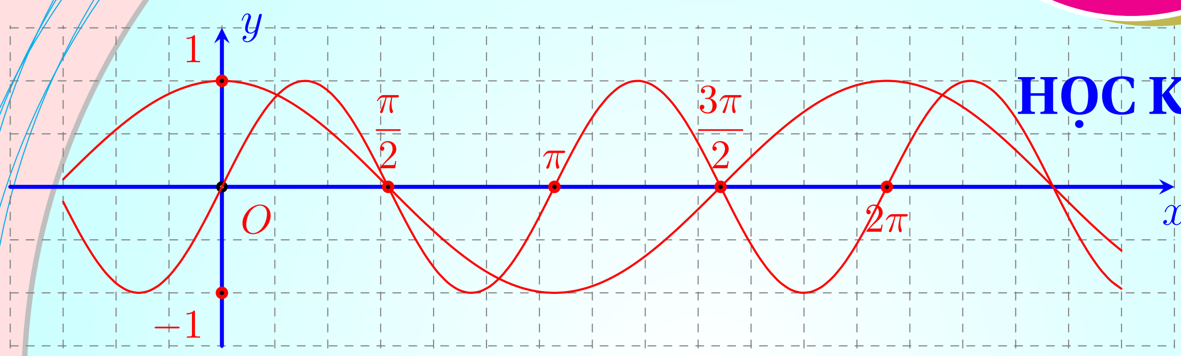
TÔI YÊU TOÁN HỌC

NGÔ ĐỨC TÀI
SĐT: 0889 971 004

TOÁN 12

THEO CHƯƠNG TRÌNH MỚI 2018



HỌC KÌ 1

ĐỒNG THÁP 2025

MỤC LỤC

Chương 1

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Mục lục của chương

Chuyên đề 1 TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

I. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Nhắc lại tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

Kí hiệu K là khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng. Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên K.

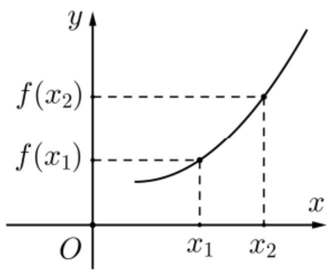
- Hàm số $y = f(x)$ gọi là **đồng biến (tăng)** trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

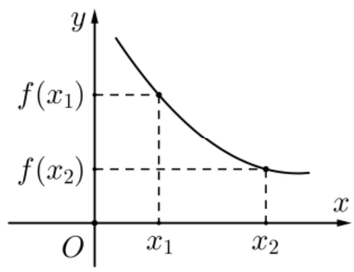
- Hàm số $y = f(x)$ gọi là **nghịch biến (giảm)** trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K thì đồ thị của nó đi lên từ trái sang phải.
- Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K thì đồ thị của nó đi xuống từ trái sang phải.
- Hàm số đồng biến hay nghịch biến trên K thì gọi chung là đơn điệu trên K.



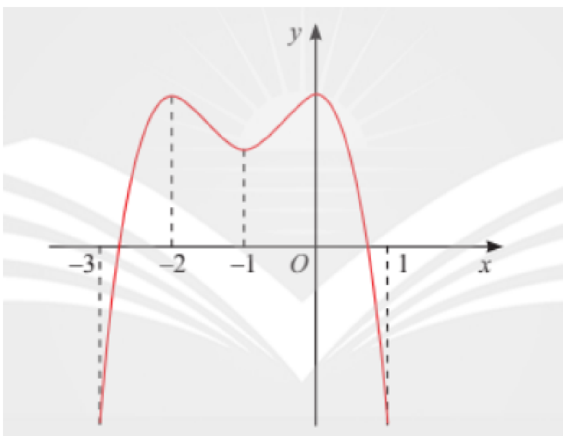
Hàm số đồng biến



Hàm số nghịch biến

Ví dụ 1 ★☆☆☆☆

Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho ở hình bên.



Lời giải. Dựa vào đồ thị ta có:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-1;0)$.
- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(0;+\infty)$.

Tính đơn điệu của hàm số

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên K.

- Nếu $f'(x)>0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên K.
- Nếu $f'(x)<0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên K.

LƯU Ý. • Khi xét tính đơn điệu của hàm số mà chưa cho khoảng K, ta hiểu xét tính đơn điệu của hàm số đó trên tập xác định của nó.

• Để xét tính đơn điệu của hàm số $y=f(x)$, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tìm tập xác định D của hàm số.

Bước 2. Tính đạo hàm $f'(x)$ của hàm số. Tìm các điểm $x\in D$ mà tại đó đạo hàm $f'(x)=0$ hoặc đạo hàm không tồn tại.

Bước 3. Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.

Bước 4. Nếu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

• Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên K, $f'(x)\geq 0$ với mọi $x\in K$ và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến trên K.

• Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên K, $f'(x)\leq 0$ với mọi $x\in K$ và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số nghịch biến trên K.

• Nếu $f'(x)=0$ với mọi $x\in K$ thì hàm số không đổi trên K.

Ví dụ 2 ★☆☆☆☆

Xét tính đơn điệu của các hàm số sau

a) $f(x)=x^3-6x^2+9x$.

b) $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

Lời giải.

a) Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=3x^2-12x+9$; $f'(x)=0 \iff \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.

b) Tập xác định $D = \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Ta có $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0, \forall x \in D$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Ví dụ 3 ★☆☆☆☆

Chứng minh rằng hàm số $f(x) = 3x - \sin x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = 3 - \cos x$.

Mà $-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\cos x \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq 3 - \cos x \leq 4 \Leftrightarrow 2 \leq f'(x) \leq 4$ hay $f'(x) > 0, \forall x \in D$.

Suy hàm số $f(x) = 3x - \sin x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

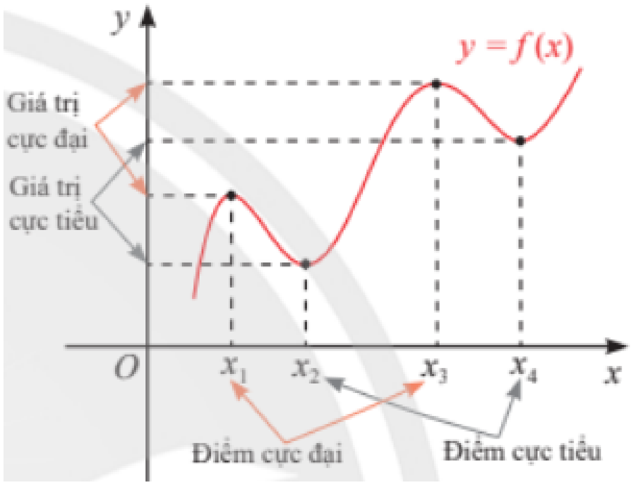
II. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Khái niệm cực trị của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D và $x_0 \in D$.

• Nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và $(a; b) \subset D$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (a; b) \backslash \{x_0\}$ thì x_0 được gọi là một ***điểm cực đại***, $f(x_0)$ được gọi là ***giá trị cực đại*** của hàm số $y = f(x)$, kí hiệu $y_{\text{CĐ}}$.

• Nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và $(a; b) \subset D$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (a; b) \backslash \{x_0\}$ thì x_0 được gọi là một ***điểm cực tiểu***, $f(x_0)$ được gọi là ***giá trị cực tiểu*** của hàm số $y = f(x)$, kí hiệu y_{CT}.



LƯU Ý.

a) Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là **điểm cực trị** của hàm số. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là **giá trị cực trị** (còn gọi là **cực trị**) của hàm số.

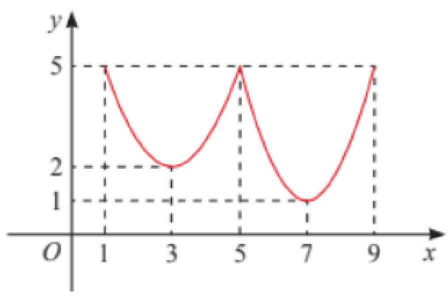
b) Nếu x_0 là một điểm cực trị (điểm cực đại, điểm cực tiểu) của hàm số $y = f(x)$ thì ta nói hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị (cực đại, cực tiểu) tại x_0.

c) Hàm số có thể đạt cực đại và cực tiểu tại nhiều điểm trên D.

d) Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì điểm $M\big(x_0; f(x_0)\big)$ là một điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Ví dụ 4 ★☆☆☆☆

Tìm các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho ở hình bên.



Lời giải.

- $x = 5$ là điểm cực đại của hàm số vì $f(x) < f(5), \forall x \in (3;7)\backslash\{5\}, y_{\text{CĐ}} = y(5) = 5$.
- $x = 3$ là điểm cực đại của hàm số vì $f(x) > f(3), \forall x \in (1;5)\backslash\{3\}, y_{\text{CT}} = y(3) = 2$.
- $x = 7$ là điểm cực đại của hàm số vì $f(x) < f(7), \forall x \in (5;9)\backslash\{7\}, y_{\text{CT}} = y(7) = 1$.

Tìm cực trị của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó:

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0.
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0.

Minh họa cực trị bằng bảng biến thiên:

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		↗	$y_{CĐ}$	↘	

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		↘	y_{CT}	↗	

Để tìm cực trị của hàm số, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tìm tập xác định D của hàm số.

Bước 2. Tính $f'(x)$. Tìm các điểm $x \in D$ mà $f'(x) = 0$ hoặc đạo hàm không tồn tại.

Bước 3. Lập bảng biến thiên của hàm số.

Bước 4. Từ bảng biến thiên kết luận về cực trị của hàm số.

LƯU Ý.

a) Nếu $f'(x) = 0$ và $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì hàm số không có cực trị tại x_0.

b) Nếu $f'(x)$ không đổi dấu trên khoảng K thì $f(x)$ không có cực trị trên khoảng đó.

Ví dụ 5 ★☆☆☆☆

Tìm cực trị của hàm số $g(x) = \dfrac{x^2 + x + 4}{x + 1}$.

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \backslash \{-1\}$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$; $g'(x) = 0 \iff x = 1$ hoặc $x = -3$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

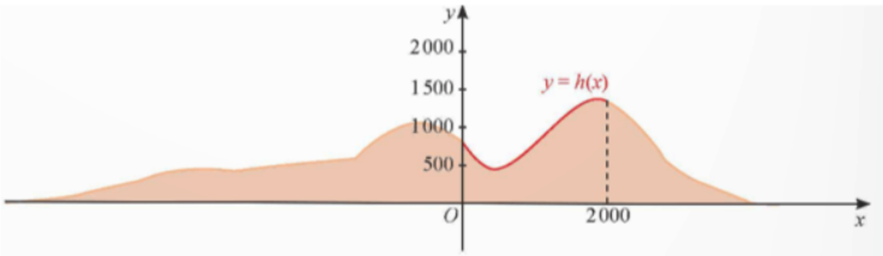
Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

- Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$ và $y_{CĐ} = y(-3) = -5$.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{CT} = y(1) = 3$.

Ví dụ 6

Một phần lát cắt của dãy núi có độ cao tính bằng mét được mô tả bởi hàm số

$$y = h(x) = \frac{1}{1320\ 000}x^3 + \frac{9}{3520}x^2 - \frac{81}{44}x + 840 \quad \text{với } 0 \leq x \leq 2\ 000.$$



Tìm tọa độ các đỉnh của lát cắt dãy núi trên đoạn $[0; 2000]$.

Lời giải. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $h'(x) = -\dfrac{1}{440\ 000}x^2 + \dfrac{9}{1760}x - \dfrac{81}{44}$; $h'(x) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = 450 \\ x = 1800 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	0		450		1800		2000
h'		$-$	0	$+$	0	$-$	
h	840	$\searrow$	$\dfrac{7365}{16}$	$\nearrow$	$\dfrac{15\ 315}{11}$	$\searrow$	$\dfrac{43\ 720}{33}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có tọa độ các đỉnh là $\left(450; \dfrac{7365}{16}\right)$ và $\left(1800; \dfrac{15\ 315}{11}\right)$.

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(0;+\infty)$. (B) $(0;1)$. (C) $(-1;0)$. (D) $(1;+\infty)$.

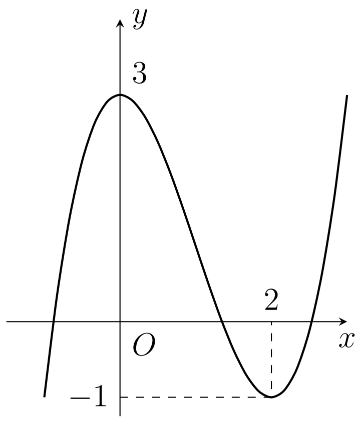
Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-6	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty;2)$. (B) $(1;+\infty)$. (C) $(0;1)$. (D) $(0;+\infty)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Khẳng định nào dưới đây đúng?



(A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;0\right)$.

(B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

(C) Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$.

(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Câu 4. Hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x$ nghịch biến trên khoảng

(A) $(-\infty;-3)$. (B) $(1;+\infty)$. (C) $(-3;1)$. (D) $(-3;+\infty)$.

Câu 5. Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ đồng biến trên khoảng:

(A) $(-\infty; 1)$. (B) $(0; 2)$. (C) $(2; +\infty)$. (D) $\mathbb{R}$.

Câu 6. Hàm số $y = \dfrac{1}{2}x^4 + x^3 - x + 5$ đồng biến trên

(A) $(-\infty; -1)$ và $\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$.

(B) $\left(-1; \dfrac{1}{2}\right)$ và $(2; +\infty)$.

(C) $(-\infty; -1)$ và $(2; +\infty)$.

(D) $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

(A) $x = 2$. (B) $x = -1$. (C) $x = 1$. (D) $x = -2$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

(A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 1.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho là

(A) -1. (B) 1. (C) 2. (D) -4 .

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Điểm cực đại của hàm số đã cho là

Ⓐ $x = 2$. Ⓑ $x = 0$. Ⓒ $x = 3$. Ⓓ $(2; 0)$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm dưới đây

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số là

Ⓐ 1. Ⓑ 2 . Ⓒ 3 . Ⓓ 4.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm dưới đây

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số là

Ⓐ 2. Ⓑ 3 . Ⓒ 4. Ⓓ 1.

Câu 13. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{1-x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng ?

Ⓐ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Ⓑ Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Ⓓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

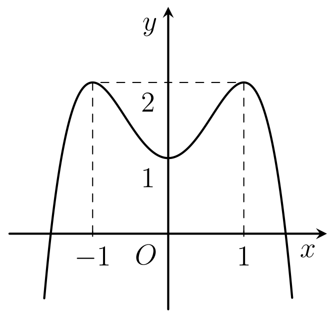
Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

Ⓐ $(-1; +\infty)$. Ⓑ $(1; +\infty)$. Ⓒ $(-\infty; -1)$. Ⓓ $(-\infty; 1)$.

Câu 15. Cho hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + \dfrac{2}{3}$. Điểm cực đại của đồ thị hàm số là

Ⓐ $x = 1$. Ⓑ $\left(3; \dfrac{2}{3}\right)$. Ⓒ $x = 3$. Ⓓ $(1; 2)$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Khẳng định nào dưới đây sai ?



Ⓐ $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -1$ và $x = 1$.

Ⓑ $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

Ⓒ $f(x)$ có giá trị cực đại là $x = 2$.

Ⓓ $f(x)$ có giá trị cực tiểu là $y = 1$.

Câu 17. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y = x^3 + 3x - 2$. Ⓑ $y = 2x^3 - 5x + 1$.

Ⓒ $y = x^4 + 3x^2$. Ⓓ $y = \dfrac{x-2}{x+1}$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ Hàm số có đúng một cực trị .

Ⓑ Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1 .

Ⓒ Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Ⓓ $M(0; 0)$ là một điểm cực tiểu của đồ thị hàm số .

Câu 19. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+3}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ Cực tiểu của hàm số bằng -3 .

Ⓑ Cực tiểu của hàm số bằng -6 .

Ⓒ Cực tiểu của hàm số bằng 1 .

Ⓓ Cực tiểu của hàm số bằng 2 .

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x+2)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

Ⓐ 3 . Ⓑ 0 . Ⓒ 1 . Ⓓ 2 .

Câu 21. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

Ⓐ $Q(-1; 10)$. Ⓑ $M(0; -1)$.

Ⓒ $N(1; -10)$. Ⓓ $P(1; 0)$.

Câu 22. Hàm số $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ 3 . Ⓑ 0 . Ⓒ 1 . Ⓓ 2 .

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Ⓑ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Ⓒ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Ⓓ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

2 Tự luận

Bài 1. Xét tính đơn điệu và tìm điểm cực trị của các hàm số sau

a) $y = 4x^3 + 3x^2 - 36x + 6$.

b) $y = x^4 + 2x^2 - 3$.

c) $y = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$.

d) $y = \dfrac{3x+1}{x-2}$.

e) $y = e^{x^2}$.

f) $y = x - \ln x$.

Bài 2. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 1$.

b) $y = \dfrac{x^2 - 8x + 10}{x-2}$.

c) $y = \dfrac{-x^2 - 6x - 25}{x+3}$.

d) $y = \dfrac{3x}{x^2 - 9}$.

e) $y = \sqrt{4 - x^2}$.

f) $y = xe^x$.

g) $y = x^2 \ln x$.

Bài 3. Chứng minh rằng hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-3}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

Bài 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $y' = x(x-1)^2(x+3), \forall x \in \mathbb{R}$. Xác định các khoảng đồng biến, nghịch biến và điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ đã cho.

Bài 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx^2 + 3x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bài 6. Tìm m để

a) Hàm số $y = \dfrac{2x+m}{x-1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

b) Hàm số $y = \dfrac{-x^2+3x+m}{x+2}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Bài 7. Kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam trong các năm từ 2010 và 2017 có thể được tính xấp xỉ bằng công thức $f(x) = 0,01x^3 - 0,04x^2 + 0,25x + 0,44$ (tỉ USD) với x là số năm tính từ 2010 đến 2017 $(0 \le x \le 7)$.

a) Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$.

b) Chứng minh rằng kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.

Bài 8. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \ge 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $a(t)$.

a) Tìm các hàm $v(t)$ và $a(t)$.

b) Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

Bài 9. Thể tích V (đơn vị: cm^3) của 1 kg nước tại nhiệt độ T (đơn vị: °C) với $0 \le T \le 30$ được tính bởi công thức sau:

$$V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3.$$

(Nguồn: J. Stewart, Calculus, Seventh Edition, Brooks/Cole, CENGAGE Learning 2012). Hỏi thể tích $V(T)$ với $0 \le T \le 30$, giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

Bài 10. Một chất điểm chuyển động lên, xuống theo phương thẳng đứng. Độ cao $h(t)$ của chất điểm tại thời điểm t (giây) được cho bởi công thức $h(t) = \dfrac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 12t + 1$ với $0 \le t \le 8$.

a) Viết công thức tính vận tốc của chất điểm.

b) Trong khoảng thời gian nào chất điểm chuyển động lên, trong khoảng thời gian nào chất điểm chuyển động đi xuống?

Bài 11. Độ cao (tính bằng mét) của tàu lượn siêu tốc so với mặt đất sau t (giây) $(0 \leq t \leq 20)$ từ lúc bắt đầu được cho bởi công thức

$$h(t) = -\frac{4}{255}t^3 + \frac{49}{85}t^2 - \frac{98}{17}t + 20.$$

Trong khoảng thời gian nào tàu lượn đi xuống, trong khoảng thời gian nào thời gian tàu lượn đi lên?

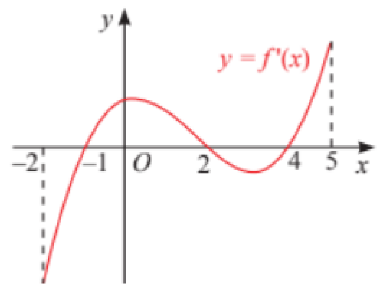
Bài 12. Một cửa hàng ước tính số lượng sản phẩm q $(0 \leq q \leq 100)$ bán được phụ thuộc vào giá bán p (tính bằng nghìn đồng) theo công thức $p + 2q = 300$. Chi phí cửa hàng cần chi để nhập về q sản phẩm là $C(q) = 0,05q^3 - 5,7q^2 + 295q + 300$ (nghìn đồng).

a) Viết công thức tính lợi nhuận I của cửa hàng khi nhập về và bán được q sản phẩm.

b) Trong khoảng nào của q thì lợi nhuận sẽ tăng khi q tăng, trong khoảng nào thì lợi nhuận giảm khi q tăng?

Bài 13. Một công ty tiến hành khai thác 17 giếng dầu trong khu vực được chỉ định. Trung bình mỗi giếng dầu chiết xuất được 245 thùng dầu mỗi ngày. Công ty có thể khai thác nhiều hơn 17 giếng dầu nhưng cứ khai thác thêm một giếng thì lượng dầu mỗi giếng chiết xuất được hằng ngày giảm 9 thùng. Để giám đốc công ty có thể quyết định số giếng cần thêm cho phù hợp với tài chính, hãy chỉ ra số giếng công ty có thể khai thác thêm để sản lượng dầu chiết xuất tăng lên.

Bài 14. Đạo hàm $f'(x)$ của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Xét tính đơn điệu và tìm điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.



Bài 15. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2x - m}{x - 1}$ (m là tham số). Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có hai cực trị.

Bài 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2025; 2025)$ để hàm số $y = \dfrac{2x + 5}{x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

Chuyên đề 2

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

I. ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D.

• Số M được gọi là **giá trị lớn nhất của hàm số** $y = f(x)$ trên D nếu $f(x) \leq M$ với mọi x thuộc D và tồn tại x_0 thuộc D sao cho $f(x_0) = M$. Kí hiệu

$$M = \max_D f(x) \text{ hay } \begin{cases} f(x) \leq M \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases} \Rightarrow \max_D f(x) = M.$$

• Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất của hàm số** $y = f(x)$ trên D nếu $f(x) \geq m$ với mọi x thuộc D và tồn tại x_0 thuộc D sao cho $f(x_0) = m$. Kí hiệu

$$m = \min_D f(x) \text{ hay } \begin{cases} f(x) \geq m \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases} \Rightarrow \min_D f(x) = m.$$

LƯU Ý. - Ta quy ước khi chỉ nói giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ (mà không chỉ rõ tập D) thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định của nó.

- Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số thường được tìm bằng cách sử dụng đạo hàm và bảng biến thiên.

Ví dụ 1 ★☆☆☆☆

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ trên đoạn $[0; 3]$.

b) $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0; 5)$.

c) $h(x) = x\sqrt{2 - x^2}$.

Lời giải.

a) Ta có $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0; 3] \\ x = 2 \in [0; 3] \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	0		1		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	6	$\searrow$	5	$\nearrow$	10

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$$\min_{[0;3]} f(x) = f(0) = 1 \ \text{ và } \ \max_{[0;3]} f(x) = f(3) = 10.$$

b) Ta có $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	0		1		5
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{26}{5}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{(0;5)} g(x) = f(1) = 2$ và hàm số không có GTLN.

c) Tập xác định $D = \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

Ta có $h'(x) = \sqrt{2-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} = \dfrac{2-2x^2}{\sqrt{2-x^2}}$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{[-\sqrt{2};\sqrt{2}]} = f(-1) = -1$ và $\max\limits_{[-\sqrt{2};\sqrt{2}]} = f(1) = 1$.

Ví dụ 2 ★☆☆☆☆

Sự phân hủy của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hòa tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ ($t \geq 0$) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số $y = y(t) = 5 - \dfrac{15t}{9t^2+1}$. Vào các thời điểm nào nồng độ oxygen trong nước cao nhất và thấp nhất?

Lời giải. Ta có $y' = \dfrac{135t^2 - 15}{(9t^2+1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow 135t^2 - 15 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3}$ (do $t \geq 0$).

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	5	$\searrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	5

Dựa vào bảng biến thiên ta có: Thời điểm nồng độ oxygen trong nước cao nhất là $t = 0$ và thấp nhất là $t = \dfrac{1}{3}$.

II. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT ĐOẠN

Các bước tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ như sau:

- *Bước 1.* Tìm các điểm $x_1; x_2; \cdots; x_n$ thuộc khoảng $(a;b)$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc không tồn tại.
- *Bước 2.* Tính $f(a); f(x_1); f(x_2); \cdots; f(x_n); f(b)$.
- *Bước 3.* Gọi M là số lớn nhất và m là số nhỉ nhất trong các giá trị tìm được ở Bước 2. Khi đó:

$$M = \max_{[a;b]} f(x), \quad m = \min_{[a;b]} f(x).$$

Ví dụ 3 ★☆☆☆☆

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = x + \dfrac{4}{x^2}$ trên đoạn $[1;4]$.

Lời giải. Ta có $g'(x) = 1 - \dfrac{8}{x^3}; g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{8}{x^3} \Leftrightarrow x = 2$.

Ta có $g(1) = 5; g(2) = 3; g(4) = \dfrac{17}{4}$.

Suy ra $\min\limits_{[1;4]} g(x) = g(2) = 3$ và $\max\limits_{[1;4]} g(x) = g(1) = 5$.

Ví dụ 4 ★☆☆☆☆

Tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5 cm có thể có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải. Gọi một cạnh góc vuông của tam giác vuông là x (cm), $(0 < x < 5)$.

Cạnh góc vuông còn lại là $\sqrt{25 - x^2}$. Diện tích tam giác vuông là $S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{25 - x^2}$.

Xét hàm số $S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{25 - x^2}$ trên khoảng $(0; 3)$.

Ta có $S'(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{25 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{25 - x^2}}\right)$.

$S'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{25 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{25 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow 25 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ (do $0 < x < 5$).

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{5\sqrt{2}}{2}$		5
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$	0	↘	$\frac{25}{4}$	↗	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có diện tích lớn nhất của tam giác vuông là $\frac{25}{4}$.

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	-1		0		2		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 5]$ tại điểm

Ⓐ $x = -1$. Ⓑ $x = 0$. Ⓒ $x = 2$. Ⓓ $x = 5$.

Câu 2. Hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$ tại điểm

Ⓐ $x = 1$. Ⓑ $x = -1$. Ⓒ $x = 0$. Ⓓ $x = 2$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

Khẳng định nào dưới đây đúng?

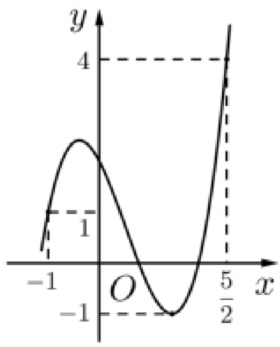
(A) GTLN của hàm số bằng 2.

(B) GTNN của hàm số bằng -1.

(C) GTNN của hàm số bằng 1.

(D) Hàm số không tồn tại GTLN .

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình bên. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$ là



(A) $M = 4; m = -1$.

(B) $M = 4; m = 1$.

(C) $M = \frac{5}{2}; m = 1$.

(D) $M = \frac{5}{2}; m = -1$.

Câu 5. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 21x$ trên đoạn $[2; 19]$ bằng

(A) -36.

(B) $-14\sqrt{7}$.

(C) $14\sqrt{7}$.

(D) -34.

Câu 6. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-2}$ trên $[-3; 2]$ bằng

(A) $-\frac{7}{5}$.

(B) 7.

(C) $\frac{7}{5}$.

(D) -7 .

Câu 7. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 33. Ⓒ 37. Ⓓ 12.

Câu 8. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 4}$ là

Ⓐ 2. Ⓑ 4. Ⓒ 0. Ⓓ 1.

Câu 9. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x + 1}$ trên $[0; 3]$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Câu 10. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{2}\cos x$ trên đoạn $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ bằng

Ⓐ $\sqrt{2}$. Ⓑ $\sqrt{3}$. Ⓒ $\dfrac{\pi}{4} + 1$. Ⓓ $\dfrac{\pi}{2}$.

Câu 11. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = e^{x^3 - 3x + 3}$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng

Ⓐ e^2. Ⓑ e^3. Ⓒ e^5. Ⓓ e.

Câu 12. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x^2 - 2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

Ⓐ $-e^2$. Ⓑ $-2e^2$. Ⓒ $2e^4$. Ⓓ $2e^2$.

Câu 13. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \ln(x^2 + x + 2)$ là

Ⓐ $-\ln 14$. Ⓑ $\ln 12$. Ⓒ $\ln 4$. Ⓓ $\ln 10$.

Câu 14. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x\sqrt{4 - x^2}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $m = 0; M = 2$. Ⓑ $m = -2; M = 2$.
Ⓒ $m = -2; M = 0$. Ⓓ $m = 0; M = 4$.

Câu 15. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

Câu 16. Cho hàm số $y = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 5}}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất .

Ⓑ Hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất .

Ⓒ Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất .

Ⓓ Hàm số có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất .

Câu 17. Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1; e^3]$ là $M = \dfrac{a}{e^b}$, trong đó a, b là các số tự nhiên. Khi đó $a^2 + 2b^3$ bằng

Ⓐ 22 . Ⓑ 24 . Ⓒ 32 . Ⓓ 135 .

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 0.

Ⓐ $m = 2$. Ⓑ $m = 6$. Ⓒ $m = 0$. Ⓓ $m = 4$.

2 Tự luận

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 12x + 1$ trên đoạn $[-1; 3]$.

b) $y = -x^3 + 24x^2 - 180x + 400$ trên đoạn $[3; 11]$.

c) $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên đoạn $[0; 2]$.

d) $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$ trên đoạn $[3; 7]$.

e) $y = \sin 2x$ trên đoạn $\left[0; \dfrac{7\pi}{12}\right]$.

f) $y = \cos 2x + 2x + 1$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.

g) $y = e^x(x^2 - 5x + 7)$ trên đoạn $[0; 3]$.

h) $y = x \ln x$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{e^2}; e\right]$.

Bài 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

a) $y = x^3 - 3x - 4$ trên nửa khoảng $[-3; 2)$.

b) $y = x + \dfrac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

c) $y = \dfrac{3x^2 - 4x}{x^2 - 1}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của các hàm số sau

a) $y = \sqrt{4x - 2x^2}$.

b) $y = x\sqrt{16 - x^2}$.

c) $y = 2\sqrt{1 - x^2} + x^2$.

d) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$.

e) $y = \dfrac{x+1}{x^2 + 2x + 10}$.

Bài 4. Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình

$$s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5,$$

trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?

Bài 5. Khi làm nhà kho, bác An muốn cửa sổ có dạng hình chữ nhật với chu vi bằng 4 m (tham khảo hình vẽ). Tìm kích thước khung cửa sổ sao cho diện tích cửa sổ lớn nhất (để hứng được nhiều ánh sáng nhất)?

Bài 6. Khối lượng q (kg) của một mặt hàng mà cửa tiệm bán được trong một ngày phụ thuộc vào giá bán p (nghìn đồng/kg) theo công thức $p = 15 - \frac{1}{2}q$. Doanh thu từ việc bán mặt hàng trên của cửa tiệm được tính theo công thức $R = pq$.

a) Viết công thức biểu diễn R theo p.

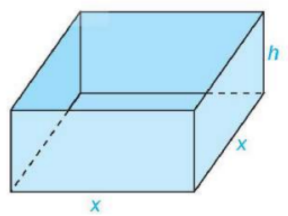
b) Tìm giá bán mỗi kilôgam sản phẩm để đạt được doanh thu cao nhất và xác định doanh thu cao nhất đó.

Bài 7. Hộp sữa 1 l được thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh x cm. Tìm x để diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất.

Bài 8. Trong các hình chữ nhật có chu vi là 24 cm, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

Bài 9. Cho hình thang có đáy nhỏ và cạnh bên bằng nhau và bằng 5. Tìm diện tích lớn nhất của hình thang cân đó.

Bài 10. Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng 108 cm^2 như hình bên. Tìm các kích thước của chiếc hộp sao cho thể tích của hộp là lớn nhất.



Bài 11. Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích 1000 cm^3. Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá 1,2 nghìn đồng/cm^2, trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá 0,75 nghìn đồng/cm^2. Tính các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.

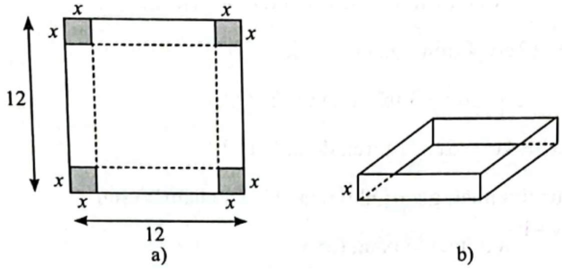
Bài 12. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính 1 cm. Đặt $\widehat{A} = \alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$.

a) Viết biểu thức tính diện tích S của tam giác ABC theo α.

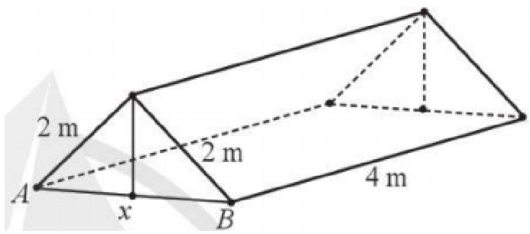
b) Tìm diện tích lớn nhất của tam giác ABC.

Bài 13. Trong một ngày, tổng chi phí để một xưởng sản xuất x (kg) thành phẩm được cho bởi hàm số $C(x) = 2x^3 - 30x^2 + 177x + 2592$ (nghìn đồng). Biết giá bán mỗi kilôgam thành phẩm là 513 nghìn đồng và công suất tối đa của xưởng 20 kg trong một ngày. Khối lượng thành phẩm xưởng nên sản xuất trong trong một ngày là bao nhiêu để lợi nhuận thu được của xưởng trong một ngày là cao nhất?

Bài 14. Từ một miếng bìa hình vuông có cạnh bằng 12 cm, người ta cắt bỏ đi bốn hình vuông nhỏ có cạnh bằng x (cm) ở bốn góc (Hình a) và gấp lại thành một hình hộp không nắp (Hình b). Tìm x để thể tích của hình hộp là lớn nhất.



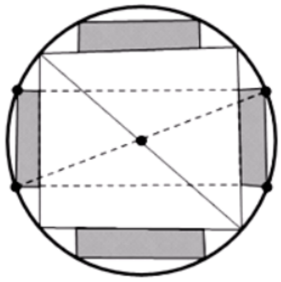
Bài 15. Nhóm bạn Đức dựng trên một khu đất bằng phẳng một chiếc lều từ một tấm bạt hình vuông có độ dài cạnh 4 m như hình bên với hai mép tấm bạt sát mặt đất. Tính khoảng cách AB để khoảng không gian trong lều là lớn nhất.



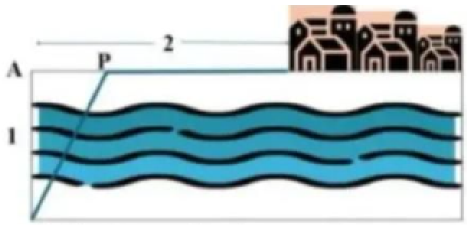
Bài 16. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe hon đa Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 (triệu đồng) và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất.

Bài 17. Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 500 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm ($1 \leq x \leq 500$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1\,001\,000x + 250\,000$, trong khi chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là $G(x) = x + 1000 + \dfrac{250\,000}{x}$ đồng. Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

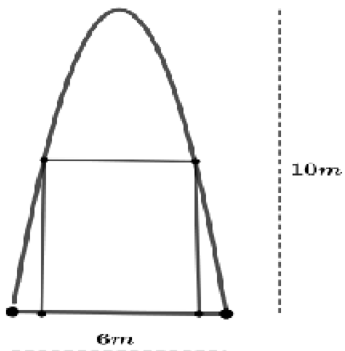
Bài 18. Từ một khúc gỗ tròn hình trụ có đường kính bằng 40 cm, cần xả thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và bốn miếng phụ tô màu xám như hình vẽ. Tìm chiều rộng x của miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất.



Bài 19. Bạn An đang đứng trên bờ một con sông rộng 1 km và muốn đến một thị trấn ở phía bên kia bờ, cách 2 km xuôi dòng. Bạn An dự định chèo thuyền theo một đường thẳng đến một điểm P trên bờ đối diện (tham khảo hình vẽ) và sau đó đi bộ quãng đường còn lại dọc theo bờ. Biết bạn An chèo thuyền với vận tốc 4 km/giờ và đi bộ với vận tốc 5km/giờ. Gọi x_0 (km) là khoảng cách từ A đến P trong trường hợp thời gian bạn An đến thị trấn là ngắn nhất. Giá trị của $3x_0$ bằng bao nhiêu?



Bài 20. Một cái cổng trường có hình dạng parabol cao 10 m và rộng 6m. Người ta muốn đặt một khung hình chữ nhật để thiết kế trang trí, có hai đỉnh nằm trên vòm cổng và hai đỉnh còn lại nằm dưới mặt đất. Khung hình chữ nhật đó có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu mét vuông để có thể đặt vào cổng trường (*làm tròn kết quả đến hàng phần chục*)?



Chuyên đề 3

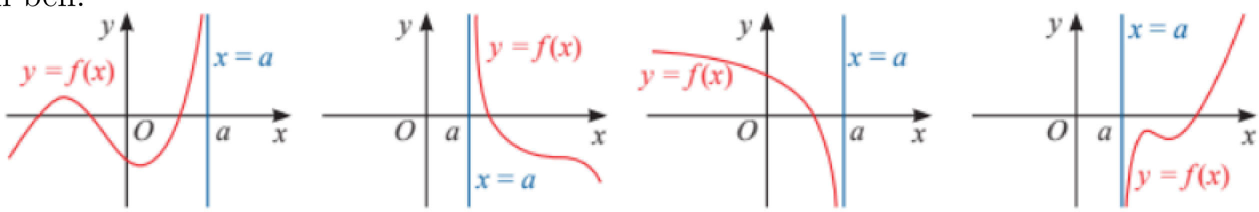
ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I. ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỨNG

Đường thẳng $x = a$ được gọi là một **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn

- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

Đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như hình bên.



a) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ c) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ d) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

Ví dụ 1 ★☆☆☆☆

Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số sau:

a) $y = f(x) = \dfrac{2x+3}{-x+5}$.

b) $y = g(x) = \dfrac{x^2-2x}{x-1}$.

Lời giải.

a) Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{5\}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{2x+3}{-x+5} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{2x+3}{-x+5} = +\infty$.

Vậy $x = 5$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

b) Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2-2x}{x-1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2-2x}{x-1} = +\infty$.

Vậy $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

II. ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG

Đường thẳng $y = m$ được gọi là một **đường tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = m$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = m$.

Đường thẳng $y = m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như hình bên.

Ví dụ 2 ★☆☆☆☆

Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số sau:

a) $y = f(x) = \dfrac{x-2}{4x+1}$.

b) $y = g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$.

Lời giải.

a) Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-2}{4x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - \frac{2}{x}}{4 + \frac{1}{x}} = \dfrac{1}{4}$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x-2}{4x+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 - \frac{2}{x}}{4 + \frac{1}{x}} = \dfrac{1}{4}$.

Vậy $y = \dfrac{1}{4}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

b) Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 + \frac{2}{\sqrt{x}}} = 1$;

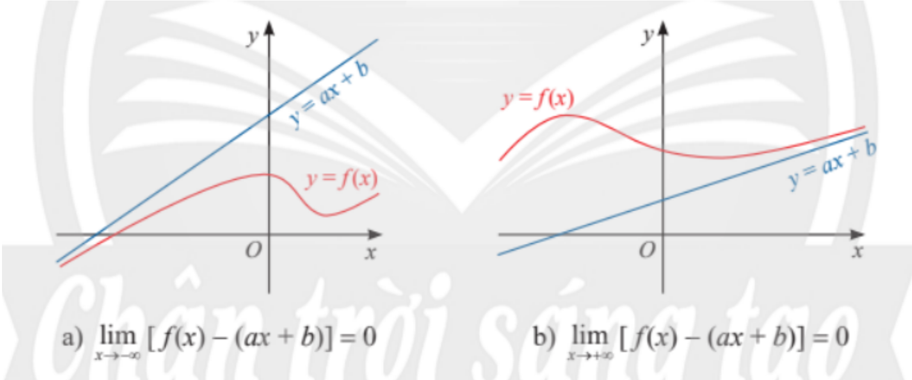
$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{1 + \frac{2}{\sqrt{x}}} = 1$.

Vậy $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

III. ĐƯỜNG TIỆM CẬN XIÊN

Đường thẳng $y = ax + b, a \neq 0$, được gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0$ hoặc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0$.

Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như hình bên.



LƯU Ý.

1. Trong trường hợp tổng quát, ta có thể tìm hệ số a, b trong phương trình của đường tiệm cận xiên $y = ax + b$ theo công thức như sau:
$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - ax\right]$$
hoặc
$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - ax\right].$$
2. Khi $a = 0$ thì đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = b$.

Ví dụ 3 ★☆☆☆☆

Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{x + 5}$.

Lời giải. Tập xác định $D = \mathbb{R}\backslash\{-5\}$.

Ta có: $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 - 3x}{x^2 + 5x} = 2.$

$b = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - ax\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x^2 - 3x}{x + 5} - 2x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-13x}{x + 5} = -13.$

Tương tự, ta cũng có $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2;\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x) - ax\right] = -13.$

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x - 1$.

Ví dụ 4 ★☆☆☆☆

Nếu trong một ngày, một xưởng sản xuất được x kilôgam sản phẩm thì chi phí trung bình (tính bằng nghìn đồng) cho một sản phẩm được cho bởi công thức:
$$C(x) = \frac{50x + 2000}{x}.$$
Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = C(x)$.

Lời giải. Tập xác định $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} C(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{50x+2000}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-} C(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{50x+2000}{x} = -\infty$.
Do đó $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
Ta có $\lim\limits_{x\to +\infty} C(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{50x+2000}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{50+\frac{2000}{x}}{1} = 50$.
Tương tự, ta cũng có $\lim\limits_{x\to -\infty} C(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{50x+2000}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{50+\frac{2000}{x}}{1} = 50$.
Do đó $y = 50$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm

Câu 1. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{2x+4}$ là đường thẳng:

Ⓐ $x = -2$. Ⓑ $x = 1$. Ⓒ $y = 1$. Ⓓ $y = -2$.

Câu 2. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x+1}{x-2}$ là đường thẳng:

Ⓐ $x = 2$. Ⓑ $x = -\dfrac{1}{3}$. Ⓒ $y = 3$. Ⓓ $y = \dfrac{1}{3}$.

Câu 3. Tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-7}{6-3x}$ là

Ⓐ Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$; tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \dfrac{1}{3}$.

Ⓑ Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = \dfrac{7}{2}$; tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -\dfrac{3}{2}$.

Ⓒ Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$; tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \dfrac{2}{3}$.

Ⓓ Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$; tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -\dfrac{2}{3}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$ và $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào dưới đây đúng

Ⓐ Đồ thị nhận $y = 1$ và $y = -1$ là tiệm cận ngang .

Ⓑ Đồ thị nhận $x = 1$ và $x = -1$ là tiệm cận ngang .

Ⓒ Đồ thị nhận $x = 1$ và $y = -1$ là tiệm cận ngang .

Ⓓ Đồ thị không có tiệm cận ngang .

Câu 5. Đồ thị hàm số nào sau đây nhận đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng?

Ⓐ $y = \dfrac{3x-1}{x+1}$. Ⓑ $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

Ⓒ $y = \dfrac{-x+1}{x-2}$. Ⓓ $y = \dfrac{x+1}{x-2}$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ và thỏa mãn $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2 \\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = -\infty \end{cases}$.

Khẳng định nào dưới đây **sai**?

Ⓐ Đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận .

Ⓑ Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 2$ làm tiệm cận đứng .

Ⓒ Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = -2$ làm tiệm cận đứng .

Ⓓ Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = -2$ làm tiệm cận đứng .

Câu 7. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = 2x - 1 - \dfrac{2}{x+1}$ là đường thẳng

Ⓐ $y = 2x$. Ⓑ $y = x + 1$.

Ⓒ $y = 2x - 1$. Ⓓ $y = -2x + 1$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng có phương trình

Ⓐ $y = -1$. Ⓑ $x = -1$. Ⓒ $x = -2$. Ⓓ $y = -2$.

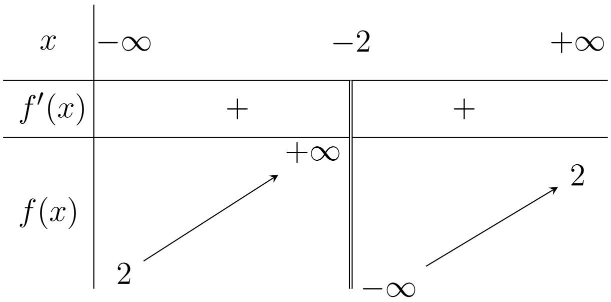
Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng có phương trình

Ⓐ $y = -1$. Ⓑ $x = -1$. Ⓒ $x = -2$. Ⓓ $y = -2$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:



Khẳng định nào sau đây là đúng?

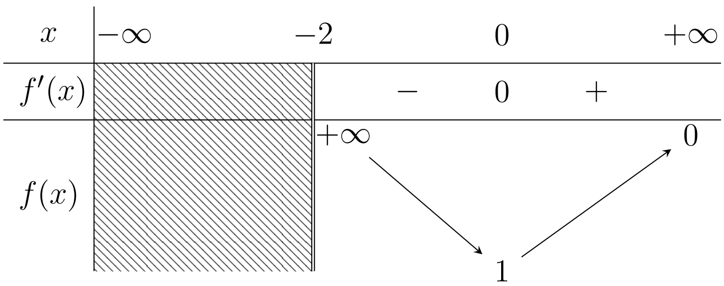
(A) Đồ thị có tiệm cận đứng là đường thẳng $y = 2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $x = -2$.

(B) Đồ thị có tiệm cận đứng là đường thẳng $y = -2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $x = -2$.

(C) Đồ thị có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -2$.

(D) Đồ thị có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.

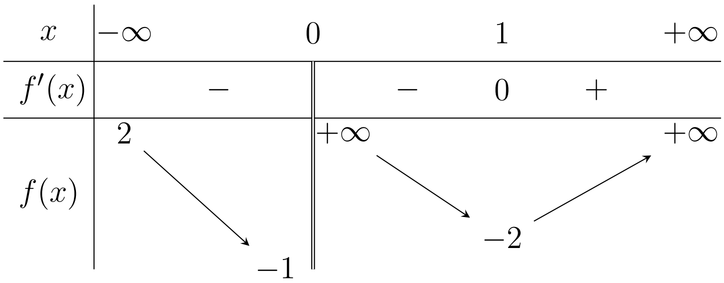
Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.



Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

(A) 0 . (B) 1 . (C) 3 . (D) 2 .

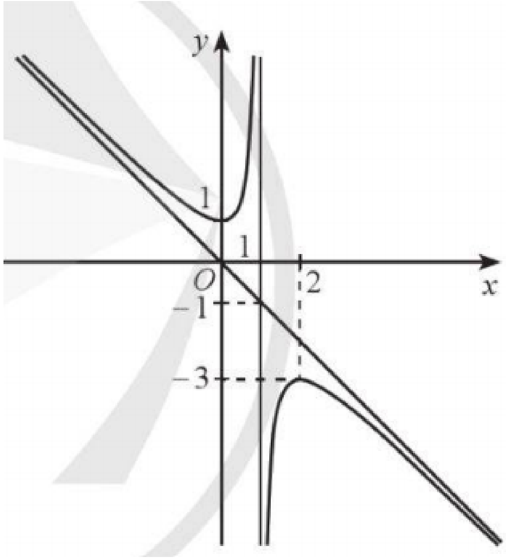
Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là?

