

---

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

### CHỦ ĐỀ 1: CÁC TÍNH CHẤT CỦA LŨY THỪA

#### PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

##### 1. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

Lũy thừa bậc  $n$  của  $a$  là tích của  $n$  thừa số bằng nhau, mỗi thừa số bằng  $a$  :

$$a^n = a.a.\dots.a \text{ (} n \text{ thừa số } a \text{)} \text{ (} n \in \mathbb{N}^* \text{)}$$

$a$  được gọi là cơ số.

$n$  được gọi là số mũ.

##### 2. MỘT VÀI QUY ƯỚC

$$1^n = 1 \text{ ví dụ : } 1^{2021} = 1$$

$$a^0 = 1 \text{ ví dụ : } 2021^0 = 1$$

##### 3. NHÂN HAI LŨY THỪA CÙNG CƠ SỐ

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Khi nhân hai lũy thừa cùng cơ số, ta giữ nguyên cơ số và cộng các số mũ.

##### 4. CHIA HAI LŨY THỪA CÙNG CƠ SỐ

$$a^m : a^n = a^{m-n} \text{ (} a \neq 0; m \geq 0 \text{)}$$

Khi chia hai lũy thừa cùng cơ số (khác 0), ta giữ nguyên cơ số và trừ các số mũ cho nhau.

##### 5. LŨY THỪA CỦA LŨY THỪA

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\text{Ví dụ : } (2^2)^4 = 2^{2 \cdot 4} = 2^8$$

##### 6. NHÂN HAI LŨY THỪA CÙNG CƠ SỐ, KHÁC SỐ MŨ

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

$$\text{ví dụ : } 2^3 \cdot 4^3 = (2 \cdot 4)^3 = 8^3$$

##### 7. LŨY THỪA TẦNG

$$a^{m^n} = a^{(m^n)}$$

$$\text{Ví dụ: } 3^{3^2} = (3)^{(3^2)} = 3^9$$

##### 8. CHIA HAI LŨY THỪA CÙNG CƠ SỐ KHÁC SỐ MŨ

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

---

$$a^m : b^m = (a : b)^m$$

$$\text{ví dụ : } 8^4 : 4^4 = (8 : 4)^4 = 2^4$$

### 9. LŨY THỪA CỦA MỘT THƯƠNG

$$(a : b)^n = a^n : b^n \quad (b \neq 0)$$

$$\text{Ví dụ: } (8 : 4)^2 = 8^2 : 4^2 = 64 : 16 = 4$$

### PHẦN II: CÁC DẠNG BÀI

#### DẠNG 1: Viết gọn một biểu thức dưới dạng lũy thừa

##### I. Phương pháp giải: Sử dụng các công thức sau:

$$a^n = a.a.\dots.a \quad (n \text{ thừa số } a) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : b^m = (a : b)^m \quad (a \neq 0; m \geq 0)$$

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

$$a^m . b^m = (a.b)^m$$

$$a^{m^n} = a^{(m^n)}$$

$$a^m : b^m = (a : b)^m$$

##### II. Bài toán:

**Bài 1:** Viết các tích sau dưới dạng lũy thừa

a)  $2.4.8.8.8$

b)  $2^5.4^3.16^2$

c)  $3^4.27^4.81^2$

d)  $10.100.100^3.1000^5$

e)  $3y.3y.3y \quad (y \neq 0)$

f)  $x^1.x^2.\dots.x^{100} \quad (x \neq 0)$

g)  $z^1.z^4.z^7.\dots.z^{100} \quad (z \neq 0)$

h)  $(m^1)^2.(m^2)^3.(m^3)^4.\dots.(m^{99})^{100} \quad (m \neq 0)$

##### Lời giải

a) Ta có:  $2.4.8.8.8 = 2.2^2.2^3.2^3.2^3 = 2^{12}$

b) Ta có:  $2^5.4^3.16^2 = 2^5.(2^2)^3.(2^4)^2 = 2^5.2^6.2^8 = 2^{19}$

c) Ta có:  $3^4.27^4.81^2 = 3^4.(3^3)^4.(3^4)^2 = 3^4.3^{12}.3^8 = 3^{24}$

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

---

d) Ta có:  $10.100.100^3.1000^5 = 10.10^2.(10^2)^3.(10^3)^5 = 10.10^2.10^6.10^{15} = 10^{24}$

e) Ta có:  $3y.3y.3y(y \neq 0) = (3y)^3$

f) Ta có:  $x^1.x^2....x^{100} = x^{1+2+...+100} = x^{5050} (x \neq 0)$

g) Ta có:  $z^1.z^4.z^7....z^{100} (z \neq 0) = z^{1+4+7+...+100} = z^{(100+1).34:2} = z^{101.17}$

h) Ta có:  $(m^1)^2.(m^2)^3.(m^3)^4....(m^{99})^{100} (m \neq 0) = m^{1.2}.m^{2.3}....m^{99.10} = m^{\frac{1}{3}.99.100.101} (m \neq 0)$

**Bài 2:** Viết kết quả phép chia dưới dạng lũy thừa.

a)  $10^8 : 10^3 : 10^4$

b)  $625 : 5^3$

c)  $7^5 : 343$

d)  $1000000 : 10^3$

e)  $243 : 3^3 : 3$

f)  $265 : 2^5 : 4$

g)  $(4x^2)^8 : (4x^2)^4 : (4x^2)^2 (x \neq 0)$

h)  $a^{100} : a^{15} : a^{62} (a \neq 0)$

i)  $y^{50} : (y^5)^3 : (y^2)^{10}$

### Lời giải

a) Ta có:  $10^8 : 10^3 : 10^4 = 10$

b) Ta có:  $625 : 5^3 = 5^4 : 5^3 = 5$

c) Ta có:  $7^5 : 343 = 7^5 : 7^3 = 7^2$

d) Ta có:  $1000000 : 10^3 = 10^6 : 10^3 = 10^3$

e) Ta có:  $243 : 3^3 : 3 = 3^5 : 3^3 : 3 = 3$

f) Ta có:  $265 : 2^5 : 4 = 2^8 : 2^5 : 2^2 = 2$

g) Ta có:  $(4x^2)^8 : (4x^2)^4 : (4x^2)^2 = (4x^2)^2 = [(2x)^2]^2 = (2x)^2 (x \neq 0)$

i) Ta có:  $y^{50} : (y^5)^3 : (y^2)^{10} = y^{50} : y^{15} : y^{20} = y^{15}$

**Bài 3:** Viết kết quả phép tính sau dưới dạng lũy thừa.

a)  $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2$ ;

c)  $25.5^3 \cdot \frac{1}{625} \cdot 5^3$

b)  $4^2.32 : 2^3$ ;

d)  $5^6 \cdot \frac{1}{20} \cdot 2^2 \cdot 3^3 : 125$ .

