

VIETANH SCHOOL 2

TOÁN 11

TẬP 1



*Tài liệu soạn theo bộ sách
Chân trời sáng tạo*

Họ và tên:.....Lớp.....

NĂM HỌC 2023- 2024

Phần 1

Đại số và một số yếu tố giải tích

Chương 1.

Hàm số lượng giác

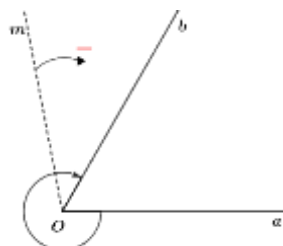
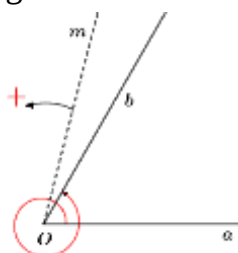
Phương trình lượng giác

Bài 1. Góc lượng giác

1. Góc lượng giác

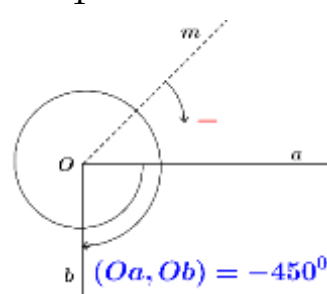
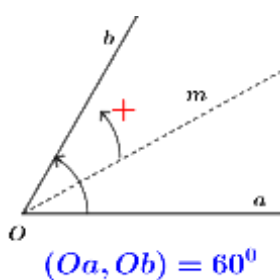
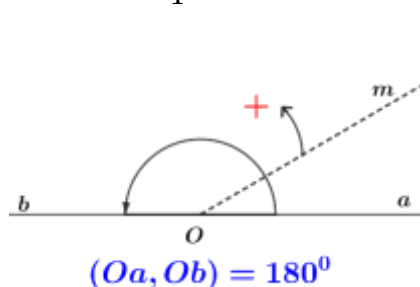
a. Khái niệm

- Cho hai tia Oa, Ob .
- + Nếu một tia Om tùy ý quay quanh gốc O theo một chiều nhất định từ Oa đến Ob , thì ta nói nó quét một góc lượng giác, với tia đầu là Oa và tia cuối là Ob . Kí hiệu (Oa, Ob) .
- + Khi tia Om quay một góc α thì ta nói số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) bằng α .
Kí hiệu $sđ(Oa, Ob) = \alpha$ hoặc $(Oa, Ob) = \alpha$.
- Quy ước:
 - + Chiều quay ngược với chiều qua của kim đồng hồ là **chiều dương**, chiều quay cùng với chiều qua của kim đồng hồ là **chiều âm**.



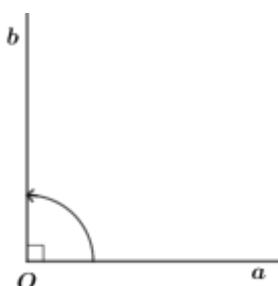
- + Một vòng quay theo chiều dương tương ứng với góc 360° ; một vòng quay theo chiều âm tương ứng với góc quay -360° . Cụ thể, khi tia Om quay:

- nửa vòng theo chiều dương thì ta nói nó đã quay một góc bằng $\frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$.
- $\frac{1}{6}$ vòng theo chiều dương thì ta nói nó đã quay một góc bằng $\frac{1}{6} \cdot 360^\circ = 60^\circ$.
- $\frac{5}{4}$ vòng theo chiều âm thì ta nói nó đã quay một góc bằng $\frac{5}{4} \cdot (-360^\circ) = -450^\circ$.

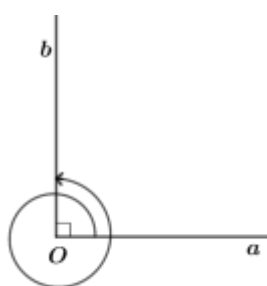


- + Nhận xét: Số đo mỗi góc lượng giác có cùng tia đầu Oa , tia cuối Ob sai khác nhau một bội nguyên của 360° nên có công thức tổng quát là $(Oa, Ob) = \alpha^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

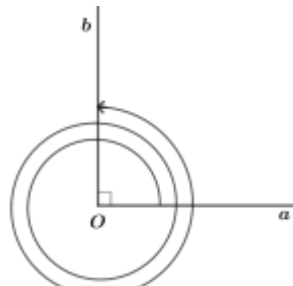
Ví dụ 1. (CTST - Tr8) Xác định số đo các góc lượng giác (Oa, Ob) trong các hình vẽ sau và viết công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (Oa, Ob) .



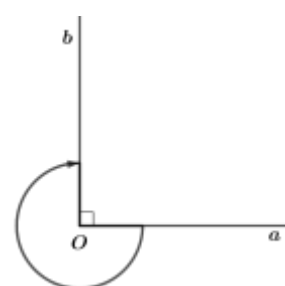
a)



b)



c)

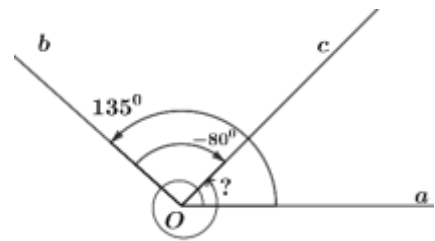


d)

b. Hệ thức Chasles

Ví dụ 2. (CTST - Tr9) Cho hình vẽ bên

- Xác định số đo các góc lượng giác (Oa, Ob) , (Ob, Oc) và (Oa, Oc) .
- Nhận xét về mối quan hệ giữa ba số đo góc này?



Kết luận

Với ba tia Oa , Ob và Oc bất kì, ta có: $(Oa, Ob) + (Ob, Oc) = (Oa, Oc) + k.360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

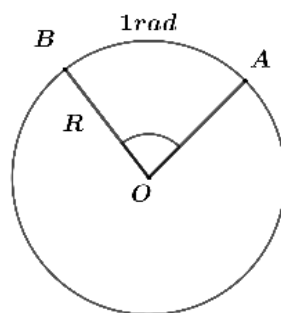
2. Đơn vị đo góc và độ dài cung tròn

a. Đơn vị đo góc và cung tròn

– Đơn vị độ:

- + Để đo góc ta dùng đơn vị độ.
- + Đơn vị độ được chia thành các đơn vị nhỏ hơn, như: $1^\circ = 60'$; $1' = 60''$.

– Đơn vị radian:



Trên đường tròn tâm O , bán kính R tùy ý, góc ở tâm chắn một cung có độ dài đúng bằng R được gọi là một góc có số đo 1 radian. Kí hiệu $AOB = 1 \text{ rad}$.

– Quan hệ giữa độ và radian

- + Vì góc bẹt (180°) chắn nửa đường tròn với độ dài πR nên nó có số đo là $\pi \text{ rad}$.

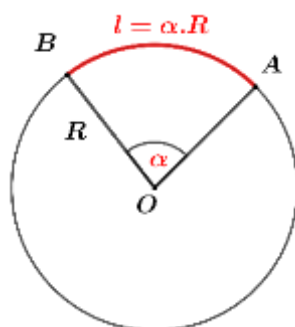
Khi đó ta viết $180^\circ = \pi \text{ rad}$. Vậy ta có mối quan hệ $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$ và $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$

- + Chú ý: Khi viết số đo của một góc theo đơn vị radian, người ta thường không viết chữ “rad” sau số đo đó.

Ví dụ 3. (CTST - Tr10) Hoàn thành bảng chuyển đổi đơn vị đo của các góc sau đây

Số đo theo độ	0°	?	45°	60°	?	120°	?	150°	180°
Số đo theo radian	?	$\frac{\pi}{6}$	?	?	$\frac{\pi}{2}$	?	$\frac{3\pi}{4}$	?	π

b. Độ dài cung tròn

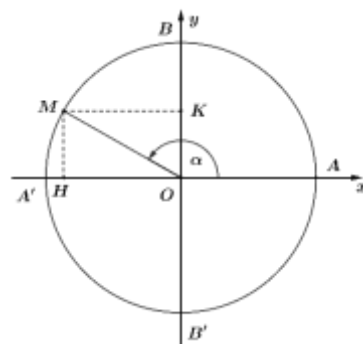


Một cung của đường tròn bán kính R có số đo $\alpha \text{ rad}$ thì có độ dài $l = \alpha R$.

Bài 2. Giá trị lượng giác của một góc

1. Đường tròn lượng giác

- Đường tròn lượng giác là đường tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính bằng 1, được định hướng và lấy điểm $A(1;0)$ làm điểm gốc của đường tròn.
- Điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo α (độ hoặc radian) là điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA, OM) = \alpha$.



2. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

- Trên đường tròn lượng giác, gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo α . Khi đó
 - + Tung độ y của điểm M gọi là **sin** của α , kí hiệu là $\sin \alpha$. Ta viết $\sin \alpha = y = \overline{OK}$.
 - + Hoành độ x của điểm M gọi là **côsin** của α , kí hiệu là $\cos \alpha$. Ta viết $\cos \alpha = x = \overline{OH}$.
 - + Nếu $\cos \alpha \neq 0$ thì tỉ số $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ gọi là **tang** của α , kí hiệu là $\tan \alpha$. Ta viết $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{x}$.
 - + Nếu $\sin \alpha \neq 0$ thì tỉ số $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ gọi là **côtang** của α , kí hiệu là $\cot \alpha$. Ta viết $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{x}{y}$.
 - + Các giá trị $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ được gọi là giá trị lượng giác của góc α .
- Chú ý
 - + Ta gọi trục tung là trục sin, trục hoành là trục côsin.
 - + Từ định nghĩa ta còn suy ra:
 - $\sin \alpha, \cos \alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - $\tan \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 - $\cot \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 - $-1 \leq \sin \alpha \leq 1, -1 \leq \cos \alpha \leq 1$.
 - Với mọi $k \in \mathbb{Z}$, ta có

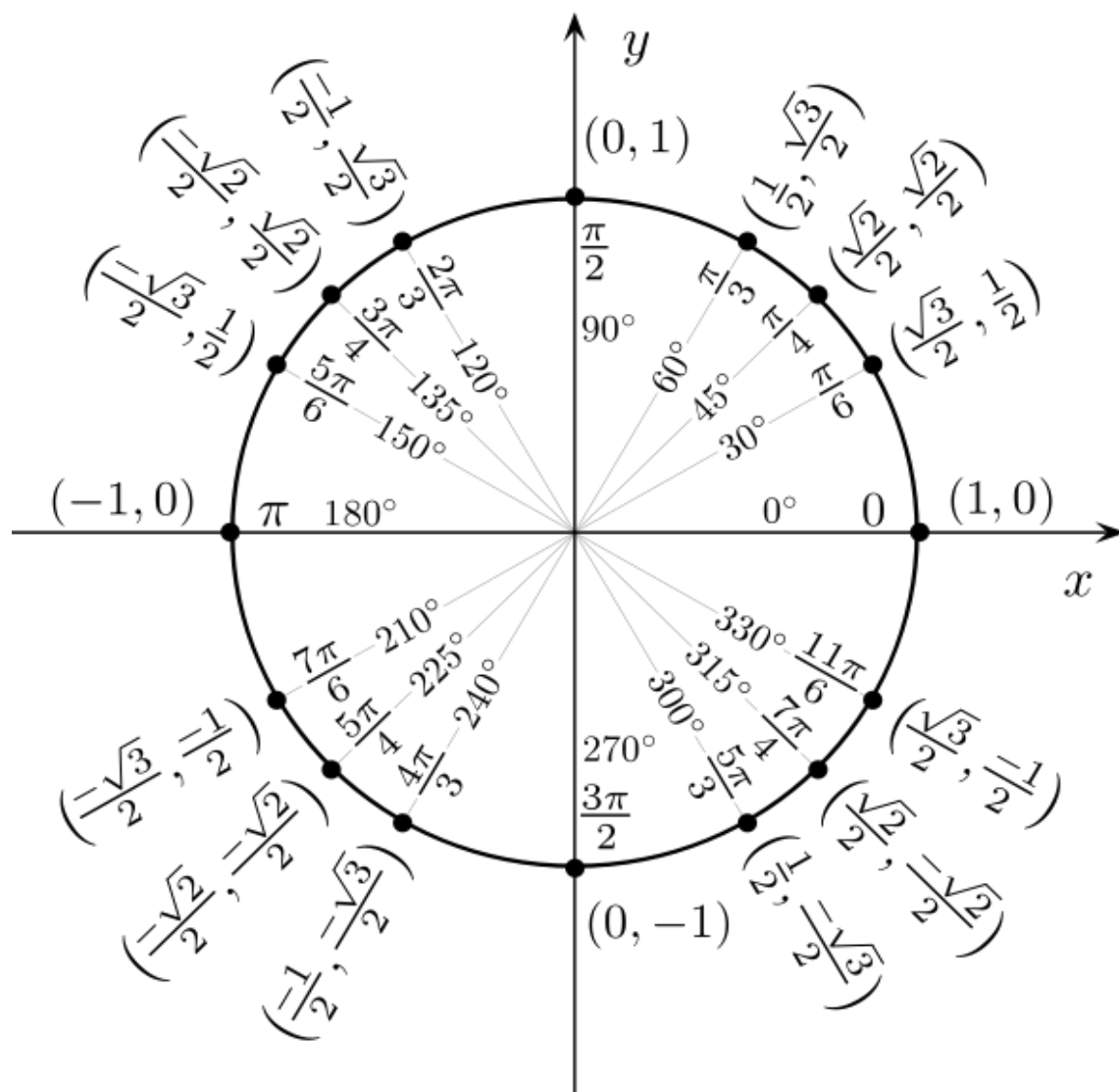
$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha$
 $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha$

$\tan(\alpha + k2\pi) = \tan \alpha$
 $\cot(\alpha + k2\pi) = \cot \alpha$
 - Dấu của giá trị lượng giác phụ thuộc vào vị trí của điểm M trên đường tròn lượng giác

Góc phần tư Giá trị lượng giác	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

3. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

Rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Độ	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	180^0	270^0	360^0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$	$-\sqrt{3}$	-1	0	$\parallel$	0
cot	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$\parallel$	0	$\parallel$



4. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

Quan hệ	Công thức	Minh họa
Góc đối nhau α và $-\alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$	
Góc bù nhau α và $\pi - \alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$	
Góc phụ nhau α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$	
Góc hơn kém π α và $\pi + \alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$ $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$	

5. Các hệ thức lượng giác cơ bản

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ với } \cos \alpha \neq 0.$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1.$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \text{ với } \sin \alpha \neq 0.$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Ví dụ. (CTST - Tr17) Cho $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, với $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của α

6. Bài tập

DẠNG 1. TÌM GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG (GÓC)

Bài 1. Tính giá trị còn lại của góc x , biết

1) $\sin x = \frac{1}{2}$ với $90^\circ < x < 180^\circ$.

2) $\sin x = -\frac{4}{5}$ với $270^\circ < x < 360^\circ$.

3) $\sin x = -\frac{3}{5}$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

4) $\cos x = \frac{1}{4}$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

5) $\cos x = \frac{3}{5}$ với $0 < x < 90^\circ$.

6) $\cos x = -\frac{5}{13}$ với $180^\circ < x < 270^\circ$.

7) $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ với $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

8) $\cos x = \frac{4}{5}$ với $270^\circ < x < 360^\circ$.

9) $\sin x = \frac{5}{13}$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

10) $\sin x = -\frac{1}{3}$ với $180^\circ < x < 270^\circ$.

11) $\tan x = 3$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

12) $\tan x = -2$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

13) $\tan x = -\frac{1}{2}$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

14) $\cot x = 3$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

15) $\tan x = \frac{3}{4}$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

16) $\tan x = -\sqrt{2}$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

17) $\cot x = \frac{2}{3}$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

18) $\cot x = -\sqrt{3}$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Bài 2. Tính giá trị của các biểu thức lượng giác sau

1) Cho $\tan x = -2$. Tính $A_1 = \frac{5\cot x + 4\tan x}{5\cot x - 4\tan x}$, $A_2 = \frac{2\sin x + \cos x}{\cos x - 3\sin x}$.

2) Cho $\cot x = \sqrt{2}$. Tính $B_1 = \frac{3\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$, $B_2 = \frac{\sin x - 3\cos x}{\sin x + 3\cos x}$.

3) Cho $\cot x = 2$. Tính $C_1 = \frac{2\sin x + 3\cos x}{3\sin x - 2\cos x}$, $C_2 = \frac{2}{\cos^2 x - \sin x \cos x}$.

4) Cho $\tan x = 2$. Tính

$$D_1 = \frac{2\sin x + 3\cos x}{4\sin x - 5\cos x},$$

$$D_2 = \frac{3\sin x - 2\cos x}{5\sin^3 x + 4\cos^3 x},$$

$$D_3 = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x + \sin^2 x \cos x},$$

$$D_4 = \frac{8\cos^3 x - 2\sin^3 x + \cos x}{2\cos x - \sin^3 x}.$$

5) Cho $\sin x = \frac{3}{5}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Tính $E = \frac{\cot x + \tan x}{\cot x - \tan x}$.

6) Cho $\sin x = \frac{1}{3}$, $90^\circ < x < 180^\circ$. Tính $F = \frac{8\tan^2 x + 3\cot x - 1}{\tan x + \cot x}$.

7) Cho $\cos x = -\frac{2}{3}$. Tính $G = \frac{\cot x + 3\tan x}{2\cot x + \tan x}$.

Bài 3. Cho $\sin x + \cos x = \frac{5}{4}$. Hãy tính giá trị của biểu thức sau

1) $A = \sin x \cdot \cos x$.

2) $B = \sin x - \cos x$.

3) $C = \sin^3 x - \cos^3 x$.

Bài 4. Cho $\tan x - \cot x = 3$. Hãy tính giá trị của biểu thức sau

1) $A = \tan^2 x + \cot^2 x$.

2) $B = \tan x + \cot x$.

Bài 5. Cho $\sin x + \cos x = m$. Hãy tính theo m giá trị các biểu thức

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 1) $A = \sin x \cos x$. | 2) $B = \sin^3 x + \cos^3 x$. |
| 3) $C = \sin^4 x + \cos^4 x$. | 4) $D = \sin x - \cos x $. |
| 5) $E = \tan^2 x + \cot^2 x$. | 6) $F = \sin^6 x + \cos^6 x$. |

Bài 6. Tính $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$. Biết rằng

- | | |
|--------------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$. | 2) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$. |
| 3) $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$. | 4) $\tan x + \cot x = 4$. |

Bài 7. Cho $\tan x - 2 \cot x = -1$. Hãy tính

- 1) $A = \tan^2 x - \cot^2 x$.
- 2) $B = \tan^3 x + \cot^3 x$.
- 3) $C = \tan^4 x + 2 \cot^4 x$.

Bài 8. Tính giá trị của các biểu thức sau đây khi

- 1) Cho $3 \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$. Tính $A = \sin^4 x + 3 \cos^4 x$.
- 2) Cho $3 \sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$. Tính $B = \sin^4 x + 3 \cos^4 x$.
- 3) Cho $4 \sin^4 x + 3 \cos^4 x = \frac{7}{4}$. Tính $C = 3 \sin^4 x + 4 \cos^4 x$.

Bài 9. Chứng minh các đẳng thức sau

- | | |
|--|--|
| 1) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$. | 2) $2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$. |
| 3) $3 - 4 \sin^2 x = 4 \cos^2 x - 1$. | 4) $\sin x \cot x + \cos x \tan x = \sin x + \cos x$. |
| 5) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$. | 6) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$. |
| 7) $4 \cos^2 x - 3 = (1 - 2 \sin x)(1 + 2 \sin x)$. | 8) $(1 + \cos x)(\sin^2 x - \cos x + \cos^2 x) = \sin^2 x$ |
| 9) $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \cos^2 x = 2 \sin^2 x - 1$. | 10) $\sin^3 x \cos x + \sin x \cos^3 x = \sin x \cos x$. |
| 11) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x$. | 12) $\cot^2 x - \cos^2 x = \cot^2 x \cos^2 x$. |

Bài 10. Chứng minh các đẳng thức sau

- | | |
|---|--|
| 1) $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$. | 2) $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$. |
| 3) $\frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x} = 1$. | 4) $\left(1 - \frac{1}{\cos x}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) + \tan^2 x = 0$. |
| 5) $\frac{1 + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = 1 + 2 \tan^2 x$. | 6) $\tan x \tan y = \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y}$. |
| 7) $1 - \cot^4 x = \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin^4 x}$. | 8) $\tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1}{\cos x}$. |

Bài 11. Chứng minh các đẳng thức sau

- 1) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$.
- 2) $\sin^6 x - \cos^6 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(1 - \sin^2 x \cos^2 x)$.
- 3) $\sin^8 x + \cos^8 x = (1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x)^2 - 2 \sin^4 x \cos^4 x$.
- 4) $\sin^8 x - \cos^8 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x)$.

Bài 12. Chứng minh các đẳng thức sau

- 1) $1 + \sin x + \cos x + \tan x = (1 + \cos x)(1 + \tan x).$
- 2) $(1 + \tan x)(1 + \cot x) \sin x \cos x = 1 + 2 \sin x \cos x.$
- 3) $(1 + \tan x) \cos^2 x + (1 + \cot x) \sin^2 x = (\sin x + \cos x)^2.$
- 4) $\sin^2 x \tan x + \cos^2 x \cot x + 2 \sin x \cos x = \tan x + \cot x.$
- 5) $\sin^2 x \tan^2 x + 4 \sin^2 x - \tan^2 x + 3 \cos^2 x = 3.$

Bài 13. Chứng minh các đẳng thức sau

- 1) $\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1}.$
- 2) $\frac{\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cot^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \tan^6 \alpha.$
- 3) $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \tan \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cot \alpha} = 1 - \sin \alpha \cos \alpha.$
- 4) $\frac{\tan \alpha - \sin \alpha}{\sin^3 \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha (1 + \cos \alpha)}.$
- 5) $\frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2.$
- 6) $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \tan^2 \alpha = \frac{3 \tan^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1.$
- 7) $\frac{\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta}{\tan^2 \alpha \tan^2 \beta} = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}.$
- 8) $\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \left[\frac{(1 + \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha} - 1 \right] = 2 \cot \alpha.$
- 9) $(1 - \cos \alpha)(1 + \cot^2 \alpha) = \frac{1}{1 + \cos \alpha}.$
- 10) $1 + \tan \alpha + \tan^2 \alpha + \tan^3 \alpha = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos^3 \alpha}.$
- 11) $\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{1 + \cot^2 \alpha}{1 - \cot^2 \alpha}.$
- 12) $\frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \cdot \frac{1 + \cot^2 \alpha}{\cot^2 \alpha} = \frac{1 + \tan^4 \alpha}{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha}.$
- 13) $\left(\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} \right)^2 = 4 \tan^2 \alpha.$
- 14) $\left(\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \right)^2 = 4 \cot^2 \alpha.$

Bài 14. Rút gọn các biểu thức sau

- 1) $P_1 = \sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha.$
- 2) $P_2 = \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha.$
- 3) $P_3 = \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cot^2 \alpha.$
- 4) $P_4 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cot^2 \alpha.$
- 5) $P_5 = (1 - \sin^2 \alpha) \cot^2 \alpha + 1 - \cot^2 \alpha.$
- 6) $P_6 = \sin^2 \alpha \tan \alpha + \cos^2 \alpha \cot \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- 7) $P_7 = \frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{\sin \alpha + \cos \alpha}.$
- 8) $P_8 = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha}.$
- 9) $P_9 = \frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}.$
- 10) $P_{10} = \tan \alpha + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}.$
- 11) $P_{11} = \frac{\sin x + \tan x}{\tan x} - \sin x \cot x.$
- 12) $P_{12} = \frac{\cos x \tan x}{\sin^2 x} - \cot x \cos x.$
- 13) $P_{13} = \frac{\cos^2 x - \cot^2 x}{\sin^2 x - \tan^2 x}.$
- 14) $P_{14} = \frac{1 - \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x} - \cos^2 x.$
- 15) $P_{15} = \frac{\sin^3 x + \sin x \cos^2 x - \cos x}{1 - 2 \sin x \cos x}.$
- 16) $P_{16} = \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\tan x - \sin x \cos x}.$

Bài 15. Biến đổi các biểu thức sau thành tích số

- 1) $A = 2 \cos^2 x - 1.$
- 2) $B = 3 - 4 \sin^2 x.$
- 3) $C = \sin x \cos x + \cos^2 x - 1.$
- 4) $D = \sin^2 x + \sin x \cos x - 1.$
- 5) $E = 1 + \sin x + \cos x + \tan x.$
- 6) $F = \tan x - \cot x + \sin x + \cos x.$
- 7) $G = \cos x \tan^2 x - (1 + \cos x).$
- 8) $H = (3 - 4 \cos^2 x) - \sin x (2 \sin x + 1).$
- 9) $I = \sin^2 x - 3 \cos^2 x + \sqrt{6} \cos x - \sqrt{2} \sin x.$
- 10) $J = \cos^3 x - \sin^3 x + \sin x + \cos x.$
- 11) $K = \cos^3 x + \cos^2 x + 2 \sin x - 2.$
- 12) $L = \cos^2 x + \sin^3 x + \cos x.$
- 13) $M = 1 + \cos x + \cos^2 x - \sin x (1 + \cos x).$
- 14) $N = 2 \cos^3 x + 2 \cos^2 x + \sin x - 1.$
- 15) $O = \cos^3 x + \sin^3 x + 2 \sin^2 x - 1.$
- 16) $Q = (2 \cos x - 1)(\sin x + \cos x) - 1.$
- 17) $R = 4 \sin^3 x + 3 \cos^3 x - 3 \sin x - \sin^2 x \cos x.$
- 18) $S = (1 + \sin x) \tan^2 x - (1 + \cos x).$
- 19) $T = 2 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x + 3 \sin x - \cos x - 1.$
- 20) $U = 2 - 5 \sin x + 3(1 - \sin x) \tan^2 x.$
- 21) $V = \tan x - 3 \cot x - 4(\sin x + \sqrt{3} \cos x).$
- 22) $X = 3 \sin x + 2 \cos x - 3 \tan x - 2.$
- 23) $Y = 2(\tan x - \sin x) + 3(\cot x - \cos x) + 5.$
- 24) $Z = 3(\cot x - \cos x) - 5(\tan x - \sin x) - 2$

Bài 16. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến x

- 1) $A = \cos^4 x - \sin^4 x + 2 \sin^2 x.$
- 2) $B = \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x.$
- 3) $C = \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin^2 x.$
- 4) $D = \cos^4 x (2 \cos^2 x - 3) + \sin^4 x (2 \sin^2 x - 3)$
- 5) $E = \sin^6 x + \cos^6 x - 2 \sin^4 x - \cos^4 x + \sin^2 x.$
- 6) $F = \sin x \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}}, \left(0 < x < \frac{\pi}{4} \right).$
- 7) $G = \sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x}.$
- 8) $H = \cos^2 x \cot^2 x + 5 \cos^2 x - \cot^2 x + 4 \sin^2 x.$
- 9) $I = (1 + \cot x) \sin^3 x + (1 + \tan x) \cos^3 x - \sin x - \cos x.$
- 10) $J = (\sin^4 x + \cos^4 x - 1)(\tan^2 x + \cot^2 x + 2).$
- 11) $K = 3(\sin^8 x - \cos^8 x) + 4(\cos^6 x - 2 \sin^6 x) + 6 \sin^4 x.$
- 12) $L = \sin^4 x (1 + \sin^2 x) + \cos^4 x (1 + \cos^2 x) + 5 \sin^2 x \cos^2 x + 1.$
- 13) $M = 2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x).$

Bài 17. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến x

- 1) $A = \frac{2}{\tan x - 1} + \frac{\cot x + 1}{\cot x - 1}.$
- 2) $B = \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x}.$
- 3) $C = \frac{1 - \tan^2 x}{\tan x} - (1 + \tan^2 x)(1 + \cot^2 x).$
- 4) $D = \frac{(1 - \cot^2 x)^2}{\cot^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}.$
- 5) $E = \frac{1 - \sin^6 x}{\cos^6 x} - \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x}.$
- 6) $F = \frac{\tan^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cot^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}.$
- 7) $G = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cot x}.$
- 8) $H = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x}.$

DẠNG 2. DÙNG CUNG LIÊN KẾT ĐỂ TÍNH GIÁ TRỊ RÚT GỌN BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

Bài 18. Tính các giá trị lượng giác của các góc sau

- | | | |
|-------------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| 1) $\sin(x - 90^\circ)$. | 2) $\cos(180^\circ + x)$. | 3) $\sin(270^\circ - x)$. |
| 4) $\sin(x - 180^\circ)$. | 5) $\cos(x + 540^\circ)$. | 6) $\cot(180^\circ + x)$. |
| 7) $\sin(x - 540^\circ)$. | 8) $\tan(360^\circ - x)$. | 9) $\cos(450^\circ + x)$. |
| 10) $\sin^2(270^\circ + x)$. | 11) $\cos^3(90^\circ + x)$. | 12) $\cot^5(180^\circ - x)$. |

Bài 19. Tính các giá trị lượng giác của các góc sau

- | | | |
|---|--|--|
| 1) $\cot(x - \pi)$. | 2) $\sin(\pi + x)$. | 3) $\tan(2\pi - x)$. |
| 4) $\cot(3\pi - x)$. | 5) $\sin(x - 7\pi)$. | 6) $\tan(x - 5\pi)$. |
| 7) $\sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)$. | 8) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$. | 9) $\cot\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$. |
| 10) $\cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)$. | 11) $\tan\left(\frac{11\pi}{2} + x\right)$. | 12) $\sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right)$. |
| 13) $\sin^2(\pi + x)$. | 14) $\cos^9(\pi - x)$. | 15) $\cot^{11}(x - 3\pi)$. |
| 16) $\cos^4(3\pi + x)$. | 17) $\cot^2(x - 5\pi)$. | 18) $\cos^6(x - \pi)$. |
| 19) $\cos^8\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$. | 20) $\cos^5\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. | 21) $\sin^{2019}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. |
| 22) $\tan^2\left(x - \frac{9\pi}{2}\right)$. | 23) $\cos^{2017}\left(x + \frac{7\pi}{2}\right)$. | 24) $\sin^{1987}\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$. |
| 25) $\cos^{2018}\left(x - \frac{11\pi}{2}\right)$. | 26) $\cot^2\left(x - \frac{9\pi}{2}\right)$. | 27) $\tan^{11}\left(\frac{11\pi}{2} + x\right)$. |

Bài 20. Rút gọn (đơn giản) các biểu thức

- 1) $A = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(x - \pi)$.
- 2) $B = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.
- 3) $C = 2\cos x + 3\cos(\pi - x) - \sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.
- 4) $D = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(5\pi - x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.
- 5) $E = 2\cos x - 3\cos(\pi - x) + 5\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.
- 6) $F = \sin(5\pi + x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cot(3\pi - x) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.
- 7) $G = \cos(15\pi - x) + \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cot\left(\frac{11\pi}{2} - x\right)$.
- 8) $H = \sin(\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi - x) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

- 9) $I = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x).$
- 10) $J = \cos(270^\circ - x) - 2\sin(x - 450^\circ) + \cos(x + 900^\circ) + 2\sin(270^\circ - x).$
- 11) $K = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin^2\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) + \sin^2(x + \pi).$
- 12) $L = \sin^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{9} + \sin^2 \frac{2\pi}{9} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}.$
- 13) $M = \cos^{2023} x + \cos^{2023}(\pi + x) \cdot \sin^{2022}(\pi + x) - \sin^{2021}\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$
- 14) $N = \sin^6(\pi + x) + \cos^6(x - \pi) - 2\sin^4(x + 2\pi) - \sin^4\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$
- 15) $O = \frac{\tan\left(\frac{19\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(36\pi - x) \cdot \sin(x - 5\pi)}{\sin\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(x - 99\pi)}.$
- 16) $P = \sin\left(x + \frac{85\pi}{2}\right) + \cos(207\pi + x) + \sin^2(33\pi + x) + \sin^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right).$

Bài 21. Rút gọn và tính giá trị của biểu thức (không dùng máy tính)

- 1) $A = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 180^\circ.$
- 2) $B = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 180^\circ.$
- 3) $C = \cos 10^\circ + \cos 40^\circ + \cos 70^\circ + \dots + \cos 170^\circ.$
- 4) $D = \tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \tan 60^\circ + \dots + \tan 180^\circ.$
- 5) $E = \cot 15^\circ + \cot 30^\circ + \cot 45^\circ + \dots + \cot 165^\circ.$
- 6) $F = \sin 5^\circ + \sin 10^\circ + \sin 15^\circ + \dots + \sin 360^\circ.$
- 7) $G = \cot 195^\circ + \cot 210^\circ + \cot 225^\circ + \dots + \cot 345^\circ.$
- 8) $H = \cot 15^\circ \cdot \cot 35^\circ \cdot \cot 55^\circ \cdot \cot 75^\circ.$
- 9) $I = \tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \dots \tan 80^\circ.$
- 10) $J = \tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ.$
- 11) $K = \sin^2 28^\circ + \sin^2 36^\circ + \sin^2 54^\circ + \cos^2 152^\circ.$
- 12) $L = \cos^2 2^\circ + \cos^2 4^\circ + \cos^2 6^\circ + \dots + \cos^2 88^\circ.$
- 13) $M = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 90^\circ.$
- 14) $N = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \dots + \cos^2 180^\circ$
- 15) $O = \sin 20^\circ + \sin 40^\circ + \sin 60^\circ + \dots + \sin 340^\circ + \sin 360^\circ.$

Bài 22. Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $A = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x).$
- b) $B = 2\cos x - 3\cos(\pi - x) + 5\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right).$
- c) $C = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(5\pi - x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$
- d) $D = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x).$

DẠNG 3. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Bài 23. Chứng minh các đẳng thức sau

- a) $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x$.
- b) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x \cdot \sin^2 x$.
- c) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x$.
- d) $\frac{\sin x + \cos x - 1}{1 - \cos x} = \frac{2\cos x}{\sin x - \cos x + 1}$.
- e) $\cot^2 x - \cos^2 x = \cos^2 x \cdot \cot^2 x$.
- f) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$.
- g) $1 + \sin x + \cos x + \tan x = (1 + \cos x)(1 + \tan x)$.
- h) $\frac{1 + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = 1 + \tan^2 x$
- i) $\sin^2 x \cdot \tan x + \cos^2 x \cdot \cot x + 2\sin x \cdot \cos x = \tan x + \cot x$.
- k) $\sin^8 x + \cos^8 x = 1 - 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x + 2\sin^4 x \cdot \cos^4 x$

Bài 24. Chứng minh các đẳng thức sau

- a) $\tan a \cdot \tan b = \frac{\tan a + \tan b}{\cot a + \cot b}$.
- b) $\frac{\sin a}{\sin a - \cos a} - \frac{\cos a}{\cos a - \sin a} = \frac{1 + \cot^2 a}{1 - \cot^2 a}$.
- c) $1 - \frac{\sin^2 a}{1 + \cot a} - \frac{\cos^2 a}{1 + \tan a} = \sin a \cdot \cos a$.
- d) $\frac{\sin^2 a}{\sin a - \cos a} - \frac{\sin a + \cos a}{\tan^2 a - 1} = \sin a + \cos a$.
- e) $\frac{1 + \cos a}{\sin a} \left[1 - \frac{(1 - \cos a)^2}{\sin^2 a} \right] = 2\cot a$.
- f) $\frac{\tan^2 a}{1 + \tan^2 a} \cdot \frac{1 + \cot^2 a}{\cot^2 a} = \frac{1 + \tan^4 a}{\tan^2 a + \cot^2 a}$.
- g) $\left(\sqrt{\frac{1 + \sin a}{1 - \sin a}} - \sqrt{\frac{1 - \sin a}{1 + \sin a}} \right)^2 = 4\tan^2 a$.
- h) $\frac{\tan^2 a - \tan^2 b}{\tan^2 a \cdot \tan^2 b} = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin^2 a \cdot \sin^2 b}$.
- i) $\frac{\sin^2 a - \tan^2 a}{\cos^2 a - \cot^2 a} = \tan^6 a$.
- k) $\frac{\tan^3 a}{\sin^2 a} - \frac{1}{\sin a \cdot \cos a} + \frac{\cot^3 a}{\cos^2 a} = \tan^3 a + \cot^3 a$

Bài 25. Cho $\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}$, với $a, b > 0$.