(A) 0 . (B) 1 . (C) 2 . (D) 3 .

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ và có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào dưới đây đúng?



(A) Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ và tiệm cận xiên là đường thẳng $y = -x$.

(B) Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$ và tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x$.

(C) Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ và tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x$.

(D) Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ và tiệm cận xiên là đường thẳng $y = -2x$.

Câu 14. Giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{-5x+3}{x}$ là

(A) $I(1;-5)$. (B) $I(0;-5)$. (C) $I(0;5)$. (D) $I(1;5)$.

Câu 15. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x}{x^2-4}$ là

(A) 1. (B) 2 . (C) 3 . (D) 0 .

Câu 16. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ là

(A) 1. (B) 2 . (C) 3 . (D) 0 .

Câu 17. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = -x+3-\dfrac{5}{2x+1}$ là

(A) 1. (B) 2 . (C) 3 . (D) 0 .

Câu 18. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

(A) 1. (B) 2 . (C) 3 . (D) 0 .

Câu 19. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-2}$ là

(A) 1. (B) 2 . (C) 3 . (D) 0 .

Câu 20. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2-3x+4}{2x+1}$ là đường thẳng:

(A) $y = x-2$. (B) $y = x$. (C) $y = x+3$. (D) $y = x-1$.

2 Tự luận

Bài 1. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số sau:

a) $y = \dfrac{4x-5}{2x-3}$. b) $y = \dfrac{-2x+7}{4x-3}$. c) $y = \dfrac{5x}{3x-7}$.

Bài 2. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số sau:

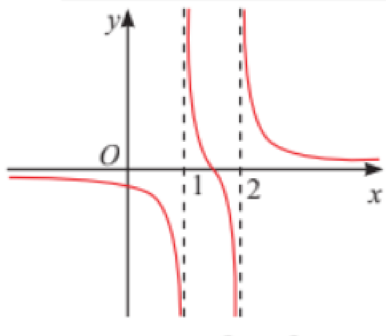
a) $y = \dfrac{x^2+2}{2x-4}$. b) $y = \dfrac{2x^2-3x-6}{x+2}$. c) $y = \dfrac{2x^2+9x+11}{2x+5}$.

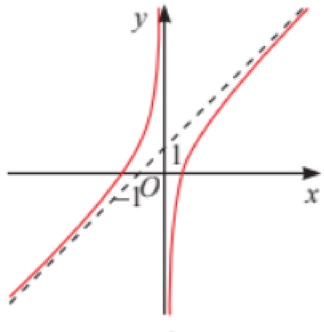
Bài 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

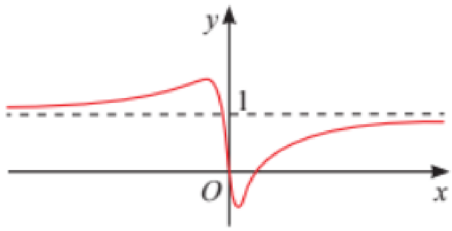
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1

Tìm các tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x) = \dfrac{1}{2+f(x)}$.

Bài 4. Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số sau:







a) $y = \dfrac{2x-3}{5x^2-15x+10}$. b) $y = \dfrac{x^2+x-1}{x}$. c) $y = \dfrac{16x^2-8x}{16x^2+1}$.

Bài 5. Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian t cho bởi công thức $y(t) = 5 - \dfrac{15t}{9t^2+1}$, với y được tính theo mg/l và t được tính theo giờ, $t \geq 0$. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = y(t)$. Từ đó, có nhận xét gì về nồng độ oxygen trong hồ khi thời gian t trở nên rất lớn.

Bài 6. Gọi I là giao điểm giữa tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+3}{x-2}$. Cho điểm $K(3;5)$, tính hệ số góc của đường thẳng qua I và K.

Bài 7. Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+2}$ có đồ thị $(\mathscr{C})$. Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của $(\mathscr{C})$. Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh $A; B$ thuộc $(\mathscr{C})$. Tính độ dài AB.

Bài 8. Tốc độ đánh máy trung bình S (tính bằng từ trên phút) của một học viên sau t tuần học được cho bởi công thức: $S(t) = \dfrac{100t^2}{65+t^2}$ với $t > 0$.

a) Xem $y = S(t) = \dfrac{100t^2}{65+t^2}$ là một hàm số xác định trên khoảng $(0; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

b) Nhận xét về tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó khi thời gian t càng lớn.

Bài 9. Theo thuyết tương đối hẹp, khối lượng m (kg) của một hạt phụ thuộc vào tốc độ di chuyển v (km/s) của nó trong hệ quy chiếu quán tính theo công thức

$$m = m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

, trong đó m_0 là khối lượng nghỉ của hạt $c = 300\,000$ km/s là tốc độ ánh sáng. Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số khối lượng hạt.

Bài 10. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng 144 m^2. Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là x (m).

a) Viết biểu thức tính chu vi $P(x)$ (mét) của mảnh vườn.

b) Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $P(x)$.

Chuyên đề 4 KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ CƠ BẢN

I. SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta thực hiện các bước sau đây:

- *Bước 1.* Tìm tập xác định của hàm số.
- *Bước 2.* Xét sự biến thiên của hàm số
  - Tìm đạo hàm y', xét dấu y', xác định khoảng đơn điệu, cực trị (nếu có) của hàm số.
  - Tìm giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực của hàm số và các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
  - Lập bảng biến thiên của hàm số.
- *Bước 3.* Vẽ đồ thị hàm số
  - Xác định các điểm cực trị (nếu có), giao điểm của đồ thị với các hệ trục tọa độ (nếu có và dễ tìm)...
  - Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
  - Vẽ đồ thị hàm số.

LƯU Ý. Chỉ ra tâm đối xứng và trục đối xứng của đồ thị hàm số (nếu có).

II. KHẢO SÁT HÀM SỐ $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$

LƯU Ý. Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ luôn nhận điểm $I(x_0; y_0)$ làm tâm đối xứng, trong đó x_0 là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ và $y_0 = y(x_0)$.

Ví dụ 1 ★☆☆☆☆

Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$.

b) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$.

Lời giải. a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$.

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên:

◇ Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = -6x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 0$.

Trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; +\infty)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Trên khoảng $(-1; 0)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng đó.

◇ Cực trị:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và $y_{\text{CT}} = 0$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{\text{CĐ}} = 1$.

◇ Các giới hạn tại vô cực: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 \left(-2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = +\infty$;
$\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \left(-2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = -\infty$.

◇ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

3. Đồ thị:

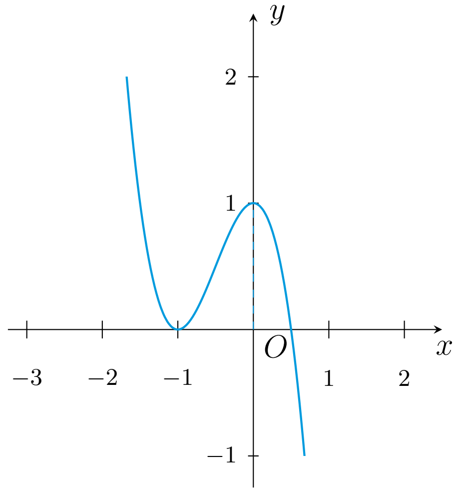
Khi $x = 0$ thì $y = 1$ nên $(0; 1)$ là giao điểm của đồ thị với trục Oy.

Ta có $y = 0 \Leftrightarrow -2x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = \dfrac{1}{2}$.

Vậy đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại hai điểm là $(-1; 0)$ và $\left(\dfrac{1}{2}; 0\right)$.

Điểm $(-1; 0)$ là điểm cực tiểu và điểm $(0; 1)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số.

Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm $I\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ như hình vẽ bên dưới.



b) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$.

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

  Đạo hàm $y' = 3x^2 + 6x + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

  Ta có $y' = 3\left(x+1\right)^2 \geq 0$ nên hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

  Hàm số đã cho không có cực trị.

- Các giới hạn tại vô cực:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right) = -\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right) = +\infty.$$

- Bảng biến thiên:

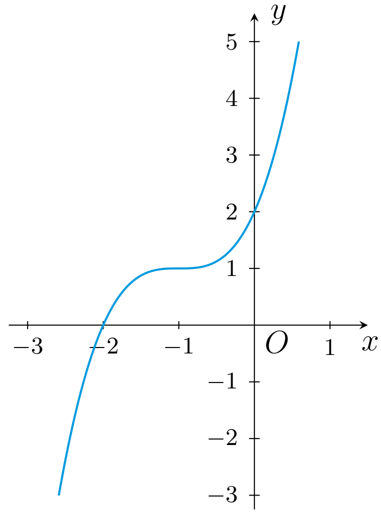
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3. Đồ thị:

Khi $x = 0$ thì $y = 2$ nên $(0; 2)$ là giao điểm của đồ thị với trục Oy.

Ta có $y = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Vậy đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại một điểm $(-2, 0)$.



Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm $I(-1; 1)$.

III. KHẢO SÁT HÀM SỐ $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$

LƯU Ý. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$:

1. Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm tâm đối xứng.
2. Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm trục đối xứng.

Ví dụ 2 ★☆☆☆☆

Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau

a) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. b) $y = \dfrac{2x}{3x-1}$. c) $y = \dfrac{5+x}{2-x}$.

Lời giải. a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. Sự biến thiên:

   - Chiều biến thiên:

     Đạo hàm $y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$. Vì $y' < 0$ với mọi $x \neq 1$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

   - Tiệm cận:

     Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$. Suy ra đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x \to 1^-} y = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x+1}{x-1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} y = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x+1}{x-1} = +\infty$. Suy ra đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Bảng biến thiên:

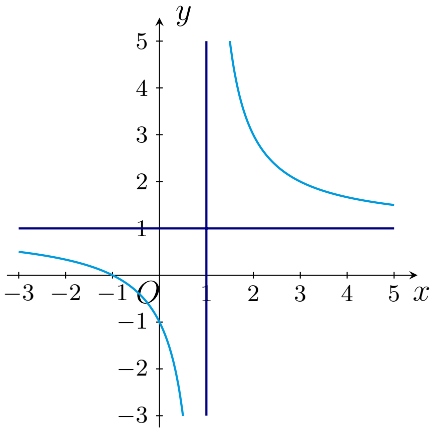
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	1 ↘		$-\infty$ || $+\infty$		↘ 1

③ Đồ thị:

Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-1; 0)$, giao với trục Oy tại điểm $(0; -1)$.Đồ thị của hàm số được biểu diễn trên dưới.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I\,(1; 1)$.

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = 1$ và $y = 1$.



b) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{2x}{3x-1}$.

① Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

② Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

  Đạo hàm $y' = \dfrac{-2}{(3x-1)^2}$. Vì $y' < 0$ với mọi $x \neq \dfrac{1}{3}$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right)$ và $\left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$.

- Tiệm cận:

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{3x-1} = \dfrac{2}{3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{3x-1} = \dfrac{2}{3}$. Suy ra đường thẳng $y = \dfrac{2}{3}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^-} y = \lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^-} \dfrac{2x}{3x-1} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^+} y = \lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^+} \dfrac{2x}{3x-1} = +\infty$. Suy ra đường thẳng $x = \frac{1}{3}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

◇ Bảng biến thiên:

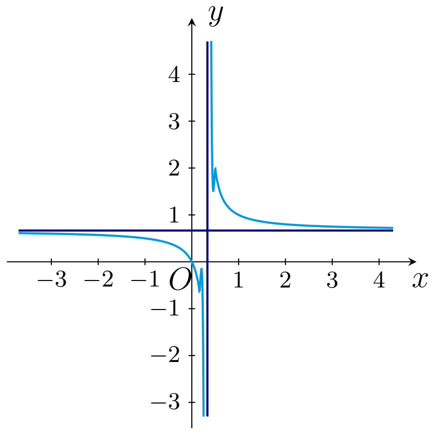
x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$\frac{2}{3}$ ↘	$-\infty$	||	$+\infty$ ↘	$\frac{2}{3}$

3 Đồ thị:

Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $(0;0)$, giao với trục Oy tại điểm $(0;0)$.Đồ thị của hàm số được biểu diễn trên dưới.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = \dfrac{1}{3}$ và $y = \dfrac{2}{3}$.



c) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+5}{2-x}$.

1 Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

2 Sự biến thiên:

◇ Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \dfrac{7}{(2-x)^2}$. Vì $y' > 0$ với mọi $x \neq 2$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

◇ Tiệm cận:

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+5}{2-x} = -1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+5}{2-x} = -1$. Suy ra đường thẳng $y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to2^-} y = \lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{x+5}{2-x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+} y = \lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{x+5}{2-x} = -\infty$. Suy ra đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

◇ Bảng biến thiên:

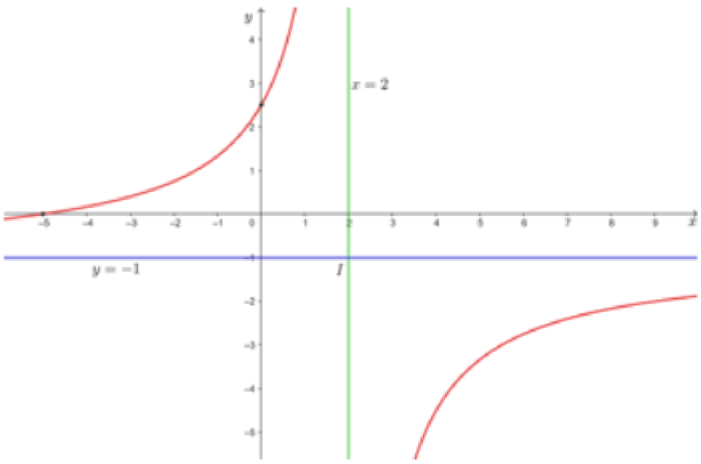
x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	-1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1

3 Đồ thị:

Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-5;0)$, giao với trục Oy tại điểm $\left(0;\frac{5}{2}\right)$.Đồ thị của hàm số được biểu diễn trên dưới.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I\,(2;-1)$.

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x=2$ và $y=-1$.



IV. KHẢO SÁT HÀM SỐ $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}(a \neq 0, m \neq 0,$ ĐA THỨC TỬ KHÔNG CHIA HẾT CHO ĐA THỨC MẪU)

LƯU Ý. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}(a \neq 0, m \neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu):

1. Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng.
2. Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm trục đối xứng.

Ví dụ 3 ★☆☆☆☆

Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = x - \dfrac{1}{x}$. b) $y = -x + 2 - \dfrac{1}{x+1}$. c) $y = \dfrac{-x^2-x+2}{x+1}$.

Lời giải. a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = x - \dfrac{1}{x}$.

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. Sự biến thiên:

- Giới hạn, tiệm cận:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2-1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2-1}{x} = -\infty$.

Suy ra đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{x} = 0$.

Suy ra đường thẳng $y = x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

- Bảng biến thiên:

Đạo hàm $y' = \dfrac{x^2+1}{x^2}$;

Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm, y' không xác định tại $x = 0$.

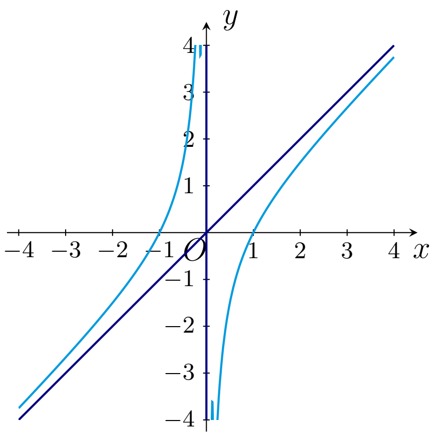
x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

◇ Chiều biến thiên: Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

◇ Cực trị: Hàm số không có cực trị.

3 Đồ thị:

Đồ thị không có giao điểm với trục Oy và giao với trục Ox tại $(-1; 0)$ và $(1; 0)$. Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I\,(0; 0)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.



b) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = -x + 2 - \dfrac{1}{x+1}$.

1 Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2 Sự biến thiên:

◇ Giới hạn, tiệm cận:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 - x - \dfrac{1}{x+1}\right) = -\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(2 - x - \dfrac{1}{x+1}\right) = +\infty$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{-x^2 + x + 1}{x+1} = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{-x^2 + x + 1}{x+1} = -\infty$.

Suy ra đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (2 - x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x+1} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (2 - x)] =$

$\lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{1}{x+1} = 0$.

Suy ra đường thẳng $y = 2 - x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

◈ Bảng biến thiên:

Đạo hàm $y' = \dfrac{-x^2 - 2x}{(x+1)^2}$;

$y' = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = 0$.

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

◈ Chiều biến thiên:

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$;

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2; -1)$ và $(0; -1)$.

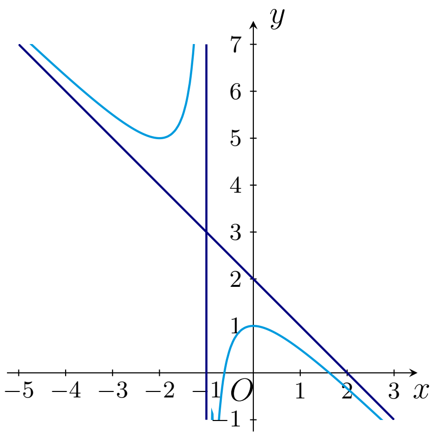
◈ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$ và $y_{\text{CT}} = 5$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{\text{CĐ}} = 1$.

3 Đồ thị:

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0; 1)$ và giao với trục Ox tại $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}; 0\right)$ và $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}; 0\right)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-1; 3)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.



c) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = \dfrac{-x^2 - x + 2}{x + 1}$.

1 Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2 Sự biến thiên:

- Giới hạn, tiệm cận:

  Ta có: $y = \dfrac{-x^2 - x + 2}{x+1} = -x + \dfrac{2}{x+1}$;

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(-x + \frac{2}{x+1}\right) = -\infty;$$

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(-x + \frac{2}{x+1}\right) = +\infty.$$

  Ta có: $\displaystyle\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{-x^2 - x + 2}{x+1} = +\infty$;

  $$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{-x^2 - x + 2}{x+1} = -\infty.$$

  Suy ra đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

  $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (-x)] = \lim_{x \to +\infty} \tfrac{2}{x+1} = 0$; $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (-x)] = \lim_{x \to -\infty} \tfrac{2}{x+1} = 0$.

  Suy ra đường thẳng $y = -x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

- Bảng biến thiên:

  Đạo hàm $y' = \dfrac{-x^2 - 2x - 3}{(x+1)^2}$;

  Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm, y' không xác định tại $x = -1$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

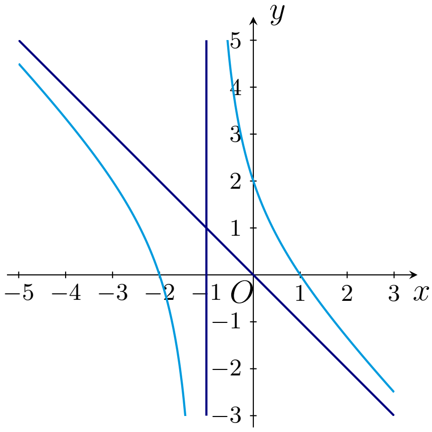
- Chiều biến thiên: Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

- Cực trị: Hàm số không có cực trị.

3 Đồ thị:

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0; 2)$ và giao với trục Ox tại $(-2; 0)$ và $(1; 0)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I\,(-1; 1)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.



V. VẬN DỤNG ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TIỄN

Ví dụ 4 ★☆☆☆☆

Xét một vật thật đặt trước thấu kính hội tụ có tiêu cự $f > 0$. Gọi d là khoảng cách từ vật đến thấu kính $(d > 0), d'$ là khoảng cách từ thấu kính đến ảnh (ảnh thật thì $d' > 0$, ảnh ảo thì $d' < 0$). Ta có công thức:

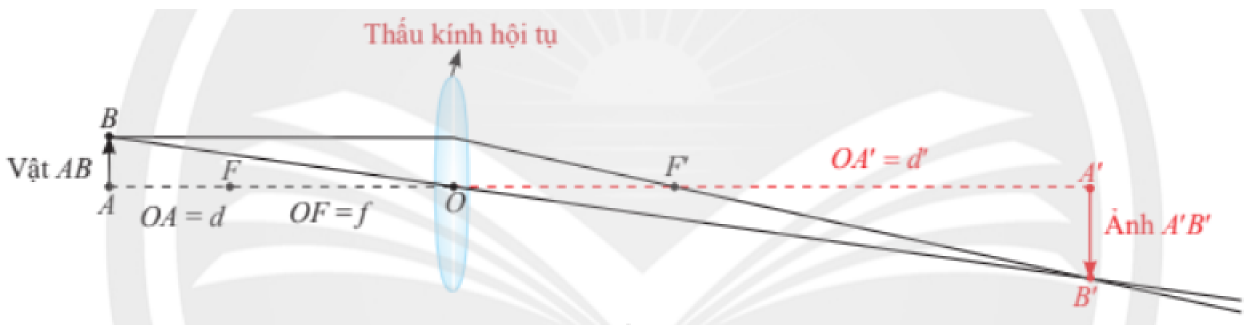
$$d = \frac{1}{d} + \frac{1}{d'} \text{ hay } d' = \frac{df}{d-f}.$$

Xét trường hợp $f = 3$, đặt $x = d, y = d'$. Ta có hàm số $y = \dfrac{3x}{x-3}$ và $x \neq 3$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số trên.

b) Dựa vào đồ thị hàm số trên, hãy cho biết vị trí của vật để ảnh của vật là: ảnh thật, ảnh ảo.

c) Khi vật tiến gần đến tiêu điểm thì ảnh thay đổi như thế nào?



Lời giải. a) Vì $d > 0$ nên với $x = d$ thì $x > 0$.

1. Tập xác định: $D = (0; 3) \cup (3; +\infty)$.

2 Sự biến thiên:

◇ Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \dfrac{-9}{(x-3)^2}$. Vì $y' < 0$ với mọi $x \in D$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(0;3)$ và $(3;+\infty)$.

◇ Tiệm cận:

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x}{x-3} = 3$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{x-3} = 3$. Suy ra đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

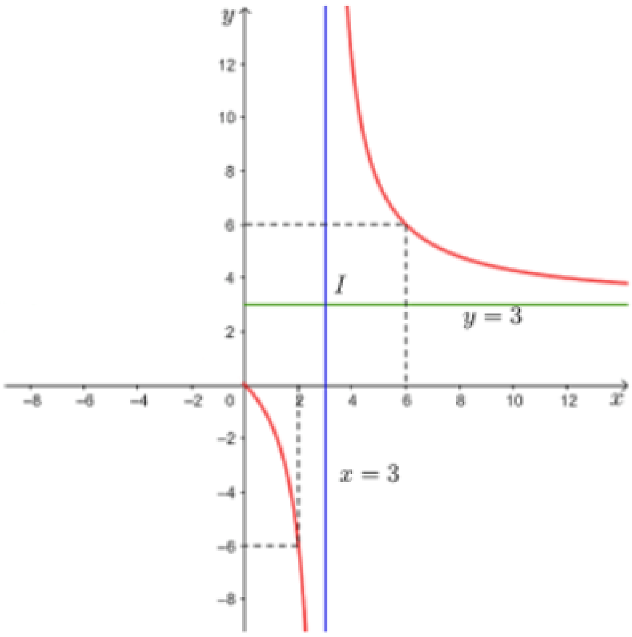
Ta có $\lim\limits_{x\to3^-} y = \lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{3x}{x-3} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to3^+} y = \lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{3x}{x-3} = +\infty$. Suy ra đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

◇ Bảng biến thiên:

x	0		3		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	0 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3

3 Đồ thị:

Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $(0;0)$, giao với trục Oy tại điểm $(0;0)$.Đồ thị của hàm số được biểu diễn trên dưới.



Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I\,(3;3)$.

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = 3$ và $y = 3$.

b) • Để vật là ảnh thật thì $d' > 0$, tức là $y > 0$.

Quan sát đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x}{x-3}$ ta thấy trên khoảng $(3; +\infty)$ đồ thị hàm số nằm phía trên trục Ox nên $y > 0$. Vậy với $x > 3$, tức $d > 3$ hay khoảng cách từ vật đến thấy kính lớn hơn 3 thì ảnh của vật là ảnh thật.

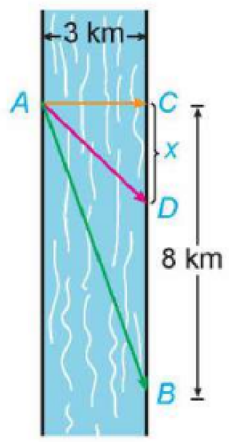
• Để vật là ảnh ảo thì $d' < 0$, tức là $y < 0$.

Quan sát đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x}{x-3}$ ta thấy trên khoảng $(0; 3)$ đồ thị hàm số nằm phía dưới trục Ox nên $y < 0$. Vậy với $0 < x < 3$, tức $0 < d < 3$ hay khoảng cách từ vật đến thấy kính lớn hơn 0 và nhỏ hơn 3 thì ảnh của vật là ảnh ảo.

c) Khi vật tiến gần đến tiêu điểm, tức vị trí A tiến gần đến vị trí F, thì khoảng cách AF dần tiến tới 0, hay $d - f \to 0$, suy ra $d \to f$, tức là $x \to 3$.

Ví dụ 5

Anh An chèo thuyền từ điểm A trên bờ một con sông thẳng rộng 3 km và muốn đến điểm B ở bờ đối diện cách 8 km về phía hạ lưu càng nhanh càng tốt (hình bên). Anh An có thể chèo thuyền trực tiếp qua sông đến điểm C rồi chạy bộ đến B, hoặc anh có thể chèo thuyền thẳng đến B, hoặc anh cũng có thể chèo thuyền đến một điểm D nào đó giữa C và B rồi chạy bộ đến B. Nếu vận tốc chèo thuyền là 6 km/h và vận tốc chạy bộ là 8 km/h thì anh An phải chèo thuyền sang bờ ở điểm nào để đến được B càng sớm càng tốt? (Giả sử rằng vận tốc của nước là không đáng kể so với vận tốc chèo thuyền của anh An).



Hướng dẫn giải. Đặt $CD = x$ với $0 \le x \le 8$. Khi đó, $AD = \sqrt{9 + x^2}$.

Thời gian đi hết quãng đường AD là: $\dfrac{\sqrt{9+x^2}}{6}$ (h).

Độ dài quãng đường BD là $8 - x$ (km). Thời gian đi hết quãng đường BD là: $\dfrac{8-x}{8}$ (h).

Thời gian người đó đi đến B bằng cách chèo thuyền đến một điểm D nào đó giữa C và B rồi chạy bộ đến B là

$$\frac{\sqrt{9+x^2}}{6} + \frac{8-x}{8} \text{ (h)}.$$

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y=\frac{\sqrt{9+x^2}}{6}+\frac{8-x}{8}\quad (0\le x\le 8).$$

Ta có:

$$y'=\frac{x}{6\sqrt{9+x^2}}-\frac{1}{8};\, y'=0\Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{9+x^2}}=\frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow 8x=6\sqrt{9+x^2}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0\\ 64x^2=36(9+x^2)\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0\\ 28x^2=324\end{cases}\Rightarrow x=\frac{9\sqrt{7}}{7}$$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{9\sqrt{7}}{7}$		8
y'		$-$	0	$+$	
y	$\frac{3}{2}$	↘	$1+\frac{\sqrt{7}}{8}$	↗	$\frac{\sqrt{73}}{6}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy anh An phải chèo thuyền đến điểm D cách C một đoạn $\frac{9\sqrt{7}}{7}$ (km) thì sẽ đến B sớm nhất.

Ví dụ 6 ★☆☆☆☆

Người ta muốn chế tạo một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có thể tích $500\,\text{cm}^3$ với yêu cầu dùng ít vật liệu nhất. Chiều cao hộp phải là $2\,\text{cm}$, các kích thước khác là x, y với $x>0$, $y>0$.

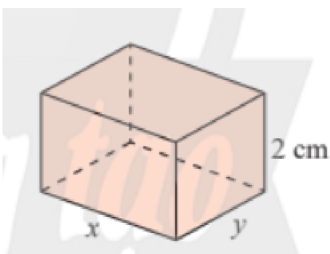
a) Hãy biểu thị y theo x.

b) Chứng tỏ rằng diện tích toàn phần của chiếc hộp là:

$$S(x)=500+4x+\frac{1000}{x}.$$

c) Lập bảng biến thiên của hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

d) Kích thước của hộp là bao nhiêu thì dùng ít vật liệu nhất? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)



Hướng dẫn giải.

a) Ta có $V = 500 = x.y.2 \Rightarrow y = \dfrac{250}{x}$.

b) Diện tích xung quanh $S_{xq} = 2(x+y).2 = 4(x+y) = 4\left(x + \dfrac{250}{x}\right) = 4x + \dfrac{1000}{x}$.

Diện tích đáy chiếc hộp $S_{\text{đáy}} = 2xy = 2x.\dfrac{250}{x} = 500$.

Diện tích toàn phần của chiếc hộp là

$$S(x) = S_{\text{xq}} + S_{\text{đáy}} = 500 + 4x + \frac{1000}{x}.$$

c) Ta có $S'(x) = 4 - \dfrac{1000}{x^2}$; $S'(x) = 0 \iff 4 - \dfrac{1000}{x^2} = 0 \iff x = 5\sqrt{10}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$5\sqrt{10}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$500 + 40\sqrt{10}$	$\nearrow$	$+\infty$

d) Dựa vào bảng biến thiên để $S(x)$ nhỏ nhất thì $x = 5\sqrt{10} \approx 15,8 \Rightarrow y = \dfrac{250}{15,8} \approx 15,8$.

Vậy hộp có kích thước $x \approx 15,8, y \approx 15,8$ dùng ít vật liệu nhất.

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm

Câu 1. Bảng biến thiên bên dưới là của hàm số nào sau đây ?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Ⓐ $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

Ⓑ $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

Ⓒ $y = x^3 + 3x^2 - 1$.

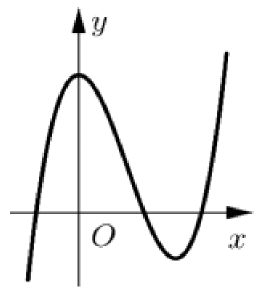
Ⓓ $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.

Câu 2. Bảng biến thiên bên dưới là của hàm số nào sau đây ?

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

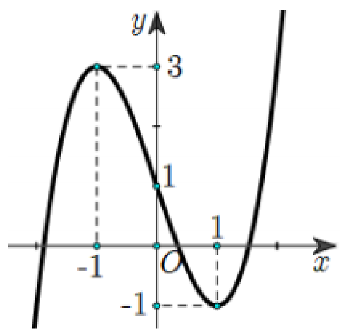
Ⓐ $y = x^3 - 3x^2 - 1$.
Ⓑ $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.
Ⓒ $y = x^3 + 3x^2 + 1$.
Ⓓ $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.

Câu 3. Đồ thị hình bên là của hàm số nào sau đây?



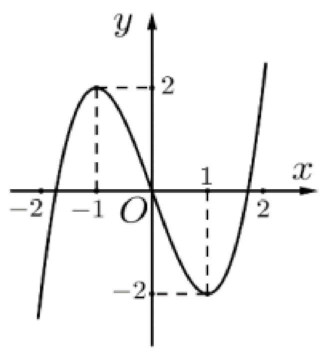
Ⓐ $y = x^3 - 3x^2 + 3$.
Ⓑ $y = -x^3 + 3x^2 + 3$.
Ⓒ $y = x^3 - 3x + 3$.
Ⓓ $y = x^3 - 3x^2 - 3$.

Câu 4. Đồ thị hình bên là của hàm số nào sau đây?



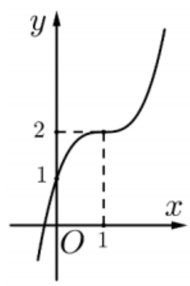
Ⓐ $y = x^3 - 3x + 1$.
Ⓑ $y = x^3 - 3x - 1$.
Ⓒ $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.
Ⓓ $y = x^3 + 3x^2 + 1$.

Câu 5. Đồ thị hình bên là của hàm số nào sau đây?



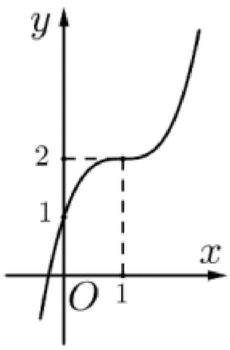
Ⓐ $y = x^3 + 3x$.
Ⓑ $y = x^3 - 3x$.
Ⓒ $y = -x^3 + 2x$.
Ⓓ $y = -x^3 - 2x$.

Câu 6. Đồ thị hình bên là của hàm số nào sau đây?

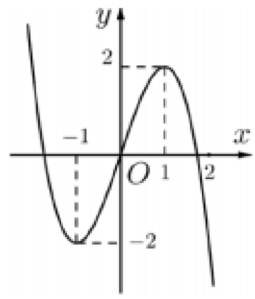


Ⓐ $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.
Ⓑ $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.
Ⓒ $y = x^3 - 3x + 1$.
Ⓓ $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.

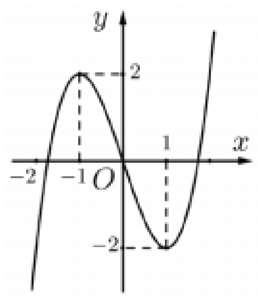
Câu 7. Hàm số $y=-x^3+3x$ có đồ thị là hình nào trong các hình dưới đây ?

Ⓐ 

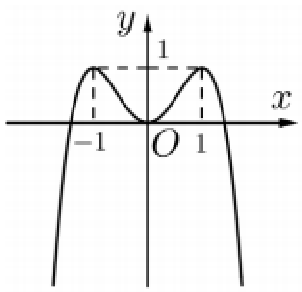
.

Ⓑ 

.

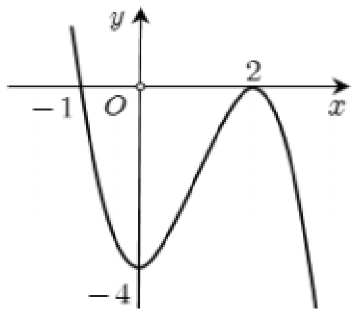
Ⓒ 

.

Ⓓ 

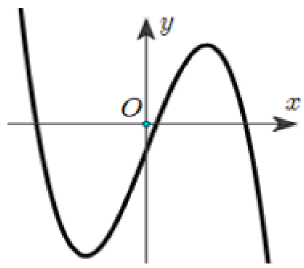
.

Câu 8. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình bên. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tọa độ là



Ⓐ $(-4;0)$. Ⓑ $(-1;0)$. Ⓒ $(0;-4)$. Ⓓ $(0;2)$.

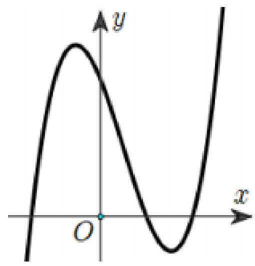
Câu 9. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d, a,d\in\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào đúng?



Ⓐ $a>0, d>0$. Ⓑ $a<0, d>0$.

Ⓒ $a>0, d<0$. Ⓓ $a<0, d<0$.

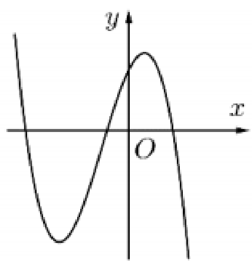
Câu 10. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào đúng?



Ⓐ $a>0, b<0, c<0, d>0$. Ⓑ $a>0, b>0, c>0, d>0$.

Ⓒ $a>0, b<0, c>0, d<0$. Ⓓ $a>0, b>0, c<0, d>0$.

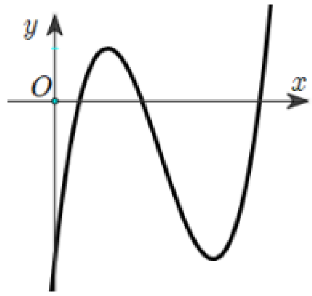
Câu 11. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào đúng?



Ⓐ $a<0, b<0, c>0, d>0$. Ⓑ $a<0, b>0, c>0, d>0$.

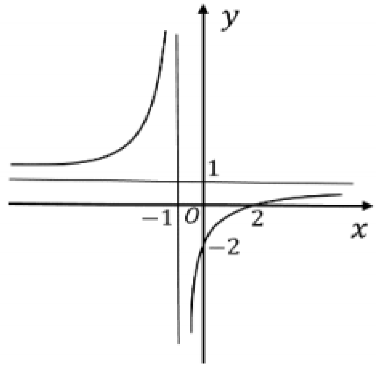
Ⓒ $a<0, b>0, c<0, d<0$. Ⓓ $a<0, b<0, c<0, d<0$.

Câu 12. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Trong các hệ số a, b, c, d có bao nhiêu số dương?



Ⓐ 1 . Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 0.

Câu 13. Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và trục hoành là



Ⓐ $(0; -2)$. Ⓑ $(2; 0)$. Ⓒ $(-2; 0)$. Ⓓ $(0; 2)$.

Câu 14. Bảng biến thiên bên dưới là của hàm số nào sau đây ?

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

Ⓐ $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. Ⓑ $y = \dfrac{x+2}{1+x}$.

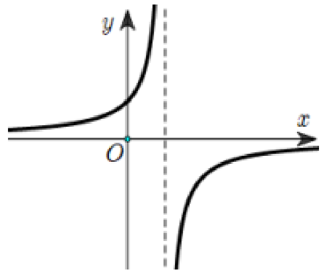
Ⓒ $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$. Ⓓ $y = \dfrac{x-1}{2x+1}$.

Câu 15. Bảng biến thiên bên dưới là của hàm số nào sau đây ?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

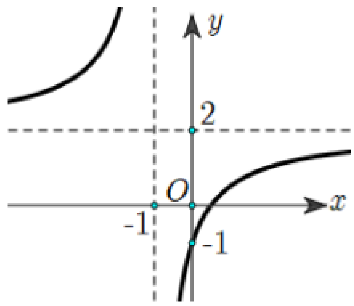
Ⓐ $y = \dfrac{2-x}{x+1}$. Ⓑ $y = \dfrac{x+2}{x-1}$. Ⓒ $y = \dfrac{x+2}{x+1}$. Ⓓ $y = \dfrac{x-3}{x-1}$.

Câu 16. Biết đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{a}{x-1}$, a là số thực cho trước và $a \neq 0$ có đồ thị như hình bên dưới. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



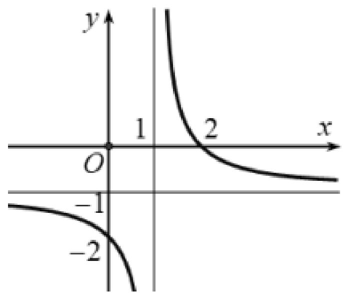
Ⓐ $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Ⓑ $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Ⓒ $f'(x) > 0, \forall x \neq 1$.
Ⓓ $f'(x) < 0, \forall x \neq 1$.

Câu 17. Đồ thị hình bên là của hàm số nào sau đây?



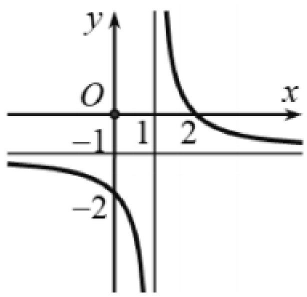
Ⓐ $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.
Ⓑ $y = \dfrac{1-2x}{x+1}$.
Ⓒ $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.
Ⓓ $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

Câu 18. Cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax-b}{x-1}$ như hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây đúng?



Ⓐ $b < 0 < a$.
Ⓑ $0 < b < a$.
Ⓒ $b < a < 0$.
Ⓓ $0 < a < b$.

Câu 19. Cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$ như hình vẽ. Tính giá trị biểu thức $T = a - 3b + 2c$.



Ⓐ 12 .
Ⓑ -7.
Ⓒ 10.
Ⓓ -9 .

Câu 20. Bảng biến thiên bên dưới là của hàm số nào sau đây?

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

Ⓐ $y = \dfrac{x^2+4x-2}{x-1}$.
Ⓑ $y = \dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$.
Ⓒ $y = \dfrac{x^2+2x-2}{x+1}$.
Ⓓ $y = \dfrac{x^2+2}{x-1}$.

Câu 21. Bảng biến thiên bên dưới là của hàm số nào sau đây?

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

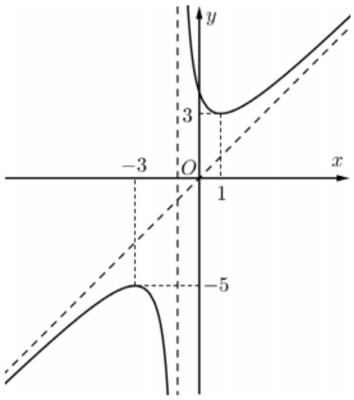
Ⓐ $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Ⓑ $y = \dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$.

Ⓒ $y = \dfrac{3x^2-4x}{x-1}$.

Ⓓ $y = \dfrac{-x^2}{x-1}$.

Câu 22. Đồ thị hình bên là của hàm số nào sau đây?



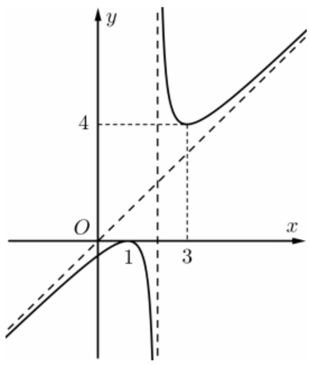
Ⓐ $y = \dfrac{2x^2+3x+1}{x+1}$.

Ⓑ $y = \dfrac{x^2+x+4}{x+1}$.

Ⓒ $y = \dfrac{-x^2-3x+10}{x+1}$.

Ⓓ $y = \dfrac{3x^2+5x-2}{x+1}$.

Câu 23. Đồ thị hình bên là của hàm số nào sau đây?



Ⓐ $y = \dfrac{-x^2-2x+1}{x-2}$.

Ⓑ $y = \dfrac{2x^2+6x-8}{x-2}$.

Ⓒ $y = \dfrac{x^2-2x+1}{x-2}$.

Ⓓ $y = \dfrac{-2x^2+6x-8}{x-2}$.

2 Tự luận

Bài 1. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau

a) $y = x^3 + x - 2$.

b) $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

c) $y = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x + 1$.

Bài 2. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau

a) $y = \dfrac{3x+5}{x+2}$.

b) $y = \dfrac{x-3}{1-x}$.

c) $y = \dfrac{-2x}{x+1}$.

d) $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

e) $y = \dfrac{-x^2+2x-4}{x-2}$.

f) $y = \dfrac{2x^2+3x-5}{x+2}$.

Bài 3. Một mẫu giấy in hình chữ nhật được thiết kế với vùng in có diện tích 300cm^2, lề trái và lề phải là 2 cm, lề trên và lề dưới là 3 cm. Gọi x (cm) là chiều rộng của tờ giấy.

a) Tính diện tích của tờ giấy theo x.

b) Kí hiệu diện tích tờ giấy là $S(x)$. Vẽ bảng biến thiên của hàm số $y = S(x)$.

c) Tìm kích thước của tờ giấy sao cho nguyên liệu giấy được sử dụng là ít nhất.

Bài 4. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{-x+3}$. Chứng tỏ rằng đường thẳng $y = -x$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt.

Bài 5. Cho hàm số $y = \dfrac{(m-1)x-2}{m-2-x}$ (m là tham số). Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có một nhánh nằm hoàn toàn trong góc phần tư thứ nhất của hệ trục Oxy.

Bài 6. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+2x-m}{x-1}$ (m là tham số).

a) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

b) Chứng tỏ rằng khi $m = 2$, hàm số có hai điểm cực trị. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này.

Bài 7. Giả sử chi phí để sản xuất x sản phẩm của một nhà máy được cho bởi $C(x) = 0,2x^2 + 10x + 5$ (triệu đồng). Khi đó, chi phí trung bình để sản xuất một đơn vị sản phẩm là $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

a) Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = f(x)$.

b) Số lượng sản phẩm cần sản xuất là bao nhiêu để chi phí trung bình là thấp nhất?

Bài 8. Một quần thể cá được nuôi trong một hồ nhân tạo lúc ban đầu có 80 000 con. Sau t năm, số lượng quần thể cá nói trên được xác định bởi

$$N(t) = \frac{20(4+3t)}{1+0,05t} \text{ (nghìn con)}$$

a) Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = N(t)$.

b) Số lượng tối đa có thể có của quần thể cá là bao nhiêu?

Chuyên đề 5

ÔN TẬP CHƯƠNG 1

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-\infty; 1)$. Ⓑ $(-1; 1)$. Ⓒ $(-2; 2)$. Ⓓ $(1; +\infty)$.

Câu 2. Tích của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng

Ⓐ $\dfrac{65}{3}$. Ⓑ $\dfrac{52}{3}$. Ⓒ 20 . Ⓓ 6 .

Câu 3. Phương trình tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x+2}{x+1}$ là

Ⓐ $x = -1$. Ⓑ $x = 3$. Ⓒ $y = 3$. Ⓓ $y = 2$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho là

Ⓐ 0 . Ⓑ 3 . Ⓒ -4 . Ⓓ 2 .

Câu 5. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+2x-3}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình là

Ⓐ $y = x + 4$. Ⓑ $y = x + 1$. Ⓒ $y = x - 2$. Ⓓ $y = x - 4$.

Câu 6. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^2 - 8\ln x$ trên đoạn $[1; e]$ là

Ⓐ 1 . Ⓑ 10 . Ⓒ $4 - 8\ln 2$. Ⓓ $e^2 - 8$.

Câu 7. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = x - 1 + \dfrac{4}{x+2}$ có tọa độ là

Ⓐ $(-2; -3)$. Ⓑ $(2; -3)$. Ⓒ $(-2; 3)$. Ⓓ $(2; 3)$.

Câu 8. Giả sử dân số của một thành phố A sau t năm kể từ năm 2024 được mô tả bởi hàm số $N(t) = \dfrac{36t+5}{2t+3}$ $(t \geq 0)$ trong đó $N(t)$ được tính bằng triệu người. Số dân thành phố A không vượt quá bao nhiêu triệu người?

Ⓐ 289 m/s . Ⓑ 487 m/s . Ⓒ 111 m/s . Ⓓ 105 m/s .

Câu 9. Một vật chuyển động thẳng với phương trình chuyển động là $s = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$ với t tính bằng giây và s tính bằng mét. Hỏi trong khoảng thời gian 8 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Ⓐ 289 m/s . Ⓑ 487 m/s . Ⓒ 111 m/s . Ⓓ 105 m/s .

Câu 10. Biết đường thẳng $y = 2x - 3$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+3}{x+3}$ tại hai điểm A và B. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

Ⓐ $I\left(-\dfrac{1}{4}; -\dfrac{11}{4}\right)$. Ⓑ $I\left(-\dfrac{1}{4}; -\dfrac{13}{4}\right)$.