### Lời giải

$$\text{a) } \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^{12}$$

$$\text{b) } 4^2 \cdot 32 : 2^3 = (2^2)^2 \cdot 2^5 : 2^3 = 2^4 \cdot 2^5 : 2^3 = 2^9 : 2^3 = 2^6$$

$$\text{c) } 25 \cdot 5^3 \cdot \frac{1}{625} \cdot 5^5 = 5^2 \cdot 5^3 \cdot \frac{1}{5^4} \cdot 5^5 = \frac{5^{10}}{5^4} = 5^6$$

$$\text{d) } 5^6 \cdot \frac{1}{20} \cdot 2^2 \cdot 3^3 : 125 = 5^6 \cdot \frac{1}{20} \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \frac{1}{125} = \frac{5^6 \cdot 2^2 \cdot 3^3}{2^2 \cdot 5 \cdot 5^3} = \frac{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^6}{2^2 \cdot 5^4} = 3^3 \cdot 5^2 = 675$$

**Bài 4:** Cho  $A = 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2015}$ . viết  $A+1$  dưới dạng lũy thừa của 8.

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } A = 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2015} = 2^{2016} - 1 \Rightarrow A + 1 = 2^{2016} = (2^3)^{672} = 8^{672}$$

**DẠNG 2: Tính giá trị của một biểu thức lũy thừa.**

**I. Phương pháp giải:**

Áp dụng công thức:

$$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a \quad (n \text{ thừa số } a) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : b^m = (a : b)^m \quad (a \neq 0; m \geq 0)$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

$$a^{m^n} = a^{(m^n)}$$

$$a^m : b^m = (a : b)^m$$

và làm các phép tính như thông thường.

**II. Bài toán:**

**Bài 1 :** Thực hiện các phép tính sau bằng cách hợp lý.

$$\text{a) } (2^{17} + 17^2) \cdot (9^{15} - 3^{15}) \cdot (2^4 - 4^2)$$

$$\text{b) } (8^{2017} - 8^{2015}) : (8^{2104} \cdot 8)$$

$$\text{c) } (1^3 + 2^3 + 3^3 + 5^5) \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) \cdot (3^8 - 81^2)$$

$$d) (2^8 + 8^3) : (2^5 \cdot 2^3)$$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} a) & (2^{17} + 17^2) \cdot (9^{15} - 3^{15}) \cdot (2^4 - 4^2) \\ &= (2^{17} + 17^2) \cdot (9^{15} - 3^{15}) \cdot (16 - 16) \\ &= (2^{17} + 17^2) \cdot (9^{15} - 3^{15}) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) & (8^{2017} - 8^{2015}) : (8^{2104} \cdot 8) \\ &= (8^{2017} - 8^{2015}) : 8^{2015} \\ &= 8^{2017} : 8^{2015} - 8^{2015} : 8^{2015} \\ &= 8^2 - 1 \\ &= 64 - 1 \\ &= 63 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) & (1^3 + 2^3 + 3^4 + 4^5) \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) \cdot (3^8 - 81^2) \\ &= (1^3 + 2^3 + 3^4 + 4^5) \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) \cdot [3^8 - (3^4)^2] \\ &= (1^3 + 2^3 + 3^4 + 4^5) \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) \cdot (3^8 - 3^8) \\ &= (1^3 + 2^3 + 3^4 + 4^5) \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) & (2^8 + 8^3) : (2^5 \cdot 2^3) \\ &= [2^8 + (2^3)^3] : 2^8 \\ &= (2^8 + 2^9) : 2^8 \\ &= (2^8 : 2^8) + (2^9 : 2^8) \\ &= 1 + 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

**Bài 2.** Thực hiện phép tính:

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

a)  $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$ ;

c)  $\left(\frac{9}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{12}{9}\right)^0 : \left(\frac{-9}{8}\right)^3$ ;

b)  $\left(\frac{-1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{-7}{3}\right)^2$ ;

d)  $(-3)^3 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot 2^{-5}$ .

### Lời giải

a)  $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1^3}{2^3} \cdot \frac{1^2}{4^2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{128}$

b)  $\left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{1}{7^2} \cdot \frac{7^2}{3^2} = \frac{1}{9}$

c)  $\left(\frac{9}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{12}{9}\right)^0 : \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^3 \cdot 1 : \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{3^6}{2^6} \cdot \frac{(2^3)^2}{(3^2)^2} = \frac{3^6 \cdot 2^6}{2^6 \cdot 3^4} = 3^2 = 9$

d)  $(3)^3 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot 2^{-5} = 3^3 \cdot \frac{(2^3)^2}{(3^2)^2} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{3^3 \cdot 2^6}{3^4 \cdot 2^5} = \frac{2}{3}$

### Bài 3: Thực hiện phép tính

a.  $1024 : (17 \cdot 2^5 + 15 \cdot 2^5)$       b.  $5^3 \cdot 2 + (23 + 4^0) : 2^3$       c.  $(5 \cdot 3^5 + 17 \cdot 3^4) : 6^2$

### Lời giải

a. Ta có:  $1024 : (17 \cdot 2^5 + 15 \cdot 2^5) = 2^{10} : [2^5(17 + 15)] = 2^{10} : 2^5 \cdot 2^5 = 1$

b. Ta có:  $5^3 \cdot 2 + (23 + 4^0) : 2^3 = 5^3 \cdot 2 + 24 : 2^3 = 250 + 3 = 253$

c. Ta có:  $(5 \cdot 3^5 + 17 \cdot 3^4) : 6^2 = [3^4(5 \cdot 3 + 17)] : (3 \cdot 2)^2 = (3^4 \cdot 32) : 3^2 \cdot 2^2 = \frac{3^4 \cdot 2^5}{3^2 \cdot 2^2} = 9 \cdot 8 = 72$

