SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

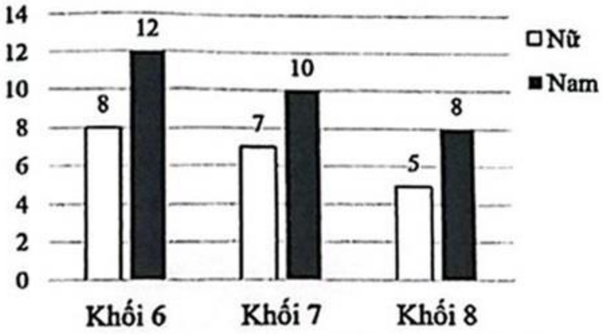
ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2025 - 2026

Môn thi: **TOÁN (Chuyên Toán)**
Ngày thi: 09/6/2025
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I (*2,0 điểm*)

1) Giải bơi của một trường Trung học cơ sở ban đầu chỉ có học sinh khối 6, 7 và 8 đăng kí tham gia với số liệu học sinh được cho như trong biểu đồ cột kép ở hình bên. Ngay trước khi giải đấu diễn ra, có thêm 6 học sinh nam khối 9 và một số học sinh nữ khối 9 đăng kí bổ sung. Biết rằng tỉ lệ học sinh nữ so với tổng số học sinh đăng kí tham gia giải trước và sau khi các học sinh khối 9 đăng kí bổ sung là không thay đổi. Tìm số học sinh nữ khối 9 đã đăng kí thi đấu.



2) Cho a,b,c là các số thực khác 0, thỏa mãn $a+b+c\neq 0$ và $ab+bc+ca=0$. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{1}{a^2-bc}+\dfrac{1}{b^2-ca}+\dfrac{1}{c^2-ab}$.

Câu II (*2,0 điểm*)

1) Cho a,b,c là các số nguyên thỏa mãn $3a^2-bc, 3b^2-ca, 3c^2-ab$ đều chia hết cho 4. Chứng minh abc chia hết cho 8.

2) Tìm tất cả cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $2(2x-y)(y-x)^2=15x-7y+7$.

Câu III (*2,0 điểm*)

1) Với các số thực a,b,c thỏa mãn $a^2b+b^2c+c^2a+16=ab^2+bc^2+ca^2$

a) Chứng minh $(a-b)(b-c)(c-a)=16$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2$.

2) Tìm tất cả các số hữu tỉ dương m và n sao cho các biểu thức $m+n+mn$; $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{mn}$ và $\dfrac{m}{n}$ đều nhận giá trị là số nguyên.

Câu IV (*3,0 điểm*)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB<AC)$, nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao AD, CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Tia MH cắt đường tròn (O) tại điểm T. Kẻ đường kính AK của đường tròn (O).

1) Chứng minh ba điểm T,H,K thẳng hàng.

2) Đường thẳng qua B và vuông góc với đường thẳng AM tại điểm E, cắt đường thẳng AD tại điểm G. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDG cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC tại hai điểm D và N. Chứng minh đường thẳng NE song song với đường thẳng BF.

3) Kẻ dây cung AX của đường tròn (O) sao cho đường thẳng AX song song với đường thẳng BC. Chứng minh ba đường thẳng MX, TD và AN đồng quy.

Câu V (*1,0 điểm*)

Hai trường trung học cơ sở A và B tổ chức chung một buổi liên hoan cho các học sinh tiêu biểu. Biết rằng trong buổi liên hoan này:

(i) mỗi học sinh trường A quen với đúng 5 học sinh khác cũng của trường A;

(ii) mỗi học sinh trường A quen với đúng 4 học sinh trường B;

(iii) mỗi học sinh trường B quen với đúng 3 học sinh trường A;

(iv) tổng số học sinh của hai trường tham dự không vượt quá 80.

1) Số học sinh trường A tham dự buổi liên hoan có thể là 25 học sinh được không? Vì sao?

2) Tổng số học sinh của hai trường tham dự buổi liên hoan có thể nhiều nhất là bao nhiêu? Vì sao?

--------- **HẾT** ---------

HƯỚNG DẪN GIẢI
ĐỀ THI CHUYÊN TOÁN HÀ NỘI 2025

Câu I.

1) Số học sinh nam khối 6,7,8 tham gia là: 12 + 10 + 8 = 30.

Số học sinh nữ khối 6,7,8 tham gia là: 8 + 7 + 5 = 20.

Tổng số học sinh trước thi là: 30 + 20 = 50.

Tỉ lệ HS nữ so với tổng trước thi là $\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$.

Gọi x là số HS nữ khối 9. Tổng số HS nữ sau khi khối 9 tham gia là $20 + x$.