Ⓒ $I\left(-\dfrac{1}{8}; -\dfrac{13}{4}\right)$. Ⓓ $I\left(-\dfrac{1}{4}; -\dfrac{7}{2}\right)$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) < 0, \forall x \in (-1;3)$ và $f'(x) > 0, \forall x \in (3;5)$. Phát biểu nào dưới đây đúng?

Ⓐ Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-1;3)$ và $(3;5)$.

Ⓑ Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3;5)$ và đồng biến trên khoảng và $(-1;3)$.

Ⓒ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1;3)$ và $(3;5)$.

Ⓓ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;5)$ và nghịch biến trên khoảng và $(-1;3)$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

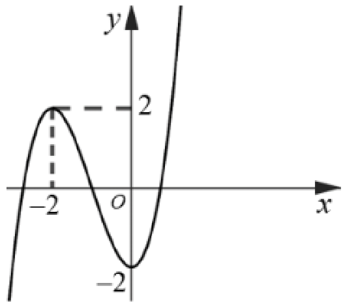
Ⓐ $(-\infty; -2)$. Ⓑ $(-2; +\infty)$. Ⓒ $(-2; 0)$. Ⓓ $(-\infty; 1)$.

Câu 13. Đồ thị hàm số nào dưới đây có đúng ba đường tiệm cận?

Ⓐ $y = \dfrac{1}{4 - x^2}$. Ⓑ $y = \dfrac{x}{x^2 - x + 9}$.

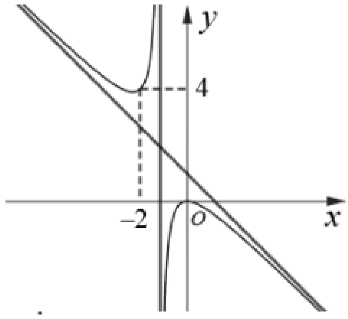
Ⓒ $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{5x - 1}$. Ⓓ $y = \dfrac{1 - 2x}{1 + x}$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



Ⓐ $(-\infty; -2)$. Ⓑ $(-2; 0)$. Ⓒ $(-2; +\infty)$. Ⓓ $(-\infty; 2)$.

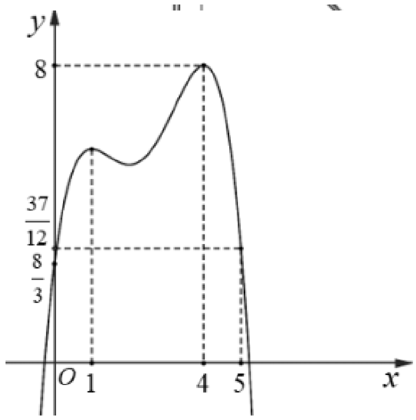
Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Phát biểu nào đúng?



Ⓐ Tọa độ cực đại là $(-2; 4)$. Ⓑ Tọa độ cực tiểu là $(-2; 0)$.

Ⓒ Tọa độ cực đại là $(-2; 0)$. Ⓓ Tọa độ cực tiểu là $(-2; 4)$.

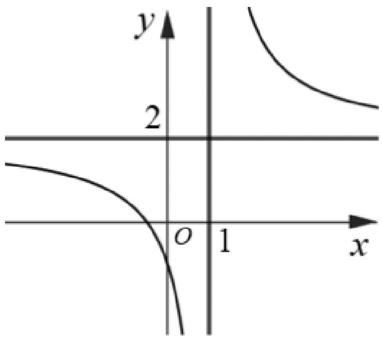
Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$. Khẳng định nào sau đây đúng?



Ⓐ $3m + M = 16$. Ⓑ $8m + 3M = 16$.

Ⓒ $12m - 3M = 13$. Ⓓ $12m - 4M = 5$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Phát biểu nào dưới đây là đúng?



Ⓐ Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 2$, tiệm cận ngang $y = 2$.

Ⓑ Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 2$, tiệm cận ngang $y = 1$.

Ⓒ Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 2$, tiệm cận ngang $y = 0$.

Ⓓ Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 0$, tiệm cận ngang $y = 1$.

Câu 18. Hàm số nào dưới đây không có cực trị?

Ⓐ $y = x^2 - 3x + 2$.
Ⓑ $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.
Ⓒ $y = x^4$.
Ⓓ $y = -x^3 + x$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số .
Ⓑ Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số .
Ⓒ Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số .
Ⓓ Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số .

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x+2)^4$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

Ⓐ 1 .
Ⓑ 0 .
Ⓒ 2 .
Ⓓ 3 .

Câu 21. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+m}{x+2023}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

Ⓐ 2021 .
Ⓑ 2024 .
Ⓒ 2023 .
Ⓓ 2022 .

Câu 22. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$ khi

Ⓐ $m = -1$.
Ⓑ $m = -3$.
Ⓒ $m \in \{-3; -1\}$.
Ⓓ $m \in \varnothing$.

Câu 23. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{2x+1}{1-x}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng

Ⓐ -5 .
Ⓑ -2 .
Ⓒ 0 .
Ⓓ 1 .

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số là:

Ⓐ 3 .
Ⓑ 2 .
Ⓒ 1 .
Ⓓ 0 .

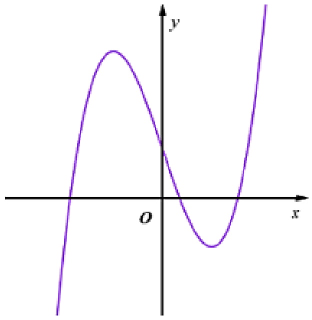
Câu 25. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x - \sin 2x$ trên đoạn $[0;\pi]$ lần lượt là:

Ⓐ $M = \pi, m = \dfrac{\pi}{3} - \sqrt{3}$.
Ⓑ $M = \pi, m = 0$.
Ⓒ $M = \pi, m = \dfrac{\pi}{6} - 1$.
Ⓓ $M = \pi, m = \dfrac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$.

Câu 26. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+1}{x^2+2x-3}$. Tổng số các đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho là

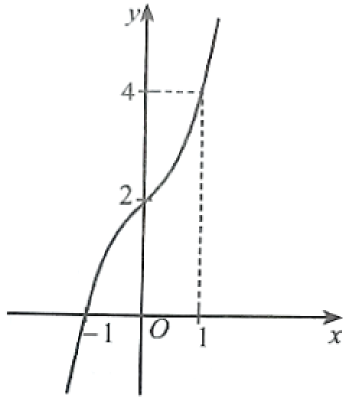
Ⓐ 1 .
Ⓑ 2 .
Ⓒ 3 .
Ⓓ 4 .

Câu 27. Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng đường cong như hình vẽ



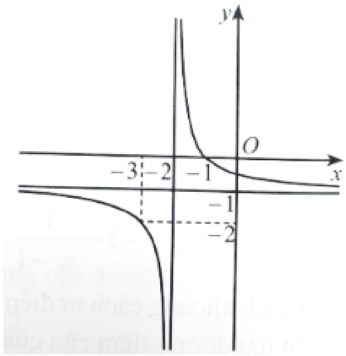
Ⓐ $y = -x^3 + 3x + 1$.
Ⓑ $y = \dfrac{x-1}{x-2}$.
Ⓒ $y = x^3 - 3x + 1$.
Ⓓ $y = \dfrac{x^2+3}{x+2}$.

Câu 28. Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng đường cong như hình vẽ



Ⓐ $y = 2x^3 + 2$.
Ⓑ $y = x^3 - x^2 + 2$.
Ⓒ $y = -x^3 + 3x + 2$.
Ⓓ $y = x^3 + x + 2$.

Câu 29. Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng đường cong như hình vẽ

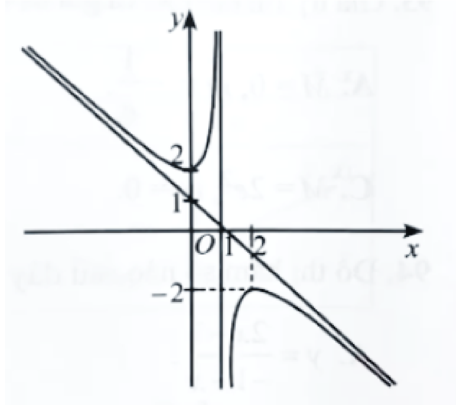


Ⓐ $y = \dfrac{-2x+1}{x+1}$.
Ⓑ $y = \dfrac{x+1}{-x-2}$.
Ⓒ $y = \dfrac{-x+1}{x+2}$.
Ⓓ $y = \dfrac{x-2}{x+2}$.

Câu 30. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$. Khẳng định nào đúng?

Ⓐ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$, giá trị cực tiểu là $y = 2$.
Ⓑ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 5$, giá trị cực tiểu là $y = 6$.
Ⓒ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$, giá trị cực tiểu là $y = 6$.
Ⓓ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 5$, giá trị cực tiểu là $y = 2$.

Câu 31. Đường cong hình bên là độ thị của hàm số:



Ⓐ $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$. Ⓑ $y=\dfrac{-x^2+2x+2}{x+1}$.

Ⓒ $y=\dfrac{-x^2+2x-2}{x-1}$. Ⓓ $y=\dfrac{-x^2+x-2}{x-1}$.

Câu 32. Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{-x+a}{x+1}$ (a là tham số) cắt trục tung tại điểm có tung độ dương. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$. Ⓑ $y'<0,\forall x\neq -1$.

Ⓒ $y'>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Ⓓ $y'>0,\forall x\neq -1$.

Câu 33. Độ giảm huyết áp của một bệnh $G(x)=0,025x^2(30-x)$ trong đó x là số miligam thuốc được tiêm cho bệnh nhân $(0<x<30)$. Để bệnh nhân đó có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm vào là

Ⓐ $x=15$ miligam . Ⓑ $x=20$ miligam .

Ⓒ $x=25$ miligam . Ⓓ $x=30$ miligam .

Câu 34. Bảng biến thiên sau là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Ⓐ $y=\dfrac{x^2+4x-2}{x-1}$. Ⓑ $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$.

Ⓒ $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x+1}$. Ⓓ $y=\dfrac{x^2+2}{x-1}$.

Câu 35. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+10$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng

Ⓐ -1 . Ⓑ 15 . Ⓒ 10 . Ⓓ -12 .

Câu 36. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{-4x+3}{2x+2}$ là

Ⓐ $(-1;-2)$. Ⓑ $(-2;-1)$. Ⓒ $(-1;-1)$. Ⓓ $(-2;-2)$.

Câu 37. Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Ⓑ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Ⓒ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Ⓓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

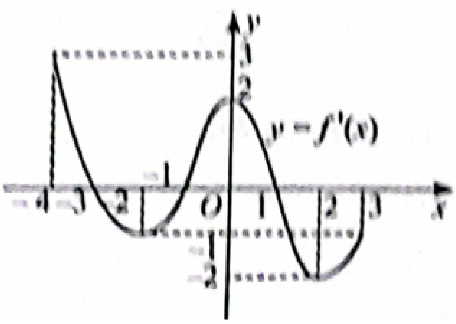
x	$-\infty$		0			1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	-4 || $+\infty$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

Ⓐ 3 . Ⓑ 1 . Ⓒ 2 . Ⓓ 4 .

Câu 39. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ của hàm số $y = f(x)$ được cho hình bên. Điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là

Ⓐ $x = -3$. Ⓑ $x = -1$. Ⓒ $x = 0$. Ⓓ $x = 1$.



Câu 40. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng

Ⓐ 0 . Ⓑ $\sqrt{2}$. Ⓒ $\sqrt{3}$. Ⓓ $\sqrt{30}$.

Câu 41. Mỗi đợt xuất khẩu gạo của tỉnh A thường kéo dài trong 60 ngày. Người ta nhận thấy lượng gạo xuất khẩu tính theo ngày thứ t được xác định bởi công thức:

$$S(t) = \frac{2}{5}t^3 - 63t^2 + 3240t - 3100 \quad (\text{tấn}) \quad (1 \le t \le 60)$$

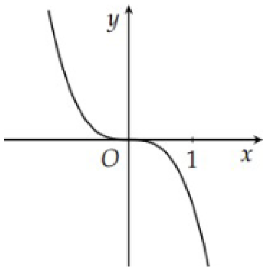
Hỏi trong 60 ngày đó, ngày thứ mấy có lượng gạo xuất khẩu cao nhất?

Ⓐ 60 . Ⓑ 45 . Ⓒ 30 . Ⓓ 25 .

Câu 42. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 27x + 2$ có hai điểm cực trị là A và B. Độ dài đoạn AB bằng

Ⓐ $\sqrt{5}$. Ⓑ $2\sqrt{5}$. Ⓒ $30\sqrt{13}$. Ⓓ $15\sqrt{13}$.

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x)$ có đạo hàm và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, khẳng định nào sau đây đúng?



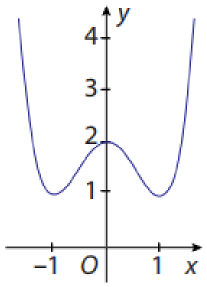
Ⓐ Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Ⓑ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

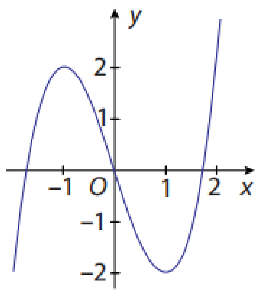
Ⓒ Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Ⓓ Hàm số $y = f(x)$ đồng trên khoảng $(-\infty; 0)$.

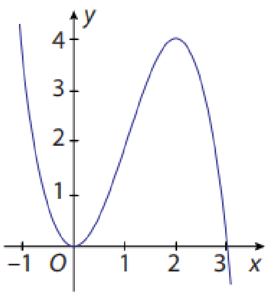
Câu 44. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ là đường cong trong hình nào trong 4 hình được liệt kê dưới đây?

Ⓐ 

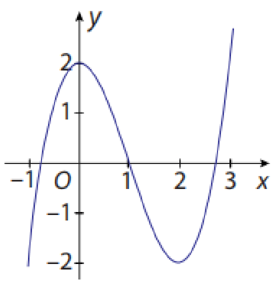
.

Ⓑ 

.

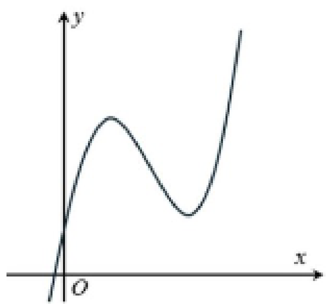
Ⓒ 

.

Ⓓ 

.

Câu 45. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng?



Ⓐ $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$. Ⓑ $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

Ⓒ $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$. Ⓓ $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $f(-6) > f(-5)$.
Ⓑ $f(1) > f(2)$.
Ⓒ $f(5) < f(7)$.
Ⓓ $f(-3) > f(-1)$.

Câu 47. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^2 \ln x$ là

Ⓐ $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
Ⓑ $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
Ⓒ $\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.
Ⓓ $-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình dưới:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Khẳng định nào **sai**?

Ⓐ Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -2 .
Ⓑ Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 5 .
Ⓒ Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang .
Ⓓ Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(1; 0)$.

Câu 49. Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 4x + 2}{x^2 - 6x + 5}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số .
Ⓑ Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng .
Ⓒ Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang .
Ⓓ Đường thẳng $x = 5$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số .

Câu 50. Diện tích tạo bởi hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x + 3}{x + 4}$ và các trục tọa độ bằng

Ⓐ 6 .
Ⓑ 4 .
Ⓒ 8 .
Ⓓ 2 .

2 Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho hàm số $y = 2x^3 - 5x^2 - 24x - 18$.

(A) ___ Hàm số có hai cực trị .

(B) ___ Hàm số đạt cực đại tại $x = -\dfrac{4}{3}$, giá trị cực đại là $\dfrac{10}{27}$.

(C) ___ Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

(D) ___ Hàm số đồng biến trong khoảng $\left(-\dfrac{4}{3}; 3\right)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+m}{x-1}$, m là tham số.

(A) ___ $y' = \dfrac{m-2}{(x-1)^2}$.

(B) ___ Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là $I(1; 2)$.

(C) ___ Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

(D) ___ Có 2 giá trị nguyên âm của m để hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định .

Câu 3. Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 6}{x-2}$.

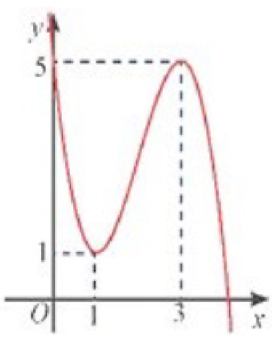
(A) ___ Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$.

(B) ___ Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(2; +\infty)$ bằng 12 .

(C) ___ Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng $y = 2x + 1$.

(D) ___ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 4)$.

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



(A) ___ $f(0) = 5$.

(B) ___ Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.

(C) ___ Giá trị cực đại của hàm số bằng 3 .

(D) ___ Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 3]$ bằng 1 .

Câu 5. Lợi nhuận một xưởng thu được từ việc sản xuất một mặt hàng được cho bởi công thức $P(q) = -q^3 + 24q^2 + 780q - 5000$ (nghìn đồng) trong đó q (kg) là khối lượng sản xuất được. Xưởng chỉ sản xuất được tối đa 50 kg sản phẩm trong một tuần.

(A) ___ Xưởng sản xuất càng nhiều thì lợi nhuận càng cao .

(B) ___ Lợi nhuận của xưởng thấp nhất khi không sản xuất .

(C) ___ Lợi nhuận lớn nhất khi xưởng sản xuất 26 kg sản phẩm trong một tuần .

(D) ___ Sau khi sản xuất được 26 kg sản phẩm, càng sản xuất thêm thì lợi nhuận càng giảm .

Câu 6. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 6x + 11}{x + 2}$.

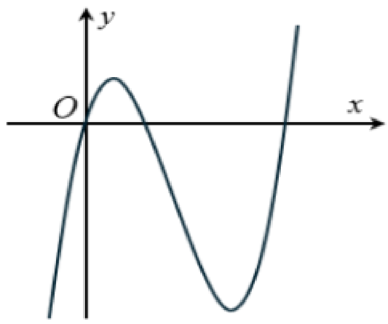
(A) ___ Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x = -2$.

(B) ___ $y' = \dfrac{x^2 + 4x + 1}{(x + 2)^2}$.

(C) ___ Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt .

(D) ___ Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng có phương trình $y = x + 4$.

Câu 7. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$ có đồ thị như hình bên.



(A) ___ Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ .

(B) ___ Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

(C) ___ Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị có hoành độ dương .

(D) ___ Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu là số dương .

Câu 8. Một công ty sản xuất một sản phẩm. Bộ phận tài chính của công ty đưa ra hàm giá bán là $p(x) = 1500 - 2x$, $p(x)$ (nghìn đồng) là giá bán của mỗi sản phẩm mà tại giá bán này có x sản phẩm được bán ra.

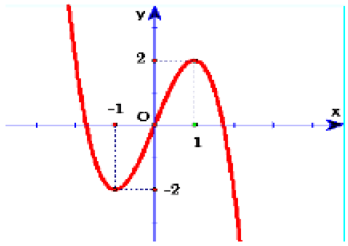
(A) ___ Doanh thu được tính theo công thức: $R(x) = x \cdot p(x)$.

(B) ___ Càng nhiều sản phẩm được tiêu thụ thì giá bán mỗi sản phẩm càng tăng .

(C) ___ Nếu bán với giá 300 nghìn đồng thì có 600 sản phẩm được bán ra .

(D) ___ Doanh thu của công ty đạt giá trị lớn nhất là 281.250.000đ .

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ:



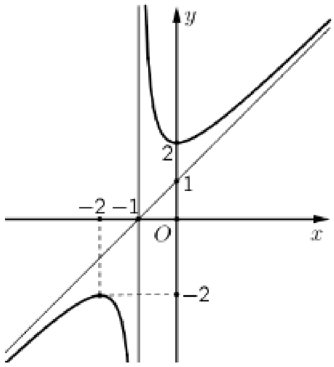
A ___ Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị .

B ___ Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

C ___ Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên nửa khoảng $(1; 2]$ bằng 2 .

D ___ $f(x) = x^3 - 3x$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}(a, m \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ.



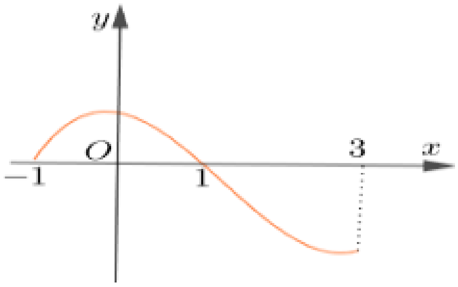
A ___ Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-2; 0)$.

B ___ Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = -1$.

C ___ Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $I(-1; 0)$.

D ___ Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho, diện tích tam giác OAB bằng $\sqrt{5}$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



A ___ Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; 3)$.

B ___ Trên khoảng $(0; 3)$ hàm số có một điểm cực đại .

C ___ Trên khoảng $(-1; 3)$ phương trình $f'(x) = 0$ luôn có ba nghiệm phân biệt .

D ___ Cho $f(-1) + f(0) - 2f(1) = f(3) - f(2)$ thì $\min\limits_{[-1;3]} f(x) = f(3)$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = 2\sin 2x + 2x - 5$.

(A) ___ $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) - f(0) = \dfrac{3\pi}{2}$.

(B) ___ Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = -4\cos 2x + 2$.

(C) ___ Trên đoạn $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt .

(D) ___ Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ là $3\pi - 5$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = \ln x - 2x^2$.

(A) ___ $f(1) = -2, f(e^2) = 2e - e^4$.

(B) ___ Đạo hàm của hàm số trên khoảng $(0; +\infty)$ là $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 4x$.

(C) ___ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ và nghịch biến trên $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

(D) ___ Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $\left[\dfrac{1}{2}; e^2\right]$ bằng $\dfrac{3}{2} - \ln a - ae^b$. Khi đó $ab = 6$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = e^x - 3x + 2$.

(A) ___ $f(0) = 2, f(3) = e^3 - 7$.

(B) ___ Đạo hàm của hàm số là $f'(x) = e^x - 3$.

(C) ___ Phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm là $x = \ln 3$.

(D) ___ Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng $3 - 3\ln 3$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 7x + 9\ln(x + 2) + 3$.

(A) ___ Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 5}{x + 2}$.

(B) ___ Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-1; \dfrac{5}{2}\right)$.

(C) ___ Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 10 .

(D) ___ Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng -1 cùng với tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục Ox, trục Oy tạo thành đa giác có diện tích bằng 44 (đvdt) .

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 1}$.

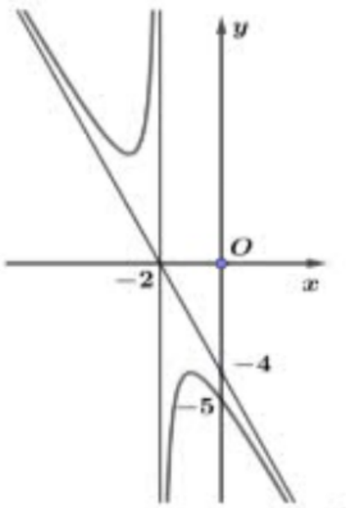
(A) ___ Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = \dfrac{1}{(x + 1)^2}, \forall x \neq -1$.

(B) ___ Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

(C) ___ Tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho là $I(-1; 1)$.

(D) ___ Tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại tiếp điểm có hoành độ bằng -2 có phương trình là $3x - y + 10 = 0$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ biết $y = f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+d} (a, b, c, d \in \mathbb{R})$



A ___ Giá trị $f(0) = -5$.

B ___ Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là $x = -2$.

C ___ Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = 2x - 4$.

D ___ Hàm số đã cho là $y = -2x - 4 - \dfrac{2}{x+2}$.

Câu 18. Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = -\frac{2}{3}t^3 + 10t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó.

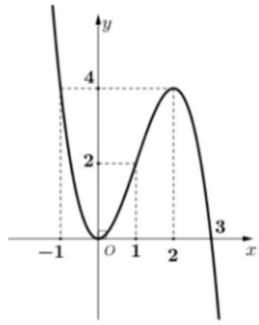
A ___ Vận tốc của vật theo thời gian t là $v(t) = -t^2 + 20t$.

B ___ Quãng đường vật chuyển động được sau khoảng thời gian 3 giây là $72\,m$.

C ___ Trong khoảng thời gian từ $t = 0$ (giây) đến $t = 5$ (giây) thì vận tốc của vật tăng .

D ___ Trong khoảng thời gian 7 giây kể từ khi vật bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng $50\,(\mathrm{m/s})$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$; $f(0) = -1$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



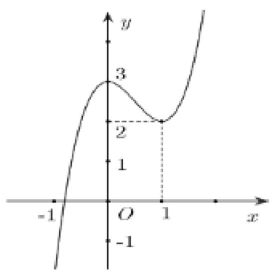
A ___ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không đi qua gốc tọa độ .

B ___ $f'(x) > 0 \iff x \in (0; 3)$.

C ___ $f'(x) = 0 \iff x = 0, x = 3$.

D ___ Phương trình $f(x) + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt .

Câu 20. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



A ___ Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

B ___ Hàm số đặt cực đại tại điểm $x = 3$.

C ___ $f(2) - f(1) < 0$.

D ___ Đồ thị nhận $I\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{2}\right)$ làm tâm đối xứng .

Câu 21. Bác Thắng muốn gò một cái thùng bằng tôn dạng hình hộp chữ nhật **không nắp** có đáy là hình vuông và đựng đầy được 32 lít nước. Gọi độ dài cạnh đáy của thùng là x (dm), chiều cao của thùng là h (dm).

A ___ Thể tích của thùng là $V = x^2h$ (dm^3) .

B ___ Tổng diện tích xung quanh và đáy của thùng là $S = 4xh + x^2$ (dm^2) .

C ___ Đạo hàm của hàm số $S(x) = \frac{128}{x} + x^2$ là $S'(x) = -\frac{128}{x^2} + 2x$.

D ___ Để làm được cái thùng mà tốn ít vật liệu nhất thì độ dài cạnh đáy của thùng là 4 dm .

Câu 22. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B. Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hàng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của nhà máy B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Biết rằng, nếu số lượng đặt hàng là x (tấn) sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng) và chi phí để nhà máy A sản xuất được x (tấn) sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng), gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm.

A ___ Chi phí để nhà máy A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng .

B ___ Số tiền nhà máy A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho nhà máy B là 600 triệu đồng. .

C ___ Lợi nhuận mà nhà máy A thu được khi bán x (tấn) sản phẩm $(0 \leq x \leq 100)$ cho nhà máy B là $H(x) = -0,001x^3 + 15x - 100$.

D ___ Nhà máy A bán cho nhà máy B khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất .

Câu 23. Sau khi tiêm thuốc cho bệnh nhân thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân theo thời gian của bệnh nhân theo thời gian được thống kê theo công thức $C(x) = \dfrac{0,05x}{x^2 + x + 1}$ tính theo $\mathrm{mg/cm}^3$ (thời gian tính theo giờ).

A ___ Nồng độ thuốc trong máu bệnh nhân không bao giờ bằng 0 sau khi tiêm .

B ___ Sau khi tiêm, nồng độ thuốc trong máu bệnh nhân giảm dần theo thời gian .

C ___ Nồng độ thuốc trong máu lớn nhất ở thời điểm 1 giờ sau khi tiêm .

D ___ Có thời điểm nồng độ trong máu của bệnh nhân đạt $0,02\mathrm{mg/cm}^3$.

Câu 24. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \dfrac{26t + 10}{t + 5}$ (trong đó $f(t)$ được tính bằng nghìn người).

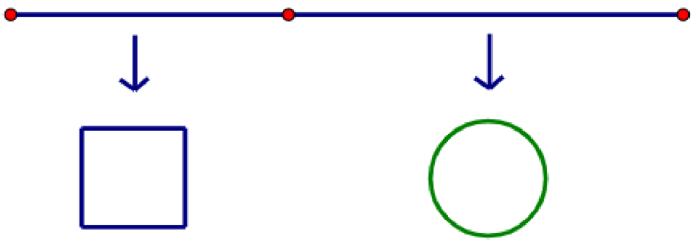
A ___ Coi $f(t)$ là một hàm số xác định trên $[0; +\infty)$. Khi đó $f(t)$ luôn nghịch biến và do vậy số dân của thị trấn giảm theo thời gian .

B ___ Trong giai đoạn từ năm 1970 đến năm 2000, số dân lớn nhất của thị trấn không vượt quá 23 nghìn người .

C ___ Đồ thị hàm số $y = f(t)$ xét trên tập $\mathbb{R} \backslash \{-5\}$ có tâm đối xứng là $I(-5; 26)$.

D ___ Đạo hàm của hàm số $f(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Khi đó năm 1998 có tốc độ tăng dân số lớn nhất .

Câu 25. Một sợi dây kim loại dài 60 cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a, đoạn thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r (hình vẽ).



A ___ Điều kiện $0 < a < 15$.

B ___ Chu vi đường tròn được tạo ra là $2\pi r = 60 - 2a$.

C ___ Bán kính đường tròn được tạo ra là $r = \dfrac{30 - 2a}{\pi}$.

D ___ Tổng diện tích hình vuông và hình tròn nhỏ nhất khi tỉ số $\dfrac{a}{r} = \dfrac{1}{2}$.

Câu 26. Trong một cơ sở sản xuất nước tinh khiết, nhân viên phụ trách sản xuất cho biết, nếu mỗi ngày cơ sở này sản xuất $x\,(\mathrm{m}^3)$ nước tinh khiết thì phải chi trả các khoản sau: 5 triệu đồng chi phí cố định; 0,15 triệu đồng cho mỗi mét khối sản phẩm; $0{,}0005\,x^2$ chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết công suất tối đa mỗi ngày của cơ sở này là $200\ \mathrm{m}^3$. Gọi $C(x)$ là chi phí sản xuất $x\,(\mathrm{m}^3)$ sản phẩm mỗi ngày và $\overline{C}(x)$ là chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm. Khi đó:

A ___ $C(x) = 0{,}0005x^2 + 0{,}15x + 5$.

B ___ Chi phí sản xuất $100\,\mathrm{m}^3$ nước tinh khiết là 20 triệu đồng .

C ___ $\overline{C}(x) = 0{,}0005x + 0{,}15 + \dfrac{5}{x}$.

D ___ Chi phí trung bình giảm xuống khi sản lượng nước tinh khiết trong ngày không vượt quá $100\,\mathrm{m}^3$.

Câu 27. Một trang trại cần xây một bể chứa nước hình trụ bằng bê tông có nắp đậy để chứa 20 mét khối nước tưới tiêu. Chi phí xây dựng chủ yếu phụ thuộc vào diện tích bề mặt bê tông cần sử dụng(diện tích toàn phần của bê tông tính theo bên trong bể). Theo hợp đồng với nhà xây dựng, Chi phí mỗi mét vuông là 1,4 triệu đồng. Gọi r là bán kính đáy và h là chiều cao của bể (đơn vị là mét).

A ___ Thể tích bể là $V = \pi r^2 h = 20\text{m}^3$.

B ___ Diện tích toàn phần của bể theo bán kính là $S_{\text{tp}} = 2\pi r^2 + \dfrac{40}{r}(\text{m}^2)$.

C ___ Để tiết kiệm chi phí nhất bể nên được xây dựng với bán kính đáy $r = \sqrt[3]{\dfrac{20}{\pi}}$.

D ___ Chi phí thấp nhất để xây dựng bể chứa nước nói trên là 57,1 triệu đồng(kết quả làm tròn đến hàng phần mười). .

Câu 28. Người ta ước tính rằng số lượng cá thể của một loài có nguy cơ tuyệt chủng vẫn còn trong tự nhiên t năm sau khi chính sách bảo vệ được thiết lập có thể được mô hình hoá bằng hàm số $N(t) = \dfrac{600}{1 + 3e^{-0{,}02t}}, t \geq 0$.

A ___ Số lượng cá thể của loài đó tại thời điểm khi bắt đầu thiết lập chính sách bảo vệ là 150 con .

B ___ Sau khi chính sách bảo vệ được thiết lập, số lượng cá thể của loài đó lúc đầu tăng nhưng sau đó sẽ giảm dần .

C ___ Cần ít nhất 50 năm kể từ khi chính sách bảo vệ được thiết lập để số lượng cá thể của loài đó sẽ vượt mức 300 con .

D ___ Số lượng cá thể của loài đó không bao giờ vượt quá 600 con .

Câu 29. Huyết áp là áp lực máu cần thiết tác động lên thành động mạch nhằm đưa máu đi nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Nhờ lực co bóp của tim và sức cản của động mạch mà huyết áp được tạo ra. Giả sử, huyết áp của một người thay đổi theo thời gian được cho bởi công thức $p(t) = 120 + 15\cos 150\pi t$, trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thủy ngân) và thời gian t tính theo đơn vị phút

A ___ Tại thời điểm ban đầu, $t = 0$, huyết áp người này là 135 (mmHg) .

B ___ Hàm số $p(t)$ tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{1}{60}$ phút .

C ___ Huyết áp thấp nhất của người này là 120 (mmHg) .

D ___ Trong 1 phút từ thời điểm ban đầu, có 75 lần huyết áp người này ở mức 120 mmHg .

Câu 30. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C).

Phát biểu	Đ	S
(A) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 .		
(B) Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị (C) là $y = -2x + 2$.		
(C) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.		
(D) Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3; 5]$ bằng 5 .		

Câu 31. Một cửa hàng bán đồ thủ công với giá bán là 39000 đồng/sản phẩm. Giá nhập vào của sản phẩm đó là 15000 đồng/sản phẩm. Với giá này cửa hàng ước chừng bán được 120 sản phẩm/ngày. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính cứ giảm 1000 đồng/sản phẩm thì số sản phẩm bán được sẽ tăng thêm là 15 sản phẩm.

(A) ___ Nếu giá bán là 25000 đồng/sản phẩm thì cửa hàng bán được 135 sản phẩm/ngày .

(B) ___ Lợi nhuận tối đa theo ngày của cửa hàng khi chưa giảm giá sản phẩm là 2 880 000 đồng .

(C) ___ Lợi nhuận tối đa theo ngày mà cửa hàng thu được là 3840 (nghìn đồng) .

(D) ___ Gọi x (nghìn đồng) là giá tiền mà cửa hàng dự định bán sản phẩm đó $(15 \le x \le 39)$, khi đó lợi nhuận theo ngày của cửa hàng được xác định bởi hàm số $f(x) = (x - 15)(705 - 15x)$.

Câu 32. Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t + 36$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc chất điểm bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian đó, tính bằng mét (m).

(A) ___ Quãng đường vật đi được sau 4 giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động là 82 (m).

(B) ___ Vận tốc của vật tại giây thứ t là $v(t) = 3t^2 - 6t + 9$.

(C) ___ Gia tốc của vật tại thời điểm 2 giây là 4 (m/s^2) .

(D) ___ Trong khoảng thời gian 10 (s) đầu tiên, vận tốc của vật nhỏ nhất là 6 m/s .

3 Tự luận

Câu 1. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (2m-3)x + \dfrac{2}{3}$, m là tham số.

a) Tìm m để hàm số đã cho có hai cực trị thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 5$.

b) Tìm m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

c) Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

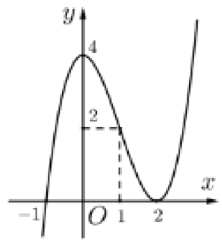
Câu 2. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị $(\mathscr{C})$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(\mathscr{C})$ tại tâm đối xứng của nó.

b) Tìm m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Câu 3. Cho hàm số $y = \dfrac{2-x}{x-m}$ với m là tham số. Tìm các giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-160; 160)$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(21; +\infty)$.

Câu 4. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$ có đồ thị như hình bên. Tính giá trị biểu thức $T = a + 2b + 3c + 4d$.



Câu 5.

a) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 2025 để hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 6mx + m$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$?

b) Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{2mx+1}{m-x}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng $-\dfrac{1}{3}$.

Câu 6. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 7x + m$. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0; 2]$ bằng 1.

Câu 7. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2mx + 2}{x+1}$. Tính tổng các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 + bx + c}{mx}$ có đồ thị (C). Biết (C) đi qua hai điểm $A(-1; 1), B(3; 1)$ và tiệm cận xiên của đồ thị (C) có hệ số góc bằng $\dfrac{1}{3}$. Tính $f(2)$.

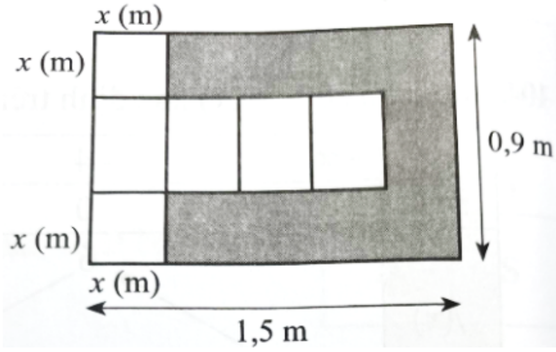
Câu 9. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 5^x + 5^{-x}$ trên đoạn $[0; 1]$ có dạng $m + 2\sqrt{n}$ (m, n là các số nguyên dương). Tính $P = \dfrac{m}{n+3}$.

Câu 10. Biết rằng hàm số $y = x^3 + mx^2 + nx - 5$ đạt cực trị tại $x = 3$. Tính $6m + n$.

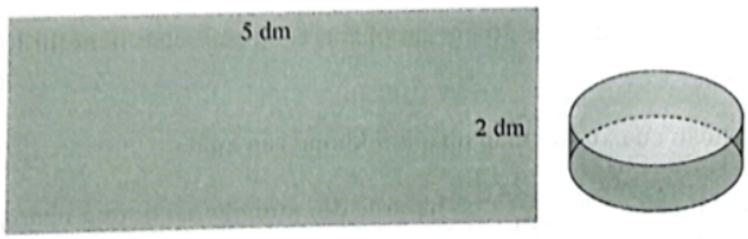
Câu 11. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [1; 20]$, sao cho ứng với mỗi m hàm số $y = \dfrac{-x^2 + 3x - m - 1}{3x - m}$ đồng biến trên khoảng $(2; 3)$?

Câu 12. Người ta muốn làm một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có đáy hình vuông và thể tích là 10 l. Diện tích toàn phần nhỏ nhất của hộp là bao nhiêu?

Câu 13. Từ một miếng bìa có độ dài hai cạnh lần lượt là 0,9 m và 1,5 m như hình bên. Bạn Minh cắt đi phần tô màu xám và gấp lại để được một hình hộp chữ nhật. Gọi V là thể tích hình hộp chữ nhật được tạo thành, V được tính theo x bởi công thức nào? Tìm x để hình hộp tạo thành có thể tích lớn nhất.



Câu 14. Nam dùng một tấm bìa có kích thước 50 cm × 20 cm để làm một chiếc lon hình trụ (không có nắp).



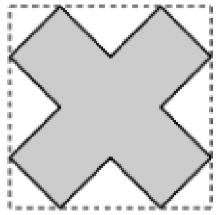
Hỏi cần chọn bán kính đáy hình trụ là bao nhiêu xăngtimét thì lon hình trụ đạt thể tích lớn nhất?

Lưu ý: Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của xăngtimét, bỏ qua phần hao hụt khi cắt và tạo hình, đáy và mặt bên phải là các bìa nguyên vẹn (không ghép nối).

Câu 15. Doanh số bán hệ thống âm thanh nổi mới trong một khoảng thời gian dự kiến sẽ tuân theo đường cong logistic $R = R(x) = \dfrac{5000}{1+5e^{-x}}, x \geq 0$, trong đó thời gian x được tính bằng năm. Hỏi tốc độ bán hàng đạt tối đa vào năm nào?

Câu 16. Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa $(1 \leq x \leq 18)$. Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí $C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$. Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa. Lợi nhuận tối đa mà hộ này thu được là bao nhiêu?

Câu 17. Từ hình vuông có cạnh bằng 8 cm, người ta cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ. Sau đó người ta gập thành hình hộp chữ nhật không nắp. Thể tích lớn nhất của khối hộp bằng bao nhiêu cm^2.



Câu 18. Một bể chứa 2 m^3 nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ không đổi với tốc độ 20 lít/phút. Biết rằng nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là một hàm số $f(t)$, thời gian t tính bằng phút. Biết rằng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ là đường thẳng $y = 10$. Nồng độ muối trong bể sau khi bơm được 1 giờ là bao nhiêu?

Câu 19. Một bể chứa 2 m^3 nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ không đổi với tốc độ 20 lít/phút. Biết rằng nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là một hàm số $f(t)$, thời gian t tính bằng phút. Biết rằng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ là đường thẳng $y = 10$. Nồng độ muối trong bể sau khi bơm được 1 giờ là bao nhiêu?

Câu 20. Người ta muốn làm một cái bồn chứa nước dạng hình hộp chữ nhật không có nắp đậy, đáy thùng có chiều dài gấp ba lần chiều rộng và có thể tích 18 000 lít. Để giảm chi phí, người ta cần phải thiết kế sao cho tổng diện tích các mặt của bồn chứa nước là nhỏ nhất.Tính chi phí thấp nhất (đơn vị tính triệu đồng) để sản xuất ra một cái bồn. Biết rằng giá vật liệu là 400 nghìn đồng/m^2 và giá thiết kế, thi công, hoàn thiện cái bồn là 300 nghìn đồng/m^2.

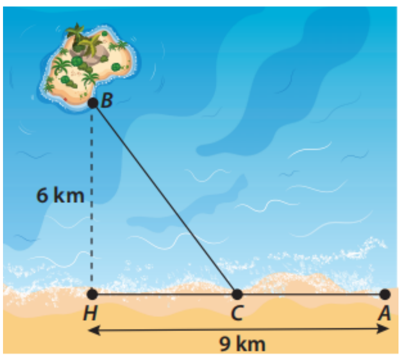
Câu 21. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe hon đa Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 (triệu đồng) và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất?

Câu 22. Một khách sạn có 60 phòng cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi phòng với giá 500 nghìn đồng một ngày thì tất cả các phòng đều có người thuê. Nhưng cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi phòng thêm 50 nghìn đồng/ 1 ngày thì có thêm 2 phòng bị bỏ trống. Hỏi người quản lý khách sạn nên cho thuê mỗi phòng với giá bao nhiêu tiền một ngày (kết quả tính bằng đơn vị triệu đồng) để tổng số tiền thu được của khách sạn trong ngày là lớn nhất?

Câu 23. Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 2025 quả bóng tennis. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy có thể sản xuất 50 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 100 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 200 nghìn đồng một giờ. Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí hoạt động là thấp nhất?

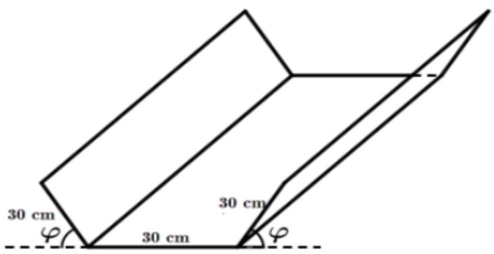
Câu 24. Một nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B, nhà máy A chỉ bán sản phẩm cho nhà máy B và nhà máy B cam kết thu mua hết số sản phẩm nhà máy A sản xuất được. Nhà máy A có khả năng sản xuất tối đa là 200 tấn sản phẩm trong 1 tháng. Nếu bán ra x tấn sản phẩm cho nhà máy B thì giá bán mỗi sản phẩm là $50 - 0,0002x^2$ triệu đồng. Trong một tháng nhà máy A phải chi phí cho nhân công và chi phí khấu hao máy móc một lượng cố định là 150 triệu đồng, ngoài ra khi sản xuất mỗi tấn sản phẩm thì nhà máy phải chi phí thêm cho mua nguyên liệu là 35 triệu đồng. Biết rằng nhà máy A phải nộp 5% doanh thu cho cơ quan thuế. Tính lợi nhuận sau thuế (lợi nhuận sau khi đã trừ tiền thuế) lớn nhất thu được trong 1 tháng của nhà máy A (đơn vị tính là tỉ đồng và kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) .

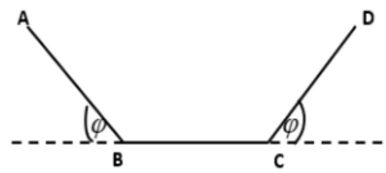
Câu 25. Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ vị trí A trên bờ biển đến vị trí B trên hòn đảo. Khoảng cách từ điểm B đến bờ biển là $BH = 6$ km (hình vẽ). Giá tiền để xây dựng đường ống trên bờ là 50.000 USD mỗi kilomet và giá tiền xây dựng đường ống trên biển là 130.000 USD mỗi kilomet, biết rằng $AH = 9$ km. Xác định vị trí điểm C trên đoạn AH để khi lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ACB thì chi phí công ty bỏ ra là thấp nhất.



Câu 26. Công ty của Bác An định làm một bể chứa nước có dạng hình trụ có nắp đậy bằng thép không gỉ có thể tích là 2π (m^3) để đựng nước. Biết giá mỗi mét vuông thép không gỉ là 500 nghìn đồng. Hỏi chi phí nguyên vật liệu làm mỗi bể nước thấp nhất là bao nhiêu? (kết quả tính bằng đơn vị nghìn đồng và lấy $\pi = 3,14$).

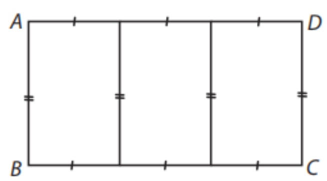
Câu 27. Ông Dũng định làm một máng thoát nước mưa từ một miếng tôn hình chữ nhật có chiều dài 2 m và chiều rộng 90 cm. Ông Dũng chia chiều rộng của miếng tôn thành 3 phần bằng nhau, mỗi phần dài 30 cm, rồi gập hai bên lên một góc $\varphi(0 < \varphi < 90^\circ)$ như hình vẽ dưới đây





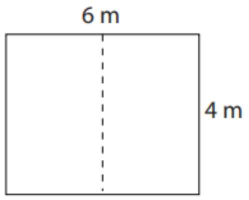
Mặt cắt ngang của máng là hình thang cân $ABCD$ có đáy lớn AD, đáy nhỏ BC và $AB = BC = CD = 30$ cm (minh hoạ hình bên trên). Tìm số đo góc φ (đơn vị: độ) để diện tích mặt cắt ngang của máng nước lớn nhất.

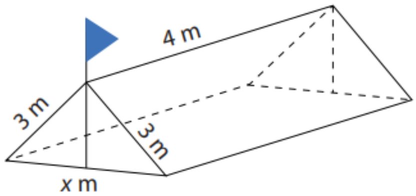
Câu 28. Người ta cần rào một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích là 600 m^2. Trên mảnh đất này, người ta chia làm ba miếng đất hình chữ nhật có diện tích bằng nhau (hình vẽ). Giá tiền để xây dựng hàng rào bên trong và bao bên ngoài là 60.000 đồng mỗi mét, biết rằng chiều dài hình chữ nhật $ABCD$ không vượt quá 60 m. Tìm chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật $ABCD$ sao cho chi phí xây dựng hàng rào là thấp nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Câu 29. Một nhà máy khoán cho hai tổ sản xuất A và tổ sản xuất B mỗi tổ lần lượt hoàn thành xong 64 sản phẩm và 144 sản phẩm trong vòng một tháng. Biết rằng trong một ngày tổng số sản phẩm mà hai tổ phải hoàn thành xong là 20 sản phẩm. Tổng số ngày ít nhất để hai tổ sản xuất hoàn thành hết số sản phẩm được giao là bao nhiêu (biết rằng số sản phẩm phải hoàn thành mỗi ngày là như nhau)?