### Bài 4: Thực hiện phép tính

a)  $(10^2 + 11^2 + 12^2) : (13^2 + 14^2)$       b)  $(2^3 \cdot 9^4 + 9^3 \cdot 45) : (9^2 \cdot 10 + 9^2 \cdot 3)$

### Lời giải

a) Ta có:  $(10^2 + 11^2 + 12^2) : (13^2 + 14^2) = (100 + 121 + 144) : (169 + 196) = 365 : 365 = 1$

b) Ta có:

$$(2^3 \cdot 9^4 + 9^3 \cdot 45) : (9^2 \cdot 10 + 9^2 \cdot 3) = (2^3 \cdot 3^8 + 3^8 \cdot 5) : (3^4 \cdot 10 + 3^4 \cdot 3) = \frac{3^8(8+5)}{3^4 \cdot 13} = \frac{3^4 \cdot 13}{13} = 3^4 = 81$$

### Bài 5: Tính giá trị của các biểu thức sau:

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

---

$$\text{a) } A = \frac{3^{10} \cdot 10 + 3^{10} \cdot 6}{3^9 \cdot 2^2}$$

$$\text{b) } B = \frac{11 \cdot 3^{22} \cdot 3^7 - 9^{15}}{(2 \cdot 3^{14})^2}$$

$$\text{c) } C = \frac{36^{10} \cdot 25^{15}}{30^8}$$

$$\text{d) } D = \frac{21^2 \cdot 14 \cdot 126}{35^5 \cdot 6}$$

$$\text{e) } E = \frac{11 \cdot 3^{22} \cdot 3^7 - 9^{15}}{(2 \cdot 3^{14})^2}$$

$$\text{f) } F = \frac{4^9 \cdot 36 + 64^4}{100 \cdot 16^4}$$

### Lời giải

$$\text{a) Ta có: } A = \frac{3^{10} \cdot 10 + 3^{10} \cdot 6}{3^9 \cdot 2^2} = \frac{3^{10} \cdot (10 + 6)}{3^9 \cdot 2^4} = \frac{3^{10} \cdot 2^4}{3^9 \cdot 2^4} = 3$$

$$\text{b) Ta có: } B = \frac{11 \cdot 3^{22} \cdot 3^7 - 9^{15}}{(2 \cdot 3^{14})^2} = \frac{11 \cdot 3^{29} - 3^{30}}{4 \cdot 3^{28}} = \frac{3^{29} (11 - 3)}{4 \cdot 3^{28}} = \frac{3 \cdot 8}{4} = 6$$

$$\text{c) Ta có: } C = \frac{36^{10} \cdot 25^{15}}{30^8} = \frac{(6^2)^{10} \cdot (5^2)^{15}}{(6 \cdot 5)^8} = \frac{6^{20} \cdot 5^{30}}{6^8 \cdot 5^8} = 6^{12} \cdot 5^{22}$$

$$\text{d) Ta có: } D = \frac{21^2 \cdot 14 \cdot 126}{35^5 \cdot 6} = \frac{3^2 \cdot 7^2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 7}{3^5 \cdot 7^5 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^4}{2 \cdot 3^6 \cdot 7^5} = \frac{2}{3^2 \cdot 7}$$

$$\text{e) Ta có: } E = \frac{11 \cdot 3^{22} \cdot 3^7 - 9^{15}}{(2 \cdot 3^{14})^2} = 2$$

$$\text{f) Ta có: } F = \frac{4^9 \cdot 36 + 64^4}{100 \cdot 16^4} = \frac{4^9 \cdot 4 \cdot 9 + 4^{12}}{100 \cdot 4^8} = \frac{4^{10} \cdot (9 + 4^2)}{4^8 \cdot 100} = 4$$

**Bài 6.** Thực hiện phép tính:  $\frac{5 \cdot 2^{30} \cdot 3^{18} - 2^2 \cdot 3^{20} \cdot 2^{27}}{5 \cdot 2^9 \cdot 2^{19} \cdot 3^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 3^{18}}$

### Lời giải

$$\frac{5 \cdot 2^{30} \cdot 3^{18} - 2^2 \cdot 3^{20} \cdot 2^{27}}{5 \cdot 2^9 \cdot 2^{19} \cdot 3^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 3^{18}} = \frac{2^{29} \cdot 3^{18} (5 \cdot 2 - 3)}{2^{28} \cdot 3^{18} (5 \cdot 3 - 7 \cdot 2)} = 2$$

**Bài 7:** Tính các tổng sau:

$$\text{a) } A = 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2015}$$

$$\text{b) } B = 1 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{2016}$$

$$\text{c) } C = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2020}$$

$$\text{d) } D = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2021}$$

### Lời giải

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

---

a) Ta có:  $A = 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2015}$

$$\Rightarrow 2A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2016}$$

$$\Rightarrow 2A - A = A = 2^{2016} - 1$$

b) Ta có:  $B = 1 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{2016}$

$$\Rightarrow 3B = 3 + 3^2 + \dots + 3^{2017}$$

$$\Rightarrow 2B = 3^{2017} - 1$$

$$\Rightarrow B = \frac{3^{2017} - 1}{2}$$

c) Ta có:  $C = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2020}$

$$\Rightarrow 3^2 C = 3^2 (1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2020})$$

$$\Rightarrow 9C = 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2022}$$

$$\Rightarrow 9C - C = (3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2022}) - (1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2020})$$

$$\Rightarrow 8C = 3^{2022} - 1$$

$$\Rightarrow C = \frac{3^{2022} - 1}{8}$$

d)  $D = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2021}$

$$\Rightarrow 3A = 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2021}$$

$$\Rightarrow 2A = 3A - A = 3^{2021} - 3$$

$$\Rightarrow A = \frac{3^{2021} - 3}{2}$$

**Bài 8:** Tính  $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 8192$

### Lời giải

Ta có:  $S = 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{13} \Rightarrow 2S = 2 + 2^2 + \dots + 2^{14} \Rightarrow S = 2^{14} - 1 = 16383$

**Bài 9:** Cho biết:  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = 385$ .

a) Tính  $A = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 20^2$ ;

b) Tính  $B = (12^2 + 14^2 + 16^2 + 18^2 + 20^2) - (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2)$ .

