của lăng trụ là tam giác vuông, có độ dài hai cạnh góc vuông lần lượt là 3 cm, 4 cm và chiều cao của lăng trụ là 8 cm.

❶ Ví dụ 3. Tính thể tích của hình lăng trụ đứng, biết đáy của lăng trụ là tam giác vuông, có độ dài hai cạnh góc vuông lần lượt là 3,2 cm, 4,5 cm và chiều cao của lăng trụ là 6,2 cm.

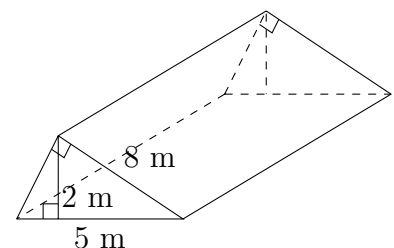
❶ Ví dụ 4.

Một cái lều vải dạng hình lăng trụ đứng có kích thước như hình vẽ. Tính thể tích của lều.



❶ Ví dụ 5.

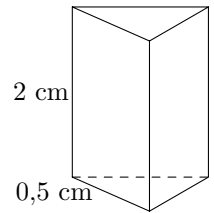
Một cái lều vải dạng hình lăng trụ đứng có kích thước như hình vẽ. Tính thể tích của lều.



 Dạng : Vận dụng vào bài toán thực tế

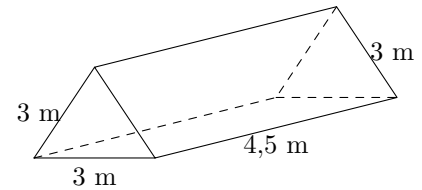
○ Ví dụ 1.

Tính diện tích xung quanh của một cột trụ bê tông hình lăng trụ đứng có chiều cao 2 m và đáy là tam giác đều có cạnh 0,5 m (hình bên).



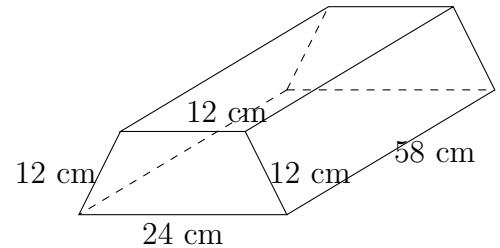
○ Ví dụ 2.

Một lều chữ A dạng hình lăng trụ đứng có kích cỡ như hình bên. Tính diện tích vải dùng làm hai mái và trải đáy của lều.



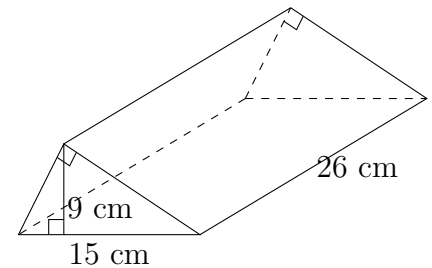
○ Ví dụ 3.

Một khúc gỗ dùng để chặn bánh xe (giúp xe không bị trôi khi dừng đỗ) có dạng hình lăng trụ đứng, đáy là hình thang cân có kích thước như hình vẽ. Người ta sơn xung quanh khúc gỗ này (không sơn hai đầu hình thang cân). Mỗi mét vuông sơn chi phí hết 30000 đồng. Hỏi sơn xung quanh như vậy hết bao nhiêu tiền?



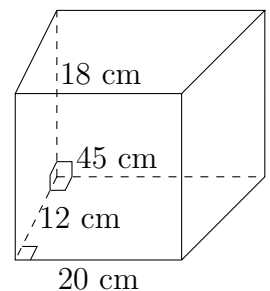
○ Ví dụ 4.

Một lăng kính được làm bằng thủy tinh có dạng một hình lăng trụ đứng tam giác như hình vẽ. Tính thể tích thủy tinh dùng để làm lăng kính.



○ Ví dụ 5.

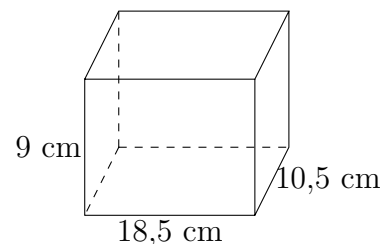
Một khay đựng linh kiện bằng nhựa, có dạng hình lăng trụ đứng, đáy là hình thang vuông, các kích thước như hình vẽ bên. Tính thể tích của khay.



○ Ví dụ 6. Một lăng kính hình lăng trụ đứng tam giác, có diện tích đáy là 25 cm^2 , chiều cao gấp hai lần diện tích đáy, tính thể tích lăng kính đó.

○ Ví dụ 7.

Một hộp đựng khẩu trang y tế được làm bằng bìa cứng có dạng một hình hộp chữ nhật, kích thước như hình vẽ.

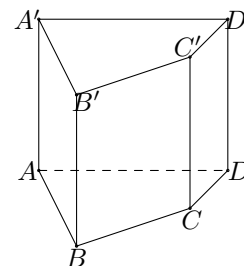


- Tính thể tích của hộp.
- Tính diện tích bìa cứng dùng để làm hộp (bỏ qua mép dán).

C BÀI TẬP VẬN DỤNG

✎ Bài 1.

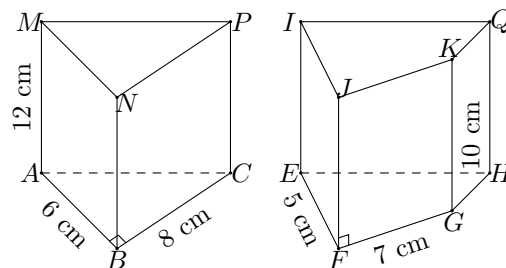
Cho hình lăng trụ đứng tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ như hình bên.