Tổng số HS đăng kí sau khi thi khối 9 bổ sung là $50 + 6 + x = 56 + x$.

Ta có $\frac{20+x}{56+x}=\frac{2}{5} \Leftrightarrow 2(56+x)-5(20+x)=0 \Leftrightarrow x=4.$

Vậy có 4 HS nữ khối 9 đăng kí tham gia thi đấu.

2) Từ $-ca=ab+bc$, ta có $b^2-ca=b^2+ab+bc=b(a+b+c).$

Tương tự thì $c^2-ab=c(a+b+c), a^2-bc=a(a+b+c).$

Như vậy $P=\frac{1}{a(a+b+c)}+\frac{1}{b(a+b+c)}+\frac{1}{c(a+b+c)}=\frac{ab+bc+ca}{abc(a+b+c)}=0.$

Vậy $P=0.$

Câu II.

1) Từ $3a^2-bc+a^2+bc$ chia hết cho 4 suy ra a^2+bc chia hết cho 4.

Tương tự b^2+ca, c^2+ab chia hết cho 4.

- Nếu a chẵn thì $a^2 \vdots 4$, kéo theo $bc \vdots 4$. Như vậy b, c cùng chẵn hoặc một trong hai số b, c có số chia hết cho 4. Khi đó abc chia hết cho 8.

- Nếu a lẻ thì a^2 chia cho 4 dư 1, suy ra bc chia cho 4 dư 3. Như vậy b, c cùng lẻ. Không mất tính tổng quát, ta giả sử b, c chia cho 4 lần lượt dư 1, 3. (1)

Khi đó b^2, c^2 chia cho 4 dư 1 suy ra ab, ca chia cho 4 dư 3. Do (1) nên từ ab chia cho 4 dư 3 thì a chia cho 4 dư 3, mà lại từ ac chia cho 4 dư 3 thì a chia cho 4 dư 1. Do đó dẫn tới mâu thuẫn.

Vậy abc chia hết cho 8.

2) Đặt $a=2x-y, b=y-x$. Ta có: $15x-7y=8(2x-y)+(y-x)=8a+b.$

Phương trình ban đầu trở thành: $2ab^2=8a+b+7 \Leftrightarrow 2a(b^2-4)=b+7.$

Suy ra $b^2-4 \mid b+7$, thì khi đó $b^2-4 \mid b^2-49=b^2-4-45 \Rightarrow b^2-4 \mid 45.$

Ta thấy $b^2-4\in\{-3,-1,1,3,5,9,15,45\}\Leftrightarrow b^2\in\{1,3,5,7,9,13,19,49\}$.

Mà b^2 là số chính phương nên $b^2\in\{1,9,49\}$.

Trường hợp 1: $b^2=1\Leftrightarrow b=\pm1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=-1,a=-1\\ b=1,a=-\dfrac{4}{3}.(L)\end{array}\right.$. Từ $a=b=-1\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=-3\end{cases}$.

Trường hợp 2: $b^2=9\Leftrightarrow b=\pm3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=-3,a=\dfrac{2}{5}(L)\\ b=3,a=1\end{array}\right.$. Từ $\begin{cases}a=1\\ b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=7\end{cases}$.

Trường hợp 3: $b^2=49\Leftrightarrow b=\pm7\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=-7,a=0\\ b=7,a=\dfrac{7}{45}(L)\end{array}\right.$. Từ $\begin{cases}a=0\\ b=-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-7\\ y=-14\end{cases}$.

Thử lại ta thấy $(x,y)=(-2,-3),(4,7),(-7,-14)$ đều thoả mãn phương trình.

Như vậy phương trình có các nghiệm là $(-2,-3),(4,7),(-7,-14)$.

Câu III.

1)

a) Ta giả thiết ta có $ab^2+bc^2+ca^2-a^2b-b^2c-c^2a=16$. Khi đó

$$\begin{aligned}&-ab(a-b)-c^2(a-b)+c(a-b)(a+b)=16\\ &\Leftrightarrow(a-b)(-ab-c^2+ca+cb)=16\\ &\Leftrightarrow(a-b)(b-c)(c-a)=16.\end{aligned}$$

b) Ta có $(a-b)(b-c)(c-a)=16$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a=\min\{a,b,c\}$.

Đặt $x=b-a,y=c-b\Rightarrow c-a=x+y>0$. Khi đó $xy(x+y)=16$, thì $xy>0$.

Ta có: $16=xy(x+y)\le\dfrac{(x+y)^2}{4}.(x+y)=\dfrac{(x+y)^3}{4}\Leftrightarrow x+y\ge4$.