### Lời giải

a) Ta có  $A = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 20^2$

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

---

$$= (1.2)^2 + (2.2)^2 + (2.3)^2 + \dots + (2.10)^2$$

$$= 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2)$$

$$= 4.385 = 1540$$

$$b) B = (12^2 + 14^2 + 16^2 + 18^2 + 20^2) - (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2)$$

$$= (12^2 - 1^2) + (14^2 - 3^2) + (16^2 - 5^2) + (18^2 - 7^2) + (20^2 - 9^2)$$

$$= (12-1)(12+1) + (14-3)(14+3) + (16-5)(16+5) + (18-7)(18+7) + (20-9)(20+9)$$

$$= 11.13 + 11.17 + 11.21 + 11.25 + 11.25 + 11.29$$

$$= 11(13 + 17 + 21 + 25 + 29)$$

$$= 11.125 = 1375$$

**Bài 10:** Tính tổng sau

$$a) A = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 99^2$$

### Lời giải

Ta có:

$$A = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + 99^2 + 100^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 100^2)$$

$$\text{Đặt } C = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + 99^2 + 100^2), D = (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 100^2)$$

Tính C, ta có:

$$C = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + 99^2 + 100^2$$

$$C = 1.1 + 2.2 + 3.3 + 4.4 + 5.5 + \dots + 99.99 + 100.100$$

$$C = 1.(2-1) + 2.(3-1) + 3.(4-3) + 4.(5-4) + 5.(6-5) + \dots + 99.(100-1) + 100.(101-1)$$

$$\Rightarrow C = (1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + 99.100 + 100.101) - (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 99 + 100)$$

$$\text{Đặt } M = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + 99.100 + 100.101, N = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 99 + 100$$

Tính M

$$M = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + 100.101$$

$$\Rightarrow 3M = 1.2.(3-0) + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + 4.5.(6-3) + \dots + 100.101.(102-99)$$

$$3M = (1.2.3 - 1.2.0) + (2.3.4 - 2.3.1) + (3.4.5 - 3.4.2) + (4.5.6 - 3.4.5) + \dots + (100.101.102 - 99.100.101)$$

$$3M = 100.101.102$$

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

---

$$\Rightarrow M = \frac{100.101.102}{3}$$

Tính N

$$N = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 100$$

$$N = \frac{100.101}{2}$$

$$\text{Ta có } C = \frac{100.101.102}{3} + \frac{100.101}{2}$$

Tương tự tính D ta có:

$$D = (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 100^2)$$

$$D = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 50^2)$$

$$D = 2^2 \cdot \left( \frac{50.51.52}{3} + \frac{50.51}{2} \right) = 4 \cdot (50.52.17 + 25.51)$$

$$\text{Vậy } A = \frac{100.101.102}{3} + \frac{100.101}{2} - 4 \cdot (50.52.17 + 25.51)$$

### **DẠNG 3: Xét tính chia hết của một biểu thức lũy thừa.**

#### **I. Phương pháp giải:**

Sử dụng công thức tính lũy thừa và tính chất chia hết, các dấu hiệu chia hết

#### **II. Bài toán:**

**Bài 1:** Cho  $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7$ . Chứng tỏ rằng  $S$  chia hết cho 3.

#### **Lời giải**

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 \\ &= (1 + 2) + (2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5) + (2^6 + 2^7) \\ &= 3 + 2^2(1 + 2) + 2^4(1 + 2) + 2^6(1 + 2) = 3 + 2 \cdot 3 + 2^4 \cdot 3 + 2^6 \cdot 3 \\ &= 3(1 + 2 + 2^4 + 2^6) \end{aligned}$$

**Bài 2:** Cho  $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60}$ . Chứng minh rằng  $A$  chia hết cho 6.

#### **Lời giải**

$$\begin{aligned} A &= (2 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + \dots + (2^{59} + 2^{60}) \\ &= (2 + 2^2) + 2^2(2 + 2^2) + \dots + 2^{58}(2 + 2^2) \end{aligned}$$

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

---

$$= 6 + 2^2 \cdot 6 + \dots + 2^{58} \cdot 6$$

$$\Rightarrow A : 6$$

### Bài 3:

Cho biểu thức  $A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{2014} + 2^{2015} + 2^{2016}$ .

Chứng minh rằng  $A$  chia hết cho 7.

#### Lời giải

$$A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{2014} + 2^{2015} + 2^{2016}$$

(Tổng  $A$  có 2016 số hạng, chia  $A$  thành 672 nhóm, mỗi nhóm có 3 số hạng)

$$A = (2 + 2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5 + 2^6) + \dots + (2^{2014} + 2^{2015} + 2^{2016})$$

$$= (1^2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 2) + (1^{24} + 2^{24} + 2^2 \cdot 2^4) + \dots + (1 \cdot 2^{2014} + 2 \cdot 2^{2014} + 2^2 \cdot 2^{2014})$$

$$= 2(1 + 2 + 2^2) + 2^4(1 + 2 + 2^2) + \dots + 2^{2014} \cdot 2(1 + 2 + 2^2)$$

$$= 2 \cdot 7 + 2^4 \cdot 7 + \dots + 2^{2014} \cdot 7 = 7 \cdot (2 + 2^4 + \dots + 2^{2014}) : 7$$

**Bài 4:** Cho  $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60}$ . Chứng minh rằng  $A : 3; A : 5; A : 7$

#### Lời giải

Ta có:

$$\bullet A = (2 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + \dots + (2^{57} + 2^{59})(2^{59} + 2^{60})$$

$$= 2 \cdot (1 + 2) + 2^3(1 + 2) + \dots + 2^{59}(1 + 2)$$

$$= (1 + 2) \cdot (2 + 2^3 + \dots + 2^{59}) = 3 \cdot (2 + 2^3 + \dots + 2^{59}) : 3$$

$$\bullet A = (2 + 2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5 + 2^6) + \dots + (2^{58} + 2^{59} + 2^{60})$$

$$= 2 \cdot (1 + 2 + 2^2) + 2^4(1 + 2 + 2^2) + \dots + 2^{58}(1 + 2 + 2^2)$$

$$= (1 + 2 + 2^2)(2 + 2^4 + 2^7 + \dots + 2^{58}) = 7 \cdot (2 + 2^4 + \dots + 2^{58}) : 7$$

$$\bullet A = (2 + 2^3) + (2^2 + 2^4) + \dots + (2^{58} + 2^{60}) = 2(1 + 2^2) + 2^2(1 + 2^2) + \dots + 2^{58}(1 + 2^2)$$

$$= (1 + 2^2)(2 + 2^2 + \dots + 2^{57} + 2^{58}) = 5 \cdot (2 + 2^2 + \dots + 2^{58}) : 5$$