- Chỉ ra các mặt đáy và mặt bên.
- Cạnh bên AA' bằng cạnh nào?

✎ Bài 2.

Quan sát hai hình lăng trụ đứng trong hình bên. Tìm độ dài các cạnh

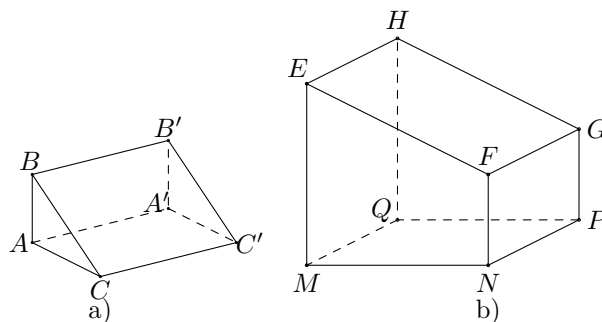


- MN, NP, BN, CP
- IE, HQ, IJ, JK

✎ Bài 3.

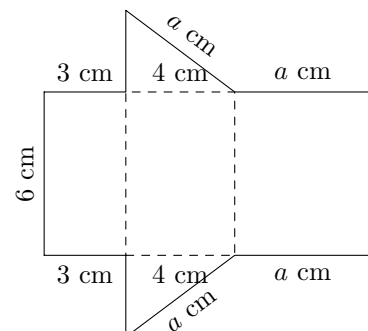
Quan sát hai hình lăng trụ đứng trong hình bên

- Chỉ ra mặt đáy và mặt bên của mỗi lăng trụ.
- Ở hình a, cạnh BB' bằng cạnh nào? Ở hình b, cạnh EH bằng cạnh nào?



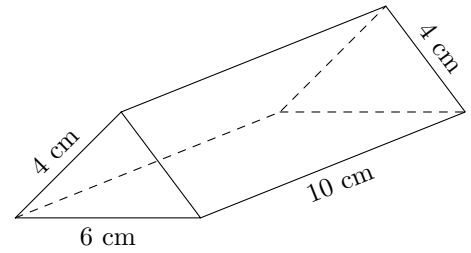
✎ Bài 4.

Tấm bìa ở hình bên có thể tạo lập thành một hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông. Hãy cho biết độ dài hai cạnh góc vuông của đáy và chiều cao của lăng trụ.



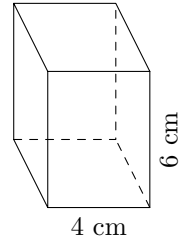
✎ Bài 5.

Tạo lập một hình lăng trụ đứng tam giác với kích thước như hình bên.



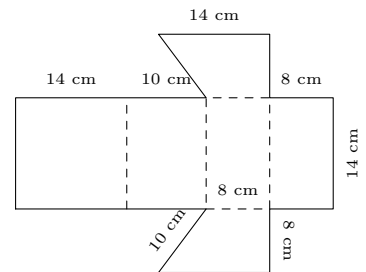
Bài 6.

Tạo lập hình lăng trụ đứng tứ giác có đáy là hình vuông cạnh 4 cm và chiều cao 8 cm như hình bên.



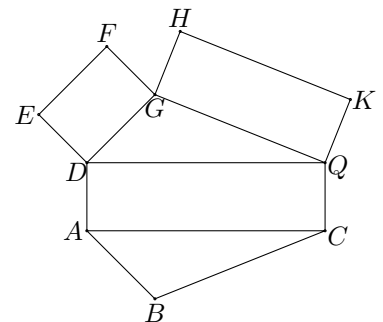
Bài 7.

Từ tấm bìa như hình bên có thể tạo lập được hình lăng trụ đứng có đáy là hình thang. Hãy cho biết chiều cao của hình lăng trụ đó và chu vi mặt đáy.



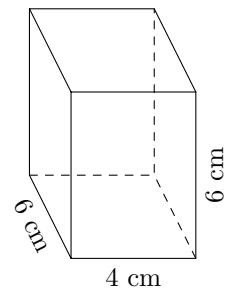
Bài 8.

Quan sát hình bên và cho biết cạnh AB , BC ghép với cạnh nào để có được hình lăng trụ đứng tam giác.



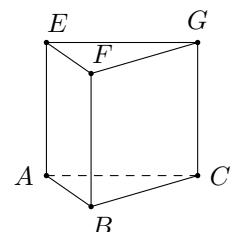
Bài 9.

Em hãy cắt một tấm bìa để có thể tạo lập được hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành với độ dài hai đáy là 6 cm, 4 cm và chiều cao là 6 cm.



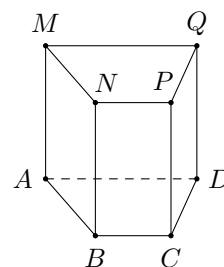
Bài 10.

Gọi tên đỉnh, cạnh, mặt bên, mặt đáy của hình lăng trụ đứng tam giác ở hình bên.

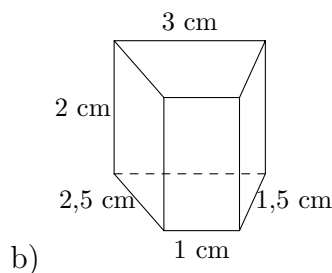
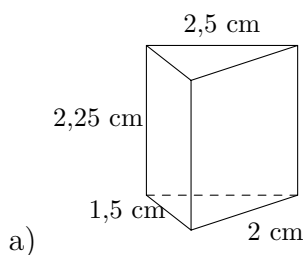


Bài 11.

Viết tên đỉnh, cạnh, mặt bên, mặt đáy của hình lăng trụ đứng tứ giác ở hình bên.

