

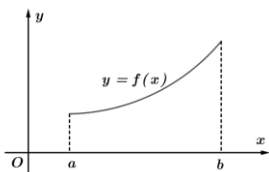
CHƯƠNG 1. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Bài 1. Tính đơn điệu và cực trị của hàm số

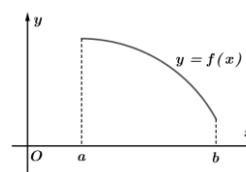
1. Tính đơn điệu của hàm số

a. Khái niệm

- Giả sử hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là K . Ta nói
 - + Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K nếu $\forall x_1; x_2 \in K: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
 - + Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K nếu $\forall x_1; x_2 \in K: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
 - + Hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên K gọi chung là đơn điệu trên K .
- Chú ý
 - + Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị đi lên từ trái sang phải.
 - + Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị đi xuống từ trái sang phải.



Hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b)$



Hàm số nghịch biến trên khoảng $(a; b)$

b. Tính đơn điệu và dấu của đạo hàm

Định lý. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K .

- Nếu $f'(x) > 0$ với $\forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K .
- Nếu $f'(x) < 0$ với $\forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K .
- Nếu $f'(x) = 0$ với $\forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ không đổi trên K .

2. Cực trị hàm số

a. Khái niệm

- **Điểm cực đại** và **điểm cực tiểu** của hàm số gọi chung là **điểm cực trị**.
- **Giá trị cực đại** và **giá trị cực tiểu** của hàm số gọi chung là **cực trị**.
- Điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị hàm số**.
- Hàm số có thể đạt cực trị tại nhiều điểm trên tập xác định của nó, hoặc có thể không có cực trị trên tập xác định đó.

b. Cách tìm cực trị của hàm số

- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ **+** sang **-** khi đi qua điểm x_0 thì hàm số đạt **cực đại** tại điểm x_0 .
- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ **-** sang **+** khi đi qua điểm x_0 thì hàm số đạt **cực tiểu** tại điểm x_0 .
- Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì $f'(x_0) = 0$.

c. Sử dụng bảng biến thiên để xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số

Bước 1. Tìm tập xác định D của hàm số.

Bước 2.

- + Tính đạo hàm $f'(x)$ của hàm số
- + Giải phương trình $f'(x) = 0$ để tìm các điểm tới hạn (là các điểm tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định)

Bước 3. Lập bảng biến thiên và xét dấu $f'(x)$.

Về đơn điệu

- + Nếu $f'(x) > 0$ với $\forall x \in (a; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$.
- + Nếu $f'(x) < 0$ với $\forall x \in (c; d)$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(c; d)$.

Về cực trị

- + Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ **+** sang **-** khi đi qua điểm x_0 thì $f(x)$ đạt **cực đại** tại điểm x_0
- + Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ **-** sang **+** khi đi qua điểm x_0 thì $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại điểm x_0
- + Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì $f'(x_0) = 0$.

Bước 4. Kết luận.

Bảng biến thiên một số hàm cơ bản

Hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>y_1</td><td></td><td>y_2</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$	$f'(x)$		+	0	-	0	+	$f(x)$	$-\infty$		y_1		y_2	$+\infty$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td></td><td>y_1</td><td></td><td>y_2</td><td>$-\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$	$f'(x)$		-	0	+	0	-	$f(x)$	$+\infty$		y_1		y_2	$-\infty$
	x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$																																				
	$f'(x)$		+	0	-	0	+																																			
	$f(x)$	$-\infty$		y_1		y_2	$+\infty$																																			
x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$																																					
$f'(x)$		-	0	+	0	-																																				
$f(x)$	$+\infty$		y_1		y_2	$-\infty$																																				
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$		$+\infty$	$f'(x)$		+		$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>-</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td></td><td>$-\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$		$+\infty$	$f'(x)$		-		$f(x)$	$+\infty$		$-\infty$																	
x	$-\infty$		$+\infty$																																							
$f'(x)$		+																																								
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$																																							
x	$-\infty$		$+\infty$																																							
$f'(x)$		-																																								
$f(x)$	$+\infty$		$-\infty$																																							

Hàm phân thức Bậc 1/Bậc 1 (hay hàm nhất biến) $y = \frac{ax + b}{cx + d}$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{d}{c}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>+</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\frac{a}{c}$</td><td></td><td>$\frac{a}{c}$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$	$f'(x)$		+	+	$f(x)$	$\frac{a}{c}$		$\frac{a}{c}$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{d}{c}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>-</td><td>-</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\frac{a}{c}$</td><td></td><td>$\frac{a}{c}$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$	$f'(x)$		-	-	$f(x)$	$\frac{a}{c}$		$\frac{a}{c}$
	x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$																						
	$f'(x)$		+	+																						
	$f(x)$	$\frac{a}{c}$		$\frac{a}{c}$																						
x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$																							
$f'(x)$		-	-																							
$f(x)$	$\frac{a}{c}$		$\frac{a}{c}$																							

Hàm phân thức Bậc 2/Bậc 1 $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>$-\frac{e}{d}$</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>y_1</td><td></td><td>y_2</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1	$-\frac{e}{d}$	x_2	$+\infty$	$f'(x)$		+	0	-	0	+	$f(x)$	$-\infty$		y_1		y_2	$+\infty$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>$-\frac{e}{d}$</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td></td><td>y_1</td><td></td><td>y_2</td><td>$-\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1	$-\frac{e}{d}$	x_2	$+\infty$	$f'(x)$		-	0	+	0	-	$f(x)$	$+\infty$		y_1		y_2	$-\infty$
	x	$-\infty$	x_1	$-\frac{e}{d}$	x_2	$+\infty$																																				
	$f'(x)$		+	0	-	0	+																																			
	$f(x)$	$-\infty$		y_1		y_2	$+\infty$																																			
x	$-\infty$	x_1	$-\frac{e}{d}$	x_2	$+\infty$																																					
$f'(x)$		-	0	+	0	-																																				
$f(x)$	$+\infty$		y_1		y_2	$-\infty$																																				
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{e}{d}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>+</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$-\frac{e}{d}$	$+\infty$	$f'(x)$		+	+	$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{e}{d}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>-</td><td>-</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td></td><td>$-\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$-\frac{e}{d}$	$+\infty$	$f'(x)$		-	-	$f(x)$	$+\infty$		$-\infty$																	
x	$-\infty$	$-\frac{e}{d}$	$+\infty$																																							
$f'(x)$		+	+																																							
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$																																							
x	$-\infty$	$-\frac{e}{d}$	$+\infty$																																							
$f'(x)$		-	-																																							
$f(x)$	$+\infty$		$-\infty$																																							

Lưu ý: Một số công thức đạo hàm nhanh và kiểm tra số cực trị của hàm số cơ bản

Hàm phân thức bậc 1 / bậc 1 dạng $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

• Đạo hàm $y' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$.

• Hàm số **không có cực trị**.

Hàm phân thức bậc 2 / bậc 1 dạng $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} = \frac{u(x)}{dx + e}$

• Đạo hàm $y' = \frac{ad.x^2 + 2ae.x + \begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix}}{(dx + e)^2} = \frac{ad.x^2 + 2ae.x + be - cd}{(dx + e)^2}$.

• Về cực trị

★ Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow a.u(-\frac{e}{d}) > 0$.

★ Hàm số **không có cực trị** $\Leftrightarrow a.u(-\frac{e}{d}) \leq 0$.

Bài 2. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

1. Định nghĩa. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D . Khi đó

- Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số, và được xác định và kí hiệu:

$$M = \max_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}$$

- Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số, và được xác định và kí hiệu:

$$m = \min_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases}$$

2. Định lí

a) Mọi hàm số liên tục trên một đoạn đều có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

b) Tính chất

- Nếu $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì $\min_{[a; b]} f(x) = f(a)$ và $\max_{[a; b]} f(x) = f(b)$.
- Nếu $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì $\min_{[a; b]} f(x) = f(b)$ và $\max_{[a; b]} f(x) = f(a)$.

3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một khoảng hoặc một đoạn

Trường hợp tổng quát (Sử dụng Bảng biến thiên)

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên một khoảng hoặc một đoạn đang xét

Bước 1. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$

Bước 2. Giải phương trình $f'(x) = 0$ để tìm các nghiệm trong khoảng hoặc đoạn đang xét

Bước 3. Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng hoặc đoạn đang xét

Bước 4. Từ bảng biến thiên ta suy ra min và max của hàm số trên khoảng hoặc đoạn đó.

Trường hợp đặc biệt: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$

Bước 1. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$

Bước 2. Giải phương trình $f'(x) = 0$ để tìm các nghiệm x_i trong $[a; b]$

Bước 3. Tính $f(a)$, $f(b)$, $f(x_i)$.

Bước 4. So sánh các giá trị vừa tìm được $\begin{cases} A = \max_{[a; b]} f(x) \\ a = \min_{[a; b]} f(x) \end{cases}$.

Bài 3. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số

1. Định nghĩa

- Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C)
 - + Đường thẳng $x = a$ là **tiệm cận đứng** của (C), nếu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.
 - + Đường thẳng $y = b$ là **tiệm cận ngang** của (C), nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$.
 - + Đường thẳng $y = ax + b$, với $a \neq 0$ là **tiệm cận xiên** của (C), nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.
- Chú ý
 - + Đồ thị $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ có đường tiệm cận đứng là $x = -\frac{d}{c}$ và đường tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c}$.
 - + Đồ thị $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ có đường tiệm cận đứng $x = -\frac{e}{d}$, đường tiệm cận xiên $y = \frac{a}{d}x - (ae - bd)$.

2. Dấu hiệu nhận biết đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{u(x)}{v(x)}$

a. Tiệm cận đứng

Bước 1. Giải phương trình $v(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Bước 2. Nếu $\begin{cases} u(x_k) \neq 0 \\ v(x_k) = 0 \end{cases}$, với $k = \overline{1, n}$ thì $\lim_{x \rightarrow x_k} \frac{u(x)}{v(x)} = \infty \Rightarrow x = x_k$ là một đường tiệm cận đứng.

Chú ý: Nếu ở Bước 1 phương trình $v(x) = 0$ vô nghiệm thì đồ thị không có tiệm cận đứng.

b. Tiệm cận ngang

Bước 1. Dấu hiệu nhận biết

- ★ Tập xác định chứa ∞
- ★ Bậc $u(x) \leq$ Bậc $v(x)$

Bước 2. Xét giới hạn $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{v(x)} = b \Rightarrow y = b$ là một đường tiệm cận ngang.

c. Tiệm cận xiên

Bước 1. Dấu hiệu nhận biết

- ★ Tập xác định chứa ∞ .
- ★ Bậc $u(x) \leq$ Bậc $v(x) + 1$

Bước 2. Tìm tiệm cận dạng $y = ax + b$

Cách 1. Phương pháp tổng quát, tìm tiệm cận xiên dạng $y = ax + b$

- ★ Tìm hệ số $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.
- ★ Tìm hệ số $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$.

Cách 2. Phương pháp chia đa thức (chỉ sử dụng cho hàm phân thức hữu tỉ)

- ★ Thực hiện phép chia Tử cho Mẫu, ta được $y = \frac{u(x)}{v(x)} = ax + b + \frac{w(x)}{v(x)}$,
với bậc $w(x) <$ Bậc $v(x)$
- ★ Tiệm cận xiên là phần dư của phép chia trên, tức là $y = ax + b$.

Lưu ý: Đồ thị $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ có đường tiệm cận xiên $y = \frac{a}{d}x - \left| \frac{a}{d} \quad \frac{b}{e} \right| = \frac{a}{d}x - (ae - bd)$.

Bài 4. Đồ thị và tương giao

1. Khảo sát hàm số bậc ba, dạng $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

Bước 1. Tìm tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Bước 2. Xét sự biến thiên của hàm số

- Tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số
- Tìm các giới hạn của hàm số tại ∞ .
- Tìm tọa độ tâm đối xứng của đồ thị.

Bước 3. Bảng biến thiên và đồ thị minh họa

Số cực trị	Bảng biến thiên	Đồ thị																		
2	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$</td><td>y_1</td><td></td><td>y_2</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$	$f'(x)$	+	0	-	0	+	$f(x)$	$-\infty$	y_1		y_2	$+\infty$	
	x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$														
$f'(x)$	+	0	-	0	+															
$f(x)$	$-\infty$	y_1		y_2	$+\infty$															
	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td>y_1</td><td></td><td>y_2</td><td>$-\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$	$f'(x)$	-	0	+	0	-	$f(x)$	$+\infty$	y_1		y_2	$-\infty$	
x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$															
$f'(x)$	-	0	+	0	-															
$f(x)$	$+\infty$	y_1		y_2	$-\infty$															
0	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$		$+\infty$	$f'(x)$		+		$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$							
	x	$-\infty$		$+\infty$																
$f'(x)$		+																		
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$																	
	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>-</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td></td><td>$-\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$		$+\infty$	$f'(x)$		-		$f(x)$	$+\infty$		$-\infty$							
x	$-\infty$		$+\infty$																	
$f'(x)$		-																		
$f(x)$	$+\infty$		$-\infty$																	

Vũ Văn Dự

Lưu ý

★ Đơn điệu

- + Nếu $f'(x) > 0$ với $\forall x \in (a; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$.
- + Nếu $f'(x) < 0$ với $\forall x \in (c; d)$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(c; d)$.

★ Cực trị

- + Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ + sang - khi đi qua điểm x_0 thì $f(x)$ đạt **cực đại** tại điểm x_0 .
- + Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ - sang + khi đi qua điểm x_0 thì $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại điểm x_0 .
- + Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì $f'(x_0) = 0$.

★ Tâm đối xứng của đồ thị là tọa độ của điểm uốn

Hoành độ tâm đối xứng là nghiệm của phương trình $f''(x) = 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$.

2. Khảo sát hàm số phân thức bậc 1 / bậc 1, dạng $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad-bc \neq 0$)

Bước 1. Tìm tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$.

Bước 2. Xét sự biến thiên của hàm số

– Tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số

+ Đạo hàm $f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

★ Nếu $ad-bc > 0$ thì hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.

★ Nếu $ad-bc < 0$ thì hàm số luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định.

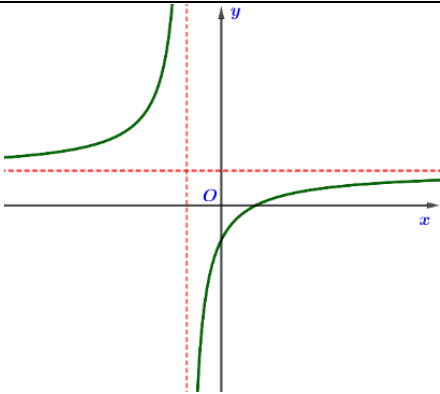
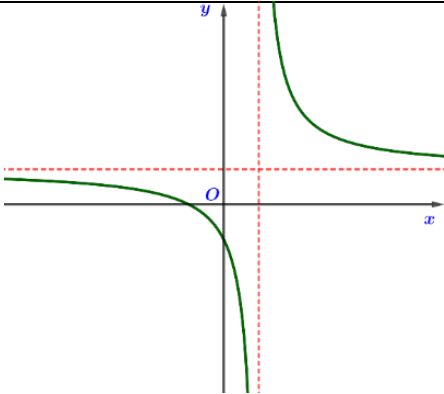
+ Hàm phân thức bậc 1 / bậc 1 **không có cực trị**.

– Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số

★ Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{d}{c}$

★ Tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{a}{c}$

Bước 3. Bảng biến thiên và hình dạng đồ thị

$ad - bc > 0$ Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định	$ad - bc < 0$ Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định																								
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{d}{c}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td><td></td><td>$+$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\frac{a}{c}$</td><td>$+\infty$</td><td>$\frac{a}{c}$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$	$f'(x)$	$+$		$+$	$f(x)$	$\frac{a}{c}$	$+\infty$	$\frac{a}{c}$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{d}{c}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$-$</td><td></td><td>$-$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\frac{a}{c}$</td><td>$+\infty$</td><td>$\frac{a}{c}$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$	$f'(x)$	$-$		$-$	$f(x)$	$\frac{a}{c}$	$+\infty$	$\frac{a}{c}$
x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$																						
$f'(x)$	$+$		$+$																						
$f(x)$	$\frac{a}{c}$	$+\infty$	$\frac{a}{c}$																						
x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$																						
$f'(x)$	$-$		$-$																						
$f(x)$	$\frac{a}{c}$	$+\infty$	$\frac{a}{c}$																						
																									

Lưu ý

– Tâm đối xứng $I(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c})$ là giao điểm của hai đường tiệm cận

– Trục đối xứng là hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận ngang, có dạng

$$\left| x + \frac{d}{c} \right| = \left| y - \frac{a}{c} \right|.$$

3. Khảo sát hàm phân thức bậc 2 / bậc 1, dạng $y = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$

Bước 1. Tìm tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{e}{d} \right\}$.

Bước 2. Xét sự biến thiên của hàm số

- Tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số
- Tìm hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số

Bước 3. Bảng biến thiên và đồ thị minh họa

	Bảng biến thiên	Đồ thị																		
$ad > 0$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>$-\frac{e}{d}$</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>y_1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1	$-\frac{e}{d}$	x_2	$+\infty$	$f'(x)$		+	0	-		$f(x)$	$-\infty$		y_1		$+\infty$	
	x	$-\infty$	x_1	$-\frac{e}{d}$	x_2	$+\infty$														
$f'(x)$		+	0	-																
$f(x)$	$-\infty$		y_1		$+\infty$															
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{e}{d}$</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>+</td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$+\infty$</td><td></td></tr></table>	x	$-\infty$	$-\frac{e}{d}$	x_2	$+\infty$	$f'(x)$		+	+		$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$						
x	$-\infty$	$-\frac{e}{d}$	x_2	$+\infty$																
$f'(x)$		+	+																	
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$																	
$ad < 0$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>$-\frac{e}{d}$</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td></td><td>y_1</td><td></td><td>$-\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1	$-\frac{e}{d}$	x_2	$+\infty$	$f'(x)$		-	0	+		$f(x)$	$+\infty$		y_1		$-\infty$	
	x	$-\infty$	x_1	$-\frac{e}{d}$	x_2	$+\infty$														
$f'(x)$		-	0	+																
$f(x)$	$+\infty$		y_1		$-\infty$															
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{e}{d}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>-</td><td>-</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td></td><td>$-\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$-\frac{e}{d}$	$+\infty$	$f'(x)$		-	-	$f(x)$	$+\infty$		$-\infty$								
x	$-\infty$	$-\frac{e}{d}$	$+\infty$																	
$f'(x)$		-	-																	
$f(x)$	$+\infty$		$-\infty$																	

Vũ Văn Dự

Lưu ý: Các kiểm tra nhanh: đạo hàm, cực trị và tiệm cận của hàm số dạng $y = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$

– Đạo hàm $y' = \frac{ad.x^2 + 2ae.x + \begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix}}{(dx + e)^2} = \frac{ad.x^2 + 2ae.x + (be - cd)}{(dx + e)^2}$.

– Cực trị

+ Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow a.u(-\frac{e}{d}) > 0$.

+ Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow a.u(-\frac{e}{d}) \leq 0$.

+ Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có dạng: $y = \frac{(ax^2 + bx + c)'}{(dx + e)'} = \frac{2ax + b}{d}$.

– **Tìm tiệm cận** của đồ thị hàm số

+ Đồ thị có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{e}{d}$.

+ Đồ thị có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = \frac{a}{d}x - \left| \frac{a}{d} \frac{b}{e} \right| = \frac{a}{d}x - (ae - bd)$.

– **Tâm đối xứng** của đồ thị là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Tức là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x = -\frac{e}{d} \\ y = \frac{a}{d}x - (ae - bd) \end{cases}$$

– **Trục đối xứng** là hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận xiên, có dạng

$$\left| x + \frac{e}{d} \right| \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{d} \right)^2 + 1} = \left| \frac{a}{d}x - y - (ae - bd) \right|.$$

4. Xác định dấu các hệ số trong các hàm số

a) **Xác định dấu các hệ số a, b, c, d của hàm bậc ba** $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

– **Dấu của hệ số a** (Dựa vào hình dáng đồ thị hoặc bảng biến thiên)

+ Nếu nhánh đồ thị ngoài cùng, bên phải **đi lên** thì $a > 0$. Tức là $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow a > 0$.

+ Nếu nhánh đồ thị ngoài cùng, bên phải **đi xuống** thì $a < 0$. Tức là $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow a < 0$.

– **Dấu của hệ số b** (Dựa vào vị trí điểm uốn)

+ Hoành độ điểm uốn $x_{\text{uốn}} = -\frac{b}{3a}$.

+ Điểm uốn là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị nên $x_{\text{uốn}} = \frac{x_{\text{CD}} + x_{\text{CT}}}{2}$.

+ Nếu điểm uốn ở bên phải trục tung Oy thì a và b trái dấu. Tức là nếu $x_{\text{uốn}} > 0 \Rightarrow ab < 0$.

+ Nếu điểm uốn ở bên trái trục tung Oy thì a và b cùng dấu. Tức là nếu $x_{\text{uốn}} < 0 \Rightarrow ab > 0$.

– **Dấu của hệ số c** (Dựa vào vị trí các điểm cực trị)

+ Nếu hàm số có hai điểm cực trị trái dấu thì a và c trái dấu.

+ Nếu hàm số có hai điểm cực trị cùng dấu thì a và c cùng dấu.

– **Dấu của hệ số d** (Dựa vào giao điểm của đồ thị với trục tung Oy là $M(0; d)$).

+ Nếu M nằm phía trên trục hoành Ox thì $d > 0$.

+ Nếu M nằm phía dưới trục hoành Ox thì $d < 0$.

+ Nếu đồ thị đi qua gốc tọa độ thì $d = 0$.

b) **Xác định dấu các hệ số a, b, c, d của hàm nhất biến** $y = f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$)

– **Dựa vào đường tiệm cận đứng của đồ thị là** $x = -\frac{d}{c}$

+ Nếu tiệm cận đứng nằm bên phải trục tung Oy thì $-\frac{d}{c} > 0 \Leftrightarrow cd < 0$.

+ Nếu tiệm cận đứng nằm bên trái trục tung Oy thì $-\frac{d}{c} < 0 \Leftrightarrow cd > 0$.

+ Nếu tiệm cận đứng là trục tung Oy thì $-\frac{d}{c} = 0 \Leftrightarrow d = 0$.

- Dựa vào đường tiệm cận ngang của đồ thị là $y = \frac{a}{c}$

- + Nếu tiệm cận ngang nằm bên trên trục hoành Ox thì $\frac{a}{c} > 0 \Leftrightarrow ac > 0$.
- + Nếu tiệm cận ngang nằm bên dưới trục hoành Ox thì $\frac{a}{c} < 0 \Leftrightarrow ac < 0$.
- + Nếu tiệm cận ngang là trục hoành Ox thì $\frac{a}{c} = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

- Dựa vào giao điểm của đồ thị với trục tung là $M(0; \frac{b}{d})$

- + Điểm M nằm phía trên trục hoành Ox thì $\frac{b}{d} > 0 \Leftrightarrow bd > 0$.
- + Điểm M nằm phía dưới trục hoành Ox thì $\frac{b}{d} < 0 \Leftrightarrow bd < 0$.
- + Điểm M thuộc trục hoành Ox thì $\frac{b}{d} = 0 \Leftrightarrow b = 0$.

c) Xác định dấu các hệ số a, b, c, d, e của hàm phân thức bậc 2 / bậc 1, dạng $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$

- Dựa vào đường tiệm cận đứng của đồ thị là $x = -\frac{e}{d}$

- + Nếu tiệm cận đứng nằm bên phải trục tung Oy thì $-\frac{e}{d} > 0 \Leftrightarrow ed < 0$.
- + Nếu tiệm cận đứng nằm bên trái trục tung Oy thì $-\frac{e}{d} < 0 \Leftrightarrow ed > 0$.
- + Nếu tiệm cận đứng là trục tung Oy thì $-\frac{e}{d} = 0 \Leftrightarrow e = 0$.

- Dựa vào giao điểm của đồ thị với trục tung là $M(0; \frac{c}{e})$ (nếu có)

- + Điểm M nằm ở phần dương của trục Oy thì $\frac{c}{e} > 0 \Leftrightarrow ce > 0$.
- + Điểm M nằm ở phần âm của trục Oy thì $\frac{c}{e} < 0 \Leftrightarrow ce < 0$.
- + Điểm M trùng với gốc tọa độ thì $\frac{c}{e} = 0 \Leftrightarrow c = 0$.

- Dựa vào vị trí các điểm cực trị của đồ thị hàm số

- + Đồ thị có một điểm cực trị nằm trên trục Oy thì $\begin{cases} be = cd \\ b = c = 0 \end{cases}$
- + Đồ thị có một điểm cực trị nằm ở phần dương trục Oy thì $bc^2 > 2ad$
- + Đồ thị có một điểm cực trị nằm ở phần âm trục Oy thì $bc^2 < 2ad$
- + Đồ thị có hai điểm cực trị trái dấu thì $ad(be - cd) < 0$
- + Đồ thị có hai điểm cực trị trái dấu thì $ad(be - cd) > 0$

- Dựa vào giới hạn tại ∞

- + Nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ thì $ad > 0$
- + Nếu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ thì $ad < 0$.

5. Phân biệt hình dạng của hàm $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với trường hợp không có cực trị của hàm $y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$

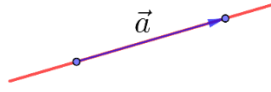
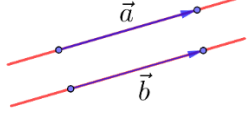
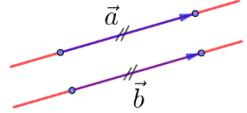
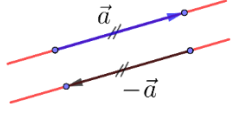
	Hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$	Hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$																																																			
Bảng biến thiên	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{d}{c}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td colspan="3">+</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\frac{a}{c}$</td><td>$+\infty$</td><td>$\frac{a}{c}$</td></tr></table> <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{d}{c}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td colspan="3">-</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\frac{a}{c}$</td><td>$-\infty$</td><td>$\frac{a}{c}$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$	$f'(x)$	+			$f(x)$	$\frac{a}{c}$	$+\infty$	$\frac{a}{c}$	x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$	$f'(x)$	-			$f(x)$	$\frac{a}{c}$	$-\infty$	$\frac{a}{c}$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{e}{d}$</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td colspan="4">+</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr></table> <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{e}{d}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td colspan="3">-</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$-\frac{e}{d}$	x_2	$+\infty$	$f'(x)$	+				$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	x	$-\infty$	$-\frac{e}{d}$	$+\infty$	$f'(x)$	-			$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$																																																		
$f'(x)$	+																																																				
$f(x)$	$\frac{a}{c}$	$+\infty$	$\frac{a}{c}$																																																		
x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$																																																		
$f'(x)$	-																																																				
$f(x)$	$\frac{a}{c}$	$-\infty$	$\frac{a}{c}$																																																		
x	$-\infty$	$-\frac{e}{d}$	x_2	$+\infty$																																																	
$f'(x)$	+																																																				
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$																																																	
x	$-\infty$	$-\frac{e}{d}$	$+\infty$																																																		
$f'(x)$	-																																																				
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$																																																		
Đồ thị			VỮ VẠN DỤ																																																		

VŨ VĂN DỰ

CHƯƠNG 2. VÉCTƠ VÀ HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1. Véctơ và các phép toán véctơ trong không gian

1. Khái niệm véctơ trong không gian

- Véctơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.	
- Độ dài của véctơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của véctơ. Kí hiệu: $ \vec{a} $.	
- Giá của véctơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của véctơ đó.	
- Hai véctơ cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.	
- Hai véctơ bằng nhau nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng. Nếu hai véctơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng nhau thì ta viết là $\vec{a} = \vec{b}$.	
- Hai véctơ đối nhau nếu chúng có cùng độ dài và ngược hướng. Véctơ đối của $\vec{a}$ được kí hiệu là $-\vec{a}$.	
- Véctơ - không có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\vec{0}$. Quy ước véctơ - không có độ dài bằng 0 và cùng phương, cùng hướng với mọi véctơ.	

- Chú ý

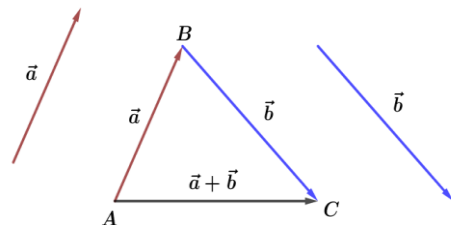
- + Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ véctơ có điểm đầu A, điểm cuối B.
- + Nếu không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối thì véctơ còn được kí hiệu là $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$

2. Các phép toán véctơ trong không gian

a. Tổng của hai véctơ trong không gian

Trong không gian, cho hai véctơ $\vec{a}, \vec{b}$.

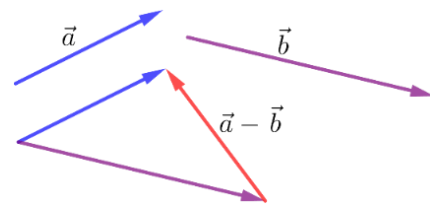
- Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$.
- Véctơ $\overrightarrow{AC}$ là tổng của hai véctơ $\vec{a}, \vec{b}$.
- Kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.
- Phép lấy tổng của hai véctơ còn gọi là phép cộng véctơ.



b. Hiệu của hai véctơ trong không gian

Trong không gian, cho hai véctơ $\vec{a}, \vec{b}$.

- Hiệu của hai véctơ $\vec{a}, \vec{b}$ là véctơ $\vec{a} + (-\vec{b})$.
- Kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$.
- Phép lấy hiệu của hai véctơ còn gọi là phép trừ véctơ.



