

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{6\sqrt{x}-8}{x-16} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{2}{\sqrt{x}-4}$ và $B = \frac{x-\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-4}$, với $x \geq 0; x \neq 16$.

a) Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 9$.

b) Chứng minh rằng $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4}$.

c) Đặt $P = \frac{A}{B}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P .

Câu 2. (2,5 điểm)

a) Số bài tập về nhà môn Toán đã làm của 40 học sinh trong lớp 9A vào tuần trước được thống kê trong bảng tần số sau:

Số bài tập đã làm	6	7	8	9	10
Tần số	8	10	12	6	4

Lập bảng tần số tương đối của bảng số liệu trên.

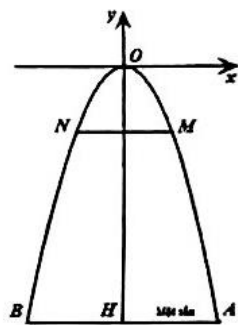
b) Một hộp có 12 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số tự nhiên từ 1 đến 12, hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một chiếc thẻ trong hộp. Tính xác suất của biến cố A: “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra chia hết cho 3”.

c) Một bình thủy tinh hình trụ đang chứa nước có bán kính đáy bên trong là $R = 3\sqrt{2}$ cm đặt trên mặt phẳng nằm ngang. Bạn Nam thả chìm hoàn toàn một viên bi sắt đặc dạng hình cầu có bán kính $r = 3$ cm vào trong bình thì thấy nước trong bình dâng lên x cm ($x > 0$) và không tràn ra ngoài. Tính thể tích của viên bi sắt và tìm giá trị của x .

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Trong thư viện có một giá sách được chia thành hai ngăn I và II. Ban đầu số cuốn sách ở ngăn I nhiều hơn số cuốn sách ở ngăn II là 100 cuốn. Sau khi người ta chuyển 25% số cuốn sách ở ngăn I sang ngăn II thì số cuốn sách ở ngăn I bằng 75% số cuốn sách ở ngăn II. Tính số cuốn sách ở mỗi ngăn lúc ban đầu.

b) Ở một hội chợ thương mại, người ta dựng trên mặt sân một cái cổng có dạng parabol $y = ax^2$ (như hình vẽ bên). Biết chiếc cổng có chiều cao $OH = 8$ m, và khoảng cách giữa hai chân cổng là $AB = 6$ m. Người ta treo trên cổng một dây đèn trang trí song song với đường thẳng AB , từ điểm M đến điểm N , khoảng cách $MN = 3$ m. Tính giá trị của a và khoảng cách từ dây đèn đến mặt sân.



Câu 4. (3,0 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Lấy điểm M thuộc cung nhỏ BC (M khác B và M khác C). Đoạn thẳng MD cắt đoạn thẳng OB tại I , đoạn thẳng OC cắt đoạn thẳng AM tại K .

a) Chứng minh tứ giác $OBMK$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $DI \cdot DM = 2R^2$.

c) Tia phân giác của góc $\widehat{IOM}$ cắt MI tại điểm E . Chứng minh rằng $\tan \widehat{ODI} = \frac{EI}{EM}$.

d) Cho $IB = 2 \cdot IO$. Tính tỉ số $\frac{MB}{MC}$.

Câu 5. (0,5 điểm)

Cho a, b, c là các số không âm thoả mãn: $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{6a + \frac{(b-c)^2}{2}} + \sqrt{6b + \frac{(c-a)^2}{2}} + \sqrt{6c + \frac{(a-b)^2}{2}} \leq 6\sqrt{2}.$$

----- HẾT -----



HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM

MÔN TOÁN (Chung)