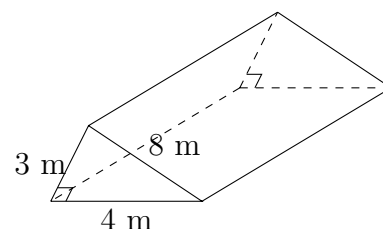


Bài 12. Tính diện tích xung quanh của các hình lăng trụ đứng dưới đây



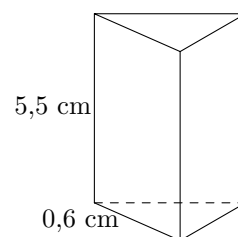
Bài 13.

Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình lăng trụ đứng có kích thước như hình vẽ. Biết độ dài ba cạnh đáy là ba số liên tiếp.



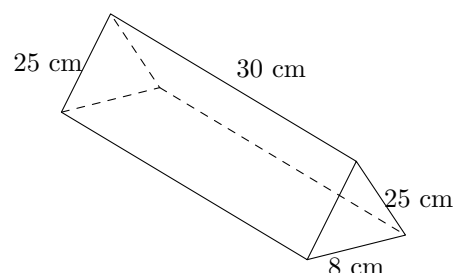
Bài 14.

Tính diện tích xung quanh của một cột trụ bê tông hình lăng trụ đứng có chiều cao 5,5 m và đáy là tam giác đều có cạnh 0,6 m (hình bên).



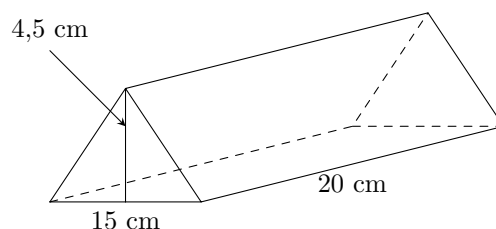
Bài 15.

Một quyển lịch để bàn gồm các tờ lịch đặt trên một giá đỡ bằng bìa có dạng hình lăng trụ đứng tam giác. Tính diện tích bìa dùng để làm giá đỡ của quyển lịch.



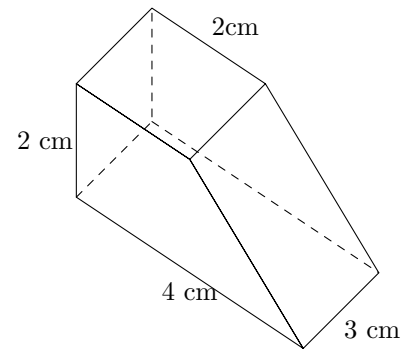
Bài 16.

Một lăng kính được làm bằng thủy tinh có dạng một hình lăng trụ đứng tam giác như hình bên. Tính thể tích thủy tinh để làm lăng kính.



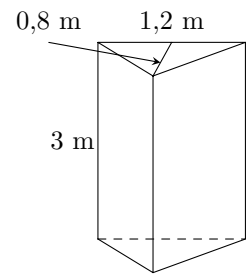
Bài 17.

Một viên phô mai có dạng hình lăng trụ đứng, đáy là hình thang vuông với độ dài hai cạnh lần lượt là 2 cm, 4 cm và các kích thước như hình bên. Tính thể tích của viên phô mai.



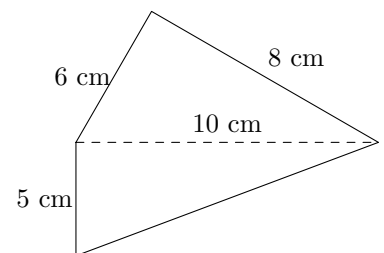
Bài 18.

Gàu xúc của một xe xúc có dạng gần như một hình lăng trụ đứng tam giác với kích thước cho trong hình bên. Để xúc hết 50 m^3 cát, xe phải xúc ít nhất bao nhiêu gàu?



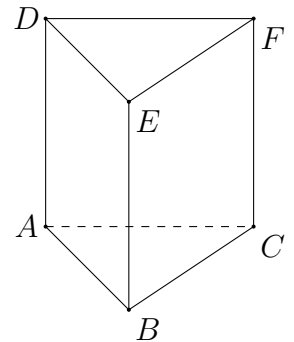
Bài 19.

Một hình lăng trụ đứng tứ giác có kích thước đáy như hình bên, biết chiều cao của lăng trụ là 12 cm. Tính thể tích của hình lăng trụ.



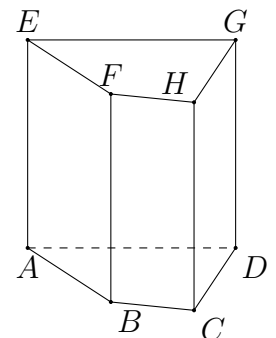
Bài 20.

Gọi tên đỉnh, cạnh, mặt bên, mặt đáy của hình lăng trụ đứng tam giác ở hình vẽ bên.



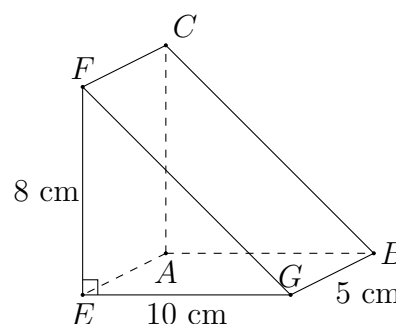
Bài 21.

Gọi tên đỉnh, cạnh, mặt bên, mặt đáy của hình lăng trụ đứng tứ giác ở hình vẽ bên.



Bài 22.

Một cái bánh ngọt có dạng hình lăng trụ đứng tam giác, kích thước như hình vẽ dưới. Tính thể tích cái bánh.