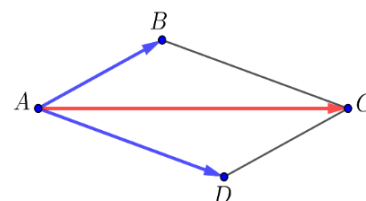
c. Các quy tắc

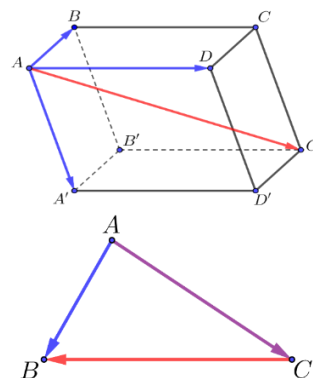
Quy tắc ba điểm:

Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Quy tắc hình bình hành:

- ★ Nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
- ★ Nếu AM là trung tuyến của $\triangle ABD$ thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AM}$





Quy tắc hình hộp:

Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

Quy tắc hiệu: Với ba điểm A, B, C bất kì

★ Chung gốc: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

★ Chung ngọn: $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$.

3. Tích của một số với một vectơ

– Cho số thực $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$.

+ Tích của số k và $\vec{a}$ là một vectơ.

+ Kí hiệu là $k.\vec{a}$.

+ Phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là phép nhân một số với một vectơ.

★ $k.\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$;

★ $k.\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$.

★ Độ dài của $k.\vec{a}$ bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

– Qui ước: $0.\vec{a} = \vec{0}$ và $k.\vec{0} = \vec{0}$.

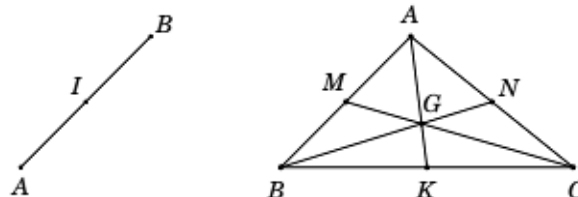
– Tính chất

+ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương với nhau nếu tồn tại số k sao cho $\vec{a} = k.\vec{b}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$.

+ Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số $k \neq 0$ để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

+ Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$; $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; ...

+ Nếu G là trọng tâm của ΔABC thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$; $\overrightarrow{GA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$; $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GK}$; ...



VŨ VĂN DỰ

4. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

– **Góc giữa hai vectơ:** Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$.

+ Lấy một điểm A bất kì, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

+ Góc BAC gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

+ Kí hiệu $(\vec{u}; \vec{v})$.

– **Tích vô hướng của hai vectơ:**

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$.

+ Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số. Kí hiệu $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

+ Xác định bởi công thức: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

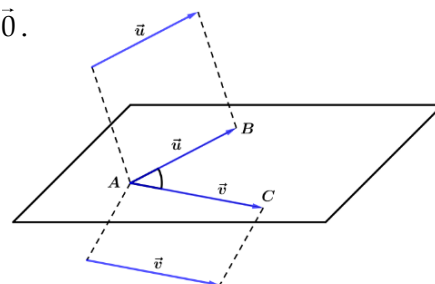
– **Nhận xét:**

+ $0^\circ \leq (\vec{u}; \vec{v}) \leq 180^\circ$

+ Nếu $(\vec{u}; \vec{v}) = 0^\circ$ thì $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng.

+ Nếu $(\vec{u}; \vec{v}) = 180^\circ$ thì $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ngược hướng.

+ Nếu $(\vec{u}; \vec{v}) = 90^\circ$ thì $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{u} \perp \vec{v}$.



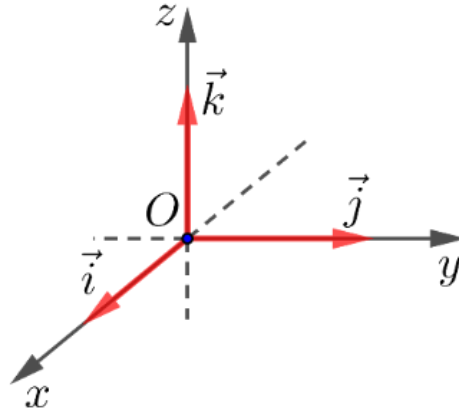
5. Công thức tính độ lớn của hợp lực trong không gian

– Giả sử có ba lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ cùng tác dụng lên một điểm và $(\vec{F}_1; \vec{F}_2) = \alpha$, $(\vec{F}_2; \vec{F}_3) = \beta$, $(\vec{F}_3; \vec{F}_1) = \varphi$. Khi đó độ lớn hợp lực $\vec{F}$ được tính bằng công thức: $F^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 - 2(F_1 F_2 \cos \alpha + F_2 F_3 \cos \beta + F_3 F_1 \cos \varphi)$.

– Nếu $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ đôi một vuông góc với nhau thì $F^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$.

Bài 2. Tọa độ của vectơ trong không gian

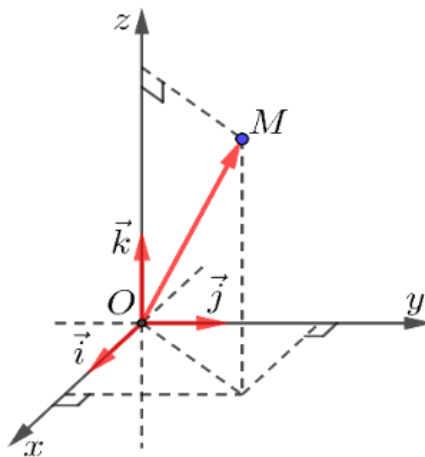
1. Hệ trục tọa độ trong không gian



Hệ trục tọa độ vuông góc trong không gian (hay hệ trục tọa độ $Oxyz$) gồm ba trục Ox , Oy , Oz vuông góc với nhau từng đôi một tại điểm O .

- + Điểm O gọi là gốc tọa độ.
- + Gọi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ là ba vectơ đơn vị trên ba trục Ox , Oy , Oz .
- + Ox , Oy , Oz lần lượt gọi là trục hoành, trục tung, trục cao.
- + (Oxy) , (Oxz) , (Oyz) gọi là các mặt phẳng tọa độ.

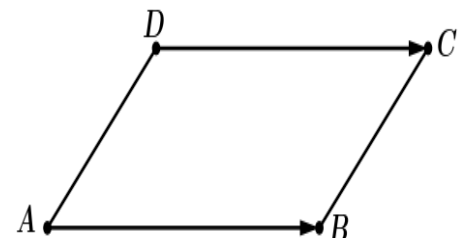
2. Tọa độ của điểm và của vectơ



- **Tọa độ của vectơ:** Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}$.
 - + Nếu $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ thì bộ ba số $(x; y; z)$ gọi là tọa độ của $\vec{u}$ và ta viết $\vec{u} = (x; y; z)$.
 - + Qui ước: $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$.
- **Tọa độ của điểm:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M .
 - + Nếu $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ thì bộ ba số $(x; y; z)$ gọi là tọa độ của điểm M và ta viết $M(x; y; z)$.
 - + Các giá trị x , y , z lần lượt gọi là hoành độ, tung độ, cao độ của điểm M .
- **Nhận xét**
 - + Tọa độ của điểm M cũng là tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$, tức là $M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$.
 - + Tọa độ của gốc $O(0; 0; 0)$.

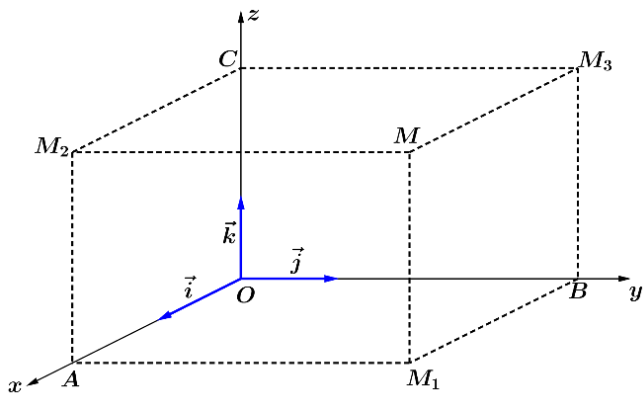
- + Cho $\vec{u} = (x; y; z)$ và $\vec{v} = (x'; y'; z')$. Khi đó $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$.

- + Tứ giác $ABCD$ là hình hình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.



+ Nếu $M(x;y;z)$ và $N(x';y';z')$ thì $\overrightarrow{MN} = N - M = (x' - x; y' - y; z' - z)$.

3. Các phép biến đổi quan trọng

HÌNH CHIẾU: “CHIẾU” đồng âm với “THIẾU” → thiếu đại lượng nào thì cho đại lượng đó bằng 0	
Hình chiếu của điểm $M(x, y, z)$ ◇ lên trục Ox là điểm $A(x, 0, 0)$ ◇ lên trục Oy là điểm $B(0, y, 0)$ ◇ lên trục Oz là điểm $C(0, 0, z)$ ◇ lên mặt phẳng (Oxy) là điểm $M_1(x, y, 0)$ ◇ lên mặt phẳng (Oxz) là điểm $M_2(x, 0, z)$ ◇ lên mặt phẳng (Oyz) là điểm $M_3(0, y, z)$	
KHOẢNG CÁCH Thiếu đại lượng nào tính theo đại lượng đó	ĐỐI XỨNG: “ĐỐI” đồng âm với “ĐÔI” → thiếu đại lượng nào thì đổi dấu đại lượng đó
Khoảng cách từ điểm $M(x, y, z)$ ◇ đến trục Ox có độ dài $d_1 = \sqrt{y^2 + z^2}$ ◇ đến trục Oy có độ dài $d_2 = \sqrt{x^2 + z^2}$ ◇ đến trục Oz có độ dài $d_3 = \sqrt{x^2 + y^2}$ ◇ đến (Oxy) có độ dài $d_4 = \sqrt{z^2} = z$ ◇ đến (Oxz) có độ dài $d_5 = \sqrt{y^2} = y$ ◇ đến (Oyz) có độ dài $d_6 = \sqrt{x^2} = x$	Điểm đối xứng của điểm $M(x, y, z)$ ◇ qua trục Ox là điểm $X(x, -y, -z)$ ◇ qua trục Oy là điểm $Y(-x, y, -z)$ ◇ qua trục Oz là điểm $Z(-x, -y, z)$ ◇ qua mặt phẳng (Oxy) là điểm $X'(x, y, -z)$ ◇ qua mặt phẳng (Oxz) là điểm $Y'(x, -y, z)$ ◇ qua mặt phẳng (Oyz) là điểm $Z'(-x, y, z)$

VŨ VĂN DỰ

CHƯƠNG 3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU GHEP NHÓM**Bài 1. Khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm****1. Khoảng biến thiên**

- Cho mẫu số liệu ghép nhóm

Nhóm	$[a_1; a_2)$	$[a_2; a_3)$	...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

Khi đó khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là $R = a_{k+1} - a_1$.

- Chú ý
 - + Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm luôn lớn hơn hoặc bằng khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.
 - + Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu.

2. Khoảng tứ phân vị

- Cho mẫu số liệu ghép nhóm

Nhóm	$[a_1; a_2)$	$[a_2; a_3)$	...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	...	n_k
Tần số tích lũy	n_1	$n_1 + n_2$		$n_1 + n_2 + \dots + n_k$

- + Tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là Q_1 , Q_2 và Q_3 .
- + Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu và xác định là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$.
- + Để tìm Q_k , với $k = 1, 2, 3$ ta làm theo các bước sau

Bước 1: Tìm cỡ mẫu $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Bước 2:

- Tìm nhóm đầu tiên có tần số tích lũy, lớn hơn hoặc bằng $T_k = k \cdot \frac{n}{4}$, với $k = 1, 2, 3$.

Giả sử nhóm đó là $[a_m; a_{m+1})$, với $1 \leq m \leq k$.

- Tìm đầu mút bên trái của nhóm $[a_m; a_{m+1})$ là: a_m .
- Tìm độ dài của nhóm $[a_m; a_{m+1})$ là: $L = a_{m+1} - a_m$.
- Tìm tần số của nhóm $[a_m; a_{m+1})$ là: n_m .
- Tìm tần số tích lũy của nhóm $[a_{m-1}; a_m)$ là: f_{m-1} .

Bước 3: Tứ phân vị Q_k , với $k = 1, 2, 3$ được tính theo công thức $Q_k = a_m + (k \cdot \frac{n}{4} - f_{m-1}) \cdot \frac{L}{n_m}$.

- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của nửa giữa của mẫu số liệu (tập hợp gồm 50% số liệu nằm chính giữa mẫu số liệu).
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm càng nhỏ thì dữ liệu càng tập trung xung quanh trung vị.
- Khoảng tứ phân vị được dùng để xác định giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu. Giá trị x của mẫu số liệu là ngoại lệ, nếu: $x > Q_3 + 1,5 \cdot \Delta Q$ hoặc $x < Q_1 - 1,5 \cdot \Delta Q$.

Bài 2. Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm

1. Định nghĩa

- Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi bảng sau:

Nhóm $[a; b)$	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	...	$[u_k; u_{k+1})$
Giá trị đại diện $c = \frac{a+b}{2}$	c_1	c_2	...	c_k
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

- Phương sai** của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu S^2 , được tính bởi công thức:

$$S^2 = \frac{1}{n} [n_1(c_1 - \bar{x})^2 + n_2(c_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(c_k - \bar{x})^2]$$

- Độ lệch chuẩn** của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là S , và được tính $S = \sqrt{S^2}$.

Trong đó

- $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ là cỡ mẫu.
- $\bar{x} = \frac{n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_k c_k}{n}$ là số trung bình.

- Chú ý

- Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm có thể được tính theo công thức sau:

$$S^2 = \frac{n_1 c_1^2 + n_2 c_2^2 + \dots + n_k c_k^2}{n} - \bar{x}^2$$

- Trong thống kê, người ta còn dùng đại lượng sau để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm

$$\hat{s}^2 = \frac{n_1(c_1 - \bar{x})^2 + n_2(c_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(c_k - \bar{x})^2}{n-1}$$

2. Ý nghĩa của phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm

- Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho phương sai của mẫu số liệu gốc. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm cũng là giá trị xấp xỉ cho độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc. Chúng được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm. Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì dữ liệu càng phân tán.
- Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với đơn vị của mẫu số liệu.

CHƯƠNG 4. NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN

Bài 1. Nguyên hàm

1. Định nghĩa. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K .

- Hàm số $F(x)$ gọi là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với $x \in K$.
- Với mỗi hằng số C thì $F(x) + C$ cũng là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ xác định trên K .
- Họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K ký hiệu và xác định là $\int f(x)dx = F(x) + C$.
- Biểu thức $f(x)dx$ gọi là vi phân của $F(x)$, kí hiệu $dF(x)$. Như vậy $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$.

2. Tính chất của nguyên hàm

- ★ $\int k.f(x)dx = k \int f(x)dx$ với k là hằng số khác 0.
- ★ $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

3. Nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp

a. Nguyên hàm của hàm số lũy thừa

★ Nhắc lại tính chất của hàm số lũy thừa

- Đạo hàm: $(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- Tính chất: $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$; $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, với $x > 0$.

