SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**KÌ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT**
TUYÊN QUANG	**Năm học 2025 – 2026**
	Môn thi: Toán chuyên
ĐỀ CHÍNH THỨC	**Thời gian làm bài:** 150 phút *(không kể thời gian phát đề)*
	(Đề thi có 01 trang)

Câu 1 (2,0 *điểm*)

1. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\left(2\sqrt{3}-1\right)\sqrt{13+4\sqrt{3}}}{\sqrt{29+12\sqrt{5}}-2\sqrt{5}}$.

2. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $2xy=x+y$. Chứng minh rằng:

a) $xy \ge 1$;

b) $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}\ge\sqrt{(x-y)^2+8}$.

Câu 2 (2,5 *điểm*)

1. Cho phương trình $x^2-(m+1)x+m-4=0$ (1), với m là tham số.

a) Giải phương trình (1) với $m=1$.

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$\left(x_1{}^2-mx_1+m\right)\left(x_2{}^2-mx_2+m\right)=2.$$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+8y^2=12\\ x^3+2xy^2+12y=0\end{cases}$.

Câu 3 (3,0 *điểm*). Cho tam giác ABC ($AB<AC$) nội tiếp (O). Kẻ đường kính AD của (O); AD cắt BC ở E; đường cao AH của tam giác ABC cắt (O) ở F khác A. Gọi K là hình chiếu của D trên BC; FK cắt (O) ở I khác F.

a) Chứng minh rằng $FH=DK$.

b) Gọi J là giao điểm của AK và EI. Chứng minh rằng $JE.JI=JA.JK$.

c) Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC ở S. Chứng minh rằng SD, EI và (O) cùng đi qua một điểm.

Câu 4 (1,5 *điểm*)

1. Cho hai hộp đựng thẻ: hộp I gồm 5 thẻ được đánh số 1, 2, 3, 4, 5; hộp II gồm 5 thẻ được đánh số 6, 7, 8, 9, 10 (các thẻ khác nhau được đánh số khác nhau). Rút ngẫu nhiên ở mỗi hộp một thẻ, tính xác suất để tích hai số trên các thẻ rút được là số chẵn.

2. Cho đa thức $f(x)=ax^2+bx+c$. Mỗi lần thay đa thức này bởi một trong hai đa thức cx^2+bx+a hoặc $(a+b+c)x^2+(2a+b)x+a$. Nếu cho đa thức $f(x)=x^2+4x+3$ thì sau một số lần thay đổi có được đa thức $g(x)=x^2+10x+9$ không? Vì sao?

Câu 5 (1,0 *điểm*). Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng:

a) $A=4^p-3^p-1$ chia hết cho $3p$.

b) $A=4^p-3^p-1$ chia hết cho $39p$.

-----HẾT-----

Ghi chú: *Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Họ và tên thí sinh:……………………….……………Số báo danh:……………..

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT, NĂM HỌC 2025-2026
Môn: Toán chuyên
(Hướng dẫn này có 04 trang)

Câu 1 (2,0 *điểm*)

1. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\left(2\sqrt{3}-1\right)\sqrt{13+4\sqrt{3}}}{\sqrt{29+12\sqrt{5}}-2\sqrt{5}}$.

Hướng dẫn chấm	Điểm
Ta có: $\sqrt{13+4\sqrt{3}}=\sqrt{12+4\sqrt{3}+1}=2\sqrt{3}+1.$ $\sqrt{29+12\sqrt{5}}=\sqrt{20+12\sqrt{5}+9}=2\sqrt{5}+3.$	**0,5**
$A=\dfrac{\left(2\sqrt{3}-1\right)\sqrt{13+4\sqrt{3}}}{\sqrt{29+12\sqrt{5}}-2\sqrt{5}}=\dfrac{\left(2\sqrt{3}-1\right)\left(2\sqrt{3}+1\right)}{2\sqrt{5}+3-2\sqrt{5}}=\dfrac{12-1}{3}=\dfrac{11}{3}.$	**0,5**

2. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $2xy=x+y$. Chứng minh rằng:

a) $xy\ge 1$;

b) $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}\ge\sqrt{\left(x-y\right)^2+8}.$

Hướng dẫn chấm	Điểm
a) Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có: $2xy=x+y\ge 2\sqrt{xy}.$	**0,25**
Vì $x,y>0$ nên $\sqrt{xy}\ge 1\Leftrightarrow xy\ge 1.$	**0,25**
b) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương $x^2+y^2+2+2\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}\ge(x-y)^2+8\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2+1}\ge 6-2xy.$	**0,25**
Nếu $6-2xy<0$ thì bất đẳng thức đúng, ngược lại thì $x^2y^2+x^2+y^2+1\ge\left(3-xy\right)^2\Leftrightarrow x^2+y^2+6xy-8\ge 0\Leftrightarrow\left(x+y\right)^2+4xy-8\ge 0$ $\Leftrightarrow(xy)^2+xy-2\ge 0\Leftrightarrow\left(xy-1\right)\left(xy+2\right)\ge 0,$ luôn đúng vì $xy\ge 1.$	**0,25**

Câu 2 (2,5 *điểm*)

1. Cho phương trình $x^2-(m+1)x+m-4=0$ (1), với m là tham số.
a) Giải phương trình (1) với $m=1$.
b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$\left(x_1{}^2-mx_1+m\right)\left(x_2{}^2-mx_2+m\right)=2.$$

Hướng dẫn chấm	Điểm

a) Với $m=1$ thì (1) trở thành $x^2-(1+1)x+1-4=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$ Vậy với $m=1$ thì phương trình có tập nghiệm $S=\{-1;3\}$.	**0,5**
b) (1) là phương trình bậc hai có $\Delta=(m-1)^2-4(m-4)=m^2-6m+17=(m-3)^2+8>0.$ Suy ra (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 với mọi m.	**0,25**
Ta có $x^2-(m+1)x+m-4=0 \Leftrightarrow x^2-mx-x+m-4 \Leftrightarrow x^2-mx+m=x+4.$ Do x_1,x_2 là nghiệm của (1) nên $\begin{cases} x_1{}^2-mx_1+m=x_1+4 \\ x_2{}^2-mx_2+m=x_2+4 \end{cases}.$	**0,25**
Thay lại yêu cầu bài toán ta được $(x_1+4)(x_2+4)=2 \Leftrightarrow x_1x_2+4(x_1+x_2)+16=2 \Leftrightarrow x_1x_2+4(x_1+x_2)+14=0$ (2)	**0,25**
Theo định lí Viète ta có $x_1+x_2=m+1$ và $x_1x_2=m-4$. Thay vào (2) ta được $m-4+4(m+1)+14=0 \Leftrightarrow m=\frac{-14}{5}.$ Vậy $m=\frac{-14}{5}.$	**0,25**

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+8y^2=12 \\ x^3+2xy^2+12y=0 \end{cases}.$

Hướng dẫn chấm	Điểm
Thế $12=x^2+8y^2$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình $x^3+2xy^2+12y=0 \Leftrightarrow x^3+2xy^2+(x^2+8y^2)y=0$ $\Leftrightarrow x^3+x^2y+2xy^2+8y^3=0$ (1).	**0,25**
Với $y=0$ ta nhận thấy không thỏa hệ. Với $y\neq 0$ ta biến đổi phương trình (1) ta có $\left(\frac{x}{y}\right)^3+\left(\frac{x}{y}\right)^2+2\left(\frac{x}{y}\right)+8=0$ Đặt $\frac{x}{y}=t$ ta được phương trình $t^3+t^2+2t+8=0 \Leftrightarrow (t+2)(t^2-t+4)=0.$	**0,25**

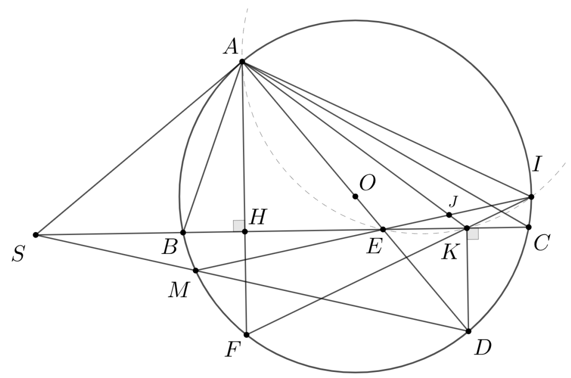
Nhận xét: $t^2 - t + 4 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$. Do đó $t = -2$ hay $x = -2y$.	**0,25**
Thế $x = -2y$ vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có $12y^2 = 12 \Leftrightarrow y = \pm 1$. Với $y = 1$ thì $x = -2$. Với $y = -1$ thì $x = 2$. Vậy hệ phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{(-2;1);(2;-1)\}$.	**0,25**

Câu 3 (3,0 *điểm*). Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp (O). Kẻ đường kính AD của (O); AD cắt BC ở E; đường cao AH của tam giác ABC cắt (O) ở F khác A. Gọi K là hình chiếu của D trên BC; FK cắt (O) ở I khác F.

a) Chứng minh rằng $FH = DK$.

b) Gọi J là giao điểm của AK và EI. Chứng minh rằng $JE.JI = JA.JK$.

c) Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC ở S. Chứng minh rằng SD, EI và (O) cùng đi qua một điểm.

Hướng dẫn chấm	**Điểm**
 a) Ta có $\widehat{AFD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).	**0,5**
Mặt khác $FH \perp HK, DK \perp HK$ nên $FHKD$ là hình chữ nhật. Suy ra $FH = DK$.	**0,5**
b) Từ ý a) ta có $FD // HK$, suy ra $\widehat{IKC} = \widehat{IFD}$ (đồng vị) $= \widehat{IAD}$ (góc nội tiếp) $\equiv \widehat{IAE}$ do đó $IAEK$ nội tiếp.	**0,5**
Suy ra $\widehat{EAK} = \widehat{EIK}$ hay $\widehat{EAJ} = \widehat{KIJ}$. Mặt khác $\widehat{AJE} = \widehat{IJK}$ (đối đỉnh) nên hai tam giác EAJ và KIJ đồng dạng. Suy ra $\frac{JA}{JI} = \frac{JE}{JK}$ hay $JE.JI = JA.JK$.	**0,5**
c) Gọi M là giao điểm của EI với (O). Vì SA là tiếp tuyến nên $SA \perp AD$ suy ra $SAKD$ nội tiếp, do đó	**0,5**

$\widehat{ADS}=\widehat{AKS}\equiv\widehat{AKE}=\widehat{AIE}$ (tứ giác $AIKE$ nội tiếp) $\equiv\widehat{AIM}=\widehat{ADM}$ (góc nội tiếp). Suy ra S,M,D thẳng hàng hay SD,EI và (O) cùng đi qua điểm M.	**0,5**

Câu 4 (1,5 *điểm*)

1. Cho hai hộp đựng thẻ: hộp I gồm 5 thẻ được đánh số 1, 2, 3, 4, 5; hộp II gồm 5 thẻ được đánh số 6, 7, 8, 9, 10 (các thẻ khác nhau được đánh số khác nhau). Rút ngẫu nhiên ở mỗi hộp một thẻ, tính xác suất để tích hai số trên các thẻ rút được là số chẵn.