Bài 23. Một lăng kính hình lăng trụ đứng tam giác, có diện tích đáy là $6,8 \text{ cm}^2$, chiều cao gấp ba lần diện tích đáy, tính thể tích lăng kính đó.

Bài 24. Tính thể tích của hình lăng trụ đứng, biết đáy của lăng trụ là tam giác vuông, có độ dài hai cạnh góc vuông lần lượt là $3; 4 \text{ cm}$ và chiều cao của lăng trụ là 9 cm .

Bài 25. Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng tam giác, biết chu vi đáy là $35,5 \text{ cm}$ và chiều cao là $12,5 \text{ cm}$.

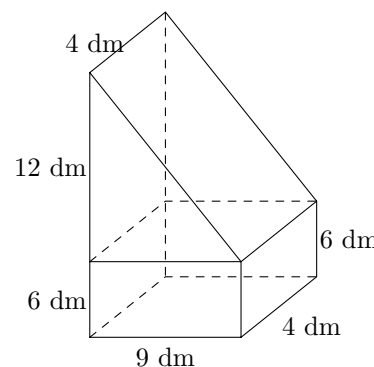
Bài 26. Một lăng kính hình lăng trụ đứng tam giác, có diện tích đáy bằng diện tích hình chữ nhật kích thước $12 \times 20 \text{ cm}$, chiều cao bằng tám lần số nguyên tố chia duy nhất. Tính thể tích lăng kính đó.

D BÀI TẬP NÂNG CAO

❖ Câu 1.

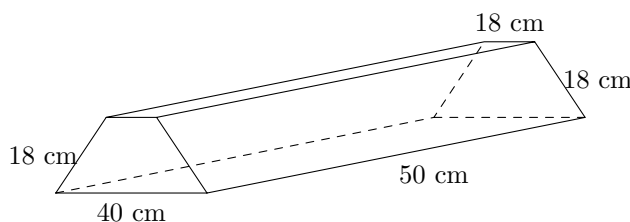
Bác An đúc một khối bê tông hình lăng trụ đứng với kích thước như hình bên.

- Tính thể tích khối bê tông.
- Bác An sơn các mặt của khối bê tông, trừ mặt bên dưới, chi phí sơn mỗi mét vuông là 25000 đồng. Tính số tiền bác An phải trả để sơn khối bê tông.



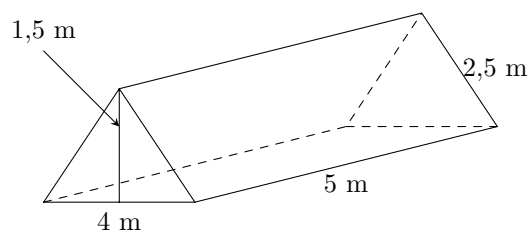
❖ Câu 2.

Một khúc gỗ dùng để chặn bánh xe (giúp xe không bị trôi khi dừng, đỗ) có dạng hình lăng trụ đứng, đáy là hình thang cân có kích thước như hình bên. Người ta sơn xung quanh khúc gỗ này (không sơn hai đầu hình thang cân). Mỗi mét vuông sơn chi phí hết 25000 đồng. Hỏi sơn xung quanh như vậy hết bao nhiêu tiền?



❖ Câu 3.

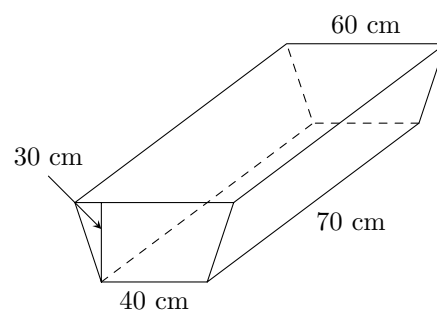
Nhóm của An tổ chức đi dã ngoại, các bạn dự định dựng một cái lều trên bãi có dạng hình lăng trụ đứng tam giác với kích thước như hình bên.



- Tính thể tích khoảng không bên trong lều.
- Biết lều phủ vải bốn phía, trừ mặt trên cỏ. Tính diện tích vải bạt cần phải có để dựng lều.

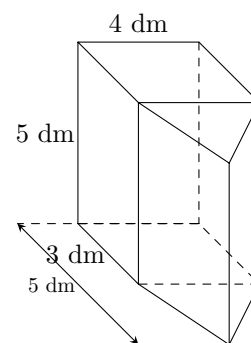
Câu 4.

Một cái máng cho heo ăn dạng hình lăng trụ đứng có mặt đáy là hình thang, các kích thước cho như hình bên. Hãy tính thể tích cám chứa đầy trong máng.



Câu 5.

Tính thể tích của vật thể như hình bên.



ÔN TẬP CHƯƠNG X

E BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

❖ Câu 1. Chọn phát biểu đúng trong các phát biểu sau

- (A) Hình lập phương có sáu mặt là hình bình hành.
- (B) Hình hộp chữ nhật có bốn mặt bên là hình thoi.
- (C) Hình lăng trụ đứng tam giác có ba mặt bên là hình chữ nhật.
- (D) Hình lăng trụ đứng tứ giác có mặt đáy luôn là hình vuông.

❖ Câu 2. Chọn phát biểu đúng trong các phát biểu sau

- (A) Hình lập phương có tất cả sáu đường chéo.
- (B) Hình hộp chữ nhật có tất cả bốn đường chéo.
- (C) Các cạnh của hình lập phương không bằng nhau.
- (D) Hình lăng trụ đứng tam giác có mặt đáy luôn là tam giác đều.

❖ Câu 3. Thể tích của hình lập phương có cạnh bằng 2 cm là

- (A) 4 cm^3 .
- (B) 6 cm^3 .
- (C) 8 cm^3 .
- (D) 10 cm^3 .