★ Nguyên hàm của hàm số lũy thừa: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

★ Hệ quả: $\int 0dx = C$; $\int dx = x + C$; $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$; $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

b. Nguyên hàm của hàm số lượng giác

★ Công thức biến đổi lượng giác thường dùng

Hằng đẳng thức	① $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ③ $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, $\alpha \neq k\pi$	② $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ④ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$, $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$
Công thức cộng	① $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ ② $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ ③ $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ ④ $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	⑤ $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ ⑥ $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$
Nhân đôi	① $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ③ $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$	② $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ $= 2 \cos^2 \alpha - 1$ $= 1 - 2 \sin^2 \alpha$
Hạ bậc	① $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ ② $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$	③ $\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
Tích thành tổng	① $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$ ③ $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$	② $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$ ④ $\cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$

★ Nguyên hàm của hàm số lượng giác

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

c. Nguyên hàm của hàm số mũ

★ Công thức biến đổi thường dùng:

Cho $a, b > 0$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}; \quad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}; \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}; \quad (ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}.$$

★ Nguyên hàm của hàm số mũ:

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \text{ với } 0 < a \neq 1.$$

Bài 2. Tích phân

1. Định nghĩa

– Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ thì $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$. Kí hiệu: $\int_a^b f(x) dx$.

– Công thức Newton - Leibnitz: $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Trong đó: $\int_a^b$ gọi là dấu tích phân; a là cận dưới; b là cận trên; $f(x)dx$ biểu thức dưới dấu tích phân.

– Giá trị của tích phân không phụ thuộc biến số, tức là $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots = F(b) - F(a)$.

– Bảng so sánh nguyên hàm và tích phân hàm sơ cấp tương ứng

	Nguyên hàm	Tích phân
Hàm số lũy thừa	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big _a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$
	$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$	$\int_a^b \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} \Big _a^b = \sqrt{b} - \sqrt{a}$
	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln x \Big _a^b = \ln b - \ln a $
Hàm số lượng giác	$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int_a^b \cos x dx = \sin x \Big _a^b = \sin b - \sin a$
	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int_a^b \sin x dx = -\cos x \Big _a^b = -\cos b + \cos a$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int_a^b \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x \Big _a^b = \tan b - \tan a$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int_a^b \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x \Big _a^b = -\cot b + \cot a$
Hàm số mũ	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int_a^b e^x dx = e^x \Big _a^b = e^b - e^a$
	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int_\alpha^\beta a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \Big _\alpha^\beta = \frac{a^\beta - a^\alpha}{\ln a}$

2. Tính chất

$$\star \int_a^a f(x)dx = 0.$$

$$\star \int_a^b k.f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx. \text{ Với } k = \text{const}.$$

$$\star \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$

$$\star \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

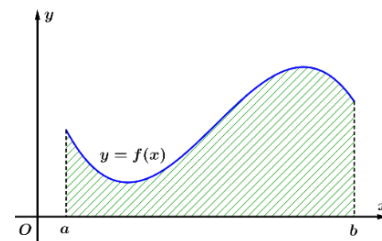
$$\star \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

$$\star \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \text{ với } a < c < b.$$

3. Ý nghĩa của tích phân

a. Ý nghĩa hình học

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a; b]$ thì $\int_a^b |f(x)|dx$ là diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$.

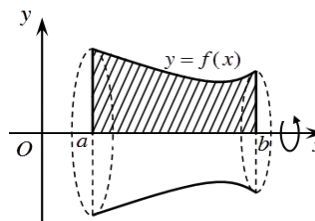
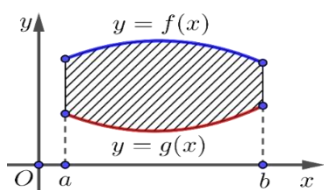


b. Ý nghĩa cơ học

Cho một vật chuyển động với vận tốc $v = v(t)$ thì $\int_a^b |v(t)|dt$ là quãng đường mà vật di chuyển được từ thời điểm $t = a$ đến thời điểm $t = b$. Giả sử v tính theo m/s và a, b tính theo giây.

Bài 3. Ứng dụng của tích phân

1. Diện tích hình phẳng và thể tích khối tròn xoay



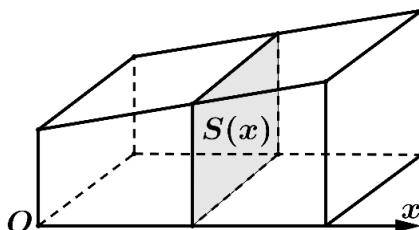
Vũ Văn Dự

Hình phẳng (H) giới hạn bởi: $\begin{cases} (C_1): y = f(x) \\ (C_2): y = g(x) \\ x = a, x = b \end{cases}$. Khi đó

• Diện tích hình phẳng (H) được xác định bởi công thức $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$.

• Thể tích khối tròn xoay khi quay quanh trục Ox là $V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)|dx$.

2. Thể tích vật thể



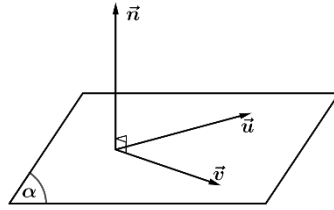
Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b , $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x , ($a \leq x \leq b$). Giả sử $S(x)$

là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định bởi $V = \int_a^b S(x)dx$.

CHƯƠNG 5. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG, ĐƯỜNG THẲNG, MẶT CẦU TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1. Phương trình mặt phẳng

1. Vectơ pháp tuyến (VTPT) và cặp vectơ chỉ phương (VTCP) của mặt phẳng



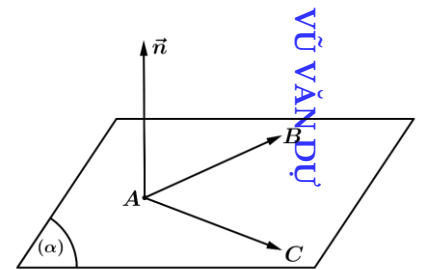
- Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ là vectơ pháp tuyến (VTPT) của mặt phẳng (α) nếu vectơ $\vec{n}$ có giá vuông góc với (α)
- Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ là vectơ chỉ phương (VTCP) của mặt phẳng (α) nếu vectơ $\vec{u}$ có giá song song hoặc nằm trong mặt phẳng (α) .
- Nếu mặt phẳng (α) có cặp VTCP $\vec{u}$ và $\vec{v}$ thì $\vec{n} = [\vec{u}; \vec{v}]$ là VTPT của (α) .
- Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của (α) thì $k \cdot \vec{n}$ ($k \neq 0$) cũng là VTPT của (α) .
- Chú ý

+ Tích có hướng của $\vec{u} = (x; y; z)$, $\vec{v} = (x'; y'; z')$ là một vectơ được xác định và kí hiệu như sau:

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \vec{k}.$$

+ Tính chất

- $[\vec{u}, \vec{v}] \perp \vec{u}$ và $[\vec{u}, \vec{v}] \perp \vec{v}$.
- $[\vec{u}, \vec{v}] = -[\vec{v}, \vec{u}]$.
- $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0}$.
- $||[\vec{u}, \vec{v}]|| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \sin(\angle(\vec{u}, \vec{v}))$.
- Mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C nhận $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}]$ làm vectơ pháp tuyến.

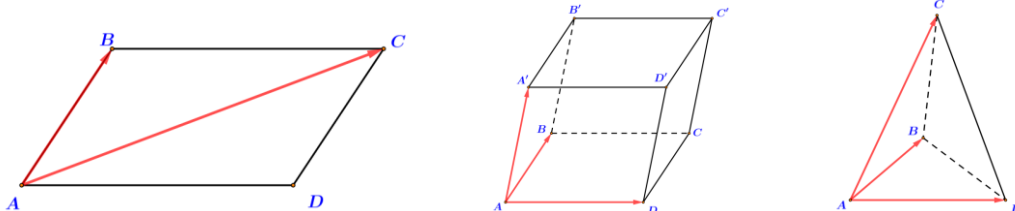


+ Ứng dụng của tích có hướng

★ Xét sự đồng phẳng của ba vectơ:

Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}; \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$. Gọi là tích hỗn tạp

Bốn điểm A, B, C, D tạo thành tứ diện $[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$.



★ Diện tích hình bình hành: $S_{ABCD} = ||[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}]||$.

★ Tính diện tích tam giác: $S_{ABC} = \frac{1}{2} ||[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}]||$.

★ Tính thể tích hình hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = ||[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}||$.

★ Tính thể tích tứ diện: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} ||[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}||$.

2. Phương trình của mặt phẳng

- Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mỗi mặt phẳng đều có phương trình tổng quát dạng $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0.
- Chú ý
 - + D gọi là hệ số tự do của phương trình tổng quát.
 - + Vectơ $\vec{n} = (A, B, C)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng.

3. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng

a. Mặt phẳng đi qua một điểm M và biết vectơ pháp tuyến $\vec{n}$

Mặt phẳng $(P): \begin{cases} \text{VTPT } \vec{n} = (A; B; C) \\ \text{đi qua } M(x_0; y_0; z_0) \end{cases}$ có dạng $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

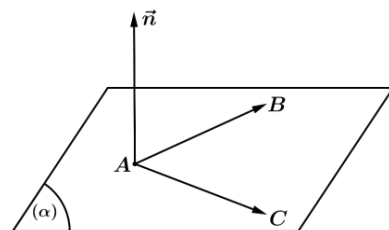
Hoặc $Ax + By + Cz + D = 0$ với A, B, C không đồng thời bằng 0 và $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

b. Mặt phẳng đi qua một điểm M và biết cặp vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và $\vec{v}$

Mặt phẳng $(P): \begin{cases} \text{VTPT } \vec{n}_p = [\vec{u}; \vec{v}] \\ \text{đi qua } M(x_0; y_0; z_0) \end{cases}$.

c. Mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng

Trường hợp tổng quát: Mặt phẳng $(P): \begin{cases} \text{VTPT } \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \\ \text{đi qua } A \end{cases}$



Phương trình mặt chắn

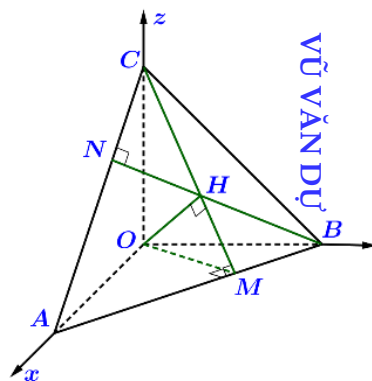
- Nếu mặt phẳng (P) cắt ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các

điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $abc \neq 0$ thì $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

$$+ V_{O.ABC} = \frac{abc}{6}.$$

$$+ \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

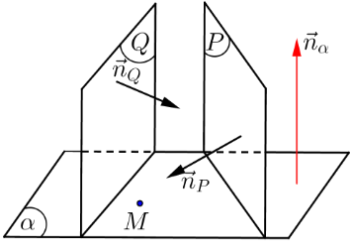
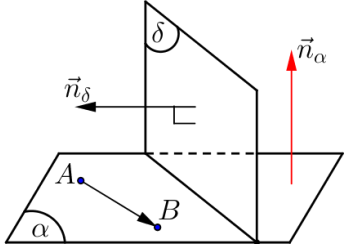
+ H là trực tâm của $\triangle ABC \Leftrightarrow OH \perp (ABC)$.



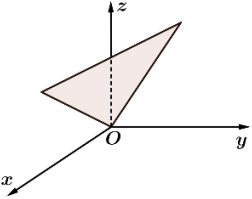
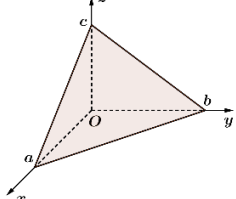
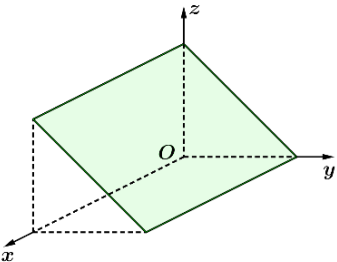
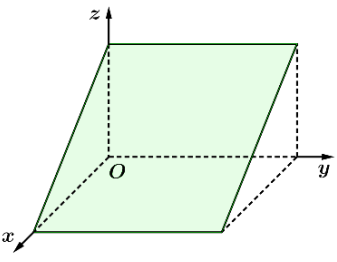
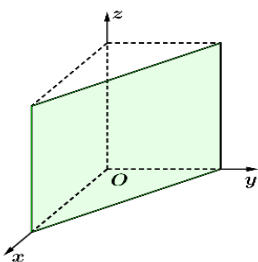
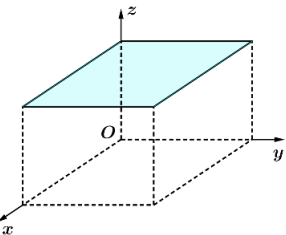
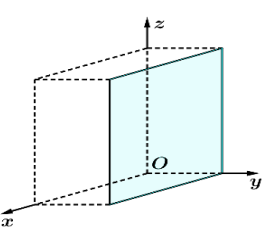
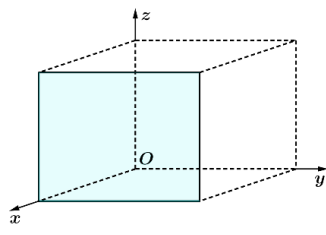
d. Lập phương trình mặt phẳng (α) , biết $(\alpha) \parallel (\beta)$

Loại	Phương pháp
Mặt phẳng (α) đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và song song $(\beta): Ax + By + Cz + D = 0$.	✂ Cách 1: ★ Vectơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta = (A; B; C)$. ★ Mặt phẳng (α) qua điểm M. ✂ Cách 2: ★ Do $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow (\alpha): Ax + By + Cz + D' = 0$, với $D \neq D'$. ★ Thay điểm M vào $(\alpha) \Rightarrow D' = ? \Rightarrow (\alpha)$.
Mặt phẳng $(\alpha) \parallel (\beta): Ax + By + Cz + D = 0$ và cách (β) một khoảng bằng k.	★ Vì $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow (\alpha): Ax + By + Cz + D' = 0$, với $D \neq D'$. ★ Vì (α) cách (β) một khoảng bằng k $\Rightarrow d((\alpha); (\beta)) = k \xLeftrightarrow{M \in (\alpha)} d(M; (\beta)) = k$ $\Leftrightarrow \frac{ D - D' }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = k \Rightarrow D' = ?$ ★ Có $D' \Rightarrow$ phương trình mặt (β) hoàn chỉnh.

e. Lập phương trình mặt phẳng (α), biết (α) $\perp$ (β)

Loại	Phương pháp
Mặt phẳng (α) đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc với (P): $Ax + By + Cz + D = 0$, (Q): $A'x + B'y + C'z + D' = 0$. 	★ Tìm cặp véctơ $\vec{n}_P$ và $\vec{n}_Q$. ★ Véctơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n} = [\vec{n}_P; \vec{n}_Q]$. ★ Mặt phẳng ($\alpha$) qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$. Hoặc bài toán sẽ gặp: Mặt phẳng (α) đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc với giao tuyến của (P): $Ax + By + Cz + D = 0$; (Q): $A'x + B'y + C'z + D' = 0$.
Mặt phẳng (α) đi qua A, B và vuông góc (δ): $Ax + By + Cz + D = 0$. 	★ Tìm cặp véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{n}_\delta$. ★ Véctơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \vec{n}_\delta]$. ★ Mặt phẳng ($\alpha$) qua điểm A.

f. Trường hợp riêng của phương trình mặt phẳng $Ax + By + Cz + D = 0$

					
(α) đi qua gốc tọa độ O là $Ax + By + Cz = 0$			Phương trình mặt chắn (α): $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$		
			Vũ Văn Dự		
$(\alpha) // Ox: By + Cz + D = 0$ - chứa $Ox: By + Cz = 0$	$(\alpha) // Oy: Ax + Cz + D = 0$ - chứa $Oy: Ax + Cz = 0$	$(\alpha) // Oz: Ax + By + D = 0$ - chứa $Oz: Ax + By = 0$			
					
$(\alpha) // (Oxy): Cz + D = 0$ $(\alpha) \equiv (Oxy): z = 0$	$(\alpha) // (Oxz): By + D = 0$ $(\alpha) \equiv (Oxz): y = 0$	$(\alpha) // (Oyz): Ax + D = 0$ $(\alpha) \equiv (Oyz): x = 0$			

Chú ý: Mặt phẳng (α) song song (hoặc chứa trục) nào, mặt phẳng nào thì cho các ẩn tương ứng bằng 0.