Câu	Ý	Nội dung	Điểm													
Câu 1 2,0 đ	a) 0,5	Với $x = 9$ thỏa mãn ĐKXD thay vào B ta được $B = \frac{9 - \sqrt{9} + 4}{\sqrt{9} - 4}$	0,25													
		$B = \frac{9 - 3 + 4}{3 - 4} = -10$. Vậy $B = -10$ tại $x = 9$.	0,25													
	b) 1,0	$A = \frac{6\sqrt{x} - 8}{(\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} - 4)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 4} + \frac{2}{\sqrt{x} - 4}$	0,25													
		$A = \frac{6\sqrt{x} - 8 + \sqrt{x}(\sqrt{x} - 4) + 2(\sqrt{x} + 4)}{(\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} - 4)}$	0,25													
		$A = \frac{6\sqrt{x} - 8 + x - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 8}{(\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} - 4)} = \frac{x + 4\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} - 4)}$	0,25													
		$A = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 4)}{(\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} - 4)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 4}$. Vậy $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 4}$ với $x \geq 0, x \neq 16$.	0,25													
	c) 0,5	Với $x \geq 0, x \neq 16$ thì $B \neq 0$ nên $P = \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 4} : \frac{x - \sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} - 4} = \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 4}$	0,25													
		+ Xét với $x = 0$ (thỏa mãn ĐKXD) ta có $P = 0$. + Xét với $x > 0, x \neq 16$, ta có $P = \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 4} = \frac{\sqrt{x}}{x - 4\sqrt{x} + 4 + 3\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 2)^2 + 3\sqrt{x}} \leq \frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{x}} = \frac{1}{3}$ Dấu “=” xảy ra khi $x = 4$ (thỏa mãn ĐKXD) Vậy $\max P = \frac{1}{3}$ khi $x = 4$.	0,25													
	Câu 2 2,5 đ	a) 0,75	Bảng tần số tương đối: <table><tr><td>Số bài tập đã làm</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr><tr><td>Tần số tương đối (%)</td><td>20</td><td>25</td><td>30</td><td>15</td><td>10</td></tr></table> Đúng từ 1 đến 2 ý: 0,25 Đúng từ 2 đến 3 ý: 0,5 Đúng 5 ý: 0,75	Số bài tập đã làm	6	7	8	9	10	Tần số tương đối (%)	20	25	30	15	10	0,75
			Số bài tập đã làm	6	7	8	9	10								
Tần số tương đối (%)		20	25	30	15	10										
b) 0,75		Không gian mẫu $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ Số phần tử của Ω là $n(\Omega) = 12$	0,25													
c) 1,0		Các kết quả thuận lợi cho biến cố A là 3; 6; 9; 12 Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $n(A) = 4$	0,25													
		Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$	0,25													
		Thể tích của viên bi sắt là $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3$	0,25													
		$V = 36\pi(cm^3)$	0,25													
		Theo bài ra thể tích nước dâng lên bằng thể tích viên bi sắt nên ta có: $\pi R^2 x = 36\pi$	0,25													



		$\pi(3\sqrt{2})^2 \cdot x = 36\pi$ Suy ra $x = \frac{36\pi}{18\pi} = 2(cm)$	0,25
Câu 3 2,0 đ	a) 1,0	Gọi số cuốn sách ở ngăn I lúc đầu là x cuốn ($x \in \mathbb{N}, x > 100$) Số cuốn sách ở ngăn II lúc đầu là y cuốn ($y \in \mathbb{N}, y > 0$) Số cuốn sách ở ngăn I nhiều hơn số cuốn sách ở ngăn II là 100 cuốn Suy ra $x - y = 100$ (1)	0,25
		Chuyển 25% số cuốn sách ở ngăn I sang ngăn II thì số cuốn sách ở ngăn I bằng 75% số cuốn sách ở ngăn II. Ta có: $\frac{75}{100}x = \frac{75}{100}\left(y + \frac{25}{100}x\right)$ $x = y + \frac{1}{4}x$ $y = \frac{3}{4}x \quad (2)$	0,25
		Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = 100 \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases}$	0,25
		Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} x = 400 \\ y = 300 \end{cases}$ (thỏa mãn ĐK)	
		Vậy số cuốn sách ở ngăn I lúc đầu là 400 cuốn Số cuốn sách ở ngăn II lúc đầu là 300 cuốn.	0,25
	b) 1,0	Từ giả thiết suy ra $A(3; -8)$	0,25
		Suy ra $-8 = a \cdot 3^2$ $a = \frac{-8}{9}$	0,25
		Phương trình parabol là $y = -\frac{8}{9}x^2$	
		$MN = 3$ suy ra hoành độ của điểm M là $x_M = \frac{3}{2}$ Suy ra $y_M = -\frac{8}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -2$	0,25
		Khoảng cách từ dây đèn đến mặt sân bằng: $y_M - y_A = -2 + 8 = 6(m)$	0,25