❖ Câu 4. Thể tích của hình hộp chữ nhật có chiều dài bằng 6 cm, chiều rộng 4 cm và chiều cao 8 cm là

- (A) 160 cm^3 .
- (B) 18 cm^3 .
- (C) 80 cm^3 .
- (D) 192 cm^3 .

❖ Câu 5. Diện tích giấy dùng để làm một cái hộp (có nắp) có dạng hình lập phương cạnh 8 cm (diện tích các mép gấp không đáng kể) là

- (A) 512 cm^2 .
- (B) 64 cm^2 .
- (C) 256 cm^2 .
- (D) 384 cm^2 .

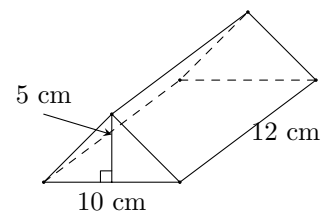
❖ Câu 6. Số tiền phải trả để sơn mặt ngoài của một cái bể nước dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài 4,5 m; chiều rộng 2,5 m và chiều cao 1,5 m; chi phí để sơn mỗi mét vuông là 20000 đồng.

- (A) 520000 đồng.
- (B) 420000 đồng.
- (C) 337500 đồng.
- (D) 210000 đồng.

❖ Câu 7.

Thể tích hình lăng trụ bên là

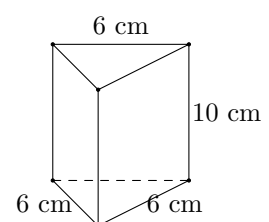
- (A) 600 cm^3 .
- (B) 360 cm^3 .
- (C) 180 cm^3 .
- (D) 300 cm^3 .



❖ Câu 8.

Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng tam giác có kích thước như hình bên là:

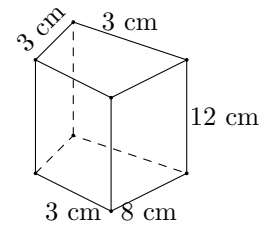
- (A) 180 cm^2 .
- (B) 2160 cm^2 .
- (C) 120 cm^2 .
- (D) 90 cm^2 .



❖ Câu 9.

Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng tứ giác có kích thước như hình bên là:

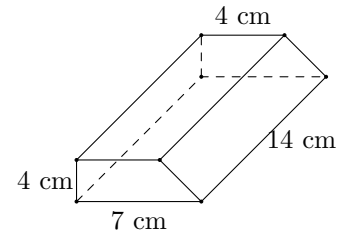
- (A) 264 cm^2 . (B) 432 cm^2 . (C) 2880 cm^2 . (D) 216 cm^2 .



Câu 10.

Thể tích của một vật có dạng hình lăng trụ như hình bên là

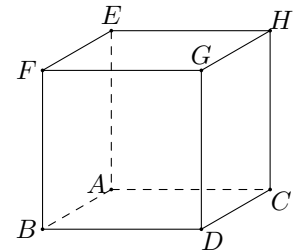
- (A) 210 cm^3 . (B) 360 cm^3 . (C) 308 cm^3 . (D) 616 cm^3 .



F BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 27.

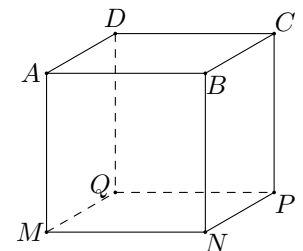
Gọi tên đỉnh, cạnh, mặt bên, mặt đáy của hình hộp chữ nhật trong hình vẽ bên cạnh.



Bài 28.

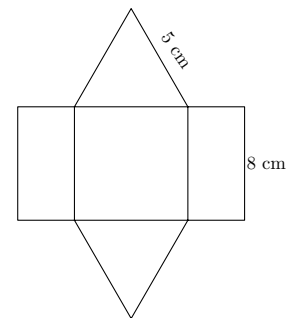
Quan sát hình lập phương $ABCD.MNPQ$ (hình vẽ bên)

- a) Biết $AB = 5 \text{ cm}$. Tính độ dài các cạnh CD và NP ?
b) Nêu tên các đường chéo của hình lập phương?



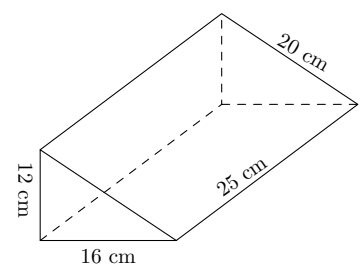
Bài 29.

Người ta cắt một miếng bìa để tạo lập một lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều với các kích thước như hình bên. Hãy cho biết độ dài các cạnh đáy và chiều cao của hình lăng trụ đứng.



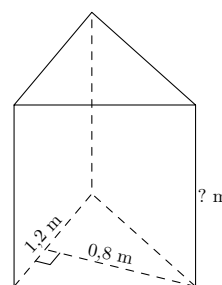
Bài 30.

Hãy nêu các bước tạo lập hình lăng trụ đứng tam giác trong hình bên



Bài 31.

Gàu xúc của một xe xúc có dạng gần như một hình lăng trụ đứng tam giác với kích thước mặt đáy được cho trong hình bên. Để xúc hết 72 m^3 cát người ta phải xúc tất cả 50 gàu (xem lượng cát xúc của mỗi gàu là như nhau và lượng cát lấp vừa đầy gàu xúc). Hỏi chiều cao của hình lăng trụ đó bằng bao nhiêu mét?