Ta có: $3P=3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

Suy ra $3P\ge(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=x^2+y^2+(x+y)^2\ge\dfrac{3}{2}(x+y)^2\ge24$.

Do đó $P\ge8$.

Vậy GTNN của P là 8 và dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $a=-2,b=0,c=2$.

2) Giả sử $m=\dfrac{x}{y},n=\dfrac{z}{t}$ trong đó *x, y, z, t* nguyên dương và $(x,y)=(z,t)=1$.

Từ $m+n+mn\in Z\Leftrightarrow\dfrac{xt+yz+zx}{yt}\in Z\Leftrightarrow yt\mid xt+yz+xz\Leftrightarrow yt\mid(x+y)(z+t)$. (1)

Từ $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{mn}\in Z\Leftrightarrow\dfrac{yz+xt+yt}{xz}\in Z\Leftrightarrow xz\mid yz+xt+yt\Leftrightarrow xz\mid(x+y)(z+t)$. (2)

Từ $\frac{m}{n} \in Z \Leftrightarrow yz \mid xt$. (3)

Do $(x, y) = (x + y, y) = 1$. Từ (1) thì $y \mid z + t$ và từ (3) thì $y \mid t$.

Khi đó ta suy ra $y \mid z$. Mà $(z, t) = 1$ nên $y = 1$.

Do $(z, t) = (z + t, z) = 1$. Từ (2) thì $z \mid x + y$ và từ (3) thì $z \mid x$.

Khi đó ta suy ra $z \mid y$. Mà $(x, y) = 1$ nên $z = 1$.

Từ đó $m = x, n = \frac{1}{t}$. Do đó $\begin{cases} x + \frac{1}{t} + \frac{x}{t} \in Z \Rightarrow \frac{x+1}{t} \in Z \Rightarrow t \mid x+1 \\ \frac{1}{x} + t + \frac{t}{x} \in Z \Rightarrow \frac{t+1}{x} \in Z \Rightarrow x \mid t+1 (*) \end{cases}$.

Đặt $x + 1 = at \Leftrightarrow x = at - 1$. Từ (*) suy ra $\frac{t+1}{at-1} \in N^*$.

Ta thấy với $a > 3$ thì $\frac{t+1}{at-1} < 1$. Suy ra $\frac{t+1}{at-1} \notin N^*$.

Trường hợp 1: Với $a = 1$ thì $t - 1 \mid t + 1 \Rightarrow t - 1 \mid 2 \Rightarrow t = 2,3$. Thì $\left[\begin{array}{l} x = 1, t = 2 \\ x = 2, t = 3 \end{array}\right.$.

Suy ra $(x, t) = (1,2), (2,3)$.

Trường hợp 2: Với $a = 2$ thì $2t - 1 \mid t + 1 \Rightarrow t = 1,2$. Thì $\left[\begin{array}{l} x = 1, t = 1 \\ x = 3, t = 2 \end{array}\right.$.

Suy ra $(x, t) = (1,1), (3,2)$.

Trường hợp 3: Với $a = 3$ thì $3t - 1 \mid t + 1 \Rightarrow t = 1$. Thì $x = 2, t = 1$.

Suy ra $(x, t) = (2,1)$.

Thử lại ta có $(m, n) = (1,1), \left(1, \frac{1}{2}\right), (2,1), \left(2, \frac{1}{3}\right), \left(3, \frac{1}{2}\right)$ đều thoả mãn.

Vậy $(m, n) = (1,1), \left(1, \frac{1}{2}\right), (2,1), \left(2, \frac{1}{3}\right), \left(3, \frac{1}{2}\right)$ là các bộ cần tìm.

Câu IV.

1) Do *AK* là đường kính nên $\angle ACK = \angle ABK = 90^\circ$.

Suy ra $BH \parallel CK, CH \parallel BK$ nên *BHCK* là hình bình hành hay *H, M, K* thẳng hàng.

Như vậy *T, H, K* thẳng hàng.