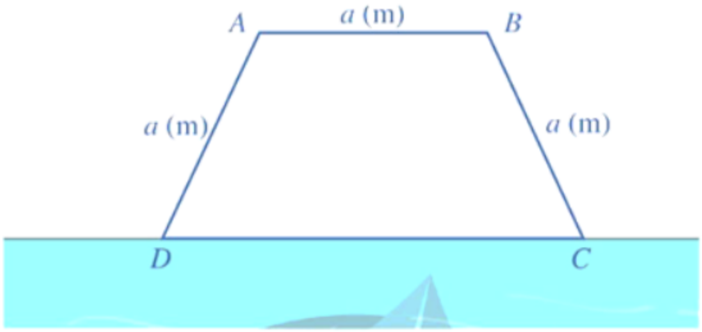
Câu 30. Trong đợt chào mừng kỷ niệm ngày 26 tháng 3, trường X có tổ chức cho các lớp bày các gian hàng tại sân trường. Để có thể che nắng, chứa đồ đạc trong quá trình tham gia hoạt động, một lớp đã nghĩ ra ý tưởng như sau: Dựng trên mặt đất bằng phẳng một chiếc lều từ một tấm bạt hình chữ nhật có chiều rộng là 4m và chiều dài là 6m, bằng cách gấp đôi tấm bạt lại theo đoạn nối trung điểm hai cạnh là chiều dài của tấm bạt, hai mép chiều rộng còn lại của tấm bạt sát đất và cách nhau x (m). Tìm x để khoảng không gian phía trong lều là lớn nhất.



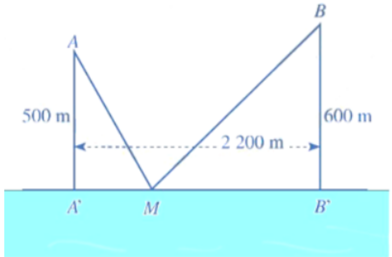


Câu 31. Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (Hình bên). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.

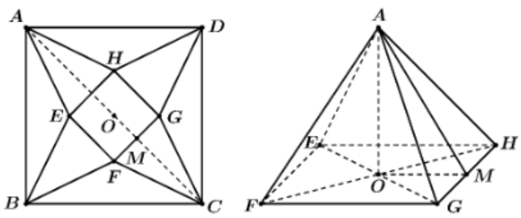
Câu 32. Một bác nông dân có ba tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài a (m) và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình bên dưới (bờ sông là đường thẳng CD không phải rào). Hỏi bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?



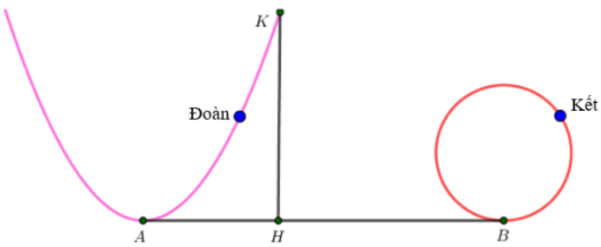
Câu 33. Có hai xã cùng ở một bên bờ sông Lam. Người ta đo được khoảng cách từ trung tâm A, B của hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 500$ m, $BB' = 600$ m và $A'B' = 2200$ m (Hình bên). Các kĩ sư muốn xây một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông Lam cho người dân hai xã. Để tiết kiệm chi phí, các kĩ sư cần phải chọn vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn $A'B'$ sao cho tổng khoảng cách từ hai vị trí A, B đến vị trí M là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó.



Câu 34. Trong một tiết học Toán, giáo viên phát cho 4 tổ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 10 cm. Giáo viên yêu cầu 4 tổ sử dụng tấm bìa này và cắt tấm bìa theo các tam giác cân AEB, BFC, CGD, DHA để sau đó gấp các tam giác AEH, BEF, CFG, DGH sao cho bốn đỉnh A, B, C, D trùng nhau tạo thành khối chóp tứ giác đều (tham khảo hình vẽ bên dưới). Khi đó thể tích lớn nhất của khối chóp tứ giác đều tạo thành bằng là $\frac{a\sqrt{b}}{c}\,(\text{cm}^3)$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P = a + b + c$.

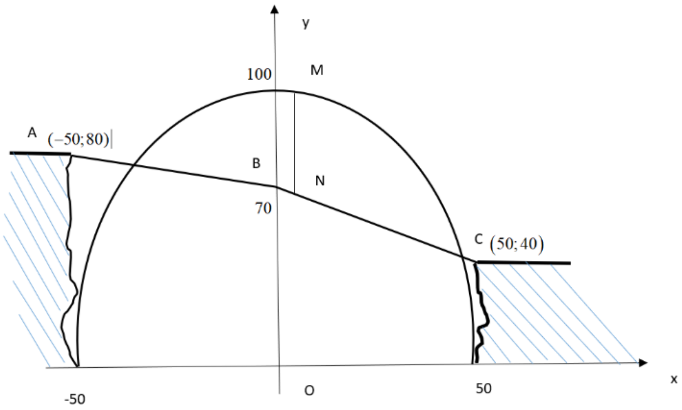


Câu 35. Khi dạo chơi trên một công viên bạn Đoàn di chuyển trên cung đường có dạng hình Parabol, bạn Kết di chuyển trên cung đường có dạng đường tròn (xem hình minh họa). Khoảng cách giữa đỉnh A của Parabol và tiếp điểm B của đường tròn là 16 m, $HK \perp AB$ và $AH = 6$m ,$HK = 9$m.



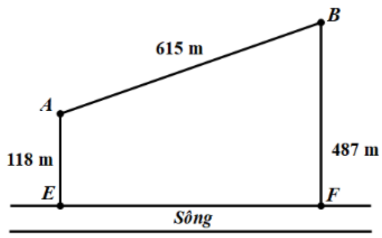
Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai bạn Đoàn và Kết bằng bao nhiêu mét, biết rằng đường tròn có bán kính bằng 3m ? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 36. Một thành phố nằm trên một con sông chảy qua hẻm núi. Hẻm có chiều ngang 100 mét, một bên cao 80 mét và một bên cao 40 mét. Một cây cầu sẽ được xây dựng bắc qua sông và hẻm núi. Sơ đồ thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ dưới đây



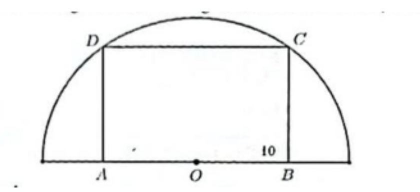
Con đường xuyên qua hẻm núi chia thành hai đoạn thẳng AB và BC như hình vẽ trên. Cột đỡ dọc MN là đoạn nối giữa khung của Parabol và đường xuyên qua hẻm núi. Độ dài lớn nhất của MN là bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần chục).

Câu 37. Cho hai vị trí A, B cách nhau 615 m và cùng nằm về một phía bờ sông, giả sử bờ sông có dạng thẳng; khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118 m và 487 m như hình vẽ sau:



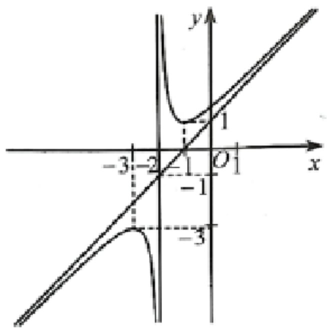
Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B . Quãng đường ngắn nhất (tính theo đơn vị mét) mà người đó có thể đi là?

Câu 38. Cho hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp nửa đường tròn tâm O, bán kính $R = 10$ (cạnh AB của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của đường tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp)

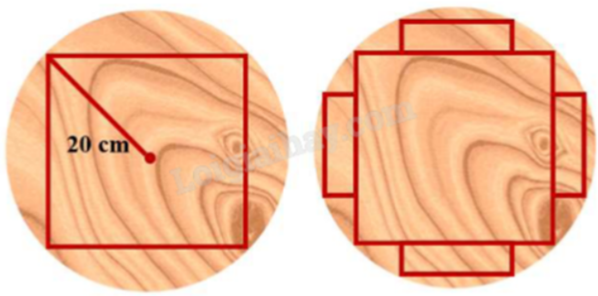


Tính diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$.

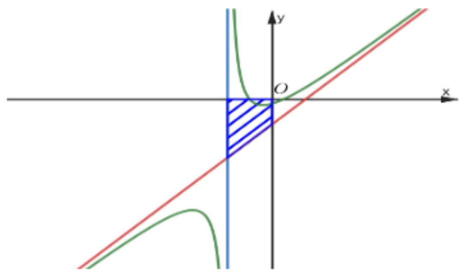
Câu 39. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x + n}$ với $a \neq 0$, có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Tính $S = a + b + c$.



Câu 40. Một thanh dầm hình hộp chữ nhật được cắt từ một khúc gỗ hình trụ có bán kính đáy bằng 20 cm sao cho thanh dầm có diện tích mặt cắt ngang lớn nhất, tức là thanh dầm có mặt cắt ngang là hình vuông. Sau khi cắt thanh dầm đó, người ta lại cắt bốn tấm ván hình hộp chữ nhật từ bốn phần còn lại của khúc gỗ (tham khảo hình vẽ dưới đây). Xác định diện tích mặt cắt ngang tối đa của mỗi tấm ván (theo đơn vị cm^2 và làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



Câu 41. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 4}$ có đồ thị (C). Hình thang tạo bởi các đường tiệm cận đứng, tiệm cận xiên của đồ thị (C) và các trục tọa độ như hình vẽ bên. Tính diện tích hình thang đó.



Câu 42. Một người quản lý ở một trang trại nuôi cá xác định rằng: Sau t tháng kể từ khi thả 300 con cá X (với $0 \leqslant t \leqslant 10$) thì khối lượng trung bình $m(t)$ tính theo kilogram của một con cá X ước tính là $m(t) = 0{,}45\left(0{,}2 + \dfrac{141}{155}t - 0{,}05t^2\right)$. Người này cũng nhận định tỉ lệ giữa số lượng cá X còn sống trong ao so với số lượng cá X thả ban đầu sau t tháng kể từ ngày thả là $p(t) = \dfrac{31}{31 + t}$. Biết rằng sản lượng cá X tại một thời điểm được tính bằng tổng khối lượng của các con cá X đã thả còn sống trong ao lúc đó. Hỏi với những nhận định trên của người quản lý thì dự kiến trong tối đa 10 tháng nuôi, sản lượng cá X lớn nhất có thể đạt được là bao nhiêu (kết quả tính theo đơn vị kilogram)?

Chương 2

VECTƠ VÀ HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Mục lục của chương

Chuyên đề 1

VECTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRONG KHÔNG GIAN

I. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

- Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.
- Trong không gian, các khái niệm có liên quan đến vectơ như giá của vectơ, độ dài của vectơ, sự cùng phương, cùng hướng của hai vectơ, vectơ - không, sự bằng nhau của hai vectơ,... được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng.

LƯU Ý.

☞ Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B.

☞ Nếu không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}, \vec{y}, ..$

☞ Trong không gian, cho điểm O và vectơ $\vec{a}$ khi đó tồn tại duy nhất điểm M để $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.

Ví dụ 1 ★☆☆☆☆

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$.

1. Chỉ ra các vectơ có điểm đầu là S và điểm cuối là các đỉnh của đa giác đáy.
2. Tìm các vectơ có độ dài bằng độ dài của vectơ $\overrightarrow{SA}$.
3. Tìm các vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{CB}$.

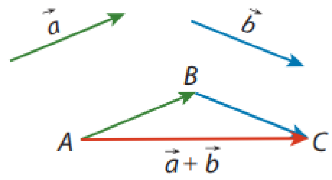
Lời giải.

1. Các vectơ có điểm đầu là S và điểm cuối là các đỉnh của đa giác đáy là $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}$.
2. Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SA = SB = SC = SD$.
   Vậy các vectơ $\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}, \overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CS}, \overrightarrow{DS}$ có độ dài bằng độ dài của vectơ $\overrightarrow{SA}$.
3. Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AD = BC$. Mà $\overrightarrow{CB}$ và $\overrightarrow{AD}$ ngược hướng nhau nên $\overrightarrow{AD}$ là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{CB}$. Hai vectơ $\overrightarrow{CB}$ và $\overrightarrow{BC}$ có độ dài bằng nhau nhưng ngược hướng nên $\overrightarrow{BC}$ vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{CB}$.

II. TỔNG VÀ HIỆU HAI VECTƠ

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Lấy điểm O bất kì và hai điểm A, B sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = b$. Ta gọi $\overrightarrow{OB}$ là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} + \vec{b}$.

Phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là phép cộng vectơ.



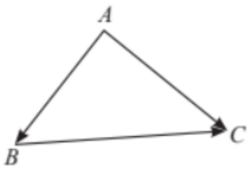
Nhận xét: Phép cộng vectơ trong không gian cũng có các tính chất như phép cộng vectơ trong mặt phẳng.

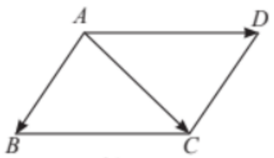
- Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- Tính chất kết hợp $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- Với mọi $\vec{a}$, ta luôn có: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành

Quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành vẫn đúng với các vectơ trong không gian.

- Với ba điểm A, B, C ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

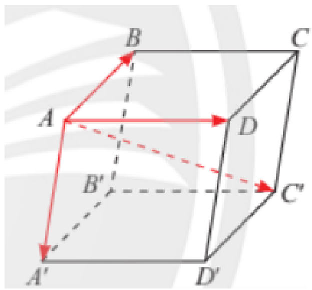




Quy tắc hình hộp

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ta có

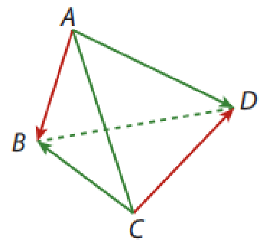
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$$



Ví dụ 2

Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

Lời giải.



Sử dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}.$$

Áp dụng tính chất kết hợp và giao hoán của phép cộng vectơ, ta suy ra:

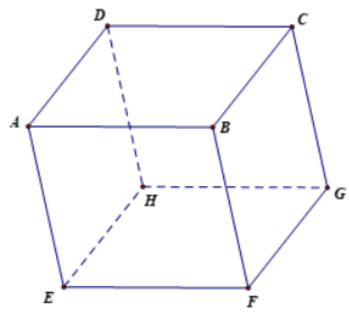
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}\\&=\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD})\\&=\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB})\\&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}.\end{aligned}$$

Ví dụ 3

Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Tìm các vectơ:

1. $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH}$.
2. $\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AB}$.

Hướng dẫn giải.



1. Theo quy tắc hình hộp ta có:

$$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{DF}.$$

2. Vì $DCGH$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{HD}$.

$ABGH$ là hình bình hành $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{HG}$.

Do đó

$$\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{HB}.$$

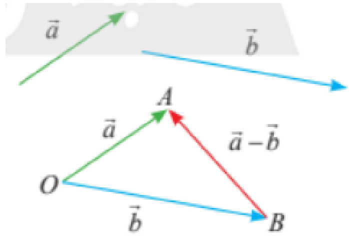
1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Tìm vectơ $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{DD'}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD'}$.

Hiệu của hai vectơ

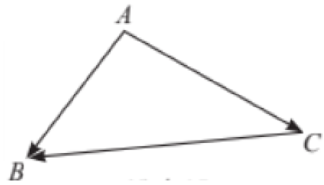
Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Ta gọi $\vec{a} + (-\vec{b})$ là hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$. Phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là phép trừ vectơ.



Quy tắc hiệu

Trong không gian, với ba điểm A, B, C ta có

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}.$$



Ví dụ 4 ★☆☆☆☆

Cho tứ diện $ABCD$ có M và N là trung điểm của AB và CD. Tìm các vectơ:

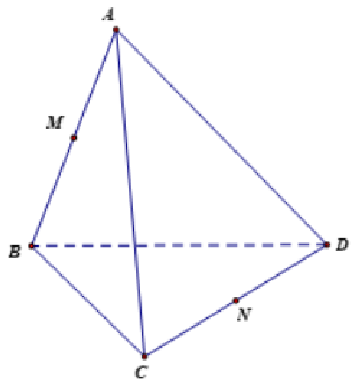
1. $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{ND}$.
2. $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NC}$.

Hướng dẫn giải.

1. Do M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$, $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AM} = \vec{0}$.

   Do đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{ND} &= \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ND}\\ &= \vec{0} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ND}\\ &= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{MN}.\end{aligned}$$



2. Ta có:

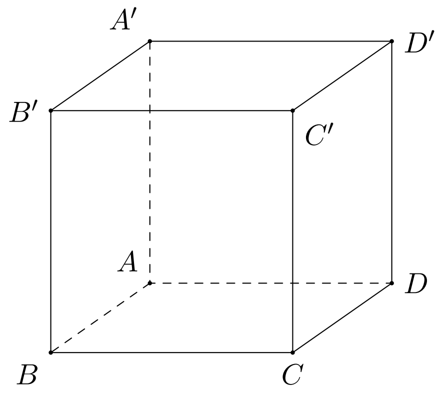
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NC} &= \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{NC}\\ &= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MN}.\end{aligned}$$

Ví dụ 5 ★☆☆☆☆

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng đơn vị. Tìm độ dài các vectơ sau đây:

1. $\vec{a} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}$
2. $\vec{b} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A}$.

Hướng dẫn giải.



① Theo quy tắc hình hộp, ta có

$$\vec{a} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$$

Mà $\left|\overrightarrow{BD'}\right| = BD' = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

Do đó $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{3}$.

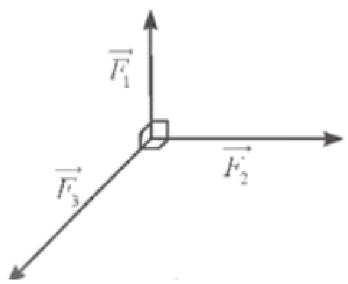
② Ta có

$\vec{b} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{CC'}$.

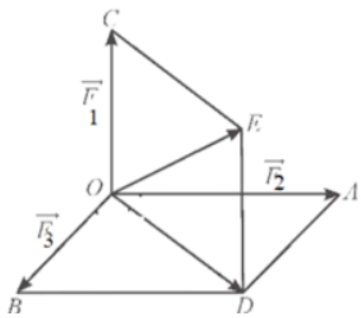
Mà $\left|\overrightarrow{CC'}\right| = CC' = 1$. Do đó $\left|\vec{b}\right| = 1$.

Ví dụ 6 ★☆☆☆☆

Ba lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc và có độ lớn lần lượt là 2 N; 3 N; 4 N (hình bên). Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho.



Hướng dẫn giải.



Gọi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ là ba lực tác động vào vật đặt tại điểm O lần lượt có độ lớn là 2 N; 3 N; 4 N. Vẽ $\overrightarrow{OC} = \vec{F}_1$; $\overrightarrow{OA} = \vec{F}_2$; $\overrightarrow{OB} = \vec{F}_3$.

Dựng các hình chữ nhật $OADB$ và $OCED$.

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$; $\quad \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE}$.

Khi đó hợp lực $\vec{F} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE}$.

Vì $OADB$ là hình chữ nhật nên $OD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Vì $OCED$ là hình chữ nhật nên $OE = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} \approx 5{,}4$.

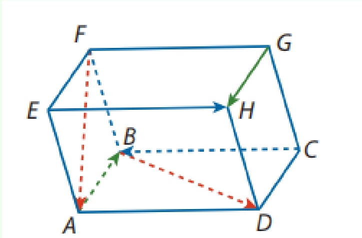
Vậy độ lớn của hợp lực $\vec{F}$ khoảng 5,4 N.

Lưu ý: Ta có thể giải bài này theo cách sau vì ba vectơ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ có giá vuông góc với nhau từng đôi một, ta có thể coi chúng là các cạnh của một hình hộp chữ nhật trong không gian. Khi đó hợp lực của ba vectơ là đường chéo của hình hộp chữ nhật đó.

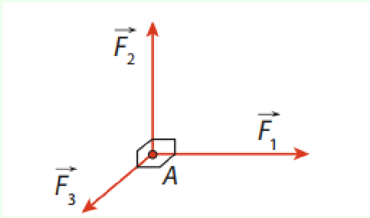
(2) Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Hãy tìm

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{EH}$.

b) $\overrightarrow{FA}-\overrightarrow{BD}$.



(3) Một chất điểm chịu tác động bởi 3 lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F}_2, \overrightarrow{F}_3$ có chung điểm đặt A và có giá vuông góc với nhau từng đôi một. Biết cường độ của các lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F}_2, \overrightarrow{F}_3$ lần lượt là 10 N, 8 N và 5 N, xác định hợp lực của 3 lực và tính cường độ của hợp lực (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



III. TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

Trong không gian, cho số thực $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq 0$. Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$.

Phép lấy tích của một số với một vectơ gọi là phép nhân một số với một vectơ.

Qui ước: $0.\vec{a} = \vec{0}$ và $k.\vec{0} = \vec{0}$.

Nhận xét:

a) Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì, với mọi số h và k ta có

- $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a}+k\vec{b}$.
- $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$.
- $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.
- $(h+k)\vec{a} = h\vec{a}+k\vec{a}$.
- $1.\vec{a} = \vec{a}$.

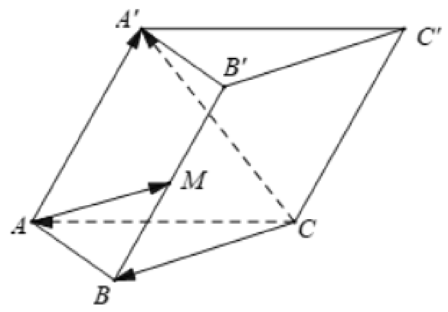
b) $k\vec{a} = \vec{0} \iff \vec{a} = 0$ hoặc $k = 0$.

c) Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ $(\vec{b} \neq \vec{0})$ cùng phương khi và chỉ khi có một số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

d) Ba điểm A, B, C phân biệt thẳng hàng khi và chỉ khi có số $k \neq 0$ để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Ví dụ 7 ★☆☆☆☆

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}, \overrightarrow{CC'} = \vec{c}$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

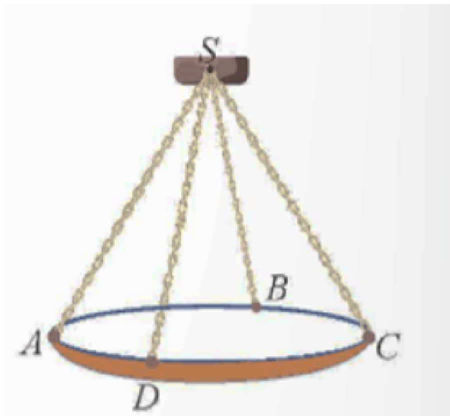


Hướng dẫn giải. Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}\\ &= -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CC'}\\ &= -\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\end{aligned}$$

Ví dụ 8 ★☆☆☆☆

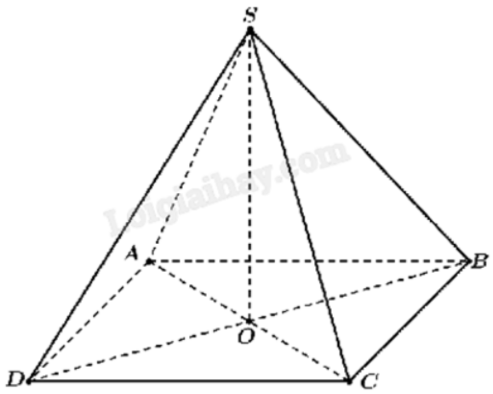
Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 5$ kg được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 60°$.



1. Sử dụng công thức $\vec{P} = m\vec{g}$ trong đó $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn 10m/s^2, tìm độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm.
2. Tìm độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích.

Hướng dẫn giải.

1. Ta có: $\vec{P} = m\vec{g} \Rightarrow \left|\vec{P}\right| = m\left|\vec{g}\right| = 5.10 = 50$ N.



(2) Giả sử đèn chùm được minh họa như hình vẽ trên.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}\\
\Leftrightarrow&\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SD}=\vec{0}\\
\Leftrightarrow&\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=-4\overrightarrow{OS}=4\overrightarrow{SO}\\
\Rightarrow&\left|\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}\right|=\left|4\overrightarrow{SO}\right|=4SO
\end{aligned}$$

Trọng lượng của vật là $P=50$ (N).

Suy ra $4\left|\overrightarrow{SO}\right|=P=50$. Do đó $SO=\dfrac{50}{4}=\dfrac{25}{2}$.

Vì $\widehat{ASC}=60^\circ$ suy ra $\widehat{ASO}=30^\circ$.

Xét tam giác SAO vuông tại O:

$$\cos\widehat{ASO}=\frac{SO}{SA}\Leftrightarrow SA=\frac{SO}{\cos\widehat{ASO}}=\frac{\frac{25}{2}}{\cos 30^\circ}=\frac{25\sqrt{3}}{3}$$

Vậy lực tác dụng lên mỗi sợi dây xích bằng $\dfrac{25\sqrt{3}}{3}$ (N)

(4) Cho hình chóp $S.ABC$. Điểm M thuộc cạnh SA sao cho $SM=\dfrac{2}{3}SA$.

a) Viết hệ thức liên hệ giữa các cặp vectơ $\overrightarrow{SM}$ và $\overrightarrow{SA}$; $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{AS}$.

b) Tìm điểm N sao cho $\overrightarrow{MN}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BA}$.

(5) Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của $\triangle BCD$ và điểm I thuộc cạnh AG sao cho $\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{GI}$. Chứng minh rằng:

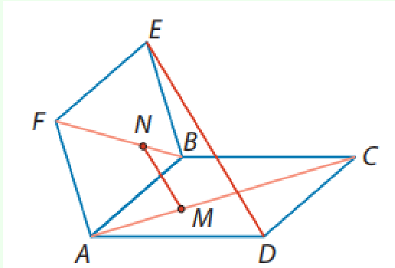
a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.

b) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

(6) Trọng lực $\vec{P}$ là lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một vật, được tính theo công thức $\vec{P}=m\vec{g}$, trong đó m là khối lượng của vật (đơn vị: kg), còn $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do, có hướng đi xuống và có độ lớn $g=9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$. Xác định hướng và độ lớn của trọng lực (đơn vị: N) tác dụng lên quả bưởi có khối lượng 2,5 kg.

7

Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên các đường chéo AC và BF lấy các điểm M, N sao cho: $MC = 2MA; NF = 2NB$



a) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{DE}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}$.

b) Từ đó suy ra $MN // DE$.

IV. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

Góc giữa hai vectơ trong không gian

Trong không gian cho $\vec{u}, \vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm A bất kì và gọi B, C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó, ta gọi góc $\widehat{BAC}$ là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu $(\vec{u}, \vec{v})$.

Nhận xét:

- $0° \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq 180°$.
- Nếu $(\vec{u}, \vec{v}) = 90°$ thì ta nói $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{u} \perp \vec{v}$.
- Nếu $(\vec{u}, \vec{v}) = 0°$ thì $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng, $(\vec{u}, \vec{v}) = 180°$ thì $\vec{u}, \vec{v}$ ngược hướng.

Ví dụ 9 ★☆☆☆☆

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định góc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{B'D'}), (\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{CB'})$.

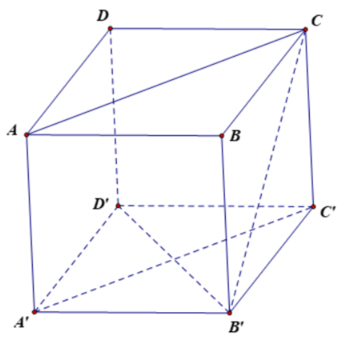
Hướng dẫn giải.

Vì $AA' // CC'$ và $AA' = CC'$ nên $AA'C'C$ là hình bình hành. Suy ra $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.

Do đó $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{B'D'}\right) = \left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{B'D'}\right) = 90°$.

Vì $AA'B'B$ là hình vuông nên $\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{B'B}$.

Do đó $\left(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{CB'}\right) = \left(\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{CB'}\right) = \widehat{BB'C} = 45°$.



(8) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và mặt bên SAB là tam giác đều. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BS}$.

(9) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Tính các góc giữa $(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BC})$ và $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'})$.

Tích vô hướng của hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ là một số, kí hiệu $\vec{u}.\vec{v}$, được xác định bởi công thức:

$$\vec{u}.\vec{v} = \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

Lưu ý.

a) Trong trường hợp $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$, ta quy ước $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

b) $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = \left|\vec{u}\right|^2$; $\vec{u}^2 \geq 0$, $\vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

c) Với hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}$.

d) Với hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u}.\vec{v} = 0$.

Nhận xét: Tương tự như trong mặt phẳng, tích vô hướng của hai vectơ trong không gian cũng có các tính chất sau:

Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ và số k ta có:

a) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$.

b) $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}\,\vec{b} + \vec{a}.\vec{c})$.

c) $(k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}(k\vec{b})$.

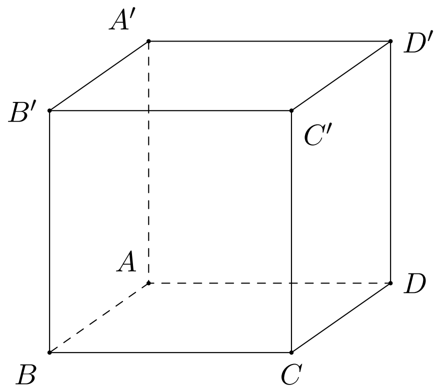
Ví dụ 10 ★☆☆☆☆

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1.

a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'}$.

b) Tính góc $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}\right)$ (làm tròn đến phút).

Lời giải.



a) Vì $ABB'A'$ là hình vuông nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

Do đó $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'}\right) = \left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) = \widehat{B'A'C'} = 45^\circ$.

Vì $A'B'C'D'$ là hình vuông cạnh bằng 1 nên $A'C' = \sqrt{2}$.

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{A'C'}| \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}\right) = 1.\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 1$.

Vì $ACCA'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'}$.

Do đó $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CC'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}\right) = \widehat{BAA'} = 90^\circ$. Do đó $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CC'} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} = 0$.

b) $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}\right) = \widehat{CAC'}$.

Ta có AC' là đường chéo của hình lập phương cạnh bằng 1 nên $AC' = \sqrt{3}$.

AC là đường chéo của hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 1 nên $AC = \sqrt{2}$.

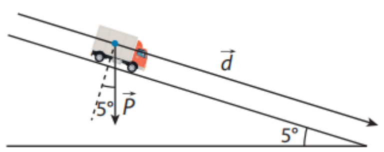
Xét $\triangle ACC'$ có

$$\cos\widehat{CAC'} = \frac{AC^2 + AC'^2 - CC'^2}{2.AC.AC'} = \frac{2+3-1}{2.\sqrt{2}.\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \widehat{CAC'} \approx 35^\circ 16'.$$

Vậy $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}\right) \approx 35^\circ 16'$.

Ví dụ 11 ★☆☆☆☆

Cho biết công A (đơn vị: J) sinh bởi lực $\vec{F}$ tác dụng lên một vật được tính bằng công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$, trong đó $\vec{d}$ là vectơ biểu thị độ dịch chuyển của vật (đơn vị của $|\vec{d}|$ là m) khi chịu tác dụng của lực $\vec{F}$. Một chiếc xe có khối lượng 1,5 tấn đang đi xuống trên một đoạn đường dốc có góc nghiêng 5° so với phương ngang. Tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30 m (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị), biết rằng trọng lực $\vec{P}$ được xác định bởi công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, với m (đơn vị: kg) là khối lượng của vật và $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.



Hướng dẫn giải. Ta có 1,5 tấn = 1500 kg.

Độ lớn của trọng lực tác dụng lên chiếc xe là: $|\vec{P}| = m|\vec{g}| = 1500 \cdot 9{,}8 = 14700\,(\mathrm{N})$.

$\vec{d}$ biểu thị độ dịch chuyển của xe có độ dài là $|\vec{d}| = 30\,(\mathrm{m})$ và $(\vec{P}, \vec{d}) = 90^\circ - 5^\circ = 85^\circ$.

Công sinh ra bởi trọng lực $\vec{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30 m là:

$$A = \vec{P} \cdot \vec{d} = |\vec{P}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos(\vec{P}, \vec{d}) = 14700 \cdot 30 \cdot \cos 85^\circ \approx 38436\,(\mathrm{J}).$$

10 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 1. Hãy tính:

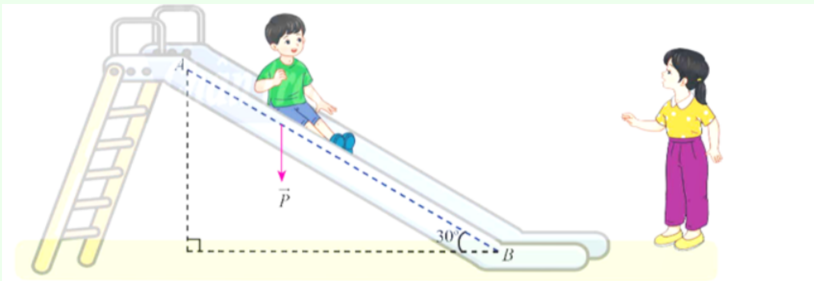
a) $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{A'C'}$. b) $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BD}$. c) $\overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{BB'}$.

11 Cho tứ diện $ABCD$ có $DA = DB = a, BC = \dfrac{a}{2}, AB \perp BC$ và $\widehat{CBD} = 45^\circ$. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$.

12 Một em nhỏ cân nặng $m = 25$ kg trượt trên cầu trượt dài $3,5$ m. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 30° (hình vẽ).

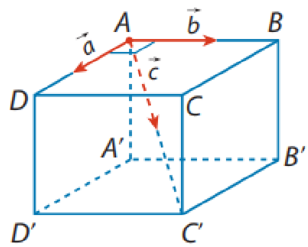
a) Tính độ lớn của trọng lực $\vec{P} = m\vec{g}$ tác dụng lên em nhỏ, cho biết vectơ gia tốc rơi tự do $\vec{g}$ có độ lớn $9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.

b) Cho biết công A (J) sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển $\vec{d}$ được tính bởi công thức $A = \vec{F}.\vec{d}$ Hãy tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt.



Ví dụ 12 ★☆☆☆☆

Một chất điểm ở vị trí đỉnh A của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chất điểm chịu tác động bởi ba lực $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'}$ như hình vẽ. Cường độ của các lực $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tương ứng là 10 N, 10 N và 20 N. Tính cường độ hợp lực của các lực $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



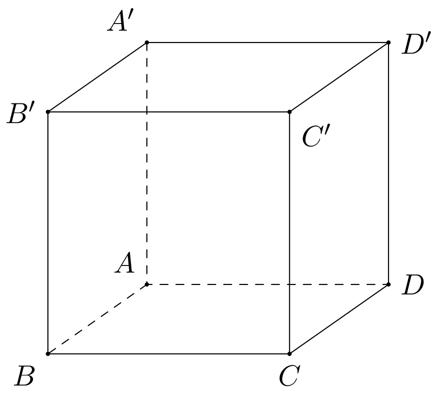
BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm .

Câu 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (xem hình bên). Phát biểu nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD'}$.

Ⓒ $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD'}$. Ⓓ $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.



Câu 2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ nào cùng phương với $\overrightarrow{BC}$?

Ⓐ $\overrightarrow{DC}$. Ⓑ $\overrightarrow{DA}$. Ⓒ $\overrightarrow{BB'}$. Ⓓ $\overrightarrow{C'C}$.

Câu 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ $\overrightarrow{BA}$ bằng vectơ nào dưới đây?

Ⓐ $\overrightarrow{A'B'}$. Ⓑ $\overrightarrow{CD}$. Ⓒ $\overrightarrow{BC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AB}$.

Câu 4. Trong không gian, vectơ nào sau đây có điểm đầu là A, điểm cuối là B?

Ⓐ $\overrightarrow{AA}$. Ⓑ $\overrightarrow{BA}$. Ⓒ $\overrightarrow{AB}$. Ⓓ $\overrightarrow{BB}$.

Câu 5. Trong không gian, cho ba điểm phân biệt A, B, C. Vectơ nào dưới đây là vectơ - không?

Ⓐ $\overrightarrow{BB}$. Ⓑ $\overrightarrow{BA}$. Ⓒ $\overrightarrow{AB}$. Ⓓ $\overrightarrow{BC}$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$. Tìm vectơ tổng của hai vectơ $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{AB}$.

Ⓐ $\overrightarrow{BS}$. Ⓑ $\overrightarrow{BA}$. Ⓒ $\overrightarrow{SB}$. Ⓓ $\overrightarrow{SC}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB}$. Ⓑ $\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{AB}$.

Ⓒ $\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{BA}$. Ⓓ $\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SC}$.

Câu 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Ⓐ $\overrightarrow{DB}$. Ⓑ $\overrightarrow{BD}$. Ⓒ $\overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{CA}$.

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt trung điểm AD, BC. Tìm $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$.

Ⓐ $\vec{0}$. Ⓑ $2\overrightarrow{AD}$. Ⓒ $2\overrightarrow{NM}$. Ⓓ $2\overrightarrow{MN}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Tính $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}$.

Ⓐ $2\overrightarrow{SO}$. Ⓑ $4\overrightarrow{SO}$. Ⓒ $3\overrightarrow{SO}$. Ⓓ $\vec{0}$.

Câu 11. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Véc tơ đối của véc tơ $\overrightarrow{AA'}$ là

Ⓐ $\overrightarrow{A'C'}$. Ⓑ $\overrightarrow{C'C}$. Ⓒ $\overrightarrow{BB'}$. Ⓓ $\overrightarrow{BA'}$.

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy G là trọng tâm tam giác BCD. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Ⓑ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Ⓒ $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{CG}$. Ⓓ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm của tam giác ABC. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{GD}-\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{AD}$. Ⓑ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Ⓒ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Ⓓ $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{DG}$.

Câu 14. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Ⓑ $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{B'D'}$.

Ⓒ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{C'A'}$. Ⓓ $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$.

Câu 15. Cho tứ diện $ABCD$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.

Ⓒ $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}$. Ⓓ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.

Câu 16. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

Ⓐ 90°. Ⓑ 60°. Ⓒ 30°. Ⓓ 45° .

Câu 17. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tính tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{A'C'}$.

Ⓐ $2\overrightarrow{AA'}$. Ⓑ $\vec{0}$. Ⓒ $2\overrightarrow{AC}$. Ⓓ $2\overrightarrow{C'A'}$.

Câu 18. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Véc tơ nào cùng phương $\overrightarrow{AB}$?

Ⓐ $\overrightarrow{B'C'}$. Ⓑ $\overrightarrow{AD}$. Ⓒ $\overrightarrow{CD}$. Ⓓ $\overrightarrow{AC'}$.

Câu 19. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị k thích hợp điền vào đẳng thức sau: $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = k\overrightarrow{BB'}$.

Ⓐ $k = 4$. Ⓑ $k = 1$. Ⓒ $k = 0$. Ⓓ $k = 2$.

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$, gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD; Đẳng thức nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$. Ⓑ $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

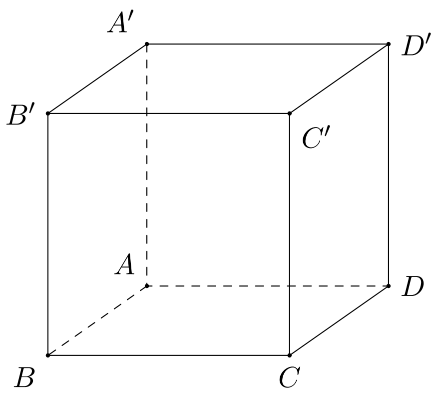
Ⓒ $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD})$. Ⓓ $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD})$.

Câu 21. Cho hình hộp $ABCDEFGH$. Gọi O là trung điểm CH. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$. Ⓑ $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}$.

Ⓒ $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$. Ⓓ $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}$.

Câu 22. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?



Ⓐ $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'D'}) = 90°$. Ⓑ $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'C'}) = 45°$.

Ⓒ $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{B'D'}) = 90°$. Ⓓ $(\overrightarrow{A'A}; \overrightarrow{C'B}) = 45°$.

Câu 23. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$.

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{2}a^2}{2}$. Ⓑ a^2. Ⓒ $\sqrt{2}a^2$. Ⓓ $\sqrt{3}a^2$.

Câu 24. Cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a}\,\vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Ⓐ $\alpha = 45°$. Ⓑ $\alpha = 180°$. Ⓒ $\alpha = 90°$. Ⓓ $\alpha = 0°$.

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Ⓑ $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Ⓒ $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. Ⓓ $2\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Câu 26. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'B'C'$. Khẳng định nào đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c})$.
Ⓑ $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$.
Ⓒ $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c})$.
Ⓓ $2\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$.

Câu 27. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O. Gọi I là tâm hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'}=\vec{u},\overrightarrow{CA'}=\vec{v},\overrightarrow{BD'}=\vec{x},\overrightarrow{DB'}=\vec{y}$. Khẳng định nào đúng?

Ⓐ $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$.
Ⓑ $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$.
Ⓒ $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$.
Ⓓ $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$.

Câu 28. Trong không gian, cho hai $\vec{a}$, $\vec{b}$ tạo với nhau góc 60° và $\left|\vec{a}\right|=3$ cm, $\left|\vec{b}\right|=4$ cm , khi đó $\vec{a}.\vec{b}$ bằng

Ⓐ 12.
Ⓑ -6.
Ⓒ 6.
Ⓓ $6\sqrt{3}$.

Câu 29. Theo định luật II Newton: Gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật: $\vec{F}=m\vec{a}$, trong đó $\vec{a}$ là vectơ gia tốc $(\mathrm{m/s^2})$, $\vec{F}$ là vectơ lực (N) tác dụng lên vật, m (kg) là khối lượng của vật. Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng 0,5 kg một gia tốc $20\,\mathrm{m/s^2}$ thì cần một lực đã có độ lớn là bao nhiêu?

Ⓐ 100N .
Ⓑ 20N .
Ⓒ 10N .
Ⓓ 25N .

Câu 30. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, trong đó đáy là hình bình hành với $\widehat{DAB}=120^\circ$, biết $AB=25$ cm, $AD=12$ cm và $AA'=12$ cm. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right|$.

Ⓐ 12cm .
Ⓑ $\sqrt{469}$cm .
Ⓒ $\sqrt{613}$cm .
Ⓓ 25cm .

2 Tự luận.

Bài 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là hai đỉnh phân biệt của hình hộp:

a) Vectơ nào cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AC}$.

b) Vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AD'}$.

c) Những vectơ nào là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AA'}$.

Bài 2. Ba lực có điểm đặt tại một đỉnh của hình lập phương, cùng phương với 3 cạnh và cùng có cường độ là 5 N. Tính cường độ của hợp lực.

Bài 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AC'}$.

b) $\overrightarrow{DB'}+\overrightarrow{D'D}+\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BB'}$.

c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}=\overrightarrow{0}$.

Bài 4. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi S là một điểm không thuộc mặt phẳng chứa hình bình hành. Chứng minh rằng $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$.

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I là trọng tâm của tam giác ABC và J là trọng tâm tam giác ADC. Chứng minh rằng $2\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=3\left(\overrightarrow{SI}+\overrightarrow{SJ}\right)$.

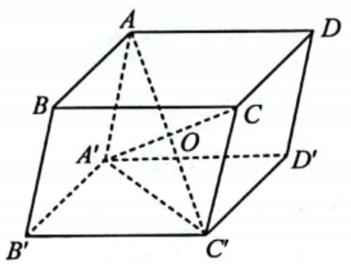
Bài 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{x},\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{y},\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{z}$. Hãy biểu diễn các vectơ sau qua ba vectơ $\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}$.

a) $\overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{AC'}$.

c) $\overrightarrow{BD'}$.

Bài 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có AC' và$A'C$ cắt nhau tại O. Cho biết $AO=a$. Tính theo a độ dài các vectơ:



a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$

b) $\overrightarrow{C'B'}+\overrightarrow{C'D'}+\overrightarrow{A'A}$.

Bài 8. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{a},\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{b},\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{c}$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{B'C}=\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$.

Bài 9. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng $AA'=2$ và tứ giác $ABCD$ là hình thoi có $AB=1$ và $\widehat{ABC}=60^\circ$, hãy tính góc giữa các cặp vectơ sau, từ đó tính tích vô hướng của mỗi cặp vectơ đó:

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'D'}$.

b) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BD}$.

c) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'C'}$.

Bài 10. Trong không gian, cho hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ có cùng độ dài bằng 1. Biết góc giữa hai vectơ đó là 45°, hãy tính:

a) $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}$.

b) $(\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b})(\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b})$.

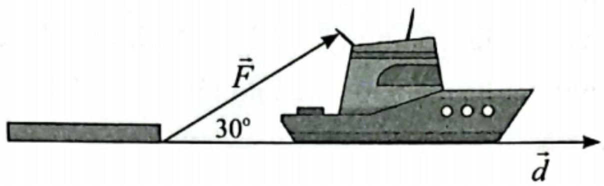
c) $\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)^2$.

Bài 11. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ cạnh a. Tính:

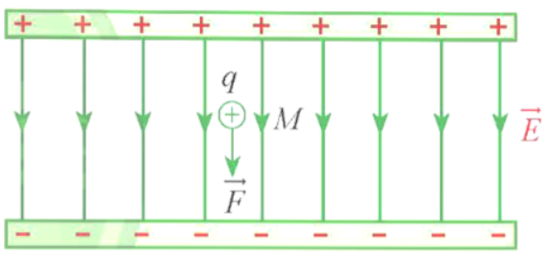
a) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AH}$. b) $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{EG}$. c) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{FE}$.

Bài 12. Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc 120° và có độ lớn lần lượt là 10 N và 8 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 6 N. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên.

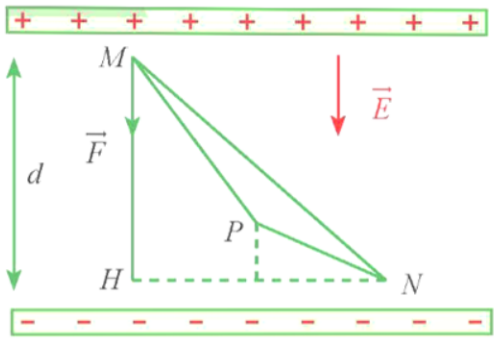
Bài 13. Một tàu kéo một xà lan trên biển di chuyển được 3 km với một lực kéo có cường độ 2 000 N và có phương hợp với phương dịch chuyển một góc 30°. Tính công thực hiện bởi lực kéo nói trên (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của Jun).



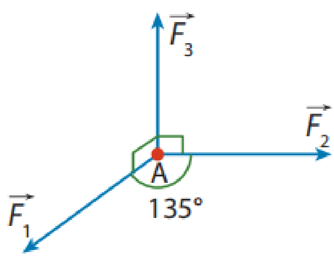
Bài 14. Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F} = q.\vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q = 10^{-9}$ C và độ lớn điện trường $E = 10^5$ N/C.