4. Điều kiện song song, vuông góc của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(\beta): A'x + B'y + C'z + D' = 0$. Khi đó:

$$\star (\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_\alpha = k \cdot \vec{n}_\beta \\ D \neq k \cdot D' \end{cases} \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}.$$

$$\star (\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta \Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0.$$

$$\star (\alpha) \text{ cắt } (\beta) \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}.$$

$$\star (\alpha) \equiv (\beta) \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}.$$

5. Khoảng cách

a. Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng

Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ được xác định bởi công

$$\text{thức: } d[M; (\alpha)] = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

b. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song có cùng vectơ pháp tuyến

Cho $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(\beta): Ax + By + Cz + D' = 0$, với $D \neq D'$.

$$\text{Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là } d[(\alpha); (\beta)] = \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

6. Góc giữa hai mặt phẳng

Cho $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(\beta): A'x + B'y + C'z + D' = 0$. Đặt $\varphi = [(\alpha); (\beta)]$, với $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) được xác định bởi công thức:

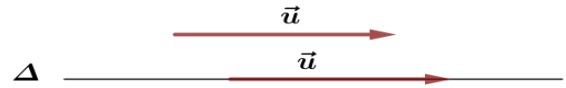
$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

Bài 2. Phương trình đường thẳng

1. Phương trình đường thẳng

a. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

- Vectơ $\vec{u}$ khác vectơ $\vec{0}$ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng Δ được gọi là vectơ chỉ phương (VTCP) của đường thẳng Δ .
- Nếu $\vec{u}$ là VTCP của đường thẳng Δ thì $k\vec{u}$, $k \neq 0$ cũng là VTCP của Δ .



b. Lập phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng

Loại	Phương pháp
Đường thẳng Δ: $\begin{cases} \text{đi qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \text{VTCP } \vec{u} = (a; b; c) \end{cases}$	★ Phương trình tham số $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ ★ Phương trình chính tắc $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$, $abc \neq 0$ ★ Nhận xét + Điểm $M \in d \Leftrightarrow M(x_0 + a.t; y_0 + b.t; z_0 + c.t)$ gọi là tham số hóa tọa độ điểm M. + Với mỗi giá trị của tham số t ta tìm được một tọa độ nằm trên đường thẳng d. + Phương trình tham số của ba trục tọa độ Ox: $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ Oy: $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ Oz: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$
Đường thẳng Δ đi qua hai điểm A và B	★ Chọn A hoặc B là điểm mà Δ đi qua. ★ Nhận $\overrightarrow{AB}$ làm VTCP.
Giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(\beta): A'x + B'y + C'z + D' = 0$	★ Cho 1 trong 3 ẩn x; y; z = 0 để tìm 2 ẩn còn lại $x = 0 \longrightarrow \begin{cases} By + Cz + D = 0 \\ B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ? \\ z = ? \end{cases} \Rightarrow M(0; ?; ?)$ ★ Vectơ chỉ phương $\vec{u} = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_\beta]$.
Đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với giá của hai vectơ $\vec{u}; \vec{v}$.	★ Δ đi qua điểm M ★ VTCP của Δ là $[\vec{u}; \vec{v}]$.

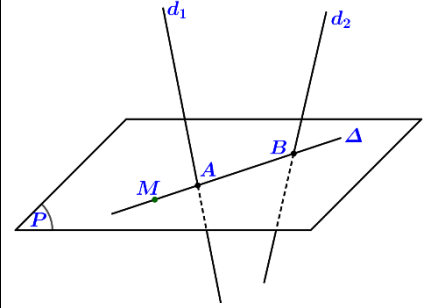
c. Đường thẳng Δ đi qua điểm M cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 và thỏa mãn điều kiện

CÁCH 1

- ★ Gọi $A = \Delta \cap d_1 \Rightarrow A \in d_1$ phụ thuộc tham số.
- ★ Gọi $B = \Delta \cap d_2 \Rightarrow B \in d_2$ phụ thuộc tham số.
- ★ Vì ba điểm $M, A, B \in \Delta$ nên ba điểm đó thẳng hàng, từ đó suy ra $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$, ta xác định được tọa độ A, B .

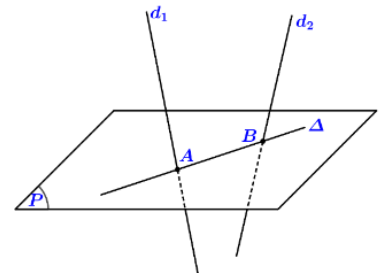
CÁCH 2

- ★ Tìm vectơ pháp tuyến của $mp(M, d_1), mp(M, d_2)$ là $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$.
- ★ Xác định vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_1; \vec{n}_2]$.
- ★ Đường thẳng Δ qua điểm M và có VTCP là $\vec{u}_\Delta$.



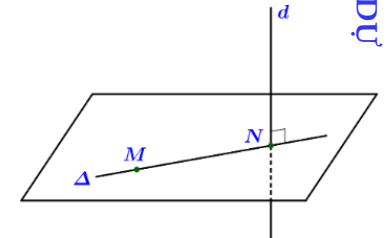
d. Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2

- ★ Gọi $A = (P) \cap d_1; B = (P) \cap d_2$.
- ★ Gọi $\vec{u}_\Delta$ là VTCP của đường thẳng Δ thì $\vec{u}_\Delta = \overrightarrow{AB}$.
- ★ Đường thẳng $(\Delta): \begin{cases} \text{Qua A} \\ \text{VTCP } \vec{u}_\Delta \end{cases}$.



e. Đường thẳng Δ đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng d

- ★ Gọi $N = \Delta \cap d \Rightarrow N \in d$ phụ thuộc tham số.
- ★ Tìm tọa độ N từ hệ thức $\Delta \perp d \Leftrightarrow \vec{u}_\Delta \cdot \vec{u}_d = 0$.
- ★ Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm M, N



f. Lập phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau

Loại	Phương pháp
	Gọi $A = \Delta \cap d_1 \Rightarrow A \in d_1$ phụ thuộc tham số. Gọi $B = \Delta \cap d_2 \Rightarrow B \in d_2$ phụ thuộc tham số. $\begin{cases} \Delta \perp d_1 \\ \Delta \perp d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB \perp d_1 \\ AB \perp d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_1 \\ \overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_2 \end{cases} \longrightarrow \text{Tọa độ } A, B.$ Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B.

2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

a. Vị trí tương đối của hai đường thẳng $(\Delta_1): \begin{cases} x = x_1 + a_1 t_1 \\ y = y_1 + a_2 t_1 \\ z = z_1 + a_3 t_1 \end{cases}$ và $(\Delta_2): \begin{cases} x = x_2 + b_1 t_2 \\ y = y_2 + b_2 t_2 \\ z = z_2 + b_3 t_2 \end{cases}$

Phương pháp 1: Xét hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} \text{qua } M_1 \\ \text{VTCP } \vec{u}_1 \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} \text{qua } M_2 \\ \text{VTCP } \vec{u}_2 \end{cases}$

$\star \Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ cùng phương} \\ \vec{u}_1, \overrightarrow{M_1 M_2} \text{ không cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = \vec{0} \\ [\vec{u}_1; \overrightarrow{M_1 M_2}] \neq \vec{0} \end{cases}$	
$\star \Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ cùng phương} \\ \vec{u}_1, \overrightarrow{M_1 M_2} \text{ cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = \vec{0} \\ [\vec{u}_1; \overrightarrow{M_1 M_2}] = \vec{0} \end{cases}$	
$\star \Delta_1 \text{ cắt } \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ không cùng phương} \\ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{M_1 M_2} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1; \vec{u}_2] \neq \vec{0} \\ [\vec{u}_1; \overrightarrow{M_1 M_2}] = \vec{0} \end{cases}$	
$\star \Delta_1 \text{ và } \Delta_2 \text{ chéo nhau}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ không cùng phương} \\ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{M_1 M_2} \text{ không đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow [\vec{u}_1; \overrightarrow{M_1 M_2}] \neq \vec{0}$	
$\star \text{Điều kiện để } \Delta_1 \text{ vuông góc với } \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$	

Phương pháp 2: Xét hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + a_1 t_1 = x_2 + b_1 t_2 \\ y_1 + a_2 t_1 = y_2 + b_2 t_2 \\ z_1 + a_3 t_1 = z_2 + b_3 t_2 \end{cases} \quad (*)$

- ★ Nếu hệ (*) có nghiệm duy nhất thì (Δ_1) và (Δ_2) cắt nhau.
- ★ Nếu hệ (*) có vô số nghiệm thì (Δ_1) và (Δ_2) trùng nhau.
- ★ Nếu hệ (*) có vô nghiệm thì (Δ_1) và (Δ_2) song song hoặc chéo nhau
 - + $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ cùng phương thì $(\Delta_1) // (\Delta_2)$
 - + $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ không cùng phương thì (Δ_1) và (Δ_1) chéo nhau

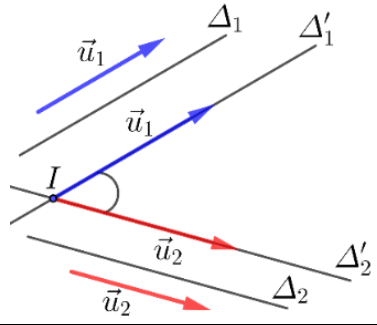
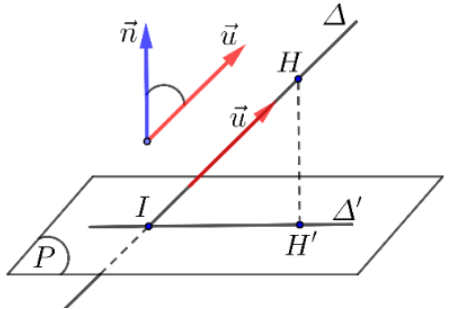
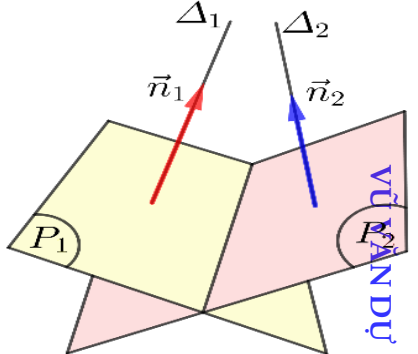
b. Vị trí tương đối của đường thẳng $(\Delta): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ và $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t & (1) \\ y = y_0 + a_2 t & (2) \\ z = z_0 + a_3 t & (3) \\ Ax + By + Cz + D = 0 & (4) \end{cases} \quad (*)$

Lấy (1), (2), (3) thế vào (4)

- Nếu (*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta$ cắt (α) .
- Nếu (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta // (\alpha)$.
- Nếu (*) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \subset (\alpha)$.

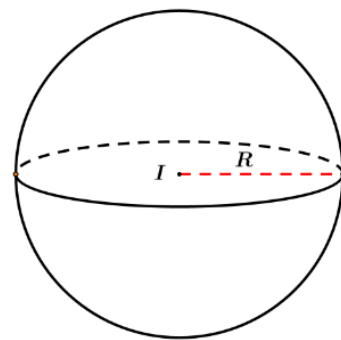
4. Góc

Loại	Hình vẽ
Góc giữa hai đường thẳng Đường thẳng Δ_1 VTCP $\vec{u}_1$, đường thẳng Δ_2 VTCP $\vec{u}_2$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Khi đó $\cos \varphi = \frac{ \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 }{ \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 }$, với $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.	
Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng Đường thẳng Δ có VTCP $\vec{u}$ và mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng Δ và (α). Khi đó $\sin \varphi = \frac{ \vec{u} \cdot \vec{n} }{ \vec{u} \cdot \vec{n} }$, với $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.	
Góc giữa hai mặt phẳng Mặt phẳng (P_1) VTPT $\vec{n}_1$, mặt phẳng (P_2) VTPT $\vec{n}_2$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P_1) và (P_2). Khi đó $\cos \varphi = \frac{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 }{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 }$, với $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.	

Bài 3. Phương trình mặt cầu

1. Định nghĩa

- Tập hợp các điểm M trong không gian cách điểm I cố định một khoảng R không đổi gọi là mặt cầu tâm I bán kính R , kí hiệu là $S(I; R)$.
- Diện tích và thể tích mặt cầu
 - Diện tích mặt cầu: $S_C = 4\pi R^2$.
 - Thể tích mặt cầu: $V_C = \frac{4}{3}\pi R^3$.



2. Phương trình mặt cầu

Loại 1.

- Mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính R có phương trình: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.
- Phương trình mặt cầu tâm O , bán kính R có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Loại 2.

- Mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính R có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (*), với $d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$.
- Lưu ý:
 - Điều kiện để (*) là phương trình mặt cầu khi chỉ khi $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.
 - tâm $I\left(\frac{\text{hệ số của } x}{-2}; \frac{\text{hệ số của } y}{-2}; \frac{\text{hệ số của } z}{-2}\right)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

3. Lập phương trình mặt cầu

Loại 1. Cơ bản (S): $\begin{cases} \text{Tâm } I(a; b; c) \\ \text{Bán kính } R \end{cases} \Rightarrow (S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$

Loại 2. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ và đi qua điểm A .

Cách giải: (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = IA$.

Loại 3. Viết phương trình mặt cầu (S) có đường kính AB , với A, B cho trước.

Cách giải: (S) có tâm $I = \frac{A+B}{2}$ và bán kính $R = \frac{AB}{2}$.

Loại 4. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ và tiếp xúc với các trục tọa độ.

Cách giải: (S) có bán kính xác định theo các trường hợp sau

$$\begin{cases} R = d(I; O_x) = \sqrt{b^2 + c^2} \\ R = d(I; O_y) = \sqrt{a^2 + c^2} \\ R = d(I; O_z) = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

Loại 5. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ.

Cách giải: (S) có bán kính xác định theo các trường hợp sau

$$\begin{cases} R = d[I; (Oxy)] = |c| \\ R = d[I; (Oxz)] = |b| \\ R = d[I; (Oyz)] = |a| \end{cases}$$

Loại 6. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ và tiếp xúc với $\Delta: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$.

Cách giải: (S): $R = d[I; \Delta] = \frac{|\vec{u}; \overrightarrow{IM}|}{|\vec{u}|}$, với $\begin{cases} \vec{u} = (a; b; c) \\ M(x_0; y_0; z_0) \end{cases}$.

Loại 7. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ và tiếp xúc với (P): $Ax + By + Cz + D = 0$.