Hướng dẫn chấm	Điểm
Vì mỗi số được chọn ở hộp I thì có tương ứng 5 số có thể chọn ở hộp II nên ta có $n(\Omega)=5.5=25.$	**0,25**
Gọi A là biến cố tích hai số trên các thẻ rút được là số chẵn. Nếu tích hai số rút được là số lẻ thì cả hai lần đều phải rút được số lẻ.	**0,25**
Ở hộp I có 3 số lẻ, mỗi số lẻ này có tương ứng 2 số lẻ có thể chọn ở hộp II nên ta có $3.2=6$ cách rút ra hai thẻ có tích các số ghi trên đó là số lẻ.	**0,25**
Do đó $n(A)=25-6=19.$ Vậy xác suất của biến cố A là $P(A)=\dfrac{19}{25}.$	**0,25**

2. Cho đa thức $f(x)=ax^2+bx+c.$ Mỗi lần thay đa thức này bởi một trong hai đa thức cx^2+bx+a hoặc $(a+b+c)x^2+(2a+b)x+a.$ Nếu cho đa thức $f(x)=x^2+4x+3$ thì sau một số lần thay đổi có được đa thức $g(x)=x^2+10x+9$ không? Vì sao?

Hướng dẫn chấm	Điểm
Với mỗi đa thức $f(x)=ax^2+bx+c,$ ta xét đại lượng $\Delta=b^2-4ac.$ Đa thức cx^2+bx+a có $\Delta=b^2-4ac.$ Đa thức $(a+b+c)x^2+(2a+b)x+a$ có $\Delta=(2a+b)^2-4a(a+b+c)=4a^2+4ab+b^2-4a^2-4ab-4ac=b^2-4ac.$	**0,25**
Suy ra sau các bước biến đổi thì Δ không đổi. Mà đa thức $f\left(x\right)=x^2+4x+3$ có $\Delta=4^2-4.3=4$ Đa thức $g\left(x\right)=x^2+10x+9$ có $\Delta=10^2-4.9=64\neq 4$ Do đó từ đa thức đã cho không thể biến đổi về đa thức $g\left(x\right)=x^2+10x+9$.	**0,25**

Câu 5 (1,0 *điểm*). Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng:

a) $A=4^p-3^p-1$ chia hết cho $3p.$

b) $A=4^p-3^p-1$ chia hết cho $39p.$

Hướng dẫn chấm	Điểm
a) Ta có $A=4^p-3^p-1\equiv 1^p-0-1\left(\bmod 3\right)\equiv 0\left(\bmod 3\right)$ suy ra $A\,\vdots\,3.$ (1)	**0,25**
+) Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $\left(4,p\right)=\left(3,p\right)=1.$ Áp dụng định lý Fermat ta có: $4^{p-1}\equiv 1\left(\bmod p\right);\ 3^{p-1}\equiv 1\left(\bmod p\right)\Rightarrow A=4^p-3^p-1\equiv 4-3-1\left(\bmod p\right)\equiv 0\left(\bmod p\right)$ Hay $A\,\vdots\,p.$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $A=4^p-3^p-1$ chia hết cho $3p.$	**0,25**

b) Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p=3k+i,\ i\in\{1;2\}$. Suy ra $3^p=3^{3k+i}=3^i.3^{3k}=3^i.27^k\equiv 3^i.1^k\pmod{13}\equiv 3^i\pmod{13}\neq 1\pmod{13}$ Do đó 3^p-1 không chia hết cho 13. (3)	**0,25**
Khi đó $A.\left(3^p-1\right)=-\left(1+3^p-4^p\right)\left(3^p-1\right)\equiv-\left(1+3^p-(-9)^p\right)\left(3^p-1\right)\pmod{13}$ $\equiv\left(9^p+3^p+1\right)\left(1-3^p\right)\pmod{13}\equiv 1-\left(3^p\right)^3\pmod{13}\equiv 1-27^p\pmod{13}\equiv 0\pmod{13}$. Hay $A.\left(3^p-1\right)\equiv 0\pmod{13}$ (4) Từ (3) và (4) suy ra $A\equiv 0\pmod{13}$ hay $A\vdots 13$. (5) Nếu $(p,13)=1$ thì theo (1), (2), (5) suy ra $A\vdots 39p$. Nếu $p=13$ thì ta có $4^{13}-3^{13}-1=65514540$ chia hết cho $39p=507$.	**0,25**

-----Hết-----

Ghi chú: *Nếu thí sinh làm bài theo cách khác thì vẫn cho điểm theo các phần đúng tương ứng.*