**Bài 5:** Cho  $A = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{98}$ . Chứng tỏ rằng  $A$  chia hết cho 21.

#### Lời giải

$$A = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{98} \text{ có } 99 \text{ số hạng}$$

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

---

$$\begin{aligned} &= (1+4+4^2) + (4^3+4^4+4^5) + \dots + (4^{96}+4^{97}+4^{98}) \text{ có 33 nhóm} \\ &= 21 + 21 \cdot 4^3 + \dots + 21 \cdot 4^{96} (4^{96}+4^{97}+4^{98}) \text{ chia hết cho 21} \end{aligned}$$

**Bài 6:** Cho  $A = \frac{7^{2020^{2019}} - 3^{2016^{2015}}}{5}$ . Chứng tỏ  $A$  chia hết cho 2

### Lời giải

Ta có  $2020^{2019} : 4$  nên đặt  $2020^{2019} = 4k (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow 7^{2020^{2019}} = (7^4)^k = 2401^k$  luôn có tận cùng là 1.

Ta có  $2016^{2015} : 4$  nên đặt  $2016^{2015} = 4k' (k' \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow 3^{2016^{2015}} = (3^4)^{k'} = 81^{k'}$  luôn có tận cùng là 1.

Khi đó:  $7^{2020^{2019}} - 3^{2016^{2015}}$  luôn có tận cùng là 0

$$\Rightarrow A = \frac{7^{2020^{2019}} - 3^{2016^{2015}}}{5} \text{ luôn có thể tận cùng } 2, 4, 6, 8.$$

Vậy  $A$  luôn chia hết cho 2

**Bài 7:** Cho số  $A = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{16} + 4^{17}$ . Tìm số dư khi  $A$  chia cho 17.

### Lời giải

$$\begin{aligned} A &= 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{16} + 4^{17} \text{ có 17 số hạng} \\ &= 4 + (4^2 + 4^4) + (4^3 + 4^5) + \dots + (4^{14} + 4^{16}) + (4^{15} + 4^{17}) \text{ có 8 cặp nhóm và thừa số hạng 4} \\ &= 4 + 4^2(1+4^2) + 4^3(1+4^2) + \dots + 4^{14}(1+4^2) + 4^{15}(1+4^2) \\ &= 4 + 4^2 \cdot 17 + 4^3 \cdot 17 + \dots + 4^{14} \cdot 17 + 4^{15} \cdot 17 \\ &= 4 + 17(4^2 + 4^3 + \dots + 4^{14} + 4^{15}) \end{aligned}$$

Vậy  $A$  chia cho 17 dư 4.

**Bài 8:** Cho  $A = (2014+1) \cdot (2014+2) \cdot (2014+3) \dots (2014+2014)$ . Chứng minh  $A : 2^{2013}$

### Lời giải

$$A = (2014+1) \cdot (2014+2) \cdot (2014+3) \dots (2014+2014) = 2015 \cdot 2016 \cdot 2017 \dots 4028$$

Số  $A$  là tích của 2014 thừa số trong đó có 1007 thừa số chẵn.

Đặt tích của các thừa số chẵn trong  $A$  là  $B$  (có 1007 thừa số chẵn).

$$B = \underbrace{2016 \cdot 2018 \cdot 2020 \dots 4028}_{1007 \text{ thừa số chẵn}} = 2^{1007} \cdot 1008 \cdot 1009 \cdot 1010 \dots 2014$$

Đặt tích của các thừa số lẻ trong  $B$  là:  $C$  (có 504 thừa số lẻ).

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

$$C = \underbrace{1008.1010.1012.....2014}_{504 \text{ thừa số chẵn}} = 2^{504} . 504.505.506.....1007$$

Đặt tích của các thừa số chẵn trong  $C$  là:  $D$  (có 252 thừa số chẵn).

$$D = \underbrace{504.506.508.....1006}_{252 \text{ thừa số chẵn}} = 2^{252} . 252.253.254.....503$$

Đặt tích của các thừa số chẵn trong  $D$  là:  $E$  (có 126 thừa số chẵn).

$$E = \underbrace{252.254.256.....502}_{126 \text{ thừa số chẵn}} = 2^{126} . 126.127.128.....251$$

Đặt tích của các thừa số chẵn trong  $E$  là:  $F$  (có 63 thừa số chẵn).

$$F = \underbrace{126.128.130.....250}_{63 \text{ thừa số chẵn}} = 2^{63} . 63.64.65.....125$$

Đặt tích của các thừa số chẵn trong  $F$  là:  $G$  (có 31 thừa số chẵn).

$$G = \underbrace{64.66.68.....124}_{31 \text{ thừa số chẵn}} = 2^{31} . 32.33.....62$$

Đặt tích của các thừa số chẵn trong  $G$  là:  $H$  (có 16 thừa số chẵn).

$$H = \underbrace{32.34.36.....62}_{16 \text{ thừa số chẵn}} = 2^{16} . 16.17.18.....31$$

$$= 2^{16} . 2^4 . 17.2.9.19.2^2 . 5.21.2.11.23.2^3 . 3.25.2.13.27.2.19.29.2.15.31$$

$$= 2^{30} . 3.5.9.11.13.15.17.19^2 . 21.23.25.27.29.31$$

Như vậy trong  $A$  có tích các thừa số:  $2^{1007} . 2^{504} . 2^{252} . 2^{126} . 2^{63} . 2^{31} . 2^{30} = 2^{2013}$

Vậy  $A$  chia hết cho  $2^{2013}$ .

### PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

**Bài 1:** Thực hiện phép tính: 
$$\frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^2 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$$

#### Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6} + \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^2 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3} &= \frac{2^{12} \cdot 3^5 - (2^2)^6 \cdot (3^2)^2}{2^{12} \cdot 3^6} + \frac{5^{10} \cdot 7^3 - (5^2)^5 \cdot (7^2)^2}{(5^3)^3 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 2^3 \cdot 7^3} \\ &= \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6} + \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 2^3 \cdot 7^3} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 (3-1)}{2^{12} \cdot 3^6} + \frac{5^{10} \cdot 7^3 (1-7)}{5^9 \cdot 7^3 (8+1)} = \frac{2}{3^2} + \frac{5 \cdot 6}{9} = \frac{32}{9} \end{aligned}$$

**Bài 2:** Thực hiện phép tính: 
$$\frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}}$$

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

### Lời giải

$$\frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}} = \frac{(2^2)^6 \cdot (3^2)^5 + 2^9 \cdot 3^9 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 5}{(2^3)^4 \cdot 13^{12} - 2^{11} \cdot 3^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} + 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5}{2^{12} \cdot 3^{12} - 2^{11} \cdot 3^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} (1+5)}{2^{11} \cdot 3^{11} (2.3-1)} = \frac{2.6}{3.5} = \frac{4}{5}$$

**Bài 3.** Thực hiện phép tính:

$$\frac{9 \cdot 5^{20} \cdot 27^9 - 3 \cdot 9^{15} \cdot 25^9}{7 \cdot 3^{29} \cdot 125^6 - 3 \cdot 3^9 \cdot 15^{19}}$$

### Lời giải

$$\frac{9 \cdot 5^{20} \cdot 27^9 - 3 \cdot 9^{15} \cdot 25^9}{7 \cdot 3^{29} \cdot 125^6 - 3 \cdot 3^9 \cdot 15^{19}} = \frac{3^2 \cdot 5^{20} \cdot 3^{27} - 3 \cdot 3^{30} \cdot 5^{18}}{7 \cdot 3^{29} \cdot 5^{18} - 3^{10} \cdot 3^{19} \cdot 5^{19}} = \frac{3^{29} \cdot 5^{20} - 3^{31} \cdot 5^{18}}{7 \cdot 3^{29} \cdot 5^{18} - 3^{29} \cdot 5^{19}} = \frac{3^{29} \cdot 5^{18} (5^2 - 3^2)}{3^{29} \cdot 5^{18} (7 - 5)} = 8$$

**Bài 4.** Thực hiện phép tính:

$$\frac{5^2 \cdot 6^{11} \cdot 16^2 + 6^2 \cdot 12^6 \cdot 15^2}{2 \cdot 6^{12} \cdot 10^4 - 81^2 \cdot 960^3}$$

### Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{5^2 \cdot 6^{11} \cdot 16^2 + 6^2 \cdot 12^6 \cdot 15^2}{2 \cdot 6^{12} \cdot 10^4 - 81^2 \cdot 960^3} &= \frac{5^2 (2.3)^{11} \cdot (2^4)^2 + (2.3)^2 \cdot (2^2 \cdot 3)^6 \cdot (3.5)^2}{2 \cdot (2.3)^{12} \cdot (2.5)^4 - (3^4)^2 \cdot (2^6 \cdot 3 \cdot 5)^3} \\ &= \frac{5^2 \cdot 2^{19} \cdot 3^{11} + 2^{14} \cdot 3^{10} \cdot 5^3}{2^{17} \cdot 5^4 \cdot 3^{12} - 3^{11} \cdot 2^{18} \cdot 5^3} = \frac{5^2 \cdot 3^{10} \cdot 2^{14} \cdot (2^5 \cdot 3 + 5)}{2^{17} \cdot 5^3 \cdot 3^{11} \cdot (5.3 - 2)} = \frac{2^5 \cdot 3 + 5}{2^3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 12} \\ &= \frac{32 \cdot 3 + 5}{8 \cdot 15 \cdot 12} = \frac{96 + 5}{120 \cdot 12} = \frac{101}{1440} \end{aligned}$$

**Bài 5.** Thực hiện phép tính:

$$\frac{7 \cdot 6^{10} \cdot 2^{10} \cdot 3^6 - 2^{19} \cdot 6^{15}}{9 \cdot 6^{19} \cdot 2^9 - 4 \cdot 3^{17} \cdot 2^{26}}$$

### Lời giải

$$\frac{7 \cdot 6^{10} \cdot 2^{20} \cdot 3^6 - 2^{19} \cdot 6^{15}}{9 \cdot 6^{19} \cdot 2^9 - 4 \cdot 3^{17} \cdot 2^{26}} = \frac{7 \cdot 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 2^{20} \cdot 3^6 - 2^{19} \cdot 2^{15} \cdot 3^{15}}{3^2 \cdot 2^{19} \cdot 3^{19} \cdot 2^9 - 2^2 \cdot 2^{26} \cdot 3^{17}}$$

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

---

$$\begin{aligned} &= \frac{2^{30} \cdot 3^{16} \cdot 7 - 2^{34} \cdot 3^{15}}{2^{28} \cdot 3^{21} - 2^{28} \cdot 3^{17}} = \frac{2^{30} \cdot 3^{15} \cdot (7 \cdot 3 - 2^4)}{2^{28} \cdot 3^{17} (3^4 - 1)} = \frac{2^2 (21 - 16)}{3^3 (81 - 1)} \\ &= \frac{2^2 (21 - 16)}{3^3 (81 - 1)} = \frac{4 \cdot 5}{9 \cdot 80} = \frac{1}{36} \end{aligned}$$

**Bài 6.** Tính:  $A = 4 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} A &= 4 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20} \\ \Rightarrow 2A &= 8 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{21} \\ \Rightarrow A &= 2A - A = 2^{21} + 8 - (4 + 2^2) + (2^3 - 2^3) + (2^4 - 2^4) + \dots + (2^{20} - 2^{20}) = 2^{21} \end{aligned}$$

**Bài 7.** Tính  $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} 3A &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{99}} \\ \text{Vậy: } 3A - A &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{99}}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{100}}\right) \\ 2A &= 1 - \frac{1}{3^{100}} = \frac{3^{100} - 1}{3^{100}} \\ \Rightarrow A &= \frac{3^{100} - 1}{2 \cdot 3^{100}} \end{aligned}$$

**Bài 8.** Tính  $A = 5 + 5^2 + \dots + 5^{96}$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} A &= 5 + 5^2 + \dots + 5^{96} \\ \Rightarrow 5A &= 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{96} + 5^{97} \\ \Rightarrow 4A &= 5A - A = 5^{97} - 5 \\ \Rightarrow A &= \frac{5^{97} - 5}{4} \end{aligned}$$