Cách giải: (S): $R = d[I; (P)] = \frac{|A.a + B.b + C.c + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

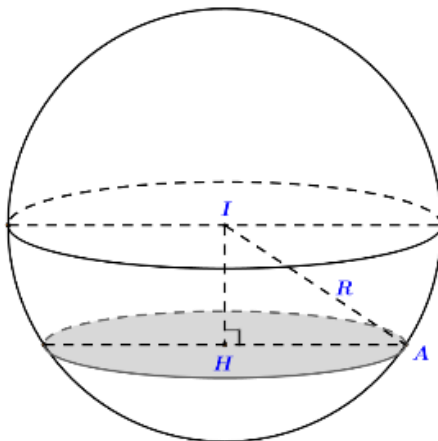
Loại 8. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D.

- Cách giải:**
- Gọi (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$
 - Vì A, B, C, D ∈ (S) nên tìm được 4 phương trình $\Rightarrow a, b, c, d \Rightarrow (S)$.

Loại 9. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua 3 điểm A, B, C và tâm I thuộc mặt phẳng (P).

- Cách giải:**
- Gọi (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$
 - Vì A, B, C ∈ (S) nên tìm được 3 phương trình
 - Vì I ∈ (P) ta tìm được phương trình thứ tư.
 - Giải hệ bốn phương trình này $\Rightarrow a, b, c, d \Rightarrow (S)$.

Loại 10. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua 2 điểm A, B và tâm I thuộc đường thẳng Δ.

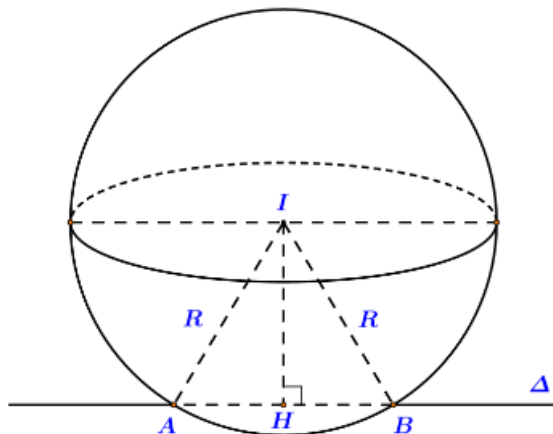


- Cách giải:**
- Vì I ∈ Δ nên tham số hóa tọa độ điểm I theo Δ.
 - Tính độ dài IA, IB theo tham số t của đường thẳng Δ.
 - Vì A, B ∈ (S) nên IA = IB $\Rightarrow t \Rightarrow$ tâm I và bán kính R = IA.

Loại 11. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính r.

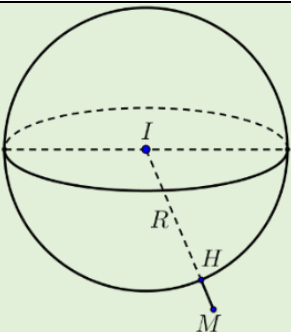
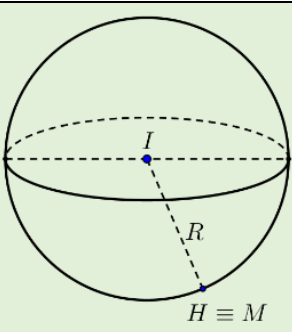
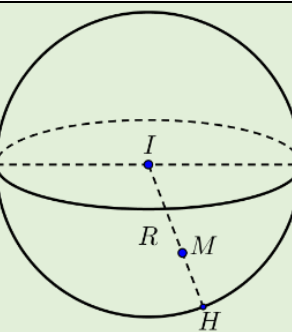
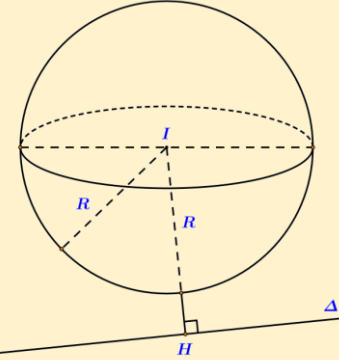
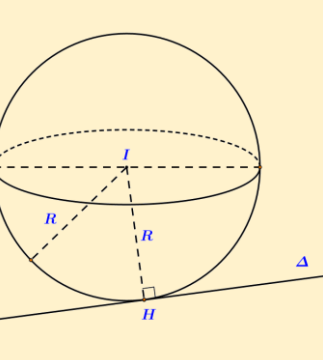
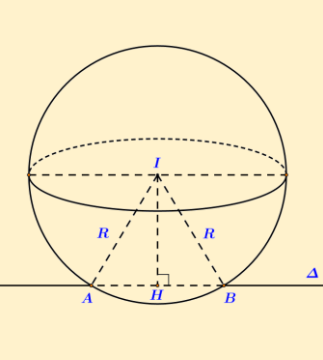
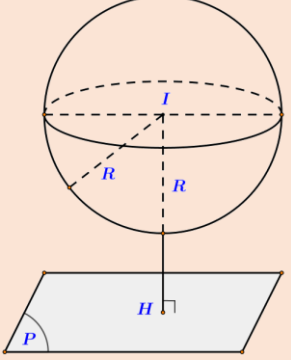
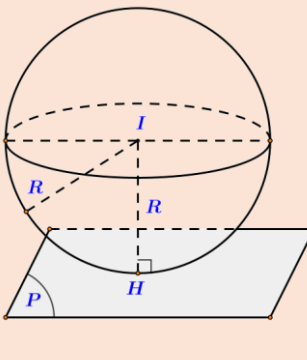
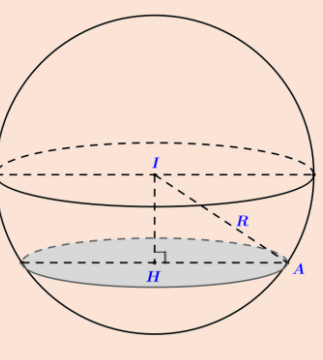
- Cách giải:**
- Dựa vào mối liên hệ $R^2 = d^2[I; (P)] + r^2 = IH^2 + AH^2$.
 - Cần nhớ $C = 2\pi r$ và $S_{\text{đt}} = \pi r^2$.

Loại 12. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng Δ tại A và B.



- Cách giải:** Dựa vào mối liên hệ $R^2 = d^2(I; \Delta) + AH^2 = IH^2 + \frac{AB^2}{4}$.

3. Vị trí tương đối với mặt cầu

Điểm			
	$IM > R$: Điểm M nằm ngoài mặt cầu	$IM = R$: Điểm M nằm trên mặt cầu	$IM < R$: Điểm M nằm trong mặt cầu
Đường thẳng			
	$d(I; \Delta) > R$: Đường thẳng không cắt mặt cầu	$d(I; \Delta) = R$: Đường thẳng tiếp xúc mặt cầu	$d(I; \Delta) = R$: Đường thẳng cắt mặt cầu
Mặt phẳng			
	$d[I; (P)] > R$: Mặt phẳng không cắt mặt cầu	$d[I; (P)] = R$: Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu tại M	$d[I; (P)] < R$: Mặt phẳng cắt mặt cầu

CHƯƠNG 6. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

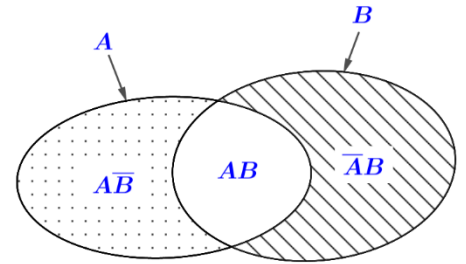
1. Xác suất có điều kiện

- Xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra, được kí hiệu và xác định là:

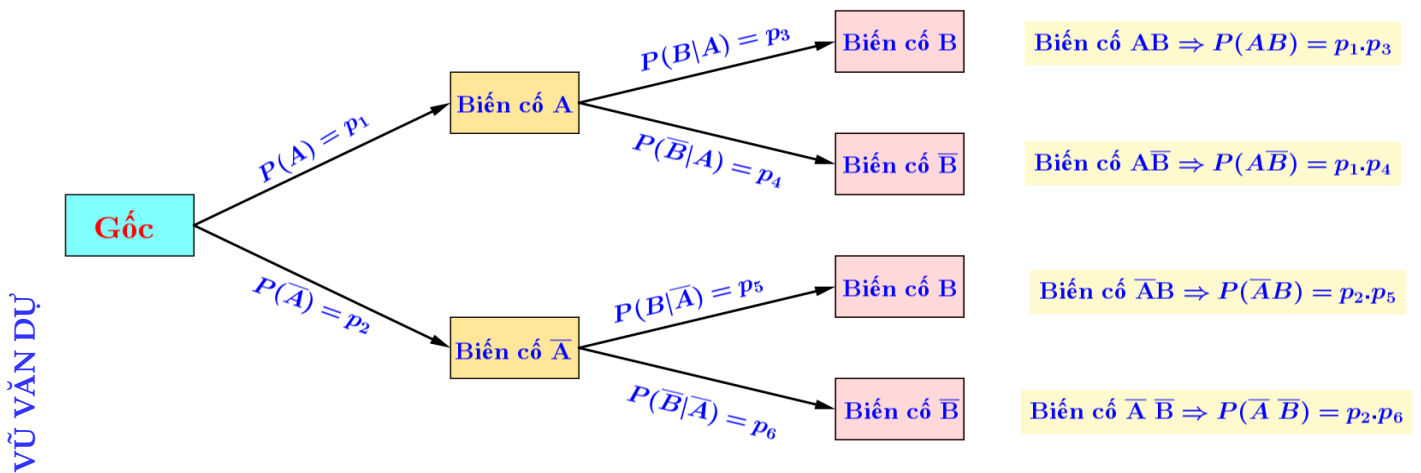
$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \text{ hoặc } P(A|B) = \frac{n(AB)}{n(B)}, \text{ với } P(B) > 0.$$

Trong đó, kí hiệu $A \cap B$ và AB là hoàn toàn như nhau và đọc là: A giao B.

- Tính chất
 - $P(AB) = P(B).P(A|B)$ gọi là công thức nhân xác suất.
 - Nếu A, B là hai biến cố độc lập thì $(A, \bar{B})$ hoặc $(\bar{A}, B)$ hoặc $(\bar{A}, \bar{B})$ cũng là hai biến cố độc lập. Khi đó
 - $P(AB) = P(A).P(B)$.
 - $P(A|\bar{B}) = P(A)$.
 - $P(\bar{B}|A) = P(\bar{B})$.
 - $P(B|\bar{A}) = P(B)$.
 - Nếu A, B là hai biến cố bất kì thì
 - $P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A)$.
 - $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$.
 - $P(\bar{A}B) + P(AB) = P(B)$.
 - $P(A\bar{B}) + P(AB) = P(A)$.



2. Sử dụng sơ đồ cây để tính xác suất có điều kiện



Lưu ý

- Biến cố nào xảy ra trước thì xếp ở cột đầu tiên.
- Trong cùng một cột tổng hai xác suất luôn bằng 1. Tức là $p_1 + p_2 = 1$, $p_3 + p_4 = 1$, $p_5 + p_6 = 1$.
- Trên cùng một đường, tích của hai xác suất là xác suất của biến cố giao.

3. Công thức xác suất toàn phần

Cho hai biến cố A và B với $0 < P(A) < 1$, khi đó

$$\star P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}) = P(A).P(B|A) + P(A).P(\bar{B}|A)$$

$$\star P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B) = P(A).P(B|A) + P(\bar{A}).P(B|\bar{A})$$

4. Công thức Bayes

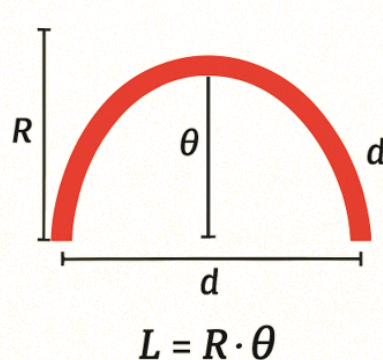
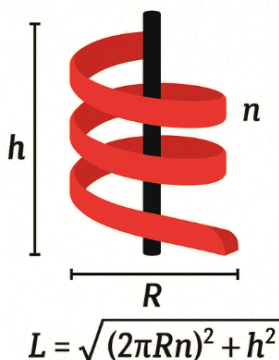
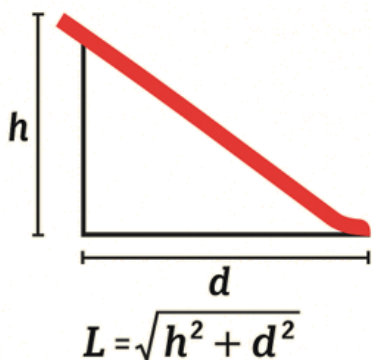
Cho hai biến cố A và B với $P(A) > 0$ và $0 < P(B) < 1$. Khi đó

$$P(B|A) = \frac{P(B).P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B).P(A|B)}{P(A).P(B|A) + P(\bar{A}).P(B|\bar{A})}.$$

CÙNG KHÁM PHÁ MỘT SỐ HÌNH KHỐI MỚI LẠ

Câu 1. Công thức tính chiều dài máng trượt?

Trả lời



Máng trượt thẳng nghiêng

Máng xoắn hình tròn
(xoắn ốc đều quanh trục)

Máng hình parabol hoặc cong đều
(xấp xỉ bằng cung tròn)

Máng trượt thẳng nghiêng (đốc thẳng): Giả sử máng nghiêng tạo thành một tam giác vuông với chiều cao h và chiều dài đáy d , thì độ dài máng chính là cạnh huyền: $L = \sqrt{h^2 + d^2}$.

Máng xoắn hình tròn (xoắn ốc đều quanh trục): Giả sử máng trượt tạo thành một vòng xoắn trụ đứng, có:

- * R : bán kính của vòng tròn đáy
- * h : chiều cao tổng của máng
- * n : số vòng xoắn

Khi đó chiều dài máng trượt $L = \sqrt{(2\pi Rn)^2 + h^2}$.

Máng hình parabol hoặc cong đều (xấp xỉ bằng cung tròn):

Giả sử máng có hình cung tròn bán kính R và góc tạo bởi cung là θ (tính bằng radian):

Khi đó chiều dài máng trượt $L = R \cdot \theta$.

Câu 2. Công thức tính thể tích của khối parabol tròn xoay?

Trả lời

Nếu hình parabol tròn xoay có chiều cao h và bán kính miệng đáy

là R (đỉnh nằm ở đáy), thì công thức thể tích là: $V = \frac{1}{2} \pi R^2 \cdot h$.

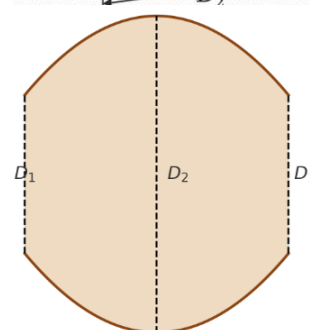
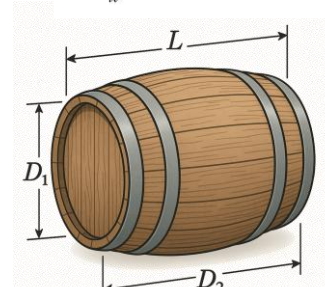
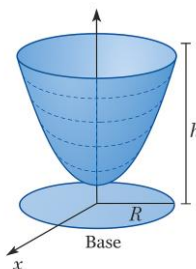
Câu 3. Công thức tính thể tích thùng rượu có 2 đáy là các hình tròn với đường kính hai đáy là D_1 , đường kính phần phình to nhất của thùng rượu là D_2 , chiều cao thùng rượu là h ?