Chứng minh $\frac{\sin^8 x}{a^3} + \frac{\cos^8 x}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}$.

Bài 26. Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $(1 - \sin^2 x) \cot^2 x + 1 - \cot^2 x$.
- b) $(\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$.
- c) $\frac{\cos^2 x + \cos^2 x \cdot \cot^2 x}{\sin^2 x + \sin^2 x \cdot \tan^2 x}$.
- d) $(x \cdot \sin a - y \cdot \cos a)^2 + (x \cdot \cos a + y \cdot \sin a)^2$.
- e) $\frac{\sin^2 x - \tan^2 x}{\cos^2 a - \cot^2 x}$.
- f) $\frac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^4 x}$.
- g) $\sqrt{\sin^2 x(1 + \cot x) + \cos^2 x(1 + \tan x)}$.
- h) $\sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} - \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}; \quad x \in (0, \pi)$.
- i) $\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} + \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}; \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- k) $\cos x - \sqrt{\tan^2 x - \sin^2 x}; \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Bài 27. Chứng minh các biểu thức sau độc lập đối với x

- a) $3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$.
- b) $\frac{\sin^6 x + \cos^6 x - 1}{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}$.
- c) $(\sin^4 x + \cos^4 x - 1)(\tan^2 x + \cot^2 x + 2)$.
- d) $\cos^2 x \cdot \cot^2 x + 3 \cos^2 x - \cot^2 x + 2 \sin^2 x$.
- e) $\frac{\sin^4 x + 3 \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x + 3 \cos^4 x - 1}$.
- f) $\frac{\tan^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cot^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}$.

Bài 28. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

- a) $\sin B = \sin(A + C)$.
- b) $\cos(A + B) = -\cos C$.
- c) $\sin \frac{A + B}{2} = \cos \frac{C}{2}$.
- d) $\cos(B - C) = -\cos(A + 2C)$.
- e) $\cos(A + B - C) = -\cos 2C$.
- f) $\cos \frac{-3A + B + C}{2} = -\sin 2A$.
- g) $\sin \frac{A + B + 3C}{2} = \cos C$.
- h) $\tan \frac{A + B - 2C}{2} = \cot \frac{3C}{2}$.

Bài 3. Các công thức lượng giác

1. Công thức cộng

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$\text{Hệ quả: } \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha},$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}.$$

Ví dụ 1. (CÁNH DIỀU - Tr17) Không dùng máy tính, hãy tính

a) $\cos 75^\circ$.

b) $\tan \frac{\pi}{12}$.

Ví dụ 2. (CÁNH DIỀU - Tr18)

a) Chứng minh rằng $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

b) Chứng minh rằng $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha}$.

2. Công thức nhân đôi

a. Công thức nhân đôi

① $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

② $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

③ $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$.

④ $\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$.

b. Công thức hạ bậc

① $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$.

② $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$.

③ $\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$.

c. Công thức nhân ba (mở rộng)

① $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$.

② $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$.

③ $\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$.

Ví dụ 3. (CÁNH DIỀU - Tr18) Cho $\cos x = -\frac{1}{3}$, với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Tính $\sin 2x$ và $\cos 2x$.

Ví dụ 4. (CTST - Tr22) Không dùng máy tính, hãy tính $\cos \frac{\pi}{8}$ và $\tan \frac{\pi}{8}$.

3. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$

Ví dụ 5. (CTST - Tr22) Tính giá trị biểu thức $\cos \frac{11\pi}{12} \cdot \cos \frac{7\pi}{12}$ và $\sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{5\pi}{24}$.

4. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b}$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cot a + \cot b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \cdot \sin b}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\cot a - \cot b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \cdot \sin b}$$

Hệ quả:

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$$

Ví dụ 6. (CTST - Tr23) Tính giá trị biểu thức $\sin \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}$ và $\cos \frac{5\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}$.

5. Bài tập

DẠNG 1. CÔNG THỨC CỘNG

Bài 29. Tính giá trị của biểu thức lượng giác, khi biết:

1) $A = \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$ biết $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

2) $B = \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$ biết $\cos x = -\frac{12}{13}$ và $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

3) $C = \cos(x - 30^\circ)$ biết $\tan x = \sqrt{2}$ và $0 < x < 90^\circ$.

4) $D = \tan \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$ biết $\sin x = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

5) $E = \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$ biết $\sin x = -\frac{12}{13}$ và $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

6) $F = \cot \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$ biết $\sin x = -\frac{4}{5}$ và $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

$$7) \quad G = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ biết } \cot\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = 2.$$

$$8) \quad H = \sin\left(2x + \frac{7\pi}{4}\right) \text{ biết } \cot x = \frac{2}{3}.$$

$$9) \quad I = \cos(a+b) \cdot \cos(a-b) \text{ biết } \cos a = \frac{1}{3} \text{ và } \cos b = \frac{1}{4}.$$

$$10) \quad \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \text{ khi } \sin \alpha = \frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

$$11) \quad \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \text{ khi } \sin \alpha = -\frac{12}{13}, \text{ với } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$$

$$12) \quad \cos(a+b) \cdot \cos(a-b) \text{ khi } \cos a = \frac{1}{3}, \cos b = \frac{1}{4}$$

$$13) \quad \sin(a-b), \cos(a+b), \tan(a+b) \text{ khi } \sin a = \frac{8}{17}, \tan b = \frac{5}{12} \text{ và } a, b \text{ là các góc nhọn.}$$

Bài 30. Không dùng máy tính. Hãy tính giá trị của các biểu thức

$$1) \quad A = \sin 12^\circ \cdot \cos 48^\circ + \cos 12^\circ \cdot \sin 48^\circ.$$

$$2) \quad B = \cos 38^\circ \cdot \cos 22^\circ - \sin 38^\circ \cdot \sin 22^\circ.$$

$$3) \quad C = \sin 10^\circ \cdot \cos 55^\circ - \cos 10^\circ \cdot \sin 55^\circ.$$

$$4) \quad D = \sin 36^\circ \cdot \cos 6^\circ - \sin 126^\circ \cdot \cos 84^\circ.$$

Bài 31. Tính giá trị lượng giác của các cung góc sau

$$1) \quad 15^\circ. \quad 2) \quad 75^\circ. \quad 3) \quad 105^\circ. \quad 4) \quad 285^\circ.$$

$$5) \quad \frac{19\pi}{12}. \quad 6) \quad \frac{5\pi}{12}. \quad 7) \quad \frac{7\pi}{12}. \quad 8) \quad \frac{13\pi}{12}.$$

Bài 32. Tính giá trị của các biểu thức sau

$$1) \quad A = \frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ}.$$

$$2) \quad B = \frac{\tan 25^\circ + \tan 20^\circ}{1 - \tan 25^\circ \tan 20^\circ}.$$

$$3) \quad C = \frac{\sin 10^\circ \cos 20^\circ + \sin 20^\circ \cos 10^\circ}{\cos 17^\circ \cos 13^\circ - \sin 17^\circ \sin 13^\circ}.$$

$$4) \quad D = \frac{\tan 225^\circ - \cot 81^\circ \cot 69^\circ}{\cot 261^\circ + \tan 201^\circ}.$$

$$5) \quad E = \frac{\sin 73^\circ \cos 3^\circ - \sin 87^\circ \cos 17^\circ}{\cos 132^\circ \cos 62^\circ + \cos 42^\circ \cos 28^\circ}.$$

$$6) \quad F = \frac{\cot 225^\circ - \cot 79^\circ \cot 71^\circ}{\cot 259^\circ + \cot 251^\circ}.$$

$$7) \quad G = \cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ.$$

$$8) \quad H = \sin^2 20^\circ + \sin^2 100^\circ + \sin^2 140^\circ.$$

$$9) \quad I = \cos^2 10^\circ + \cos 110^\circ + \cos^2 130^\circ.$$

$$10) \quad J = \tan 20^\circ \cdot \tan 80^\circ + \tan 80^\circ \cdot \tan 140^\circ + \tan 140^\circ \cdot \tan 20^\circ.$$

$$11) \quad K = \tan 10^\circ \cdot \tan 70^\circ + \tan 70^\circ \cdot \tan 130^\circ + \tan 130^\circ \cdot \tan 190^\circ.$$

$$12) \quad L = \sin 160^\circ \cos 110^\circ + \sin 250^\circ \cos 340^\circ + \tan 110^\circ \tan 340^\circ.$$

$$13) \quad M = (\cos 70^\circ + \cos 50^\circ)(\cos 310^\circ + \cos 290^\circ) + (\cos 40^\circ + \cos 160^\circ)(\cos 320^\circ - \cos 380^\circ).$$

Bài 33. Rút gọn các biểu thức

1) $A = \sin x - \sqrt{3} \cos x.$

2) $B = \sqrt{3} \sin 7x - \cos 7x.$

3) $C = a \sin x + b \cos x, (a^2 + b^2 \neq 0).$

4) $D = \sqrt{3} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$

5) $E = \cos 7x \cdot \cos 5x - \sqrt{3} \sin 2x + \sin 7x \cdot \sin 5x.$ 6) $F = \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x + 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$

7) $G = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 4 \sin x + 1.$

8) $H = \sin 2x + 2\sqrt{2} \cos x + 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 3.$

Bài 34. Rút gọn các biểu thức

1) $A = \sin x \cos 5x - \cos x \sin 5x.$

2) $B = \sin 4x \cot 2x - \cos 4x.$

3) $C = \cos 6x \tan 3x - \sin 6x.$

4) $D = \sin(x+y) \cos(x-y) + \sin(x-y) \cos(x+y).$

5) $E = \cos(40^\circ - x) \cos(x + 20^\circ) - \sin(40^\circ - x) \sin(x + 20^\circ).$

6) $F = \sin(14^\circ + 2x) \cos(16^\circ - 2x) + \cos(14^\circ + 2x) \sin(16^\circ - 2x).$

7) $G = \sin(x + 10^\circ) \cos(2x - 80^\circ) + \sin(x + 100^\circ) \cos(2x + 10^\circ).$

8) $H = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$

9) $I = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right).$

10) $J = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{9\pi}{4} - x\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{4} - x\right) \cos\left(\frac{5\pi}{3} + x\right).$

11) $K = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

12) $L = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{13\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{13\pi}{6}\right) \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right).$

Bài 35. Rút gọn các biểu thức sau

1) $A = \frac{\tan 3x - \tan x}{1 + \tan x \tan 3x}.$

2) $B = \frac{\tan 2x + 1}{1 - \tan 2x}.$

3) $C = \frac{\tan 2x + \cot(90^\circ + x)}{1 + \cot(90^\circ - 2x) \tan x}.$

4) $D = \frac{\tan^2 2x - \tan^2 x}{1 - \tan^2 2x \tan^2 x}.$

Bài 36. Rút gọn các biểu thức sau

1) $A = \sin(a+b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin(-b).$

2) $B = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) - \cos(a-b).$

3) $C = \cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) + \frac{1}{2} \sin^2 a.$

4) $D = \sin^2 a \sin^2 b - \cos^2 a \cos^2 b.$

Bài 37. Rút gọn các biểu thức sau

- 1) $A = \cos^2 x - \sqrt{3} \sin 2x - \sin^2 x.$
- 2) $B = 4 \sin^3 x - 3 \sin x + \sqrt{3} \cos 3x.$
- 3) $C = \sin(x + 45^\circ) + \cos(x + 45^\circ).$
- 4) $D = \tan 3x - \tan x - \sin 2x.$
- 5) $E = \tan 2x + \cot x - 8 \cos^2 x.$

Bài 38. Chứng minh các đẳng thức sau

- 1) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x.$
- 2) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$
- 3) $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$
- 4) $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$
- 5) $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$
- 6) $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$
- 7) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$
- 8) $\sin(x + y) \sin(x - y) = \sin^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \cos^2 x.$
- 9) $\cos(x + y) \cos(x - y) = \cos^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \sin^2 x.$

Bài 39. Chứng minh các đẳng thức sau

- 1) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2} \sin x.$
- 2) $4 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 4 \sin^2 x - 3.$
- 3) $\sin x \sin(y - z) + \sin y \sin(z - x) + \sin z \sin(x - y) = 0.$
- 4) $\cos x \sin(y - z) + \cos y \sin(z - x) + \cos z \sin(x - y) = 0.$
- 5) $\tan(x + y) - \tan x - \tan y = \tan(x + y) \tan x \tan y.$
- 6) $\tan 2x \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \tan 2x \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 1.$
- 7) $\tan x \cdot \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \tan x = -3.$
- 8) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - \sqrt{3}).$
- 9) $(\cos 70^\circ + \cos 50^\circ)(\cos 230^\circ + \cos 290^\circ) + (\cos 40^\circ + \cos 160^\circ)(\cos 320^\circ + \cos 380^\circ) = 0.$

Bài 40. Chứng minh các đẳng thức sau

- 1) $\frac{\cos(a-b)}{\cos(a+b)} = \frac{\cot a \cot b + 1}{\cot a \cot b - 1}.$
- 2) $\frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} + \frac{\sin(b-c)}{\cos b \cos c} + \frac{\sin(c-a)}{\cos c \cos a} = 0.$
- 3) $\frac{\sin(a+b) \sin(a-b)}{\cos^2 a \cos^2 b} = \tan^2 a - \tan^2 b.$
- 4) $\frac{\cos(a+b) \cos(a-b)}{\cos^2 a \cos^2 b} = 1 - \tan^2 a \tan^2 b.$

Bài 41. Chứng minh các hệ thức sau, với điều kiện cho trước

1) Nếu $\cos(a+b)=0$ thì $\sin(a+2b)=\sin a$.

2) Nếu $\sin(2a+b)=3\sin b$ thì $\tan(a+b)=2\tan a$.

$$\text{HD: } \begin{cases} b = (a+b) - a \\ 2a+b = (a+b) + a \end{cases}.$$

3) Nếu $\tan a = 2\tan b$ thì $\sin(a+b) = 3\sin(a-b)$.

4) Nếu $\tan a \cdot \tan b = -\frac{1}{3}$ thì $\cos(a+b) = 2\cos(a-b)$.

HD: Khai triển giả thiết.

5) Nếu $5\sin b = \sin(2a+b)$ thì $\tan(a+b) = \frac{3}{2}\tan a$.

6) Nếu $\sin b = \sin a \cos(a+b)$ thì $2\tan a = \tan(a+b)$.

$$\text{HD: } b = (a+b) - a.$$

7) Nếu $\cos(2a+b) = 1$ thì $\tan(a+b) - \tan a = 2\tan \frac{b}{2}$.

8) Nếu $\cos(a+b) = k\cos(a-b)$ thì $\tan a \tan b = \frac{1-k}{1+k}$.

$$\text{HD: } \begin{cases} a+2b = (a+b) + b \\ a = (a+b) - b \end{cases}.$$

Bài 42. Chứng minh các biểu thức sau độc lập với biến x

1) $A = \sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right).$

2) $B = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right).$

3) $C = \sin^2 x + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right).$

4) $D = \cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right).$

5) $E = \frac{a\cos^3 x - \cos 3x}{\cos x} + \frac{a\sin^3 x + \sin 3x}{\sin x}, \quad a = \text{const}.$

Bài 43. Chứng minh rằng $\tan x \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \tan 3x$.

Từ đó tính giá trị của biểu thức $P = \tan 10^\circ \tan 50^\circ \tan 110^\circ$.

Bài 44. Cho tam giác ABC với A, B, C lần lượt là ba góc của tam giác. Chứng minh

1) $\sin C = \sin A \cdot \cos B + \sin B \cdot \cos A$.

2) $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$.

3) $\cos A = \sin B \sin C - \cos B \cos C$.

4) $\frac{\sin C}{\cos A \cdot \cos B} = \tan A + \tan B, \quad (A, B \neq 90^\circ).$

5) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$.

6) $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$.

7) $\sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.

8) $\cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.

9) $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1$.

DẠNG 2. CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

LOẠI 1. RÚT GỌN VÀ TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

Bài 45. Tính giá trị của các biểu thức sau (không dùng máy tính bỏ túi)

1) $A = \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}.$

2) $B = 3 \cos 10^\circ - 4 \cos^3 10^\circ.$

3) $C = \sin 20^\circ (1 - 4 \cos^2 20^\circ).$

4) $D = 4 \sin^3 40^\circ + 3 \sin 130^\circ.$

5) $E = 4 \sin^3 50^\circ + 3 \cos 140^\circ.$

6) $F = \frac{\tan 15^\circ}{1 - \tan^2 15^\circ}.$

7) $G = \frac{\tan \frac{7\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}}.$

8) $H = \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}.$

9) $I = \frac{1}{\sin 10^\circ} - 4 \sin 70^\circ.$

10) $J = \tan^2 \frac{\pi}{12} + \tan^2 \frac{5\pi}{12}.$

11) $K = \tan^2 36^\circ \tan^2 72^\circ.$

12) $L = \cos^2 70^\circ + \sin^2 40^\circ \sin 100^\circ.$

13) $M = \cos^2 20^\circ + 2 \sin^2 55^\circ - \sqrt{2} \sin 65^\circ.$

14) $N = \sin 6^\circ \cdot \sin 42^\circ \cdot \sin 66^\circ \cdot \sin 78^\circ.$

Bài 46. Tính giá trị của các biểu thức sau (không dùng máy tính bỏ túi)

1) $A = \cos 36^\circ \cos 72^\circ.$

2) $B = \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}.$

3) $C = \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{4}.$

4) $D = \sin \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8}.$

5) $E = \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ.$

6) $F = \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}.$

7) $G = \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7}.$

8) $H = \sin 6^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ.$

9) $I = \sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ.$

10) $J = \sin 5^\circ \cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 25^\circ \dots \sin 75^\circ \cdot \sin 85^\circ.$

11) $K = \cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 30^\circ \dots \cos 70^\circ \cdot \cos 80^\circ.$

12) $L = 8 \tan 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ \cos 72^\circ.$

13) $M = \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ.$

14) $N = \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{3\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9}.$

15) $O = 96\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{48} \cos \frac{\pi}{48} \cos \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{6}.$

16) $P = \cos \frac{2\pi}{31} \cdot \cos \frac{4\pi}{31} \cdot \cos \frac{8\pi}{31} \cdot \cos \frac{16\pi}{31} \cdot \cos \frac{32\pi}{31}.$

17) $Q = \cos \frac{\pi}{33} \cos \frac{2\pi}{33} \cos \frac{4\pi}{33} \cos \frac{8\pi}{33} \cos \frac{16\pi}{33}.$

Bài 47. Tính giá trị của các biểu thức sau (không dùng máy tính bỏ túi)

$$\begin{aligned} 1) \quad A &= \frac{\cos 80^\circ + \cos 20^\circ}{\cos 35^\circ \cos 15^\circ - \sin 35^\circ \sin 15^\circ}. & 2) \quad B &= 3 \sin 15^\circ \cos 15^\circ - \frac{\sin 60^\circ}{\sin^4 15^\circ - \cos^4 15^\circ}. \\ 3) \quad C &= \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ. & 4) \quad D &= 4 \tan \frac{\pi}{8} + 2 \tan \frac{\pi}{16} + \tan \frac{\pi}{32} - \cot \frac{\pi}{32}. \end{aligned}$$

Bài 48. Rút gọn các biểu thức

$$\begin{aligned} 1) \quad A &= (\sin x + \cos x)^2. & 2) \quad B &= 1 - 4 \sin^2 x \cos^2 x. \\ 3) \quad C &= \sin x \cos x \cos 2x. & 4) \quad D &= \cos^4 2x - \sin^4 2x. \\ 5) \quad E &= \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{2} \right) - \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{2} \right). & 6) \quad F &= \sin x \cos x \cos 2x. \\ 7) \quad G &= 4 \sin x \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right). & 8) \quad H &= \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2} \right). \end{aligned}$$

Bài 49. Tính giá trị của các biểu thức sau (không dùng máy tính bỏ túi)

$$\begin{aligned} 1) \quad A &= \frac{2 \cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}. & 2) \quad B &= \frac{1 - 2 \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x}. \\ 3) \quad C &= \frac{2}{(1 - \tan x)(1 + \cot x)}. & 4) \quad D &= (1 - \tan^2 x) \cot x. \\ 5) \quad E &= \frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x}. & 6) \quad F &= \frac{\cot x - \tan x}{\cos 2x}. \\ 7) \quad G &= \frac{1 + \sin \left(\frac{3\pi}{2} - x \right)}{1 + \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right)}. & 8) \quad H &= \frac{\sin^2 2x - 4 \sin^2 x}{\sin^2 2x + 4 \sin^2 x - 4}. \\ 9) \quad I &= \frac{\sin 4x}{1 + \cos 4x} \cdot \frac{\cos 2x}{1 + \cos 2x}. & 10) \quad J &= \frac{\sin 3x - \cos 3x}{\sin x + \cos x}. \\ 11) \quad K &= \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \cdot \frac{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right)}. & 12) \quad L &= \cot 2x + \frac{1}{2 \sin 2x} + \tan x. \\ 13) \quad M &= \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x. & 14) \quad N &= \frac{2(\sin 2x + 2 \cos^2 x - 1)}{\cos x - \sin x - \cos 3x + \sin 3x}. \end{aligned}$$

Bài 50. Tính giá trị của biểu thức lượng giác, khi biết

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sin 2x, \cos 2x \text{ khi } \sin x = \frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} < x < \pi. \\ 2) \quad & \sin 2x, \cos 2x \text{ khi } \sin x + \cos x = \sqrt{2}. \\ 3) \quad & \cos 2x, \sin 2x, \tan 2x \text{ khi } \cos x = -\frac{5}{13}, \pi < x < \frac{3\pi}{2}. \\ 4) \quad & \cos 2x, \sin 2x, \tan 2x \text{ khi } \tan x = 2. \\ 5) \quad & \sin x, \cos x \text{ khi } \sin 2x = -\frac{4}{5}, \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}. \\ 6) \quad & \cos 2x, \sin 2x, \tan 2x \text{ khi } \tan x = \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

Bài 51. Tính giá trị của biểu thức lượng giác, khi biết

- 1) $A = \sin^5 x \cos x - \cos^5 x \sin x$ khi biết $x = \frac{\pi}{16}$.
- 2) $B = \sin^4 x + \sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x + \cos^4 x$ khi biết $x = \frac{\pi}{48}$.
- 3) $C = \cos 4x$ khi biết $\tan x + \cot x = 3$.
- 4) $D = \cos(270^\circ + 4x)$ khi biết $\cot(45^\circ + x) = 2$.
- 5) $E = \sin^4 x + \cos^4 x$ khi biết $\sin x + \cos x = m$ với $m \in \mathbb{R}$.
- 6) $F = \frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x}$ khi biết $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $\left(0 < x < \frac{\pi}{4}\right)$.

Bài 52. Tính $\tan \frac{x}{2}$ khi biết

- 1) $\cos x = \frac{4}{5}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
- 2) $\tan x = \frac{24}{7}$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.
- 3) $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{7}}{2}$, $0 < x < \frac{\pi}{6}$.

Bài 53. Cho $\tan x = \frac{1}{2}$, $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ và $\tan y = \frac{1}{3}$, $\left(0 < y < \frac{\pi}{2}\right)$.

- 1) Tính $x + y$.
- 2) $\sin(x - 2y)$ và $\cos(2x + y)$.

Bài 54. Tìm x khi biết

- 1) $\begin{cases} 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \tan x = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$.
- 2) $\begin{cases} 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{cases}$.

Bài 55. Tính theo $\cos 2x$ các biểu thức sau

- 1) $A = 1 + \cos^2 x$.
- 2) $B = \sin^2 x \cos^2 x$.
- 3) $C = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x}$.
- 4) $D = \frac{1 + \cot^2 x}{1 - \cot^2 x}$.
- 5) $E = \sin^6 x + \cos^6 x$.
- 6) $F = \sin^6 x \cos^2 x + \cos^6 x \sin^2 x$.

Bài 56. Tính theo $t = \tan \frac{x}{2}$ các biểu thức sau

- 1) $A = \sin x$.
- 2) $B = \cos x$.
- 3) $C = \frac{\sin x}{3 - 2 \cos x}$.
- 4) $D = \tan x + \cot x$.
- 5) $E = \frac{1 - \tan x}{1 + \cot x}$.
- 6) $F = \frac{\tan x + \sin x}{\tan x - \sin x}$.

Bài 57. Chứng minh các đẳng thức sau

- 1) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$.
- 2) $\sin 4x = 4 \sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x)$.
- 3) $\cos^2 2x - \sin^2 x = \cos x \cos 3x$.
- 4) $\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$.
- 5) $8 \sin^4 x = 3 - 4 \cos 2x + \cos 4x$.
- 6) $\sin^4 + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$.
- 7) $\sin^4 + \cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x = \cos 4x$.
- 8) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x$.
- 9) $\sin^6 x - \cos^6 x = \frac{15}{16} \cos 2x + \frac{1}{16} \cos 6x$.
- 10) $\sin^6 \frac{x}{2} - \cos^6 \frac{x}{2} = \frac{1}{4} \cos x (\sin^2 x - 4)$.

Bài 58. Chứng minh rằng nếu $a + b = \frac{\pi}{4}$ thì $(1 + \tan a)(1 + \tan b) = 2$.

Bài 59. Chứng minh các đẳng thức sau

- 1) $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \tan x$.
- 2) $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$.
- 3) $\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$.
- 4) $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$.
- 5) $\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \cdot \tan^2 \frac{x}{2} = 1$.
- 6) $\frac{1}{\sin 2x} + \cot 2x = \cot x$.
- 7) $\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) + \cot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) = \frac{2}{\cos x}$.
- 8) $(\tan 2x - \tan x) \cos 2x = \tan x$.
- 9) $\tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right) - \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = 2 \tan 2x$.
- 10) $\cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = \frac{1}{2} \sin 4x$.
- 11) $\cos 3x \sin^3 x + \sin 3x \cos^3 x = \frac{3}{4} \sin 4x$.
- 12) $\tan x \tan \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \cdot \tan \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = \tan 3x$.

Bài 60. Chứng minh các đẳng thức sau

- 1) $\frac{1 + \sin x}{\cos x} = \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$.
- 2) $\tan 2x + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 - \sin 2x}$.
- 3) $\frac{2 \sin 2x + \sin 4x}{2(\cos x + \cos 3x)} = \tan 2x \cos x$.
- 4) $\frac{6 + 2 \cos 4x}{1 - \cos 4x} = \tan^2 x + \cot^2 x$.
- 5) $\frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \sin 2x} = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$.
- 6) $\left(\frac{1}{\cos x} + 1 \right) \tan \frac{x}{2} = \tan x$.
- 7) $\frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right)$.
- 8) $\frac{2 \sin x - \sin 2x}{2 \sin x + \sin 2x} = \tan^2 \frac{x}{2}$.
- 9) $\frac{1 - 2 \sin^2 x}{2 \tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + x \right)} = 1$.
- 10) $\frac{\sin x + \sin \frac{x}{2}}{1 + \cos x + \cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}$.
- 11) $\frac{1 - \cos x + \cos 2x}{\sin 2x - \sin x} = \cot x$.
- 12) $\frac{1 + \cos 4x}{\cot x - \tan x} = \frac{1}{2} \sin 4x$.
- 13) $\frac{\sin 2x \cos x}{(1 + \cos 2x)(1 + \cos x)} = \tan \frac{x}{2}$.
- 14) $\frac{\sin^4 x - \cos^4 x + \cos^2 x}{1(1 - \cos x)} = \cos^2 \frac{x}{2}$.

$$15) \cot^2 x + \tan^2 x = \frac{6 + 2 \cos 4x}{1 - \cos 4x}.$$

$$16) \left(\cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} \right)^2 = \frac{4}{1 - 2 \tan x \cot 2x}.$$

$$17) \frac{\cot^2 2x - 1}{2 \cot 2x} - \cos 8x \cot 4x = \sin 8x.$$

$$18) \tan 2x + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 - \sin 2x}.$$

$$19) \tan 4x - \frac{1}{\cos 4x} = \frac{\sin 2x - \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x}.$$

$$20) \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} - \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = 2 \tan 2x.$$

$$21) \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos x} - \tan x.$$

$$22) \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2 \cos^2 x + \cos x - 1} = 2 \cos x.$$

$$23) 2 \left(\frac{1}{\sin 2x} + \cot 2x \right) = \cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2}.$$

$$24) \frac{\sin^4 x + \sin 2x - \cos^4 x}{\tan 2x - 1} = \cos 2x.$$

$$25) \frac{\sin^2 2x - 4 \sin^2 x}{\sin^2 2x + 4 \sin^2 x - 4} = \tan^4 x.$$

$$26) \frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = 8 \cos 2x.$$

Bài 61. Chứng minh các đẳng thức sau

$$1) A = \cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2^2} \cos \frac{a}{2^3} \dots \cos \frac{a}{2^n} = \frac{\sin a}{2^n \cdot \sin \frac{a}{2^n}}.$$

$$2) B = \cos \frac{\pi}{2n+1} \cdot \cos \frac{2\pi}{2n+1} \dots \cos \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}.$$

$$3) C = \cos \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \cos \frac{4\pi}{2n+1} \dots \cos \frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}.$$

$$4) D = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x}}} = \cos \frac{x}{8}, \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right).$$

Bài 62. Chứng minh các biểu thức sau đây không phụ thuộc vào biến số

$$1) A = \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{\sin 2x + 2 \sin x} + \tan^2 \frac{x}{2}.$$

$$2) B = \frac{\cos^3 x - \cos 3x}{\cos x} + \frac{\sin^3 x + \sin 3x}{\sin x}.$$

$$3) C = 4 \sin^4 x + 2 \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 4x.$$

$$4) D = 3 \cos 2x + 5 \sin^4 x + 4 \sin^2 x \cos^2 x - \cos^4 x.$$

$$5) E = \frac{\tan^2 x - 1}{2} \cot x + \cos 4x \cot 2x + \sin 4x.$$

$$6) F = \sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + \sin^4 \left(x + \frac{3\pi}{4} \right).$$

Bài 63. Tính giá trị của biểu thức

- 1) $A = \frac{\cos 2x - \cos 4x}{\sin 4x - \sin 2x}$ khi $x = 20^\circ$.
- 2) $B = \frac{\cos x \cdot \cos 13x}{\cos 3x + \cos 5x}$ khi $x = \frac{\pi}{17}$.
- 3) $C = \frac{\cos x \cdot \cos 10x}{\cos 2x + \cos 4x}$ khi $x = \frac{\pi}{13}$.
- 4) $D = \frac{\tan 2x - \sin 2x}{\tan 2x + \sin 2x}$ khi $\tan x = \frac{2}{15}$.
- 5) $E = \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}$ khi $\sin x = \frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$.

Bài 64. Rút gọn biểu thức

- 1) $A = \frac{1 - 2 \cos x}{1 + 2 \cos x}$.
- 2) $B = \frac{\sqrt{3} - 2 \cos 3x}{\sqrt{3} + 2 \cos 3x}$.
- 3) $C = \frac{1 - 2 \cos 2x}{\sqrt{3} + 2 \sin 2x}$.
- 4) $D = \frac{\sqrt{2} - 2 \sin 2x}{\sqrt{2} + 2 \sin 2x}$.
- 5) $E = \frac{\sin 5x - \sin 3x}{2 \cos 4x}$.
- 6) $F = \frac{\cos 4x - \cos 2x}{\sin 4x + \sin 2x}$.
- 7) $G = \frac{\sin(x+y)}{\sin x + \sin y}$.
- 8) $H = \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$.
- 9) $I = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$.
- 10) $J = \frac{\sin^2 4x - \sin^2 2x}{\cos^2 x - \cos^2 2x}$.
- 11) $K = \frac{\sin^2 4x}{2 \cos x + \cos 3x + \cos 5x}$.
- 12) $L = \frac{\sin 2x}{\tan x + \cot 2x}$.
- 13) $M = \frac{\tan 3x + \tan 5x}{\cot 3x + \cot 5x}$.
- 14) $N = \frac{\tan 2x + \cot 2x}{1 + \tan 2x \cdot \tan 4x}$.
- 15) $O = \frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x}$.
- 16) $P = \frac{1 + \sin 4x - \cos 4x}{1 + \cos 4x + \sin 4x}$.
- 17) $Q = \frac{\sin 2x + 2 \sin 3x + \sin 4x}{\cos 3x + 2 \cos 4x + \cos 5x}$.
- 18) $R = \frac{\sin x + \sin 4x + \sin 7x}{\cos x + \cos 4x + \cos 7x}$.
- 19) $S = \frac{\cos 2x - \sin 4x - \cos 6x}{\cos 2x + \sin 4x - \cos 6x}$.
- 20) $T = \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2 \cos^2 x + \cos x - 1}$.
- 21) $U = \frac{2(\sin 2x + 2 \cos^2 x - 1)}{\cos x - \sin x - \cos 3x + \sin 3x}$.
- 22) $V = \frac{\sin(x+y) - \sin x}{\sin(x+y) + \sin x} - \frac{\cos(x+y) + \cos x}{\cos(x-y) - \cos x}$.
- 23) $X = \frac{\cos 7x - \cos 8x - \cos 9x + \cos 10x}{\sin 7x - \sin 8x - \sin 9x + \sin 10x}$.
- 24) $Y = \frac{\sin 4x + \sin 5x + \sin 6x}{\cos 4x + \cos 5x + \cos 6x}$.