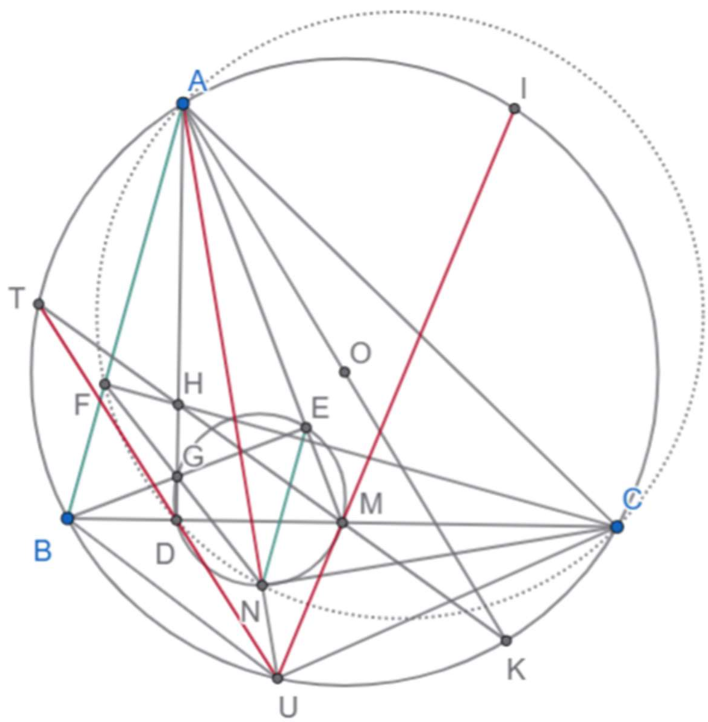
2) Ta thấy *D,N,M,E,G* đồng viên và *A,F,G,D,N* đồng viên.

Ta có *AG* vuông góc *BM, BG* vuông góc *AM* suy ra *G* là trực tâm tam giác *AMB* nên *MG* vuông góc *AB*. Suy ra *MG* song song *FC*.

Ta có: $\angle MGN = \angle MDN = \angle CFN$ suy ra F, G, N thẳng hàng.
Vì $\angle BMF = 2\angle MCF = 2\angle GMD$ nên MG là phân giác góc FMB.
Mà MG là đường cao tam giác BMF suy ra MG là trung trực của BF.
Hay tam giác GBF cân tại G.
Ta có biến đổi góc sau:

$$\angle BAE = 90^\circ - \angle ABE = 90^\circ - \angle BFG = 90^\circ - \angle ACN = \angle NAC = \angle NDM = \angle NEM.$$

Suy ra NE song song với BF.



c) Gọi AN cắt (O) tại U. Ta chứng minh MX đi qua U.
Theo câu b thì

$$\angle BAE = \angle NAC \Rightarrow \angle BAU = \angle MAC \Rightarrow \Delta ABU \sim \Delta AMC(g.g).$$

Suy ra

$$\frac{AU}{AC} = \frac{BU}{MC} = \frac{BU}{MB} \Rightarrow \Delta BUM \sim \Delta AUC(c.g.c).$$

Mà $AXCB$ là hình thanh cân. Do đó

$$\angle BUM = \angle AUC = 180^\circ - \angle AXC = 180^\circ - \angle BAX = \angle BUX.$$

Suy ra MX đi qua U. (*)
Ta có:

$$\angle DAN = \angle BAN - \angle BAD = \angle MAC - \angle CAO = \angle MAK$$
$$\Rightarrow \angle DAM = \angle NAK = \angle UAK = \angle UTK.$$

Mặt khác $\angle DAM = \angle DTM \Rightarrow \angle DTM = \angle UTK$.
Hay TD đi qua U. (**)
Từ (*)(**), như vậy TD, AN, MX đồng quy tại U.

Câu V.

Hai trường trung học cơ sở A và B tổ chức chung một buổi liên hoan cho các học sinh tiêu biểu. Biết rằng trong buổi liên hoan này:

(i) mỗi học sinh trường A quen với đúng 5 học sinh khác cũng của trường A;

(ii) mỗi học sinh trường A quen với đúng 4 học sinh trường B;

(iii) mỗi học sinh trường B quen với đúng 3 học sinh trường A;

(iv) tổng số học sinh của hai trường tham dự không vượt quá 80.

1) Số học sinh trường A tham dự buổi liền hoan có thể là 25 học sinh được không? Vì sao?

2) Tổng số học sinh của hai trường tham dự buổi liên hoan có thể nhiều nhất là bao nhiêu? Vì sao?

HDG:

1) Giả sử số học sinh trường A là 25.

Gọi a là số học sinh trường A, b là số học sinh trường B thì theo giả thiết ta có 4a=3b nên a chia hết cho 3 mà 25 không chia hết cho 3 nên vô lý.

Vậy số học sinh trường *A* không thể là 25.

2) Gọi số học sinh trường *A, B* lần lượt là *a, b*.Ta có 4*a* = 3*b* (1)

Theo giả thiết thì $a+b\le 80$ hay $a+\dfrac{4}{3}a\le 80\Rightarrow a\le 34$. Và $b+\dfrac{3}{4}b\le 80\Rightarrow b\le 45$.

Từ (1) thì *a* chia hết cho 3.