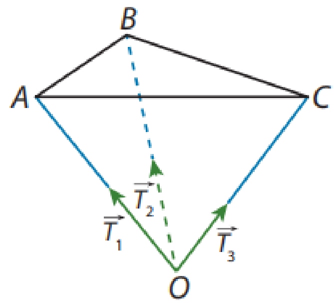
Bài 15. Một lực tĩnh điện $\vec{F}$ tác động lên điện tích điểm M trong điện trường đều làm cho M dịch chuyển theo đường gấp khúc MPN (hình bên). Biết $q = 2.10^{-12}$ C, vectơ điện trường có độ lớn $E = 1,8.10^5$ N/C và $d = MH = 5$ mm. Tính công A sinh bởi lực tĩnh điện $\vec{F}$.



Bài 16. Một chất điểm A nằm trên mặt phẳng nằm ngang (α), chịu tác động bởi ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$. Các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ có giá nằm trong (α) và $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 135°$, còn lực $\vec{F}_3$ có giá vuông góc với (α) và hướng lên trên. Xác định hợp lực của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, biết rằng độ lớn của ba lực đó lần lượt là 20 N, 15 N và 10 N.



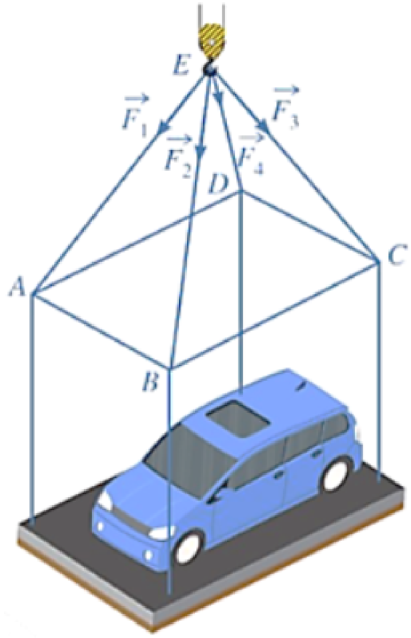
Bài 17. Người ta treo một vật trang trí O có khối lượng $m = 2\,\text{kg}$ trên trần nhà bằng các sợi dây nhẹ, không co giãn tại các điểm A, B và C. Để bảo đảm lực phân bố đều trên các dây và tính thẩm mỹ, người ta chọn độ dài các dây sao cho $OABC$ là tứ diện đều. Gọi $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ và $\vec{T}_3$ lần lượt là các lực căng dây của ba dây treo tại A, B và C. Lấy giá trị gần đúng của gia tốc trọng trường $g \approx 10\,\text{m/s}^2$



a) Tính cường độ của hợp lực.

b) Tính cường độ của lực căng trên mỗi dây.

Bài 18. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° (hình bên). Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng.



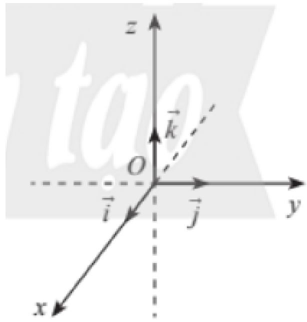
Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ là 4 700 N và trọng lượng của khung sắt là 3 000 N.

Chuyên đề 2

TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

I. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Trong không gian, cho ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc. Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là ba vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz. Hệ ba trục như vậy được gọi là **hệ trục tạo độ Descartes vuông góc $Oxyz$** trong không gian hay gọi đơn giản là **hệ tọa độ $Oxyz$**.



Nhận xét:

a) Điểm O gọi là **gốc tọa độ**. Các trục Ox, Oy, Oz được gọi là **các trục tọa độ**.

Các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$ đôi một vuông góc với nhau được gọi là các **mặt phẳng tọa độ**.

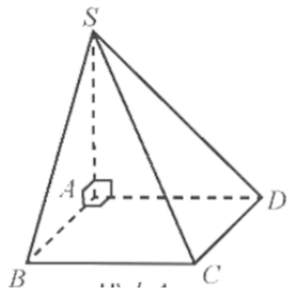
Không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.

b) Vì $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là ba vectơ đơn vị đôi một vuông góc với nhau nên ta có:

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1 \text{ và } \vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{i}.\vec{k} = 0.$$

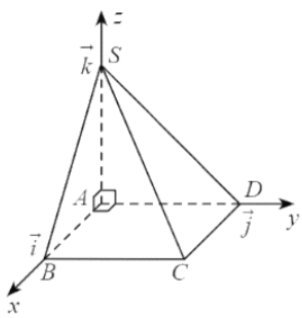
Ví dụ 1 ★☆☆☆☆

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 1, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và có độ dài bằng 1 (Hình vẽ). Vẽ hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với điểm A, các điểm B, D, S lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz và chỉ ra các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ.



Hướng dẫn giải.

Trục Ox có vectơ đơn vị là $\overrightarrow{AB}$, trục Oy có vectơ đơn vị là $\overrightarrow{AD}$ và trục Oz có vectơ đơn vị là $\overrightarrow{AS}$.

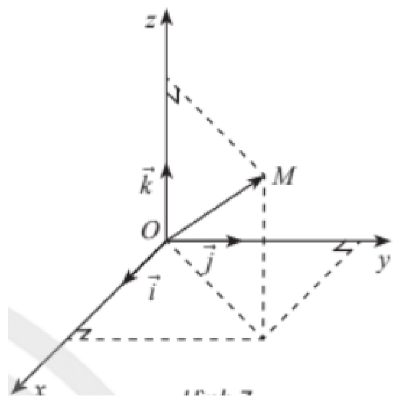


II. TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM VÀ VECTƠ

Tọa độ của điểm

Người ta chứng minh được rằng: Trong không gian $Oxyz$, ứng với một điểm M tùy ý, có một bộ ba số $(x; y; z)$ duy nhất sao cho $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Ngược lại, với bộ ba số $(x; y; z)$, ta có một điểm M duy nhất trong không gian thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Ta có định nghĩa sau:

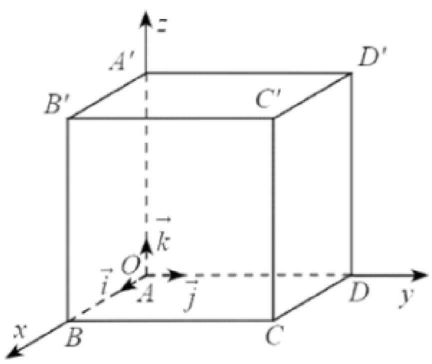
Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M. Nếu $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(x; y; z)$ là **tọa độ của điểm** M đối với hệ trục tọa độ $Oxyz$ và viết $M = (x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$; x là hoành độ; y là tung độ; z là cao độ của điểm M.



Ví dụ 2 ★☆☆☆☆

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 5. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với A; các điểm B, D, A' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz. Xác định tọa độ các điểm B, C, C'.

Hướng dẫn giải.



Cho hệ trục như hình vẽ. Vì $\overrightarrow{OB}$ và $\vec{i}$ cùng hướng và $OB = 5$ nên $\overrightarrow{OB} = 5\vec{i}$.

Tương tự, ta có $\overrightarrow{OD} = 5\vec{j}$, $\overrightarrow{OA'} = 5\vec{k}$.

Theo quy tắc hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = 5\vec{i} + 5\vec{j}$.

Theo quy tắc hình hộp, ta có: $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} = 5\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$.

Do đó $B(5; 0; 0)$, $C(5; 5; 0)$, $C'(5; 5; 5)$.

Tọa độ của vectơ

Người ta chứng minh được rằng: Trong không gian $Oxyz$, ứng với một vectơ $\vec{a}$ tùy ý có một bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ duy nhất sao cho $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$.

Ta có định nghĩa sau:

Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$. Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ là **tọa độ của vectơ** $\vec{a}$ đối với hệ tọa độ $Oxyz$ và viết $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ hoặc $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$.

Nhận xét: Trong không gian $Oxyz$, ta có:

a) Tọa độ của điểm M là tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$, tức là

$$M(x; y; z) \iff \overrightarrow{OM} = (x; y; z).$$

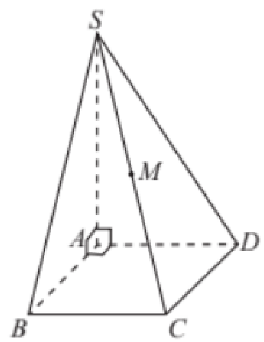
b) Điều kiện để hai vectơ bằng nhau. Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Khi đó:

$$\vec{a} = \vec{b} \iff \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}.$$

Ví dụ 3 ★☆☆☆☆

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 2, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và có độ dài bằng 3.

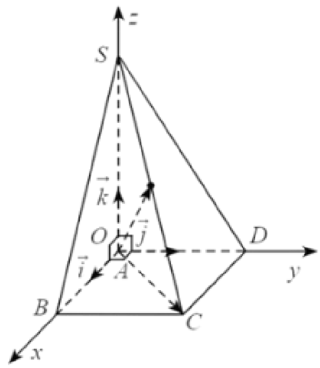
1. Vẽ hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với điểm A, các điểm B, D, S lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz và chỉ ra các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ.
2. Trong hệ tọa độ nói trên, tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS}$ và $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của cạnh SC.



Hướng dẫn giải.

1. Ba vectơ đơn vị trên ba trục tọa độ lần lượt là $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ như hình vẽ.

Với độ dài của $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt bằng $\frac{1}{2}AB, \frac{1}{2}AD, \frac{1}{3}AS$.



(2) Ta có $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}, \overrightarrow{AD} = 2\vec{j}, \overrightarrow{AS} = 3\vec{k}$.

Do đó $\overrightarrow{AB} = (2; 0; 0), \overrightarrow{AD} = (0; 2; 0), \overrightarrow{AS} = (0; 0; 3)$.

Theo quy tắc hình bình hành, ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$.

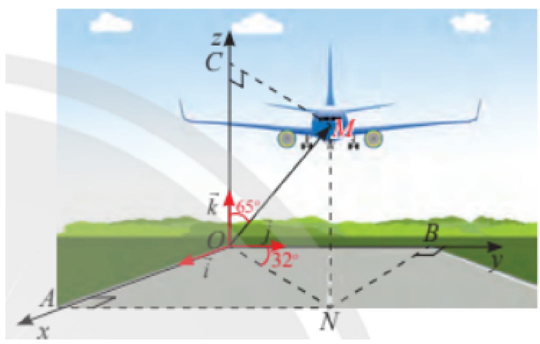
Vì M là trung điểm của SC nên ta có

$$\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\left(2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right) = \vec{i} + \vec{j} + \frac{3}{2}\vec{k}.$$

Do đó $\overrightarrow{AM} = \left(1; 1; \frac{3}{2}\right)$.

Ví dụ 4 ★☆☆☆☆

Một máy bay đang cất cánh từ phi trường. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên, cho biết M là vị trí của máy bay, $OM = 14, \widehat{NOB} = 32^\circ, \widehat{MOC} = 65^\circ$. Tìm tọa độ điểm M.



Hướng dẫn giải. Điểm M có hoành độ bằng OA, tung độ bằng OB và cao độ bằng OC. Ta có:

Xét tam giác COM vuông tại C:

$$CO = OM \cdot \cos 65^\circ = 14 \cdot \cos 65^\circ \approx 5{,}92.$$

$$CM = OM \cdot \sin 65^\circ = 14 \cdot \sin 65^\circ \approx 12{,}69.$$

Xét tam giác BON vuông tại B:

$$OB = ON \cdot \cos 32^\circ = CM \cdot \cos 32^\circ = 12{,}69 \cdot \cos 32^\circ \approx 10{,}76.$$

Xét tam giác AON vuông tại A: $OA = ON \cdot \cos(90^\circ - 32^\circ) = 12{,}69 \cdot \cos 58^\circ = 6{,}72$.

Vậy tọa độ của $M(6{,}72; 10{,}76; 5{,}92)$.

Ví dụ 5 ★☆☆☆☆

Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \frac{3}{4}\vec{k}$ và vectơ $\vec{v} = \left(3; -\frac{5}{4}; 2\right)$

1. Tìm tọa độ của $\vec{u}$.
2. Biểu diễn $\vec{v}$ theo các vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
3. Tìm tọa độ của $\vec{a} = 2\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$.

Lời giải.

1. Vì $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \frac{3}{4}\vec{k}$ nên $\vec{u} = (-2; 3; \frac{3}{4})$.
2. Vì $\vec{v} = \left(3; -\frac{5}{4}; 2\right)$ nên $\vec{v} = 3\vec{i} - \frac{5}{4}\vec{j} + 2\vec{k}$.
3. Biểu diễn $\vec{a}$ qua các vectơ đơn vị:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= 2\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} = 2(-2\vec{i} + 3\vec{j} + \frac{3}{4}\vec{k}) + \frac{1}{3}(3\vec{i} - \frac{5}{4}\vec{j} + 2\vec{k})\\ &= -3\vec{i} + \frac{67}{12}\vec{j} + \frac{13}{6}\vec{k}\end{aligned}$$

Vậy $\vec{a} = \left(-3; \frac{67}{12}; \frac{13}{6}\right)$.

1

Để theo dõi hành trình của một chiếc máy bay, ta có thể lập hệ tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí của trung tâm kiểm soát không lưu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (được coi là phẳng) với trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (hình vẽ).

Sau khi cất cánh và đạt độ cao nhất định, chiếc máy bay duy trì hướng bay về phía nam với tốc độ không đổi là 890 km/h trong nửa giờ. Xác định tọa độ của vectơ biểu diễn độ dịch chuyển của chiếc máy bay trong nửa giờ đó đối với hệ tọa độ đã chọn, biết rằng đơn vị đo trong không gian $Oxyz$ được lấy theo kilômét.

2. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O, có $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với các vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và có $AB = 1, AD = 2, AA' = 3$. Gọi M là trung điểm cạnh CC'. Hãy xác định tọa độ các điểm B, C, C' và M.

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm .

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1;5;3)$. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{OA}$ là

Ⓐ $(-1;5;3)$. Ⓑ $(1;-5;-3)$.
Ⓒ $(0;5;3)$. Ⓓ $(-1;5;0)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, tọa độ điểm M là

Ⓐ $(-2;3;1)$. Ⓑ $(2;-3;-1)$.
Ⓒ $(2;3;-1)$. Ⓓ $(2;3;1)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc trục Oy?

Ⓐ $M(0;5;0)$. Ⓑ $N(4;0;0)$. Ⓒ $P(0;0;6)$. Ⓓ $Q(2;3;0)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây nằm trên mặt phẳng tọa độ (Oyz)?

Ⓐ $M(0;4;-1)$. Ⓑ $N(-2;0;3)$.
Ⓒ $P(3;4;0)$. Ⓓ $Q(2;0;0)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA} = 3\vec{k} - \vec{i}$. Tìm tọa độ điểm A.

Ⓐ $(3;0;-1)$. Ⓑ $(-1;0;3)$. Ⓒ $(-1;3;0)$. Ⓓ $(3;-1;0)$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(1;-3;-5)$ trên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

Ⓐ $(0;-3;0)$. Ⓑ $(0;-3;-5)$. Ⓒ $(0;-3;5)$. Ⓓ $(1;-3;0)$.

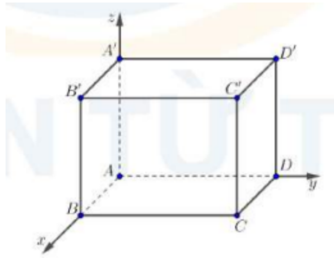
Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{b} = 4\vec{j} - \vec{i}$. Tọa độ $\vec{b}$ là

Ⓐ $(-1;4;0)$. Ⓑ $(1;4;0)$. Ⓒ $(0;-1;4)$. Ⓓ $(4;-1;0)$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(1;2;3)$ trên mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là

Ⓐ $(0;2;3)$. Ⓑ $(1;0;3)$. Ⓒ $(0;2;0)$. Ⓓ $(1;2;0)$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1 như hình vẽ. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AC}$ là



Ⓐ $(1;1;0)$. Ⓑ $(0;1;1)$. Ⓒ $(1;0;1)$. Ⓓ $(1;1;1)$.

2 Tự luận.

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, biết:

a) $\vec{a} = 5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{k}$. Tìm tọa độ các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

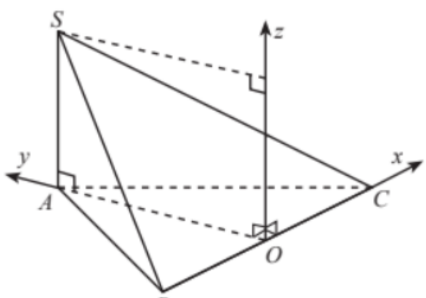
b) $\overrightarrow{OM} = 4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\overrightarrow{ON} = 8\vec{i} - 5\vec{j}$. Tìm tọa độ các điểm M, N.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, biết:

a) $\vec{a} = (-2;\ 5;\ -7)$, $\vec{b} = (4;\ 0;\ 1)$. Tính $\vec{a}$, $\vec{b}$ theo các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

b) $A(7;\ -2;\ 1)$, $B(0;\ 5;\ 0)$. Tính $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ theo các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Bài 3. Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B, $BC = 3$, $BA = 2$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2 (Hình 13).

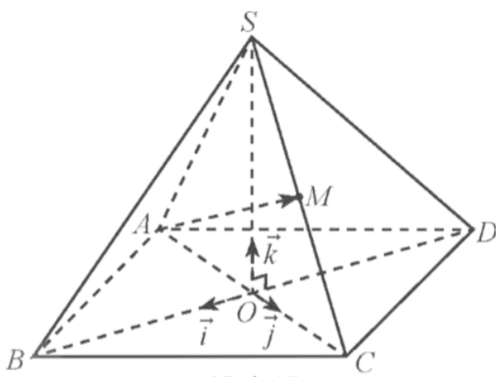


Hình 14

a) Xác định một hệ tọa độ dựa trên gợi ý của hình vẽ và chỉ ra các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ.

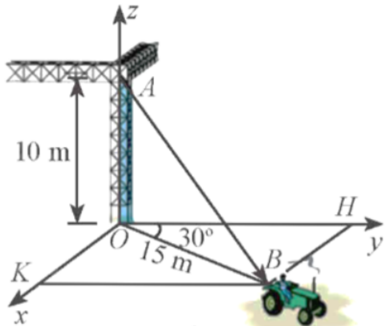
b) Tìm tọa độ các điểm A, B, C, S.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 5, giao điểm hai đường chéo AC và BD trùng với gốc O. Các vectơ $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và $OA = OS = 4$ (Hình 15). Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS}$ và $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của cạnh SC.



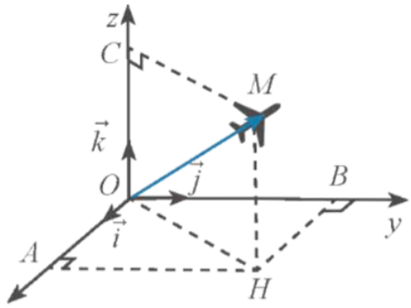
Hình 15

Bài 5. Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ như Hình 16 với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng 1 m. Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.



Hình 16

Bài 6. Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như Hình 17. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy). Cho biết $OM = 50$, $(\vec{i}, \overrightarrow{OH}) = 64°$, $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}) = 48°$.



Hình 17

Bài 7. Cho điểm $M(9; 3; 6)$

a) Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là hình chiếu của điểm M trên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz. Tìm tọa độ các điểm M_1, M_2, M_3.

b) Gọi N, P, Q lần lượt là hình chiếu của điểm M trên các mặt phẳng tọa độ $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$. Tìm tọa độ các điểm N, P, Q.

Bài 8. Cho hình tứ giác đều $S.ABCD$ có chiều cao bằng 5 và độ dài cạnh đáy bằng 4. Hãy xác định tọa độ các điểm S, A, B, C, D đối với hệ tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với tâm của hình vuông $ABCD$, tia Ox chứa B, tia Oy chứa C và tia Oz chứa S.

Chuyên đề 3 BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

I. BIỂU THỨC TỌA ĐỘNG TỔNG, HIỆU HAI VECTƠ VÀ TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và số thực k. Khi đó:

- $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$.
- $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$.
- $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$.

Nhận xét: Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $\vec{b} \neq \vec{0}$. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $\vec{a}_1 = k\vec{a}_2$ hay
$$\begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases}.$$

Ví dụ 1 ★☆☆☆☆

Cho ba vectơ $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$.

1. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{d} = 4\vec{a} - \dfrac{1}{3}\vec{b} + 3\vec{c}$.
2. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{e} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$.
3. Chứng minh vectơ $\vec{a}$ cùng phương với vectơ $\vec{m} = (-6; 15; -9)$.

Hướng dẫn giải.

a) $4\vec{a} = (8; -20; 12)$, $\dfrac{1}{3}\vec{b} = \left(0; \dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$, $3\vec{c} = (3; 21; 6)$.

Khi đó $\vec{d} = 4\vec{a} - \dfrac{1}{3}\vec{b} + 3\vec{c} = \left(11; \dfrac{1}{3}; \dfrac{55}{3}\right)$.

b) $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $4\vec{b} = (0; 8; -4)$, $2\vec{c} = (2; 14; 4)$.

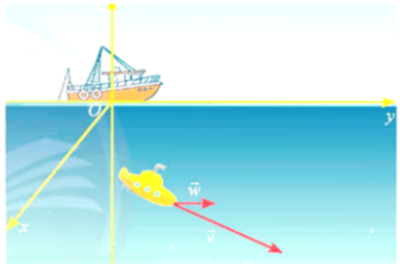
Khi đó $\vec{e} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c} = (0; -27; 3)$.

c) Có $\vec{m} = (-6; 15; -9) = -3(2; -5; 3) = -3\vec{a}$.

Do đó $\vec{a}$ cùng phương với vectơ $\vec{m}$.

Ví dụ 2 ★☆☆☆☆

Một thiết bị thăm dò đáy biển đang lặn với vận tốc $\vec{v} = (10; 8; -3)$ Cho biết vận tốc của dòng hải lưu của vùng biển là $\vec{w} = (3,5; 1; 0)$.



1. Tìm tọa độ của vectơ tổng hai vận tốc $\vec{v}$ và $\vec{w}$.
2. Giả sử thiết bị thăm dò lặn với vận tốc $\vec{u} = (7; 2; 0)$, hãy nêu nhận xét về vectơ vận tốc của nó so với vectơ vận tốc của dòng hải lưu.

Hướng dẫn giải.

1. Ta có $\vec{v} + \vec{w} = (10 + 3,5; 8 + 1; -3 + 0) = (13,5; 9; -3)$.
2. Vì $\vec{u} = (7; 2; 0) = 2(3; 5; 1; 0) = 2\vec{w}$.

   Do đó hai vectơ này cùng phương, cùng hướng với nhau.

1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{u} = (1; 8; 6)$, $\vec{v} = (-1; 3; -2)$ và $\vec{w} = (0; 5; 4)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{z} = \vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$.

II. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ được xác định bởi công thức:

$$\vec{a} . \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Nhận xét:

- $\vec{a} \perp \vec{b} \iff a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ ($\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$).
- $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.
- $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a} . \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| . \left|\vec{b}\right|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} . \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ ($\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$).

Ví dụ 3 ★☆☆☆☆

Cho ba vectơ $\vec{m} = (-5; 4; 9)$, $\vec{n} = (2; -7; 0)$ và $\vec{p} = (6; 3; -4)$

a) Tính $\vec{m}.\vec{n}; \vec{m}.\vec{p}$.

b) Tính $|\vec{m}|, |\vec{n}|, \cos(\vec{m}, \vec{n})$.

c) Cho $\vec{q} = (1; -2; 0)$. Vectơ $\vec{q}$ có vuông góc với $\vec{p}$ không?

Hướng dẫn giải.

a) $\vec{m} \cdot \vec{n} = (-5) \cdot 2 + 4 \cdot (-7) + 9 \cdot 0 = -38.$

$\vec{m} \cdot \vec{p} = (-5) \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 9 \cdot (-4) = -54$

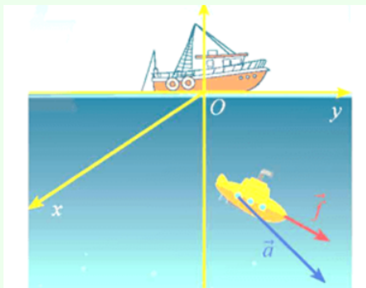
b) $|\vec{m}| = \sqrt{25 + 16 + 81} = \sqrt{122}$; $\quad |\vec{n}| = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$.

$$\cos(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{-38}{\sqrt{122} \cdot \sqrt{53}} = \frac{-38}{\sqrt{6466}}.$$

c) Có $\vec{p} \cdot \vec{q} = 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + (-4) \cdot 0 = 0$. Do đó $\vec{p} \perp \vec{q}$.

2

Một thiết bị thăm dò đáy biển (Hình vẽ) được đẩy bởi một lực $\vec{f} = (5; 4; -2)$ (đơn vị: N) giúp thiết bị thực hiện độ dời $\vec{a} = (70; 20; -40)$ (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực $\vec{f}$.



III. VẬN DỤNG

Xác định tọa độ của vectơ khi biết tọa độ điểm đầu và điểm cuối.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$. Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$$

Nhận xét: $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Ví dụ 4 ★☆☆☆☆

Cho ba điểm $M(7; -2; 0)$, $N(-9; 0; 4)$, $P(0; -6; 5)$.

a) Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}, \overrightarrow{MP}$.

b) Tìm các độ dài MN, NP, MP.

Hướng dẫn giải.

a) $\overrightarrow{MN} = (-16; 2; 4), \overrightarrow{NP} = (9; -6; 1), \overrightarrow{MP} = (-7; -4; 5)$.

b) $MN = \sqrt{(-16)^2 + 2^2 + 4^2} = 2\sqrt{69}$.

$NP = \sqrt{9^2 + (-6)^2 + 1^2} = \sqrt{118}$.

$MP = \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2 + 5^2} = 3\sqrt{10}$.

Ví dụ 5 ★☆☆☆☆

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A(2; -1; 4), B(3; 5; -1), C(-1; 1; 2)$.

a) Tìm toạ độ của $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm toạ độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Hướng dẫn giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 6; -5)$.

b) Để $ABCD$ là hình bình hành thì điểm D phải thoả mãn điều kiện $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Gọi $D(x_D; y_D; z_D)$, ta có $\overrightarrow{DC} = (-1 - x_D; 1 - y_D; 2 - z_D)$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff \begin{cases} -1 - x_D = 1 \\ 1 - y_D = 6 \\ 2 - z_D = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} x_D = -2 \\ y_D = -5 \\ z_D = 7 \end{cases}$$

Vậy $D(-2; -5; 7)$.

(3) Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $A(1; 0; 2), B(3; 2; 5), C(7; -3; 9)$ và $A'(5; 0; 1)$. Tìm tọa độ các điểm D và D' sao cho $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp.

(4) Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0; 2; 1), B(3; -2; 1), C(-2; 5; 7)$.

a) Tính chu vi tam giác ABC.

b) Tính $\widehat{BAC}$.

(5) Trong không gian $Oxyz$, một vật đi từ điểm $A(2; 3; 0)$ đến điểm $B(-1; 1; 2)$. Tìm vectơ biểu thị độ dịch chuyển của vật khi vật đi từ điểm A đến điểm B.

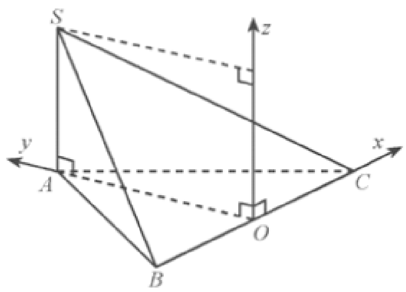
Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác

Trong không gian $Oxyz$:

- Cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$. Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là
$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right).$$
- Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B), C(x_C; y_C; z_C)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là
$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}; \frac{y_A+y_B+y_C}{3}; \frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right).$$

Ví dụ 6

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC), SA = a$ và đáy ABC là tam giác đều cạnh a, O là trung điểm của BC. Bằng cách thiết lập hệ tọa độ như hình vẽ, hãy tìm tọa độ:



a) Các điểm A, S, B, C.

b) Trung điểm M của SB và trung điểm N của SC.

c) Trọng tâm G của tam giác SBC.

Hướng dẫn giải.

a) Vì ABC là tam giác đều cạnh a, O là trung điểm của BC nên AO là đường cao.
Suy ra $AO = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $OB = OC = \dfrac{a}{2}$.
Vì $\overrightarrow{OC}$ và $\vec{i}$ cùng hướng và $OC = \dfrac{a}{2}$ nên $\overrightarrow{OC} = \dfrac{a}{2}\vec{i}$. Suy ra $C\left(\dfrac{a}{2}; 0; 0\right)$.
Vì $\overrightarrow{OB}$ và $\vec{i}$ ngược hướng và $OB = \dfrac{a}{2}$ nên $\overrightarrow{OB} = -\dfrac{a}{2}\vec{i}$. Suy ra $B\left(-\dfrac{a}{2}; 0; 0\right)$.
Vì $\overrightarrow{OA}$ và $\vec{j}$ cùng hướng và $OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $\overrightarrow{OA} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\vec{j}$. Suy ra $A\left(0; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$.
Gọi I là hình chiếu của S trên Oz. Ta có $OI = SA$.
Vì OI và $\vec{k}$ cùng hướng và $OI = a$ nên $\overrightarrow{OI} = a\vec{k}$. Theo quy tắc hình bình hành có:
$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OI} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\vec{j} + a\vec{k}$. Do đó $S\left(0; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; a\right)$.

b) Ta có $M\left(-\dfrac{a}{4}; \dfrac{a\sqrt{3}}{4}; \dfrac{a}{2}\right), N\left(\dfrac{a}{4}; \dfrac{a\sqrt{3}}{4}; \dfrac{a}{2}\right)$.

c) $G\left(0; \dfrac{a\sqrt{6}}{3}; \dfrac{a}{3}\right)$.

Ví dụ 7 ★☆☆☆☆

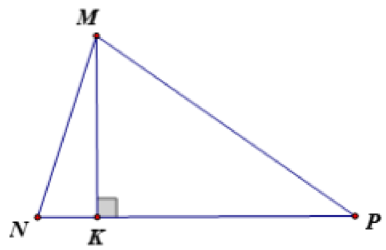
Cho tam giác MNP có $M(0;1;2), N(5;9;3), P(7;8;2)$.

a) Tìm tọa độ điểm K là chân đường cao kẻ từ M của tam giác MNP.

b) Tìm độ dài cạnh MN và MP.

c) Tính góc M.

Hướng dẫn giải.



a) Ta có $\overrightarrow{NP} = (2;-1;-1)$.

Vì K là chân đường vuông góc kẻ từ M xuống NP nên $K \in NP$ và $MK \perp NP$.

Gọi $K(x;y;z)$, ta có $\overrightarrow{KP} = (7-x; 8-y; 2-z)$. Vì $\overrightarrow{NP}$ và $\overrightarrow{KP}$ cùng phương nên tồn tại $t \in \mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{KP} = t\overrightarrow{NP}$. Do đó:

$$\begin{cases} 7-x = 2t \Leftrightarrow x = 7-2t \\ 8-y = -t \Leftrightarrow y = 8+t \\ 2-z = -t \Leftrightarrow z = 2+t \end{cases} \Rightarrow K(7-2t; 8+t; 2+t)$$

Khi đó $\overrightarrow{MK} = (7-2t; 7+t; t)$.

Vì $MK \perp NP$ nên $\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow (7-2t)\cdot 2 + (7+t)\cdot(-1) + t\cdot(-1) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{7}{6}$.

Vậy $K\left(\dfrac{14}{3}; \dfrac{55}{6}; \dfrac{19}{6}\right)$.

b) Ta có $\overrightarrow{MN} = (5;8;1)$; $\overrightarrow{MP} = (7;7;0)$.

$$MN = \sqrt{5^2+8^2+1^2} = 3\sqrt{10}; \quad MP = \sqrt{7^2+7^2+0^2} = 7\sqrt{2}$$

c) Ta có:

$$\cos\widehat{M} = \frac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}}{MN\cdot MP} = \frac{5\cdot 7 + 8\cdot 7 + 1\cdot 0}{3\sqrt{10}\cdot 7\sqrt{2}} = \frac{91}{42\sqrt{5}} = \frac{13\sqrt{5}}{30} \Rightarrow \widehat{M} \approx 14^\circ 18'$$

6 Cho tam giác MNP có $M(2;1;3), N(1;2;3), P(-3;-1;0)$. Tìm tọa độ:

a) Các điểm M', N', P' lần lượt là trung điểm của các cạnh NP, MP, MN;

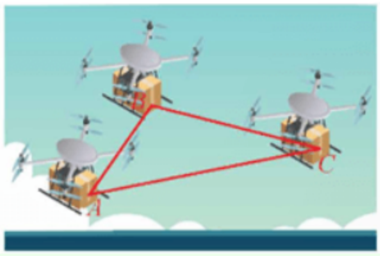
b) Trọng tâm G của tam giác $M'N'P'$.

7 Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;0;1), B(2;1;2)$ và trọng tâm $G(1;-1;1)$. Tìm tọa độ đỉnh C.

8 Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-4;0), B(-1;1;3), C(3;1;0)$. Tìm điểm M trên trục Ox có hoành độ dương sao cho $AM = BC$.

9

Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$, một đội gồm ba drone giao hàng A, B, C đang có tọa độ là $A(1;1;1), B(5;7;9), C(9;11;4)$. Tính:

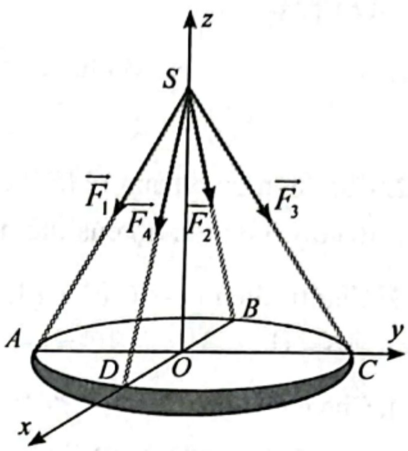


a) Các khoảng cách giữa mỗi cặp drone giao hàng.

b) Góc $\widehat{BAC}$.

10

Một chiếc đèn chùm có trọng lượng 160 N được treo bởi bốn sợi xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $SA = 80\sqrt{2}\,\text{cm}$, $\widehat{ASC} = 90^\circ$. Cho biết trọng lực của đèn được phân bố đều lên bốn sợi xích. Gọi $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ là lực tác dụng của các sợi xích lên móc treo S. Với hệ tọa độ $Oxyz$ như trong Hình 1, hãy tìm tọa độ các lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$.



Hình 1

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;3;5), B(1;-1;1)$, khi đó trung điểm I của AB có tọa độ là

Ⓐ $(0;-4;4)$. Ⓑ $(2;2;6)$. Ⓒ $(0;-2;-4)$. Ⓓ $(1;1;3)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tam giác ABC với $A(-2;4;1), B(1;1;-6)$, $C(0;-2;3)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của $\triangle ABC$.

Ⓐ $G\left(-\dfrac{1}{3};1;-\dfrac{2}{3}\right)$. Ⓑ $G(-1;3;-2)$.

Ⓒ $G\left(\dfrac{1}{3};-1;\dfrac{2}{3}\right)$. Ⓓ $G\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2};-\dfrac{5}{2}\right)$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}=(-1;5;0)$ và $\vec{v}=(1;-5;-3)$, tọa độ của vectơ $\vec{u}+\vec{v}$ là

Ⓐ $(2;-10;3)$. Ⓑ $(2;10;3)$. Ⓒ $(0;0;-3)$. Ⓓ $(2;0;3)$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}=(-2;6;2)$, vectơ $\vec{c}=\dfrac{3}{2}\vec{a}$ có tọa độ là

Ⓐ $(-6;9;6)$. Ⓑ $(-3;9;3)$. Ⓒ $(6;9;6)$. Ⓓ $(-3;6;3)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(2;-1;0)$, $\vec{b}=(-1;-3;2)$, $\vec{c}=(-2;-4;-3)$, tọa độ của vectơ $\vec{w}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ là

Ⓐ $(5;3;-9)$. Ⓑ $(-5;-3;9)$.

Ⓒ $(-3;-7;-9)$. Ⓓ $(3;7;9)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2), B(2;1;-4)$. Tọa độ $\overrightarrow{AB}$ là

Ⓐ $(3;0;-2)$. Ⓑ $(-1;-2;6)$. Ⓒ $(1;0;-6)$. Ⓓ $(1;2;-6)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;0), B(3;1;1)$. Tọa độ điểm đối xứng A qua B là

Ⓐ $(1;-2;-4)$. Ⓑ $(0;3;-1)$.

Ⓒ $(4;3;2)$. Ⓓ $(0;-1;3)$.

Câu 8. Cho $A(2;1;-1), B(1;2;3)$. Độ dài AB bằng

Ⓐ $\sqrt{3}$. Ⓑ $\sqrt{22}$. Ⓒ 18. Ⓓ $3\sqrt{2}$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{u} = (-1;1;3)$, $\vec{v} = (-2;1;-3)$. Tính $\left|2\vec{u} - 3\vec{v}\right|$.

Ⓐ $\sqrt{322}$. Ⓑ $\sqrt{216}$. Ⓒ $\sqrt{242}$. Ⓓ $\sqrt{152}$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{a} = (1;-2;0)$, $\vec{b} = (-2;3;1)$. Khẳng định nào dưới đây sai?

Ⓐ $\vec{a}\vec{b} = -8$.
Ⓑ $2\vec{a} = (2;-4;0)$.
Ⓒ $\vec{a} + \vec{b} = (-1;1;-1)$.
Ⓓ $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{14}$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;-1;2)$. Tìm tọa độ điểm N đối xứng với M qua mặt phẳng (Oyz).

Ⓐ $N(0;-1;2)$.
Ⓑ $N(3;1;-2)$.
Ⓒ $N(-3;-1;2)$.
Ⓓ $N(0;1;1)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{a} = 3\vec{j} + \vec{k}$ và $\vec{b} = (1;m;6)$. Tìm giá trị m để $\vec{a}$ vuông góc với $\vec{b}$.

Ⓐ $m = -3$. Ⓑ $m = 2$. Ⓒ $m = -2$. Ⓓ $m = 3$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (0;1;1)$, $\vec{b} = (-1;1;0)$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

Ⓐ 60°. Ⓑ 120°. Ⓒ 150°. Ⓓ 30°.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u} = (2;-1;4)$. Độ dài vectơ $\vec{u}$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ $\sqrt{5}$. Ⓒ 27. Ⓓ $\sqrt{21}$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u} = (1;-2;3)$. Vectơ nào sau đây cùng phương với $\vec{u}$?

Ⓐ $\vec{a} = (2;4;6)$.
Ⓑ $\vec{b} = (-3;6;-9)$.
Ⓒ $\vec{c} = \left(\frac{1}{2};-2;\frac{3}{2}\right)$.
Ⓓ $\vec{d} = (-1;2;-3)$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u} = (1;-2;4)$ và điểm A. Biết $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$. Tọa độ của điểm A là:

Ⓐ $(1;2;4)$.
Ⓑ $(1;-2;4)$.
Ⓒ $(-1;2;-4)$.
Ⓓ $(-1;-2;-4)$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u}=(1;2;3)$ và điểm $A(-1;-1;1)$. Tọa độ điểm C thỏa mãn $\overrightarrow{AC}=\vec{u}$ là:

Ⓐ $(0;1;4)$. Ⓑ $(-2;-3;-2)$.
Ⓒ $(2;3;2)$. Ⓓ $(0;-1;-4)$.

2 Tự luận

Bài 1. Cho ba điểm $A(2;1;-1), B(3;2;0)$ và $C(2;-1;3)$.

a) Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của một tam giác. Tính chu vi tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ trung điểm của các cạnh của tam giác ABC.

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Bài 2. Cho điểm $M(1;2;3)$. Hãy tìm tọa độ của các điểm:

a) M_1, M_2, M_3 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$.

b) Gọi M_4, M_5, M_6 lần lượt là các điểm thỏa mãn:

- O là trung điểm của MM_4;
- MM_5 vuông góc với mặt phẳng (Oxy) tại điểm H sao cho H là trung điểm của MM_5.
- MM_6 vuông góc và cắt trục Oy tại điểm K sao cho K là trung điểm của MM_6.

Bài 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(4;6;-5), B(5;7;-4), C(5;6;-4), D'(2;0;2)$. Tìm toạ độ các đỉnh còn lại của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Bài 4. Cho ba điểm $A(3;3;3), B(1;1;2)$ và $C(5;3;1)$.

a) Tìm điểm M trên trục Oy cách đều hai điểm B, C.

b) Tìm điểm N trên mặt phẳng (Oxy) cách đều ba điểm A, B, C.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(1;0;1)$, $\vec{b}=(1;1;0)$, $\vec{c}=(-4;3;m)$.

a) Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

b) Tìm m để $\vec{d}=2\vec{a}+3\vec{b}$ vuông góc với $\vec{c}$.

Bài 6. Cho các điểm $A(-1;-1;0), B(0;3;-1), C(-1;14;0), D(-3;6;2)$. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình thang.

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(a;b;c)$. Gọi A, B, C theo thứ tự là điểm đối xứng của điểm M qua các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$. Tìm tọa độ trọng tâm tam giác ABC.

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(3;5;2), B(0;6;2)$ và $C(2;3;6)$. Hãy giải tam giác ABC.

Bài 9. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(-4;3;3), N(4;-4;2)$ và $P(3;6;-1)$. Tính chu vi hình bình hành $MNPQ$.

Bài 10. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(4;2;-1), B(1;-1;2)$ và $C(0;-2;3)$.

a) Tìm tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$, từ đó tính độ dài AB.

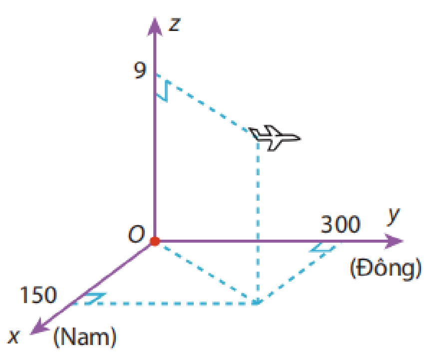
b) Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

c) Tìm tọa độ điểm N thuộc trục Oz sao cho đường thẳng BN vuông góc với đường thẳng AC.

d) Tìm tọa độ điểm P thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, P thẳng hàng.

Bài 11. Một vật ở trạng thái cân bằng khi hợp của tất cả các lực tác dụng lên vật được biểu diễn bằng vectơ–không. Trong không gian $Oxyz$, biết rằng đang có ba lực biểu thị bởi ba vectơ $\overrightarrow{F_1} = (9;7;2), \overrightarrow{F_2} = (1;5;10)$ và $\overrightarrow{F_3} = (9;-2;-7)$. tác dụng lên một vật. Hãy tìm toạ độ của vectơ biểu thị lực $\overrightarrow{F_4}$ để khi tác dụng thêm lực này vào vật thì vật ở trạng thái cân bằng.

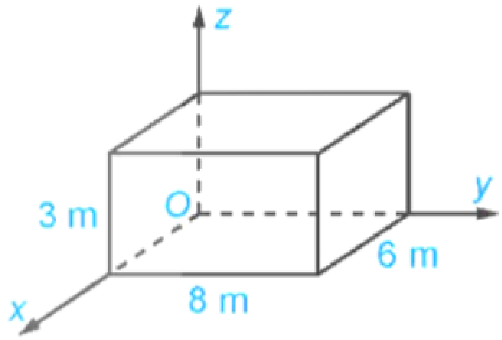
Bài 12. Trong Hình 2.41, gốc tọa độ O là nơi máy bay xuất phát, trục Ox theo hướng Nam, trục Oy theo hướng Đông, trục Oz theo hướng thẳng đứng. Đơn vị trên các trục là km. Vào thời điểm 9h30 sáng, máy bay ở độ cao 9 km, cách điểm xuất phát theo hướng Nam 150 km và theo hướng Đông 300 km. Phi công để chế độ bay tự động, với vận tốc theo hướng Đông 750 km/h, độ cao không đổi.



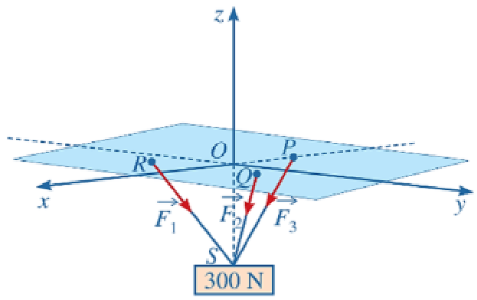
Hình 2.41

Biết rằng gió thổi theo hướng Bắc với vận tốc 10 m/s. Tìm tọa độ của máy bay lúc 10h30, với giả định là trong khoảng thời gian 9h30 đến 10h30, vận tốc và hướng của gió không thay đổi.

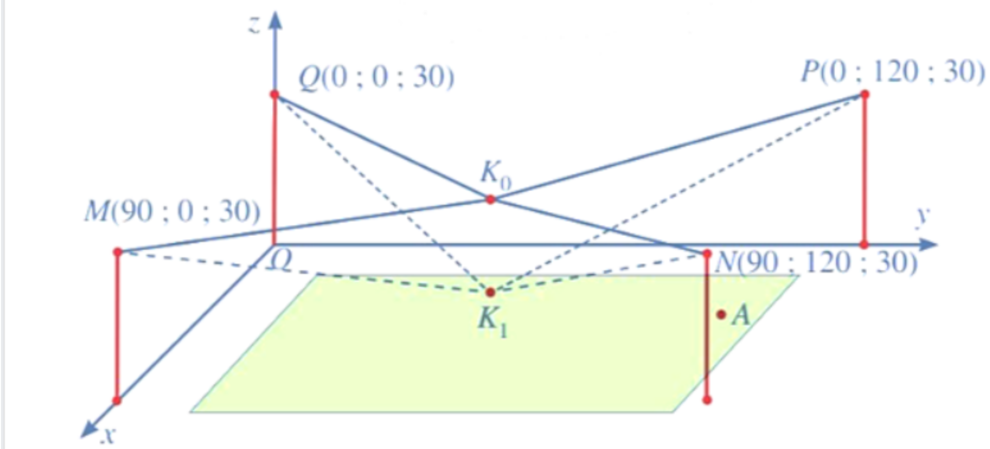
Bài 13. Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 8 m, chiều rộng là 6 m và chiều cao là 3 m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét (hình vẽ). Tìm tọa độ của điểm treo đèn.



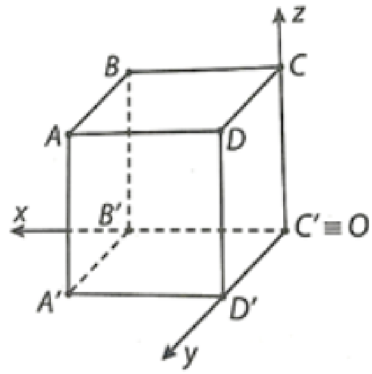
Bài 14. Một vật có trọng lượng 300N được treo bằng ba sợi dây cáp không dãn có chiều dài bằng nhau, mỗi dây cáp có một đầu được gắn tại một trong các điểm $P(-2;0;0), Q(1;\sqrt{3};0), R(1;-\sqrt{3};0)$ còn đầu kia gắn với vật tại điểm $S(0;0;-2\sqrt{3})$ như hình bên. Gọi $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ lần lượt là lực căng trên các sợi dây cáp RS, QS và PS. Tìm tọa độ các lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$.