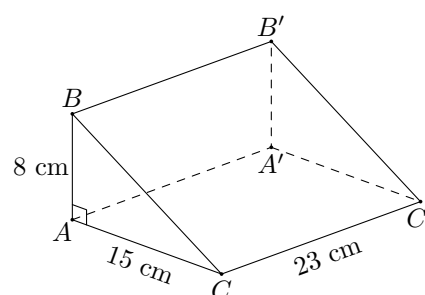


Bài 32. Người ta làm một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật bằng bìa với chiều dài 22 cm, chiều rộng 16 cm và chiều cao 18 cm.

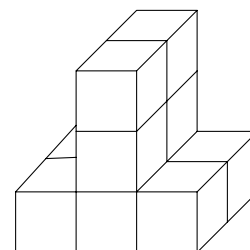
- Tính thể tích của cái hộp.
- Tính diện tích bìa cứng dùng để làm cái hộp.

Bài 33.

Tính thể tích, diện tích xung quanh có dạng hình lăng trụ đứng tam giác trong hình vẽ bên cạnh.


Bài 34.

Một bể nước có dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài 2,5 m. Lúc đầu bể không có nước. Sau khi đổ vào bể 150 thùng nước, mỗi thùng chứa 15 lít nước thì mực nước của bể dâng cao 0,5 m.

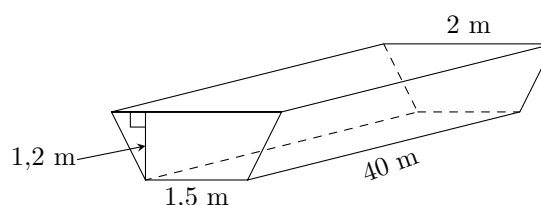


- Tính chiều rộng của bể nước.
- Người ta đổ thêm 120 thùng nước nữa thì đầy bể. Hỏi bể nước cao bao nhiêu mét?

Bài 35. Một cái thùng hình lập phương cạnh 8dm có chứa nước, độ sâu của nước là 5dm. Người ta thả 20 viên gạch dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài 1,8dm, chiều rộng 1,2dm và chiều cao 0,6dm vào thùng. Hỏi nước trong thùng dâng lên cách miệng thùng bao nhiêu dm ?(giả sử toàn bộ gạch ngập trong nước và chúng hút nước không đáng kể)?

Bài 36.

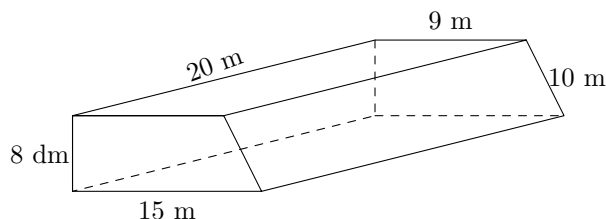
Người ta đào một đoạn mương có dạng hình lăng trụ đứng tứ giác như hình bên. Mương có chiều dài 40 m, sâu 1,2 m; trên bề mặt có chiều rộng 2 m và đáy mương là 1,5 m. Tính thể tích đất phải đào lên.



Bài 37. Phần bên trong của một cái khuôn làm bánh có dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh 25 cm, chiều cao 8 cm. Người ta dự định sơn phần bên trong bằng loại sơn không dính. Hỏi với lượng sơn đủ bao phủ được $11,4 \text{ m}^2$ thì sơn được bao nhiêu cái khuôn làm bánh?

✍ Bài 38.

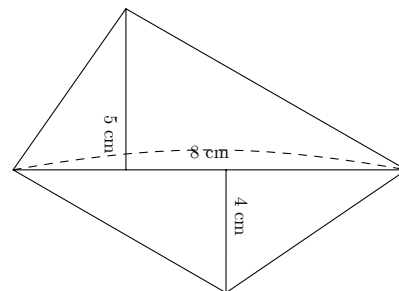
Một cái bục hình lăng trụ đứng có kích thước như hình bên.



- Người ta muốn sơn tất cả các mặt của cái bục. Diện tích cần phải sơn là bao nhiêu?
- Tính thể tích của cái bục.

✍ Bài 39.

Bạn An có một cái hộp dạng hình lăng trụ đứng, đáy của cái hộp đó có hình dạng và kích thước như hình bên. Chiều cao của cái hộp bằng 4 cm. Bạn Bình cũng có một cái hộp có dạng hình lăng trụ đứng, mặt đáy của cái hộp hình vuông và chiều cao cái hộp bằng 9 cm. Biết thể tích cái hộp bạn An bằng thể tích cái hộp bạn Bình.

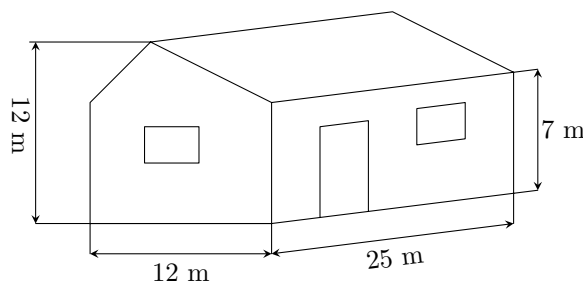


- Tính độ dài cạnh mặt đáy cái hộp bạn Bình.
- Bình xếp những hình lập phương cạnh 1 cm vào cái hộp đó. Hỏi Bình có thể xếp được bao nhiêu hình lập phương vào trong hộp?

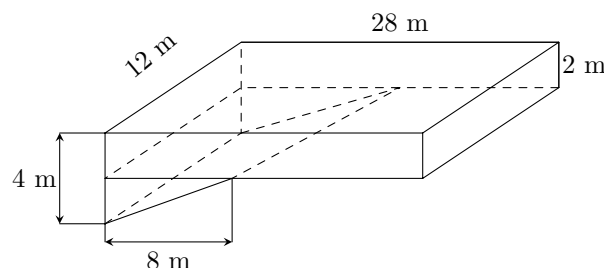
✍ Bài 40.