* Vì mỗi học sinh trường A quen với đúng 5 học sinh khác của trường A nên số **cặp 2 học sinh quen nhau** của trường A là $\dfrac{5a}{2}$. Đây là một số tự nhiên nên *a* là số chẵn.

a chẵn và *a* chia hết cho 3 nên $a\le 30$. Suy ra $b=\dfrac{4}{3}a\le 40$.

* Bây giờ ta chứng minh số học sinh trường A là a=30 và số học sinh trường B là b=40 thỏa mãn bài toán.

\+ Thật vậy: Xét trường hợp 70 học sinh gồm 30 học sinh của trường A, và 40 học sinh của trường B. Các học sinh của trường A chia thành 5 nhóm 6 học sinh rời nhau, 2 học sinh trường A quen nhau khi và chỉ khi chúng cùng thuộc 1 nhóm (thỏa mãn điều kiện i)

\+ Để chứng minh thỏa mãn điều kiện ii, và iii ta chia số học sinh của trường A chia thành 10 nhóm, mỗi nhóm gồm 3 học sinh rời nhau và chia các học sinh của trường B thành 10 nhóm, mỗi nhóm 4 học sinh rời nhau. Ghép cặp từng nhóm của học sinh trường A và nhóm của học sinh trường B ta cũng được 10 nhóm 7 học sinh, mỗi nhóm gồm: 3 học sinh trường A và 4 học sinh trường B. Trong đó: 2 bạn học sinh, 1 trường A và 1 từ trường B sẽ quen nhau nếu 2 bạn cùng 1 nhóm. Từ đây ta thu được 1 đội hình gồm 70 học sinh thoả mãn đề bài.

Vậy tổng số học sinh tham gia nhiều nhất là 70.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI	KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2025 - 2026
ĐỀ CHÍNH THỨC	Môn thi: **TOÁN (Chuyên Tin)** Ngày thi: 09/6/2025 Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I (*2,0 điểm*)

1) Gieo một xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Tính xác suất của biến cố A: "Tích của hai số chấm xuất hiện trên mặt xúc xắc trong hai lần gieo bằng 6".

2) Cho a, b là hai số thực phân biệt thỏa mãn $a+b=6$ và $a+\dfrac{4}{a}=b+\dfrac{4}{b}\cdot$ Tính giá trị của biểu thức $M=\dfrac{a}{b^2+1}+\dfrac{b}{a^2+1}\cdot$

Câu II (*2,0 điểm*)

1) Cho a, b và c là các số nguyên dương thỏa mãn $\dfrac{1}{a}+\dfrac{3}{b+2}=\dfrac{5}{c+4}\cdot$ Chứng minh abc chia hết cho 4.

2) Tìm tất cả cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn $x(x-2y)=y^3-3y^2+2y-1$.

Câu III (*2,0 điểm*)

1) Với a, b và c là các số nguyên dương thỏa mãn $a+b+c=12$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(a-\dfrac{4}{a}\right)^2+\left(b-\dfrac{4}{b}\right)^2+\left(c-\dfrac{4}{c}\right)^2\cdot$

2) Cho a, b và c là các số nguyên dương thỏa mãn $(a+2b)(2a+c)=(a^2-bc)^2$. Chứng minh $4ab+1$ là số chính phương.

Câu IV (*3,0 điểm*)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB<AC$), nội tiếp đường tròn (O). Đường thẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC, cắt đường tròn (O) tại điểm I (I khác A). Lấy điểm M thuộc cung nhỏ IC của đường tròn (O) sao cho $MB<MC$. Kẻ dây cung MN của đường tròn (O) sao cho đường thẳng MN song song với đường thẳng BC. Tia phân giác của góc ACB cắt hai đường thẳng AM và AN lần lượt tại hai điểm P và Q.

1) Chứng minh $CM.\,CQ=CP.\,NQ$.

2) Gọi E là giao điểm của đường thẳng MQ với đường thẳng BC. Chứng minh đường thẳng PE song song với đường thẳng AN.

3) Gọi H là điểm đối xứng với điểm P qua đường thẳng BC. Gọi S là giao điểm của đường thẳng MI với đường thẳng BC. Chứng minh đường thẳng SH vuông góc với đường thẳng IQ.

Câu V (*1,0 điểm*)

Xét bảng ô vuông kích thước $n\times n$, với n là số nguyên dương. Biết rằng bảng ô vuông đó có thể được phủ kín bởi hai loại mảnh ghép 1×1 và 8×8 sao cho không có hai mảnh ghép nào chồng lên nhau, số lượng hai loại mảnh ghép được dùng là bằng nhau và mỗi ô vuông nhỏ của các mảnh ghép chồng khít với một ô vuông nhỏ trong bảng.

1) Chứng minh n chia hết cho 5.

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của n.

--------- HẾT ---------

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHUYÊN TIN HÀ NỘI 2025

Câu I.