Bài 15. Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn. Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90;0;30), N(90;120;30), P(0;120;30), Q(0;0;30)$ (Hình vẽ). Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A, camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 có cao độ bằng 19. Tìm tọa độ các điểm K_0, K_1 và vectơ $\overrightarrow{K_0K_1}$.



Bài 16. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1. Xét hệ tọa độ $Oxyz$ gắn với hình lập phương như hình vẽ bên.

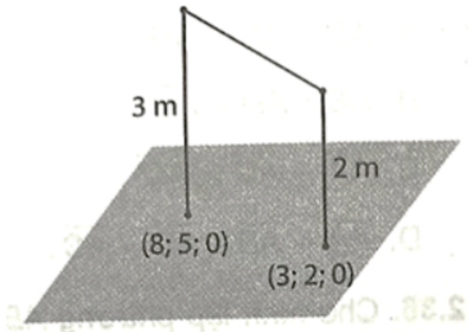


a) Tìm tọa độ các đỉnh của hình lập phương.

b) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác $B'CD'$.

c) Chứng minh rằng ba điểm O, G, A thẳng hàng.

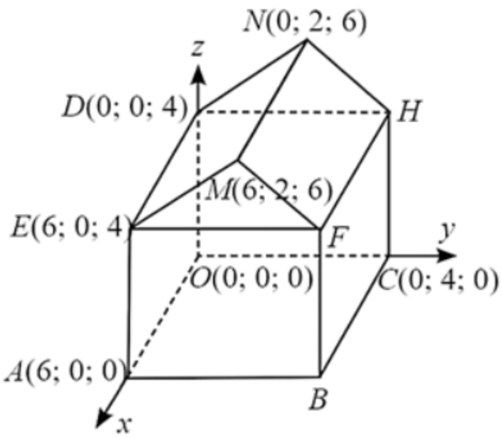
Bài 17. Trên sân thể dục thầy giáo dựng hai chiếc cột vuông góc với mặt sân, chiều cao của mỗi chiếc cột lần lượt là 3 m và 2 m. Xét hệ tọa độ $Oxyz$ sao cho mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời. Đơn vị trong hệ tọa độ $Oxyz$ được lấy theo mét.



a) Biết rằng chân của hai cột đó có tọa độ lần lượt là $(8; 5; 0)$ và $(3; 2; 0)$, hãy tìm tọa độ điểm đầu của mỗi cột.

b) Thầy giáo dự định căng một sợi dây nối hai đầu của hai cột. Hỏi sợi dây cần có độ dài tối thiểu là khoảng bao nhiêu mét?

Bài 18. Một nhân viên đang sử dụng phần mềm để thiết kế khung của một ngôi nhà trong không gian $Oxyz$ được minh họa như Hình bên. Cho biết $OABC.DEFH$ là hình hộp chữ nhật và $EMF.DNH$ là hình lăng trụ đứng.



a) Tìm tọa độ các điểm B, F, H.

b) Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MF}$.

c) Tính số đo $\widehat{EMF}$.

Chuyên đề 4 ÔN TẬP CHƯƠNG 2

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vec-tơ $\overrightarrow{a}=(-2;5;-3)$, $\overrightarrow{b}=(4;-4;-6)$. Tọa độ vec-tơ $-2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}$ là

Ⓐ $(8;-19;10)$.
Ⓑ $(2;1;-9)$.
Ⓒ $(-8;2;24)$.
Ⓓ $(10;2;15)$.

Câu 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Véctơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng véctơ $\overrightarrow{B'D'}$ là véctơ nào dưới đây?

Ⓐ $\overrightarrow{DB}$.
Ⓑ $\overrightarrow{D'B'}$.
Ⓒ $\overrightarrow{BA'}$.
Ⓓ $\overrightarrow{BD}$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu của điểm $A(1;2;5)$ trên mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là

Ⓐ $(0;2;5)$.
Ⓑ $(0;2;0)$.
Ⓒ $1(1;0;5)$.
Ⓓ $(0;0;5)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $P(-1;-8;10)$ và $Q(-6;-1;-3)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{PQ}$ là

Ⓐ $(-5;7;7)$.
Ⓑ $(6;8;30)$.
Ⓒ $(5;-7;-7)$.
Ⓓ $(-7;-9;-13)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\overrightarrow{v}=(-1;6;3)$ và điểm A. Biết $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{v}$. Tọa độ điểm A là

Ⓐ $(1;-6;3)$.
Ⓑ $(-1;6;3)$.
Ⓒ $(-1;-6;-3)$.
Ⓓ $(-1;6;0)$.

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$. Mệnh đề nào đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.

Câu 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Véc tơ đối của véc tơ $\overrightarrow{AA'}$ là

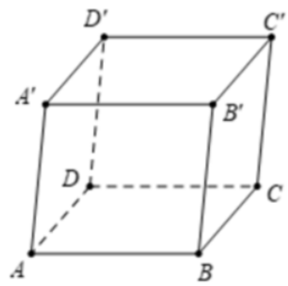
Ⓐ $\overrightarrow{A'C'}$.
Ⓑ $\overrightarrow{C'C}$.
Ⓒ $\overrightarrow{BB'}$.
Ⓓ $\overrightarrow{BA'}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của $\vec{a}$ là

Ⓐ $(3;-2;1)$. Ⓑ $(-1;2;-3)$.

Ⓒ $(2;-3;-1)$. Ⓓ $(1;-2;3)$.

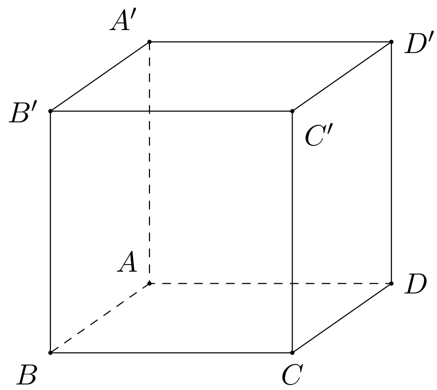
Câu 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (minh họa như hình bên). Phát biểu nào sau đây là đúng?



Ⓐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{AC'}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{AC'}$.

Ⓒ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$. Ⓓ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC'}$.

Câu 10. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D$. Góc giữa hai vecto $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD'}$ bằng



Ⓐ 30° . Ⓑ 135° . Ⓒ 45° . Ⓓ 60° .

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;3)$ và $B(-1;2;5)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

Ⓐ $I(-2;2;1)$. Ⓑ $I(1;0;4)$.

Ⓒ $I(2;0;8)$. Ⓓ $I(2;-2;-1)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;3;5), B(2;0;1), C(0;9;0)$. Tọa độ trung điểm G của $\triangle ABC$ là

Ⓐ $(3;12;6)$. Ⓑ $(1;5;2)$. Ⓒ $(1;0;5)$. Ⓓ $I(1;4;2)$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1), B(2;1;-3), C(-3;5;1)$. Tọa độ D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành là

Ⓐ $D(-4;6;3)$. Ⓑ $D(-2;2;5)$.

Ⓒ $D(-2;8;-3)$. Ⓓ $D(-4;6;-5)$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{u} = (0;-1;0), \vec{v} = (\sqrt{3};1;0)$. Giá trị của α là

Ⓐ $\dfrac{\pi}{6}$. Ⓑ $\dfrac{\pi}{2}$. Ⓒ $\dfrac{\pi}{3}$. Ⓓ $\dfrac{2\pi}{3}$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{u} = (2; -2; 1)$. Độ dài vec-tơ $\overrightarrow{u}$ bằng

Ⓐ 9 . Ⓑ 3 . Ⓒ 2 . Ⓓ 4 .

Câu 16. Khoảng cách giữa hai điểm $I(1; 4; -7)$ và $K(6; 4; 5)$ là

Ⓐ 169 . Ⓑ 13 . Ⓒ 26 . Ⓓ $6,5$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2; -1; 1), B(-1; 3; -1), C(5; -3; 4)$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ có giá trị bằng

Ⓐ 48 . Ⓑ 52 . Ⓒ -48 . Ⓓ -52 .

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1; 2; 3), B(1; 0; 2)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MA}$ là

Ⓐ $M\left(-2; 3; \dfrac{7}{2}\right)$. Ⓑ $M\left(-2; -3; \dfrac{7}{2}\right)$.

Ⓒ $M(-2; 3; 7)$. Ⓓ $M(-4; 6; 7)$.

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{0}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

Ⓒ $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BG}$. Ⓓ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$.

Câu 20. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của CC'. Vectơ $\overrightarrow{AM}$ bằng:

Ⓐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.

Ⓒ $\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

Câu 21. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB'}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

Ⓒ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AD'}$. Ⓓ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'}$.

Câu 22. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm CD. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{a^2}{4}$. Ⓑ $\dfrac{a^2}{2}$. Ⓒ $\dfrac{a^2}{3}$. Ⓓ a^2 .

Câu 23. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{i}$ và $\overrightarrow{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ bằng:

Ⓐ 30° . Ⓑ 60° . Ⓒ 120° . Ⓓ 150° .

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$. Trong các vectơ có hai đầu mút là hai đỉnh phân biệt của tứ diện, có bao nhiêu vectơ có giá nằm trong mặt phẳng (ABC)?

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 5. Ⓓ 6.

Câu 25. Trong không gian cho $\vec{a} \neq \vec{0}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ Vectơ $\vec{a}$ có đúng một vectơ đối .

Ⓑ Vectơ $\vec{a}$ có hai vectơ đối là $\vec{0}$ và chính nó .

Ⓒ Vectơ $\vec{a}$ có hai vectơ đối là $\vec{a}$ và $-\vec{a}$.

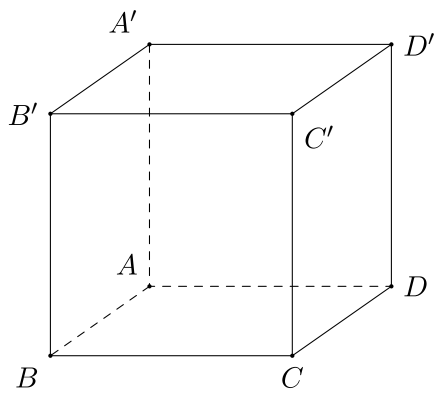
Ⓓ Các vectơ đối của $\vec{a}$ đều bằng nhau.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $|\vec{a}| = \sqrt{2}$. Ⓑ $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. Ⓒ $\vec{a} \perp \vec{b}$. Ⓓ $\vec{c} \perp \vec{b}$.

Câu 27. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D$ có độ dài mỗi cạnh bằng 2. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{B'D'}$ bằng

Ⓐ 4 . Ⓑ $2\sqrt{2}$. Ⓒ $-2\sqrt{2}$. Ⓓ -4 .



Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho $M(2; 1; 0)$. Khẳng định nào sau đây là sai?

Ⓐ Điểm M nằm trên mặt phẳng (Oxy).

Ⓑ Khoảng cách từ M đến trục Ox bằng 1.

Ⓒ Điểm M nằm trên trục Oz.

Ⓓ Khoảng cách từ M đến trục Oy bằng 2.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, $\vec{a} = (m; 2; 3)$, $\vec{b} = (1; n; 2)$. Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương khi:

Ⓐ $\begin{cases} m = \dfrac{1}{2} \\ n = \dfrac{4}{3} \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} m = \dfrac{3}{2} \\ n = \dfrac{4}{3} \end{cases}$.

Ⓒ $\begin{cases} m = \dfrac{3}{2} \\ n = \dfrac{2}{3} \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} m = \dfrac{2}{3} \\ n = \dfrac{4}{3} \end{cases}$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{a} = 3\vec{j} + \vec{k}$ và $\vec{b} = (1; m; 6)$. Tìm giá trị m để $\vec{a}$ vuông góc với $\vec{b}$.

Ⓐ $m = -3$. Ⓑ $m = 2$. Ⓒ $m = -2$. Ⓓ $m = 3$.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết tọa độ hình chiếu của điểm A lên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $M(1;0;0), N(0;-2;0), P(0;0;3)$. Tọa độ véc tơ $\overrightarrow{OA}$ là

Ⓐ $(1;-2;3)$. Ⓑ $(1;2;3)$. Ⓒ $(-1;2;-3)$. Ⓓ $(-1;2;3)$.

Câu 32. Cho điểm $A(3;-1;1)$. Hình chiếu vuông góc A lên mặt phẳng (Oxy) là

Ⓐ $(3;0;0)$. Ⓑ $(0;-1;1)$. Ⓒ $(0;-1;0)$. Ⓓ $(0;0;1)$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-3;2;-1)$. Điểm đối xứng M qua mặt phẳng (Oxy) có tọa độ

Ⓐ $(-3;2;1)$. Ⓑ $(3;2;1)$. Ⓒ $(3;2;-1)$. Ⓓ $(3;-2;-1)$.

Câu 34. Hình chiếu vuông góc điểm $M(2;1;-1)$ trên trục Oz có tọa độ là

Ⓐ $(2;1;0)$. Ⓑ $(0;0;-1)$. Ⓒ $(2;0;0)$. Ⓓ $(0;1;0)$.

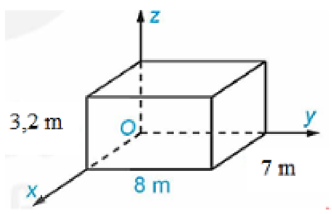
Câu 35. Cho điểm $A(-3;1;2)$, điểm đối xứng A qua trục Oy có tọa độ là:

Ⓐ $(3;-1;-2)$. Ⓑ $(3;-1;2)$.
Ⓒ $(3;1;-2)$. Ⓓ $(-3;-1;2)$.

Câu 36. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài bằng 1. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'D'}$.

Ⓐ 1 . Ⓑ $2\sqrt{2}$. Ⓒ $\sqrt{3}$. Ⓓ $\sqrt{2}$.

Câu 37. Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 8m , chiều rộng là 7m và chiều cao là 3,2 m . Tại vị trí chính giữa trần nhà của phòng học được gắn một chiếc quạt trần. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn (hình vẽ), đơn vị đo được lấy theo mét. Tìm toạ độ của điểm gắn quạt.



Ⓐ $(3,5;4,3;2)$. Ⓑ $(4;3,5;3,2)$.
Ⓒ $(4;3,5;1,6)$. Ⓓ $(3,5;4;1,6)$.

Câu 38. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD. Chọn khẳng định đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$.
Ⓑ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD})$.
Ⓓ $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -4)$ và $\overrightarrow{AB} = (-4; 0; 6)$. Tọa độ của điểm B là

Ⓐ $(-1; 6; -6)$.
Ⓑ $(5; 2; -10)$.
Ⓒ $(-3; 2; 2)$.
Ⓓ $(0; 4; -5)$.

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$ có $B(3; 0; 8), D(-5; -4; 0)$. Độ dài cạnh của hình vuông đã cho bằng

Ⓐ 6 . Ⓑ 12 . Ⓒ $5\sqrt{2}$. Ⓓ $6\sqrt{2}$.

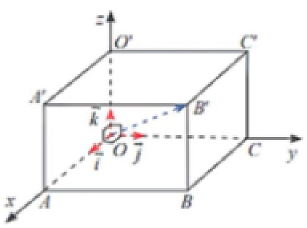
Câu 41. Trong không gian với một hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị đo lấy theo mét), một công ty xây dựng cần xác định chiều dài của một sợi dây cáp nối giữa hai điểm cao trên hai tòa nhà để lắp đặt hệ thống điện. Tòa nhà thứ nhất có đỉnh ở vị trí $A(3; 5; 12)$ và tòa nhà thứ hai có đỉnh ở vị trí $B(8; 2; 20)$. Hỏi công ty cần chuẩn bị sợi dây cáp có chiều dài tối thiểu là bao nhiêu mét để nối hai đỉnh tòa nhà (làm tròn đến hàng đơn vị)

Ⓐ 11 . Ⓑ 12 . Ⓒ 10 . Ⓓ 9 .

Câu 42. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Khi đó góc giữa vectơ $\overrightarrow{B'A'}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ $60°$. Ⓑ $120°$. Ⓒ $30°$. Ⓓ $90°$.

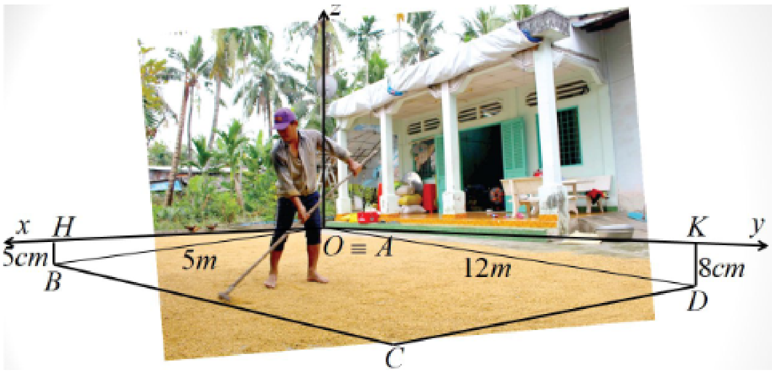
Câu 43. Cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ có cạnh $OA = 4, OC = 6, OO' = 3$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ O; các điểm A, C, O' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz.



Xác định tọa độ điểm B.

Ⓐ $B(4; 6; 0)$. Ⓑ $B(6; 4; 3)$. Ⓒ $B(6; 4; 0)$. Ⓓ $B(4; 6; 3)$.

Câu 44. Ở một số vùng quê ở Việt Nam, trước mỗi nhà thường có một khoảng sân rộng để phơi lúa vào mùa gặt và cũng là nơi để tổ chức một số sự kiện: đám cưới, đám hỏi, thôi nôi. Bác Nam tính xây một sân trước cửa nhà hình chữ nhật $ABCD$ có độ dài các cạnh lần lượt là $AB = 5$ và $AD = 12$ m. Để tiện cho việc thoát nước khi trời mưa và khi rửa sân nên bác Nam xây vị trí B thấp hơn vị trí A là 5 cm, vị trí D thấp hơn vị trí A là 8 cm. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, hãy xác định xem vị trí C thấp hơn vị trí A bao nhiêu cm? (làm tròn đến cm)



Ⓐ 5 . Ⓑ 13 . Ⓒ 12 . Ⓓ 30 .

Câu 45. Cho ba điểm $A(3;1;0), B(2;1;-1), C(x;y;-1)$. Tìm tọa độ C để tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A.

Ⓐ $(4;1+\sqrt{2};-1)$. Ⓑ $(4;1-\sqrt{2};-1)$.

Ⓒ $(4;1;-1)$. Ⓓ $(2;-1;-1)$.

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2;1;-1)$, $\vec{b} = (1;3;m)$. Tìm m để $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 90^\circ$.

Ⓐ $m = 5$. Ⓑ $m = -5$. Ⓒ $m = -2$. Ⓓ $m = 1$.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Chọn khẳng định đúng.

Ⓐ $\overrightarrow{OM} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Ⓑ $\overrightarrow{OM} = \vec{k} - 2\vec{j} + 3\vec{i}$.

Ⓒ $\overrightarrow{OM} = \vec{j} - 2\vec{i} + 3\vec{k}$. Ⓓ $\overrightarrow{OM} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;-2), B(1;-1;0)$. Tìm tọa độ điểm C nằm trên trục Oz sao cho $AB \perp BC$.

Ⓐ $\left(0;0;\dfrac{1}{2}\right)$. Ⓑ $(0;0;1)$.

Ⓒ $(0;0;-1)$. Ⓓ $\left(0;0;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

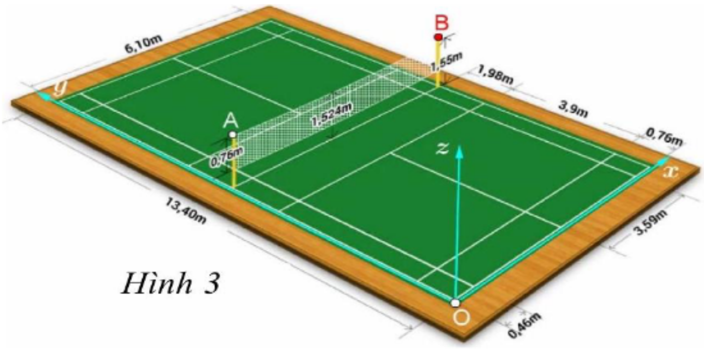
Ⓐ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Ⓑ $\vec{a}\cdot\vec{b}=2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Ⓒ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Ⓓ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Câu 50. Một sân cầu lông có kích thước cho trong hình bên dưới (Hình bên), với hệ trục tọa độ $Oxyz$ đã được chọn.



Hình 3

Tọa độ của $\overrightarrow{AB}$ là

Ⓐ $(6,1;3,9;0)$. Ⓑ $(6,7;0;0)$.

Ⓒ $(6,7;0;1,55)$. Ⓓ $(6,1;0;0)$.

2 Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Trong không gian, cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên $2a$. Gọi M là trung điểm $B'C'$. Khi đó:

A ___ $\overrightarrow{A'B'}-\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{BC}$.

B ___ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BB'}=0$.

C ___ $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}\right|=3a$.

D ___ $\cos\left(\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{A'M}\right)=\dfrac{3}{2\sqrt{15}}$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;0;1), B(2;1;2), C(1;-1;1)$.

A ___ Ba điểm A, B, C thẳng hàng.

B ___ Tọa độ điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ là $D(0;2;-1)$.

C ___ Độ dài $BC=2$.

D ___ $\cos\widehat{BAC}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-5;0;7), B(1;2;1), C(16;5;-2)$. Khi đó:

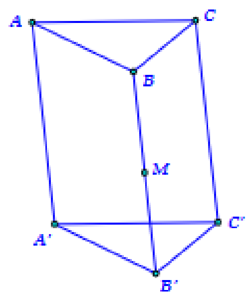
(A) ___ $\overrightarrow{AB} = (6;2;-6)$.

(B) ___ Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng $158,7^\circ$.

(C) ___ $\left|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}\right| = 5\sqrt{22}$.

(D) ___ Điểm $N(a;b;c)$ thuộc đoạn AB thỏa mãn $NA = 3NB$. Khi đó $a+b+c = 4,5$.

Câu 4. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$.



(A) ___ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

(B) ___ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AM}$.

(C) ___ $\overrightarrow{A'M} = \vec{b} - \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}$.

(D) ___ $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;3;-1), N(-1;1;1)$.

(A) ___ Tọa độ $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$.

(B) ___ Tọa độ $\vec{v} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ là $\vec{v} = (1;4;0)$.

(C) ___ Độ dài vectơ $\overrightarrow{MN}$ bằng $\sqrt{17}$.

(D) ___ Cho $P(1;m-1;3)$. Tam giác MNP vuông tại N khi và chỉ khi $m = 1$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2;1;7)$ và $\vec{b} = 5\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

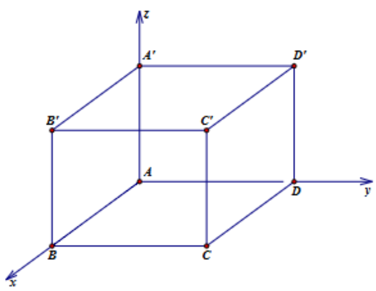
(A) ___ $\vec{b} = (5;4;-2)$.

(B) ___ $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{10}$.

(C) ___ $\vec{a} - 2\vec{b} = (8;7;9)$.

(D) ___ $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Câu 7. Một căn phòng thiết kế hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = 3m, AD = 3\sqrt{3}m$. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$, đỉnh $A \equiv O$, các điểm B, D, A' lần lượt nằm trên các trục Ox, Oy, Oz như hình vẽ bên:



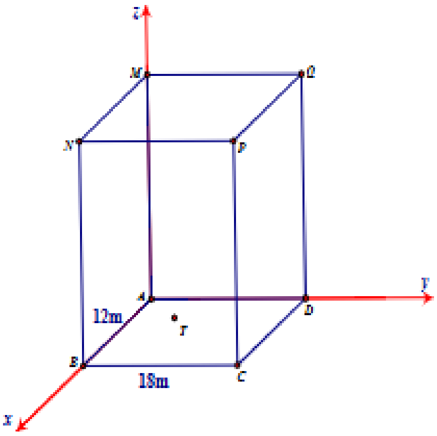
(A) ___ Chiều cao của căn phòng là 3 m .

(B) ___ Tọa độ của điểm $B(3;0;0)$.

(C) ___ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} = 9\sqrt{2}$.

(D) ___ Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{A'C'}$ và $\overrightarrow{DC}$ bằng 60° .

Câu 8. Một tòa nhà 6 tầng có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.MNPQ$. Trong đó, mặt sàn của tòa nhà là hình chữ nhật có kích thước $18m \times 12m$, mỗi tầng của tòa nhà cao bằng nhau và bằng 5 m. Để định vị các vị trí trong tòa nhà, người ta đặt một hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, với $A \equiv O$, mặt sàn tầng 1 là mặt phẳng (Oxy) và 1 đơn vị trên mỗi trục ứng với 1 mét. Thang máy ở sàn tầng 1 ở vị trí $T(2;2;0)$ (giả sử bề dày của các mặt sàn, mặt tường là không đáng kể). Cô Đào làm việc tại tòa nhà này.



A ___ Tọa độ điểm $P(12;18;30)$.

B ___ Khi thang máy lên đến sàn tầng 2 thì vị trí thang máy ở tọa độ $(2;2;10)$.

C ___ Cô Đào làm việc ở tầng 2, biết vị trí bàn làm việc của cô có hoành độ $x = 8$ và tung độ $y = 10$ Khoảng cách từ bàn làm việc của cô đến thang máy ở sàn tầng 2 là 9 mét .

D ___ Bộ phát wifi của tòa nhà được đặt ở tầng 3 tại vị trí có hoành độ $x = 10,5$, tung độ $y = 10,5$ và cách mặt sàn tầng 3 là 3 mét. Nếu cô Đào uống cà phê ở tòa nhà bên cạnh tại vị trí $(5;20;5)$thì điện thoại của cô vẫn bắt được sóng wifi từ tòa nhà mà cô làm việc , biết rằng vùng phủ sóng bộ phát wifi đó có bán kính 20 m (giả sử không gặp vấn đề về đường truyền) .

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;-1), B(2;-1;3), C(-4;7;5)$.

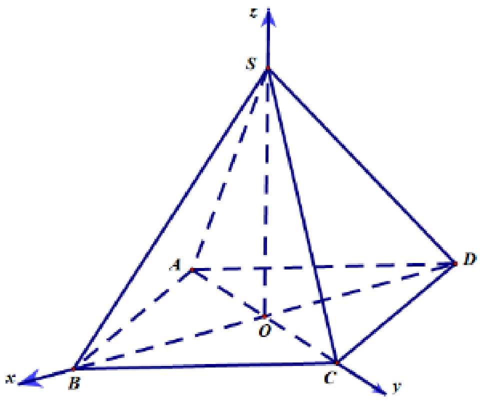
A ___ Tọa độ trọng tâm G của $\triangle ABC$ là $G\left(-\frac{1}{3};\frac{8}{3};\frac{7}{3}\right)$.

B ___ Điểm $D(2;1;-3)$ để $ABCD$ là hình bình hành .

C ___ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -5$.

D ___ Điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ thì ta có $4x + 4y + z = 10$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp đều $S.ABCD$ như hình vẽ, có $O = AC \cap BD, G$ là trọng tâm tam giác SAB. Biết $SA = 4$ và $AB = 2\sqrt{2}$.



(A) ___ Tọa độ điểm $A(0;2;0)$.

(B) ___ Tọa độ $G\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

(C) ___ Nếu $E(a;0;b)$ là điểm sao cho C, E, G thẳng hàng thì $ab = \sqrt{3}$.

(D) ___ Nếu $K(0;m;n)$ là điểm sao cho $KG+KB$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $m^2+n^2 = 1$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1;-2;3)$, $\vec{b} = (1;1;-1)$.

(A) ___ $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{14}$.

(B) ___ $\vec{a}\cdot\vec{b} = -4$.

(C) ___ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương .

(D) ___ $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = 2$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ biết $A(1;-3;2), B(2;5;3), C(4;-3;5)$.

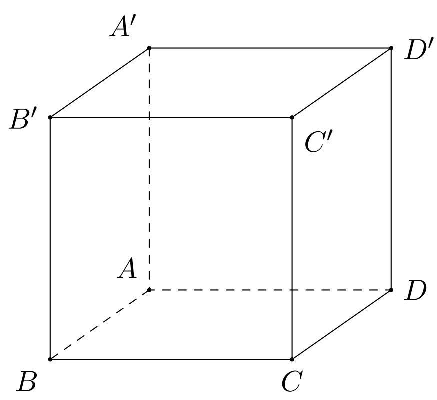
(A) ___ $I(3;1;-4)$ là trung điêm của đoạn BC .

(B) ___ $D(3;11;4)$ là một đỉnh của hình bình hành $ABCD$.

(C) ___ $N(x;y;z) \in Oy$ sao cho $AN \perp BC$. Khi đó $3x-4y+z = 12$.

(D) ___ $M(a;b;c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = -2\overrightarrow{AC}$. Khi đó $a+b+c = -2$.

Câu 13. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D$ có cạnh bằng a.



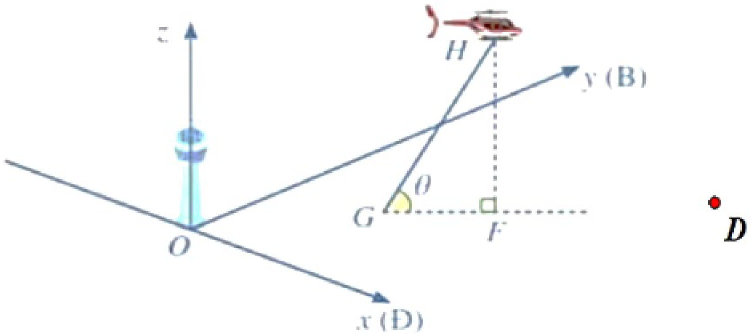
(A) ___ $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DA'}$.

(B) ___ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.

(C) ___ Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC'}$ là $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC'}\right) = 45^\circ$.

(D) ___ Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC'} = -a^2$.

Câu 14. Một chiếc trực thăng H cất cánh từ một sân bay. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc toạ độ O là chân tháp điều khiển sân bay; trục Ox là hướng đông, trục Oy là hướng bắc và trục Oz là trục thẳng đứng, đơn vị trên mỗi trục là kilômét. Trực thăng cất cánh từ điểm G trên mặt đất. Vị trí của trực thăng tại thời điểm t phút sau khi cất cánh $(t \geq 0)$ có toạ độ là $M\left(1+t; \frac{1}{2}+2t; 2t\right)$. Một hòn đảo ở vị trí $D(150; 115; 0)$.



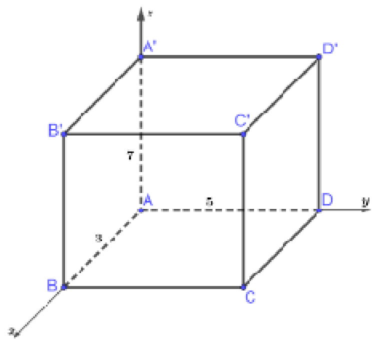
(A) ___ Tọa độ điểm G là $\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$.

(B) ___ Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{MD}$ là $\left(149-t; \frac{129}{2}-2t; -2t\right)$. .

(C) ___ Khoảng cách của máy bay so với vị trí xuất phát sau 5 phút bay là 15km .

(D) ___ Máy bay H bay đến vị trí $M_0(x_0, y_0, z_0)$ thì khoảng cách từ máy bay đến D là nhỏ nhất. Khi đó $20(x_0+y_0+z_0) = 4320$. .

Câu 15. Cho một hình hộp chữ nhật không nắp có ba kích thước lần lượt là $3 \times 5 \times 7$ và được đặt vào hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



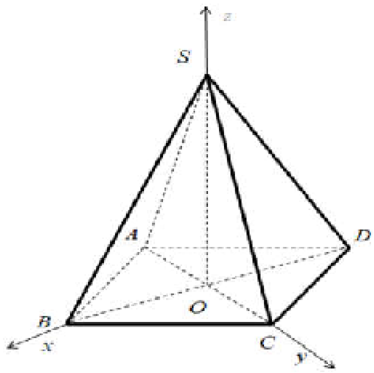
(A) ___ A'' là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (Oxy), khi đó $a+b+c=0$.

(B) ___ Đỉnh $A'(0; 0; 7)$.

(C) ___ Khoảng cách giữa hai điểm A và C' bằng $\sqrt{15}$.

(D) ___ Một chú kiến xuất phát từ điểm B bên ngoài của hình hộp (giả sử chú kiến chỉ bò trên bề mặt của hình hộp) và một miếng mồi của kiến tại điểm O là tâm đáy $ABCD$ ở bên trong hộp. Gọi M điểm chú kiến phải đi qua trên cạnh $A'B'$ sao cho quãng đường mà con kiến tìm đến miếng mồi là ngắn nhất. Khi đó $x_M = \frac{7}{11}$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp đều $S.ABCD$ có $SB = 10$, $CD = 6\sqrt{2}$ được gắn vào hệ trục sao cho tâm của đáy $ABCD$ trùng với gốc tọa độ O như hình vẽ.



Ⓐ ___ Tọa độ đỉnh $S(0;0;6)$.

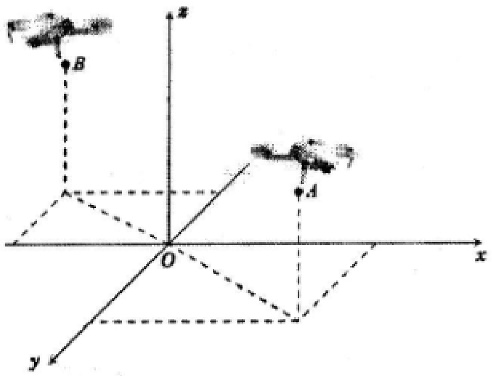
Ⓑ ___ Trọng tâm tam giác SCD là điểm $G\left(-2;2;\dfrac{8}{3}\right)$.

Ⓒ ___ Gọi M là trung điểm cạnh SD thì $BM = \sqrt{79}$

.

Ⓓ ___ Nếu $E(a;0;b) \in (Oxz)$ sao cho $|EG - EA|$ là lớn nhất thì $4a^2 - b^2 = 5$ (G là trọng tâm tam giác SCD) .

Câu 17. Hai chiếc flycam được điều khiển cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc flycam thứ nhất cách mặt đất 5 m, cách điểm xuất phát 6 m về phía Đông và 3 m về phía Nam. Chiếc flycam thứ hai cách mặt đất 5 m, cách điểm xuất phát 2 m về phía Bắc và 4 m về phía Tây. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc flycam, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất có trục Ox hướng về phía Đông, trục Oy hướng về phía Nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo theo mét.



Ⓐ ___ Flycam thứ nhất cách điểm xuất phát một khoảng cách là 8 m .

Ⓑ ___ Tọa độ của chiếc flycam thứ nhất là $A(6;3;5)$, tọa độ của chiếc flycam thứ hai là $B(-2;-4;5)$.

Ⓒ ___ Điểm đối xứng của A qua mặt phẳng tọa độ (Oxy) là $A'(6;3;-5)$.

Ⓓ ___ Trên mặt đất, người ta xác định một vị trí sao cho tổng khoảng cách từ đó đến hai chiếc flycam ngắn nhất. Tọa độ của vị trí đó là $\left(1;\dfrac{1}{2};0\right)$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;2;0), B(2;-5;4), C(0;2;0)$.

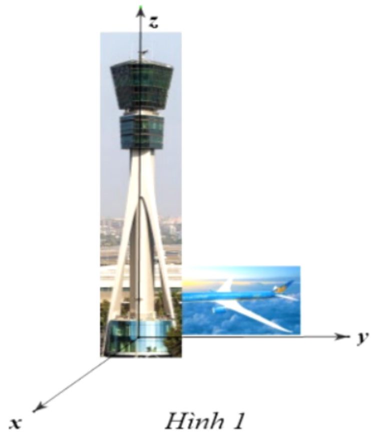
A ___ $\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = (6;-7;4)$.

B ___ Véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương .

C ___ Chu vi tam giác ABC bằng $1 + \sqrt{74} + \sqrt{69}$.

D ___ Điểm $M(a;b;c) \in (Oyz)$ để biểu thức $T = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $a + b + c = \dfrac{5}{3}$.

Câu 19. Một tháp trung tâm kiểm soát không lưu ở sân bay cao $80\,m$ sử dụng ra đa có phạm vi theo dõi $500\,km$ được đặt trên đỉnh tháp. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí chân tháp, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất sao cho trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam, trục Oz hướng thẳng đứng lên phía trên. Một máy bay tại vị trí A cách mặt đất $10\,km$, cách $300\,km$ về phía đông và $200\,km$ về phía bắc so với tháp trung tâm kiểm soát không lưu.



Hình 1

A ___ Ra đa của trung tâm kiểm soát không lưu không phát hiện được máy bay tại vị trí A .

B ___ Ra đa ở vị trí có tọa độ $(0;0;0)$.

C ___ Khoảng cách từ máy bay đến ra đa là khoảng $360{,}69\,km$.

D ___ Vị trí A có tọa độ $(300;200;10)$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA} = (2;1;3)$ và điểm $B(3;4;5)$.

A ___ Tọa độ điểm A là $(2;1;3)$.

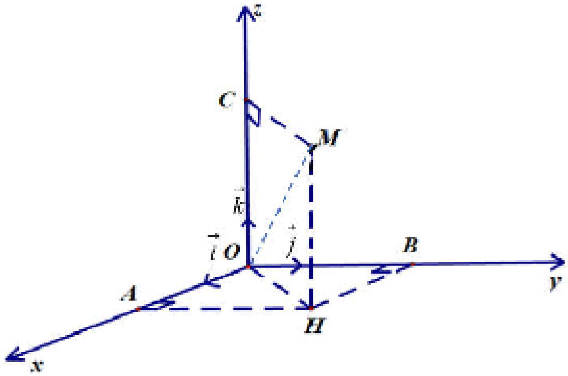
B ___ Gọi $M(x;y;1)$ để A, B, M thẳng hàng thì $x + y = -1$.

C ___ Gọi $C(a;b;c)$ thỏa mãn G là trọng tâm $\triangle ABC$ thì $a + b + c = -9$.

D ___ $N \in (Oxy)$ để $\triangle ABN$ cân tại N và $\triangle OAN$ vuông tại O. Khi đó $x_N + y_N = \dfrac{18}{5}$.

.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, vị trí điểm M như hình vẽ. Gọi H là hình chiếu vuông góc M xuống mặt phẳng (Oxy). Biết $AH = 12$, $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OH}\right) = 30°$, $\left(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}\right) = 60°$.



Phát biểu	Đ	S
A Tọa độ điểm A là $(12\sqrt{3}; 0; 0)$.		
B Tọa độ điểm B là $(12; 0; 0)$.		
C $OC = OM \cdot \sin \widehat{HOM}$.		
D Tọa độ điểm M là $(12\sqrt{3}; 12; 48\sqrt{3})$.		

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} - \vec{k}$ và $B(-1; 2; 3), C(1; 4; 1)$.

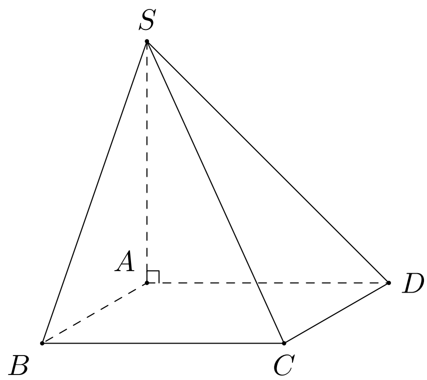
A ___ $A(3; 0; -1)$.

B ___ Ba điểm A, B, C thẳng hàng .

C ___ Điểm $D(a; b; c)$ là điểm đối xứng với A qua B. Khi đó $a + b + c = 6$.

D ___ Điểm $M(m; n; p)$ trên mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $m + n + p = 0$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AB = a$, $AD = 2a$, cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SD.



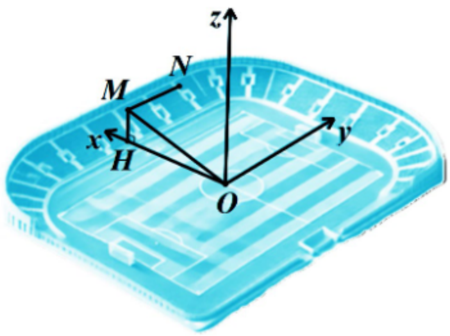
A ___ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = \dfrac{a^2}{2}$.

B ___ $\left|\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}\right| = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

C ___ Hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ cùng hướng .

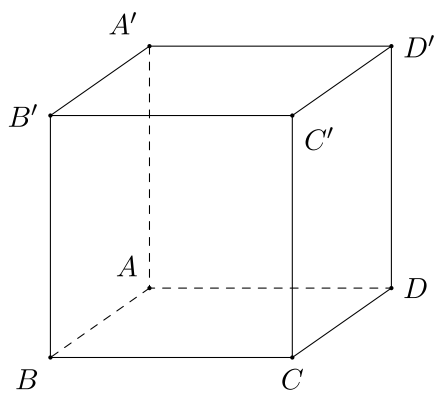
D ___ Giá trị tang góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{CS}$ và $\overrightarrow{CA}$ bằng $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 24. Một sân vận động với sân bóng phẳng hình chữ nhật có chấm trắng trung tâm là nơi giao bóng, một đường kẻ vạch chia đôi sân và các khán đài. Khán đài A gồm những dãy ghế nằm vuông góc với vạch chia đôi sân có độ cao tăng dần (các ghế cùng hàng thì cùng độ cao so với mặt sân). Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng với điểm giao bóng, mặt phẳng Oxy trùng với mặt sân, trục Ox trùng với vạch chia đôi sân, tia Oz vuông góc với mặt sân (đơn vị đo lấy theo mét). Một khán giả ngồi tại vị trí M của khán đài A, có hình chiếu vuông góc lên mặt phẳng chứa sân là một điểm thuộc Ox. Góc hợp bởi $\overrightarrow{OM}$ và mặt sân là α với $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, nếu người này di chuyển 10 (m) trên hàng ngang đó đến ngồi tại một vị trí N thì góc hợp bởi $\overrightarrow{ON}$ và mặt sân là β với $\sin\beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$. Gọi $h(m)$ là độ cao tại M so với mặt sân.



Phát biểu	Đ	S
(A) Điểm M có cao độ bằng 0 .		
(B) Điểm N có cùng tung độ với điểm M .		
(C) $OM = 3h$.		
(D) $h = 10m$.		

Câu 25. Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Gọi I là tâm hình vuông $ABCD, G$ là trọng tâm tam giác $AB'C$.



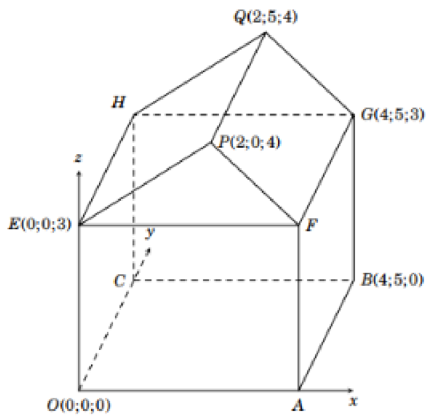
(A) ___ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

(B) ___ $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.

(C) ___ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'C'}$.

(D) ___ $\left|\overrightarrow{BG}\right| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 26. Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng 1m. Trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật



A ___ $A(5;0;0)$.

B ___ $H(0;5;3)$.

C ___ Góc $\left(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FE}\right)$ gọi là góc dốc của mái nhà. Số đo của góc dốc của mái nhà bằng $26,6^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).

D ___ Chiều cao của ngôi nhà là 4 (m). (Chiều cao ngôi nhà là khoảng cách từ đỉnh mái nhà đến mặt đất .

Câu 27. Hai chiếc khinh khí cầu cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc khinh khí cầu thứ nhất cách điểm xuất phát về phía đông 110 (km) và về phía nam 90 (km), đồng thời cách mặt đất 2 (km). Chiếc khinh khí cầu thứ hai cách điểm xuất phát về phía bắc 80 (km) và về phía tây 70 (km), đồng thời cách mặt đất 800 (m). Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía bắc, trục Oy hướng về phía tây, trục Oz hướng thẳng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét. Xét tính đúng sai của các mệnh đề?

A ___ Toạ độ của khinh khí cầu thứ hai là $(80;70;800)$.

B ___ Toạ độ của khinh khí cầu thứ nhất là $(-90;-110;2)$.

C ___ Khoảng cách của chiếc khinh khí cầu thứ nhất với vị trí tại điểm xuất phát của nó là 142 (km) (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị) .

D ___ Khoảng cách giữa chiếc khinh khí cầu thứ nhất và chiếc khinh khí cầu thứ hai là 836 (km) (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị) .

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$ với $B(3;0;8), D(-5;-4;0)$.

Phát biểu	Đ	S
(A) Diện tích của hình vuông $ABCD$ bằng 144 (đvdt) .		
(B) $\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right\| = 6\sqrt{10}$.		
(C) Biết $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=(a;b;c)$. Suy ra $a+b-c=-4$.		
(D) Tâm I hình vuông có tọa độ là $(-1;-2;-4)$.		

3 Tự luận

Bài 1. Trong không gian, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và $\widehat{BAA'} = \widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Tính độ dài đường chéo AC'.

Bài 2. Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 2a, CD = 2a\sqrt{3}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Biết rằng $MN = a\sqrt{7}$, hãy tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$.

Bài 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$:

1. Cho $\vec{a} = (2; m+1; 1), \vec{b} = (1; -3; 2)$. Tìm giá trị của m để $\left|\vec{b}(2\vec{a} - \vec{b})\right| = 4$.
2. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}, |\vec{b}| = 3$ và $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 30^\circ$. Tính độ dài của các vectơ $3\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} - \vec{b}$.
3. Cho hai vectơ $\vec{u} = (2; -1; 2), \vec{v}$ thỏa mãn $|\vec{v}| = 1$ và $|\vec{u} - \vec{v}| = 4$. Tính độ dài của vectơ $\vec{u} + \vec{v}$.
4. Cho hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ thỏa mãn $|\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = 1$ và $(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ$. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{v}$ và $\vec{u} - \vec{v}$.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(0;0;1), B(-1;-2;0), C(2;1;-1)$. Tìm tọa độ chân đường cao H hạ từ A xuống BC.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;2), B(1;2;3), C(1;-2;-5)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn thẳng BC sao cho $MB = 3MC$. Tính độ dài đoạn thẳng AM.

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1), B(0;-2;3)$.

1. Tính độ dài đường cao AH hạ từ đỉnh A của tam giác OAB với O là gốc tọa độ.
2. Tính diện tích tam giác OAB.

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có đỉnh $C(-2;2;2)$ và trọng tâm $G(-1;1;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B của tam giác ABC, biết điểm A thuộc mặt phẳng (Oxy) và điểm B thuộc Oz.

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;3), B(4;0;1)$ và $C(-10;5;30)$. Đường phân giác trong của góc B của tam giác ABC cắt BC tại D. Tính BD.