**Bài 9.** Tính  $S = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2020}$

**Lời giải**

Ta có  $5S = 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2021}$

---

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

---

$$\Rightarrow 5S - S = (5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2021}) - (5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2020})$$

$$\Rightarrow 4S = 5^{2021} - 5$$

$$\Rightarrow S = \frac{5^{2021} - 5}{4}$$

**Bài 10:** Tính  $C = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 20^2$

### Lời giải

Ta có:

$$C = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 20^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2)$$

$$\text{Đặt } A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = 1.1 + 2.2 + 3.3 + \dots + 10.10$$

$$A = 1(2-1) + 2(3-1) + 3(4-1) + \dots + 10(11-1)$$

$$A = (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 10.11) - (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 10)$$

$$= \frac{10.11.12}{3} - \frac{10.11}{2} = 10.11.4 - 5.11 = 385$$

$$\Rightarrow C = 4.385 = 1540$$

**Bài 11:** Tính  $B = 1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + \dots + 99.100^2$

### Lời giải

Ta có:

$$B = 1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + \dots + 99.100^2$$

$$B = 1.2.2 + 2.3.3 + 3.4.4 + \dots + 99.100.100$$

$$B = 1.2(3-1) + 2.3(4-1) + \dots + 99.100(100-1)$$

$$B = (1.2.3 - 1.2) + (2.3.4 - 2.3) + \dots + (99.100.101 - 99.100)$$

$$B = (1.2.3 + 2.3.4 + \dots + 99.100.101) - (1.2 + 2.3 + \dots + 99.100)$$

$$\text{Đặt } N = (1.2.3 + 2.3.4 + \dots + 99.100.101), M = (1.2 + 2.3 + \dots + 99.100)$$

Tính  $N$ , ta có:

$$4N = 1.2.3.(4-0) + 2.3.4.(5-1) + \dots + 99.100.101.(102-98)$$

$$4N = (1.2.3.4 - 0.1.2.3) + (2.3.4.5 - 1.2.3.4) + \dots + (99.100.101.102 - 98.99.100.101)$$

$$4N = 99.100.101.102$$

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

---

$$\Rightarrow N = \frac{99.100.101.102}{4}$$

$$\text{Tương tự tính } M \text{ ta có } M = \frac{99.100.101}{3}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{99.100.101.102}{4} - \frac{99.100.101}{3}$$

**Bài 12:** Chứng minh rằng:

a.  $10^{2008} + 125$  chia hết cho 45

b.  $5^{2008} + 5^{2007} + 5^{2006}$  chia hết cho 31

c.  $8^8 + 2^{20}$  chia hết cho 17

d.  $313^5 \cdot 299 - 313^6 \cdot 36$  chia hết cho 7.

### Lời giải

a) Ta có:  $10^{2008} + 125 = 10^{2008} + 125 = \overbrace{100\dots0}^{2008 \text{ số } 0} + 125 = \overbrace{100\dots0125}^{2005 \text{ số } 0}$ ,  $A$  có tận cùng là 5

$\Rightarrow A$  chia hết cho 5

Tổng các chữ số của  $A$  là:  $1 + 2 + 5 + 1 = 9 \Rightarrow A$  chia hết cho 9, mà  $(5, 9) = 1 \Rightarrow A$  chia hết cho 45

b) Ta có:  $5^{2008} + 5^{2007} + 5^{2006} = 5^{2006} (5^2 + 5^1 + 1) = 5^{2006} \cdot 31$  chia hết cho 31

c) Ta có:  $8^8 + 2^{20} = (2^3)^8 + 2^{20} = 2^{24} + 2^{20} = 2^{20} (2^4 + 1) = 17 \cdot 2^{20}$  chia hết cho 17

d) Ta có:

$$313^5 \cdot 299 - 313^6 \cdot 36 = 313^5 \cdot 299 - 313^6 - 35 \cdot 313^6 = 313^5 (299 - 313) - 35 \cdot 313^6 = -14 \cdot 313^5 - 35 \cdot 313^6$$

Chia hết cho 7 vì mỗi số hạng trong hiệu đều chia hết cho 7.

**Bài 13:**

a) Viết công thức tổng quát tính  $A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n$  ( $a \geq 2, n \in \mathbb{N}$ )

b) Viết công thức tính  $a^{n+1} - 1$  ( $n \in \mathbb{N}, a \geq 2$ )

c) Chứng minh rằng:  $2015^{2015} - 1$  chia hết cho 2014.

### Lời giải

a)

$$\text{Ta có } A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n \quad (a \geq 2, n \in \mathbb{N})$$

$$a \cdot A = a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n + a^{n+1}$$

$$a \cdot A - A = a^{n+1} - 1$$

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

---

$$(a-1).A = a^{n+1} - 1$$

$$\text{Vậy } A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n = (a^{n+1} - 1) : (a - 1)$$

b) Ta có  $A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n = (a^{n+1} - 1) : (a - 1)$  ( $a \geq 2, n \in N$ )

Từ đó ta có công thức:  $(a^{n+1} - 1) = (a - 1) \cdot (1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n)$  ( $a \geq 2, n \in N$ )

c) Nhận thấy  $2015 - 1 = 2014$ . Với công thức đã tìm được ở câu 1, hơn nữa ta thấy

$$A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n \text{ có giá trị là số nguyên nên } (a^{n+1} - 1) : (a - 1).$$

Do đó để làm câu 2 ta nghĩ ngay đến cách làm sau:

$$\text{Xét } A = 1 + 2015 + 2015^2 + 2015^3 + 2015^4 + \dots + 2015^{2014}$$

$$2015.A = 2015 + 2015^2 + 2015^3 + 2015^4 + \dots + 2015^{2015}$$

$$\text{Do đó } 2015.A - A = 2015^{2015} - 1 \Rightarrow 2014.A = 2014^{2015} - 1$$

$$\text{Nên } 2015^{2015} - 1 = 2014 \cdot (1 + 2015 + 2015^2 + 2015^3 + 2015^4 + \dots + 2015^{2014})$$

$$\text{Mà } 1 + 2015 + 2015^2 + 2015^3 + 2015^4 + \dots + 2015^{2014} \text{ có giá trị là số tự nhiên}$$

$$\text{Vậy } 2015^{2015} - 1 : 2014$$

### Bài 14:

a, Tính tổng :  $M = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + 3^8 + \dots + 3^{112}$