Bài 65. Biến đổi thành tích các biểu thức sau đây

- 1) $A = \cos 3x + \cos x$.
- 2) $B = \sin 3x + \sin 2x$.
- 3) $C = \cos 4x - \cos x$.
- 4) $D = \sin 5x - \sin x$.
- 5) $E = 1 + \sin 2x$.
- 6) $F = 1 - \sin x$.
- 7) $G = 1 + 2 \cos x$.
- 8) $H = \sqrt{2} \sin 2x - 1$.
- 9) $I = \sqrt{3} + 2 \cos 2x$.
- 10) $J = \sin(a+b) - \sin(a-b)$.

- 11) $K = \cos^2 x - \cos^2 y$.
- 12) $L = 1 + \sin x - \cos 2x$.
- 13) $M = 1 + \sin x + \cos x$.
- 14) $N = \cos x + \sin 2x - \cos 3x$.
- 15) $O = \sin 3x - \sin x + \sin 2x$.
- 16) $Q = \cos x - \cos 2x - \sin 3x$.
- 17) $R = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$.
- 18) $S = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.
- 19) $T = \sqrt{2} \sin 2x + \cos 5x - \cos 9x$.
- 20) $U = \sin 3x - 2 \sin 2x + \sin x$.
- 21) $V = \cos x + \cos 3x + 2 \cos 5x$.
- 22) $X = \cos 46^\circ - \cos 22^\circ - 2 \cos 78^\circ$.
- 23) $Y = \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}$.
- 24) $Z = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$.
- 25) $W = \sin 70^\circ - \sin 20^\circ + \sin 50^\circ$.
- 26) $\Delta = \cos 5x + \cos 7x - \cos(\pi + 6x)$.
- 27) $\Phi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) + \sin x - \cos 3x$.
- 28) $\Gamma = \sin x + \sin y + \sin \frac{x+y}{2}$.
- 29) $A_1 = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$.
- 30) $A_2 = \cos x + \cos y + \sin(x+y)$.
- 31) $A_3 = \cos x + \cos y + \cos(x+y) + 1$.
- 32) $A_4 = \cos(60^\circ + x) + \cos(60^\circ - x) + \cos 3x$.
- 33) $A_5 = 1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x$.
- 34) $A_6 = \sin 2x + \sin 4x + \sin 6x$.
- 35) $A_7 = \sin 5x + \sin 6x + \sin 7x + \sin 8x$.
- 36) $A_8 = \cos 5x + \cos 8x + \cos 9x + \cos 12x$.

Bài 66. Biến đổi thành tích các biểu thức sau đây

- 1) $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.
- 2) $\sin x - \sin 3x + \sin 7x - \sin 5x$.
- 3) $\sin x - \sin 2x + \sin 5x + \sin 8x$.
- 4) $\cos 7x + \sin 3x + \sin 2x - \cos 3x$.
- 5) $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x$.
- 6) $\cos 10x - \cos 8x - \cos 6x + 1$.
- 7) $\sin 35^\circ + \cos 40^\circ + \sin 55^\circ + \cos 20^\circ$.
- 8) $\sin 57^\circ - \sin 59^\circ - \sin 93^\circ + \sin 61^\circ$.
- 9) $\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ$.
- 10) $\cos 5x + 3 \cos 7x + 3 \cos 9x + \cos 11x$.
- 11) $1 + \sin x - \cos 5x - \sin 7x - 2 \cos^2 \frac{3x}{2}$.
- 12) $\sin 3x + \sin x - \sin 2x + 2(1 - \cos x) \cos x$.
- 13) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x - 1 - \cos x - \cos 2x$.
- 14) $1 + \sin x + \cos 3x - \cos x - \sin 2x - \cos 2x$.

Bài 67. Biến đổi thành tích các biểu thức sau đây

- 1) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x - 1$.
- 2) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x - \frac{3}{2}$.
- 3) $\sin^2 3x - \sin^2 2x - \sin^2 x$.
- 4) $\sin^2 x - \cos^2 2x - \cos^2 3x$.
- 5) $\sin^2 x - 2 \sin^2 2x + \sin^2 3x$.
- 6) $\sin^2 3x - \cos^2 4x - \sin^2 5x + \cos^2 6x$.
- 7) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x - \frac{3}{2}$.
- 8) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x - 2$.
- 9) $\cos 3x + \sin 7x - 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{2}\right) + 2 \cos^2 \frac{9x}{2}$.
- 10) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \cot 3x + \sin(\pi + 2x) - \sqrt{2} \cos 5x$.

Bài 68. Chứng minh

- 1) $\sin 75^\circ + \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}.$
- 2) $\cos 12^\circ - \cos 48^\circ = \sin 18^\circ.$
- 3) $\sin 65^\circ + \sin 55^\circ = \sqrt{3} \cos 5^\circ.$
- 4) $\tan 267^\circ + \tan 93^\circ = 0.$
- 5) $\cos 85^\circ + \cos 35^\circ + \cos 25^\circ = 0.$
- 6) $\tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ = 4.$
- 7) $\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ = \frac{1}{2}.$
- 8) $\tan 9^\circ + \tan 15^\circ + \cot 15^\circ + \cot 9^\circ = \tan 27^\circ + \cot 27^\circ.$
- 9) $\cos x - \frac{1}{2} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos 5x = 8 \sin^2 x \cos^3 x.$
- 10) $\sin x (1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 6x) = \sin 7x.$
- 11) $1 + 4 \cos x + 6 \sin 2x - 4 \sin x = 16 \sin 2x \sin^4 \frac{x}{2}.$
- 12) $8 \sin^2 x \sin(x + 60^\circ) \sin(x - 60^\circ) = \cos 4x - \cos 2x.$
- 13) $(\sin x - \cos x)^2 - \cos 4x = 4 \sin 2x \sin(x + 15^\circ) \cos(x - 15^\circ).$

Bài 69. Cho $a + b = c$. Chứng minh: $\sin a + \sin b + \sin c = 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}.$

Bài 70. Tính các giá trị của biểu thức

- 1) $A = \sin^6 \frac{\pi}{24} + \cos^6 \frac{\pi}{24}.$
- 2) $B = \tan^2 \frac{\pi}{12} + \cot^2 \frac{\pi}{12}.$
- 3) $C = \cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11}.$
- 4) $D = \cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{6\pi}{11} + \cos \frac{8\pi}{11} + \cos \frac{10\pi}{11}.$
- 5) $E = \cos 0^\circ + \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}.$
- 6) $F = (\sin 40^\circ + \cos 10^\circ)^2 - (\cos 40^\circ + \sin 10^\circ)^2 + \cos 140^\circ.$

Bài 71. Trong ΔABC có ba góc lần lượt là A, B, C . Chứng minh rằng

- 1) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$
- 2) $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$
- 3) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$
- 4) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$
- 5) $1 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -4 \cos A \cos B \cos C.$
- 6) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C).$

Bài 72. Biến đổi thành tổng các biểu thức sau

1) $A = \sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5}.$

2) $B = \sin 5x \cos 3x.$

3) $C = \sin \frac{3\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6}.$

4) $D = \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}.$

5) $E = \sin(x+y) \cos(x-y).$

6) $F = \sin(x+30^\circ) \cos(x-30^\circ).$

7) $G = 2 \sin x \sin 2x \sin 3x.$

8) $H = 8 \cos x \sin 2x \sin 3x.$

9) $I = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cos 2x.$

10) $J = 4 \cos(a-b) \cos(b-c) \cos(c-a).$

Bài 73. Tính giá trị của biểu thức

1) $A = \cos 75^\circ \cos 15^\circ.$

2) $B = \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}.$

3) $C = \sin \frac{11\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}.$

4) $D = \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ.$

5) $E = \sin \frac{x}{4} \cdot \sin \frac{5x}{4},$ khi $x = 60^\circ.$

6) $F = \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ.$

7) $G = 2^4 \cdot \sin \frac{\pi}{24} \cdot \sin \frac{5\pi}{24} \cdot \sin \frac{7\pi}{24} \cdot \sin \frac{11\pi}{24}.$

8) $H = \frac{1}{\sin 10^\circ} - 4 \sin 70^\circ$

9) $I = \sin^2 10^\circ + \cos 70^\circ \cos 50^\circ.$

10) $J = \cos 10^\circ \cos 50^\circ - \cos 5^\circ \cos 25^\circ + \frac{1}{2} \cos 10^\circ$

11) $K = \sin^2 50^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin 50^\circ \sin 10^\circ.$

12) $L = \cos^2 73^\circ + \cos^2 47^\circ + \cos 73^\circ \cdot \cos 47^\circ.$

13) $M = \sin^2 50^\circ + \sin^2 70^\circ - \cos 50^\circ \cos 70^\circ.$

14) $N = \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}.$

15) $O = 2(\cos 22^\circ + \cos 44^\circ) - \frac{\sin 55^\circ}{\sin 11^\circ}.$

16) $P = \frac{\sin 60^\circ}{\sin^4 15^\circ - \sin^4 75^\circ} + 3 \sin 15^\circ \sin 75^\circ.$

17) $Q = \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{6\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9}.$

18) $R = \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}.$

19) $S = \cos 10^\circ \cos 50^\circ - \cos 5^\circ \cos 25^\circ + \frac{1}{2} \sin 10^\circ.$

20) $T = \sin 5^\circ \cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 25^\circ \dots \sin 65^\circ \sin 75^\circ \cdot \sin 85^\circ.$

Bài 74. Rút gọn biểu thức $A = 2 \sin x (\cos x + \cos 3x + \cos 5x)$.

Từ đó suy ra giá trị của biểu thức $B = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}$.

Bài 75. Rút gọn các biểu thức sau

- | | |
|---|--|
| 1) $A = \cos 11x \cos 3x - \cos 17x \cos 9x$. | 2) $B = \sin 18x \cos 13x - \sin 9x \cos 4x$. |
| 3) $C = \sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x$. | 4) $D = \sin 2x \sin 6x - \cos x \cos 3x$. |
| 5) $E = \cos 3x \cos 6x - \cos 4x \cos 7x$. | 6) $F = \sin x \sin(60^\circ - x) \sin(60^\circ + x)$. |
| 7) $G = 8 \cos x \cos(60^\circ - x) \cos(60^\circ + x) + 1$. | 8) $H = \cos x \cos 2x \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 12x$. |
| 9) $I = 4 \sin 2x \sin 5x \sin 7x - \sin 4x$. | 10) $J = \sin 2x \sin 6x \cos 4x + \frac{1}{4} \cos 12x$. |
| 11) $K = \sin x \sin 2x \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x$. | 12) $L = 4 \cos x \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \cos 2x$ |

Bài 76. Chứng minh các đẳng thức sau

- 1) $\cos 12^\circ + \cos 18^\circ - 4 \cos 15^\circ \cos 21^\circ \cos 24^\circ = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.
- 2) $\tan 9^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ - \tan 27^\circ = 4$.
- 3) $\tan 30^\circ + \tan 40^\circ + \tan 50^\circ + \tan 60^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cos 20^\circ$.
- 4) $\cos(2x + 60^\circ) \cos(2x - 60^\circ) = \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{4}$.
- 5) $(\sin x + \cos x)^2 - \cos 4x = 4 \sin 2x \sin(x + 15^\circ) \cos(x - 15^\circ)$.
- 6) $\sin^2 x + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{3}{4}$.
- 7) $\sin a \sin(b - c) + \sin b \sin(c - a) + \sin c \sin(a - b) = 0$.
- 8) $\cos^2 x - 2 \cos a \cos x \cos(a + x) + \cos^2(a + x) = \sin^2 a$.
- 9) $\sin^8 x - \cos^8 x = \frac{7}{8} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 6x$.
- 10) $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{35}{64} + \frac{7}{16} \cos 4x + \frac{1}{64} \cos 8x$.
- 11) $\tan \frac{3\pi}{11} + 4 \tan \frac{2\pi}{11} = \sqrt{11}$.
- 12) $\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 80^\circ = \sqrt{3}$.
- 13) $8 \sin^3 18^\circ + 8 \sin^2 18^\circ = 1$.
- 14) $\sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{6\pi}{16} = \frac{3}{2}$.
- 15) $\tan 10^\circ \tan 25^\circ + \tan 25^\circ \tan 55^\circ + \tan 55^\circ \tan 10^\circ = 1$.
- 16) $\tan 15^\circ \tan 25^\circ \tan 35^\circ \tan 85^\circ = 1$.
- 17) $\tan 20^\circ - \tan 40^\circ + \tan 80^\circ = 3\sqrt{3}$.
- 18) $\tan 10^\circ - \tan 50^\circ + \tan 60^\circ + \tan 70^\circ = 2\sqrt{3}$.
- 19) $\tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \tan 80^\circ + \tan 60^\circ = 8 \sin 40^\circ$.

Bài 77. Tính các góc của ΔABC biết rằng

$$B - C = \frac{\pi}{3} \text{ và } \sin B \cdot \sin C = \frac{1}{2}. \quad \text{ĐS: } B = \frac{\pi}{2}, C = \frac{\pi}{6}, A = \frac{\pi}{3}.$$

$$B + C = \frac{2\pi}{3} \text{ và } \sin B \cdot \cos C = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}. \quad \text{ĐS: } A = \frac{\pi}{3}, B = \frac{5\pi}{12}, C = \frac{\pi}{4}.$$

Bài 78. Chứng minh điều kiện cần và đủ để ΔABC vuông

$$1) \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1. \quad 2) \tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = 0.$$

$$3) \frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{a}{\sin B \cdot \sin C}. \quad 4) \cot \frac{B}{2} = \frac{a+c}{b}.$$

Bài 79. Chứng minh điều kiện cần và đủ để ΔABC cân:

$$1) a \tan A + b \tan B = (a+b) \tan \frac{A+B}{2}. \quad 2) 2 \tan B + \tan C = \tan^2 B \cdot \tan C.$$

$$3) \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{1}{2} (\tan A + \tan B). \quad 4) \cot \frac{C}{2} = \frac{2 \sin A \cdot \sin B}{\sin C}.$$

Bài 80. Chứng minh bất đẳng thức, từ đó suy ra điều kiện cần và đủ để ΔABC đều:

$$1) \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad 2) \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

$$3) \tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}. \quad 4) \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{1}{8}.$$

Bài 81. Cho $\cos \varphi = \cos a \cos b$ với $a, b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Chứng minh: $\tan \frac{\varphi+a}{2} \tan \frac{\varphi-a}{2} = \tan^2 \frac{b}{2}$.

Bài 82. Cho $\sin(2a+b) = 5 \sin b$. Chứng minh $\frac{2 \tan(a+b)}{\tan a} = 3$ với $\begin{cases} a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ a+b \neq \frac{\pi}{2} + l\pi \end{cases}$.

Bài 83. Cho $\tan(a+b) = 3 \tan a$. Chứng minh $\sin(2a+2b) + \sin 2a = 2 \sin 2b$.

Bài 84. Cho $\frac{a}{b} = \frac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x-\beta)}$, $\frac{A}{B} = \frac{\cos(x-\alpha)}{\cos(x-\beta)}$ và $aB + bA \neq 0$. Chứng minh $\frac{aA+bB}{aB+bA} = \cos(\alpha-\beta)$.

Bài 85. Chứng minh rằng nếu $\tan \frac{x}{2} = \frac{a}{b}$ thì $A = a \sin x + b \cos x$ không phụ thuộc vào a và x .

Bài 86. Cho a, b, c là ba cạnh của tam giác, tương ứng các góc lần lượt là A, B, C . Các góc nhọn

$$\alpha, \beta, \gamma \text{ được xác định bởi } \cos \alpha = \frac{a}{b+c}, \cos \beta = \frac{b}{c+a}, \cos \gamma = \frac{c}{a+b}.$$

Chứng minh:

$$1) \tan^2 \frac{\alpha}{2} + \tan^2 \frac{\beta}{2} + \tan^2 \frac{\gamma}{2} = 1.$$

$$2) \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2} = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}.$$

Bài 87. Chứng minh $\frac{1}{\cos x \cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cos 3x} + \dots + \frac{1}{\cos 7x \cos 8x} = \frac{\tan 8x - \tan x}{\sin x}$.

Bài 88. Tính giá trị của biểu thức: $M = \sin^8 20^\circ + \sin^8 40^\circ + \sin^8 80^\circ$.

Bài 89. Tính giá trị của biểu thức $N = \frac{2 \sin 2^\circ + 4 \sin 4^\circ + \dots + 178 \sin 178^\circ + 180 \sin 180^\circ}{\cot 1^\circ}$.

Bài 90. Rút gọn các biểu thức sau

1) $A = \cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \dots + \cos (2n-1)\alpha.$

ĐS: $A = \frac{\sin 2n\alpha}{2 \sin \alpha}.$

2) $B = \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n}.$

ĐS: $B = \cot \frac{\pi}{2n}.$

3) $C = \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{3\pi}{n} + \cos \frac{5\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(2n-1)\pi}{n}.$

ĐS: $C = -\cos \frac{\pi}{n}.$

4) $D = \frac{1}{\cos a \cdot \cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a \cdot \cos 3a} + \dots + \frac{1}{\cos 4a \cdot \cos 5a}, \quad a = \frac{\pi}{5}.$

ĐS: $D = 1 - \sqrt{5}.$

5) $E = \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos 2x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos 3x}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{\cos 2^{n-1}x}\right).$

ĐS: $E = \frac{\tan 2^{n-1}x}{\tan \frac{x}{2}}.$

Bài 91. Chứng minh các bất đẳng thức sau

1) $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x - \cos 2x \leq \sqrt{2}.$

2) $\sqrt{3} \sin 3x + \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \leq 2.$

3) $\left| \sin x \sin(x + 60^\circ) \sin(x - 60^\circ) \right| \leq \frac{1}{4}.$

4) $\cos x \cos 3x - \sin 2x \sin 4x \leq 1.$

5) $\left| \cos 2x \cos x + \sin x \sin 3x - \sin^2 x \cos 3x \right| \leq 1.$

6) $2 \sin x (\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x + \cos 9x) \leq 1.$

Bài 92. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

1) $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x + 2.$

2) $y = \cos x + \frac{1}{\cos x}, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right).$

3) $y = \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x.$

4) $y = \sin^4 x + \cos^4 x, \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right).$

5) $y = \sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x}.$

6) $y = \cos^4 x + \sin^4 x + \cos^2 x \sin^2 x.$

7) $y = \sin^4 4x - \cos^2 x + \frac{5}{4} \cos 2x.$

8) $y = 2 \sin^6 x + 2 \cos^6 x - \sin^4 x - \cos^4 x + \cos 2x.$

Bài 4. Hàm số lượng giác và đồ thị

I. TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ

1. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

- Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D gọi là hàm số chẵn nếu với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$. Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.
- Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D gọi là hàm số lẻ nếu với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$. Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

2. Hàm số đơn điệu

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $(a; b) \subset \mathbb{R}$.

- Ta nói hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a; b)$ có $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Ta nói hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a; b)$ có $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

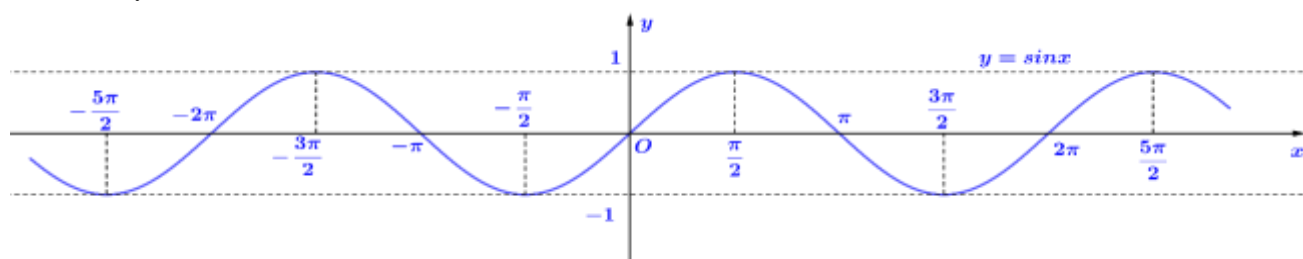
3. Hàm số tuần hoàn

- Hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D , được gọi là hàm số tuần hoàn nếu:
tồn tại $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có $(x+T) \in D$ và $(x-T) \in D$ và $f(x+T) = f(x)$.
- Nếu có số dương T nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên thì T gọi là chu kỳ của hàm tuần hoàn f .

II. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1. Hàm số $y = \sin x$.

- Hàm số $y = \sin x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \Rightarrow y = \sin[f(x)]$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.
- Tập giá trị $T = [-1; 1]$, nghĩa là: $-1 \leq \sin x \leq 1$. Suy ra $0 \leq |\sin x| \leq 1$, $0 \leq \sin^2 x \leq 1$
- Hàm số $y = f(x) = \sin x$ là hàm số lẻ vì $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$.
Nên đồ thị hàm số $y = \sin x$ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = 2\pi$, nghĩa là: $\sin(x + k2\pi) = \sin x$.
Hàm số $y = \sin(ax + b)$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$.
- Hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$, nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Các giá trị đặc biệt:
 - $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$
 - $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).
 - $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$
- Đồ thị hàm số:



2. Hàm số $y = \cos x$.

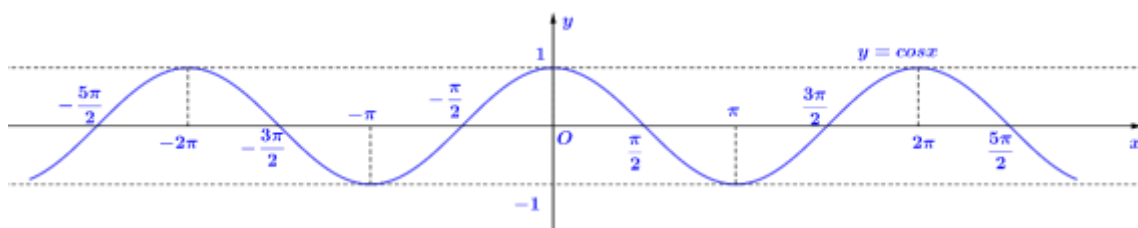
- Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \Rightarrow y = \cos[f(x)]$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.
- Tập giá trị $T = [-1; 1]$, nghĩa là: $-1 \leq \cos x \leq 1$. Suy ra $0 \leq |\cos x| \leq 1$, $0 \leq \cos^2 x \leq 1$.
- Hàm số $y = f(x) = \cos x$ là hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục tung Oy làm trục đối xứng.
- Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = 2\pi$, nghĩa là $\cos(x + k2\pi) = \cos x$.

Hàm số $y = \cos(ax + b)$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$.

- Hàm số đồng biến trên $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên $(k2\pi; \pi + k2\pi)$.

- Các giá trị đặc biệt:
 - $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$
 - $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.
 - $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$

- Đồ thị hàm số:



3. Hàm số $y = \tan x$.

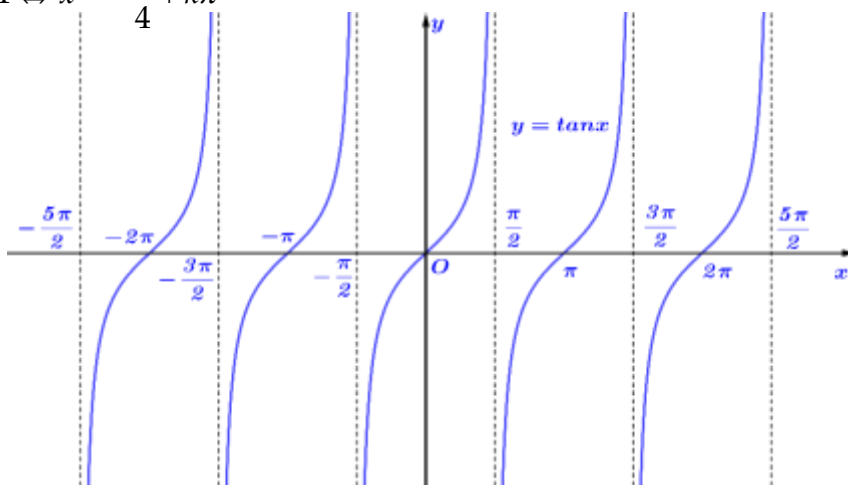
- Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, nghĩa là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Suy ra hàm số $y = \tan[f(x)]$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$.

- Tập giá trị $T = \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = f(x) = \tan x$ là hàm số lẻ nên đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O .
- Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \pi \Rightarrow y = \tan(ax + b)$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \frac{\pi}{|a|}$.

- Giá trị đặc biệt
 - $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$
 - $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.
 - $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

- Đồ thị hàm số



4. Hàm số $y = \cot x$.

– Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, nghĩa là $x \neq k\pi; (k \in \mathbb{Z})$.

Suy ra hàm số $y = \cot[f(x)]$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \neq k\pi; (k \in \mathbb{Z})$.

– Tập giá trị $T = \mathbb{R}$.

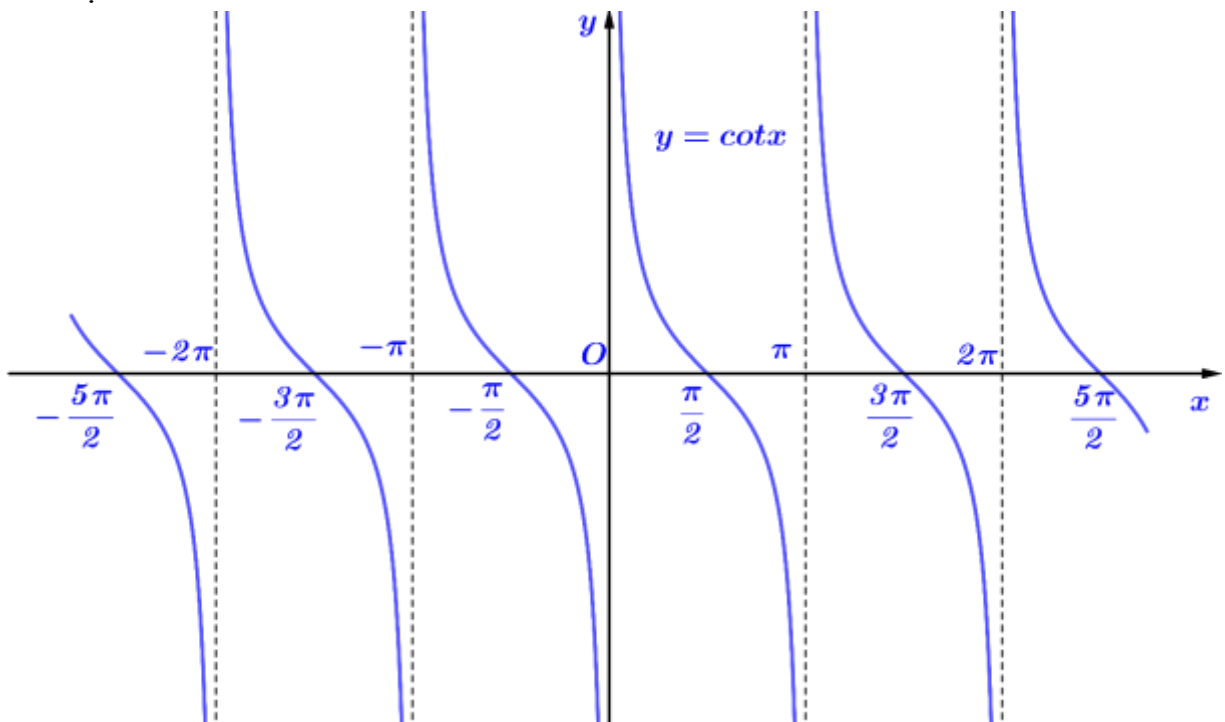
– Hàm số $y = f(x) = \cot x$ là hàm số lẻ nên đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O .

– Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \pi \Rightarrow y = \cot(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \frac{\pi}{|a|}$.

– Giá trị đặc biệt

$\circ \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\circ \cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$
$\circ \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

– Đồ thị hàm số



III. BÀI TẬP

DẠNG 1. TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

Phương pháp giải. Để tìm tập xác định của hàm số lượng giác ta cần nhớ:

1. Hàm số $y = \tan f(x) = \frac{\sin f(x)}{\cos f(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \cos f(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

2. Hàm số $y = \cot f(x) = \frac{\cos f(x)}{\sin f(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \sin f(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

3. Một số trường hợp tìm tập xác định thường gặp:

- Hàm số $y = \frac{1}{P(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow P(x) \neq 0$.

- Hàm số $y = \sqrt[2n]{P(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow P(x) \geq 0$.

- Hàm số $y = \frac{1}{\sqrt[2n]{P(x)}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow P(x) > 0$.

4. Lưu ý rằng: $-1 \leq \sin f(x); \cos f(x) \leq 1$ và $A.B \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \neq 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$.

5. Với $k \in \mathbb{Z}$, ta cần nhớ những trường hợp đặc biệt:

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; \quad \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi. \quad \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi; \quad \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \quad \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$$

$$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi; \quad \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Bài 93. Tìm tập xác định của các hàm số lượng giác sau:

a) $y = \cos \frac{4}{x}$.

b) $y = \cos \sqrt{2x}$.

c) $y = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$.

d) $y = \tan x + \cot x - 2x^2$.

e) $y = \frac{2 \tan 2x - 5}{\sin 2x + 1}$.

f) $y = \frac{\tan 2x}{1 + \cos^2 x}$.

g) $y = \frac{\tan 2x}{\sin x - 1}$.

h) $y = \sqrt{\frac{\cos x + 4}{\sin x + 1}}$.

i) $y = \sqrt{\frac{\cos x - 2}{1 - \sin x}}$.

j) $y = \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x \cos x}}$.

k) $y = \frac{\cot 2x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$.

l) $y = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}}$.

m) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$.

n) $y = \frac{\cos 2x}{1 - \sin x} + \tan x$.

o) $y = \frac{x^2 + 1}{x \cos x}$.

p) $y = \frac{\tan 2x}{\sqrt{\sin x + 1}}$.

Bài 94. Tìm tập xác định của các hàm số lượng giác sau:

a) $y = \frac{\sqrt{\pi^2 - x^2}}{\sin 2x}.$

b) $y = \sqrt{\pi^2 - 4x^2} + \tan 2x.$

c) $y = \frac{\tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right)}}.$

d) $y = \frac{\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{1 - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}.$

e) $y = \frac{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos x - 2}.$

f) $y = \frac{\sqrt{3 - \sin 4x}}{\cos x + 1}.$

g) $y = \frac{3}{\cos x - \cos 3x}.$

h) $y = \cot\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \tan 2x.$

i) $y = \sqrt{2 + \sin x} - \frac{1}{\tan^2 x - 1}.$

j) $y = \frac{4}{\sin^2 x - \cos^2 x}.$

k) $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}.$

l) $y = \frac{1 + \cot\left(\frac{\pi}{3} + x\right)}{\tan^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)}.$

DẠNG 2. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1. Dựa vào tập giá trị của hàm số lượng giác, chẳng hạn:

$$\circ -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq |\sin x| \leq 1 \\ 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \end{cases} \text{ hoặc } -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq |\cos x| \leq 1 \\ 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \end{cases}.$$

◦ Biến đổi về dạng: $m \leq y \leq M.$

2. Kết luận: $\max y = M$ và $\min y = m.$

Bài 95. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau:

a) $y = 5\sqrt{3 + \cos 2x} + 4.$

b) $y = \sqrt{1 - \cos 4x}.$

c) $y = 3\sin^2 2x - 4.$

d) $y = 4 - 5\sin^2 2x \cos^2 2x.$

e) $y = 3 - 2|\sin 4x|.$

f) $y = \sqrt{4 - 2\sin^5 2x} - 8.$

g) $y = \frac{4}{1 + 3\cos^2 x}.$

h) $y = \frac{4}{\sqrt{5 - 2\cos^2 x \sin^2 x}}.$

i) $y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4 - 2\sin^2 3x}}.$

j) $y = \frac{3}{3 - \sqrt{1 - \cos x}}.$

k) $y = \frac{4}{\sqrt{2 - \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} + 3}.$

l) $y = \frac{2}{\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x}.$

Bài 96. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau:

a) $y = -\sin^2 x - \cos x + 2.$

b) $y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1.$

c) $y = \cos x + \cos(x + 60^\circ).$

d) $y = \sin^4 x + \cos^4 x + 4.$

e) $y = \sqrt{2 - \cos 2x} + \sin^2 x.$

f) $y = \sin^6 x + \cos^6 x.$

g) $y = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x + 4.$

h) $y = \cos^2 x + 2 \cos 2x.$

i) $y = 2 \sin^2 x - \cos 2x.$

j) $y = 2 \sin 2x(\sin 2x - 4 \cos 2x).$

k) $y = 3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x - 4 \cos 2x.$

l) $y = 4 \sin^2 x + \sqrt{5} \sin 2x + 3.$

m) $y = (2 \sin x + \cos x)(3 \sin x - \cos x).$

n) $y = \sin x + \cos x + 2 \sin x \cos x - 1.$

o) $y = 1 - (\sin 2x + \cos 2x)^3.$

p) $y = |5 \sin x + 12 \cos x - 10|.$

q) $y = 2 \sin x + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 1.$

r) $y = 2 \left[\cos 2x + \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) \right] + 3.$

Bài 97. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau:

a) $y = \sin 2x, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$

b) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right), \forall x \in \left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right].$

c) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right), \forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right].$

d) $y = \sin^4 x + \cos^4 x, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right].$

f) $y = 2 \sin^2 x - \cos 2x, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right].$

g) $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \forall x \in \left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right].$

DẠNG 3. XÉT TÍNH CHẴN, LẼ CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Bước 1. Tìm tập xác định D của hàm số lượng giác.

Nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D \Rightarrow D$ là tập đối xứng và chuyển sang bước 2.

Bước 2. Tính $f(-x)$, nghĩa là sẽ thay x bằng $-x$, sẽ có 2 kết quả thường gặp sau:

- Nếu $f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.
- Nếu $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

Lưu ý:

- Nếu không là tập đối xứng ($\forall x \in D \Rightarrow -x \notin D$) hoặc $f(-x)$ không bằng $f(x)$ hoặc $-f(x)$ ta sẽ kết luận hàm số không chẵn, không lẻ.
- Ta thường sử dụng cung góc liên kết dạng cung đối trong dạng toán này, cụ thể:
 $\cos(-a) = \cos a, \sin(-a) = -\sin a, \tan(-a) = -\tan a, \cot(-a) = -\cot a.$

Bài 98. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a) $y = f(x) = \tan x + \cot x.$

b) $y = f(x) = \tan^7 2x \cdot \sin 5x.$

c) $y = f(x) = \sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right).$

d) $y = f(x) = -2 \cos^3\left(3x + \frac{\pi}{2}\right).$

e) $y = f(x) = \sin^3(3x + 5\pi) + \cot(2x - 7\pi).$

f) $y = f(x) = \cot(4x + 5\pi) \tan(2x - 3\pi).$

g) $y = f(x) = \sin \sqrt{9 - x^2}.$

h) $y = f(x) = \sin^2 2x + \cos 3x.$

Bài 5. Phương trình lượng giác cơ bản

1. Phương trình $\sin x = m$

– Công thức nghiệm

+ Nếu $|m| > 1$ thì phương trình $\sin x = m$ vô nghiệm.

+ Nếu $|m| \leq 1$ thì phương trình $\sin x = m$ có nghiệm.

Đặt $m = \sin \alpha$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Khi đó $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

– Một số trường hợp đặc biệt:

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

– Nếu đề bài cho dạng độ (α°) thì ta sẽ chuyển $k2\pi \rightarrow k360^\circ$, $k\pi \rightarrow k180^\circ$, nghĩa là

$$\sin x = \sin \alpha^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \alpha^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sin x = \sin \frac{\pi}{5};$

b) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{7\pi}{12}.$

c) $\sin x = \frac{1}{2};$

d) $\sin x = \frac{3}{2}.$

e) $\sin(x - 30^\circ) = \sin(2x - 40^\circ);$

f) $\sin(3x + 50^\circ) = \sin(70^\circ - 3x)$

2. Phương trình $\cos x = m$

– Công thức nghiệm

+ Nếu $|m| > 1$ thì phương trình $\cos x = m$ vô nghiệm.

+ Nếu $|m| \leq 1$ thì phương trình $\cos x = m$ có nghiệm.

Đặt $m = \cos \alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$. Khi đó $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

– Một số trường hợp đặc biệt:

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

– Nếu đề bài cho dạng độ (α°) thì ta sẽ chuyển $k2\pi \rightarrow k360^\circ$, $k\pi \rightarrow k180^\circ$, nghĩa là

$$\cos x = \cos \alpha^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha^\circ + k360^\circ \\ x = -\alpha^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

a) $\cos 2x = \cos \frac{3\pi}{5};$

b) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{7\pi}{12}.$

c) $\cos x = -\frac{1}{2};$

d) $\sin x = \cos 3x.$

e) $\sin(x - 30^\circ) = 2;$

f) $\cos(3x + 50^\circ) = \sin(70^\circ - 3x)$

3. Phương trình $\tan x = m$

– Công thức nghiệm: Với mọi $m \in \mathbb{R}$ thì phương trình $\tan x = m$ có nghiệm.

Đặt $m = \tan \alpha$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó $\boxed{\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

– Nếu đề bài cho dạng độ (α°) thì ta sẽ chuyển $k2\pi \rightarrow k360^\circ$, $k\pi \rightarrow k180^\circ$, nghĩa là

$$\boxed{\tan x = \tan \alpha^\circ \Leftrightarrow x = \alpha^\circ + k180^\circ}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau:

a) $\tan x = \sqrt{3};$

b) $\tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{11} - x\right).$

c) $\tan x = 0;$

d) $\tan(30^\circ - 3x) = \tan 75^\circ.$

4. Phương trình $\cot x = m$

– Công thức nghiệm: Với mọi $m \in \mathbb{R}$ thì phương trình $\tan x = m$ có nghiệm.

Đặt $m = \tan \alpha$, $\alpha \in (0; \pi)$. Khi đó $\boxed{\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

– Nếu đề bài cho dạng độ (α°) thì ta sẽ chuyển $k2\pi \rightarrow k360^\circ$, $k\pi \rightarrow k180^\circ$, nghĩa là

$$\boxed{\cot x = \cot \alpha^\circ \Leftrightarrow x = \alpha^\circ + k180^\circ}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau:

a) $\cot x = \frac{\sqrt{3}}{3};$

b) $\cot 3x = \cot \frac{\pi}{7}.$

c) $\cot x = 1;$

d) $\cot(30^\circ - 3x) = \cot 75^\circ.$

5. Bài tập

DẠNG 1. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Bài 99. Giải các phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định):

a) $\sin x = \sin \frac{2\pi}{3}$.

b) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

c) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$.

d) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{4}$.

e) $\cos x = -\frac{1}{2}$.

f) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$.

g) $2\sin(x + 30^\circ) + \sqrt{3} = 0$.

h) $\cot(4x + 35^\circ) = -1$.

i) $2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} = 0$.

j) $2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0$.

k) $(1 + 2\cos x)(3 - \cos x) = 0$.

l) $\tan(x - 30^\circ) \cdot \cos(2x - 150^\circ) = 0$.

m) $\sqrt{2}\sin 2x + 2\cos x = 0$.

n) $\sin x + \sqrt{3}\sin \frac{x}{2} = 0$.

o) $\sin 2x \cdot \cos 2x + \frac{1}{4} = 0$.

p) $\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16}$.

DẠNG 2. SỬ DỤNG CUNG LIÊN KẾT

Bài 100. Giải các phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định):

a) $\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

b) $\sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{9\pi}{4}\right)$.

c) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x$.

d) $\cos 2x = \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

e) $\cos\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) - \sin 2x = 0$.

f) $\sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{9\pi}{4}\right)$.

g) $\cot\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

h) $\tan\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \cot x$.

—→ Muốn biến đổi sin thành cos, tan thành cot và ngược lại, ta sẽ làm như thế nào ?

.....

—→ Hãy viết các công thức cung góc liên kết dạng cung góc phụ nhau ?

.....

Bài 101. Giải các phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định):

a) $\cos(3x + 45^\circ) = -\cos x$.

b) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

c) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

d) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin x = 0$.

e) $\tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan x$.

f) $\cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$.

g) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos x = 0$.

h) $\sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{5}\right) = 0$.

$$i) \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x = 0.$$

$$j) \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$k) \tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan 2x = 0.$$

$$l) \tan 2x \cdot \tan 3x = 1.$$

→ Muốn bỏ dấu " - " trước sin, cos, tan, cotan ta sẽ làm như thế nào ?

.....

→ Hãy viết công thức cung góc liên kết dạng cung đối nhau ?

.....

Bài 102. Giải các phương trình lượng giác sau:

$$a) \sin 4x - 2 \cos^2 x + 1 = 0.$$

$$b) 2 \cos 5x \cdot \cos 3x + \sin x = \cos 8x.$$

$$c) \sin 5x + 2 \cos^2 x = 1.$$

$$d) \cos 2x \cos x + \cos x = \sin 2x \sin x.$$

$$e) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin 2x = 0.$$

$$f) \cot 2x = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}.$$

$$f) 2 \sin^2 \frac{x}{2} = \cos 5x + 1.$$

$$g) \sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5} - 3x\right) = \sqrt{3}.$$

$$h) \sin\left(\frac{4\pi}{9} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{18} - x\right) = \sqrt{3}.$$

$$i) \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6} + 3x\right) = 2.$$

DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Dạng	Đặt ẩn phụ	Điều kiện
$a \sin^2 X + b \sin X + c = 0$	$t = \sin X$	$-1 \leq t \leq 1$
$a \cos^2 X + b \cos X + c = 0$	$t = \cos X$	$-1 \leq t \leq 1$
$a \tan^2 X + b \tan X + c = 0$	$t = \tan X$	$X \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$a \cot^2 X + b \cot X + c = 0$	$t = \cot X$	$X \neq k\pi$

Nếu đặt $t = \sin^2 X$, $\cos^2 X$ hoặc $t = |\sin X|$, $|\cos X|$ thì điều kiện là $0 \leq t \leq 1$.

Bài 103. Giải các phương trình lượng giác sau:

$$a) 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0.$$

$$b) 4 \sin^2 x + 12 \sin x - 7 = 0.$$

$$c) 2\sqrt{2} \sin^2 x - (2 + \sqrt{2}) \sin x + 1 = 0.$$

$$d) -2 \sin^3 x + \sin^2 x + 2 \sin x - 1 = 0.$$

$$e) 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0.$$

$$f) 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0.$$

$$g) 2 \cos^2 x + (\sqrt{2} - 2) \cos x = \sqrt{2}.$$

$$g) 4 \cos^2 x - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cos x = \sqrt{6}.$$

$$i) \tan^2 x + 2\sqrt{3} \tan x + 3 = 0.$$

$$j) 2 \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x - 3 = 0.$$

$$k) \tan^2 x + (1 - \sqrt{3}) \tan x - \sqrt{3} = 0.$$

$$l) 3 \cot^2 x + 2\sqrt{3} \cot x + 1 = 0.$$

$$m) \sqrt{3} \cot^2 x - (1 + \sqrt{3}) \cot x + 1 = 0.$$

$$n) \sqrt{3} \cot^2 x + (1 - \sqrt{3}) \cot x - 1 = 0.$$

Bài 104. Giải các phương trình lượng giác sau:

$$a) 6 \cos^2 x + 5 \sin x - 2 = 0.$$

$$b) 2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0.$$

$$c) 3 - 4 \cos^2 x = \sin x(2 \sin x + 1).$$

$$d) -\sin^2 x - 3 \cos x + 3 = 0.$$

$$e) -2 \sin^2 x - 3 \cos x + 3 = 0.$$

$$f) 2 \cos^2 2x + 5 \sin 2x + 1 = 0.$$

$$g) 3 \sin^2 x + 2 \cos^4 x - 2 = 0.$$

$$h) 4 \sin^4 x + 12 \cos^2 x = 7.$$

$$i) 4 \cos^4 x = 4 \sin^2 x - 1.$$

$$j) 4 \sin^4 x + 5 \cos^2 x - 4 = 0.$$

Bài 105. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $2 \cos 2x - 8 \cos x + 5 = 0.$

c) $9 \sin x + \cos 2x = 8.$

e) $3 \sin x + \cos 2x = 2.$

g) $2 \cos 2x + 3 \sin x - 1 = 0.$

i) $\sin^2 x + \cos 2x + \cos x = 2.$

b) $1 + \cos 2x = 2 \cos x.$

d) $2 + \cos 2x + 5 \sin x = 0.$

f) $2 \cos 2x + 8 \sin x - 5 = 0.$

h) $5 \cos x - 2 \sin \frac{x}{2} + 7 = 0.$

j) $\cos 2x + \cos^2 x - \sin x + 2 = 0.$

Bài 106. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $3 \cos^2 x - 2 \cos 2x = 3 \sin x - 1.$

c) $\cos 4x - 2 \cos^2 x + 1 = 0.$

e) $\cos 2x + 2 \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}.$

g) $1 + \cos 4x - 2 \sin^2 x = 0.$

i) $6 \sin^2 3x - \cos 12x = 4.$

k) $\cos^4 x - \sin^4 x + \cos 4x = 0.$

b) $\cos 4x + 12 \sin^2 x - 1 = 0.$

d) $16 \sin^2 \frac{x}{2} - \cos 2x = 15.$

f) $\cos 2x - 3 \cos x = 4 \cos^2 \frac{x}{2}.$

h) $8 \cos^2 x - \cos 4x = 1.$

j) $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x.$

l) $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + \sin 2x = 0.$

Bài 107. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos \left(2x + \frac{2\pi}{3} \right) + 3 \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 1 = 0.$

c) $4 \cos^2 (6x - 2) + 16 \cos^2 (1 - 3x) = 13.$

e) $\sin \left(2x + \frac{5\pi}{2} \right) - 3 \cos \left(x - \frac{7\pi}{2} \right) = 1 + 2 \sin x.$

g) $\sqrt{3} \sin 2x + \sqrt{3} \sin x + \cos 2x - \cos x = 2.$

i) $4 \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \right) + 4 \left(\sin x + \frac{1}{\sin x} \right) = 7.$

b) $\cos^2 \left(\frac{\pi}{3} + x \right) + 4 \cos \left(\frac{\pi}{6} - x \right) = 4.$

d) $5 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = 4 \sin \left(\frac{5\pi}{6} - x \right) - 9.$

f) $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x - \sqrt{3} \sin x + 4 = \cos x.$

h) $2 \left(\cos^2 x + \frac{4}{\cos^2 x} \right) + 9 \left(\frac{2}{\cos x} - \cos x \right) = 1.$

j) $\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} + 2 = 2 \left(\cos x + \frac{1}{\cos x} \right).$

Bài 108. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\frac{3}{\cos^2 x} = 3 + 2 \tan^2 x.$

c) $\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} = 3 \cot x + \sqrt{3}.$

e) $2 \tan^2 x + 3 = \frac{3}{\cos x}.$

g) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}.$

b) $\frac{1}{\cos^2 x} + 3 \cot^2 x = 5.$

d) $9 - 13 \cos x + \frac{4}{1 + \tan^2 x} = 0.$

f) $-\frac{1}{2} \tan^2 x + \frac{2}{\cos x} - \frac{5}{2} = 0.$

g) $2 \sin^2 x + \tan^2 x = 2.$

----- HẾT CHƯƠNG 1 -----

Chương 2.

Dãy số - Cấp số cộng - Cấp số nhân

Bài 1. Dãy số

1. Định nghĩa

- Một hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (hay gọi tắt là dãy số). Kí hiệu dãy số là $u(n)$.
- Dạng khai triển của dãy số $u(n)$ là $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$
- Mỗi giá trị của hàm số u được gọi là một số hạng của dãy số. Chẳng hạn:
 - + $u_1 = u(1)$: số hạng thứ nhất (hay còn gọi là số hạng đầu).
 - + $u_2 = u(2)$: số hạng thứ hai.
 - + $u_n = u(n)$: số hạng thứ n (hay còn gọi là số hạng tổng quát).

2. Cách cho một dãy số

- Có 4 cách để cho một dãy số
 - Cách 1:** Liệt kê tất cả các số hạng (thường dùng với dãy hữu hạn)
 - Cách 2:** Công thức của số hạng tổng quát.
 - Cách 3:** Phương pháp mô tả.
 - Cách 4:** Phương pháp truy hồi, nghĩa là:
 - + Cho số hạng thứ nhất u_1 (hoặc một vài số hạng đầu tiên);
 - + Cho một công thức tính u_n theo u_{n-1} (hoặc theo vài số hạng đứng ngay trước nó).
- Một số ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. (Công thức của số hạng tổng quát) Cho dãy (u_n) với $u_n = \frac{n-1}{3n+1}$.

- Viết 5 số hạng đầu tiên của dãy số.
- Tìm số hạng thứ 2023 của dãy số?

Ví dụ 2. (Phương pháp truy hồi) Cho dãy số u_n được xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1, (n \geq 2) \end{cases}$$

- Viết 5 số hạng đầu tiên của dãy số.
- Tìm số hạng thứ 8 của dãy số?

Ví dụ 3. (Phương pháp truy hồi) Cho dãy số (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, (n \geq 3) \end{cases}$$

(Dãy số Fibonacci)

- Viết 5 số hạng đầu tiên của dãy số.
- Tìm số hạng thứ 7 của dãy số?

Ví dụ 4. Tìm công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số sau đây:

- Dãy số (u_n) với
$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$$
- Dãy số (u_n) với
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$$

3. Dãy số tăng, dãy số giảm

a. Khái niệm

- Dãy số (u_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow n \in \mathbb{N}^*, u_n < u_{n+1}$.
- Dãy số (u_n) là dãy số giảm $\Leftrightarrow n \in \mathbb{N}^*, u_n > u_{n+1}$.

b. Phương pháp xét tính tăng giảm của dãy số

Phương pháp 1. Xét dấu của hiệu số $u_{n+1} - u_n$.

- Nếu $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n > 0$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n < 0$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Phương pháp 2. Nếu $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$ thì có thể so sánh tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ với số 1.

- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Phương pháp 3. Nếu dãy số (u_n) được cho bởi hệ thức truy hồi thì thường dùng phương pháp quy nạp để chứng minh $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (hoặc $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$).

Ví dụ 5. Xét tính tăng giảm của các dãy số sau:

- Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$.
- Dãy số (v_n) với $v_n = \frac{n+2}{4^n}$.

Ví dụ 6. Xét tính tăng giảm dãy (u_n) được cho bởi hệ thức truy hồi
$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}, n \geq 2 \end{cases}$$

3 Dãy số bị chặn

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số **bị chặn trên** nếu tồn tại 1 số M sao cho $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq M$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số **bị chặn dưới** nếu tồn tại 1 số m sao cho $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq m$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số **bị chặn** nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, nghĩa là tồn tại một số M và một số m sao cho $\forall n \in \mathbb{N}^*, m \leq u_n \leq M$.

Ví dụ 7. Xét tính bị chặn của dãy số sau:

- Dãy (u_n) với $u_n = \frac{2n-1}{n+3}$.
- Dãy (v_n) với $v_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$.

4. Bài tập

Bài 109. Viết 5 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) và tìm công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số (u_n) sau:

a) $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n, n \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3, \forall n \geq 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}, \forall n \geq 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}, \forall n \geq 1 \end{cases}$

Bài 110. Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n) sau, với:

a) $u_n = n^2 + 4n - 3$.

b) $u_n = -n^2 - 2n + 1$.

c) $u_n = 2n^3 - 5n + 1$.

d) $u_n = 3^n - n$.

e) $u_n = \frac{1}{n} - 2$.

f) $u_n = \frac{n-1}{n+1}$.

Bài 111. Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n) sau, với:

a) $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$.

b) $u_n = \frac{3^n}{n^2}$.

c) $u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$.

d) $u_n = \frac{n+1}{3^n}$.

Bài 112. Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n) được cho bởi hệ thức truy hồi sau:

a) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (n+1).2^n \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_{n-1} - 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 2 \end{cases}$

Bài 113. Xét tính bị chặn của các dãy số (u_n) sau, với:

a) $u_n = \frac{n^2 + 1}{n}$.

b) $u_n = \frac{3n-1}{3n+1}$.

c) $u_n = \frac{2n+3}{3n+2}$.

d) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

e) $u_n = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$.

f) $u_n = \frac{2n-1}{\sqrt{n^2+2}}$.

Bài 114. Xét tính đơn điệu và bị chặn của các dãy số (u_n) với:

a) $u_n = 1 + (n-1).2^n$.

b) $u_n = \frac{7n+5}{5n+7}$.

c) $u_n = \frac{2n-13}{3n-2}$.

d) $u_n = \frac{n^2+1}{2n^2-3}$.

e) $u_n = \frac{n^2+3n+1}{n+1}$.

f) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2} \end{cases}$

h) $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 4 \end{cases}$

Bài 2. Cấp số cộng

1. Định nghĩa

- Cấp số cộng là một dãy số (vô hạn hay hữu hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số d không đổi, nghĩa là:

$$(u_n) \text{ là cấp số cộng } u_n = u_{n-1} + d, n \geq 2$$

- Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

Ví dụ 1. (CTST - Tr52) Tìm cấp số cộng trong các dãy số sau:

- a) Dãy số: 5; 10, 15, 20, 25, 30.
- b) Dãy số: 1; 2; 4; 8.
- c) Dãy số: 7; 7; 7; 7; 7; 7

Ví dụ 2. (CTST - Tr52) Cho cấp số cộng 3; 6; 9; 12; ... Tìm số hạng đầu, công sai và u_5 ?

Ví dụ 3. Chứng minh các dãy số sau là một cấp số cộng. Xác định công sai và số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó?

- a) Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$.
- b) Dãy số (u_n) với $u_n = -3n + 1$.

2. Tính chất

Định lý 1. Nếu (u_n) là một cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$$

Hệ quả. Ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow a + c = 2b$.

Ví dụ 4. Ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Tìm ba góc đó?

Ví dụ 5. Một tam giác vuông có chu vi bằng 12cm và ba cạnh lập thành một cấp số cộng. Tính độ dài ba cạnh của tam giác đó.

3. Số hạng tổng quát

Định lý 2. Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức sau: $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Ví dụ 6. Một cấp số cộng có 10 số hạng, trong đó số hạng đầu bằng 5, số hạng cuối bằng 23.

Tìm cấp số cộng đó?

Ví dụ 7. Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.

Ví dụ 8. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương của chúng bằng 30.

4. Tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng

Định lí 3. Giả sử (u_n) là 1 cấp số cộng có công sai d . Gọi $S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

(S_n là tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng). Khi đó $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$.

Ví dụ 9. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_3 + u_{28} = 100$.

Hãy tính tổng của 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

Ví dụ 10. Cho một cấp số cộng (u_n) có $S_6 = 18$ và $S_{10} = 110$. Tính S_{20} .

Ví dụ 11. Tính các tổng sau:

a) $S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2n+1)$.

b) $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

5. Bài tập

Bài 115. Tìm số hạng đầu tiên, công sai, số hạng thứ 20 và tổng của 20 số hạng đầu tiên của các cấp số cộng sau, biết rằng:

a) $\begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ S_{12} = 129 \end{cases}$.

d) $\begin{cases} u_6 = 8 \\ u_2^2 + u_4^2 = 16 \end{cases}$.

Bài 116. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết:

a) $\begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4 \end{cases}$.

d) $\begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases}$.

e) $\begin{cases} u_6 + u_7 = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$.

f) $\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ S_3 = 21 \end{cases}$.

g) $\begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35 \end{cases}$.

h) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35 \end{cases}$.

i) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 16 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 84 \end{cases}$.

j) $\begin{cases} S_5 = 5 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot u_5 = 45 \end{cases}$.

k) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 20 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 = 170 \end{cases}$.

l) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = -12 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 8 \end{cases}$.

m) $\begin{cases} S_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases}$.

n) $\begin{cases} u_1 + u_5 = \frac{5}{3} \\ u_3 \cdot u_4 = \frac{65}{72} \end{cases}$.

Bài 117. Xác định số hạng đầu, công sai và số hạng thứ n của các cấp số cộng sau, biết rằng:

a) $\begin{cases} S_{12} = 34 \\ S_{18} = 45 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} u_5 = 10 \\ S_{10} = 5 \end{cases}$.

c) $\frac{S_{20}}{5} = \frac{S_{10}}{3} = \frac{S_5}{2}$.

d) $\begin{cases} S_{20} = 2S_{10} \\ S_{15} = 3S_5 \end{cases}$.

Bài 118. Cho cấp số cộng $u_1, u_2, u_3, \dots$ có công sai d .

a) Biết $u_2 + u_{22} = 40$. Tính S_{23} .

b) Biết $u_1 + u_4 + u_7 + u_{10} + u_{13} + u_{16} = 147$. Tính $u_6 + u_{11}$ và $u_1 + u_6 + u_{11} + u_{16}$.

c) Biết $u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} = 224$. Tính S_{19} .

d) Biết $u_{23} + u_{57} = 29$. Tính $u_{10} + u_{70} + u_{157} + 3u_1$.

Bài 119. Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết rằng:

a) Tổng của chúng bằng 15 và tích của chúng bằng 105.

b) Tổng của chúng bằng 15 và tổng bình phương của chúng bằng 83.

c) Tổng của chúng bằng 21 và tổng bình phương bằng 155.

Bài 120. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết rằng:

a) Tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương 70.

b) Tổng của chúng bằng 22 và tổng bình phương bằng 66.

c) Tổng của chúng bằng 36 và tổng bình phương bằng 504.

d) Chúng có tổng bằng 20 và tích của chúng là 384.

e) Tổng của chúng bằng 20, tổng nghịch đảo của chúng bằng $\frac{25}{24}$ và các số này là những số nguyên.

f) Nó là số đo của một tứ giác lồi và góc lớn nhất gấp 5 lần góc nhỏ nhất.

Bài 121. Tìm năm số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 40 và tổng bình phương của chúng bằng 480.

Bài 122. Một cấp số cộng có 7 số hạng với công sai d dương và số hạng thứ tư bằng 11. Tìm các số hạng còn lại của cấp số cộng đó, biết hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 6.

Bài 123. Một cấp số cộng có 7 số hạng mà tổng của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 28, tổng số hạng thứ năm và số hạng cuối bằng 140. Tìm cấp số cộng đó.

Bài 124. Viết sáu số xen giữa hai số 3 và 24 để được cấp số cộng có tám số hạng. Tìm cấp số cộng đó?

Bài 125. Giữa các số 7 và 35, hãy đặt thêm sáu số nữa để được một cấp số cộng.

Bài 126. Giữa các số 4 và 67, hãy đặt thêm 20 số nữa để được một cấp số cộng.

Bài 127. Một công viên hình tam giác được trồng cây xanh theo hàng có quy luật của một cấp số cộng như sau: hàng thứ nhất có 9 cây, hàng thứ 10 có 54 cây, hàng cuối cùng có 2014 cây. Hỏi công viên đó có tất cả bao nhiêu hàng cây được trồng ?

Bài 128. Bạn A muốn mua món quà tặng mẹ và chị nhân ngày Quốc tế phụ nữ 8/3. Do đó A quyết định tiết kiệm từ ngày 1/1 của năm đó với ngày đầu là 500 đồng/ngày, ngày sau cao hơn ngày trước 500 đồng. Hỏi đến đúng ngày 8/3 bạn A có đủ tiền để mua quà cho mẹ và chị không ? Giả sử rằng món quà A dự định mua khoảng 800 ngàn đồng và từ ngày 1/1 đến ngày 8/3 có số ngày ít nhất là 67 ngày.

Bài 129. Khi ký hợp đồng dài hạn (10 năm) với các công nhân được tuyển dụng. Công ty liên doanh X đề xuất hai phương án trả lương để người lao động chọn, cụ thể là:

Phương án 1: người lao động sẽ nhận 36 triệu đồng cho năm làm việc đầu tiên và kể từ năm thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 3 triệu đồng mỗi năm.

Phương án 2: người lao động sẽ nhận được nhận 7 triệu đồng cho quý đầu tiên và kể từ quý làm việc thứ hai mức lương sẽ tăng thêm 500.000 đồng mỗi quý.

Biết rằng mỗi năm có 4 quý.

Nếu em là người lao động, em sẽ chọn phương án nào ?

Bài 130. Tìm x để ba số a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng với:

a) $a = 10 - 3x, b = 2x^2 + 3, c = 7 - 4x.$

b) $x = a^2 - bc, y = b^2 - ca, z = c^2 - ab.$

Bài 131. Tìm các nghiệm của phương trình: $x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$, biết rằng các nghiệm này phân biệt và chúng lập thành một cấp số cộng.

Bài 132. Giải các phương trình sau:

a) $1 + 6 + 11 + 16 + 21 + \dots + x = 970.$

b) $2 + 7 + 12 + 17 + 22 + \dots + x = 245.$

c) $(x+1) + (x+4) + (x+7) + \dots + (x+28) = 155.$

d) $(2x+1) + (2x+6) + (2x+11) + \dots + (2x+96) = 1010.$

Bài 133. Cho a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Chứng minh rằng:

a) $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab.$

b) $a^2 + 8bc = (2b+c)^2.$

c) $2(a+b+c)^3 = 9[a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b)].$

d) ba số: $a^2 - bc, b^2 - ac, c^2 - ab$ cũng là một cấp số cộng.

e) ba số: $b^2 + bc + c^2, a^2 + ac + c^2, a^2 + ab + b^2$ cũng là một cấp số cộng.

e) ba số: $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, (a, b, c > 0)$ cũng là một cấp số cộng.

Bài 134. Cho ba số a^2, b^2, c^2 theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng có công sai khác không.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Bài 135. Cho tam giác ABC có $\tan \frac{A}{2}, \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2}$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Chứng minh $\cos A, \cos B, \cos C$ theo thứ tự cũng lập thành cấp số cộng.

Bài 136. Cho tam giác ABC có $\cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2}, \cot \frac{C}{2}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

Chứng minh: ba cạnh a, b, c theo thứ tự cũng tạo thành một cấp số cộng.

Bài 137. Tìm tham số m để phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng trong các trường hợp sau:

a) $f(x) = x^2 - 2mx^2 + 2m - 1 = 0.$

b) $f(x) = x^4 + 2(m+1)x^2 + 4 = 0.$

c) $f(x) = x^4 + (3m+5)x^2 + (m+1)^2 = 0.$

d) $f(x) = x^4 - 10mx^2 + 9m = 0.$

Bài 138. Tìm tham số m để phương trình $x^3 - (3m+1)x^2 + 2mx = 0$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng ?

Bài 3. Cấp số nhân

1. Định nghĩa

- Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn) mà trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó và một số q không đổi, nghĩa là:

$$(u_n) \text{ là cấp số nhân } u_n = u_{n-1} \cdot q, n \geq 2$$

- Số q được gọi là công bội của cấp số nhân, với $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}; n \geq 1$

Ví dụ 1. Chứng minh các dãy số sau là một cấp số nhân. Xác định công bội và số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó ?

a) Dãy số $u(n)$ với $u_n = (-3)^{2n+1}$

b) Dãy số $u(n)$ với $u_n = (-1)^n \cdot 5^{3n+2}$.

2. Tính chất

Định lý 1. Nếu (u_n) là một cấp số nhân thì kể từ số hạng thứ hai, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số nhân hữu hạn) bằng tích của hai số hạng đứng kề nó trong dãy. Tức là: $u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}, k \geq 2$.

Hệ quả. Nếu a, b, c là ba số khác 0, thì “ba số a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân khi và chỉ khi $b^2 = ac$ ”.

Ví dụ 2. Tìm các số dương a và b sao cho $a, a+2b, 2a+b$ lập thành một cấp số cộng và $(b+1)^2, ab+5, (a+1)^2$ lập thành một cấp số nhân.

3. Số hạng tổng quát

Định lý 2. Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội $q \neq 0$ thì số hạng tổng quát u_n của nó được tính bởi công thức: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, n \geq 2$.

Ví dụ 3. Một cấp số nhân có tám số hạng, số hạng đầu là 4374, số hạng cuối là 2. Tìm cấp số nhân đó ?

4. Tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân

Định lý 3. Giả sử (u_n) là cấp số nhân có công bội q . Gọi $S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Nếu $q = 1$ thì $S_n = nu_1$.

Nếu $q \neq 1$ thì $S_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

Ví dụ 4. Tính tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân, biết rằng số hạng đầu bằng 18, số hạng thứ hai bằng 54 và số hạng cuối bằng 39366.

Ví dụ 5. Tính tổng:

a) $S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$.

b) $S_n = \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2$

5. Bài tập

Bài 139. Tìm số hạng đầu tiên, công bội của cấp số nhân trong các trường hợp sau:

a)
$$\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}.$$

b)
$$\begin{cases} u_1 + u_6 = 165 \\ u_3 + u_4 = 60 \end{cases}.$$

c)
$$\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases}.$$

d)
$$\begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases}.$$

e)
$$\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}.$$

f)
$$\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = -42 \\ u_3 + u_5 = 20 \end{cases}.$$

g)
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases}.$$

h)
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351 \end{cases}.$$

i)
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 64 \end{cases}.$$

j)
$$\begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ u_1^2 + u_3^2 = 5 \end{cases}.$$

k)
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 7 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 21 \end{cases}.$$

l)
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85 \end{cases}.$$

Bài 140. Tìm a, b biết rằng $1, a, b$ là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng và $1, a^2, b^2$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân.

Bài 141. Cho ba số tạo thành một cấp số cộng có tổng 21. Nếu thêm 2, 3, 9 lần lượt vào số thứ nhất, số thứ hai, số thứ ba tạo thành một cấp số nhân. Tìm 3 số đó.

Bài 142. Cho 3 số dương có tổng là 65 lập thành một cấp số nhân tăng, nếu bớt một đơn vị ở số hạng thứ nhất và 19 đơn vị ở số hạng thứ ba ta được 1 cấp số cộng. Tìm 3 số đó.

Bài 143. Giữa các số 160 và 5 hãy chèn 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân. Tìm 4 số đó.

Bài 144. Giữa các số 243 và 1 hãy đặt thêm 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân.

Bài 145. Ba số khác nhau có tổng bằng 114 có thể coi là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân hoặc coi là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ 25 của 1 cấp số cộng. Tìm các số đó.

Bài 146. Tìm m để phương trình $x^3 + (5-m)x^2 + (6-5m)x - 6m = 0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân ?

Bài 147. Chứng minh rằng với mọi m thì phương trình $x^3 - (m^2 + 3)x^2 + (m^2 + 3)x - 1 = 0$ luôn có ba nghiệm và ba nghiệm này lập thành cấp số nhân.

Bài 148. Đầu mùa thu hoạch xoài, một bác nông dân đã bán cho người thứ nhất nửa số xoài thu hoạch được và nửa quả, bán cho người thứ hai nửa số còn lại và nửa quả, bán cho người thứ ba nửa số còn lại và nửa quả,... Đến người thứ bảy bác cũng bán nửa số xoài còn lại và nửa quả thì không còn quả nào nữa. Hỏi bác nông dân đã thu hoạch được bao nhiêu xoài ở đầu mùa ?

----- HẾT CHƯƠNG 2 -----

Chương 3

Giới hạn - Hàm số liên tục

Bài 1. Giới hạn của dãy số

1. Giới hạn hữu hạn của dãy số

a. Định nghĩa

- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ hay $u_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$.
- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là số thực a khi n dần tới dương vô cực, nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - a) = 0$, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ hay $u_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow +\infty$.
- Lưu ý: Từ nay về sau, thay cho $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, ta viết tắt là $\lim u_n = a$.

b. Một vài giới hạn đặc biệt

- $\lim \frac{1}{n} = 0$ $\lim \frac{1}{n^k} = 0, k \in \mathbb{Z}^+$.
- $\lim q^n = 0$, với $|q| < 1$.
- Nếu $u_n = c$, với c là hằng số thì $\lim u_n = c$.

2. Định lý về giới hạn hữu hạn của dãy số

a. Định lý

- Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì
 - $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n = a + b$;
 - $\lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n = a - b$;
 - $\lim(u_n \cdot v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n = a \cdot b$;
 - $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n} = \frac{a}{b}$, với $b \neq 0$.
- Nếu $\lim u_n = a$ thì $\lim |u_n| = |a|$ và $\lim \sqrt[k]{u_n} = \sqrt[k]{a}$.
- Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

b. Một số dạng toán tìm giới hạn

Dạng phân thức $\lim \frac{P(n)}{Q(n)}$, với $P(n)$ và $Q(n)$ là hàm số dạng đa thức hoặc vô tỉ

Phương pháp: Chia cả tử và mẫu cho n^k với k là số mũ lớn nhất ở cả tử và mẫu

Ví dụ 1. Tìm giới hạn của các dãy số sau

- a) $u_n = \frac{-3n^3 + 2n^2 + 1}{2n^3 - n}$;
- b) $u_n = \frac{2n+1}{n^2+n+3}$;
- c) $u_n = \frac{\sqrt{4n^2+n}-n}{n+3}$;
- d) $u_n = \frac{n^2+n+1}{2n^2-1}$

Dạng vô định chứa căn bậc hai

Phương pháp: Nhân cả tử và mẫu cho lượng liên hợp

- $\sqrt{A} - B = \frac{A - B^2}{\sqrt{A} + B}$
- $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$

Ví dụ 2. Tìm giới hạn của các dãy số sau

- a) $u_n = \sqrt{n^2 + 3n} - n$;
- b) $u_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n - 1$;
- c) $u_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 2}$;

Dạng lũy thừa cơ số tự nhiên

Phương pháp: Chia cả tử và mẫu cho a^n với a là cơ số lớn nhất ở cả tử và mẫu

Ví dụ 3. Tìm giới hạn của các dãy số sau

a) $u_n = \frac{2 \cdot 7^n - 4^n + 1}{7^n + 3 \cdot 5^n};$

b) $u_n = \frac{5^n - 4^{n+2}}{2 \cdot 3^{n+3} + 6^{n+1}};$

c) $u_n = \frac{2^n + 5^{n+1}}{1 + 5^n};$

3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

a. Định nghĩa

- Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q , với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.
- Minh họa
 - Dãy số $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots; \frac{1}{2^n}; \dots$ là cấp số nhân lùi vô hạn, với công bội $q = \frac{1}{2}$.
 - Dãy số $1; -\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; -\frac{1}{27}; \dots; \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}; \dots$ là cấp số nhân lùi vô hạn, với công bội $q = -\frac{1}{3}$.

b. Định lý

- Cho cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q , với $|q| < 1$.

Gọi $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ là tổng vô hạn của (u_n) .

Khi đó $S = \frac{u_1}{1-q}$.

- Áp dụng:

Ví dụ 4. (CTST - Tr107)

- a) Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) , với $u_n = \frac{1}{3^n}$.
- b) Tính tổng $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots$
- c) Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,12121212\dots$ dưới dạng phân số.

4. Giới hạn vô cực

a. Định nghĩa

- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, được xác định và kí hiệu $\lim u_n = +\infty$.
- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, được xác định và kí hiệu $\lim u_n = -\infty$.
- Nhận xét: $\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = -\infty$.

b. Một vài giới hạn đặc biệt

- $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương.
- $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.
- Nguyên lý kẹp: Cho ba dãy số (u_n) , (v_n) và (w_n) .

Nếu $v_n \leq u_n \leq w_n$, với mọi n và $\lim v_n = \lim w_n = a$ thì $\lim u_n = a$.

c. Quy tắc tìm giới hạn

Qui tắc 1. Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.

Qui tắc 2. Nếu $\lim u_n = \pm\infty$, $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim(u_n \cdot v_n)$ được xác định như sau:

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n \cdot v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Qui tắc 3. Nếu $\lim u_n = \pm\infty$, $\lim v_n = a$, $a \neq 0$ thì $\lim(u_n \cdot v_n)$ được xác định như sau:

$\lim u_n$	Dấu của a	$\lim(u_n \cdot v_n)$
$+\infty$	+	$+\infty$
$+\infty$	-	$-\infty$
$-\infty$	+	$-\infty$
$-\infty$	-	$+\infty$

Qui tắc 4. Nếu $\lim u_n = a$, $a \neq 0$, $\lim v_n = 0$, $v_n > 0$ hoặc $v_n < 0$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n}$ được xác định như sau:

Dấu của a	Dấu của v_n	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
+	+	$+\infty$
+	-	$-\infty$
-	+	$-\infty$
-	-	$+\infty$

Ví dụ 5. Tìm giới hạn của các dãy số sau

- a) $u_n = \frac{2n+5}{n \cdot 3^n}$; (Qui tắc 1) b) $u_n = -n^2 \cdot 2023^n$; (Qui tắc 2)
- c) $u_n = 3n^2 - 101n - 51$; (Qui tắc 3) d) $u_n = \frac{3n^3 + 2n - 1}{2n^2 - n}$; (Qui tắc 4)

5. Bài tập

Bài 149. Tính các giới hạn sau (Dạng phân thức)

- a) $\lim \frac{2n^2 - n + 3}{3n^2 + 2n + 1}$. b) $\lim \frac{2n+1}{n^3 + 4n^2 + 3}$.
- c) $\lim \frac{3n^3 + 2n^2 + n}{n^3 + 4}$. d) $\lim \frac{n^4}{(n+1)(n+1)(n^2+1)}$.
- e) $\lim \frac{n^2 + 1}{2n^4 + n + 1}$. f) $\lim \frac{n^3 - 3}{3n^3 - 2n^2 + 1}$.

Bài 150. Tính các giới hạn sau (Dạng lũy thừa với cơ số tự nhiên)

- a) $\lim \frac{1+3^n}{4+3^n}$. b) $\lim \frac{4 \cdot 3^n + 7^{n+1}}{2 \cdot 5^n + 7^n}$.
- c) $\lim \frac{4^{n+1} + 6^{n+2}}{5^n + 8^n}$. d) $\lim \frac{2^n + 5^{n+1}}{1+5^n}$.
- e) $\lim \frac{1+2 \cdot 3^n - 7^n}{5^n + 2 \cdot 7^n}$. f) $\lim \frac{1-2 \cdot 3^n + 6^n}{2^n(3^{n+1} - 5)}$.

Bài 151. Tính các giới hạn sau (Sử dụng Nguyên lý Kẹp giữa)

a) $\lim \frac{2 \cos n^2}{n^2 + 1}.$

b) $\lim \frac{(-1)^n \sin(3n + n^2)}{3n - 1}.$

c) $\lim \frac{2 - 2n \cos n}{3n + 1}.$

d) $\lim \frac{3 \sin^6 n + 5 \cos^2(n + 1)}{n^2 + 1}.$

e) $\lim \frac{3 \sin^2(n^3 + 2) + n^2}{2 - 3n^2}.$

f) $\lim \frac{3n^2 - 2n + 2}{n(3 \cos n + 2)}.$

Bài 152. Tính các giới hạn sau (Dạng vô định chứa căn bậc hai)

a) $\lim \frac{\sqrt{4n^2 + 1} + 2n - 1}{\sqrt{n^2 + 4n + 1} + n}$

b) $\lim \frac{\sqrt{n^2 + 3} - n - 4}{\sqrt{n^2 + 2} + n}$

c) $\lim \frac{n^2 + \sqrt[3]{1 - n^6}}{\sqrt{n^4 + 1} + n^2}$

d) $\lim \frac{\sqrt{4n^2 + 1} + 2n}{\sqrt{n^2 + 4n + 1} + n}$

e) $\lim \frac{(2n\sqrt{n} + 1)(\sqrt{n} + 3)}{(n + 1)(n + 2)}$

f) $\lim \frac{\sqrt{n^2 - 4n} - \sqrt{4n^2 + 1}}{\sqrt{3n^2 + 1} + n}$

Bài 153. Tính các giới hạn sau (Dạng vô định chứa căn bậc hai)

a) $\lim(\sqrt{n + 1} - \sqrt{n}).$

b) $\lim(\sqrt{n^2 + 3n} - n + 2).$

c) $\lim(\sqrt[3]{n^3 - 2n^2} - n).$

d) $\lim(\sqrt{n^2 + n} - n).$

e) $\lim \frac{\sqrt{4n^2 + 1} - 2n + 1}{\sqrt{n^2 + 2n} - n}.$

f) $\lim n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 2}).$

Bài 154. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2 - 3}.$

b) $\lim \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1)}{3n^2 + 4}.$

c) $\lim \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n.(n + 1)} \right].$

d) $\lim \frac{3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n}{5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^n}.$

Bài 155. Đổi số thập phân vô hạn tuần hoàn ra phân số

a) 2,333333....

b) 0,21212121....

Bài 2. Giới hạn của hàm số

I. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

1. Định nghĩa

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D hoặc trên $D \setminus \{x_0\}$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là L khi x dần tới x_0 , nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$.

- Nhận xét: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$, (c là hằng số).

2. Định lí về giới hạn hữu hạn

- a) Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$. Khi đó

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] &= L + M; & \bullet \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] &= L - M; \\ \bullet \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] &= L \cdot M; & \bullet \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{L}{M}, \quad M \neq 0. \end{aligned}$$

- b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

3. Một số dạng toán tìm tới hạn của hàm số

Ví dụ 1. (CTCS - Tr73)

(Dạng cơ bản $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, với $f(x)$ là hàm số luôn xác định với mọi $x = x_0$)

Áp dụng: Tìm các giới hạn sau

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4x + 2); \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 2}{2x + 1}.$$

Ví dụ 2. (Dạng vô định $\frac{0}{0}$ khi $x \rightarrow x_0$)

PHƯƠNG PHÁP

Loại 1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$ với $P(x), Q(x)$ là các đa thức và $P(x_0) = Q(x_0) = 0$.

– Biến đổi $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x - x_0) \cdot P_1(x)}{(x - x_0) \cdot Q_1(x)}$

(để làm được điều này ta sử dụng kỹ thuật phân tích đa thức thành nhân tử)

– Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$

Loại 2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$

với $P(x_0) = Q(x_0) = 0$ và $P(x), Q(x)$ là biểu thức chứa căn cùng bậc

- Nhân lượng liên hợp ở tử và mẫu làm xuất hiện nhân tử chung
– Các lượng liên hợp thường dùng

$$\bullet \quad \sqrt{A} - B = \frac{A - B^2}{\sqrt{A} + B}$$

$$\bullet \quad \sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}.$$

$$\bullet \quad \sqrt[3]{A} - B = \frac{A - B^3}{\sqrt[3]{A^2} + B \cdot \sqrt[3]{A} + B^2}$$

$$\bullet \quad \sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} = \frac{A - B}{\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}}.$$

Áp dụng: Tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x}}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 7} - x + 2}{x - 3}$

4. Giới hạn một bên

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$. Số L gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$, nếu với dãy số (x_n) bất kỳ thỏa mãn $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.
- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$. Số L gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$, nếu với dãy số (x_n) bất kỳ thỏa mãn $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.
- Nhận xét: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

Ví dụ 3. (Dạng phân nhánh). Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 5x + 2, & \text{khi } x \geq 1 \\ x^2 - 3, & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

Tính $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (nếu có).

Ví dụ 4. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x - 2|}{x^2 - 3x + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{\sqrt{2 - x}}$;

II. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

1. Giới hạn vô cực

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$. Ta nói $y = f(x)$ có giới hạn là L khi $x \rightarrow +\infty$, nếu với dãy số (x_n) bất kỳ, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.
Kí hiệu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ hay $f(x_n) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow +\infty$.
- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(-\infty; b)$. Ta nói $y = f(x)$ có giới hạn là L khi $x \rightarrow -\infty$, nếu với dãy số (x_n) bất kỳ, $x_n < b$ và $x_n \rightarrow -\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.
Kí hiệu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ hay $f(x_n) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow -\infty$.

Ví dụ 5. (CÁNH DIỀU - Tr 114)

Cho hàm số $f(x) = 2 + \frac{4}{x - 1}$. Sử dụng định nghĩa, tìm $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x_n)$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x_n)$.

2. Lưu ý

- Các quy tắc tính giới hạn hữu hạn tại một điểm cũng đúng cho giới hạn hữu hạn tại vô cực.
- Với c là hằng số, ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} c = c$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} c = c$.
- Với k là một số nguyên dương, ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^k} = 0$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$.

Ví dụ 6. (CÁNH DIỀU - Tr 115) Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x + 1}$.

3. Dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$ khi $x \rightarrow \pm\infty$

Phương pháp: Chia cả tử và mẫu cho x^k với k là số mũ lớn nhất ở cả tử và mẫu.

Ví dụ 7. Tìm các giới hạn sau

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 1}; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - 5x + 4}{2x^4 - 3x^2 - 4}; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - x + 1} - x + 2}{4 - 3x}. \end{array}$$

III. GIỚI HẠN VÔ CỰC (MỘT PHÍA) CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

1. Giới hạn vô cực

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$. Ta nói $y = f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x \rightarrow a^+$, nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow a$, ta có $f(x_n) \rightarrow +\infty$.

Kí hiệu $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ hay $f(x) \rightarrow +\infty$ khi $x \rightarrow a^+$.

- Các trường hợp $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

2. Một vài giới hạn đặc biệt

- $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x - a} = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x - a} = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{Khi } k \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{Khi } k \text{ lẻ} \end{cases}$

3. Quy tắc tìm giới hạn

a. Quy tắc tìm giới hạn dạng tích $f(x).g(x)$

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)]$ được tính theo quy tắc sau

Dấu của L	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)]$
+	$+\infty$	$+\infty$
+	$-\infty$	$-\infty$
-	$+\infty$	$-\infty$
-	$-\infty$	$+\infty$

b. Quy tắc tìm giới hạn dạng thương $\frac{f(x)}{g(x)}$

- Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, với $g(x) > 0$ hoặc $g(x) < 0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ được tính theo quy tắc trong bảng sau

Dấu của L	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
+	$+\infty$	$+\infty$
+	$-\infty$	$-\infty$
-	$+\infty$	$-\infty$
-	$-\infty$	$+\infty$

Ví dụ 8. Tính các giới hạn sau

Giới hạn vô cực dạng tích

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2x);$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^2 - 3x};$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - x).$

Giới hạn vô cực dạng thương

d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 3}{x - 1};$

e) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 4x}{(x + 3)^2};$

III. BÀI TẬP

Bài 156. Tìm các giới hạn sau (Dạng cơ bản)

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + x^2 + x^3}{1 + x}.$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - x}{x - 1}.$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{x}.$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x - 1|}{x^4 + x - 3}.$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x - 1}.$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}{x + 1}.$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 8} - 3}{x - 2}.$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{2}.$

Bài 157. Tìm các giới hạn sau (Dạng $\frac{0}{0}$ - Loại 1)

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 2}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 2x^2 + x}.$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^3 + 1}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9}.$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 5x^5 + 4x^6}{(1 - x)^2}.$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}.$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)(1 + 2x) - 1}{x}.$

h) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 2x^2}.$

Bài 158. Tìm các giới hạn sau (Dạng $\frac{0}{0}$ - Loại 2)

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x + 1} - 3}{x^2 - 4}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{4x + 4} - 2}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{\sqrt{x + 7} - 3}.$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x + 2} - \sqrt{3x + 1}}{x - 1}.$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}.$

Bài 159. Tìm các giới hạn sau (Dạng $\frac{\infty}{\infty}$)

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 - x + 1}.$

b) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x - 2}.$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 3x^2 + 2}.$

d) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 4x + 1}{\sqrt{4x^2 + 1} + 2 - x}.$

e) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2 - x}{\sqrt{9x^2 - 3x + 2x}}.$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} + 1}{x^2 + x + 1}.$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x - 1)\sqrt{x^2 - 3}}{x - 5x^2}.$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3x}}{\sqrt{4x^2 + 1} - x + 2}.$

Bài 160. Tìm các giới hạn sau (Dạng $\infty - \infty$)

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x).$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 4x - 3}).$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 1}).$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}).$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{2x - 1} - \sqrt[3]{2x + 1}).$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{3x^3 - 1} + \sqrt{x^2 + 2}).$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right).$

h) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \right).$

Bài 161. Tìm các giới hạn sau (Dạng giới hạn một bên)

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 15}{x - 2}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 15}{x - 2}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 + 3x - 2x^2}{x - 3}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}.$

e) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|2 - x|}{2x^2 - 5x + 2}.$

f) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2 - x|}{2x^2 - 5x + 2}.$

g) $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) \cdot \sqrt{\frac{x}{x^2 - 4}}.$

h) $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x^3 + 1) \cdot \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}}.$

Bài 162. Tìm các giới hạn một bên của hàm số tại điểm được chỉ ra (Dạng giới hạn hàm phân nhánh)

a) Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|x - 2|}$. Tính $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.

b) Cho hàm số $f(x) = \frac{2}{(x - 1)(x - 2)}$. Tính $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.

c) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{khi } x < 1 \\ x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Tính $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (nếu có)

d) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \\ -\frac{x}{2} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$. Tính $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (nếu có)

Bài 3. Hàm số liên tục

1. Hàm số liên tục tại một điểm

a. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và có $x_0 \in K$. Khi đó

- Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm đó.

b. Ví dụ

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \frac{x}{x-2}$ tại điểm $x = 3$

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}, & \text{khi } x \neq 1 \\ -\frac{1}{2}, & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ tại điểm $x = 1$.

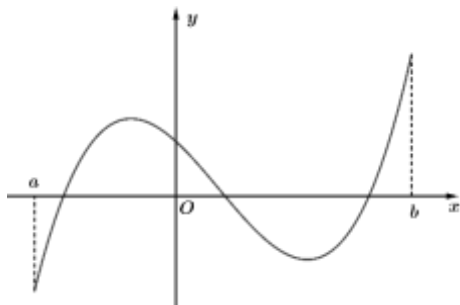
Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & \text{khi } x > 3 \\ ax - 1, & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x = 3$.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn

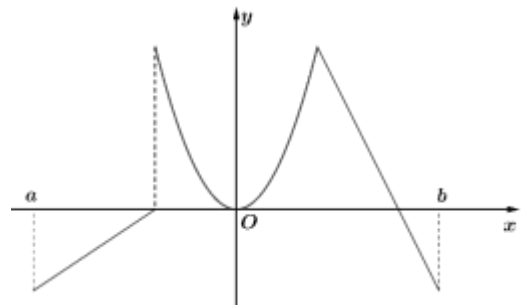
a. Định nghĩa

- Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm trong khoảng $(a; b)$.
- Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ nếu:
 - + $f(x)$ liên tục trên $(a; b)$;
 - + $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

b. Chú ý. Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một “đường liền” trên khoảng đó.



Hàm số liên tục trên khoảng $(a; b)$



Hàm số không liên tục trên khoảng $(a; b)$

3. Một số định lý cơ bản

a. Tính liên tục của một số hàm số sơ cấp cơ bản

- Hàm số đa thức $y = P(x)$, các hàm số lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, hàm số căn thức $y = \sqrt{P(x)}$ và hàm số lượng giác $y = \tan x$, $y = \cot x$ liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

b. Tính liên tục của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục

Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0 . Khi đó

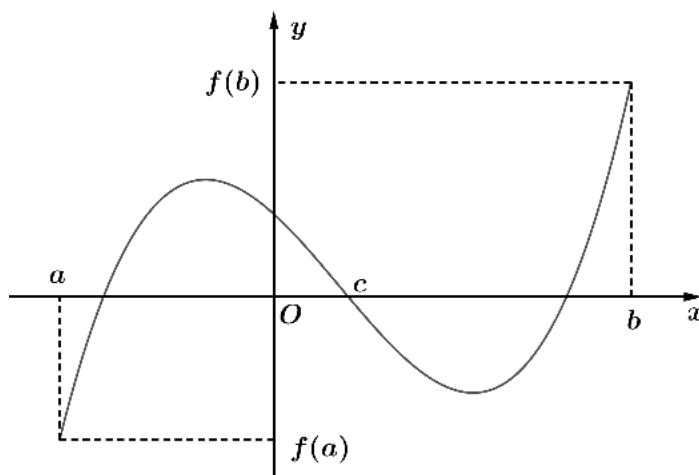
- Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x).g(x)$ cũng liên tục tại x_0 .
- Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 , nếu $g(x_0) \neq 0$.

Ví dụ 4. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 2x}{x - 1}, & \text{khi } x \neq 1 \\ 5, & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ trên tập xác định của nó.

Ví dụ 5. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x}, & \text{khi } x < 2 \\ mx + m + 1, & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$ liên tục trên tập xác định của nó.

c. Điều kiện để tồn tại nghiệm của phương trình trên một khoảng

- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.



- **Nhận xét:** Có thể phát biểu điều kiện trên theo một dạng khác như sau:
Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b) < 0$, thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a; b)$.
- **Mở rộng:** Nếu $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Đặt $m = \min_{[a; b]} f(x)$, $M = \max_{[a; b]} f(x)$.

Khi đó với mọi $T \in (m; M)$ luôn tồn tại ít nhất một số $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = T$.

Ví dụ 6. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 2x - 5 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0; 2)$.

Ví dụ 7. Chứng minh rằng phương trình $x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$ có ít nhất hai nghiệm thuộc $(-1; 1)$.

Ví dụ 8. Chứng minh rằng phương trình $m(x-1)^7(x-3) + 2x - 5 = 0$ có nghiệm với mọi m .

4. Bài tập

Dạng 1. Xét tính liên tục của hàm số tại điểm được chỉ ra

Phương pháp

Trường hợp 1. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} u(x) & \text{khi } x > x_0 \\ v(x) & \text{khi } x < x_0 \\ k & \text{khi } x = x_0 \end{cases}$

Khi đó hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Trường hợp 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} u(x) & \text{khi } x \neq x_0 \\ k & \text{khi } x = x_0 \end{cases}$

Khi đó hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Bài 163. Xét tính liên tục của hàm số tại điểm được chỉ ra:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ tại $x = -1$.

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ tại $x = 1$.

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{2-7x+5x^2-x^3}{x^2-3x+2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại $x = 2$.

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & \text{khi } x > 5 \\ (x-5)^2+3 & \text{khi } x \leq 5 \end{cases}$ tại $x = 5$.

e) $f(x) = \begin{cases} 1-\cos x & \text{khi } x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ tại $x = 0$.

f) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x < 1 \\ -2x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ tại $x = 1$.

g) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ tại $x = 1$.

h) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & \text{khi } x \neq -2 \\ 3=-4 & \text{khi } x = -2 \end{cases}$ tại $x = -2$.

i) $f(x) = |1-3x|$ tại $x = \frac{1}{3}$.

j) $f(x) = |4+2x|$ tại $x = -2$

k) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+x+2}{x^3+1} & \text{khi } x \neq -1 \\ \frac{4}{3} & \text{khi } x = -1 \end{cases}$.

l) $f(x) = \begin{cases} x^2-3x+4 & \text{khi } x < 2 \\ 5 & \text{khi } x = 2 \\ 2x+1 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$

Bài 164. Tìm m, n để hàm số liên tục tại điểm được chỉ ra

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x < 1 \\ 2mx-3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ tại $x = 1$.

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x+m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ tại $x = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại $x = 2$.

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$.

e) $f(x) = \begin{cases} x^2+x & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \\ mx+1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$.

f) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x+m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$.

Dạng 2. Chứng minh phương trình có nghiệm

Bài 165. Chứng minh rằng các phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt

a) $x^3 - 3x + 1 = 0$

b) $x^3 + 6x^2 + 9x + 1 = 0$

c) $2x + 6\sqrt[3]{1-x} = 3$

Bài 166. Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm

a) $x^5 - 3x + 3 = 0$

b) $x^5 + x - 1 = 0$

c) $x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$

Bài 167. Chứng minh rằng phương trình

a) $x^3 + x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1.

b) $x^3 - 3x + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

c) $x^2 + 1 = \sqrt{2x+2}$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

d) $x^2 \cdot \cos x + x \cdot \sin x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(0; \pi)$.

e) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm.

Bài 168. Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số:

a) $m(x-1)^3(x-2) + 2x - 3 = 0$.

b) $x^4 + mx^2 - 2mx - 2 = 0$.

c) $a(x-b)(x-c) + b(x-c)(x-a) + c(x-a)(x-b) = 0$.

d) $(1-m^2)(x+1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$.

e) $\cos x + m \cos 2x = 0$.

f) $m(2 \cos x - \sqrt{2}) = 2 \sin 5x + 1$.

Bài 169. Chứng minh các phương trình sau luôn có nghiệm

a) $ax^2 + bx + c = 0$ với $2a + 3b + 6c = 0$.

b) $ax^2 + bx + c = 0$ với $a + 2b + 5c = 0$.

c) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

Bài 170. Chứng minh rằng phương trình

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ luôn có nghiệm } x \in \left[0; \frac{1}{3}\right] \text{ với } a \neq 0 \text{ và } 2a + 6b + 19c = 0.$$

----- HẾT CHƯƠNG 3 -----

Phần 2

Thống kê và xác suất

Chương V.

*Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm
cho mẫu số liệu ghép nhóm*

Bài 1. Số trung bình và một của mẫu số liệu ghép nhóm

1. Số liệu ghép nhóm

a. Khái niệm

– Mẫu số liệu ghép nhóm thường được trình bày dưới dạng bảng thống kê có dạng như sau:

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	...	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

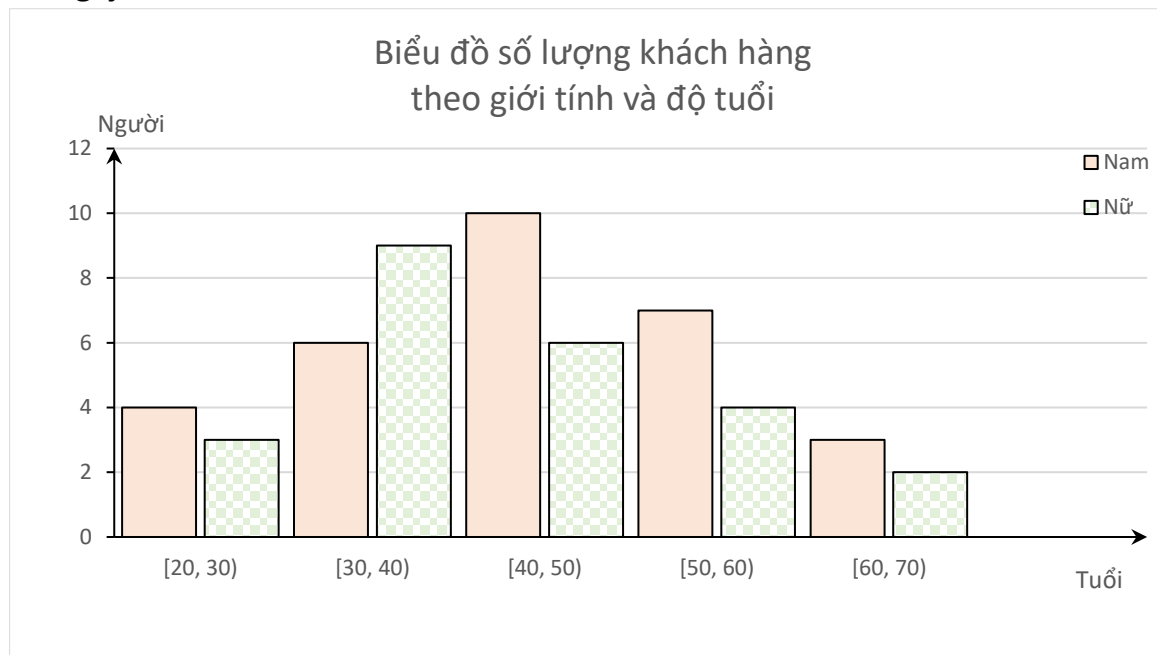
Bảng tần số ghép nhóm

– Chú ý

- + Bảng trên gồm k nhóm $[u_i; u_{i+1})$ với $1 \leq i \leq k$ mỗi nhóm gồm một giá trị được ghép theo một tiêu chí xác định.
- + Cỡ mẫu $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$
- + Giá trị chính giữa của mỗi nhóm được dùng làm giá trị đại diện cho nhóm ấy. Ví dụ nhóm $[u_1; u_2)$ có giá trị đại diện là $\frac{u_1 + u_2}{2}$.
- + Hiệu $u_{i+1} - u_i$ gọi là độ dài của nhóm $[u_i; u_{i+1})$.

b. Ví dụ

Ví dụ 1. (CTST - Tr130) Một đại lí bảo hiểm đã thống kê số lượng khách mua bảo hiểm nhân thọ trong một ngày ở biểu đồ sau:



Hãy sử dụng dữ liệu trong biểu đồ hoàn thiện bảng thống kê về số lượng khách nữ theo tuổi sau:

Khoảng tuổi	$[20; 30)$	$[30; 40)$	$[40; 50)$	$[50; 60)$	$[60; 70)$
Số khách hàng nữ	3	?	?	?	?

Ví dụ 2. (CTST - Tr130) Tính giá trị đại diện và độ dài mỗi nhóm trong mẫu số liệu trên.

c. Một số quy tắc ghép nhóm của mẫu số liệu

Mỗi mẫu số liệu có thể được ghép nhóm theo nhiều cách khác nhau nhưng thường tuân theo một số quy tắc sau:

- Sử dụng $k = 5$ đến $k = 20$ nhóm. Cỡ mẫu càng lớn thì càng cần nhiều nhóm số liệu. Các nhóm có cùng độ dài bằng L thỏa mãn $R < k.L$, trong đó R là khoảng biến thiên, k là số nhóm.
- Giá trị nhỏ nhất của mẫu thuộc vào nhóm $[u_1; u_2)$ và càng gần u_1 càng tốt

Giá trị lớn nhất của mẫu thuộc vào nhóm $[u_k; u_{k+1})$ và càng gần u_{k+1} càng tốt

Ví dụ 3. (CTST - Tr131) Cân nặng của 28 học sinh nam lớp 11 được cho như sau:

55,4	62,6	54,2	56,8	58,8	59,4	60,7	58	59,5	63,6	61,8	52,3	63,4	57,9
49,7	45,1	56,2	63,2	46,1	49,6	59,1	55,3	55,8	45,5	46,8	54	49,2	52,6

Hãy chia mẫu số liệu thành 5 nhóm, lập bảng tần số ghép nhóm và xác định giá trị đại diện cho mỗi nhóm.

d. Chú ý

- Các đầu mút của các nhóm có thể không là giá trị của mẫu số liệu.
- Ta hay gặp bảng số liệu ghép nhóm là các số nguyên, chẳng hạn như bảng thống kê số lỗi chính tả trong bài kiểm tra giữa học kì 1 môn Ngữ văn của học sinh khối 11 như sau:

Số lỗi	[1;2]	[3;4]	[5;6]	[7;8]	[9;10]
Số bài	122	75	14	5	2

Bảng số liệu này không có dạng như Bảng tần số ghép nhóm. Để thuận lợi cho việc tính các số đặc trưng cho bảng số liệu này, người ta hiệu chỉnh về dạng Bảng tần số ghép nhóm bằng cách thêm bớt 0,5 đơn vị vào đầu mút bên phải và bên trái của mỗi nhóm số liệu như sau:

Số lỗi	[0.5; 2.5)	[2.5; 4.5)	[4.5; 6.5)	[6.5; 8.5)	[8.5; 10.5)
Số bài	122	75	14	5	2

2. Số liệu trung bình

a. Khái niệm

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu $\bar{x}$ và được tính như sau:

$$\bar{x} = \frac{n_1c_1 + n_2c_2 + \dots + n_kc_k}{n}$$

trong đó $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Ví dụ 4. (CTST - Tr132) Các bạn lớp 11A trả lời 40 câu hỏi trong bài kiểm tra. Kết quả được thống kê trong bảng sau:

Số câu trả lời đúng	[16;21)	[21;26)	[26;31)	[31;36)	[36;41)
Số học sinh	4	6	8	18	4

a) Tính giá trị đại diện c_i , $1 \leq i \leq 5$ của từng nhóm số liệu.

b) Tính $n_1c_1 + n_2c_2 + n_3c_3 + n_4c_4 + n_5c_5$.

c) Tính $\bar{x} = \frac{n_1c_1 + n_2c_2 + n_3c_3 + n_4c_4 + n_5c_5}{40}$.

Ví dụ 5. (CTST - Tr132) Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả cam ở mỗi lô hàng A và B được cho ở bảng sau:

Cân nặng (gam)	[150;155)	[155;160)	[160;165)	[165;170)	[170;175)
Số quả cam ở lô hàng A	2	6	12	4	1
Số quả cam ở lô hàng B	1	3	7	10	4

- Hãy ước lượng cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng A và lô hàng B?
- Nếu so sánh theo số lượng trung bình thì cam ở lô hàng nào nặng hơn?

b. Ý nghĩa của số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm

Số trung bình của mỗi mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho số trung bình của mẫu số liệu gốc. Nó thường dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu

3. Một

a. Nhóm chưa một

- Là nhóm chưa có tần số lớn nhất.
- Giả sử nhóm chưa một là $[u_m; u_{m+1})$, khi đó một của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là M_0 , được xác định bởi công thức:
$$M_0 = u_m + \frac{n_m - n_{m-1}}{(n_m - n_{m-1}) + (n_m - n_{m+1})} \cdot (u_{m+1} - u_m)$$
- Chú ý:
 - Nếu không có nhóm kề trước của nhóm chứa một thì $n_{m-1} = 0$.
 - Nếu không có nhóm kề sau của nhóm chứa một thì $n_{m+1} = 0$.

Ví dụ 5. (CTST - Tr133) Một công ty xây dựng khảo sát khách hàng xem họ có nhu cầu mua nhà ở mức giá nào. Kết quả khảo sát được ghi lại ở bảng sau:

Mức giá (triệu đồng/m ²)	[10;14)	[14;18)	[18;22)	[22;26)	[26;30)
Số khách hàng	54	78	120	45	12

- Tìm một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- Công ty nên xây nhà ở mức giá nào để nhiều người có nhu cầu mua nhất?

b. Ý nghĩa của một của mẫu số liệu ghép nhóm

- Một của mẫu số liệu không ghép nhóm là giá trị có khả năng xuất hiện cao nhất khi lấy mẫu. Một của mẫu số liệu sau khi ghép nhóm M_0 xấp xỉ với một của mẫu số liệu không ghép nhóm. Các giá trị nằm xung quanh M_0 thường có khả năng xuất hiện cao hơn các giá trị khác.
- Một mẫu số liệu ghép nhóm có thể có nhiều nhóm chứa một và nhiều một.

4. Bài tập

Bài 171. Người ta đếm số xe ô tô đi qua một trạm thu phí mỗi phút trong khoảng thời gian 9 giờ đến 9 giờ 30 phút sáng. Kết quả được ghi lại trong bảng sau:

15 16 13 21 17 23 15 21 6 11 12 23 19 25 11
25 7 29 10 28 29 24 6 11 23 11 21 9 27 15

- Tính số xe trung bình đi qua trạm thu phí trong mỗi phút.
- Tổng hợp lại số liệu trên bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

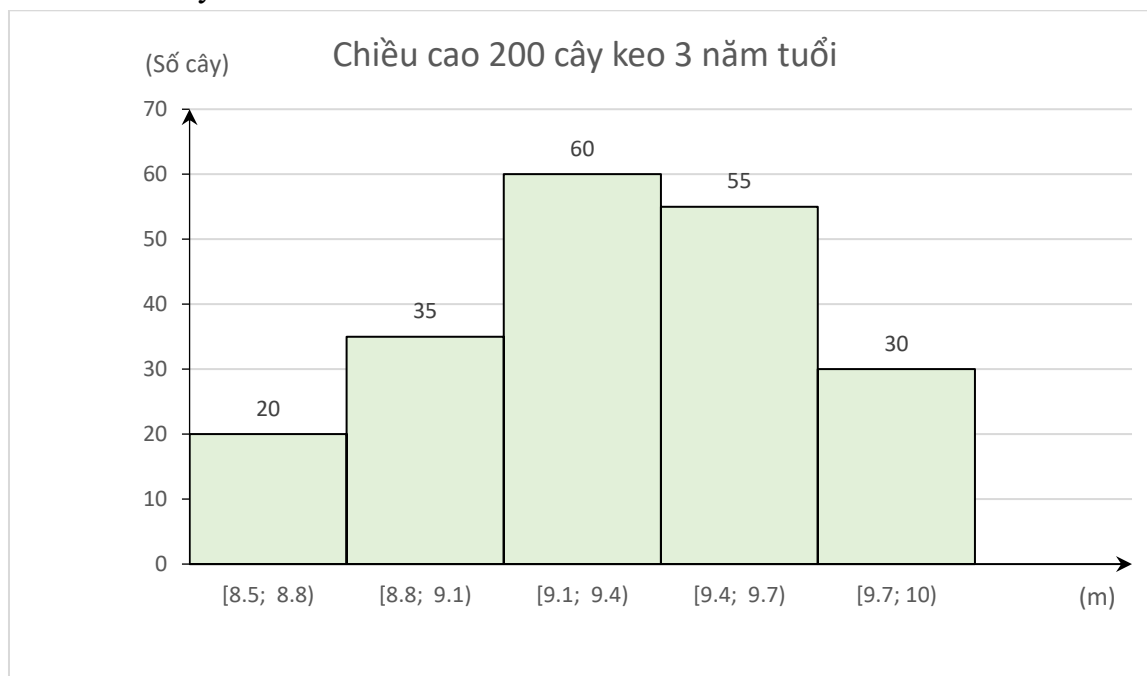
Số xe	[6;10]	[11;15]	[16;20]	[21;25]	[26;30]
Số lần	?	?	?	?	?

Bài 172. Một thư viện thống kê thống kê số lượng sách được mượn mỗi ngày trong ba tháng ở bảng sau

Số sách	[16;20]	[21;25]	[26;30]	[31;35]	[36;40]	[41;45]	[46;50]
Số ngày	3	6	15	27	22	14	5

Hãy ước lượng số trung bình và một của mẫu số liệu ghép nhóm.

Bài 173. Kết quả đo chiều cao của 200 cây keo 3 năm tuổi ở một nông trường được biểu diễn ở biểu đồ dưới đây



Hãy ước lượng số trung bình và một của mẫu số liệu ghép nhóm.

Bài 2. Trung vị và tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

1. Trung vị

a. Công thức xác định trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

- Ta gọi
 - n là cỡ mẫu.
 - Giả sử nhóm $[u_m; u_{m+1})$ chứa trung vị;
 - n_m là tần số của nhóm chứa trung vị;
 - $C = n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1}$
- Khi đó $M_e = u_m + \frac{\frac{n}{2} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m)$.

Ví dụ 1. (CTST - Tr136)

Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả bơ ở một lô hàng được cho ở bảng sau:

Cân nặng (gam)	$[150;155)$	$[155;160)$	$[160;165)$	$[165;170)$	$[170;175)$
Số quả bơ	1	7	12	3	2

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên?

b. Ý nghĩa của trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Từ dữ liệu ghép nhóm nói chung không thể xác định chính xác trung vị của mẫu số liệu gốc. Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho mẫu số liệu gốc và có thể lấy làm giá trị đại diện cho mẫu số liệu.

2. Tứ phân vị

a. Công thức xác định tứ phân vị

- Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là Q_2 , cũng chính là trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm.
- Để tìm tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là Q_1 , ta thực hiện như sau:
 - + Giả sử nhóm $[u_m; u_{m+1})$ chứa tứ phân vị thứ nhất.
 - + n_m là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất.
 - + $C = n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1}$
- Khi đó $Q_1 = u_m + \frac{\frac{n}{4} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m)$.
- Để tìm tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là Q_3 , ta thực hiện như sau:
 - + Giả sử nhóm $[u_i; u_{i+1})$ chứa tứ phân vị thứ ba.
 - + n_i là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ ba.
 - + $C = n_1 + n_2 + \dots + n_{i-1}$
- Khi đó $Q_3 = u_i + \frac{\frac{3n}{4} - C}{n_i} \cdot (u_{i+1} - u_i)$.

Ví dụ 2. (CÁNH DIỀU - Tr64) Thời gian (phút) truy cập Internet mỗi buổi tối của học sinh được cho trong bảng sau

Thời gian (phút)	$[9,5; 12,5)$	$[12,5; 15,5)$	$[15,5; 18,5)$	$[18,5; 21,5)$	$[21,5; 24,5)$
Số học sinh	3	12	15	24	2

Tìm tứ phân vị thứ nhất Q_1 và tứ phân vị thứ ba Q_3 của mẫu số liệu ghép nhóm.

b. Ý nghĩa của tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho các tứ phân vị của mẫu số liệu gốc, chúng chia mẫu số liệu thành 4 phần, mỗi phần chứa 25% giá trị.

3. Bài tập

Bài 174. Lương tháng của một số nhân viên văn phòng được ghi lại như sau (đơn vị: triệu đồng)

12,5 9,6 11,7 12,7 10,0 12,2 9,8 10,9 6,7 13,6 9,2
13,1 6,5 10,7 8,9 11,2 13,2 8,3 11,1 11,9 8,4 6,7

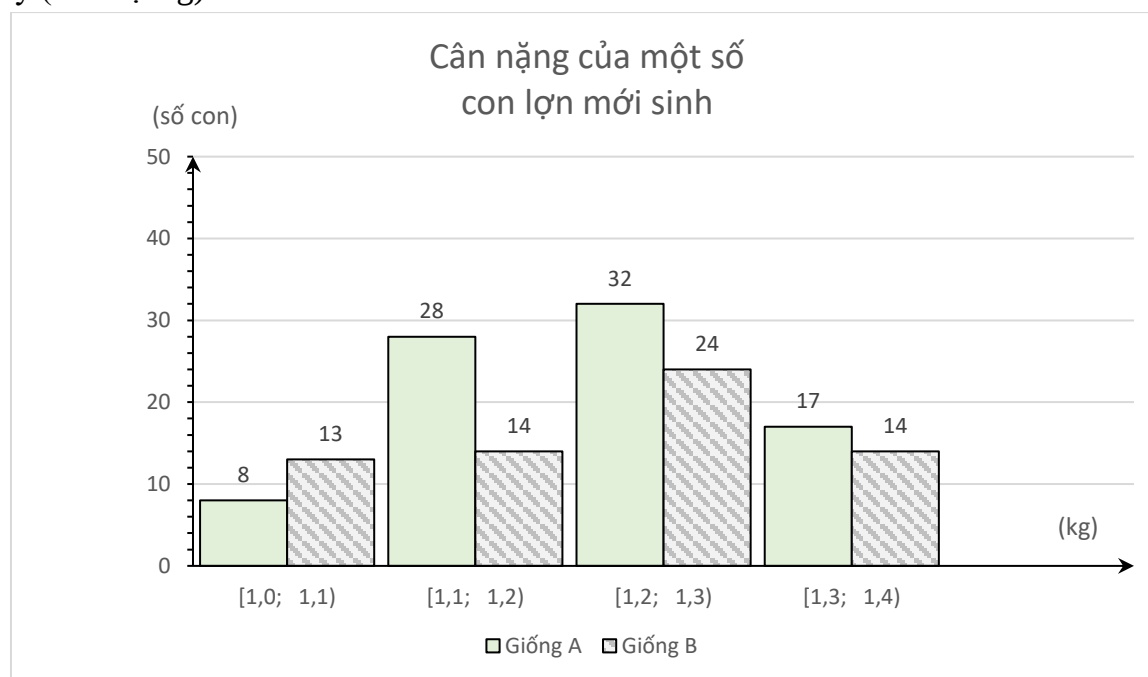
Tìm tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

Bài 175. Kiểm tra điện lượng của một số viên pin tiêu do một hãng sản xuất thu được kết quả sau:

Điện lượng (nghìn mAh)	$[0,9; 0,95)$	$[0,95; 1,0)$	$[1,0; 1,05)$	$[1,05; 1,1)$	$[1,1; 1,15)$
Số viên pin	10	20	35	15	5

Hãy ước lượng số trung bình, một và tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Bài 176. Cân nặng của một số con lợn mới sinh thuộc hai giống A và B được cho ở biểu đồ dưới đây (đơn vị: kg)



- Hãy so sánh cân nặng của con lợn mới sinh giống A và giống B theo số trung bình và trung vị.
- Hãy ước lượng tứ phân vị thứ nhất và thứ ba của cân nặng lợn con mới sinh giống A và cân nặng của lợn con mới sinh giống B?

Phần 3

Hình học và Đo lường

Chương 4

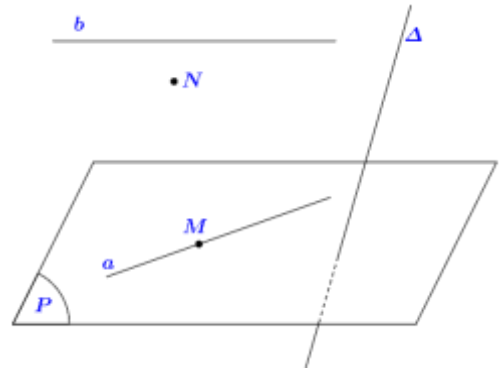
Đường thẳng và mặt phẳng

Quan hệ song song trong không gian

Bài 1. Điểm, đường thẳng và mặt phẳng trong không gian

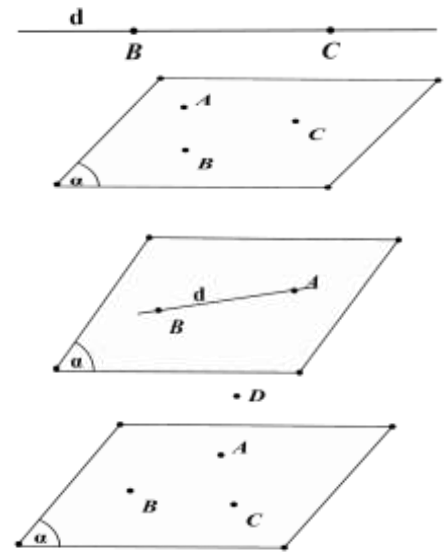
1. Mở đầu về hình học không gian

- Đối tượng cơ bản:
 - Điểm: kí hiệu $A, B, C, \dots$
 - Đường thẳng: kí hiệu $a, b, c, d, \Delta, \dots$
 - Mặt phẳng: kí hiệu $(P), (Q), (\alpha), (\beta), \dots$
- Quan hệ cơ bản:
 - Thuộc: kí hiệu $\in$. Ví dụ: $M \in a, M \in (P)$.
 - Chứa, nằm trong: kí hiệu $\subset$. Ví dụ: $a \subset (P)$.
- Hình biểu diễn của một hình trong không gian:
 - Đường thẳng được biểu diễn bởi đường thẳng. Đoạn thẳng biểu diễn bởi đoạn thẳng.
 - Hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau) được biểu diễn bởi hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau).
 - Hai đoạn thẳng song song hoặc bằng nhau được biểu diễn bởi hai đoạn thẳng song song và bằng nhau.
 - Dùng nét vẽ liền (—) để biểu diễn cho những đường trông thấy và dùng nét đứt (----) để biểu diễn cho những đường bị che khuất.



2. Các tính chất thừa nhận trong hình học không gian

- Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng cho trước.
 - Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.
 - Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.
 - Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.
 - Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.
- Từ tính chất này suy ra: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng sẽ có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy. Đường thẳng chung là duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó. Đường thẳng chung đó được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng.
- Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.



3. Điều kiện xác định mặt phẳng

- Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.
 - Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.
 - Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.
- Mặt phẳng hoàn toàn có thể mở rộng ra đến vô cực.

4. Hình chóp và hình tứ diện

- Cho đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ nằm trong mặt phẳng (α) và điểm $S \notin (\alpha)$. Lần lượt nối điểm S với các đỉnh $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$. Hình gồm đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ và n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ được gọi là hình chóp, kí hiệu hình chóp này là $S.A_1A_2A_3...A_n$. Khi đó ta gọi:

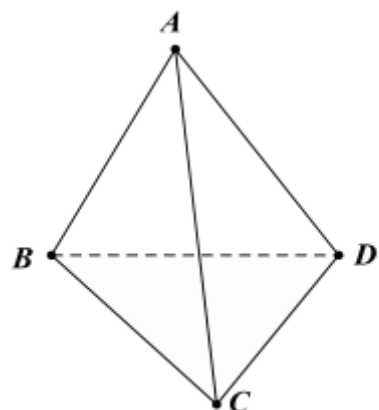
- S là đỉnh của hình chóp.
- $A_1A_2A_3...A_n$ là mặt đáy của hình chóp.
- Các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ gọi là mặt bên.
- $SA_1, SA_2, SA_3, ..., SA_n$ được gọi là các cạnh bên.

Ta gọi hình chóp có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác,..., lần lượt là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác,

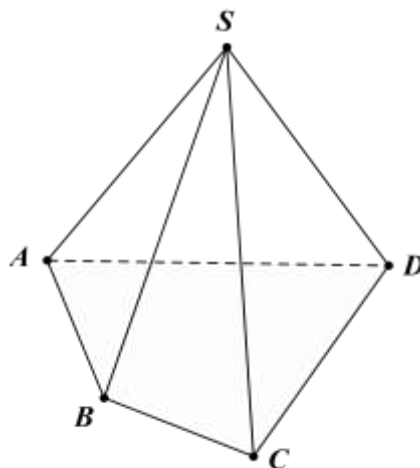
- Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm 4 tam giác ABC, ACD, ABD và BCD gọi là hình tứ diện (hay gọi là tứ diện) và được kí hiệu là $ABCD$.

- Các điểm A, B, C, D là bốn đỉnh của tứ diện.
- Các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, CA, BD gọi là các cạnh của tứ diện.
- Hai cạnh không đi qua một đỉnh gọi là hai cạnh đối diện của tứ diện.
- Các tam giác ABC, ACD, ABD, BCD gọi là các mặt của tứ diện.

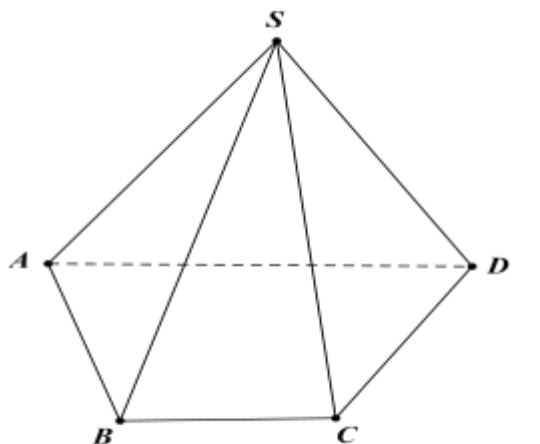
Hình tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều gọi là hình tứ diện đều.



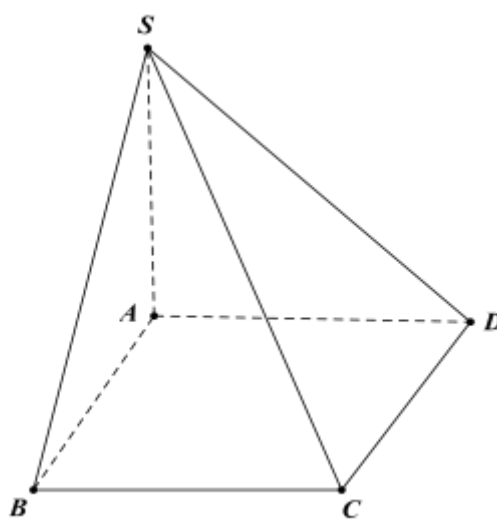
Hình chóp tam giác (tứ diện)



Hình chóp tứ giác



Hình chóp tứ giác có đáy là hình thang



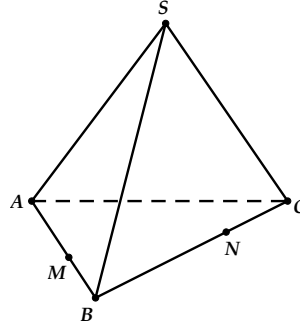
Hình chóp tứ giác có đáy là hình bình hành

5. Các dạng toán thường gặp

Dạng 1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (Giao tuyến loại 1)

- Tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng.
- Đường thẳng nối hai điểm chung đó là giao tuyến của chúng.

Ví dụ 1. Cho tứ diện $SABC$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên cạnh AB và BC sao cho MN không song song với AC .

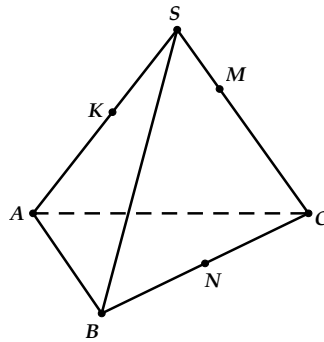


Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:

a) (SMN) và (SAC) .

b) (SAN) và (SCM) .

Ví dụ 2. Cho tứ diện $SABC$. Gọi K, M lần lượt là hai điểm trên cạnh SA và SC . Gọi N là trung điểm của cạnh BC .

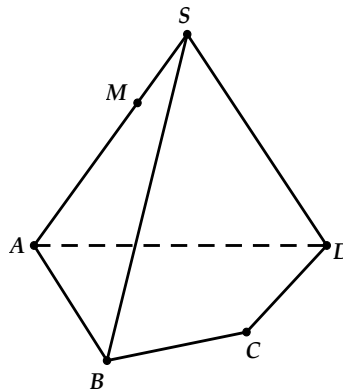


Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:

a) (SAN) và (ABM) .

b) (SAN) và (BCK) .

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$, trong đó mặt đáy $ABCD$ có các cặp cạnh đối không song song. Gọi điểm M thuộc cạnh SA .



Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:

a) (SAC) và (SBD) .

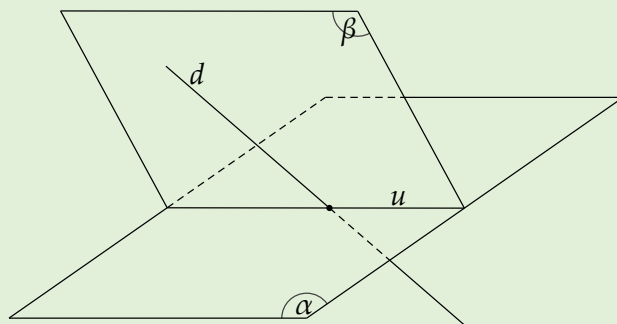
b) (SAB) và (SCD) .

c) (MBC) và (SAD) .

- Bài 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:
- (SAB) và (SAC) .
 - (SAC) và (SBD) .
 - (SAB) và (SCD) .
 - (SAD) và (SBC) .
- Bài 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với $AB \parallel CD$ và $AB > CD$. Lấy điểm M nằm trên đoạn BC . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:
- (SAC) và (SBD) .
 - (SAD) và (SBC) .
 - (SAM) và (SBD) .
 - (SDM) và (SAB) .
- Bài 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Trên cạnh SA lấy điểm M . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:
- (SAC) và (SBD) .
 - (BCM) và (SAD) .
 - (CDM) và (SAB) .
 - (BDM) và (SAC) .
- Bài 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trung điểm của CD là M . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:
- (SAC) và (SBD) .
 - (SBM) và (SAC) .
 - (SBM) và (SAD) .
 - (SAM) và (SBC) .
- Bài 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$ và $AB > CD$. Lấy điểm M nằm trên đoạn SA . Hãy tìm:
- $(BDM) \cap (SAC) = ?$
 - $(BCM) \cap (SAD) = ?$
 - $(BCM) \cap (SCD) = ?$
- Bài 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Lấy điểm M trên cạnh SA , trung điểm CD là N . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:
- (BMN) và (SAC) .
 - (BMN) và (SAD) .
 - (MCD) và (SBD) .
 - (MCD) và (SAB) .
- Bài 7.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác $ABCD$ có hai cạnh đối diện không song song. Lấy điểm M thuộc miền trong tam giác SCD . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:
- (SBM) và (SCD) .
 - (ABM) và (SCD) .
 - (ABM) và (SAC) .
- Bài 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Lấy I thuộc cạnh SA , J thuộc cạnh SB sao cho IJ không song song với AB . Lấy điểm K trong tứ giác $ABCD$. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:
- (IJK) và $(ABCD)$.
 - (IJK) và (SAB) .
 - (IJK) và (SAD) .
 - (IJK) và (SAC) .
 - (IJK) và (SBD) .
- Bài 9.** Cho hình chóp $S.ABC$. Trên cạnh SA , SC lấy M , N sao cho MN không song song AC . Gọi K là trung điểm BC . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:
- (MNK) và (ABC) .
 - (MNK) và (SAB) .
- Bài 10.** Cho hình chóp $S.ABC$. Trên cạnh SA , SC lấy M , N sao cho MN không song song AC . Gọi O là điểm nằm miền trong tam giác ABC . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:
- (MNO) và (ABC) .
 - (MNO) và (SAB) .
 - (SMO) và (SBC) .
 - (ONC) và (SAB) .

- Bài 11.** Cho tứ diện $ABCD$ có M là điểm trên cạnh AB , N là điểm trên cạnh AD sao cho $MB = 2MA$, $AN = 2ND$. Gọi P là điểm nằm trong tam giác BCD . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:
- (CMN) và (BCD) .
 - (MNP) và (SAD) .
 - (MNP) và (ABC) .
- Bài 12.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là điểm nằm trong tam giác ABC , N là điểm nằm trong tam giác ACD . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:
- (CDM) và (ABD) .
 - (BCN) và (ABD) .
 - (CMN) và (BCD) .
- Bài 13.** Cho tứ diện $SABC$. Lấy điểm E, F lần lượt trên đoạn SA, SB và điểm G là trọng tâm giác ABC . Hãy tìm:
- $(EFG) \cap (ABC) = ?$
 - $(EFG) \cap (SBC) = ?$
 - $(EFG) \cap (SGC) = ?$
- Bài 14.** Cho hình chóp $S.ABCD$. Hai điểm G, H lần lượt là trọng tâm $\triangle SAB, \triangle SCD$. Tìm:
- $(SGH) \cap (ABCD) = ?$
 - $(SAC) \cap (SGH) = ?$
 - $(SAC) \cap (BGH) = ?$
 - $(SCD) \cap (BGH) = ?$
- Bài 15.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có AB song song CD . Gọi I là giao điểm của AD và BC . Lấy M thuộc cạnh SC . Hãy tìm:
- $(SAC) \cap (SBD) = ?$
 - $(SAD) \cap (SBC) = ?$
 - $(ADM) \cap (SBC) = ?$
- Bài 16.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác lồi. Gọi hai điểm M, G lần lượt là trọng tâm $\triangle SAD, \triangle SBC$, $N \in SG$, P nằm trong tứ giác $ABCD$. Hãy tìm:
- $(MNP) \cap (ABCD) = ?$
 - $(MNP) \cap (SAC) = ?$
 - $(MNP) \cap (SCD) = ?$
- Bài 17.** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CD, SA . Hãy tìm:
- $(MNP) \cap (SAB) = ?$
 - $(MNP) \cap (SAD) = ?$
 - $(MNP) \cap (SBC) = ?$
 - $(MNP) \cap (SCD) = ?$
- Bài 18.** Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi H, K lần lượt là trọng tâm $\triangle SAB, \triangle SBC$ và M là trung điểm AC , $I \in SM$ sao cho $SI > SM$. Hãy tìm:
- $(IHK) \cap (ABC) = ?$
 - $(IHK) \cap (SBC) = ?$
- Bài 19.** Cho tứ diện $SABC$. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC, SA .
- Tìm giao tuyến SH của hai mặt phẳng (SCD) và (SAE) .
 - Tìm giao tuyến CI của hai mặt phẳng (SCD) và (BFC) .
 - SH và CI có cắt nhau không? Giải thích? Nếu có, gọi giao điểm đó là O , chứng minh $IH \parallel SC$. Tính tỉ số $\frac{OH}{OS}$.

Dạng 2. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng



Muốn tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α) , ta làm như sau:

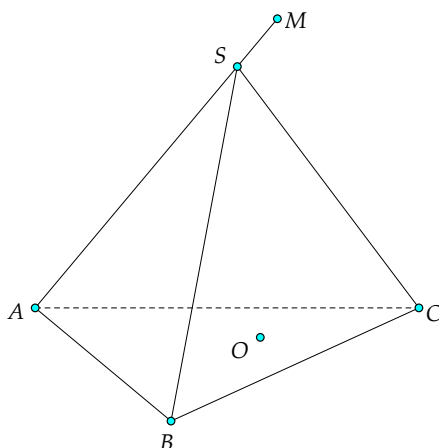
Bước 1. Tìm một mặt phẳng phụ (β) chứa d sao cho dễ tạo giao tuyến với (α) .

Mặt phẳng này thường xác định bởi d và một điểm của (α) .

Bước 2. Tìm giao tuyến u của (α) và (β) .

Bước 3. Trong (β) , d cắt u tại I , mà $u \subset (\alpha)$. Vậy d cắt (α) tại I .

Ví dụ 4. Cho tứ diện $SABC$ có M là điểm nằm trên tia đối của tia SA , O là điểm nằm trong tam giác ABC .



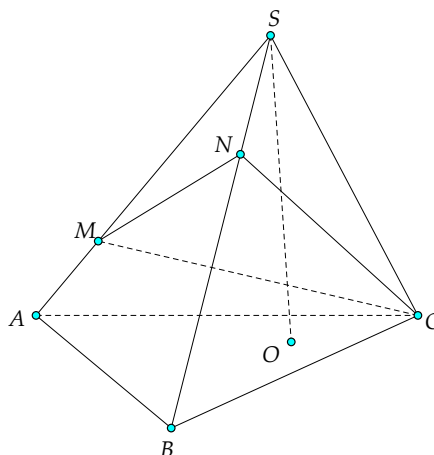
Tìm các giao điểm của đường thẳng:

- BC với (SOA) .
- MO với (SBC) .
- AB với (MOC) .
- SB với (MOC) .

Ví dụ 5. Cho tứ diện $SABC$ có hai điểm M, N lần lượt thuộc hai cạnh SA, SB và O là điểm nằm trong tam giác ABC .

Xác định các giao điểm sau:

- AB với (SOC) .
- $MN \cap (SOC)$.
- $SO \cap (CMN)$.



- Bài 20.** Cho hình chóp $S.ABC$. Trên cạnh SA lấy M sao cho $SA = 3SM$, trên cạnh SC lấy điểm N sao cho $SC = 2SN$. Điểm P thuộc cạnh AB . Tìm giao điểm của:
- MN và (ABC) .
 - BC và (MNP) .
- Bài 21.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là trung điểm của AC và BC . Lấy điểm P trên cạnh BD sao cho $PB > PD$. Tìm giao điểm của:
- CD và (MNP) .
 - AD và (MNP) .
- Bài 22.** Cho tứ diện $ABCD$. Trên AC và AD lần lượt lấy các điểm M, N . Gọi P là điểm thuộc miền trong của tam giác BCD . Tìm giao điểm:
- MN và (BCD) .
 - AP và (BMN) .
- Bài 23.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình bình hành tâm O . Trên SA, SB lần lượt lấy hai điểm M và N . Hãy tìm:
- $SO \cap (CMN) = ?$
 - $(SAD) \cap (CMN) = ?$
- Bài 24.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình bình hành tâm O . Gọi G là trọng tâm tam giác SAB . Hãy tìm:
- $(SGC) \cap (ABCD) = ?$
 - $AD \cap (SGC) = ?$
 - $SO \cap (SGB) = ?$
 - $SD \cap (BCG) = ?$
- Bài 25.** Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm lấy trên cạnh SB , N là điểm lấy trong $\triangle SCD$. Hãy tìm giao điểm của:
- MN với $(ABCD)$.
 - SC với (MAN) .
 - SD với (MAN) .
 - SA với (CMN) .
- Bài 26.** Cho tứ diện $SABC$. Lấy điểm M trên cạnh SA . Lấy N, P lần lượt nằm trong các tam giác SBC và ABC .
- Tìm giao điểm của MN với (ABC) .
 - Tìm các giao điểm của (MNP) với AB, SB, AC, SC .
 - Tìm các giao điểm của NP với $(SAB), (SAC)$.
- Bài 27.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB . Gọi I, J là trung điểm SA và SB . Lấy điểm M tùy ý trên SD . Tìm giao điểm của:
- IM và (SBC) .
 - JM và (SAC) .
 - SC và (IJM) .
- Bài 28.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AB . Gọi I, J, K là ba điểm nằm trên cạnh SA, AB, BC .
- Tìm giao điểm của IK với (SBD) .
 - Tìm các giao điểm của (IJK) với SD và SC .
- Bài 29.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SB , N là trọng tâm $\triangle SCD$. Xác định giao điểm của:
- MN và $(ABCD)$.
 - MN và (SAC) .
 - SC và (AMN) .
 - SA và (CMN) .
- Bài 30.** Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh SA, SD và P là điểm thuộc cạnh SB sao cho $SP = 3PB$.
- Tìm giao điểm Q của SC và (MNP) .
 - Tìm giao tuyến (MNP) và $(ABCD)$.

- Bài 31.** Cho tứ diện $ABCD$. Trên AC và AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho M, N không song song với CD . Gọi O là điểm thuộc miền trong $\triangle BCD$. Tìm giao điểm của đường thẳng:
- BD và (OMN) .
 - BC và (OMN) .
 - MN và (ABO) .
 - AO và (BMN) .
- Bài 32.** Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và SCD . Xác định giao điểm của:
- BD và (SMN) .
 - MN và (SAD) .
 - SD và (BMN) .
 - SA và (CMN) .
- Bài 33.** Cho tứ diện $SABC$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, BC . Lấy điểm M trên đoạn IJ , lấy N trên cạnh SC .
- Tìm $H = SM \cap (ABC)$.
 - Tìm $K = CM \cap (SAB)$.
 - Tìm $L = MN \cap (ABC)$.
 - Tìm $P = AM \cap (SBC)$.
- Bài 34.** Cho tứ diện $OABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của OA, OB và AB . Trên cạnh OC lấy điểm Q sao cho $OQ > QC$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .
- Tìm $E = BC \cap (MNQ)$.
 - Tìm $F = CP \cap (MNQ)$.
 - $K = BG \cap (MNQ)$.
- Bài 35.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm của SB và G là trọng tâm của tam giác SAD .
- $E = SA \cap (OMG)$.
 - $F = AD \cap (OMG)$.
 - $K = GM \cap (ABCD)$.
- Bài 36.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N là hai điểm lần lượt nằm trong tam giác SAB và SAD .
- $E = MN \cap (ABCD)$.
 - $F = AB \cap (OMN)$.
 - $H = SA \cap (OMN)$.
 - $K = CD \cap (OMN)$.
- Bài 37.** Cho tứ diện $SABC$, lấy điểm M là trung điểm SA , lấy điểm N là trọng tâm $\triangle SBC$ và P nằm trong $\triangle ABC$. Tìm giao điểm của:
- $I = MN \cap (ABC)$.
 - $SB \cap (MNP) = ?$
 - $SC \cap (MNP) = ?$
 - $NP \cap (SAB) = ?$
 - Tứ giác $ABIC$ là hình gì ?
- Bài 38.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M là trung điểm của SD .
- Tìm $I = BM \cap (SAC)$. Chứng minh: $BI = 2IM$.
 - Tìm $E = SA \cap (BCM)$. Chứng minh: E là trung điểm của SA .
- Bài 39.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên cạnh BD lấy điểm K sao cho $BK = 2KD$.
- Tìm giao điểm E của đường thẳng CD và (IJK) . Chứng minh: $DE = DC$.
 - Tìm giao điểm F của đường thẳng AD và (IJK) . Tính tỉ số $\frac{FA}{FD}$.

Bài 40. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, M lần lượt là trung điểm của AB và BC , G là trọng tâm tam giác ACD .

- a) Tìm $P = CD \cap (IMG)$.
b) Tính tỉ số: $\frac{PC}{PD}$.

Bài 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có G là trọng tâm tam giác ABC . Gọi M là điểm trên cạnh SA sao cho $MA = 2MS$, K là trung điểm BC và D là điểm đối xứng của A qua G .

- a) Tìm $H = SK \cap (MCD)$.
b) Tính tỉ số $\frac{HK}{SK}$.

Bài 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD .

- a) Tìm giao điểm E của AD với (BMN) .
b) Tìm giao điểm F của SD và (BMN) . Chứng minh rằng: $FS = 2FD$.

Bài 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB và $AB = 2CD$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, AB, BC .

- a) Tìm giao điểm của IK và (SBD) .
b) Tìm giao điểm F của SD và (IJK) . Tính tỉ số $\frac{FS}{FD}$.
c) Tìm giao điểm G của SC và (IJK) . Tính tỉ số $\frac{GS}{GC}$.

Bài 44. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên cạnh BD lấy điểm K sao cho $BK = 2KD$.

- a) Tìm giao điểm E của CD với (IJK) . Chứng minh: $DE = DC$.
b) Tìm giao điểm F của AD với (IJK) . Chứng minh: $FA = 2FD$ và $FK \parallel IJ$.
c) Gọi M và N là hai điểm bất kì lần lượt nằm trên hai cạnh AB và CD . Tìm giao điểm của MN với (IJK) .

Bài 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O . Gọi M là trung điểm của SB , N là điểm thuộc đoạn SD sao cho $SN = 2ND$.

- a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBD) và (SAC) .
b) Tìm giao điểm E của đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$. Tính $\frac{EN}{EM}$.
c) Tìm giao điểm K của đường thẳng SC và mặt phẳng (AMN) . Gọi J giao điểm của AK và SO . Tính tỉ số: $\frac{JK}{JA}$.

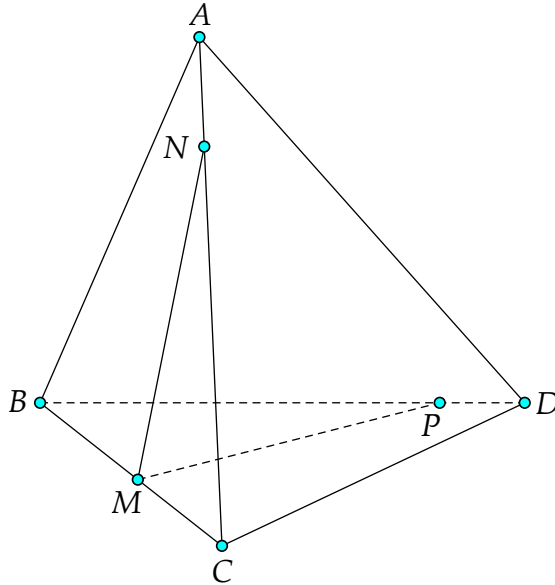
Bài 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang AB đáy lớn và $AB = 3CD$. Gọi N là trung điểm của CD , M là điểm trên cạnh SB thỏa $SM = 3MB$, điểm I trên cạnh SA và thỏa $AI = 3IS$.

- a) Tìm giao điểm của đường thẳng MN với (SAD) .
b) Gọi H là giao điểm của CB với (IMN) . Tính tỉ số $\frac{HB}{HC}$.

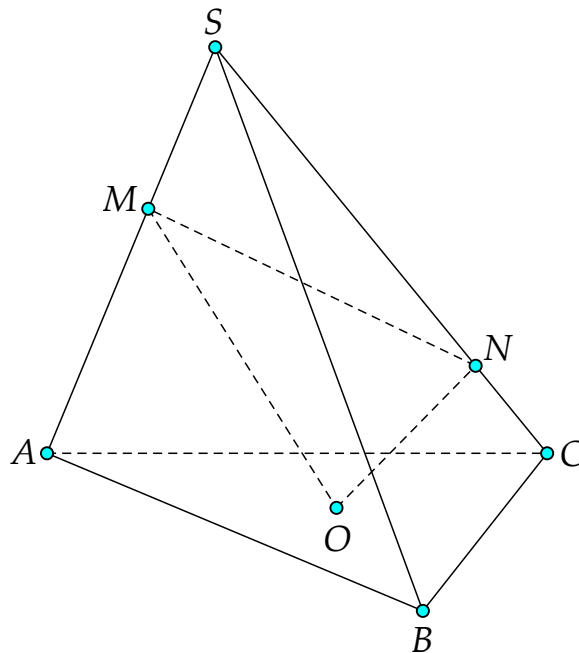
Dạng 3. Tìm thiết diện khi cắt hình chóp bởi một mặt phẳng

Ta tìm các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau của mặt phẳng (α) với hình chóp cho đến khi khép kín thành một đa giác phẳng. Đa giác đó là thiết diện cần tìm và các đoạn giao tuyến chính là các cạnh của thiết diện.

Ví dụ 6. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các đoạn CA , CB , BD cho lần lượt các điểm M , N , P sao cho MN không song song với AB . Gọi (α) là mặt phẳng xác định bởi ba điểm M , N , P . Dựng thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện $ABCD$.



Ví dụ 7. Cho tứ diện $SABC$. Gọi O là điểm thuộc miền trong tam giác ABC . Gọi M , N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh SA và SC sao cho MN không song song với AC . Tìm thiết diện do (MNO) cắt tứ diện $SABC$.



Bài 47. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên cạnh SA , SB lần lượt lấy M , N sao cho MN không song song với AB . Gọi P là điểm thuộc miền trong tam giác ABC . Xác định giao tuyến của (MNP) và (ABC) . Từ đó suy ra thiết diện khi cắt hình chóp bởi mặt phẳng (MNP) .

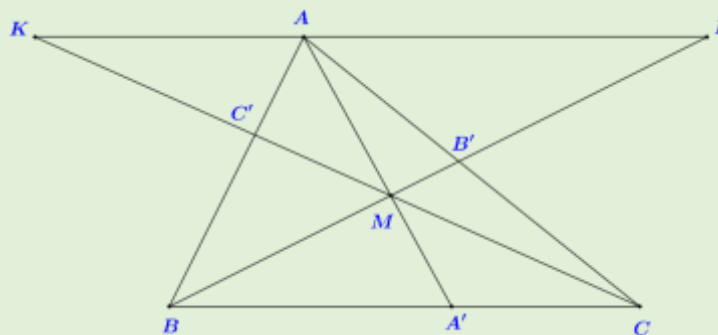
- Bài 48.** Cho tứ diện $SABC$. Gọi K, N trung điểm SA, BC và M là điểm thuộc đoạn SC sao cho $3SM = 2MC$.
- Tìm thiết diện của hình chóp và mặt phẳng (KMN) .
 - Mặt phẳng (KMN) cắt AB tại I . Tính tỉ số $\frac{IA}{IB}$.
- Bài 49.** Cho tứ diện $ABCD$. Trên AB lấy điểm M . Điểm N trên BC thỏa $BN = 2NC$, P là trung điểm CD . Xác định thiết diện khi cắt bởi (MNP) .
- Bài 50.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AD . Lấy M trên cạnh SB . Tìm thiết diện cắt bởi (AMD) .
- Bài 51.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P là các điểm lần lượt trên các cạnh CB, CD, SA . Tìm thiết diện của hình chóp với (MNP) .
- Bài 52.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AD . Gọi H, K là trung điểm của SB và AB , M là điểm lấy trong hình thang $ABCD$ sao cho đường thẳng KM cắt hai đường thẳng AD, CD . Tìm thiết diện của hình chóp với (HKM) .
- Bài 53.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB , lấy M, N lần lượt trên các cạnh SC, SD . Tìm thiết diện của hình chóp với (ABM) và (AMN) .
- Bài 54.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi H, K là trung điểm BC và CD . Lấy M bất kì trên cạnh SA . Tìm thiết diện của hình chóp với (MHK) .
- Bài 55.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD, AB > CD$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của các cạnh SB và SC .
- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) .
 - Tìm giao điểm của đường thẳng SD với (AIJ) .
 - Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (AIJ) .
- Bài 56.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi I là trung điểm của AD , J là điểm đối xứng với D qua C , K là điểm đối xứng với D qua B . Xác định thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng (IJK) và tính diện tích của thiết diện này.
- Bài 57.** Cho hình chóp $S.ABCD$. Lấy một điểm M thuộc miền trong tam giác SBC . Lấy một điểm N thuộc miền trong tam giác SCD .
- Tìm giao điểm của MN với (SAC) .
 - Tìm giao điểm của SC với (AMN) .
 - Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với (AMN) .
- Bài 58.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm của SB , G là trọng tâm tam giác SAD .
- Tìm giao điểm I của GM với $(ABCD)$. Chứng minh I ở trên đường thẳng CD và $IC = 2ID$.
 - Tìm giao điểm J của (OMG) với AD . Tính tỉ số: $\frac{JA}{JD}$.
 - Tìm giao điểm K của (OMG) với SA . Tính tỉ số: $\frac{KA}{KS}$.
 - Tìm thiết diện tạo bởi (OMG) với hình chóp $S.ABCD$.

- Bài 59.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, SD và OC .
- Tìm giao tuyến của (MNP) với (SAC) và $(ABCD)$.
 - Tìm giao điểm của SA và (MNP) .
 - Xác định thiết diện của hình chóp với (MNP) . Tính tỉ số mà (MNP) chia các cạnh SA, BC và CD .
- Bài 60.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi K là trọng tâm của tam giác SAC và I, J lần lượt là trung điểm của CD và SD .
- Tìm giao điểm H của đường thẳng IK với mặt phẳng (SAB) .
 - Xác định thiết diện tạo bởi mặt phẳng (IJK) với hình chóp.
- Bài 61.** Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ không là hình thang, điểm P nằm trong tam giác SAB và điểm M thuộc cạnh SD sao cho $MD = 2MS$.
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (PCD) .
 - Tìm giao điểm của SC với mặt phẳng (ABM) .
 - Gọi N là trung điểm của AD . Tìm thiết diện tạo bởi (MNP) và hình chóp.
- Bài 62.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O .
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (SCD) .
 - Trên các cạnh SB, SD ta lần lượt lấy các điểm M và N thỏa $\frac{SM}{SB} = \frac{1}{3}$ và $\frac{SN}{SD} = \frac{2}{3}$.
Tìm giao điểm I của SC và mặt phẳng (AMN) . Suy ra thiết diện của mặt phẳng (AMN) và hình chóp $S.ABCD$.
 - Gọi K là giao điểm của IN và CD . Tính tỉ số $\frac{KC}{KD}$.
- Bài 63.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên hai cạnh SB, SD sao cho $\frac{SM}{SB} = \frac{1}{3}$ và $\frac{SN}{SD} = \frac{2}{3}$.
- Tìm giao điểm I của SC với mặt phẳng (AMN) . Suy ra thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (AMN) .
 - Gọi K là giao điểm của IN và CD . Tính tỉ số: $\frac{KC}{KD}$.

Dạng 4. Chứng minh ba điểm đồng quy

Định lí Ceva

Cho $\triangle ABC$ và các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB . Khi đó AA', BB', CC' đồng quy khi và chỉ khi $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$.



- Bài 64.** Cho tứ diện $ABCD$. Lấy M, N, P lần lượt trên các cạnh AB, AC, BD sao cho MN cắt BC tại I , MP cắt AD tại J . Chứng minh: PI, NJ, CD đồng quy.
- Bài 65.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Lấy M trên cạnh SC . Gọi N là giao điểm của SB và (ADM) . Gọi O là giao điểm AC và BD . Chứng minh rằng SO, AM, DN đồng quy.
- Bài 66.** Cho hình chóp $S.ABCD$. Trên cạnh SC lấy một điểm E không trùng với S và C .
- Tìm giao điểm F của đường thẳng SD với (ABE) .
 - Giả sử AB không song song với CD . Hãy chứng minh ba đường thẳng AB, CD, EF đồng quy.
- Bài 67.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có AB không song song CD . Gọi M là trung điểm SC và O là giao điểm AC với BD .
- Tìm giao điểm N của SD với (MAB) .
 - Chứng minh rằng ba đường thẳng SO, AM, BN đồng quy.
- Bài 68.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AB \cap CD = E$ và $AD \cap BC = K$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC .
- Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD) .
 - Tìm giao tuyến của (MNP) và (SBD) .
 - Tìm giao điểm của Q của SD và (MNP) .
 - Gọi $H = MN \cap PQ$. Chứng minh: S, H, E thẳng hàng.
 - Chứng minh: SK, QM, NP đồng quy.
- Bài 69.** Cho tứ diện $SABC$ với I trung điểm của SA, J là trung điểm của BC . Gọi M là điểm di động trên IJ và N là điểm di động trên SC .
- Xác định giao điểm P của MC và (SAB) .
 - Tìm giao tuyến của (SMP) và (ABC) .
 - Tìm giao điểm E của MN và (ABC) .
 - Gọi $F = IN \cap AC$. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di động.

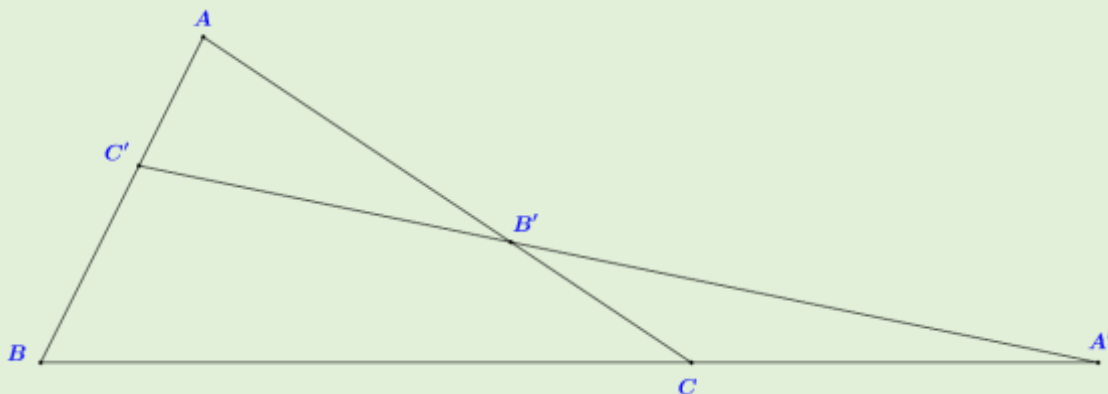
Dạng 5. Chứng minh ba điểm thẳng hàng

Định lí Menelaus

Cho $\triangle ABC$ và các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho:

- Hoặc cả ba điểm A', B', C' đều nằm trên đường kéo dài của ba cạnh;
- Hoặc một trong ba điểm nằm trên phần kéo dài của một cạnh và hai điểm còn lại nằm trên hai cạnh của $\triangle ABC$.

Khi đó ba điểm A', B', C' thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$.



Bài 70. Cho tứ diện $SABC$. Trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy M, N, P sao cho MN cắt AB tại I, NP cắt BC tại J và MP cắt AC tại K . Chứng minh rằng ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Bài 71. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD .

- Tìm giao tuyến của (ADN) và (ABP) .
- Gọi $I = AG \cap MP$ và $J = CM \cap AN$. Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

Bài 72. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD , điểm P thuộc SC và không là trung điểm của SC .

- Tìm giao điểm của SO với mặt phẳng (MNP) .
- Tìm giao điểm của SA với mặt phẳng (MNP) .
- Gọi F, G, H lần lượt là giao điểm của QM và AB, QP và AC, QN và AD . Chứng minh ba điểm F, G, H thẳng hàng.

Bài 73. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD không song song với BC . Lấy M thuộc SB và O là giao điểm AC với BD .

- Tìm giao điểm N của SC với (AMC) .
- Gọi $I = AN \cap DM$. Chứng minh S, I, O thẳng hàng.

Bài 74. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi E, F, H lần lượt là các điểm thuộc cạnh SA, SB, SC .

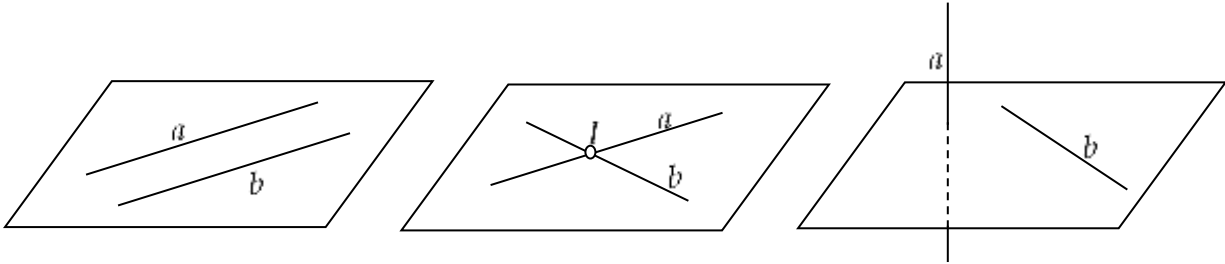
- Tìm giao điểm $K = SD \cap (EFH)$.
- Gọi $O = AC \cap BD$ và $I = EH \cap FK$. Chứng minh: S, I, O thẳng hàng.
- Gọi $M = AD \cap BC$ và $N = EK \cap FH$. Chứng minh: S, M, N thẳng hàng.
- Gọi $P = AB \cap CD$ và $Q = EF \cap HK$. Chứng minh: A, P, Q thẳng hàng.

- Bài 75.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB, AC, BD và $MN \cap BC = I, MP \cap AD = J, NJ \cap IP = K$. Chứng minh: C, D, K thẳng hàng.
- Bài 76.** Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I và J là hai điểm trên hai cạnh AD, SB .
- Tìm giao tuyến của (SBI) và (SAC) . Tìm giao điểm K của IJ và (SAC) .
 - Tìm giao tuyến của (SBD) và (SAC) . Tìm giao điểm L của DJ và (SAC) .
 - Gọi $O = AD \cap BC, M = OJ \cap SC$. Chứng minh rằng: A, K, L, M thẳng hàng.
- Bài 77.** Cho tứ giác $ABCD$ có các cạnh đối đôi một không song song và điểm $S \notin (ABCD)$. Lấy điểm I thuộc cạnh AD , lấy điểm J thuộc cạnh SB .
- Tìm $K = IJ \cap (SAC)$ và $L = DJ \cap (SAC)$.
 - Gọi $O = AD \cap BC, M = OJ \cap SC$. Chứng minh rằng: K, L, M thẳng hàng.
- Bài 78.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC .
- Tìm giao tuyến của (BMN) với các mặt phẳng (SAB) và (SBC) .
 - Tìm $I = SO \cap (BMN)$ và $K = SD \cap (BMN)$.
 - Tìm $E = AD \cap (BMN)$ và $F = CD \cap (BMN)$.
 - Chứng minh rằng ba điểm B, E, F thẳng hàng.
- Bài 79.** Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N là 2 điểm lần lượt nằm trên 2 cạnh BC và SD .
- Tìm giao điểm I của BN và (SAC) .
 - Tìm giao điểm J của MN và (SAC) .
 - Chứng minh: I, J, C thẳng hàng.
 - Xác định thiết diện của mặt phẳng (BCN) với hình chóp.
- Bài 80.** Cho tứ diện $ABCD$ có K là trung điểm của AB . Lấy I, J lần lượt thuộc AC, BD sao cho $IA = 2IC$ và $JB = 3JD$.
- Tìm giao điểm E của AD và (IJK) .
 - Tìm giao tuyến d của (IJK) và (BCD) .
 - Gọi O là giao điểm của d với CD . Chứng minh: I, O, E thẳng hàng.
 - Tính các tỉ số $\frac{OI}{OE}$ và $\frac{OC}{OD}$.
- Bài 81.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, AD là đáy lớn và $AD = 2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC và $O = AC \cap BD$.
- Tìm giao tuyến của (ABN) và (SCD) .
 - Tìm giao điểm P của DN và (SAB) .
 - Gọi $K = AN \cap DM$. Chứng minh: S, K, O thẳng hàng. Tính tỉ số: $\frac{KS}{KO}$.
- Bài 82.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC . Gọi (P) là mặt phẳng qua M, N và B .
- Tìm giao tuyến của (P) với các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SAD), (SDC)$.
 - Tìm $I = SO \cap (P), K = SD \cap (P), E = DA \cap (P), F = DC \cap (P)$.
 - Chứng tỏ rằng ba điểm: E, B, F thẳng hàng.

Bài 2. Hai đường thẳng song song

1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng phân biệt

Cho hai đường thẳng phân biệt a và b .



- Hai đường thẳng gọi là đồng phẳng nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng.
- Hai đường thẳng gọi là chéo nhau nếu chúng không đồng phẳng.
- Hai đường thẳng gọi là song song nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

2. Tính chất hai đường thẳng song song

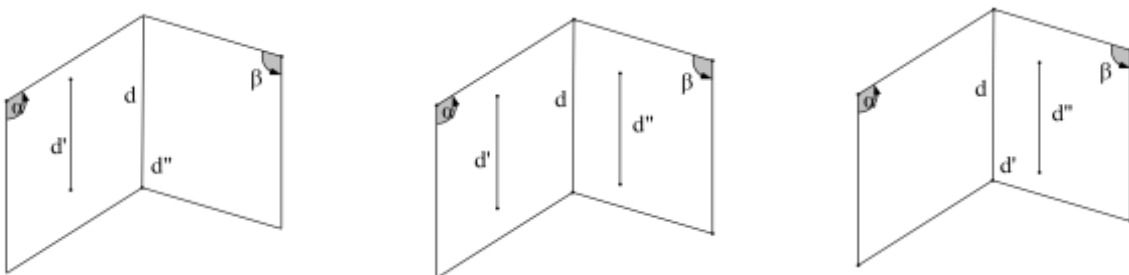
Tính chất 1. Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

Tính chất 2. (Định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng).

Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

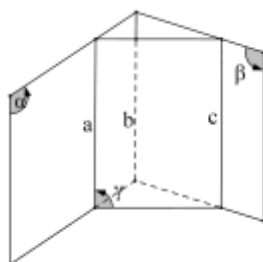


Hệ quả. Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



Tính chất 3.

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.



3. Chứng minh hai đường thẳng song song

Cách 1. Chứng minh hai đường thẳng a, b đồng phẳng, rồi dùng các định lý trong hình học phẳng, chẳng hạn định lý đường trung bình, định lý đảo Thales,... để chứng minh $a \parallel b$.

Cách 2. Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với đường thẳng thứ ba.

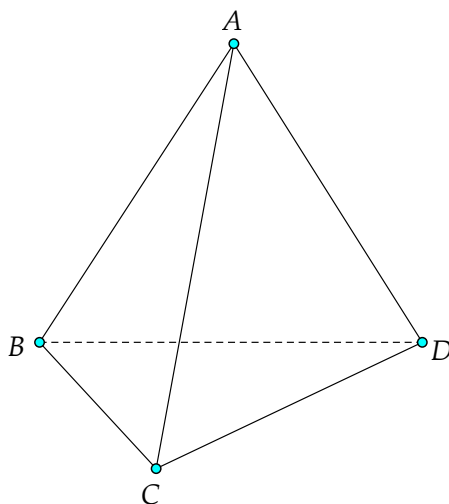
Cụ thể: chứng minh: $\begin{cases} c \parallel a \\ c \parallel b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$.

Cách 3. Áp dụng định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng và hệ quả của nó.

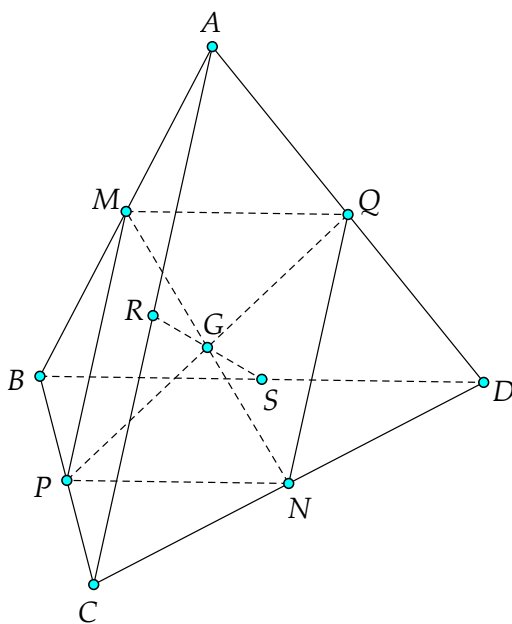
Chẳng hạn: chứng minh: $\begin{cases} b \parallel c \\ b \subset (\alpha), c \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \parallel b \parallel c \\ a \equiv b \\ a \equiv c \end{cases}$.

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có I, J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và ABD .

Chứng minh rằng: $IJ \parallel CD$.



Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, BC, AD, AC, BD . Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành. Từ đó suy ra ba đoạn thẳng MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đoạn.



Nhận xét. Điểm G trong ví dụ 2 ở trên được gọi là trọng tâm của tứ diện.

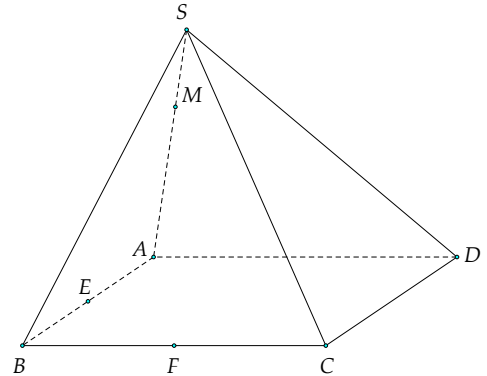
→ Trọng tâm của tứ diện là điểm đồng quy của các nối trung điểm của các cạnh đối, nó cũng là trung điểm của các cạnh này.

4. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song (Giao tuyến loại 2)

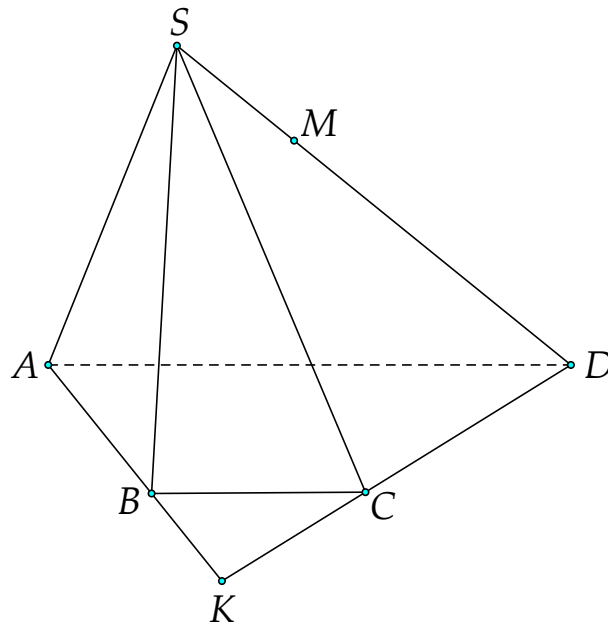
Phương pháp giải:
$$\begin{cases} A \in (\alpha) \cap (\beta) \\ a \subset (\alpha), b \subset (\beta) \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = Ax \text{ với } Ax \parallel a \parallel b. \\ a \parallel b \end{cases}$$

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA . Điểm E, F lần lượt là trung điểm của AB và BC .

- Tìm $(SAB) \cap (SCD) = ?$
- Tìm $(MBC) \cap (SAD) = ?$
- Tìm $(MEF) \cap (SAC) = ?$
- Tìm $AD \cap (MEF) = ?$
- Tìm $SD \cap (MEF) = ?$
- Thiết diện của (MEF) và hình chóp là hình gì?



Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$. Mặt đáy là hình thang có cạnh đáy lớn AD , AB cắt CD tại điểm K . Gọi M là điểm nằm trên cạnh SD .



- Tìm $d = (SAD) \cap (SBC)$ và $N = KM \cap (SBC)$.
- Chứng minh rằng AM, BN và d đồng qui.

5. Bài tập

Bài 83. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD . Chứng minh:

- $MN \parallel AD$ và $MN \parallel BC$.
- $MO \parallel SC$ và $NO \parallel SB$.

Bài 84. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD . Gọi I, J, G lần lượt là trọng tâm của các tam giác: SAB, SAD, AOD . Chứng minh:

- $IJ \parallel MN$.
- $IJ \parallel BD$ và $GJ \parallel SO$.

- Bài 85.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O và I là một điểm trên cạnh SO .
- Tìm giao điểm E và F của mặt phẳng (ICD) lần lượt với các đường SA, SB .
Chứng minh: $EF \parallel AB$.
 - Gọi K là giao điểm của DE và CF . Chứng minh: $SK \parallel BC$.
- Bài 86.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB . Gọi P là một điểm trên cạnh BC . Tìm giao tuyến của:
- (SBC) và (SAD) .
 - (SAB) và (SCD) .
 - (MNP) và $(ABCD)$.
- Bài 87.** Cho tứ diện $SABC$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và AB , G là một điểm trên cạnh AC . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:
- (SAC) và (EFC) .
 - (SAC) và (EFG) .
- Bài 88.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G và J lần lượt là trọng tâm của tam giác BCD và ACD .
- Chứng minh: $GJ \parallel AB$.
 - Tìm $(ABD) \cap (GJD) = ?$
- Bài 89.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA và SB .
- Chứng minh: $EF \parallel CD$.
 - Tìm $I = AF \cap (SDC)$.
 - Chứng minh: $SI \parallel AB \parallel CD$.
- Bài 90.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm $\triangle ABC, \triangle ABD$ và E, F lần lượt là trung điểm BC, AC .
- Chứng minh: $IJ \parallel CD$.
 - Tìm $(DEF) \cap (ABD) = ?$
- Bài 91.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC và N là trọng tâm của tam giác ABC .
- Tìm $I = SD \cap (AMN)$.
 - Chứng minh: $NI \parallel SB$.
 - Tìm $(AMN) \cap (SAD) = ?$
- Bài 92.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AD = 2BC$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , K là trung điểm SC , G là trọng tâm của tam giác SCD .
- Chứng minh: $OG \parallel BK$.
 - Tìm $(ACG) \cap (SBC) = ?$
- Bài 93.** Hình chóp $S.ABCD$ có O là tâm của hình bình hành $ABCD$, điểm M thuộc cạnh SA sao cho $SM = 2MA$, N là trung điểm của AD .
- Tìm giao tuyến của các mặt phẳng (SAD) và (MBC) .
 - Tìm giao điểm I của SB và (CMN) , giao điểm J của SA và (ICD) .
 - Chứng minh ba đường thẳng ID, JC, SO đồng qui tại E . Tính tỉ số $\frac{SE}{SO}$.

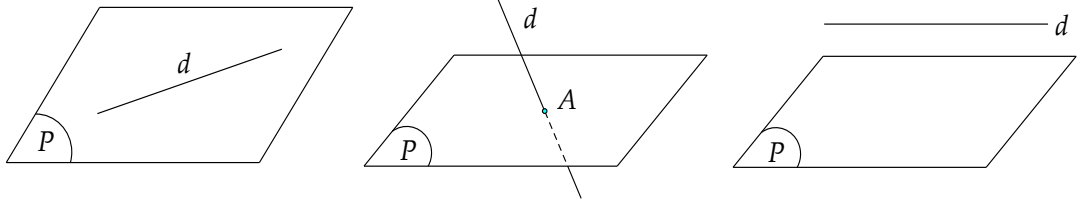
- Bài 94.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AD là đáy lớn và $AD = 2BC$. Gọi M, N, P lần lượt thuộc SA, AD, BC sao cho $MA = 2MS, NA = 2ND, PC = 2PB$.
- Tìm giao tuyến của cặp mặt phẳng sau: (SAD) và (SBC) , (SAC) và (SBD) .
 - Xác định giao điểm Q của SB với (MNP) .
 - Gọi K trung điểm của SD . Chứng minh: $CK = (MQK) \cap (SCD)$.
- Bài 95.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và O là giao điểm hai đường chéo AC và BD . Lấy điểm E trên cạnh SC sao cho $EC = 2ES$.
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .
 - Tìm giao điểm M của đường thẳng AE và mặt phẳng (SBD) .
- Chứng minh M là trung điểm của đoạn thẳng SO .
- Bài 96.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SD, CD, BC .
- Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBC) , (AMN) và (SBC) .
 - Tìm giao điểm I của (PMN) và AC , K của (PMN) và SA .
 - Gọi F là trung điểm của PM , chứng minh ba điểm K, F, I thẳng hàng

Bài 3. Đường thẳng và mặt phẳng song song

1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng phân biệt

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Có ba trường hợp xảy ra:

- Đường thẳng d và (P) có 2 điểm chung phân biệt $\Rightarrow d \subset (P)$.
- Đường thẳng d và (P) có 1 điểm chung duy nhất $\Rightarrow d \cap (P) = A$.
- Đường thẳng d và (P) không có điểm chung nào $\Rightarrow d \parallel (P)$.



Định nghĩa.

Đường thẳng d và mặt phẳng (P) gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

2. Các định lý

Định lý 1. Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong (α) thì d song song với (α) .

Định lý 2. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) . Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a .

Hệ quả: Nếu hai mặt phẳng phân biệt cắt nhau và cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

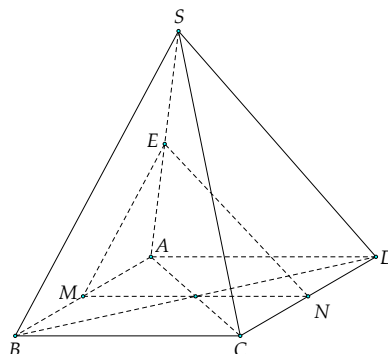
Định lý 3. Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

3. Chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (P)

Phương pháp: Chứng minh $\begin{cases} a \parallel b \\ b \subset (P) \Rightarrow a \parallel (P). \\ a \not\subset (P) \end{cases}$

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD . Chứng minh rằng MN song song với các mặt phẳng (ABC) và (ABD) .

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD .



- Chứng minh MN song song với các mặt phẳng (SBC) và (SAD) .
- Gọi E là trung điểm của SA . Chứng minh SB, SC đều song song với (MNE) .

4. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp: Áp dụng một trong hai cách sau:

$$\text{Cách 1. } \begin{cases} a // (P) \\ a \subset (Q) \\ M \in (P) \cap (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (Q) = Mx // a.$$

$$\text{Cách 2. } \begin{cases} a // (P) \\ a // (Q) \\ M \in (P) \cap (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (Q) = Mx // a$$

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm $\triangle ABC$, $M \in$ cạnh CD với $MC = 2MD$.

a) Chứng minh: $MG // (ABD)$.

b) Tìm $(ABD) \cap (BGM) = ?$

c) Tìm $(ABD) \cap (AGM) = ?$

5. Tìm thiết diện song song với một đường thẳng

Phương pháp: Để tìm thiết diện của mặt phẳng (α) đi qua một điểm và song song với hai đường thẳng chéo nhau hoặc (α) chứa một đường thẳng và song song với một đường thẳng, thường

$$\text{sử dụng tính chất sau: } \begin{cases} M \in (\alpha) \cap (\beta) \\ d // (\alpha) \\ d \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = a // d \quad (\text{với } M \in a).$$

Ví dụ 4. Cho tứ diện $SABC$. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC, AC . Mặt (P) đi qua điểm M , song song với BI và SC . Xác định trên hình vẽ các giao điểm của (P) với các cạnh AC, SA, SB . Từ đó suy ra thiết diện của (P) cắt hình chóp.

6. Bài tập

Bài 97. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD . Chứng minh rằng:

a) $BC // (SAD)$. b) $AD // (SBC)$.

c) $MN // (ABCD)$. d) $MN // (SBC)$.

e) $MO // (SCD)$. f) $NO // (SBC)$.

Bài 98. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi G là trọng tâm tam giác SAD và E là điểm trên cạnh DC sao cho $DC = 3DE$, I là trung điểm AD .

a) Chứng minh: $OI // (SAB)$ và $OI // (SCD)$.

b) Tìm giao điểm P của IE và (SBC) . Chứng minh: $GE // (SBC)$.

Bài 99. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD .

a) Chứng minh: $MN // (SBC)$ và $MN // (SAD)$.

b) Gọi P là điểm trên cạnh SA . Chứng minh: $SB // (MNP)$ và $SC // (MNP)$.

c) Gọi G, I là trọng tâm của tam giác ABC và SBC . Chứng minh: $GI // (SAB)$.