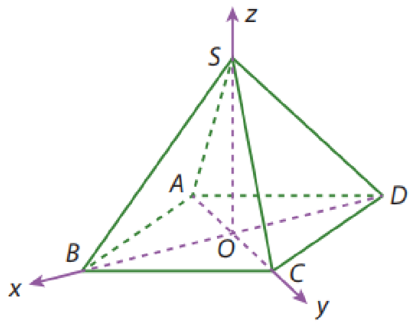
Bài 9. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(-1;1;0)$ và $C(3;1;-1)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxz) và cách đều ba điểm A, B, C. Tính tổng $a+b+c$.

Bài 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-1;m)$ và $B(m;4;m)$.

1. Tính côsin của góc $\widehat{AOB}$ theo m.
2. Xác định tất cả các giá trị của m để $\widehat{AOB}$ là góc nhọn.

Bài 11. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;2;3), B(2;1;1), C(1;2;3)$. Điểm $M \in Oz$ sao cho biểu thức $T = \left|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính cao độ của điểm M.

Bài 12. Trong không gian, cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là tâm đáy, $S(0;0;\sqrt{7})$ và A, B lần lượt thuộc trục Ox, Oy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC. Biết rằng $MN = \sqrt{3}$. Tính $a+b+c$ với $(a;b;c)$ là tọa độ của điểm A.



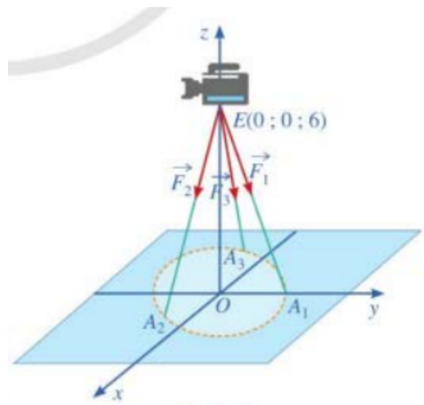
Bài 13. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn $\left|\vec{a}\right| = 4, \left|\vec{b}\right| = 5$ và $\left|-4\vec{a} + \vec{b}\right| = 5\sqrt{11}$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Bài 14. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (1;1;-2), \vec{v} = (1;0;m)$. Gọi S là tập hợp các giá trị m để hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau một góc 30°. Tính tổng số phần tử của S.

Bài 15. Một chiếc máy được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $E(0;0;6)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là

$$A_1(0;1;0), \quad A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right), \quad A_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right)$$

(Hình bên). Biết rằng trọng lượng của chiếc máy là 300 N. Tìm tọa độ của các lực tác dụng lên giá đỡ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$.

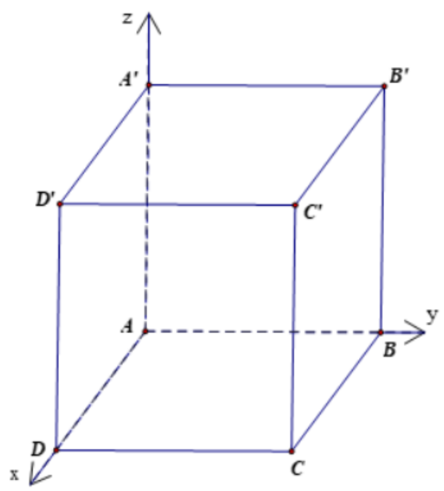


Bài 16. Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc 123° và có độ lớn lần lượt là 25 N và 17 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 8 N. Tính độ lớn hợp lực của ba lực trên. (Kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ nhất)

Bài 17. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;3;1)$ và $B(3;-4;1)$. Điểm M thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $P = 2MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị $3MA - 6MB$ bằng bao nhiêu (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài 18. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC vuông tại A, điểm $C(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (Oxz) và diện tích của tam giác ABC bằng 15, hãy tính $a+b+c$.

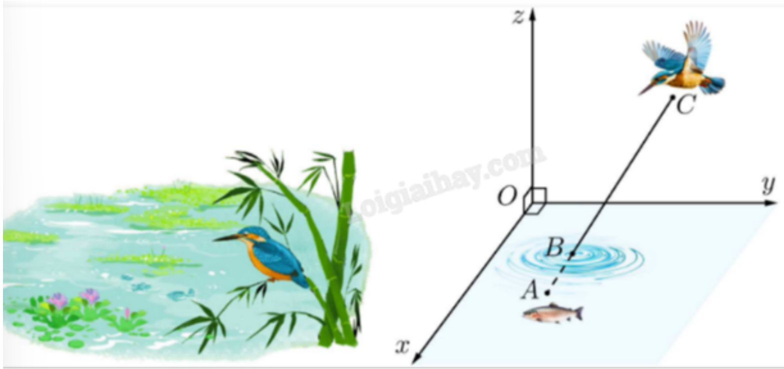
Bài 19. Một căn phòng hình hộp chữ nhật đặt trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (như hình vẽ). Biết $AB = 5m, BC = 6m, AA' = 4m$. Người ta treo một cái đèn bóng tròn tại vị trí điểm A'; có một giỏ hoa treo tại vị trí M cách trần nhà 2 m, cách mặt phẳng $(ADD'A')$ là 2m, cách mặt phẳng $(ABB'A')$ là 1 m . Khi bật đèn sáng thì ảnh của giỏ hoa lên mặt đất tại vị trí K . Tìm tọa độ K.



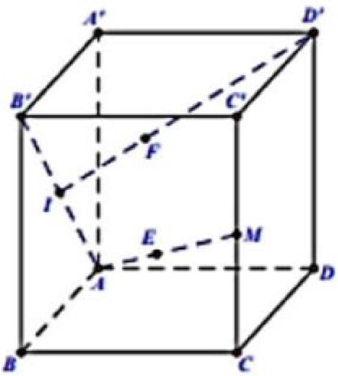
Bài 20. Trong không gian với một hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì máy bay đi được bao nhiêu kilômét sau 20 phút kể từ lúc ra đa phát hiện (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Bài 21. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(4;0;0), B(0;4;0)$ và $C(0;0;4)$. Gọi $M(x;y;z)$ là điểm khác O thỏa mãn $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 90^\circ$. Tính $x+y+z$.

Bài 22. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O nằm trên mặt nước, mặt phẳng (Oxy) là mặt nước, trục Oz hướng lên trên (đơn vị đo: mét), một con chim bói cá đang ở vị trí cách mặt nước 2m, cách mặt phẳng $(Oxz),(Oyz)$ lần lượt là 3m và 1m phóng thẳng xuống vị trí con cá, biết con cá cách mặt nước 50cm, cách mặt phẳng $(Oxz),(Oyz)$ lần lượt là 1m và 1,5m. Điểm B là điểm chim bói cá tiếp xúc với mặt nước. Giả sử hoành độ điểm B là a. Tìm $5a$.



Bài 23. Trong một chiếc hộp kính hình hộp chữ nhật có đáy nhà là hình vuông cạnh bằng 40cm, chiều cao của hộp là 32 cm, bạn X nuôi hai con nhện. Giả sử chiếc hộp được mô hình hóa là hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với $ABCD$ là đáy hộp được đặt trên bàn, thì con nhện thứ nhất có như điểm E di chuyển trên đường tròn nối từ đỉnh A đến trung điểm M của CC', còn con nhện thứ hai được coi như điểm F di chuyển trên đường tròn nối từ đỉnh D' tới tâm I của mặt $ABB'A'$. Tính khoảng cách giữa hai con nhện khi đường thẳng đi qua vị trí của hai con nhện vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$.



Bài 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là 1m), một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10;3;0)$ và chuyển động đều theo đường cáp thẳng đến vị trí D cách A 4050 m. Biết đường đi của cabin cùng phương với vectơ $\vec{u}=(2;-2;1)$ và sau 3 phút kể từ khi xuất phát thì cabin đến vị trí B có hoành độ $x_B=550$. Hỏi thời gian di chuyển của cabin trên quãng đường AB là bao nhiêu phút?

Bài 25. Cho tứ diện đều $ABCD$. Lấy M, N lần lượt là trung điểm của AC và CD. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AN}$ (đơn vị radian, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 26. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1; -2; 0)$, $\vec{b} = (-1; 1; 2)$, $\vec{c} = (4; 0; 6)$ và $\vec{u} = \left(-2; \dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$. Biết rằng $\vec{u} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b} + p \cdot \vec{c}$ với $m, n, p \in \mathbb{R}$. Tính $U = -3m + n - p$.

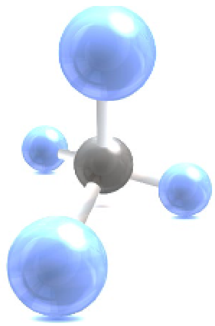
Bài 27. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi φ là góc tạo bởi OM và trục Oz. Tính $\tan\varphi$.

Bài 28. Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$, một đội gồm ba drone giao hàng A, B, C đang có tọa độ là $A(1; -3; 2)$, $B(m; m-2; 6)$, $C(m-2; m; 5)$, trong đó m là tham số, đơn vị đo độ dài tính bằng kilomet. Biết kho hàng đang ở tại điểm $I(1; 1; 0)$. Vì lý do nhiên liệu nên các drone không được di chuyển quá xa kho hàng, cụ thể là các drone không được cách kho hàng quá 100 km. Tìm các giá trị nguyên dương của tham số m để các drone cách kho hàng không quá 100km?

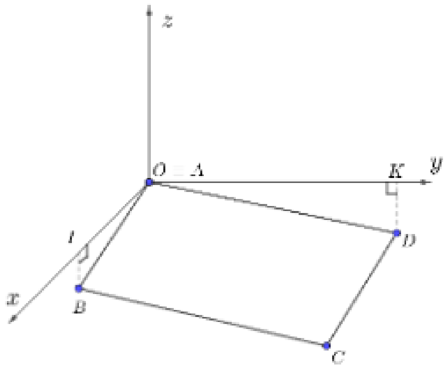
Bài 29. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B. Ba đỉnh $A(1; 2; 1)$, $B(2; 0; -1)$, $C(6; 0; 1)$. Hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử $D(a; b; c)$. Tính $a + b + c$.

Bài 30. Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, M là điểm thay đổi trên SO. Tính tỉ số $\dfrac{SM}{SO}$ sao cho $P = MS^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ nhỏ nhất?

Bài 31. Cho biết bốn đoạn thẳng nối từ một đỉnh của tứ diện đến trọng tâm mặt đối diện luôn cắt nhau tại một điểm gọi là trọng tâm của tứ diện đó. Một phân tử metan CH_4 được cấu tạo bởi bốn nguyên tử hydrogen ở các đỉnh của một tứ diện đều và một nguyên tử carbon ở trọng tâm của tứ diện. Góc liên kết là góc tạo bởi liên kết H – C – H là góc giữa các đường nối nguyên tử carbon với hai trong số các nguyên tử hydrogen. Tìm độ lớn góc liên kết này.



Bài 32. Một mái nhà kho hình bình hành $ABCD$ có độ dài các cạnh lần lượt là $AB = 221$ (cm) và $AD = 313$ (cm). Để tiện việc thoát nước khi trời mưa nên mái nhà kho cần phải có độ nghiêng. Biết rằng vị trí điểm B thấp hơn vị trí điểm A với khoảng cách $BI = 21$ (cm). Vị trí điểm D thấp hơn vị trí điểm A với khoảng cách $DK = 25$ (cm). Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A \equiv O$, $BI \perp (Oxy)$ tại I thuộc tia Ox, $DK \perp (Oxy)$ tại K thuộc tia Oy (tham khảo hình vẽ). Xác định xem vị trí điểm C thấp hơn vị trí điểm A bao nhiêu (cm)?



Bài 33. Hệ thống định vị toàn cầu GPS là một hệ thống cho phép xác định vị trí của một vật thể trong không gian. Trong cùng một thời điểm, vị trí của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước nhờ các bộ thu phát tín hiệu đặt trên các vệ tinh. Giả sử trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, có bốn vệ tinh lần lượt đặt tại các điểm $A(3;1;0)$, $B(3;6;6)$, $C(4;6;2)$, $D(6;2;14)$; vị trí $M(x;y;z)$ thoả mãn $MA = 3$, $MB = 6$, $MC = 5$, $MD = 13$. Khoảng cách từ điểm M đến điểm O bằng bao nhiêu?

Chương 3

CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Mục lục của chương

Chuyên đề 1

KHOẢNG BIẾN THIÊN VÀ KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

I. KHOẢNG BIẾN THIÊN

Khoảng biến thiên, kí hiệu R của mẫu số liệu ghép nhóm là hiệu số giữa đầu mút phải của nhóm cuối cùng và đầu mút trái của nhóm đầu tiên có chứa dữ liệu của mẫu số liệu.

LƯU Ý.

- Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bảng sau:

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	$\cdots$	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

Nếu n_1 và n_k cùng khác 0 thì

$$\boxed{R = u_{k+1} - u_1}$$

- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm luôn lớn hơn hoặc bằng khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.

Ý nghĩa của khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm

- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu.
- Khoảng biến thiên $R = u_{k+1} - u_1$ chưa phản ánh được đầy đủ mức độ phân tán của phần lớn các số liệu. Hơn nữa, giá trị của R thường tăng vọt khi xuất hiện giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu. Do đó, để phản ánh mức độ phân tán của số liệu, người ta còn dùng các số đặc trưng khác.

Ví dụ 1 ★☆☆☆☆

Bạn Trang thống kê lại chiều cao (đơn vị: cm) của các bạn học sinh nữ lớp 12C và lớp 12D ở bảng sau:

Chiều cao (cm)	$[155; 160)$	$[160; 165)$	$[165; 170)$	$[170; 175)$	$[175; 180)$	$[180; 185)$
Số học sinh nữ lớp 12C	2	7	12	3	0	1
Số học sinh nữ lớp 12D	5	9	8	2	1	0

Sử dụng khoảng biến thiên, hãy cho biết chiều cao của học sinh nữ lớp nào có độ phân tán lớn hơn.

Hướng dẫn giải. Ta có khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của các bạn học sinh nữ lớp 12C là: $R_A = 185 - 155 = 30$ cm.

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của các bạn học sinh nữ lớp 12D là: $R_B = 180 - 155 = 25$ (cm).

Vậy nếu căn cứ theo khoảng biến thiên thì chiều cao của học sinh nữ lớp 12C có độ phân tán lớn hơn.

① Người ta tiến hành phỏng vấn hai nhóm khán giả về một bộ phim mới công chiếu. Nhóm A gồm những khán giả thuộc lứa tuổi 20 – 30, nhóm B thuộc lứa tuổi trên 30. Người được hỏi ý kiến phải đánh giá bộ phim bằng cách cho điểm theo một số tiêu chí nêu trong phiếu điều tra và sau đó lấy tổng số điểm (thang điểm 100). Bảng dưới đây trình bày kết quả điều tra hai nhóm khán giả:

Điểm	$[50; 60)$	$[60; 70)$	$[70; 80)$	$[80; 90)$	$[90; 100)$
Số người của nhóm A	6	10	14	12	8
Số người của nhóm B	0	8	14	28	0

Ý kiến đánh giá của nhóm khán giả nào phân tán hơn?

II. KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ

LƯU Ý.

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	$\dots$	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	$\dots$	n_k

Tứ phân vị thứ i, kí hiệu là Q_i với $u = 1, 2, 3$ của mẫu số liệu ghép nhóm được xác định như sau:

$$\boxed{Q_i = u_m + \frac{\frac{in}{4} - C}{n_m}(u_{m+1} - u_m)}$$

Trong đó:

- $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ là cỡ mẫu.
- $[u_m, u_{m+1})$ là nhóm chứa tứ phân vị thứ i.
- n_m là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ i.
- $C = n_1 + n_2 + \ldots + n_{m-1}$.

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cũng được xác định dựa trên tứ phân vị thứ nhất và tứ phân vị thứ ba như đối với mẫu số liệu không ghép nhóm.

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Δ_Q, là hiệu giữa tứ phân vị thứ ba Q_3 và tứ phân vị thứ nhất Q_1 của mẫu số liệu ghép nhóm đó, tức là

$$\Delta Q = Q_3 - Q_1$$

Ý nghĩa của khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của nửa giữa của mẫu số liệu (tập hợp gồm 50% số liệu nằm chính giữa mẫu số liệu).
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm càng nhỏ thì dữ liệu càng tập trung xung quanh trung vị.
- Khoảng tứ phân vị được dùng để xác định giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu. Giá trị x trong mẫu số liệu là giá trị ngoại lệ nếu $x > Q_3 + 1,5\Delta Q$ hoặc $x < Q_1 - 1,5\Delta Q$.

- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm không bị ảnh hưởng nhiều bởi các giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu.

Ví dụ 2 ★☆☆☆☆

Giả sử kết quả khảo sát hai khu vực A và B về độ tuổi kết hôn của một số phụ nữ vừa lập gia đình được cho ở bảng sau:

Tuổi kết hôn	$[19;22)$	$[22;25)$	$[25;28)$	$[28;31)$	$[31;34)$
Số phụ nữ khu vực A	10	27	31	25	7
Số phụ nữ khu vực B	47	40	11	2	0

a) Hãy tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của từng mẫu số liệu ghép nhóm ứng với mỗi khu vực A và B.

b) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị thì phụ nữ ở khu vực nào có độ tuổi kết hôn đồng đều hơn?

Hướng dẫn giải.

a) **Khu vực A:**

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm ứng với khu vực A là:

$$R_A = 34 - 19 = 15.$$

Cỡ mẫu $n = 10 + 27 + 31 + 25 + 7 = 100$.

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{100}$ là mẫu số liệu gốc về độ tuổi kết hôn của một số phụ nữ vừa lập gia đình ở khu vực A được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có

$$x_1; x_2; \cdots; x_{10} \in [19;22), x_{11}; x_{12}; \ldots; x_{37} \in [22;25), x_{38}; x_{39}; \ldots; x_{68} \in [25;28),$$

$$x_{69}; \cdots; x_{93} \in [28;31), x_{94}; \cdots; x_{100} \in [31;34).$$

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_{25} + x_{26}) \in [22;25)$ Do đó, tứ phân thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$Q_1^A = 22 + \frac{\frac{100}{4} - 10}{27}(25 - 22) = \frac{71}{3}.$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $\dfrac{1}{2}(x_{75}+x_{76}) \in [28;31)$. Do đó, tứ phân thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$Q_3^A = 28 + \frac{\frac{3.100}{4} - (10+27+31)}{25}(31-28) = \frac{721}{25}.$$

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về độ tuổi kết hôn của một số phụ nữ vừa lập gia đình ở khu vực A là:

$$\Delta Q_A = Q_3^A - Q_1^A = \frac{721}{25} - \frac{71}{3} = \frac{388}{75} \approx 5,17.$$

Khu vực B:

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm ứng với khu vực B là:

$$R_B = 31 - 19 = 12.$$

Cỡ mẫu $n' = 47+40+11+2 = 100$. Gọi $y_1; y_2; \ldots; y_{100}$ là mẫu số liệu gốc về độ tuổi kết hôn của một số phụ nữ vừa lập gia đình ở khu vực B được sắp xếp theo thứ tự không giảm. Ta có:

$$y_1; y_2; \ldots; y_{47} \in [19;22), \quad y_{48}; y_{49}; \ldots; y_{87} \in [22;25),$$

$$y_{88}; y_{89}; \ldots; y_{98} \in [25;28), \quad y_{99}; y_{100} \in [28;31).$$

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(y_{25}+y_{26}) \in [19;22)$. Do đó, tứ phân thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$Q_1^B = 19 + \frac{100}{4} \cdot \frac{4}{47} \cdot (22-19) = \frac{968}{47}.$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(y_{75}+y_{76}) \in [22;25)$. Do đó, tứ phân thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$Q_3^B = 22 + \frac{3 \cdot 100}{4} - 47 \cdot \frac{3}{40} \cdot (25-22) = \frac{241}{10}.$$

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về độ tuổi kết hôn của một số phụ nữ vừa lập gia đình ở khu vực B là:

$$\Delta Q_B = Q_3^B - Q_1^B = \frac{241}{10} - \frac{968}{47} = \frac{1647}{470} \approx 3,5.$$

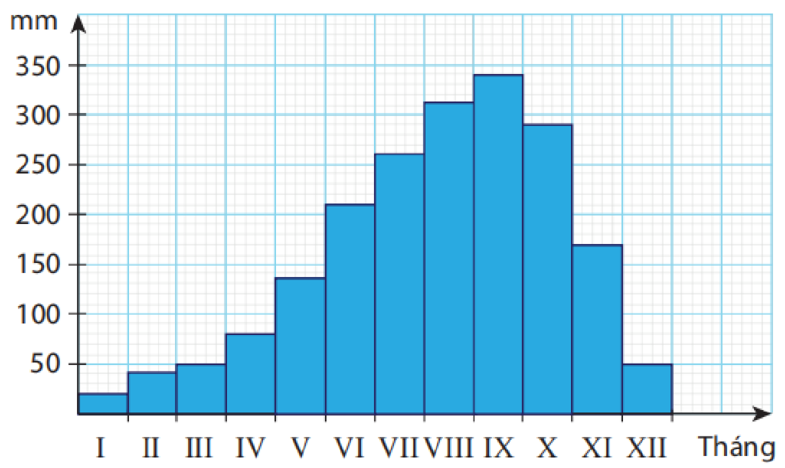
b) Vì $\Delta Q_B < \Delta Q_A$ nên phụ nữ ở khu vực B có độ tuổi kết hôn đồng đều hơn.

(2) Ở một phòng điều trị nội trú của bệnh viện, dữ liệu thống kê thời gian ngủ hằng đêm của hai bệnh nhân trong suốt một tháng được tổng hợp bởi hai bảng dưới đây:

Thời gian (phút)	[180; 240)	[240; 300)	[300; 360)	[360; 420)	[420; 480)
Số đêm bệnh nhân A	5	5	10	6	4
Số đêm bệnh nhân B	2	9	12	5	2

Bệnh nhân nào có thời gian ngủ ổn định hơn?

(3) Hình bên dưới là biểu đồ biểu diễn lượng mưa trung bình của các tháng trong năm ở thành phố A:



Hình 3.2. Biểu đồ lượng mưa ở thành phố A

a) Lập bảng số liệu ghép nhóm về lượng mưa của thành phố A, với độ dài các nhóm là 50 và đầu mút phải của nhóm cuối cùng là 350.

b) Xác định khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm

Câu 1. Thống kê điểm kiểm tra học kì 1 môn toán của 300 học sinh lớp 12 được mô tả ở bảng sau:

Điểm	(2; 4]	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)
Số học sinh	20	50	70	160

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là

(A) 160 . (B) 8 . (C) 7 . (D) 140 .

Câu 2. Mỗi ngày bạn Nam đều làm bài tập môn Toán có bảng thống kê ghép nhóm về thời gian làm bài tập mỗi ngày của bạn Nam (đơn vị: phút) trong 60 ngày như sau:

Thời gian (phút)	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100)	[100; 110)	[110; 120)
Số ngày	1	7	24	3	25

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là:

(A) 24 . (B) 50 . (C) 120 . (D) 25 .

Câu 3. Cho bảng thống kê chiều cao của học sinh lớp 12A và lớp 12B như sau:

Chiều cao (cm)	[150;155)	[155;160)	[160;165)	[165;170)	[170;175)	[175;180)	[180;185)
12A	1	5	23	10	2	3	0
12B	0	0	35	6	1	0	2

Khoảng biến thiên chiều cao lớp 12A và 12B lần lượt là Δ_A, Δ_B. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\Delta_B = \Delta_A + 5$. (B) $\Delta_A = \Delta_B + 5$.

(C) $\Delta_A < \Delta_B$. (D) $\Delta_A = \Delta_B$.

Câu 4. Cho một mẫu số liệu ghép nhóm có tứ phân vị thứ nhất, thứ hai và thứ ba lần lượt là Q_1, Q_2, Q_3. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó

(A) $\Delta Q = Q_1 - Q_3$. (B) $\Delta Q = Q_3 - Q_2$.

(C) $\Delta Q = Q_2 - Q_1$. (D) $\Delta Q = Q_3 - Q_1$.

Câu 5. Thống kê điểm thi đánh giá năng lực của một nhóm có 120 học sinh qua thang điểm 100 được cho ở bảng sau:

Điểm	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100]
Số học sinh	25	35	37	15	8

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên bảng (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Ⓐ 22,9 . Ⓑ 3,4 . Ⓒ 56,2 . Ⓓ 79,1 .

Câu 6. Một vườn thú ghi lại tuổi thọ của 20 con hổ và thu được kết quả như sau:

Tuổi thọ	$[14;15)$	$[15;16)$	$[16;17)$	$[17;18)$	$[18;19)$
Số con hổ	1	3	8	6	2

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là

Ⓐ $[14;15)$. Ⓑ $[15;16)$. Ⓒ $[16;17)$. Ⓓ $[17;18)$.

Câu 7. Một vườn thú ghi lại tuổi thọ của 20 con hổ và thu được kết quả như sau:

Tuổi thọ	$[14;15)$	$[15;16)$	$[16;17)$	$[17;18)$	$[18;19)$
Số con hổ	1	3	8	6	2

Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là

Ⓐ $[14;15)$. Ⓑ $[15;16)$. Ⓒ $[16;17)$. Ⓓ $[17;18)$.

Câu 8. Kết quả điều tra tổng thu nhập trong năm 2024 của một số hộ gia đình ở thành phố Nha Trang như bảng sau

Tổng thu nhập (triệu đồng)	$[200;250)$	$[250;300)$	$[300;350)$	$[350;400)$	$[400;450)$
Số hộ gia đình	24	62	34	21	9

Tứ phân vị thứ nhất bằng

Ⓐ $\frac{16175}{62}$. Ⓑ $\frac{16175}{34}$. Ⓒ $\frac{16157}{62}$. Ⓓ $\frac{16751}{62}$.

Câu 9. Một mẫu số liệu ghép nhóm có tứ phân vị $Q_1 = 4, Q_2 = 6, Q_3 = 9$. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó là bao nhiêu?

Ⓐ 5. Ⓑ 4. Ⓒ 6. Ⓓ 9.

Câu 10. Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng).

Doanh thu	$[5;7)$	$[7;9)$	$[9;11)$	$[11;13)$	$[13;15)$
Số ngày	2	7	7	3	1

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu trên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau?

Ⓐ 10. Ⓑ 11. Ⓒ 12. Ⓓ 13.

2 Tự luận

Bài 1. Thống kê lượng mưa (đơn vị: mm) đo được vào tháng 7 từ năm 2002 đến 2021 tại một trạm quan trắc đặt ở Cà Mau.

341,4 187,1 242,2 522,9 251,4 432,2 200,7 388,6 258,4 288,5

298,1 413,5 413,5 332 421 475 400 305 520 147

a) Hãy tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

b) Hãy chia mẫu số liệu trên thành 4 nhóm với nhóm đầu tiên là $[140;\ 240)$ và lập bảng tần số ghép nhóm.

c) Hãy tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm và so sánh với kết quả tương ứng thu được ở câu a).

Bài 2. Bảng sau thống kê lương tháng của các nhân viên ở doanh nghiệp A và B:

Lương tháng (triệu đồng)	$[5;10)$	$[10;15)$	$[15;20)$	$[20;25)$	$[25;30)$
Số nhân viên doanh nghiệp A	2	5	32	8	1
Số nhân viên doanh nghiệp B	0	20	25	20	0

a) So sánh độ phân tán của mức lương ở hai doanh nghiệp theo khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị.

b) So sánh độ phân tán của mức lương ở hai doanh nghiệp theo khoảng tứ phân vị.

c) Biết rằng có 1 nhân viên ở doanh nghiệp A có lương tháng là 27 triệu đồng. Lương tháng của nhân viên này có phải là một giá trị ngoại lệ không? Tại sao?

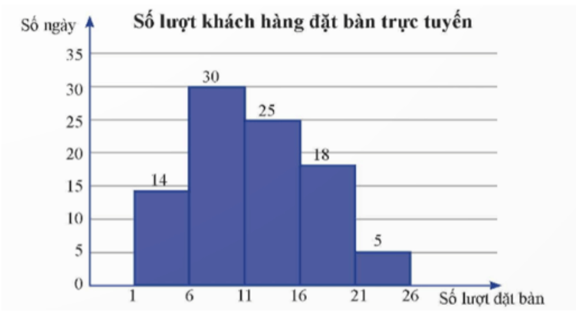
Bài 3. Kết quả đo chiều cao của 100 cây keo 3 năm tuổi tại một nông trường được cho ở bảng sau:

Chiều cao (m)	$[8,4; 8,6)$	$[8,6; 8,8)$	$[8,8; 9,0)$	$[9,0; 9,2)$	$[9,2; 9,4)$
Số cây	5	12	25	44	14

a) Hãy tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

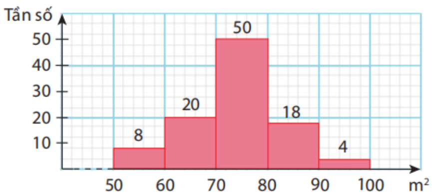
b) Trong 100 cây keo trên có 1 cây cao 8,4 m. Hỏi chiều cao của cây keo này có phải là giá trị ngoại lệ không?

Bài 4. Biểu đồ dưới đây biểu diễn số lượt khách hàng đặt bàn qua hình thức trực tuyến mỗi ngày trong quý III năm 2022 của một nhà hàng. Cột thứ nhất biểu diễn số ngày có từ 1 đến dưới 6 lượt đặt bàn; cột thứ hai biểu diễn số ngày có từ 6 đến dưới 11 lượt đặt bàn;...

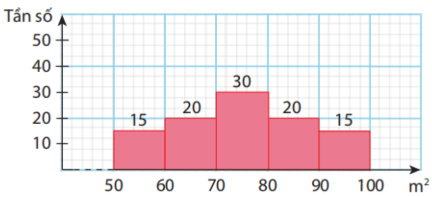


Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi biểu đồ trên.

Bài 5. Điều tra một số hộ gia đình thu nhập ở mức trung bình sinh sống trên hai địa bàn A, B, người ta thấy diện tích nhà ở của họ đều nhỏ hơn 100 m^2 . Hai biểu đồ dưới biểu diễn kết quả thống kê. Số liệu về diện tích nhà ở của cư dân thuộc địa bàn nào phân tán hơn?



Hình 3.4a. Diện tích nhà ở của cư dân địa bàn A



Hình 3.4b. Diện tích nhà ở của cư dân địa bàn B

Chuyên đề

2 PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu S^2, được tính bằng công thức

$$S^2=\frac{1}{n}\left[n_1\left(c_1-\overline{x}\right)^2+n_2\left(c_2-\overline{x}\right)^2+\ldots+n_k\left(c_k-\overline{x}\right)^2\right]$$

trong đó: $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$ là cỡ mẫu;

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\left(n_1c_1+n_2c_2+\cdots+n_kc_k\right)\quad \text{là số trung bình}$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là S, là căn bậc hai số học của phương sai, nghĩa là $S=\sqrt{S^2}$.

LƯU Ý.

a) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm có thể được tính theo công thức sau:

$$S^2=\frac{1}{n}\left(n_1c_1^2+n_2c_2^2+\cdots+n_kc_k^2\right)-\overline{x}^2.$$

b) Trong thống kê, người ta còn dùng đại lượng sau để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm:

$$\widehat{s}^{\,2}=\frac{1}{n-1}\left[n_1\left(c_1-\overline{x}\right)^2+n_2\left(c_2-\overline{x}\right)^2+\ldots+n_k\left(c_k-\overline{x}\right)^2\right]$$

Ví dụ 1 ★☆☆☆☆

Mức lương hàng tháng ở 1 công ty được Công đoàn thu thập theo bảng sau (đơn vị triệu đồng):

Mức lương	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
Số nhân viên	17	38	27	21	7

Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên. (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Hướng dẫn giải.

Giá trị đại diện	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
Số nhân viên	17	38	27	21	7

Cỡ mẫu $n=17+38+27+21+7=110$.

Trung bình mẫu $\overline{x}=\frac{1}{110}(7,5\cdot 17+12,5\cdot 38+17,5\cdot 27+22,5\cdot 21+27,5\cdot 7)\approx 14,4$.

Phương sai

$$S^2 = \frac{1}{110}(17 \cdot 7,5^2 + 38 \cdot 12,5^2 + 27 \cdot 17,5^2 + 21 \cdot 22,5^2 + 7 \cdot 27,5^2) - 14,4^2 \approx 75,3$$

Độ lệch chuẩn: $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{75,3} \approx 8,7$.

Ý nghĩa của phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm

- Phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu gốc. Chúng được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm xung quanh số trung bình của mẫu số liệu. Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì dữ liệu càng phân tán.
- Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với đơn vị của mẫu số liệu.
- Với mẫu số liệu có cùng số trung bình (hoặc xấp xỉ nhau), ta thường sử dụng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ phân tán của các mẫu số liệu đó.

Ví dụ 2 ★☆☆☆☆

Mai và Ngọc cùng sử dụng vòng đeo tay thông minh để ghi lại số bước chân (đơn vị: nghìn) hai bạn đi mỗi ngày trong một tháng. Kết quả được ghi lại ở bảng sau:

Số bước	$[3;5)$	$[5;7)$	$[7;9)$	$[9;11)$	$[11;13)$
Số ngày của Mai	6	7	6	6	5
Số ngày của Ngọc	2	5	13	8	2

a) Hãy tính số trung bình và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì bạn nào có số lượng bước chân đi mỗi ngày đều đặn hơn?

Hướng dẫn giải.

a) • Xét mẫu số liệu của Mai:

Cỡ mẫu là $n_M = 6 + 7 + 6 + 6 + 5 = 30$.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$\bar{x}_M = \frac{6 \cdot 4 + 7 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + 6 \cdot 10 + 5 \cdot 12}{30} = 7{,}8.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$S_M^2 = \frac{1}{30}(6 \cdot 4^2 + 7 \cdot 6^2 + 6 \cdot 8^2 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 12^2) - (7{,}8)^2 = 7{,}56.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$S_M = \sqrt{S_M^2} = \sqrt{7{,}56} \approx 2{,}75.$$

• Xét mẫu số liệu của Ngọc:

Cỡ mẫu là $n_N = 2 + 5 + 13 + 8 + 2 = 30$.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$\bar{x}_N = \frac{2 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 13 \cdot 8 + 8 \cdot 10 + 2 \cdot 12}{30} = 8{,}2.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$S_N^2 = \frac{1}{30}(2 \cdot 4^2 + 5 \cdot 6^2 + 13 \cdot 8^2 + 8 \cdot 10^2 + 2 \cdot 12^2) - (8{,}2)^2 \approx 3{,}83.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$S_N = \sqrt{S_N^2} \approx \sqrt{3{,}83} \approx 1{,}96.$$

b) Ta thấy $S_N \approx 1{,}96 < S_M \approx 2{,}75$.

Do đó, nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì bạn Ngọc có số lượng bước chân đi mỗi ngày đều đặn hơn.

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm

Câu 1. Mẫu số liệu ghép nhóm có độ lệch chuẩn bằng 9 thì có phương sai bằng

Ⓐ 9. Ⓑ 3 . Ⓒ 18 . Ⓓ 81 .

Câu 2. Một mẫu số liệu ghép nhóm có phương sai bằng 16 thì có độ lệch chuẩn bằng bao nhiêu?

Ⓐ 5. Ⓑ 8 . Ⓒ 256 . Ⓓ 32 .

Câu 3. Hai mẫu số liệu ghép nhóm M_1, M_2 có bảng tần số ghép nhóm như sau

M_1	[8;10)	[10;12)	[12;14)	[14;16)	[16;18)
Tần số	3	4	8	6	4
M_2	[8;10)	[10;12)	[12;14)	[14;16)	[16;18)
Tần số	6	8	16	12	8

Gọi s_1, s_2 lần lượt là độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm M_1, M_2. Phát biểu nào dưới đây đúng?

Ⓐ $s_1 = s_2$. Ⓑ $s_1 = 2s_2$. Ⓒ $2s_1 = s_2$. Ⓓ $4s_1 = s_2$.

Câu 4. Khối lượng 66 quả bưởi da xanh ở lô hàng A được ghi lại ở bảng sau:

Khối lượng (kg)	$[1,2;1,4)$	$[1,4;1,6)$	$[1,6;1,8)$	$[1,8;2,0)$	$[2,0;2,2)$	$[2,2,;2,4]$
Số quả bưởi	5	7	9	16	21	8

Khối lượng trung bình của mỗi quả bưởi gần nhất với kết quả nào dưới đây?

Ⓐ 5. Ⓑ 8 . Ⓒ 2 . Ⓓ 3 .

Câu 5. Để đánh giá chất lượng của một loại pin điện thoại mới, người ta ghi lại thời gian nghe nhạc liên tục của điện thoại được sạc đầy pin cho đến khi hết pin cho ra kết quả như sau:

Thời gian (giờ)	[5;5,5)	[5,5;6)	[6;6,5)	[6,5;7)	[7;7,5)
Số chiếc điện thoại (tần số)	5	8	10	15	5

Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến 4 chữ số thập phân)

(A) $0,4252$. (B) $0,5268$. (C) $0,5314$. (D) $0,6214$.

Câu 6. Số tiền ghi trên hóa đơn của 150 khách hàng lấy ngẫu nhiên trong một ngày của một siêu thị cho ở bảng dưới đây:

Số tiền (nghìn đồng)	[50;100)	[100;150)	[150;200)	[200;250]	[250;300)
Tần số	6	9	39	66	30

Hãy tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên

(A) $49,24$. (B) $21,03$. (C) $24,25$. (D) $49,41$.

Câu 7. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của 25 cây dừa giống như sau:

Số tiền (nghìn đồng)	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40]	[40;50)
Số cây	4	6	7	5	3

Phương sai của mẫu số liệu trên là

(A) $154,45$. (B) $154,56$. (C) $24,25$. (D) $66,35$.

2 Tự luận

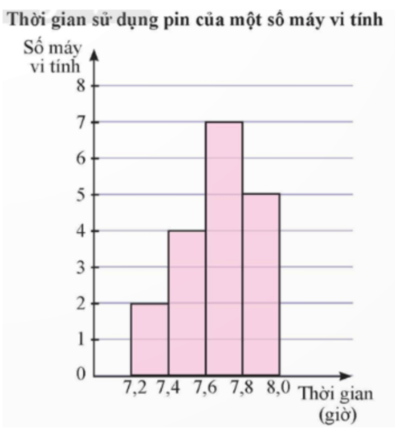
Kết quả các phép tính làm tròn đến hàng phần nghìn.

Bài 1. Bảng dưới đây thống kê cự li ném tạ của một vận động viên.

Cự li (m)	$[19; 19,5)$	$[19,5; 20)$	$[20; 20,5)$	$[20,5; 21)$	$[21; 21,5)$
Tần số	13	45	24	12	6

Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Bài 2. Kết quả khảo sát thời gian sử dụng liên tục (đơn vị: giờ) từ lúc sạc đầy cho đến khi hết của pin một số máy vi tính cùng loại được mô tả bằng biểu đồ bên.



a) Hãy cho biết có bao nhiêu máy vi tính có thời gian sử dụng pin từ 7,2 đến dưới 7,4 giờ?

b) Hãy xác định số trung bình và độ lệch chuẩn của thời gian sử dụng pin.

Bài 3. Tốc độ của 20 xe hơi khi đi qua một trạm kiểm tra tốc độ (đơn vị: km/h) được thống kê lại như sau

42	43,4	43,4	46,5	46,7	46,8	47,5	47,7	48,1	48,4
50,8	52,1	52,7	53,9	54,8	55,6	57,5	59,6	60,3	61,1

(a) Hãy tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.

(b) Hãy lập bảng tần số ghép nhóm với nhóm đầu tiên là [42; 46) và độ dài mỗi nhóm bằng 4.

(c) Hãy tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm.

Bài 4. Một giống cây xoan đào được trồng tại hai địa điểm A và B. Người ta thống kê đường kính thân của một số cây xoan đào 5 năm tuổi ở bảng sau:

Đường kính (cm)	[30; 32)	[32; 34)	[34; 36)	[36; 38)	[38; 40)
Số cây trồng địa điểm A	25	38	20	10	7
Số cây trồng địa điểm B	22	27	19	18	14

a) Hãy so sánh đường kính trung bình của thân cây xoan đào trồng tại địa điểm A và địa điểm B.

b) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì cây trồng tại địa điểm nào có đường kính đồng đều hơn?

3 ÔN TẬP CHƯƠNG 3

BÀI TẬP

1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về khoảng tuổi và số người như sau:

khoảng tuổi	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80]
Số người	33	35	19	25	28	27

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là

(A) 16 . (B) 3 . (C) 61 . (D) 60 .

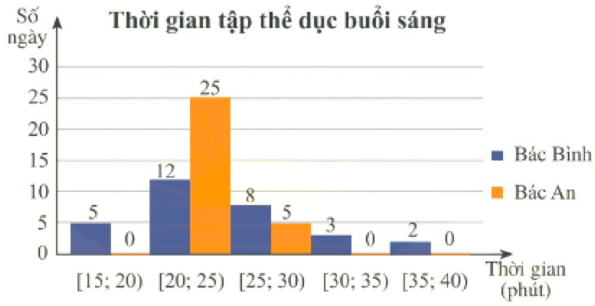
Câu 2. Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Số ngày	6	6	4	1	1

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

(A) $31,2$. (B) $5,4$. (C) $5,6$. (D) $31,3$.

Câu 3. Biểu đồ dưới đây thống kê thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày trong tháng 9/2022 của bác Bình và bác An



Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày của bác Bình có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

(A) $7,2$. (B) $7,3$. (C) $7,4$. (D) $7,5$.

Câu 4. Thống kê điểm kiểm tra học kì 1 môn toán của 300 học sinh lớp 12 được mô tả ở bảng sau

Điểm	(2; 4]	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)
Số học sinh	20	50	70	160

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là

(A) 160 . (B) 8 . (C) 7 . (D) 140 .

Câu 5. Trong buổi tham quan vườn quốc gia Cát Tiên, nhóm học sinh lớp 12A3 đã ước lượng chiều dài thân của một số cá thể chuồn chuồn và ghi lại trong bảng số liệu sau:

Độ dài (cm)	$[2,5;3,5)$	$[3,5;4,5)$	$[4,5;5,5)$	$[5,5;6,5)$	$[6,5;7,5)$
Số con	8	25	28	31	12

Khoảng biến thiên (đơn vị: cm) của mẫu số liệu ghép nhóm trên là:

Ⓐ $6,5$. Ⓑ 5 . Ⓒ 4 . Ⓓ $7,5$.

Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu trên là:

Ⓐ $[3,5;4,5)$. Ⓑ $[4,5;5,5)$. Ⓒ $[5,5;6,5)$. Ⓓ $[6,5;7,5)$.

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là:

Ⓐ $1,83$. Ⓑ $17,41$. Ⓒ $15,8$. Ⓓ $6,44$.

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép trên gần nhất với giá trị nào sau đây?

Ⓐ $1,29$. Ⓑ $5,13$. Ⓒ $2,27$. Ⓓ $1,14$.

Câu 6. Khẳng định nào sau đây **sai**?

Ⓐ Độ lệch chuẩn càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán .

Ⓑ Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là căn bậc hai số học của phương sai .

Ⓒ Phương sai càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán .

Ⓓ Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là căn bậc hai số học của độ lệch chuẩn .

2 Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho bảng số liệu ghép nhóm về lương(triệu đồng) và số nhân viên như hình dưới đây.

Lương (triệu đồng)	$[8;11)$	$[11;14)$	$[14;17)$	$[17;20)$	$[20;23)$
Số nhân viên	4	6	5	10	2

Xét tính đúng-sai của các khẳng định sau (các kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Phát biểu	Đ	S
A Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là 17 .		
B Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm này là 18,16 .		
C Tứ phân vị thứ nhất bằng 13,38 .		
D Tứ phân vị thứ ba bằng 18,58 .		

Câu 2. Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa của hai mã cổ phiếu A và B trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

Giá đóng cửa	$[120; 122)$	$[122; 124)$	$[124; 126)$	$[126; 128)$	$[128; 130)$
Cổ phiếu A	8	9	12	10	11
Cổ phiếu B	16	4	3	6	21

(A) ___ Xét mẫu số liệu của cổ phiếu B ta có độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $\sqrt{15,4096}$.

(B) ___ Xét mẫu số liệu của cổ phiếu A ta có phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là 7,5216 .

(C) ___ Xét mẫu số liệu của cổ phiếu B ta có số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là 115,28 .

(D) ___ Người ta có thể dùng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ rủi ro của các loại cổ phiếu có giá trị trung bình gần bằng nhau. Cổ phiếu nào có phương sai, độ lệch chuẩn cao hơn thì được coi là có độ rủi ro lớn hơn. Theo quan điểm trên thì cổ phiếu A có độ rủi ro thấp hơn cổ phiếu B .

Câu 3. Thời gian hoàn thành bài kiểm tra môn Toán của các học sinh lớp 12A và 12B được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Số học sinh lớp 12A	7	16	12	5
Số học sinh lớp 12B	5	14	17	6

(A) ___ Khoảng biến thiên cho thời gian hoàn thành bài kiểm tra môn Toán của học sinh mỗi lớp là 20 .

(B) ___ Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian hoàn thành bài kiểm tra môn Toán của học sinh lớp 12A là 7,78 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) .

(C) ___ Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian hoàn thành bài kiểm tra môn Toán của học sinh lớp 12B là 19,22 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) .

(D) ___ Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm thì học sinh lớp 12A có tốc độ hoàn thành bài kiểm tra môn Toán đồng đều hơn lớp 12B .

Câu 4. Để đánh giá độ chính xác của hệ thống đóng gói tự động các túi cà phê người ta tiến hành thu thập mẫu số liệu về khối lượng của một số gói cà phê(đơn vị tính là gam). Máy được coi là hoạt động tốt theo tiêu chuẩn của nhà máy nếu khối lượng trung bình của các gói cà phê nằm trong khoảng $(198; 202)$ và độ lệch chuẩn nhỏ hơn 3 gam. Kết quả kiểm tra được thống kê trong bảng dưới đây

Cân nặng (gam)	$[190; 194)$	$[194; 198)$	$[198; 202)$	$[202; 206)$	$[206; 210)$
Số gói	2	5	6	5	2

Phát biểu	Đ	S
A Cỡ mẫu là $n = 20$.		
B Khối lượng trung bình các gói cà phê bằng 200 gam.		
C Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng 22 .		
D Máy hoạt động tốt theo tiêu chuẩn của nhà máy.		

Câu 5. Số giờ sử dụng smartphone trong 1 ngày nghỉ của học sinh lớp 12A7 được thống kê trong bảng sau:

Số giờ	$[0; 1)$	$[1; 2)$	$[2; 3)$	$[3; 4)$	$[4; 5)$	$[5; 6]$
Số học sinh	3	15	12	9	5	1

Phát biểu	Đ	S
A Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên bằng 6 .		
B Giá trị trung bình của mẫu số liệu trên bằng $\dfrac{226}{45}$.		
C Số trung vị của mẫu số liệu trên bằng $\dfrac{19}{8}$.		
D Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên bằng $\dfrac{2\sqrt{730}}{45}$.		