Câu 4 3,0 đ		
a) 1,0	Vì $AB \perp CD$ tại O nên $\triangle BOK$ vuông tại O Do đó $\triangle BOK$ nội tiếp đường tròn đường kính BK (1) Lại có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) Suy ra $\triangle BMK$ vuông tại M Nên $\triangle BMK$ nội tiếp đường tròn đường kính BK (2) Từ (1) và (2) suy ra 4 điểm O, B, M, K cùng thuộc đường tròn đường kính BK. Do đó tứ giác $OBMK$ nội tiếp.	0,25 0,25 0,25 0,25
b) 0,75	Ta có $\widehat{CMD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) Xét $\triangle ODI$ và $\triangle MDC$ có: $\widehat{DOI} = \widehat{DMC} = 90^\circ$, $\widehat{D}$ chung Suy ra $\triangle ODI \sim \triangle MDC$ (g.g) Suy ra $\frac{DO}{DM} = \frac{DI}{DC}$ Nên $DM \cdot DI = DO \cdot DC = R \cdot 2R = 2R^2$	0,25 0,25 0,25
c) 0,75	Xét $\triangle ODI$ vuông tại O có $\tan \widehat{ODI} = \frac{OI}{OD}$ (3) Có OE là đường phân giác trong của $\triangle OIM$ nên $\frac{EI}{EM} = \frac{OI}{OM}$ Mà $OM = OD = R$ nên $\frac{EI}{EM} = \frac{OI}{OD}$ (4) Từ (3) và (4) suy ra $\tan \widehat{ODI} = \frac{EI}{EM}$	0,25 0,25 0,25
d) 0,5	Do $\triangle ODI \sim \triangle MDC$ (cmt) suy ra $\frac{OI}{MC} = \frac{OD}{MD}$ Xét $\triangle DBI$ và $\triangle DMB$ có $\widehat{BDM}$ chung, $\widehat{IBD} = \widehat{BMD} = 45^\circ$ (Góc nội tiếp chắn $\frac{1}{4}$ đường tròn) Nên $\triangle DBI \sim \triangle DMB$ (g.g) Suy ra $\frac{IB}{MB} = \frac{DB}{MD}$	0,25



	Xét $\triangle ODB$ có $\widehat{BOD} = 90^\circ$ và $OB = OD = R$ nên $\triangle ODB$ vuông cân tại O. Suy ra $DB = OD\sqrt{2}$ Suy ra $\frac{IB}{MB} = \frac{DB}{MD} = \frac{OD\sqrt{2}}{MD}$. Mà $\frac{OI}{MC} = \frac{OD}{MD}$ nên $\frac{IB}{MB} = \frac{OI\sqrt{2}}{MC}$ Suy ra $\frac{MB}{MC} = \frac{IB}{OI\sqrt{2}} = \frac{2.OI}{OI\sqrt{2}} = \sqrt{2}$	0,25
Câu 5 0,5 đ	Ta có $\sqrt{6a + \frac{(b-c)^2}{2}} = \sqrt{6a + \frac{(b+c)^2}{2} - 2bc} \leq \sqrt{6a + \frac{(3-a)^2}{2}} = \sqrt{\frac{(a+3)^2}{2}} = \frac{a+3}{\sqrt{2}}$ Tương tự $\sqrt{6b + \frac{(c-a)^2}{2}} \leq \frac{b+3}{\sqrt{2}}$ và $\sqrt{6c + \frac{(a-b)^2}{2}} \leq \frac{c+3}{\sqrt{2}}$ Cộng vế với vế của 3 bất đẳng thức trên ta được: $\sqrt{6a + \frac{(b-c)^2}{2}} + \sqrt{6b + \frac{(c-a)^2}{2}} + \sqrt{6c + \frac{(a-b)^2}{2}} \leq \frac{a+b+c+9}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$ Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} a+b+c=3 \\ ab=bc=ca=0 \end{cases}$ Hay $\begin{cases} a=b=0 \\ c=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} b=c=0 \\ a=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} c=a=0 \\ b=3 \end{cases}$	0,25