1) Không gian mẫu của phép thử là: $\Omega = \{(a;b) \mid a,b \in \mathbb{N}^*, 1 \le a,b \le 6\}$.

Có 6 cách chọn a và 6 cách chọn b nên số phần tử của không gian mẫu là 6.6 = 36.

Các kết quả thuận lợi cho biến cố A là:

$$(1,6),(6,1),(2,3),(3,2).$$

Suy ra $n(A)=6$. Vậy $P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

2) Đặt $a+\frac{4}{a}=b+\frac{4}{b}=t \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-ta+4=0 \\ b^2-tb+4=0 \end{cases}$.

Như vậy *a, b* là nghiệm của phương trình $x^2-tx+4=0$

Khi đó theo định lý Vi - ét thì $t=a+b=6, ab=4$.

Ta có:

$$M=\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{a^2+1}=\frac{a^3+b^3+a+b}{(a^2+1)(b^2+1)}=\frac{(a+b)^3-3ab(a+b)+(a+b)}{(ab)^2+(a+b)^2-2ab+1}$$
$$=\frac{6^3-3.4.6+6}{4^2+6^2-2.4+1}=\frac{10}{3}.$$

Câu II.

1) Ta đặt $a=x, b+2=y, c+4=z$. Khi đó

$$\frac{1}{x}+\frac{3}{y}=\frac{5}{z} \Leftrightarrow 5xy=z(3x+y)=z(x+y)+2zx.(*)$$

- Nếu *x, y* cùng lẻ thì phương trình này vô nghiệm, vì VT (*) lẻ mà VP (*) chẵn.

- Nếu *x* lẻ và *y* chẵn, đặt $y=2k$ thì $10xk=z(x+2k)+2zx \Rightarrow 2\mid z \Rightarrow 4\mid xyz$ hay $4\mid abc$.

Tương tự với *x* chẵn và *y* lẻ thì $4\mid abc$.

- Nếu *x, y* cũng chẵn thì *a, b* cũng chẵn kéo theo $4\mid abc$.

Vậy *abc* chia hết cho 4.

2) Ta có: $x(x-2y)=y^3-3y^2+2y-1 \Leftrightarrow (x-y)^2=y^3-2y^2+2y-1=(y-1)(y^2-y+1)$.

Ta chú ý: $\gcd(y-1,y^2-y+1)=1$. Nên y^2-y+1 đều là số chính phương.

Ta thấy với $y=0$ thì $x^2=-1$, vô lý.

Xét $y>0$ thì $y^2 \le y^2-y+1<(y-1)^2$. Như vậy $y^2=y^2-y+1 \Leftrightarrow y=1$.

Khi $y=1$ thì $x=y=1$.(thoả mãn)

Vậy phương trình ban đầu có nghiệm nguyên duy nhất là (1, 1).

Câu III.

1) Ta có: $P=a^2+b^2+c^2+16\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-24.$

Sử dụng bất đẳng thức *AM - GM* ta có:

$$a^2+16 \ge 8a, \frac{a^2}{16}+\frac{16}{a^2} \ge 2.$$

Do đó $a^2+\frac{16}{a^2}=\frac{15}{16}a^2+\frac{a^2}{16}+\frac{16}{a^2} \ge \frac{15}{16}(8a-16)+2 \ge \frac{15}{2}a-13.$

Vậy nên $P \ge \frac{15}{2}(a+b+c)-39-24=27.$

Như vậy $\min P=27$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=4$.

* Từ giả thiết *a, b, c* nguyên dương và $a+b+c=12$ thì ta có $1 \le a,b,c \le 10$.

Ta có:

$$(a-1)(a-10) \le 0 \Rightarrow a^2+10 \le 11a \Rightarrow a+\frac{10}{a} \le 11 \Rightarrow \frac{1}{a} \le \frac{1}{10}(11-a).$$

Và từ $a+\frac{10}{a} \le 11 \Rightarrow \frac{10}{a^2} \le \frac{11}{a}-1 \le 11.(11-a).\frac{1}{10}-1=\frac{111}{10}-\frac{11a}{10}.$

Do đó $\frac{16}{a^2} \le \frac{16}{10}\left(\frac{111}{10}-\frac{11a}{10}\right)=\frac{16.111}{100}-\frac{11.16a}{100}.$

Từ đó $a^2+\frac{16}{a^2} \le 11a-10+\frac{16.111}{100}-\frac{11.16a}{100}=\frac{231}{25}a+\frac{194}{25}.$

Như vậy $P \le \frac{231}{25}(a+b+c)+\frac{194}{25}.3-24=\frac{2754}{25}.$

Vậy $\max P=\frac{2754}{25}$.

Dấu bằng xảy ra khi một số bằng 10 và hoặc hai số còn lại bằng 1.

2) Từ giả thiết ta có:

$$\begin{aligned}&2a^2+ac+4ab+2bc=a^4-2a^2bc+b^2c^2\\&\Leftrightarrow ac+4ab+4a^2bc+1=a^4+b^2c^2+1-2a^2-2bc+2a^2bc\\&\Leftrightarrow (4ab+1)(ac+1)=(a^2+bc-1)^2.(1)\end{aligned}$$

Đặt $(4ab+1,ac+1)=d$, với d nguyên dương, từ (1) thì đặt $\begin{cases}ac+1=dm^2\\4ab+1=dn^2\end{cases}$, trong đó *m, n* là các số nguyên dương và nguyên tố cùng nhau.

Từ đó $a^2+bc-1=dmn$, khi đó

$$\begin{aligned}&d(m^2+n^2+2mn)=ac+1+4ab+1+2mnd\\&\Leftrightarrow d(m+n)^2=ac+4ab+2+2(a^2+bc-1)\\&\Leftrightarrow d(m+n)^2=2a^2+ac+4ab+2bc=(a^2-bc)^2.\end{aligned}$$

Suy ra *d* là số chính phương, như vậy $4ab+1$ là số chính phương.

Câu IV.

a) Ta có: *MN* song song với *BC* nên tứ giác *BMNC* là hình thang cân.

Chú ý *CP* là phân giác góc *ACB*, ta có biến đổi góc sau:

$\angle MCP=\angle BCP+\angle BCM=\angle ACP+\angle BAM=\angle ACP+\angle NAC=\angle AQP=\angle NQC$.

Mà $\angle PMC=\angle QNC$. Suy ra $\Delta PMC\sim\Delta CNQ(g.g)\Rightarrow\dfrac{CM}{NQ}=\dfrac{CP}{CQ}\Leftrightarrow CM.CQ=CP.NQ$.

b) Gọi giao điểm *AM, AN* với *BC* lần lượt là *J, K.*

Ta có:

$$\frac{ME}{MQ}=\frac{NK}{NQ}=\frac{NK}{NA}.\frac{NA}{NQ}=\frac{MJ}{MA}.\frac{NA}{NQ}$$

Mà $\Delta PMC\sim\Delta CNQ\Rightarrow\dfrac{MP}{CN}=\dfrac{MC}{NQ}\Leftrightarrow MP.NQ=CN.MC$.

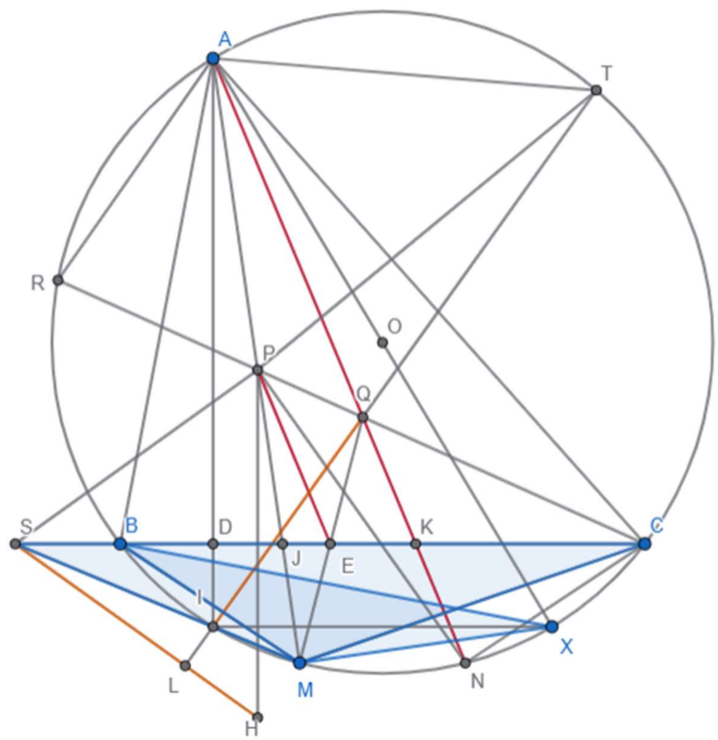
Và $\Delta MJC\sim\Delta NCA\Rightarrow\dfrac{MJ}{NC}=\dfrac{MC}{NA}\Leftrightarrow MJ.NA=CN.MC=MP.NQ$.