3 Tự luận

Bài 1. Thời gian hoàn thành một bài viết chính tả của một số học sinh lớp 4 hai trường X và Y được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)	[10; 11)
Số học sinh trường X	8	10	13	10	9
Số học sinh trường Y	4	12	17	14	3

a) Nếu so sánh theo số trung bình thì học sinh trường nào viết nhanh hơn?

b) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị thì học sinh trường nào có tốc độ viết đồng đều hơn?

c) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì học sinh trường nào có tốc độ viết đồng đều hơn?

Bài 2. Bảng sau thống kê lại tổng số giờ nắng trong tháng 6 của các năm từ 2002 đến 2021 tại hai trạm quan trắc đặt ở Nha Trang và Quy Nhơn.

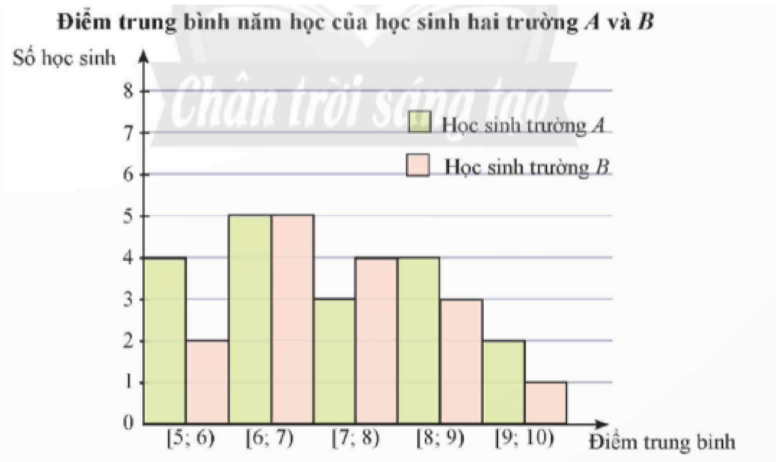
Số giờ nắng	[130; 160)	[160; 190)	[190; 220)	[220; 250)	[250; 280)	[280; 310)
Số năm ở Nha Trang	1	1	1	8	7	2
Số năm ở Quy Nhơn	0	1	4	10	2	3

(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

a) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị thì số giờ nắng trong tháng 6 của địa phương nào đồng đều hơn?

b) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì số giờ nắng trong tháng 6 của địa phương nào đồng đều hơn?

Bài 3. Biểu đồ sau mô tả kết quả điều tra về điểm trung bình năm học của học sinh hai trường A và B.



a) Hãy xác định giá trị đại diện cho mỗi nhóm và lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên.

b) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm thì học sinh trường nào có điểm trung bình đồng đều hơn?

c) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm thì học sinh trường nào có điểm trung bình đồng đều hơn?

ÔN THI GIỮA HK1

TRƯỜNG THPT QUẾ SƠN

TỔ: TOÁN-TIN.

MÃ 101

KIỂM TRA GIỮA KỲ I

NĂM HỌC 2024-2025

Môn: TOÁN – Lớp 12.

Thời gian làm bài: 90 phút

PHẦN I. ***Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án***

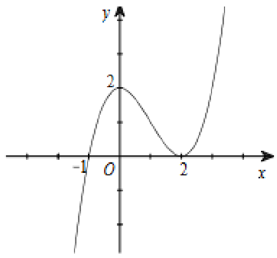
Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty; -2)$. (B) $(1; +\infty)$. (C) $(-2; 1)$. (D) $(-2; +\infty)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty; -1)$. (B) $(2; +\infty)$. (C) $(-1; 2)$. (D) $(0; 2)$.

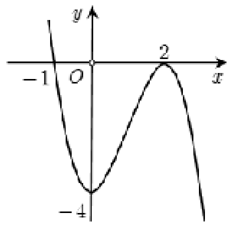
Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm

(A) $x = -2$. (B) $x = 1$. (C) $x = 3$. (D) $x = 2$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



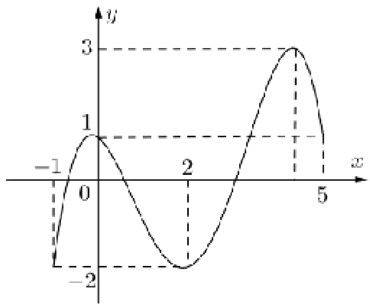
Cực tiểu của hàm số bằng

Ⓐ -1 . Ⓑ -4 . Ⓒ 0 . Ⓓ 2 .

Câu 5. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ là

Ⓐ $x = 0$. Ⓑ $y = -4$. Ⓒ $M(0; -4)$. Ⓓ $N(2; 0)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ lên tục trên $[-1; 5]$ và có đồ thị trên đoạn $[-1; 5]$ như hình vẽ bên dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-1; 5]$. Tính $T = M + m$.



Cực tiểu của hàm số bằng

Ⓐ $T = -1$. Ⓑ $T = 4$. Ⓒ $T = 1$. Ⓓ $T = 2$.

Câu 7. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 21x$ trên đoạn $[2; 4]$ bằng

Ⓐ -38 . Ⓑ $-14\sqrt{7}$. Ⓒ -20 . Ⓓ -34 .

Câu 8. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-2}{x+1}$ là đường thẳng

Ⓐ $x = -1$. Ⓑ $x = 2$. Ⓒ $y = 2$. Ⓓ $y = -1$.

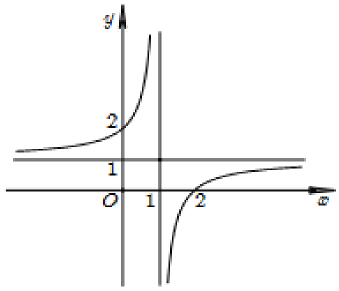
Câu 9. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = 2 - \dfrac{5}{x+1}$ là đường thẳng

Ⓐ $y = 5$. Ⓑ $y = 2$. Ⓒ $x = 1$. Ⓓ $x = -1$.

Câu 10. Điểm nào dưới đây là tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x-2}{1-x}$?

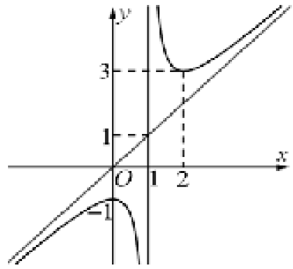
Ⓐ $I(1; 3)$. Ⓑ $J(-1; 3)$. Ⓒ $H(3; 2)$. Ⓓ $K(1; -3)$.

Câu 11. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



Ⓐ $y=\dfrac{2x+5}{x-1}$.
Ⓑ $y=\dfrac{x}{x+1}$.
Ⓒ $y=\dfrac{x-2}{x-1}$.
Ⓓ $y=\dfrac{x+2}{x-1}$.

Câu 12. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



Ⓐ $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$.
Ⓑ $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$.
Ⓒ $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x-1}$.
Ⓓ $y=\dfrac{x^2+2x+1}{1-x}$.

PHẦN II. ***Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a, b, c, d ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.***

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
A $f'(x)=3x^2-3$.		
B Hàm số đồng biến trên $(-1;1)$.		
C Hàm số đạt cực tiểu tại $x_1=-1$ và đạt cực đại tại $x_2=1$.		
D Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$ bằng $f(1)$.		

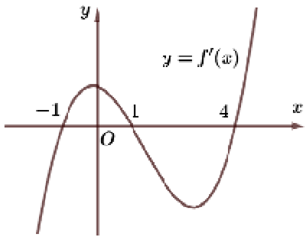
Câu 2. Cho hàm số $y=\dfrac{2-x}{x+1}$ có đồ thị là (C). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
A Đồ thị (C) của hàm số có đường tiệm cận ngang là đường thẳng $x=-1$.		
B Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó .		
C Tâm đối xứng của (C) nằm trên đường thẳng $(\Delta): x+4y-3=0$.		
D Hàm số có 2 điểm cực trị .		

Câu 3. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
A Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.		
B Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận .		
C Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=2$.		
D Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho bằng $4\sqrt{5}$.		

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau:



Phát biểu	Đ	S
(A) Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị .		
(B) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.		
(C) $f(1) > f(2) > f(4)$.		
(D) Trên đoạn $[-1; 4]$, giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ là $f(1)$.		

PHẦN III. ***Câu trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.***

Câu 1. Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x + 2}$. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số có phương trình $y = ax + b$. Tính giá trị biểu thức $T = 5a - 2b$. *Đáp số* ☐

Câu 2. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 + bx^2 + c$ có một điểm cực trị $M(2; 3)$. Tính $y(-3)$. *Đáp số* ☐

Câu 3. Ông An có một hàng rào thép dài 100 m và muốn rào cánh đồng thành một thửa ruộng hình chữ nhật tiếp giáp với một con sông thẳng. Ông không cần rào cho phía giáp con sông. Biết rằng ông An đã rào được thửa ruộng có diện tích lớn nhất là $a(\text{m}^2)$. Giá trị của a là bao nhiêu? *Đáp số* ☐

Câu 4. Giả sử chi phí (tính bằng trăm nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị hàng hóa nào đó của một nhà máy là $C(x) = 16000 + 500x - 1,6x^2 + 0,004x^3$ và $p(x) = 1700 - 7x$ là hàm cầu. Nhà máy cần đặt phương án sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận là lớn nhất. *Đáp số* ☐

Câu 5. Một chiếc hộp dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông và có thể tích là 2 lít. Lượng vật liệu dùng để sản xuất chiếc hộp là nhỏ nhất khi chiều cao của chiếc hộp bằng $\dfrac{a}{\sqrt[3]{b}}(\text{cm}), (a, b \in \mathbb{N}^*, b < 10)$. Tính $T = a + 2b$. *Đáp số* ☐

Câu 6. Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích 1000cm^3. Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá 1,5 nghìn đồng/cm^2 trong khi mặt xung quanh của bình được làm bằng vật liệu có giá $0,8$ nghìn đồng/ cm^2. Biết rằng chi phí thấp nhất để sản xuất mỗi chiếc bình là a (nghìn đồng) (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị). Giá trị a bằng bao nhiêu? *Đáp số*

SỞ GD&ĐT NAM ĐỊNH
Trường THPT Trần Hưng Đạo
TỔ: TOÁN-TIN.

MÃ 102

Kiểm tra giữa HKI
NĂM HỌC 2024-2025
Môn: TOÁN – Lớp 12.
Thời gian làm bài: 90 phút

PHẦN I. ***Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án***

Câu 1. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$. Khi đó $M + m$ bằng

Ⓐ $\dfrac{3}{2}$. Ⓑ 0 . Ⓒ $-\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}$.

Câu 2. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x+5}{x-1}$ có phương trình

Ⓐ $y = 4$. Ⓑ $y = -4$. Ⓒ $y = 5$. Ⓓ $y = -5$.

Câu 3. Đường thẳng $y = y_0$ gọi là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu thỏa mãn

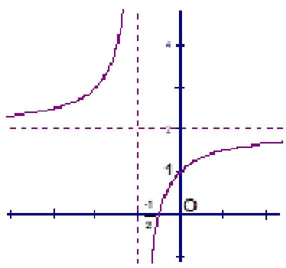
Ⓐ $\lim\limits_{x\to y_0^+} f(x) = +\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to y_0^-} f(x) = -\infty$.

Ⓑ $\lim\limits_{x\to y_0} f(x) = +\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to y_0} f(x) = -\infty$.

Ⓒ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = y_0$.

Ⓓ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -y_0$ hoặc $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -y_0$.

Câu 4. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị như hình vẽ sau. Tâm đối xứng của đồ thị là



Ⓐ gốc tọa độ O .

Ⓑ giao điểm $I(-1;2)$ của hai đường tiệm cận .

Ⓒ một điểm bất kì thuộc Ox .

Ⓓ một điểm bất kì thuộc Oy .

Câu 5. Hàm số $y = x^3 - 3x^2$ nghịch biến trên khoảng

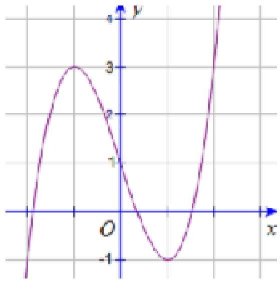
Ⓐ $(0; 2)$. Ⓑ $(-1; 1)$. Ⓒ $(0; +\infty)$. Ⓓ $(-\infty; 0)$.

Câu 6. Trong các hàm số sau, hàm số nào có bảng biến thiên như hình vẽ?

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	2 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$		↘ 2

Ⓐ $y = \dfrac{2x-1}{x-2}$. Ⓑ $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$.
Ⓒ $y = \dfrac{2x-7}{x-2}$. Ⓓ $y = \dfrac{2x-7}{x+2}$.

Câu 7. Đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau có dạng như hình vẽ bên?



Ⓐ $y = x^3 - 3x^2 - 1$. Ⓑ $y = x^3 - 3x - 1$.
Ⓒ $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Ⓓ $y = x^3 - 3x + 1$.

Câu 8. Hàm số $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ đạt cực tiểu tại

Ⓐ $y = 4$. Ⓑ $x = 2$. Ⓒ $y = 0$. Ⓓ $x = 0$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập số thực, có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

Điểm cực đại của hàm số là

Ⓐ $N(1; -2)$. Ⓑ $y = 3$. Ⓒ $x = 0$. Ⓓ $M(0; 3)$.

Câu 10. Hai vectơ được gọi là bằng nhau nếu chúng có

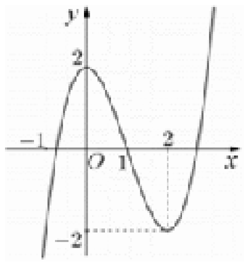
Ⓐ cùng độ dài và cùng phương .

Ⓑ cùng độ dài và ngược hướng .

Ⓒ cùng độ dài .

Ⓓ cùng độ dài và cùng hướng .

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập số thực, có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;2]$ là



Ⓐ $\min\limits_{[0;2]} y = 2$.
Ⓑ $\min\limits_{[0;2]} y = 1$.
Ⓒ $\min\limits_{[0;2]} y = 0$.
Ⓓ $\min\limits_{[0;2]} y = -1$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K.

Ⓐ Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K.

Ⓑ Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K .

Ⓒ Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K .

Ⓓ Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K .

PHẦN II. ***Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a, b, c, d ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.***

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập số thực và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Phát biểu	Đ	S
A Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(4;+\infty)$.		
B Cực đại của hàm số là $x = 1$.		
C $f'(x) = 0 \iff x = -1, x = 1, x = 4$.		
D Hàm số $y = f(x^2 + x - 1)$ có 3 điểm cực tiểu .		

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$.

Phát biểu	Đ	S
A Tập xác định của hàm số là $D = [-1;1]$.		
B $y' = \dfrac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in (-1;1)$.		
C $\min\limits_{D} f(x) = f(0)$.		
D $\min\limits_{D} f(x) = f(0) + \max\limits_{D} f(x) = 2$.		

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x + 7}{x + 1}$.

Phát biểu	Đ	S
(A) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$.		
(B) Đường thẳng $x = -1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số .		
(C) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$.		
(D) Đường thẳng $y = 2x + 1$ à đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số .		

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2, BC = \sqrt{5}$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 3$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD.

Phát biểu	Đ	S
(A) $\left\|\overrightarrow{AG}\right\| = AG$.		
(B) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$.		
(C) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.		
(D) Côsin góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{BD}$ bằng $\dfrac{2}{\sqrt{33}}$.		

PHẦN III. ***Câu trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.***

Câu 1. Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t)$ thì có vận tốc $v(t) = s'(t)$. Biết rằng phương trình chuyển động của chất điểm là $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t$, trong đó t được tính bằng giây và s được tính bằng mét. Kể từ giây thứ bao nhiêu trở đi thì vận tốc của chất điểm bắt đầu tăng?

Đáp số ☐

Câu 2. Độ giảm huyết áp của một bệnh $G(x) = 0{,}025x^2(30-x)$ trong đó x là số miligam thuốc được tiêm cho bệnh nhân $(0 < x < 30)$. Để bệnh nhân có có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm vào là bao nhiêu miligam?

Đáp số ☐

Câu 3. Ông An dự định sử dụng hết 8 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Hỏi ông An có thể làm được cái bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu mét khối? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

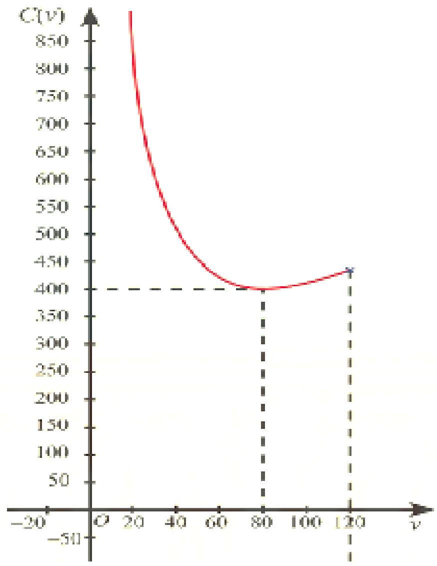
Đáp số ☐

Câu 4. Dân số của một thị trấn kể từ năm 2000 được ước tính bởi công thức $N(t) = \dfrac{15t + 4}{2t + 1}$ (nghìn người). Theo thời gian, dân số của thị trấn sẽ luôn tăng nhưng sẽ không bao giờ đạt đến ít nhất bao nhiêu nghìn người?

Đáp số ☐

Câu 5. Giả sử chiều cao (tính bằng cm) của một giống cây trồng (trong vòng một số tháng nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \dfrac{200}{1+4e^{-t}}$. Trong đó thời gian t được tính bằng tháng kể từ khi hạt bắt đầu nảy mầm. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ tăng chiều cao của giống cây đó. Hỏi sau khi hạt giống bắt đầu nảy mầm, sau bao nhiêu tháng tốc độ tăng chiều cao của cây là lớn nhất? (làm tròn kết quả đến hai chữ số ở phần thập phân) *Đáp số*

Câu 6. Người ta ước tính được chi phí tiền xăng C (nghìn đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình v (km/h) theo công thức: $C(v) = \dfrac{16000}{v} + \dfrac{5}{2}v \quad (0 < v \leq 120)$ Để biểu diễn trực quan sự thay đổi của $C(v)$ theo v, người ta đã vẽ đồ thị hàm số $C(v)$ như hình sau.



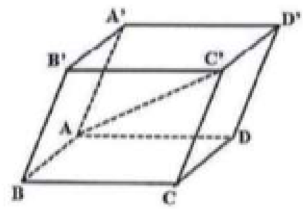
Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình thấp nhất là bao nhiêu km/h để số tiền xăng không vượt quá 500 nghìn đồng? *Đáp số*

SỞ GD&ĐT HÀ NỘI Trường THPT Phan Huy Chú - Quốc Oai TỔ: TOÁN-TIN.	Kiểm tra cuối HKI Năm học 2024-2025 Môn: Toán – Lớp 12. Thời gian làm bài: 90 phút

MÃ 101

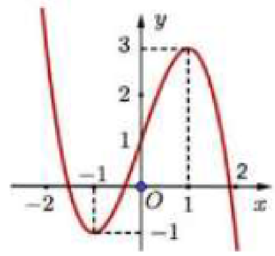
PHẦN I. ***Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án***

Câu 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (minh họa hình vẽ). Phát biểu nào sau đây đúng?



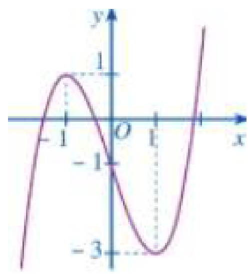
Ⓐ $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC'}$. Ⓑ $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB'}$.
Ⓒ $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{DB}$. Ⓓ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC'}$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



Ⓐ $(2;+\infty)$. Ⓑ $(-\infty;-1)$ Ⓒ $(-1;1)$. Ⓓ $(1;2)$.

Câu 3. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số



Ⓐ $y=-x^3+3x-1$. Ⓑ $y=-x^3+3x+1$.
Ⓒ $y=x^3-x+1$. Ⓓ $y=x^3-3x-1$.

Câu 4. Số liệu thống kê độ dài quãng đường (đơn vị: km) của một bác lái xe mỗi ngày trong một tháng ở bảng sau

Độ dài (km)	$[50;100)$	$[100;150)$	$[150;200)$	$[200;250)$	$[250;300)$
Số ngày	5	10	9	4	2

Khoảng biến thiên (đơn vị: cm) của mẫu số liệu ghép nhóm trên là:

Ⓐ 15 . Ⓑ 200 . Ⓒ 250 . Ⓓ 50 .

Câu 5. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$ có phương trình

Ⓐ $y=x+2$. Ⓑ $y=x-2$.

Ⓒ $y = -2x$.

Ⓓ $y = -x + 2$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (-2; 0; 1)$, $\vec{b} = (-2; 3; 2)$. Tọa độ của vectơ $\vec{a} + \vec{b}$ bằng

Ⓐ $(0; -3; -1)$.

Ⓑ $(-4; 3; 3)$.

Ⓒ $(-4; 3; 1)$.

Ⓓ $(0; 3; 3)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 1; -2)$, $B(4; 3; 1)$, $C(-1; -2; 2)$. Tọa độ trọng tâm tam giác đó là

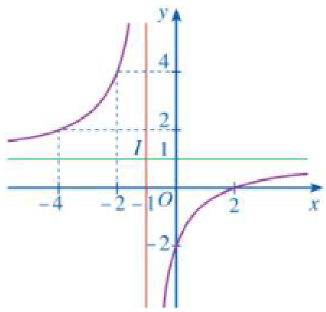
Ⓐ $\left(-\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

Ⓑ $\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Ⓒ $(4; 2; 1)$.

Ⓓ $\left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Câu 8. Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



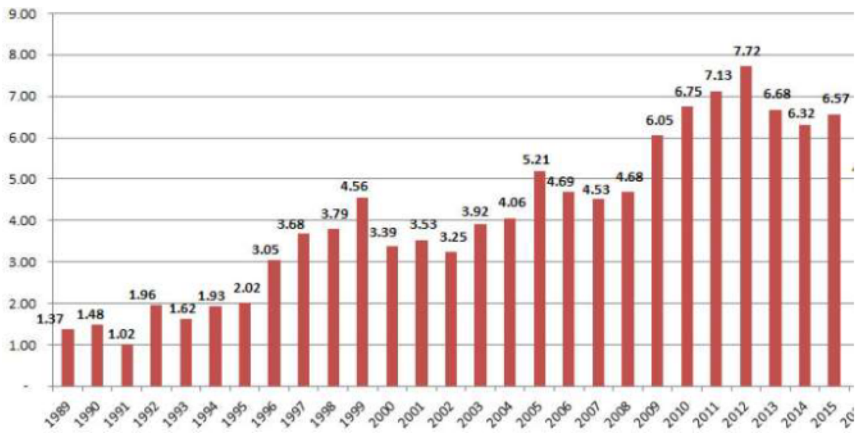
Ⓐ $y = \dfrac{x+1}{x-2}$.

Ⓑ $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Ⓒ $y = \dfrac{x-1}{x+2}$.

Ⓓ $y = \dfrac{x-2}{x+1}$.

Câu 9. Hình dưới là biểu đồ biểu diễn Số lượng xuất khẩu gạo (đơn vị: triệu tấn) của Việt Nam giai đoạn 1989-2015.



Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu cho bởi biểu đồ trên thuộc khoảng nào sau đây?

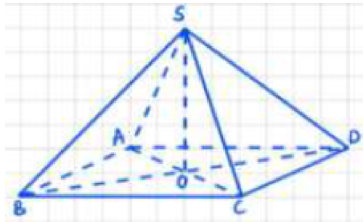
Ⓐ $[1; 2)$.

Ⓑ $[4; 5)$.

Ⓒ $[3; 4)$.

Ⓓ $[2; 3)$.

Câu 10. Cho chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng $2a, SA = SB = SC = SD = a\sqrt{3}$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{SD}$ bằng



Ⓐ $2a^2\sqrt{3}$. Ⓑ $\dfrac{a^2\sqrt{6}}{2}$. Ⓒ $a^2\sqrt{6}$. Ⓓ 0 .

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho là:

Ⓐ $x = 4$. Ⓑ $y = 4$. Ⓒ $y = 0$. Ⓓ $x = 2$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (2; 3; -2), \vec{v} = (3; 1; -1)$. Tính $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Ⓐ 6 . Ⓑ 9 . Ⓒ 11 . Ⓓ 4 .

PHẦN II. ***Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a, b, c, d ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.***

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2; 3; -1), N(-1; 1; 1), P(1; m+1; 2)$.

Phát biểu	Đ	S
A Khoảng cách giữa hai điểm M và N bằng $\sqrt{13}$.		
B Tọa độ trung điểm của đoạn MN là $I\left(\dfrac{3}{2}; 2; 0\right)$.		
C Điểm Q thuộc mặt phẳng (Oxy) nếu M, N, Q thẳng hàng thì Q là trung điểm của đoạn thẳng MN .		
D Tam giác MNP vuông tại M khi $m = -2$.		

Câu 2. Cho hàm số $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$.

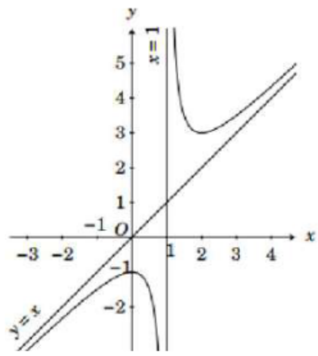
Phát biểu	Đ	S
A $\min\limits_{[-1;4]} f(x) = -1$.		
B Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 1 .		
C Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.		
D Hàm số đã cho có hai điểm cực trị .		

Câu 3. Trong thực hành đo hiệu điện thế của mạch điện, An và Bình đã dùng hai Vôn kế khác nhau để đo, mỗi bạn tiến hành đo 10 lần và cho kết quả như sau:

Hiệu điện thế (V)	$[3,85;3,90)$	$[3,90;3,95)$	$[3,95;4,00)$	$[4,00;4,05)$
Số lần	1	6	2	1
Số lần	1	3	4	2

Phát biểu	Đ	S
A Khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu là như nhau .		
B Giá trị trung bình mẫu số liệu của hai bạn bằng nhau .		
C Các kết quả đo được của An ổn định hơn của Bình .		
D Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu về kết quả đo của An lớn hơn của Bình .		

Câu 4. Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2 - bx + 1}{x - c}$ có đồ thị cho bởi hình vẽ sau:



Phát biểu	Đ	S
A Hàm số đã cho không có cực trị .		
B Giao điểm của hai đường tiện cận có tọa độ là $(1;1)$.		
C $a + b + c = 2$.		
D Phương trình $ax^2 - bx + 1 = 0$ có đúng một nghiệm .		

PHẦN III. ***Câu trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.***

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilomet), ra đa phát hiện một chiếc máy bay đang bay với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(950;600;8)$ đến điểm $B(1050;450;9)$ trong 12 phút. Tính vận tốc của máy bay (đơn vị km/h) trong 12 phút đó (làm tròn kết quả tới hàng đơn vị)? *Đáp số*

Câu 2. Sau khi phát hiện một dịch bệnh, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày phát hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là

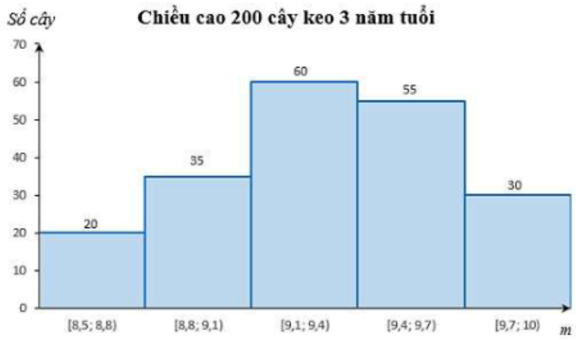
$$f(t) = -\frac{t^3}{3} + 17t^2 + 580t, \quad t \in \mathbb{N}^*, t \leq 30.$$

Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0;30]$ thì $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. Trong 30 ngày đầu tiên, ngày thứ bao nhiêu tốc độ truyền bệnh là lớn nhất? *Đáp số* ☐

Câu 3. Bộ phận sản xuất của một công ty xác định chi phí để sản xuất x sản phẩm được cho bởi biểu thức $T(x) = -20x^2 + 400$ (nghìn đồng). Nếu x sản phẩm đều được bán hết và giá bán mỗi sản phẩm là 100 nghìn đồng thì lợi nhuận lớn nhất mà công ty thu được là bao nhiêu? *Đáp số* ☐

Câu 4. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-24; 24]$ để hàm số $y = \dfrac{(m+1)x+m}{2x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó? *Đáp số* ☐

Câu 5. Điều tra của chủ nông trường về chiều cao (đơn vị: mét) của 200 cây keo 3 năm tuổi được cho ở biểu đồ dưới đây:



Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Đáp số ☐

Câu 6. Hai chiếc flycam được điều khiển cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc flycam thứ nhất cách mặt đất 3m, cách điểm xuất phát 3m về phía Nam và 2m về phía Đông. Chiếc flycam thứ hai cách mặt đất 5m, cách điểm xuất phát 2m về phía Bắc và 4m về phía Tây. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc flycam, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất có trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời. (đơn vị đo lấy theo mét). Gọi $M(a; b; c)$ là một điểm nằm trên mặt đất sao cho ba điểm M, A, B thẳng hàng. Khi đó $2a + b + c$ bằng? *Đáp số* ☐

SỞ GD&ĐT HẢI PHÒNG
Trường THPT Chuyên Trần Phú
TỔ: TOÁN-TIN.

MÃ 121

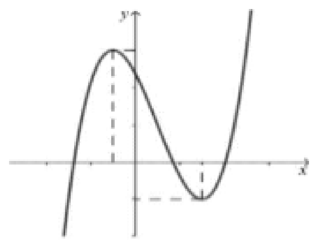
Kiểm tra cuối HKI
Năm học 2024-2025
Môn: Toán – Lớp 12.
Thời gian làm bài: 90 phút

PHẦN I. ***Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án***

Câu 1. Trong một nhà hàng, mỗi tuần để chế biến x phần ăn (x lấy giá trị trong khoảng từ 30 đến 120) thì chi phí trung bình của một phần ăn được cho bởi công thức: $\overline{C}(x) = 2x - 235 + \dfrac{7200}{x}$. Số phần ăn x là bao nhiêu thì chi phí trung bình của mỗi phần ăn là thấp nhất?

Ⓐ $x = 40$. Ⓑ $x = 50$. Ⓒ $x = 60$. Ⓓ $x = 70$.

Câu 2. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



Ⓐ $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$. Ⓑ $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
Ⓒ $a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$. Ⓓ $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (2; 2; -1)$, $\vec{c} = (4; 0; -4)$. Tọa độ của vectơ $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ là

Ⓐ $\vec{d} = (-7; 0; 4)$. Ⓑ $\vec{d} = (7; 0; 4)$.
Ⓒ $\vec{d} = (7; 0; -4)$. Ⓓ $\vec{d} = (-7; 0; -4)$.

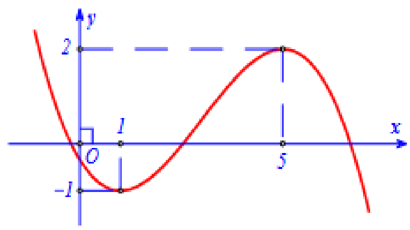
Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$. Ⓑ $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$. Ⓓ $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{4}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(2; 4; 0), B(4; 0; 0), C(-1; 4; -7)$ và $D'(6; 8; 10)$. Tọa độ điểm B' là

Ⓐ $(6; 12; 0)$. Ⓑ $(10; 8; 6)$. Ⓒ $(13; 0; 17)$. Ⓓ $(8; 4; 10)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$ bằng



Ⓐ 2 . Ⓑ 1 . Ⓒ -1 . Ⓓ 5 .

Câu 7. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về tuổi thọ (đơn vị tính là năm) của một loại bóng đèn mới như sau:

Tuổi thọ	$[2;3,5)$	$[3,5;5,0)$	$[5;6,5)$	$[6,5;8,0)$
Số bóng đèn	8	22	32	15

Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là

Ⓐ $[3,5;5,0]$. Ⓑ $[6,5;8,0]$. Ⓒ $[5,0;6,5]$. Ⓓ $[2;3,5]$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, có đạo hàm trên $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

Ⓐ 2 . Ⓑ 3 . Ⓒ 1 . Ⓓ 4 .

Câu 9. Cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, biết $|\vec{u}| = 3\sqrt{3}$, $|\vec{v}| = 4$ và góc giữa hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ là 30°. Tính tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Ⓐ 12 . Ⓑ -18 . Ⓒ 18 . Ⓓ $6\sqrt{3}$.

Câu 10. Số đặc trưng nào không sử dụng thông tin của nhóm số liệu đầu tiên và nhóm số liệu cuối cùng?

Ⓐ Phương sai . Ⓑ Khoảng tứ phân vị .

Ⓒ Khoảng biến thiên . Ⓓ Độ lệch chuẩn .

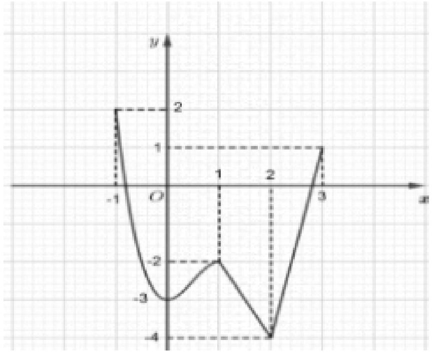
Câu 11. Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khoẻ. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị: km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau:

Quãng đường (km)	$[2,7;3,0)$	$[3,0;3,3)$	$[3,3;3,6)$	$[3,6;3,9)$	$[3,9;4,2]$
Số ngày	3	6	5	4	2

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

Ⓐ 0,36 . Ⓑ 3,41 . Ⓒ 0,017 . Ⓓ 11,62 .

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M + m$ là



Ⓐ -5 . Ⓑ -7 . Ⓒ -6 . Ⓓ 2 .

PHẦN II. ***Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a, b, c, d ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.***

Câu 1. Thầy Tuấn thống kê lại điểm trung bình cuối năm của các học sinh lớp 11A và 11B ở bảng sau:

Lớp \ Điểm trung bình	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)
11A	1	0	11	22	6
11B	0	6	8	14	12

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
A Nếu so sánh theo khoảng biến thiên thì điểm trung bình của các học sinh lớp 11B ít phân tán hơn điểm trung bình của các học sinh lớp 11A .		
B Khoảng biến thiên của điểm số học sinh lớp 11A là 5 .		
C Xét mẫu số liệu của lớp 11A ta có độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $\sqrt{0,51}$.		
D Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì học sinh lớp 11A có điểm trung bình ít phân tán hơn học sinh lớp 11B .		

Câu 2. Cho hàm số $(\mathscr{C}_1): y = f(x) = \dfrac{3x-1}{x-2}$; $(\mathscr{C}_2): y = f(x) = x - 1 - \dfrac{2}{2x-1}$.

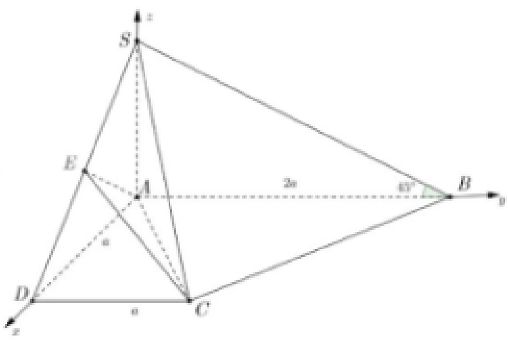
Phát biểu	Đ	S
A Hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang tạo với 2 trục toạ độ một đa giác có chu vi bằng 6 .		
B $\max\limits_{[1;2]} g(x) = \dfrac{1}{3}$; $\min\limits_{[1;2]} g(x) = -2$.		
C Hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$ cùng với đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = g(x)$ tạo thành tam giác có diện tích bằng 2 .		
D Hàm số $y = f(x)$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.		

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$, biết

$$A(-1;0;3), B(2;1;-1), C(3;2;2)$$

Phát biểu	Đ	S
A Điểm M thuộc (Oxy) sao cho A, M, B thẳng hàng thì $M\left(\dfrac{5}{4}; -\dfrac{3}{4}; 0\right)$.		
B Tọa độ điểm $D(0;1;6)$.		
C Tọa độ điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{0}$ là $N(10;5;4)$.		
D Côsin góc C của tam giác ABC bằng $\dfrac{\sqrt{231}}{77}$.		

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng $45°$, E là trung điểm SD, $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Gọi G là trọng tâm tam giác ACE. Chọn hệ trục như hình vẽ.

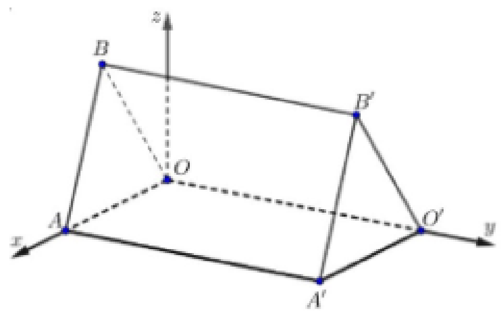


Phát biểu	Đ	S
A Tọa độ điểm $C(a;2a;0)$.		
B $BG = \dfrac{a\sqrt{113}}{6}$.		
C $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$.		
D $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CS}$.		

PHẦN III. ***Câu trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.***

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{4x^2 - 15x + 8}{x - 3}$. Gọi $I(a; b)$ là giao điểm của đường tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Tính $2a+b$. *Đáp số*

Câu 2. Những căn nhà gỗ trong Hình bên được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác $OAB.O'A'B'$. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ thể hiện như hình vẽ, hai điểm A' và B' có tọa độ lần lượt là A$'(240; 450; 0)$, $B'(120; 450; 300)$. Mỗi căn nhà gỗ có chiều dài là a cm , chiều rộng là b cm , mỗi cạnh bên của mặt tiền có độ dài là c cm. Tính $a + b + c$ (làm tròn đến hàng đơn vị). *Đáp số*

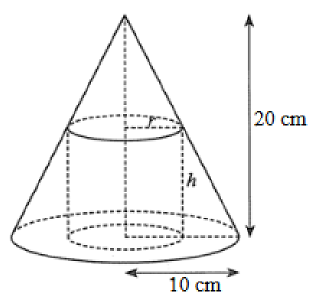


Câu 3. Khảo sát trọng lượng (kg) của trẻ em 6 tuổi ở một khu vực thu được kết quả

Trọng lượng	[14; 16)	[16; 18)	[18; 20)	[20; 22)	[22; 24)	[24; 26)	[26; 28)
Số trẻ	25	60	120	105	42	30	18

Gọi $\Delta Q, s^2, s$ lần lượt là khoảng tứ phân vị, phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu **sau khi đã làm tròn đến hàng phần chục** thì giá trị của biểu thức $P = \Delta Q + s^2 + s$ bằng *Đáp số*

Câu 4. Hình bên cho biết một hình trụ có bán kính đáy r (cm), chiều cao h (cm) nội tiếp hình nón có bán kính đáy 10 (cm) và chiều cao 20 (cm) . Tìm giá trị của r (*làm tròn đến hàng phần chục*) để thể tích của khối trụ là lớn nhất. *Đáp số*



Câu 5. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = 1$ và hai vectơ $\vec{u} = \dfrac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Khi đó côsin góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng bao nhiêu?

Đáp số

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB, CD, tọa độ ba đỉnh $A(1;2;1), B(2;0;-1), C(6;1;0)$. Biết hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$. Tính $P = 3a + b - c$.

Đáp số

SỞ GD&ĐT An Giang

Trường THPT Nguyễn Khuyến

TỔ: TOÁN-TIN.

MÃ 101

Kiểm tra cuối HKI

NĂM HỌC 2024-2025

Môn: TOÁN – Lớp 12.

Thời gian làm bài: 90 phút

PHẦN I. ***Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án***

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 + 3x + 2$. mệnh đề nào dưới đây đúng?

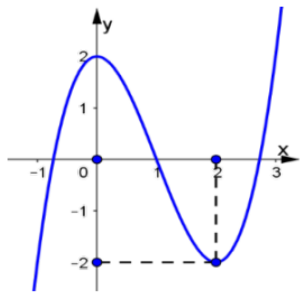
(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

(B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

(C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

(D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Hàm số đạt cực tiểu tại:



(A) $y = 0$. (B) $x = 2$. (C) $x = 0$. (D) $y = -2$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ bên.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$ || 3	$\nearrow$	5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là

(A) 4 . (B) 2 . (C) 3 . (D) 1 .

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (3; 0; 1)$, $\vec{v} = (2; 1; 0)$. Tính $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

(A) 8 . (B) 6 . (C) 0 . (D) -6 .

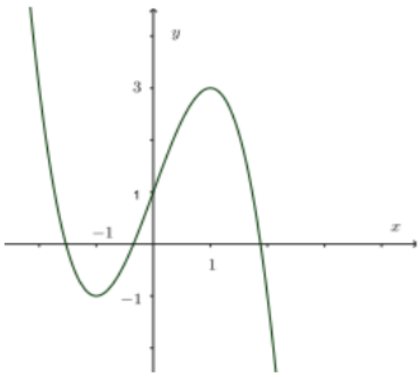
Câu 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biểu thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC'}$.

Câu 6. Đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ nhận

Ⓐ trục tung làm trục đối xứng .
Ⓑ gốc tọa độ O làm tâm đối xứng .
Ⓒ điểm $I(-1; 0)$ làm tâm đối xứng .
Ⓓ đường thẳng $x = 1$ làm trục đối xứng .

Câu 7. Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong dưới đây?



Ⓐ $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.
Ⓑ $y = \dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$.
Ⓒ $y = -x^3 + 3x + 1$.
Ⓓ $y = x^3 - 3x + 1$.

Câu 8. Thời gian hoàn thành một bài viết chính tả của một học sinh lớp 4 trường A được cho ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)	[10; 11]
Số học sinh	3	6	5	4	2

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

Ⓐ 5 . Ⓑ 1 . Ⓒ 3 . Ⓓ 7 .

Câu 9. Một mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của học sinh trong một lớp (đơn vị là centimét) có phương sai là 6, 25. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó bằng:

Ⓐ $2,5cm$. Ⓑ $12,5cm$. Ⓒ $3,125cm$. Ⓓ $42,25cm$.

Câu 10. Một chất điểm chuyển động thẳng với phương trình $s(t) = t^3 + 3t - 1$, trong đó t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 5$ giây?

Ⓐ $139m/s$. Ⓑ $78m/s$. Ⓒ $30m/s$. Ⓓ $77m/s$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu $A(1; 2; 3)$ lên (Oxz) có tọa độ là

Ⓐ $(0; 0; 3)$. Ⓑ $(1; 0; 0)$. Ⓒ $(0; 2; 0)$. Ⓓ $(1; 0; 3)$.

Câu 12. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A) Phương sai có giá trị là số âm .

(B) Phương sai luôn luôn lớn hơn độ lệch chuẩn .

(C) Phương sai là bình phương của độ lệch chuẩn .

(D) Phương sai gấp đôi giá trị của độ lệch chuẩn .

PHẦN II. ***Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a, b, c, d ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.***

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ iên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		0	+	0	$-$	0	+

Phát biểu	Đ	S
A Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$.		
B Điểm cực tiểu của hàm số bằng 3 .		
C Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị trái dấu .		
D Giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f'(x)$ trên $[1; 3]$ là 2 biết $f'(x) = 3x^2 + bx + c$. .		

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $B(-2; 2; 0)$, và $C(4; 1; -1)$.

Phát biểu	Đ	S
A Tọa độ của điểm A là $A(2; 2; 2)$.		
B Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{BC}$ là $\overrightarrow{BC} = (-6; 1; 1)$.		
C Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AC là $I(2; -1; -3)$.		
D Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ là $\sqrt{30}$.		

Câu 3. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + x + 2}{x - 1}$.

Phát biểu	Đ	S
A Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 1$.		
B Ta có $y' = 1 + \dfrac{4}{(x-1)^2}$.		
C Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y = x + 2$.		
D Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số giao với hai trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng $\dfrac{1}{4}$.		

Câu 4. Kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Dũng cho bởi Bảng 15, kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Huy cho bởi Bảng 16 (đơn vị: m). Ta có các bảng thống kê sau:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[6,22 ; 6,46)	6,34	3
[6,46 ; 6,70)	6,58	7
[6,70 ; 6,94)	6,82	5
[6,94 ; 7,18)	7,06	20
[7,18 ; 7,42)	7,30	5
		$n = 40$

Bảng 15

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[6,22 ; 6,46)	6,34	2
[6,46 ; 6,70)	6,58	5
[6,70 ; 6,94)	6,82	8
[6,94 ; 7,18)	7,06	19
[7,18 ; 7,42)	7,30	6
		$n = 40$

Bảng 16

Phát biểu	Đ	S
A Các bảng trên là bảng phân bố tần số ghép lớp .		
B Số lần nhảy xa từ 7,18 m trở lên của vận động viên Dũng là 5 .		
C Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Huy cho bởi Bảng 16 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là: 0,16 .		
D Nhận thấy độ lệch chuẩn của vận động viên Dũng nhỏ hơn của vận động viên Huy nên kết quả nhảy xa của vận động viên Dũng đồng đều hơn kết quả nhảy xa của vận động viên Huy .		

PHẦN III. ***Câu trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.***

Câu 1. Đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị là A, B. Tìm khoảng cách giữa hai điểm A và B (làm tròn đến hàng phần chục). *Đáp số*

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1), B(2;1;2), D(1;-1;1), C$
Gọi điểm $I(a;b;c)$ là tâm của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của c.

Đáp số

Câu 3. Hằng ngày mực nước của hồ thủy điện ở miền Trung lên và xuống theo lượng nước mưa, và các yếu tố khác (v.v...). Từ lúc hừng sáng, độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống theo thời gian t (giờ) trong ngày cho bởi công thức $h(t) = 24t + 5t^2 - \frac{1}{3}t^3$. Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi xả nước quy định trước 5 giờ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời muộn nhất là mấy giờ. Biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước. *Đáp số*

Câu 4. Cô Hà thống kê lại đường kính thân gỗ của một số cây xoan đào 6 năm tuổi được trồng ở một lâm trường ở bảng sau.

Đường kính (cm)	[40; 45)	[45; 50)	[50; 55)	[55; 60)	[60; 65)
Tần số	5	20	18	7	3

Hãy xác định khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp số

Câu 5. Ba chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm trong không gian. Sau một khoảng thời gian, chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 2 km về phía Nam, đồng thời cách mặt đất 0,5 km; chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía Bắc và 1 km về phía Tây, đồng thời cách mặt đất 0,3 km. Chiếc thứ ba thẳng hàng với chiếc thứ nhất và thứ hai, đồng thời cách mặt đất 0,4 km và nằm cách điểm xuất phát 5 km về phía Đông. Tính khoảng cách giữa khinh khí cầu thứ nhất và thứ ba là bao nhiêu kilomet? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.)

Đáp số

Câu 6. Một miếng nhôm có bề ngang 30 cm được uốn cong tạo thành máng dẫn nước bằng cách chia tấm nhôm thành 3 phần bằng nhau rồi gập 2 bên lại theo một góc $\theta \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ như hình vẽ dưới. Hỏi θ bằng bao nhiêu để tạo ra máng có diện tích mặt ngang S lớn nhất để có thể cho nước đi qua nhiều nhất? (θ tính theo radian và làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp số