

Câu 1: (5,0 điểm)

1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: $2x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 3$

2. Cho $A = \left(\frac{x^2}{x^2 - xy} - \frac{y^2}{xy - y^2} + \frac{x^2 + y^2}{xy} \right) : \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2} - \frac{2}{x}$ (với $x \neq 0, y \neq 0, x \neq \pm y$).

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tính giá trị của A biết x, y thỏa mãn $x^2 + 5y^2 - 4xy + 2y + 1 \leq 0$.

Câu 2: (5,0 điểm)

1. Tìm số nguyên dương n sao cho $A = (n + 3)(4n^2 + 14n + 7)$ là số chính phương.

2. Tìm x, y nguyên thỏa mãn: $x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y + 3 = 0$.

Câu 3: (2,0 điểm)

Cho đa thức $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết đa thức $f(x)$ chia cho đa thức $x + 1$ dư -4 và chia cho đa thức $x - 2$ dư 5 . Tính giá trị của

$$A = (a^{2025} + b^{2025})(b^{2025} - c^{2025})(c^{2025} + a^{2025}).$$

Câu 4: (6,0 điểm)

Cho ΔABC nhọn có các đường cao $AD; BE$ và CF cắt nhau tại H . Qua B kẻ đường thẳng song song với CF cắt tia AD tại K .

1. Chứng minh ΔAEF đồng dạng ΔABC .

2. Chứng minh $AB^2 = AD \cdot AK$ và $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$.

3. Gọi I là trung điểm BC . Tia HI cắt BK tại N . Chứng minh AN vuông góc với EF .

Câu 5: (2,0 điểm)

1. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 12$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{2a + b + c} + \frac{1}{2b + c + a} + \frac{1}{2c + a + b}$

2. Giải bóng đá của một trường THCS có 10 đội tham gia thi đấu vòng tròn một lượt (hai đội bất kỳ đều thi đấu với nhau một trận và phân rõ thắng - thua). Biết rằng đội thứ nhất thắng a_1 trận và thua b_1 trận, đội thứ hai thắng a_2 trận và thua b_2 trận, ..., đội thứ 10 thắng a_{10} trận và thua b_{10} trận. Chứng minh rằng: $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{10}^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_{10}^2$.