- Bài 100.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB , với $AB = 2CD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , I là trung điểm của SA , G là trọng tâm của tam giác SBC và E là một điểm trên cạnh SD sao cho $3SE = 2SD$. Chứng minh:
- $DI // (SBC)$.
 - $GO // (SCD)$.
 - $SB // (ACE)$.
- Bài 101.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N là trung điểm các cạnh AB, AD . Gọi I, J thuộc SM, SN sao cho $\frac{SI}{SM} = \frac{SJ}{SN} = \frac{2}{3}$. Chứng minh:
- $MN // (SBD)$.
 - $IJ // (SBD)$.
- Bài 102.** Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm của tam giác ABD và I là điểm trên cạnh BC sao cho $BI = 2IC$. Chứng minh rằng: $IG // (ACD)$.
- Bài 103.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G, P lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và ABC . Chứng minh rằng: $GP // (ABC)$ và $GP // (ABD)$.
- Bài 104.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, O là giao điểm của AC và BD , M là trung điểm SA .
- Chứng minh: $OM // (SCD)$.
 - Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M , đồng thời song song với SC và AD .
Tìm thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp $S.ABCD$.
- Bài 105.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB . Gọi M là trung điểm CD , (α) là mặt phẳng qua M , đồng thời song song với SA và BC . Tìm thiết diện của (α) với hình chóp $S.ABCD$. Thiết diện là hình gì ?
- Bài 106.** Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N thuộc cạnh AB, CD . Gọi (α) là mặt phẳng qua MN và song song SA .
- Tìm thiết diện của (α) và hình chóp.
 - Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang.
- Bài 107.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh SC và (P) là mặt phẳng qua AM và song song với BD .
- Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P) .
 - Gọi E, F lần lượt là giao điểm của (P) với các cạnh SB và SD .
Tìm tỉ số diện tích của ΔSME với ΔSBC và tỉ số diện tích của ΔSMF với ΔSCD .
 - Gọi K là giao điểm của ME và CB , J là giao điểm của MF và CD .
Chứng minh K, A, J nằm trên đường thẳng song song với EF và tìm tỉ số $\frac{EF}{KJ}$.
- Bài 108.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm lần lượt nằm trên hai cạnh BC và AD . Xác định thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α) qua MN và song song với CD . Xác định vị trí của hai điểm M, N để thiết diện là hình bình hành.
- Bài 109.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD , M là một điểm trên đoạn IJ . Gọi (P) là mặt phẳng qua M song song với AB và CD .
- Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và (ICD) .
 - Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (P) . Thiết diện là hình gì ?

- Bài 110.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi K và J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC .
- Chứng minh $KJ // (SAB)$
 - Gọi (P) là mặt phẳng chứa KJ và song song với AD .
Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) .
- Bài 111.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD .
Chứng minh rằng: $G_1G_2 // (ABC)$ và $G_1G_2 // (ABD)$.
- Bài 112.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của $\triangle SAB$, I là trung điểm AB , lấy điểm M trong đoạn AD sao cho $AD = 3AM$.
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) .
 - Đường thẳng qua M và song song AB cắt CI tại N . Chứng minh $NG // (SCD)$.
 - Chứng minh: $MG // (SCD)$.
- Bài 113.** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD và $AD = 2BC$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , G là trọng tâm của tam giác SCD .
- Chứng minh: $OG // (SBC)$.
 - Cho M là trung điểm của SD . Chứng minh: $CM // (SAB)$.
 - Gọi I là điểm trên cạnh SC sao cho $2SC = 3SI$. Chứng minh: $SA // (BDI)$.
- Bài 114.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, SB .
- Chứng minh: $BD // (MNP)$.
 - Tìm giao điểm của (MNP) với BC .
 - Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SBD) .
 - Tìm thiết diện của hình chóp với (MNP) .
- Bài 115.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là điểm thuộc BC sao cho $MC = 2MB$. Gọi N, P lần lượt là trung điểm của BD và AD .
- Chứng minh: $NP // (ABC)$.
 - Tìm giao điểm Q của AC với (MNP) và tính $\frac{QA}{QC}$.
Suy ra thiết diện của hình chóp bị cắt bởi (MNP) .
 - Chứng minh: $MG // (ABD)$, với G là trọng tâm của tam giác ACD .
- Bài 116.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, BC, CD .
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) , (SAB) và (SCD) .
 - Tìm giao điểm E của SB và (MNP) .
 - Chứng minh: $NE // (SAP)$.
- Bài 117.** Cho tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $AM = 2MB$. Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$ và I trung điểm của CD , H là điểm đối xứng của G qua I .
- Chứng minh: $GD // (MCH)$.
 - Tìm giao điểm K của MG với (ACD) . Tính tỉ số $\frac{GK}{GM}$.

Bài 118. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC, CD .

- Tìm giao tuyến của (SIK) và (SAC) , (SIK) và (SBD) .
- Gọi M là trung điểm của SB . Chứng minh: $SD \parallel (ACM)$.
- Tìm giao điểm F của DM và (SIK) . Tính tỉ số $\frac{MF}{MD}$.

Bài 119. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi G là trọng tâm ΔSAB , trên AD lấy điểm E sao cho $AD = 3AE$. Gọi M là trung điểm AB .

- Chứng minh: $EG \parallel (SCD)$.
- Đường thẳng qua E song song AB cắt MC tại F . Chứng minh: $GF \parallel (SCD)$.
- Gọi I là điểm thuộc cạnh CD sao cho $CI = 2ID$. Chứng minh: $GO \parallel (SAI)$.

Bài 120. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC và N là trọng tâm tam giác ABC .

- Chứng minh: $SB \parallel (AMN)$.
- Tìm giao tuyến của (AMN) với (SAB) .
- Tìm giao điểm I của SD với (AMN) . Tính tỉ số $\frac{IS}{ID}$.
- Gọi Q là trung điểm của ID . Chứng minh: $QC \parallel (AMN)$.

Bài 121. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD .

- Tìm giao tuyến của (SMD) và (SAB) .
- Tìm giao tuyến của (SMN) và (SBD) .
- Gọi H là điểm trên cạnh SA sao cho $HA = 2HS$. Tìm giao điểm K của MH và (SBD) .

Tính tỉ số: $\frac{KH}{KM}$.

- Gọi G là giao điểm của BN và DM . Chứng minh: $HG \parallel (SBC)$.

Bài 122. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AD là đáy lớn và $AD = 2BC$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , G trọng tâm của tam giác SCD .

- Chứng minh: $OG \parallel (SBC)$.
- Gọi M là trung điểm của cạnh SD . Chứng minh: $CM \parallel (SAB)$.
- Giả sử điểm I trên đoạn SC sao cho $2SC = 3SI$. Chứng minh: $SA \parallel (BID)$.
- Xác định giao điểm K của BG và mặt phẳng (SAC) . Tính tỉ số: $\frac{KB}{KG}$.

Bài 123. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, P, I lần lượt là trung điểm của AB, SC, SB . Một mặt phẳng (α) qua MP và song song với AC và cắt các cạnh SA, BC tại N, Q .

- Chứng minh: $BC \parallel (IMP)$.
- Xác định thiết diện của (α) với hình chóp. Thiết diện này là hình gì ?
- Tìm giao điểm của đường thẳng CN và mặt phẳng (SMQ) .

Bài 124. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình tứ giác lồi. Gọi M, N là trung điểm của SC và CD . Gọi (α) là mặt phẳng qua M, N và song song với đường thẳng AC .

- Tìm giao tuyến của (α) với $(ABCD)$.
- Tìm giao điểm của đường thẳng SB với (α) .

Bài 125. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của AD, BC, SA .

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IMN) và (SAC) ; (IMN) và (SAB) .
- Tìm giao điểm của SB và (IMN) .
- Tìm thiết diện của mặt phẳng (IDN) với hình chóp $S.ABCD$.

Bài 126. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi G là trọng tâm ΔSAB ; N là một điểm thuộc đoạn AC sao cho: $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}$; I là trung điểm AB .

- Chứng minh: $OI \parallel (SAD)$ và $GN \parallel SD$.
- Gọi (α) là mặt phẳng đi qua O và song song với SA và BC . Mặt phẳng (α) cắt SB, SC lần lượt tại L và K . Tìm hình tính thiết diện cắt bởi mặt phẳng (α) với hình chóp $S.ABCD$.

Bài 127. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi H, K lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB và M là điểm thuộc cạnh CD , (M khác C và D).

- Tìm giao tuyến của: (KAM) và (SBC) , (SBC) và (SAD) .
- Tìm thiết diện tạo bởi (HKO) với hình chóp $S.ABCD$. Thiết diện là hình gì?
- Gọi L là trung điểm đoạn HK . Tìm $I = OL \cap (SBC)$. Chứng minh: $SI \parallel BC$.

Bài 128. Cho tứ diện $ABCD$, có M, N là trung điểm của cạnh AB, BC và gọi G là trọng tâm tam giác ACD .

- Tìm giao điểm E của MG và (BCD) .
- Tìm $d = (MNG) \cap (BCD)$. Giả sử $d \cap CD = P$. Chứng minh: $GP \parallel (ABC)$.

Bài 129. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA thỏa $3MA = 2MS$. Hai điểm E và F lần lượt là trung điểm của AB và BC .

- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAC) .
- Xác định giao điểm K của mặt phẳng (MEF) với cạnh SD . Tính tỉ số: $\frac{KS}{KD}$.
- Tìm giao điểm I của MF với (SBD) . Tính tỉ số: $\frac{IM}{IF}$.
- Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MEF) cắt các mặt của hình chóp $S.ABCD$.

Bài 130. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N là trung điểm SA, SD .

- Xác định giao điểm của NC và (OMD) .
- Xác định thiết diện hình chóp với mặt phẳng (P) qua MO và song song với SC .

Bài 131. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC , (P) là mặt phẳng qua AM và song song với BD .

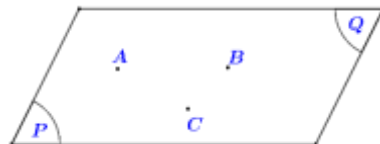
- Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P) .
- Gọi E, F lần lượt là giao điểm của (P) với các cạnh SB và SD . Hãy tìm tỉ số diện tích của tam giác SME với tam giác SBC và tỉ số diện tích của tam giác SMF và tam giác SCD .
- Gọi K là giao điểm của ME và CB , J là giao điểm của MF và CD . Chứng ba điểm K, A, J nằm trên một đường thẳng song song với EF và tìm tỉ số $\frac{EF}{KJ}$.

Bài 4. Hai mặt phẳng song song

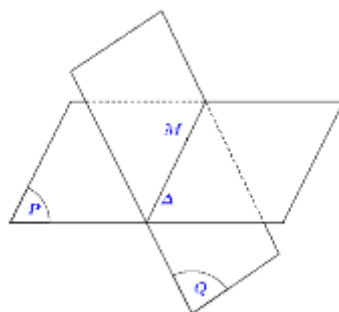
1. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng phân biệt

– Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) , có thể xảy ra một trong ba trường hợp sau:

- + **Trường hợp 1.** (P) và (Q) có ba điểm chung không thẳng hàng, ta nói: hai mặt phẳng (P) và (Q) trùng nhau. Kí hiệu $(P) \equiv (Q)$.



- + **Trường hợp 2.** (P) và (Q) phân biệt và có một điểm chung, ta nói: hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ và đi qua điểm chung. Kí hiệu $(P) \cap (Q) = \Delta$.

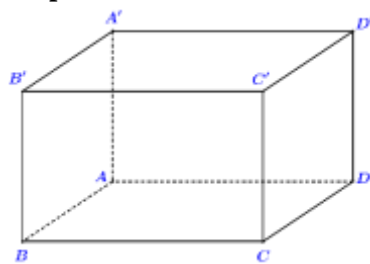


- + **Trường hợp 3.** (P) và (Q) không có điểm chung, nghĩa là $(P) \cap (Q) = \emptyset$, ta nói: hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Kí hiệu $(P) // (Q)$ hoặc $(Q) // (P)$.



– Hai mặt phẳng được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung.

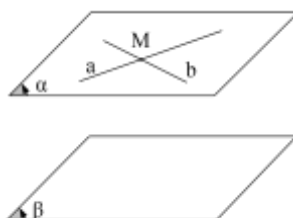
Ví dụ 1. (CTST - Tr113) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ



Hãy chỉ ra các mặt phẳng song song với nhau?

2. Điều kiện để hai mặt phẳng song song

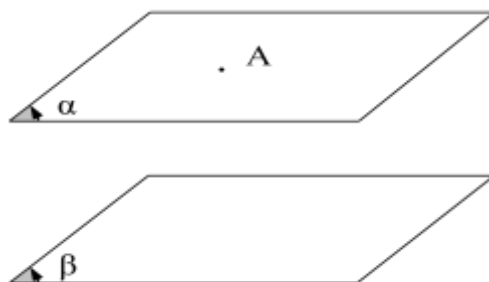
Định lý 1. Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β) .



Lưu ý:

- Muốn chứng minh hai mặt phẳng song song, ta phải chứng minh có hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng này lần lượt song song với mặt phẳng kia.
- Muốn chứng minh đường thẳng $a \parallel (Q)$, ta chứng minh a nằm trong mặt phẳng $(P) \parallel (Q)$.

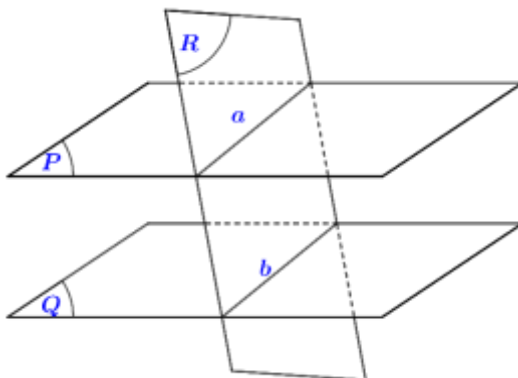
Định lý 2. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.



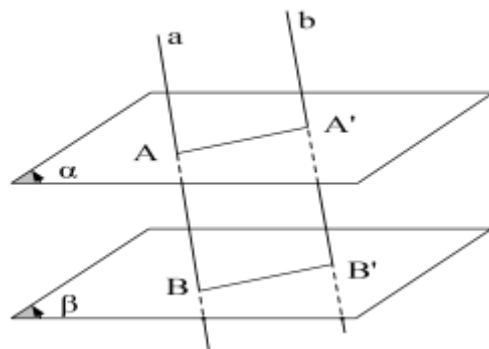
Hệ quả:

- Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì trong (α) có một đường thẳng song song với d và qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α) . Đó đó đường thẳng d song song với (α) ta phải chứng minh d thuộc mặt phẳng (β) và có $(\beta) \parallel (\alpha) \Rightarrow d \parallel (\alpha)$.
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.
- Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) . Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng đi qua A và song song với (α) .

Định lý 3. Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.



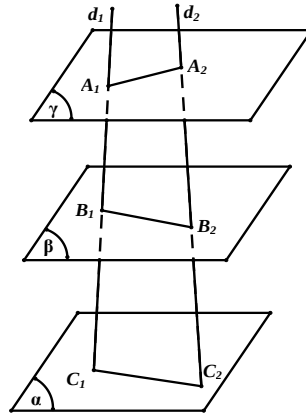
Hệ quả: Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.



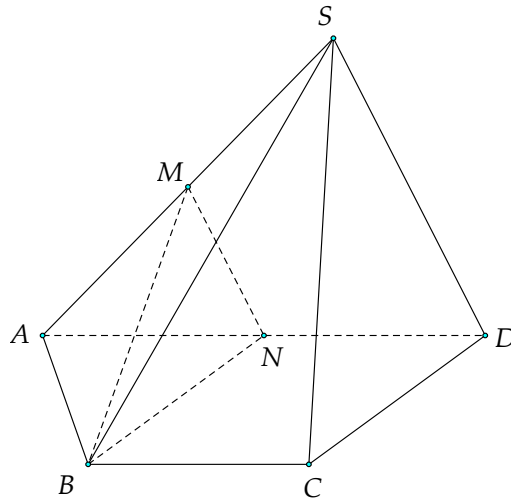
4. Định lí Thales trong không gian

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Tức là
$$\begin{cases} (\alpha) // (\beta) // (\gamma) \\ d_1 \cap (\alpha) = A_1, d_1 \cap (\beta) = B_1, d_1 \cap (\gamma) = C_1 \\ d_2 \cap (\alpha) = A_2, d_2 \cap (\beta) = B_2, d_2 \cap (\gamma) = C_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}.$$



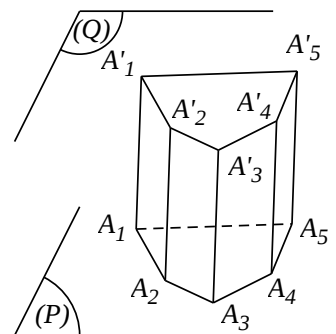
Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang mà $AD // BC$ và $AD = 2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và AD . Chứng minh: $(BMN) // (SCD)$.



5. Hình lăng trụ và hình hộp

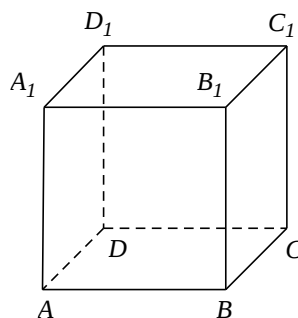
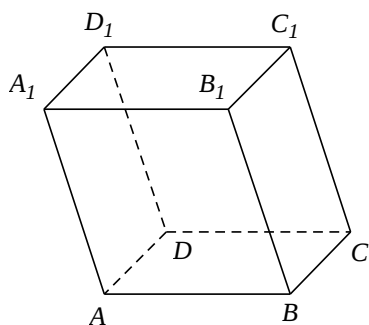
a. Hình lăng trụ

- Hình lăng trụ là một hình đa diện có hai mặt nằm trong hai mặt phẳng song song gọi là hai đáy và tất cả các cạnh không thuộc hai cạnh đáy đều song song với nhau.
- Trong một hình lăng trụ ta có
 - Các mặt khác với hai đáy gọi là các mặt bên của hình lăng trụ.
 - Cạnh chung của hai mặt bên gọi là cạnh bên của hình lăng trụ.
 - Tùy theo đa giác đáy, ta có hình lăng trụ tam giác, lăng trụ tứ giác ...
- Từ định nghĩa của hình lăng trụ, ta lần lượt suy ra các tính chất sau:
 - + Các cạnh bên song song và bằng nhau.
 - + Các mặt bên và các mặt chéo là những hình bình hành.
 - + Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và bằng nhau.



b. Hình hộp

- Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.
- Trong một hình hộp ta có:
 - + Hình hộp có tất cả các mặt bên và các mặt đáy đều là hình chữ nhật gọi là hình hộp chữ nhật.
 - + Hình hộp có tất cả các mặt bên và các mặt đáy đều là hình vuông gọi là hình lập phương.



- **Chú ý:** Các đường chéo của hình hộp cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

3. Bài tập

Bài 132. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SA, SB, SD và K, I là trung điểm của BC, OM .

- Chứng minh: $(OMN) \parallel (SCD)$.
- $(PMN) \parallel (ABCD)$.
- Chứng minh: $KI \parallel (SCD)$.

Bài 133. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD .

- Chứng minh rằng: $(OMN) \parallel (SBC)$.
- Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của AB, ON, SB .
Chứng minh: $PQ \parallel (SBC)$ và $(MOR) \parallel (SCD)$.

Bài 134. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có chung cạnh AB và không đồng phẳng. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, EF . Chứng minh:

- $(ADF) \parallel (BCE)$.
- $(DIK) \parallel (JBE)$.

Bài 135. Cho các hình bình hành $ABCD, ABEF$ nằm trên hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC, BF lấy các điểm M, N sao cho $MC = 2AM, NF = 2BN$. Qua M, N lần lượt kẻ các đường thẳng song song với cạnh AB , cắt các cạnh AD, AF theo thứ tự tại M_1, N_1 . Chứng minh rằng :

- $MN \parallel DE$.
- $M_1N_1 \parallel (DEF)$.
- $(MNM_1N_1) \parallel (DEF)$.

Bài 136. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của AD, BC và I, J, K theo thứ tự là trọng tâm các tam giác ADF, ADC, BCE . Chứng minh: $(IJK) \parallel (CDFE)$.

Bài 137. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SA, BC, CD .

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (MOP) .
- Gọi E là trung điểm của SC và I là điểm trên cạnh SA thỏa $AI = 3IS$.

Tìm $K = IE \cap (ABC)$ và $H = BC \cap (EIM)$. Tính tỉ số $\frac{CH}{CB}$.

- Gọi G là trọng tâm $\triangle SBC$. Tìm thiết diện hình chóp $S.ABC$ bị cắt bởi (IMG) .

Bài 138. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD . Gọi I là trung điểm của ME và $G = AN \cap BD$.

- Tìm giao điểm E của AD với mặt phẳng (BMN) và tìm giao điểm F của SD với mặt phẳng (BMN) . Chứng minh: $FS = 2FD$.
- Chứng minh $FG \parallel (SAB)$ và $(CDI) \parallel (SAB)$.
- Gọi H là giao điểm của MN và SG . Chứng minh: $OH \parallel GF$.

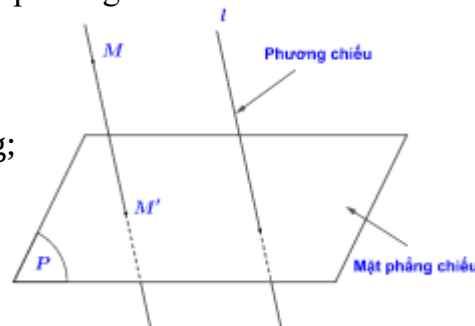
Bài 139. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm của SC , N là điểm trên đường chéo BD sao cho $BD = 3BN$.

- Xác định giao tuyến của (SDC) và (SAB) và tìm $T = DM \cap (SAB)$. Tính $\frac{TM}{TD}$.
- Gọi $K = AN \cap BC$. Chứng minh rằng: $MK \parallel (SBD)$.

Bài 5. Phép chiếu song song

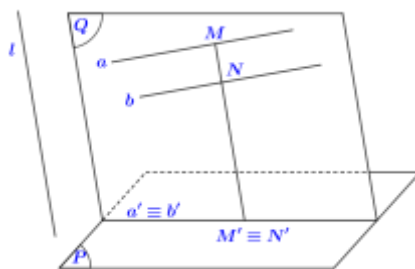
1. Khái niệm phép chiếu song song

- Trong không gian cho mặt phẳng (P) và đường thẳng l cắt (P) . Với mỗi điểm M trong không gian, vẽ một đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với l . Đường thẳng này cắt (P) tại M' . Phép cho tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' trong (P) được gọi là **phép chiếu song song** lên mặt phẳng (P) theo phương l .
- Trong đó:
 - + Mặt phẳng (P) gọi là mặt phẳng chiếu;
 - + Đường l gọi là phương chiếu của phép chiếu song song;
 - + Phép chiếu song song theo phương l còn gọi tắt là phép chiếu theo phương l
 - + Điểm M' gọi là ảnh của điểm M qua phép chiếu theo phương l .
- Phép chiếu song song g được dùng để biểu diễn các hình trong không gian lên một mặt phẳng.

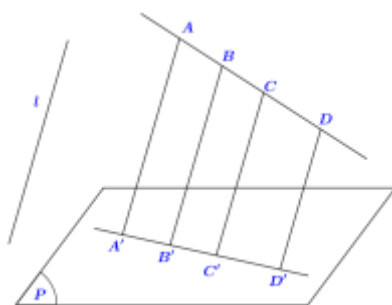


2. Tính chất

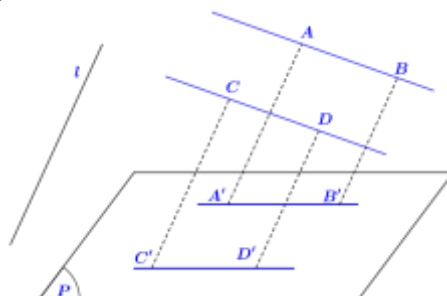
- Hình chiếu song song của đường thẳng (đoạn thẳng, tia) là đường thẳng (đoạn thẳng, tia).
- Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.



- Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.



- Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.



3. Hình biểu diễn của một hình không gian

- Hình biểu diễn của một hình không gian là hình chiếu song song của hình đó trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.
- Khi một hình phẳng nằm trong mặt phẳng không song song với phương chiếu thì hình chiếu biểu diễn hình phẳng đó có các tính chất sau:
 - + Hình biểu diễn của một tam giác (cân, đều, vuông) là một tam giác.
 - + Hình biểu diễn của hình vuông (hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành) là hình bình hành.
 - + Hình biểu diễn của hình thang $ABCD$ với $AB \parallel CD$ là một hình thang $A'B'C'D'$ với

$$A'B' \parallel C'D' \text{ thỏa mãn } \frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}.$$

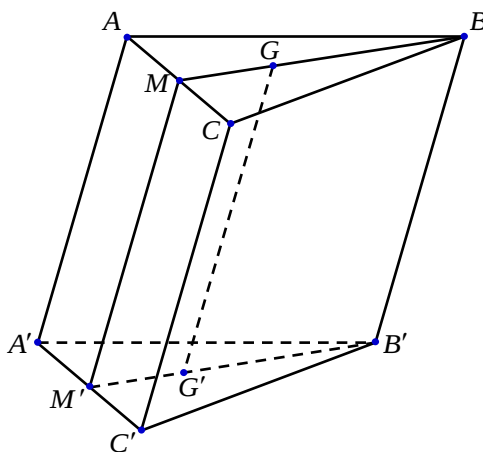
- Hình chiếu đứng, hình chiếu bằng, hình chiếu cạnh của một vật thể chính là hình biểu diễn của vật thể đó.

4. Vẽ hình biểu diễn của một hình H cho trước

- Phương pháp
 - + Xác định các yếu tố song song của hình H .
 - + Xác định tỷ số điểm M chia đoạn thẳng AB .
 - + Hình H' là hình biểu diễn của hình H phải có tính chất.
 - + Bảo đảm tính song song của hình H .
 - + Bảo đảm tỷ số của điểm M chia đoạn thẳng AB .
- Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Qua phép chiếu song song đường thẳng AA' mặt phẳng chiếu là $(A'B'C')$ biến G thành G' . Chứng minh G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của AC .

Do $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ. Suy ra qua phép chiếu song song đường thẳng AA' biến B thành B' , biến M thành M' .

Theo đầu bài G là trọng tâm tam giác ABC . Suy ra B, M, G thẳng hàng và $\frac{BG}{BM} = \frac{2}{3}$.

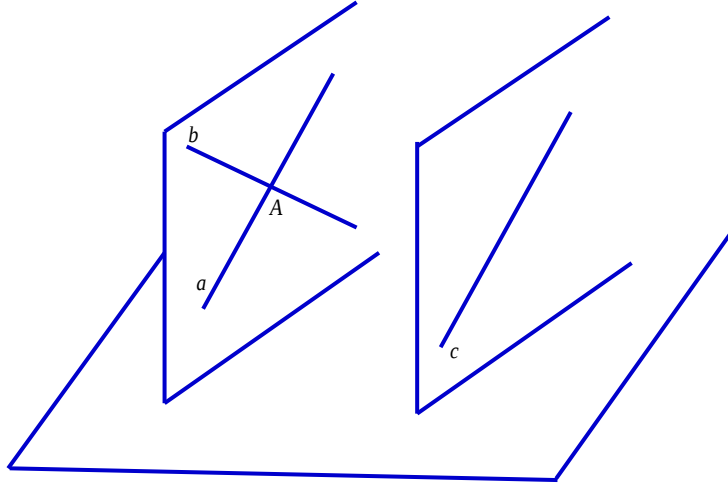
Ta có B', M', G' thẳng hàng và $\frac{B'G'}{B'M'} = \frac{2}{3}$.

Mặt khác M là trung điểm của AC , suy ra M' là trung điểm của $A'C'$.

Vậy G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.

Ví dụ 2. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau không?
Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể song song với nhau hay không?

Lời giải

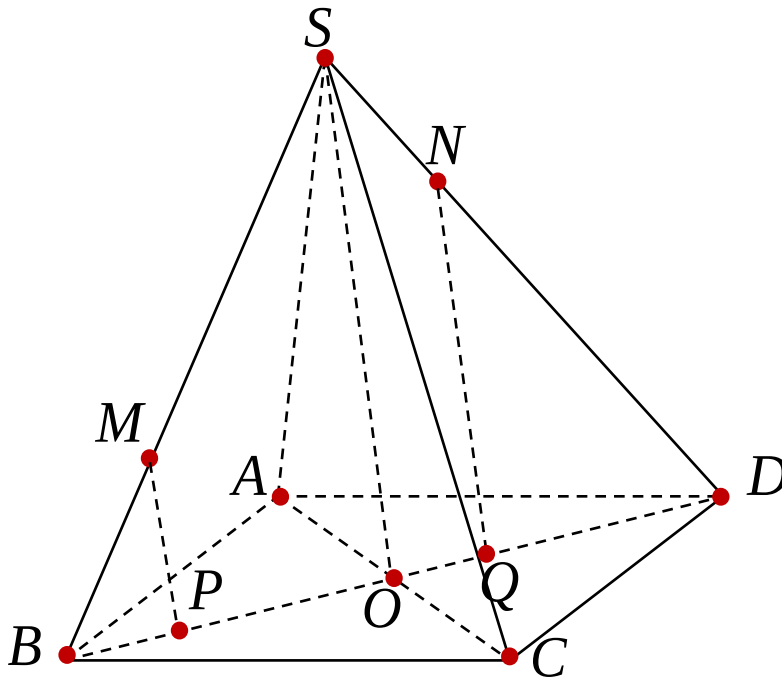


Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.

Hình chiếu của hai đường thẳng cắt nhau thì không thể song song với nhau.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành, O là tâm của đáy. Trên cạnh SB , SD lần lượt lấy điểm M , N sao cho $SM = 2MB$, $SN = \frac{1}{3}SD$. Hình chiếu của M , N qua phép chiếu song song đường thẳng SO mặt phẳng chiếu $(ABCD)$ lần lượt là P , Q . Tính tỉ số $\frac{OP}{OQ}$.

Lời giải



Do P là hình chiếu song song của M qua phép chiếu đường thẳng $SO \Rightarrow \frac{BM}{BS} = \frac{BP}{BO}$.

Mà $SM = 2MB \Rightarrow \frac{BP}{BO} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{OP}{OB} = \frac{2}{3}$.

Chứng minh tương tự ta có $\frac{OQ}{OD} = \frac{1}{3}$. Ta có $BO = DO \Rightarrow \frac{OP}{OQ} = \frac{1}{2}$.

5. Bài tập

Bài 140. Qua phép chiếu song song, tính chất nào không được bảo toàn?

- A. Chéo nhau. B. Đồng qui. C. Song song. D. Thẳng hàng.

Bài 141. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?

- A. Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
B. Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song.
C. Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không thay đổi thứ tự của ba điểm đó.
D. Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

Bài 142. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, qua phép chiếu song song đường thẳng CC' , mặt phẳng chiếu $(A'B'C')$ biến M thành M' . Trong đó M là trung điểm của BC . Chọn mệnh đề **đúng**?

- A. M' là trung điểm của $A'B'$. B. M' là trung điểm của $B'C'$.
C. M' là trung điểm của $A'C'$. D. Cả ba đáp án trên đều sai.

Bài 143. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi I, I' lần lượt là trung điểm của $AB, A'B'$. Qua phép chiếu song song đường thẳng AI' , mặt phẳng chiếu $A'B'C'$ biến I thành ?

- A. A' . B. B' . C. C' . D. I' .

Bài 144. Cho tam giác ABC ở trong mặt phẳng (α) và phương l . Biết hình chiếu theo phương l của tam giác ABC lên mặt phẳng (P) là một đoạn thẳng. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $(\alpha) // (P)$. B. $(\alpha) \equiv (P)$.
C. $(\alpha) // l$ hoặc $(\alpha) \supset l$. D. A, B, C đều sai.

Bài 145. Phép chiếu song song theo phương l không song song với a hoặc b , mặt phẳng chiếu là (P) , hai đường thẳng a và b biến thành a' và b' . Quan hệ nào giữa a và b không được bảo toàn trong phép chiếu song song?

- A. Cắt nhau. B. Trùng nhau.
C. Song song. D. Chéo nhau.

Bài 146. Hình chiếu của hình chữ nhật không thể là hình nào trong các hình sau?

- A. Hình thang. B. Hình bình hành.
C. Hình chữ nhật. D. Hình thoi.

Bài 147. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hình chiếu song song của một hình chóp cắt có thể là một hình tam giác.
B. Hình chiếu song song của một hình chóp cắt có thể là một đoạn thẳng.
C. Hình chiếu song song của một hình chóp cắt có thể là một hình chóp cắt.
D. Hình chiếu song song của một hình chóp cắt có thể là một điểm.

Bài 148. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?

- A. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.
B. Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu của nó.
C. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau.
D. Một tam giác bất kỳ đều có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác cân.

Bài 149. Qua phép chiếu song song biến ba đường thẳng song song thành.

- A. Ba đường thẳng đôi một song song với nhau.
B. Một đường thẳng.
C. Thành hai đường thẳng song song.
D. Cả ba trường hợp trên.

Bài 150. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là hình bình hành.
- B.** Hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là hình vuông.
- C.** Hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là hình thoi.
- D.** Hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là một tam giác.
- Bài 151.** Hình chiếu của hình vuông không thể là hình nào trong các hình sau?
A. Hình vuông. **B.** Hình bình hành. **C.** Hình thang. **D.** Hình thoi.
- Bài 152.** Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai:
A. Một đường thẳng luôn cắt hình chiếu của nó.
B. Một tam giác bất kỳ đều có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác cân.
C. Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu của nó.
D. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.
- Bài 153.** Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai:
A. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể song song với nhau.
B. Một tam giác bất kỳ đều có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác vuông.
C. Một đường thẳng có thể cắt với hình chiếu của nó.
D. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể trùng nhau.
- Bài 154.** Nếu đường thẳng a cắt mặt phẳng chiếu (P) tại điểm A thì hình chiếu của a sẽ là:
A. Điểm A . **B.** Trùng với phương chiếu.
C. Đường thẳng đi qua A . **D.** Đường thẳng đi qua A hoặc chính A .
- Bài 155.** Giả sử tam giác ABC là hình biểu diễn của một tam giác đều. Hình biểu diễn của tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều là:
A. Giao điểm của hai đường trung tuyến của tam giác ABC .
B. Giao điểm của hai đường trung trực của tam giác ABC .
C. Giao điểm của hai đường đường cao của tam giác ABC .
D. Giao điểm của hai đường phân giác của tam giác ABC .
- Bài 156.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. M là trung điểm của SC . Hình chiếu song song của điểm M theo phương AB lên mặt phẳng (SAD) là điểm nào sau đây?
A. S . **B.** Trung điểm của SD .
C. A . **D.** D .
- Bài 157.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Hình chiếu song song của điểm A theo phương AB lên mặt phẳng (SBC) là điểm nào sau đây?
A. S . **B.** Trung điểm của BC .
C. B . **D.** C .

----- HẾT -----