Suy ra $\dfrac{ME}{MQ}=\dfrac{MJ}{MA}.\dfrac{NA}{NQ}=\dfrac{MP.NQ}{MA.NQ}=\dfrac{MP}{MA}\Rightarrow PE\parallel AN$.

c) Gọi *CQ* cắt (*O*) tại *R, IQ* cắt (*O*) tại *T*, và *L* là giao của *SH* và *IQ*.

Dựng đường kính *AX* của (*O*). Ta chứng minh được *BIXC, IXNM* là hình thang cân.

Suy ra $IX\,||\,BC\,||\,MN$.



Ta có: $\Delta ATQ \sim \Delta INQ \Rightarrow \dfrac{TQ}{NQ} = \dfrac{AT}{IN} = \dfrac{AT}{MX}$.

Và $\Delta RQT \sim \Delta IQC \Rightarrow \dfrac{QC}{QT} = \dfrac{IC}{RT} = \dfrac{BX}{RT}$.

Từ đó suy ra $\dfrac{AT}{MX}.\dfrac{XB}{TR} = \dfrac{TQ}{NQ}.\dfrac{QC}{QT} = \dfrac{QC}{NQ} = \dfrac{CP}{CM}$.

Hay $\dfrac{AT}{TR}.\dfrac{XB}{XM} = \dfrac{CP}{CM}.(2)$

Ta chứng minh được

$$\Delta SMC \sim \Delta BMX \Rightarrow \frac{CS}{CM} = \frac{BX}{MX}(2)$$

Từ (1) (2) thì

$$\frac{AT}{TR}.\frac{CS}{CM} = \frac{CP}{CM} \Leftrightarrow \frac{AT}{TR} = \frac{CP}{CS} \Rightarrow \Delta TAR \sim \Delta CPS\,(c.g.c).$$

Do đó: $\angle CSP = \angle TRA = \angle TIA = \angle DIT$.

Mà H, P đối xứng nhau qua BC nên $\angle HSC = \angle CSP = \angle DIT$.

Như vậy tứ giác $SDIL$ nội tiếp suy ra $\angle SIL = 90^\circ$. Vậy IQ vuông góc SH.

Câu V. Xét bảng ô vuông kích thước $n\times n$, với n là số nguyên dương. Biết rằng bảng ô vuông đó có thể được phủ kín bởi hai loại mảnh ghép 1×1 và 8×8 sao cho không có hai mảnh ghép nào chồng lên nhau, số lượng hai loại mảnh ghép được dùng là bằng nhau và mỗi ô vuông nhỏ của các mảnh ghép chồng khít với một ô vuông nhỏ trong bảng.

1) Chứng minh n chia hết cho 5.

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của n.

HDG

1) Giả sử dùng x mảnh ghép loại 1×1 và x mảnh ghép loại 8×8 để phủ kín bảng $n\times n$.

Suy ra $n^2=x+64x=65x\Rightarrow n^2\,\vdots\,5\Rightarrow n\,\vdots\,5$.

2) $n^2=65x\Rightarrow n^2\,\vdots\,13\Rightarrow n\,\vdots\,13$. Vậy $n\,\vdots\,65$.

Đặt $n=65a\ (a\ge1)$. Khi đó số mảnh ghép mỗi loại được sử dụng là $x=\dfrac{n^2}{65}=65a^2$

Nhận xét: Nếu $n=8k+r\ (0\le r\le7)$ thì mỗi hàng và mỗi cột của bảng $n\times n$ chỉ có thể phủ bởi k mảnh ghép 8×8 nên bảng $n\times n$ chỉ có thể phủ bởi tối đa k^2 mảnh ghép 8×8.

Do đó $k^2\ge65a^2$.

Với a = 1 thì n = 65, k = 8 không thỏa mãn điều kiện trên

Với a = 2 thì n = 130, k =16 không thỏa mãn điều kiện trên

Với a = 3 thì n = 195, k =24 không thỏa mãn điều kiện trên

Với a = 4 thì n = 260, k =32 không thỏa mãn điều kiện trên

Với a = 5 thì n = 325, k =40 không thỏa mãn điều kiện trên

Với a = 6 thì n = 390, k =48 không thỏa mãn điều kiện trên

Với a = 7 thì n = 455, k =56 không thỏa mãn điều kiện trên

Với a = 8 thì n = 520, k =65 thỏa mãn $65^2>65.8^2$. Do đó $n\ge520$.

Ta chỉ ra một cách phủ bảng với n = 520.

Vì 520 = 65. 8 , ta chia bảng 520×520 thành 4225 bảng 8×8.

Sau đó dùng 4160 mảnh ghép 8×8 để phủ 4160 bảng 8×8.

Khi đó còn đúng 4160 ô vuông 1×1 sẽ được phủ bởi 4160 mảnh ghép 1×1.

Vậy *n* nhỏ nhất là 520.