Một ngôi nhà có kích thước như hình bên.

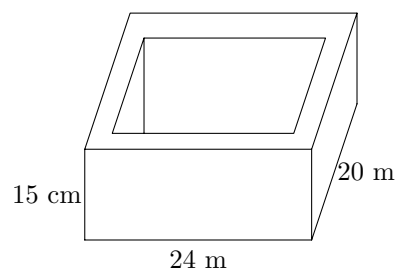
- Tính thể tích ngôi nhà.
- Biết rằng, một lít sơn bao phủ được 4 m^2 tường. Hỏi phải cần ít nhất bao nhiêu lít sơn để sơn phủ được tường mặt ngoài ngôi nhà (không sơn cửa)? Biết tổng diện tích các cửa là 10 m^2 .


✍ Bài 41.

Một bể bơi có kích thước và hình dạng như hình bên. Lượng nước trong bể chiếm $\frac{4}{5}$ thể tích bể. Người ta muốn vệ sinh bể để thay nước mới, lúc 9 giờ người ta bắt đầu tháo van xả nước cứ mỗi phút lượng nước xả ra là 5120 lít nước. Hỏi đến mấy giờ thì lượng nước trong bể hết?

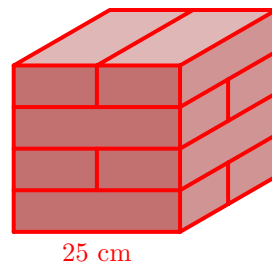

✍ Bài 42.

Một khuôn đúc bê tông có hình dạng như hình bên. Bề dày các mặt bên của khuôn là 2 cm. Bề dày mặt đáy của khuôn là 3 cm. Thể tích của khối bê tông được khuôn này đúc ra là bao nhiêu xăng-ti-mét khối?



Bài 43.

Người ta xếp một số viên gạch dạng hình hộp chữ nhật tạo thành một khối lập phương cạnh 25 cm như hình vẽ bên cạnh.

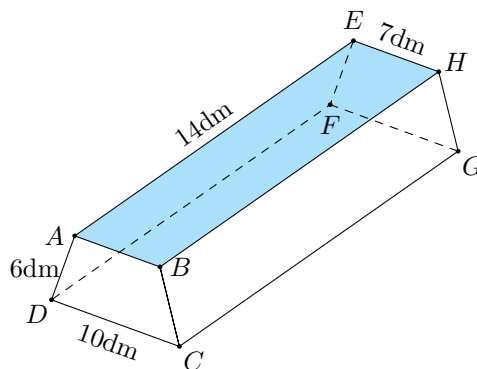


a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của khối gạch hình lập phương.

b) Tìm kích thước của mỗi viên gạch.

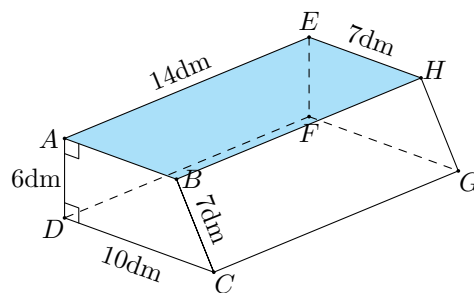
Bài 44.

Một chiếc hộp đèn trang trí có dạng hình lăng trụ đứng tam giác, biết chu vi đáy là 45 cm, chiều cao là 15 cm. Người ta dán giấy màu xung quanh hộp. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu giấy để dán xung quanh chiếc đèn?



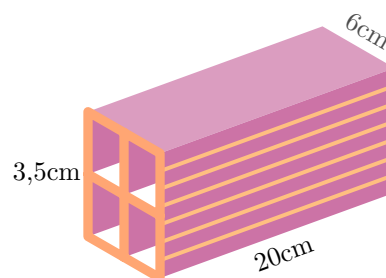
Bài 45.

Một cái bục có dạng hình lăng trụ đứng, đáy là hình thang vuông tại A, D, có kích thước như hình vẽ, người ta muốn sơn tất cả các mặt của cái bục đó, hỏi diện tích cần phải sơn là bao nhiêu?

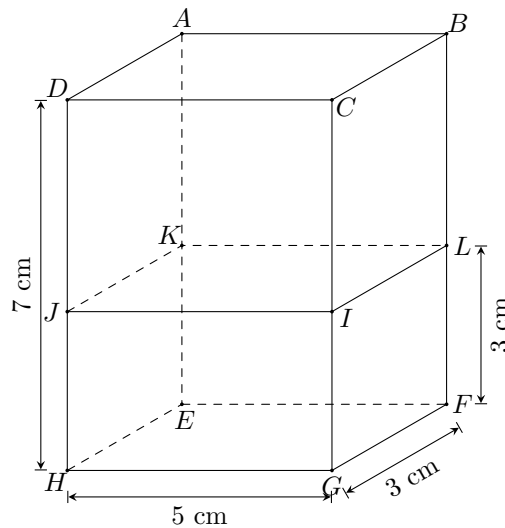


Bài 46.

Một viên gạch có dạng hình hộp chữ nhật, biết chiều dài là 20 cm, chiều rộng là 6 cm, chiều cao là 3,5 cm. Tính thể tích viên gạch.



Bài 47. Cho hình hộp chữ nhật như hình vẽ bên dưới. Tính tỉ số $\frac{V_{JKLM.EFGH}}{V_{ABCD.EFGH}}$.



Bài 48. Một căn phòng dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài 8 m, chiều rộng 6 m, chiều cao 10 m. Người ta muốn lăn sơn tường và trần nhà. Hỏi diện tích cần lăn sơn là bao nhiêu mét vuông, biết rằng tổng diện tích các cửa bằng $6,8 \text{ m}^2$.