Trả lời

Thùng rượu hình trụ phình giữa (hình thấu kính quay)

- * Chiều dài (chiều cao): h
- * Bán kính hai đáy (bán kính miệng): $r = \frac{D_1}{2}$
- * Bán kính chỗ phình to nhất (ở giữa): $R = \frac{D_2}{2}$

Khi đó thể tích thùng rượu là $V = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\frac{4(r-R)}{h^2} \cdot x^2 + R \right]^2 dx$.



VŨ VĂN DỰ

VŨ VĂN DỰ

Câu 4. Công thức tính diện tích tam giác Reuleaux?

Trả lời

Tam giác Reuleaux là gì?

Trên mỗi cạnh, vẽ một cung tròn có tâm là đỉnh đối diện và bán kính cũng bằng a . Kết quả là một hình cong khép kín có độ rộng không đổi a , gọi là tam giác Reuleaux.

Giải thích công thức: $S = \frac{(\pi - \sqrt{3}) \cdot a^2}{2}$.

* Diện tích 3 cung tròn (mỗi cung 60°) $= \frac{3}{6} \pi a^2 = \frac{\pi a^2}{2}$.

* Trừ đi diện tích tam giác đều $= \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4}$.

Câu 5. Công thức tính diện tích tam giác đều, đỉnh được bo tròn?

Trả lời

Đặc điểm hình học

- * a : độ dài cách cạnh của tam giác đều.
- * h : chiều cao từ đỉnh xuống đáy.
- * r : bán kính bo tròn tại mỗi đỉnh.

Công thức diện tích tam giác bo tròn: $S = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - \frac{\pi r^2}{2}$.

Câu 6. Khối trụ xoắn là gì?

Trả lời

1. Khối trụ xoắn (Helical Cylinder)

♦ **Đặc điểm:**

- * Có dạng như một ống trụ nhưng bề mặt bên không thẳng mà là đường xoắn ốc.
- * Có trục chính và bán kính không đổi, nhưng đường sinh là **đường xoắn**.

♦ **Tính chất:**

- * Không có mặt phẳng đối xứng.
- * Không thể "trái phải" như trụ thông thường.
- * Dễ xuất hiện trong kỹ thuật (vít xoắn, ống vận chuyển dạng xoắn).

♦ **Ứng dụng:** Thiết kế trục vít trong máy ép, hệ thống vận chuyển trong nhà máy, băng tải.

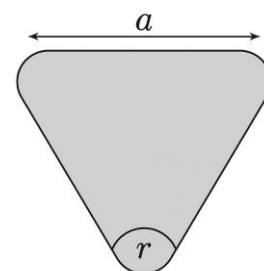
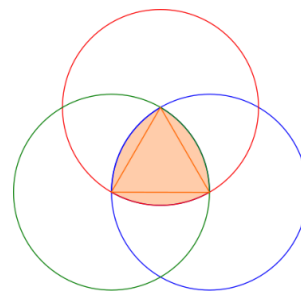
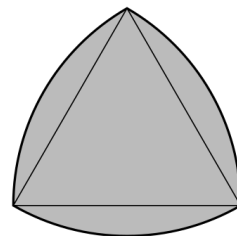
2. Công thức

- * R : bán kính đáy
- * h : chiều cao trụ
- * l : chiều dài đường sinh (theo xoắn)
- * n : số vòng xoắn
- * S_{xq} : diện tích xung quanh
- * V : thể tích

Chiều dài đường sinh xoắn $l = \sqrt{h^2 + (2\pi Rn)^2}$

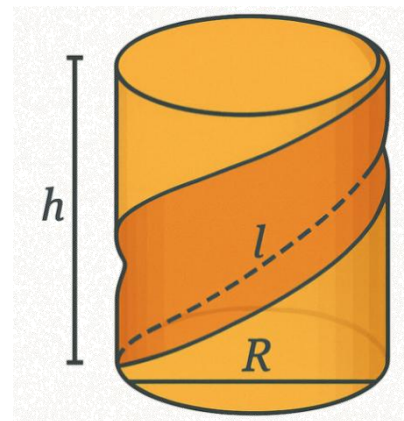
Diện tích xung quanh $S_{xq} = 2\pi Rn l$.

Thể tích khối trụ xoắn $V = \pi R^2 h$.



Vũ Văn Dự

Vũ Văn Dự



Câu 7. Khối định hướng âm thanh là gì?

Trả lời

1. Khối định hướng âm thanh (Acoustic Horn Shape)

- * Dạng phễu loe dần từ một điểm nhỏ đến một vành mở rộng lớn.
- * Cấu trúc cơ bản của khối định hướng âm thanh là hình nón loe, hoặc hình dạng theo hàm logarit, mũ, hoặc parabol

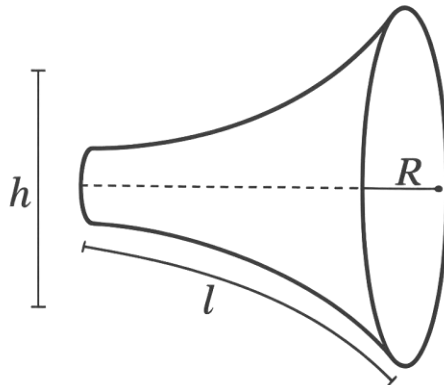
2. Công thức

- * R: bán kính miệng loa (miệng loa lớn)
- * r: bán kính cổ loa (đầu nhỏ)
- * h: chiều cao trục từ cổ đến miệng
- * l: chiều dài đường sinh (mép cong ngoài)
- * S_{xq} : diện tích xung quanh (phần bề mặt loe)
- * V: thể tích khối định hướng âm thanh

Chiều dài đường sinh $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$

Diện tích xung quanh $S_{xq} = \pi(R + r)l$.

Thể tích khối trụ xoắn $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$



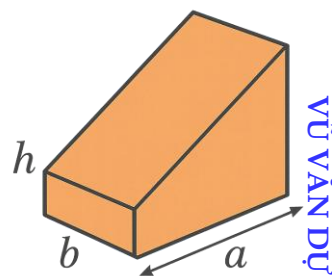
Câu 8. Khối nêm là gì?

Trả lời

Khối nêm thường được tạo ra khi:

- * Một hình hộp chữ nhật bị cắt chéo một mặt (tạo ra mặt tam giác)
- * Một hình lăng trụ tam giác có một đáy bị nghiêng

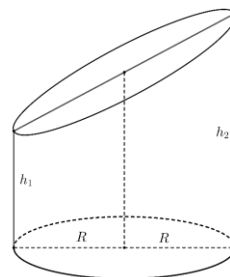
Thể tích $V = \frac{1}{2}abh$.



Câu 9. Nêu công thức tính thể tích hình “Phiến trụ”

Trả lời

- * Diện tích xung quanh $S_{xq} = \pi R(h_1 + h_2)$
- * Diện tích toàn phần $S_{tp} = S_{xq} + \pi R^2 + \pi R \sqrt{R^2 + \frac{(h_1 - h_2)^2}{4}}$
- * Thể tích $V = \pi R^2 \cdot \frac{h_1 + h_2}{2}$



Câu 10. Nêu công thức tính thể tích hình nêm?

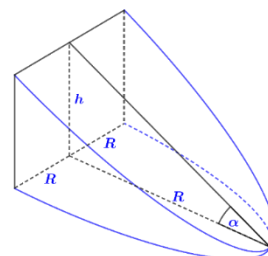
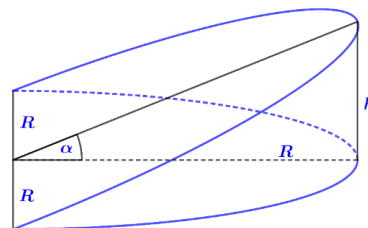
Trả lời

Dạng 1

- * Diện tích xung quanh $S_{xq} = 2Rh = 2R^2 \tan \alpha$
- * Diện tích toàn phần $S_{tp} = S_{xq} + \frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R \sqrt{R^2 + h^2}}{2}$
- * Thể tích $V = \frac{2}{3}R^2 h = \frac{2}{3}R^3 \cdot \tan \alpha$

Dạng 2

- * Thể tích $V = (\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})R^2 h = (\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})R^3 \cdot \tan \alpha$



Câu 11. Nêu các công thức cơ bản của hình cầu?

Trả lời

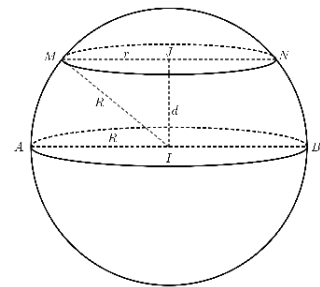
Diện tích mặt cầu: $S_C = 4\pi R^2$.

Thể tích mặt cầu: $V_C = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Câu 12. Khi cắt mặt cầu bởi một mặt phẳng thì thiết diện tạo thành là hình gì?

Trả lời

- * Gọi mặt cầu là (S), mặt phẳng là (P)
Thiết diện tạo bởi (S) và (P) là đường tròn (C)
Tức là $(S) \cap (P) = (C)$.
- * Đặt $d = IJ = d[I; (P)]$. Khi đó: $R^2 = r^2 + d^2$,
Với r và R là bán kính của đường tròn (C) và mặt cầu (S).

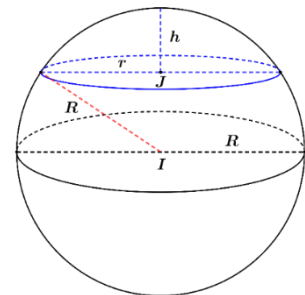


Câu 13. Nêu công thức tính thể tích chỏm cầu?

Trả lời

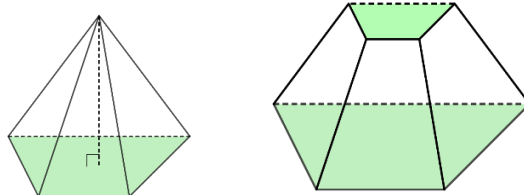
* Thể tích
$$\begin{cases} V = \pi h^2 \cdot (R - \frac{h}{3}) \\ V = \frac{\pi h}{6} \cdot (3r^2 + h^2) \end{cases}$$

* Diện tích xung quanh bề mặt chỏm cầu
$$\begin{cases} S_{xq} = 2\pi Rh \\ S_{xq} = \pi(r^2 + h^2) \end{cases}$$



Câu 14. Nêu công thức tính thể tích khối chóp có diện tích đáy là B và chiều cao h?

Trả lời



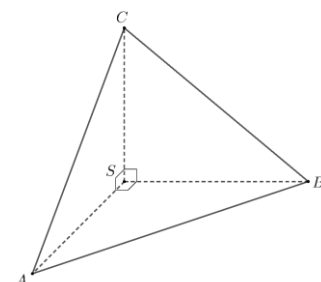
- * Diện tích xung quanh S_{xq} = tổng diện tích các mặt bên.
- * Diện tích toàn phần $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy}$.
- * Thể tích khối chóp $V = \frac{1}{3}B \cdot h$, với B là diện tích đáy, h là chiều cao
- * Thể tích khối chóp cụt $V = \frac{h(B + B' + \sqrt{BB'})}{3}$, với B và B' là diện tích đáy dưới và đáy trên.

Câu 15. Thể tích khối chóp S.ABC có SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một?

Trả lời: $V = \frac{SA \cdot SB \cdot SC}{6}$. Ta còn gọi đây là **khối tam diện vuông**.

Câu 16. Nêu công thức tính thể tích khối chóp S.ABC có SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một, diện tích các tam giác SAB, SBC, SAC lần lượt là S_1, S_2, S_3 ?

Trả lời: $V = \frac{\sqrt{2S_1 \cdot S_2 \cdot S_3}}{3}$.



Câu 17. Nêu công thức tính thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy là B và chiều cao h?

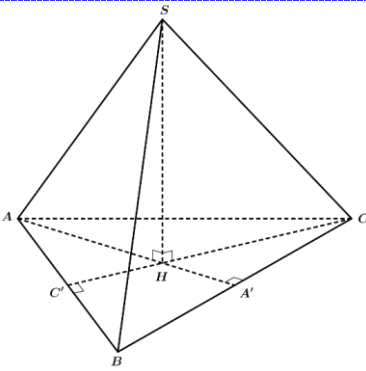
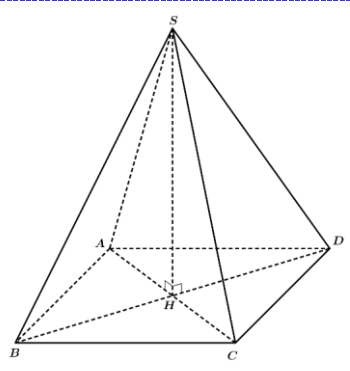
Trả lời: $V = B \cdot h$.

Câu 18. Nêu công thức tính thể tích khối lập phương có cạnh bằng a?

Trả lời: $V = a^3$.

Câu 19. Nêu các tính chất của khối chóp đều

Trả lời

Tên gọi	Hình chóp tam giác đều	Hình chóp tứ giác đều
Mô hình		
Tính chất	* Đáy là tam giác đều * $SA = SB = SC$. * $SH \perp (ABC)$, H là trọng tâm ΔABC	* Đáy là hình vuông. * $SA = SB = SC = SD$. * $SO \perp (ABCD)$, với $AC \cap BD = O$.
Thể tích	* Khối chóp tam giác đều cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b thì $V = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3b^2 - a^2}}{12}$. * Khối tứ diện đều, có tất cả các cạnh bằng a thì $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$. * Khối chóp tam giác đều cạnh đáy bằng a, mặt bên tạo với đáy góc α thì $V = \frac{a^3 \cdot \tan \alpha}{24}$. * Khối chóp tam giác đều cạnh bên bằng b, cạnh bên tạo với đáy góc β thì $V = \frac{\sqrt{3} \cdot b^3 \cdot \sin \beta \cdot \cos^2 \beta}{4}$. * Khối chóp tam giác đều cạnh đáy bằng a, cạnh bên tạo với đáy góc β thì $V = \frac{a^3 \cdot \tan \beta}{12}$.	* Khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a cạnh bên bằng b thì $V = \frac{a^2 \cdot \sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}$. * Khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a thì $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{6}$. * Khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a mặt bên tạo với đáy góc α thì $V = \frac{a^3 \cdot \tan \alpha}{6}$. * Khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a $\angle SAB = \alpha$, $\alpha \in (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$ thì $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{\tan^2 \alpha - 1}}{6}$. * Khối chóp tứ giác đều cạnh bên bằng b, mặt bên tạo với đáy góc β, $\beta \in (0; \frac{\pi}{2})$ thì $V = \frac{4b^3 \cdot \tan \beta}{3 \cdot \sqrt{(2 + \tan^2 \beta)^3}}$.
Tính chất của đa giác đáy	Nếu ABC là tam giác đều cạnh a thì: * $S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ và $AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. * $AH = \frac{2}{3} AA' = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. * $A'H = \frac{1}{3} AA' = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.	Nếu ABCD là hình vuông cạnh a thì: * $S_{ABCD} = a^2$. * $AC = BD = a\sqrt{2}$. * $HA = HC = HB = HD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. * $AC \perp BD$ tại H.