Bài 49. Một căn phòng dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài 12,6 m, chiều rộng 7,2 m, chiều cao 35 m. Người ta muốn lăn sơn tường và trần nhà. Hỏi diện tích cần lăn sơn là bao nhiêu mét vuông, biết rằng tổng diện tích các cửa bằng 12 m^2 .

Bài 50. Một bể cá dạng hình hộp chữ nhật làm bằng kính (không có nắp) có chiều dài là 120 cm, chiều rộng là 0,5 m, chiều cao 480 mm. Mực nước ban đầu trong bể cao 36 cm.

- Tính diện tích kính dùng để làm bể cá đó.
- Người ta cho vào bể một hòn đá trang trí chìm hẳn trong nước thì mực nước của bể dâng lên thành 42 cm. Tính thể tích hòn đá.

Bài 51. Một bể cá dạng hình hộp chữ nhật làm bằng kính (không có nắp) có chiều dài là 150 cm, chiều rộng là 1,5 m, chiều cao 500 mm. Mực nước ban đầu trong bể cao 42 cm.

- Tính diện tích kính dùng để làm bể cá đó.
- Người ta cho vào bể một hòn đá trang trí chìm hẳn trong nước thì mực nước của bể dâng lên thành 46 cm. Tính thể tích hòn đá.

Bài 52. Một chiếc cốc có dạng hình trụ, chứa đầy nước. Hỏi nếu bỏ vào cốc 10 viên đá dạng hình lập phương có cạnh 3 cm thì lượng nước trào ra ngoài là bao nhiêu?

Bài 53. Một chiếc cốc có dạng hình trụ, chứa đầy nước. Hỏi nếu bỏ vào cốc 15 viên đá dạng hình lập phương có cạnh 1,5 cm thì lượng nước trào ra ngoài là bao nhiêu?

Bài 54. Một hình hộp chữ nhật có diện tích đáy bằng 40 cm^2 . Chiều dài hơn chiều cao 4 cm, chiều cao bằng $\frac{1}{2}$ chiều dài. Tính:

- Thể tích của hình hộp chữ nhật.

b) Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần hình hộp chữ nhật.

Bài 55. Một hình lập phương có diện tích toàn phần là 294 cm^2 . Hỏi hình lập phương đó có thể tích bằng bao nhiêu?

Bài 56. Tính thể tích của một hình hộp chữ nhật có diện tích xung quanh bằng 448 cm^2 , chiều cao 8 cm , chiều dài hơn chiều rộng 4 cm .

Bài 57. Có một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật, đo trong lòng hộp ta được chiều dài $1,5 \text{ m}$, chiều rộng $1,2 \text{ m}$, chiều cao $0,9 \text{ m}$. Hộp không có nước, người ta đổ vào hồ 30 thùng nước, mỗi thùng chứa 45 lít nước. Hỏi mặt nước còn cách mặt hồ bao nhiêu cen-ti-mét?

Bài 58. Một cái thùng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông cạnh 3 dm . Người ta rót vào thùng 54 lít dầu thì mặt trên của dầu cách miệng thùng 2 dm . Tìm chiều cao của thùng.

Bài 59. Một bể nước có dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài $2,5 \text{ m}$. Lúc đầu bể không có nước. Sau khi đổ vào bể 150 thùng nước, mỗi thùng chứa 15 lít nước thì mực nước của bể dâng cao $0,5 \text{ m}$.

a) Tính chiều rộng của bể nước.

b) Người ta đổ thêm 120 thùng nước nữa thì đầy bể. Hỏi bể nước cao bao nhiêu mét?

Bài 60. Một cái thùng hình lập phương cạnh 8 dm có chứa nước, độ sâu của nước là 5 dm . Người ta thả 20 viên gạch dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài $1,8 \text{ dm}$, chiều rộng $1,2 \text{ dm}$ và chiều cao $0,6 \text{ dm}$ vào thùng. Hỏi nước trong thùng dâng lên cách miệng thùng bao nhiêu dm (giả sử gạch ngập hoàn toàn trong nước và chúng không hút nước)?

Bài 61. Một chiếc bánh kem có dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 25 cm , chiều rộng là 20 cm và chiều cao là 15 cm . Người ta cắt đi một miếng bánh có dạng hình lập phương cạnh là 3 cm . Tính thể tích phần còn lại của chiếc bánh kem.

Bài 62. Một cái bể cá có dạng hình hộp chữ nhật, biết chiều dài là 50 cm , chiều rộng là 30 cm , chiều cao là 35 cm . Hỏi bể cá có thể chứa được nhiều nhất bao nhiêu lít nước?

Bài 63. Một chiếc gàu xúc của một xe xúc có dạng gần như một hình lăng trụ đứng tam giác biết diện tích đáy là $1,5 \text{ cm}^2$, chiều cao là $3,2 \text{ m}$. Hỏi để xúc hết 90 m^3 cát, xe phải xúc bao nhiêu gàu?

Bài 64. Một con dốc có dạng hình lăng trụ đứng tam giác, biết diện tích xung quanh là 600 cm^2 , chu vi đáy là 30 cm . Hỏi chiều cao của con dốc so với mặt đường là bao nhiêu xen-ti-mét?

Bài 65. Một hình lập phương mới có cạnh gấp 3 lần cạnh hình lập phương ban đầu, biết độ dài cạnh của hình lập phương ban đầu là a . Tính tỉ số $\frac{V_{\text{ban đầu}}}{V_{\text{mới}}}$.

Bài 66. Một hình lăng trụ đứng tứ giác, có chu vi đáy là 100 cm , diện tích xung quanh là 500 cm^2 . Tính chiều cao của lăng trụ đó?