Câu 20. Nêu các công thức hệ thức lượng trong tam giác?

Trả lời

Hệ thức lượng trong tam giác vuông

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có AH là đường cao, AM là trung tuyến.

* $BC^2 = AB^2 + AC^2$

* $AH \cdot BC = AB \cdot AC$.

* $AB^2 = BH \cdot BC$

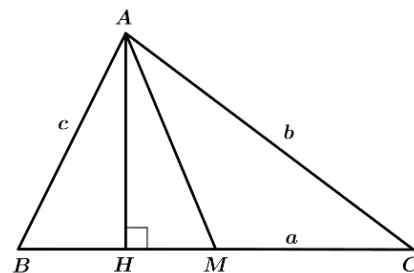
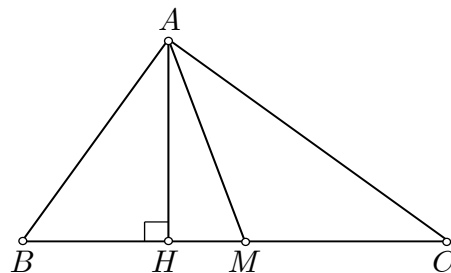
* $AC^2 = CH \cdot CB$.

* $AH = \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}}$

* $AH^2 = HB \cdot HC$.

* $BC = 2AM$.

* $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC$.



Hệ thức lượng trong tam giác thường: Trong $\triangle ABC$, ta luôn đặt:

* Độ dài các cạnh: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

* Diện tích tam giác: S .

* Nửa chu vi tam giác: $p = \frac{a + b + c}{2}$

* Bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác lần lượt là R, r .

* Đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C lần lượt là $h_a; h_b; h_c$.

* Đường trung tuyến kẻ từ các đỉnh A, B, C lần lượt là $m_a; m_b; m_c$.

Định lý hàm số sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

Định lý hàm số cos:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases}$$

Công thức trung tuyến:

$$\begin{cases} m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \\ m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \\ m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \end{cases}$$

Diện tích tam giác:

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c \\ S = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{bc \sin A}{2} = \frac{ac \sin B}{2} \\ S = \frac{abc}{4R} = p \cdot r \\ S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{cases}$$

Câu 21. Nêu công thức tính diện tích một số hình đa giác cơ bản?

Trả lời

* Hình vuông cạnh bằng x thì $S = x^2$ và đường chéo bằng $x\sqrt{2}$

* Hình chữ nhật, có chiều rộng bằng a và chiều dài bằng b thì $S = a \cdot b$ và đường chéo bằng $\sqrt{a^2 + b^2}$

* Hình thoi, có độ dài hai đường chéo lần lượt là d_1 và d_2 thì $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

* Hình bình hành, có độ dài một cạnh là a và đường cao hạ xuống cạnh đó là h thì $S = a \cdot h$.

* Hình thang có độ dài hai đáy lần lượt là a và b , đường cao h thì $S = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$.

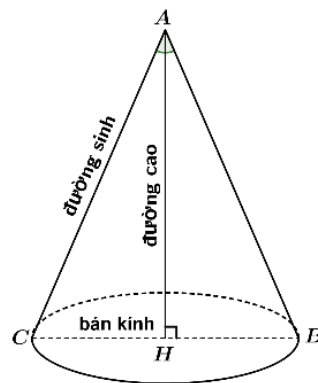
* Nếu đáy là tam giác đều cạnh a thì $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$, đường cao $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 22. Nêu các công thức cơ bản của hình nón?

Trả lời

Cho hình nón có chiều cao là h , bán kính đáy r và đường sinh là l thì có:

- * Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi r l$.
- * Diện tích đáy (hình tròn): $S_{\text{đáy}} = \pi r^2$.
- * Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{đáy}} = \pi r l + \pi r^2$.
- * Thể tích khối nón: $V_{\text{nón}} = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.
- * Mối liên hệ giữa r, l, h là $l^2 = r^2 + h^2$.

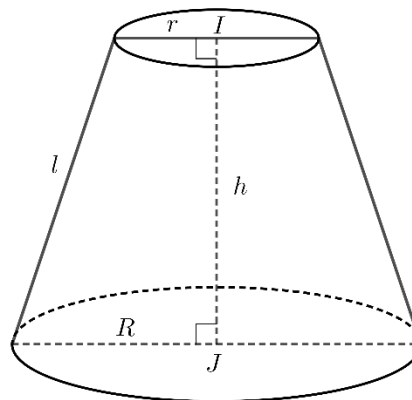


Câu 23. Nêu các công thức cơ bản của hình nón cụt?

Trả lời

Cho hình nón cụt có chiều cao là $h = IJ$, bán kính đáy nhỏ r , bán kính đáy lớn R và đường sinh là l thì có:

- * Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi(r + R)l$.
- * Diện tích đáy nhỏ: $S_{\text{đáy}} = \pi r^2$.
- * Diện tích đáy lớn: $S_{\text{đáy}} = \pi R^2$.
- * Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + S_{2\text{đáy}} = \pi(R + r)l + \pi(r^2 + R^2)$.
- * Thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3} \pi h(R^2 + r^2 + Rr)$.



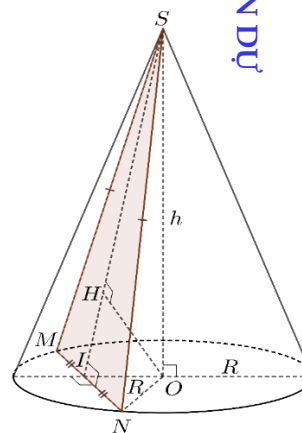
Câu 24. Cho hình nón (N) có chiều cao h , bán kính đáy R . Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh S cắt đường tròn đáy tại hai điểm M và N. Tính khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến (P).

Trả lời

- * Thiết diện là tam giác cân SMN.
- * Khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng (P), tức là

$$d[O; (SMN)] = OH, \text{ với } OH = \frac{SO \cdot OI}{\sqrt{SO^2 + OI^2}}$$

- * Diện tích của thiết diện, tức là $S_{\Delta SMN}$ và $S_{\Delta SMN} = \frac{1}{2} SI \cdot MN$
- * $OM = ON = R$
- * I là trung điểm của MN

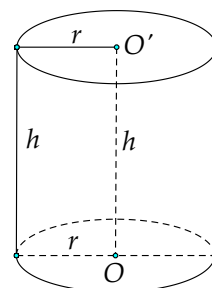


Câu 25. Nêu các công thức cơ bản của hình trụ?

Trả lời

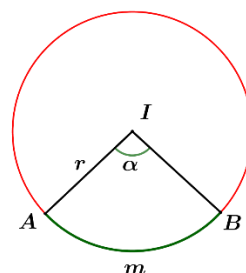
Cho hình trụ có chiều cao là h và bán kính đáy bằng r , khi đó:

- * Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi r h$.
- * Diện tích toàn phần của hình trụ: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}} = 2\pi r h + 2\pi r^2$.
- * Thể tích khối trụ: $V = S_{\text{đáy}} \cdot h = \pi r^2 h$.



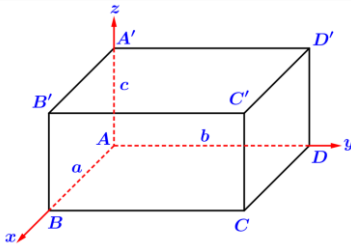
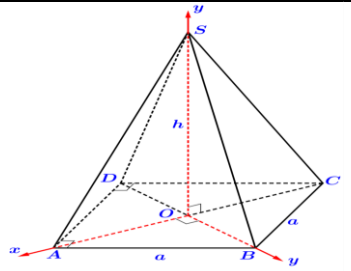
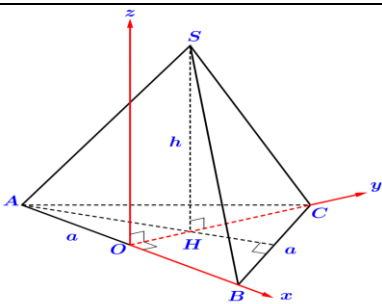
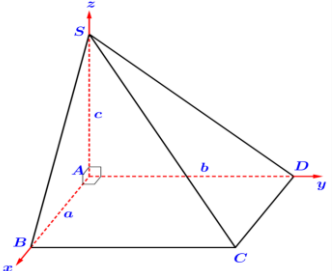
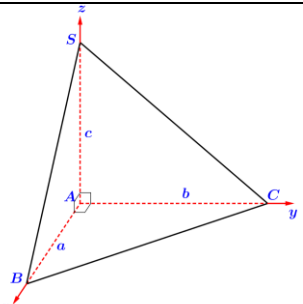
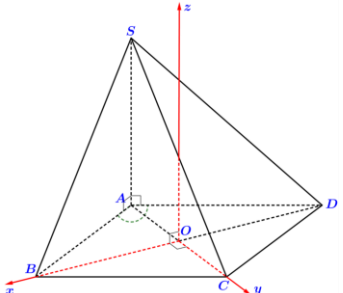
Nhận xét

- * Chu vi hình tròn: $C = 2\pi r$
- * Độ dài dây cung AmB là $L = r\alpha$
- * Diện tích một phần mặt ngoài của hình trụ là $S = r \cdot \alpha \cdot h$.
 → nếu $\alpha = 2\pi$ ta có công thức diện tích xung quanh của mặt trụ.
 → trong nhiều đề thi gần đây lại khai thác công thức $S = r \cdot \alpha \cdot h$.



Câu 26. Nêu một số cách đặt hệ trục tọa độ đối với một số hình đa diện thường sử dụng?

Trả lời

Đa diện	Cách đặt hệ trục tọa độ	Tọa độ các đỉnh
Hình hộp chữ nhật (hoặc Hình lập phương)		$A(0;0;0), B(a;0;0),$ $C(a;b;0), D(0;b;0),$ $A'(0;0;c), B'(a;0;c),$ $C'(a;b;c), D'(0;b;c)$
Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy hình vuông cạnh bằng a , chiều cao khối chóp bằng h .		$A(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0), B(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0),$ $C(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0), D(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0),$ $S(0;0;h), O(0;0;0)$
Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a , chiều cao khối chóp bằng h		$A(0;-\frac{a}{2};0), B(0;\frac{a}{2};0)$ $C(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0), H(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};0),$ $S(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};h), O(0;0;0)$
Hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD); AB = a, AD = b, SA = c$		$A(0;0;0), B(a;0;0),$ $C(a;b;0), D(0;b;0),$ $S(0;0;c).$
Hình chóp $S.ABC$, đáy ABC là tam giác vuông tại A và $SA \perp (ABC); AB = a, AC = b, SA = c$		$A(0;0;0),$ $B(a;0;0),$ $C(0;b;0),$ $S(0;0;c).$
Hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng $a, SA \perp (ABCD), \angle BAD = \alpha$ và $SA = h$.		$O(0;0;0), A(0; -a \cos \frac{\alpha}{2}; 0)$ $C(0; a \cos \frac{\alpha}{2}; 0), B(a \sin \frac{\alpha}{2}; 0; 0),$ $D(-a \sin \frac{\alpha}{2}; 0; 0), S(0;0;h).$

VŨ VĂN DỰ

VŨ VĂN DỰ

Đa diện	Cách đặt hệ trục tọa độ	Tọa độ các đỉnh
Hình chóp $S.ABC$ có $(SAB) \perp (ABC)$, ΔSAB cân tại S , chiều cao của khối chóp bằng h , ΔABC vuông tại C , $AC = a$, $BC = b$.		$C(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $S\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; h\right)$, $H\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; 0\right)$
Hình chóp $S.ABC$ có $(SAB) \perp (ABC)$, ΔSAB cân tại S , chiều cao của khối chóp bằng h , ΔABC vuông tại A , $AB = a$, $AC = b$		$A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(0;b;0)$, $S\left(\frac{a}{2}; 0; h\right)$, $H\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right)$
Hình chóp $S.ABC$ có $(SAB) \perp (ABC)$, ΔSAB cân tại S , chiều cao của khối chóp bằng h , ΔABC vuông, cân tại C , $CA = CB = a$, $AC = b$		$H(0;0;0)$, $A\left(\frac{a}{\sqrt{2}}; 0; 0\right)$, $B\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}; 0; 0\right)$, $C\left(0; \frac{a}{\sqrt{2}}; 0\right)$, $S(0;0;h)$
Hình chóp $S.ABC$, đáy ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$; $AB = a$, $BC = b$, $SA = c$.		$B(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $C(0;b;0)$, $S(0;0;c)$,
Hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, đáy là ΔABC vuông tại A , $AB = a$, $AC = b$, $AA' = h$		$A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(0;b;0)$, $A'(0;0;h)$, $B'(a;0;h)$, $C'(0;b;h)$.
Hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, đáy là ΔABC đều cạnh a , $AA' = h$		$O(0;0;0)$, $O'(0;0;h)$, $A\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right)$, $B\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, $C\left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right)$, $A'\left(\frac{a}{2}; 0; h\right)$, $B'\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; h\right)$, $C'\left(-\frac{a}{2}; 0; h\right)$.

Đa diện	Cách đặt hệ trục tọa độ	Tọa độ các đỉnh
Hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là $ABCD$ là hình thang cân, $AB = a$, $AD = b$, $AA' = h$, $\angle BAD = \alpha$.		$A(0;0;0)$, $B(a \sin \alpha; a \cos \alpha; 0)$, $C(a \sin \alpha; b - a \cos \alpha; 0)$, $D(0; b; 0)$ $A'(0;0;h)$, $B'(a \sin \alpha; a \cos \alpha; h)$, $C'(a \sin \alpha; b - a \cos \alpha; h)$, $D'(0; b; h)$
Hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, đáy là ABC là tam giác cân tại A , $AA' = h$, $AB = AC = a$, $\angle BAC = \alpha$.		$A(0;0;0)$, $B(a \sin \frac{\alpha}{2}; a \cos \frac{\alpha}{2}; 0)$, $C(-a \sin \frac{\alpha}{2}; a \cos \frac{\alpha}{2}; 0)$, $A'(0;0;h)$, $B'(a \sin \frac{\alpha}{2}; a \cos \frac{\alpha}{2}; h)$, $C'(-a \sin \frac{\alpha}{2}; a \cos \frac{\alpha}{2}; h)$
Hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a , $\angle BAD = \alpha$ và $AA' = h$.		$O(0;0;0)$, $A(0; -a \cos \frac{\alpha}{2}; 0)$, $C(0; a \cos \frac{\alpha}{2}; 0)$, $B(a \sin \frac{\alpha}{2}; 0; 0)$, $D(-a \sin \frac{\alpha}{2}; 0; 0)$, $O'(0;0;h)$, $A'(0; -a \cos \frac{\alpha}{2}; h)$, $C'(0; a \cos \frac{\alpha}{2}; h)$, $B'(a \sin \frac{\alpha}{2}; 0; h)$, $D'(-a \sin \frac{\alpha}{2}; 0; h)$.