b, Viết công thức tổng quát tính  $M = 1 + a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + \dots + a^{2n}$  ( $n \in N, a \geq 2$ )

c, Viết công thức tính  $a^{2n+2} - 1$  ( $n \in N, a \geq 2$ )

d, Chứng minh rằng:  $9^{2018} - 1$  chia hết cho  $80$

### Lời giải

a, Tương tự

$$\text{Ta có: } M = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + 3^8 + \dots + 3^{112}$$

$$3^2.M = 3^2 + 3^4 + 3^6 + 3^8 + \dots + 3^{112} + 3^{114}$$

$$\text{Do đó: } 3^2.M - M = 3^{114} - 1$$

$$M \cdot (3^2 - 1) = 3^{114} - 1 \Rightarrow M = \frac{3^{114} - 1}{3^2 - 1} = \frac{3^{114} - 1}{8}$$

b, Ta có:  $M = 1 + a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + \dots + a^{2n}$

$$a^2.M = a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + \dots + a^{2n} + a^{2n+2}$$

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

$$a^2.M - M = a^{2n+2} - 1 \Rightarrow M.(a^2 - 1) = a^{2n+2} - 1$$

$$\text{Vậy } M = 1 + a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + \dots + a^{2n} = (a^{2n+2} - 1) : (a^2 - 1)$$

c, Từ kết quả câu b: +

$$M = 1 + a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + \dots + a^{2n} = (a^{2n+2} - 1) : (a^2 - 1) \quad (n \in \mathbb{N}, a \geq 2)$$

$$\text{Từ đó ta có: } a^{2n+2} - 1 = (a^2 - 1).(1 + a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + \dots + a^{2n}) \quad (n \in \mathbb{N}, a \geq 2)$$

d, Nhận thấy  $9^2 - 1 = 80$ . Với công thức đã tìm được ở câu c.

Hơn nữa ta thấy  $M = 1 + a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + \dots + a^{2n}$  có giá trị là số nguyên

Nên  $(a^{2n+2} - 1) : (a^2 - 1)$ . Do đó để làm câu d ta nghĩ ngay đến cách làm sau:

$$\text{Xét } M = 1 + 9^2 + 9^4 + 9^6 + 9^8 + \dots + 9^{2016}$$

$$9^2.M = 9^2 + 9^4 + 9^6 + 9^8 + \dots + 9^{2016} + 9^{2018}$$

$$9^2.M - M = 9^{2018} - 1 \Rightarrow M.(9^2 - 1) = 9^{2018} - 1$$

$$\text{Do đó } 9^{2018} - 1 = 80.(1 + 9^2 + 9^4 + 9^6 + 9^8 + \dots + 9^{2016})$$

Mà  $1 + 9^2 + 9^4 + 9^6 + 9^8 + \dots + 9^{2016}$  có giá trị là số tự nhiên.

$$\text{Vậy } 9^{2018} - 1 : 80$$

### Bài 15:

a, Tính tổng :  $B = 8 + 8^3 + 8^5 + 8^7 + 8^9 + \dots + 8^{99}$

b, Viết công thức tổng quát tính  $A = a + a^3 + a^5 + a^7 + a^9 + \dots + a^{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N}, a \geq 2)$

c, Viết công thức tính  $a^{2n+3} - a \quad (n \in \mathbb{N}, a \geq 2)$

d, Chứng tỏ rằng:  $6^{2017} - 6$  chia hết cho 35

### Lời giải

a, Tương tự

$$\text{Ta có: } B = 8 + 8^3 + 8^5 + 8^7 + 8^9 + \dots + 8^{99}$$

$$8^2.B = 8^3 + 8^5 + 8^7 + 8^9 + \dots + 8^{99} + 8^{101}$$

$$\text{Do đó } 8^2.B - B = 8^{101} - 8 \Rightarrow B.(8^2 - 1) = 8^{101} - 8 \Rightarrow B = \frac{8^{101} - 8}{8^2 - 1} = \frac{8^{101} - 8}{63}$$

b, Ta có:  $A = a + a^3 + a^5 + a^7 + a^9 + \dots + a^{2n+1}$

$$a^2.A = a^3 + a^5 + a^7 + a^9 + \dots + a^{2n+1} + a^{2n+3}$$

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

---

$$a^2 \cdot A - A = a^{2n+3} - a \Rightarrow A(a^2 - 1) = a^{2n+3} - a$$

$$A = a + a^3 + a^5 + a^7 + a^9 + \dots + a^{2n+1} = (a^{2n+3} - a) : (a^2 - 1)$$

c, Từ kết quả câu b:

$$A = a + a^3 + a^5 + a^7 + a^9 + \dots + a^{2n+1} = (a^{2n+3} - a) : (a^2 - 1) \quad (n \in \mathbb{N}, a \geq 2)$$

Từ đó ta có :  $a^{2n+3} - a = (a^2 - 1) \cdot (a + a^3 + a^5 + a^7 + a^9 + \dots + a^{2n+1})$  ( $n \in \mathbb{N}, a \geq 2$ )

d, Nhận thấy  $6^2 - 1 = 35$ . Với công thức đã tìm được ở câu c.

Hơn nữa  $A = a + a^3 + a^5 + a^7 + a^9 + \dots + a^{2n+1}$  có giá trị là số nguyên.

Nên  $(a^{2n+3} - a) : (a^2 - 1)$ . Do đó để làm câu d ta nghĩ ngay đến cách làm:

$$\text{Xét } M = 6 + 6^3 + 6^5 + 6^7 + 6^9 + \dots + 6^{2015}$$

$$6^2 \cdot M = 6^3 + 6^5 + 6^7 + 6^9 + \dots + 6^{2015} + 6^{2017} \Rightarrow 6^2 \cdot M - M = 6^{2017} - 6$$

$$\Rightarrow M \cdot (6^2 - 1) = 6^{2017} - 6$$

$$\text{Do đó } 6^{2017} - 6 = 35 \cdot (6 + 6^3 + 6^5 + 6^7 + 6^9 + \dots + 6^{2015})$$

Mà  $6 + 6^3 + 6^5 + 6^7 + 6^9 + \dots + 6^{2015}$  có giá trị là số tự nhiên. Vậy  $6^{2017} - 6 : 35$

### Bài 16:

1, Tính  $B = 1 - 5 + 5^2 - 5^3 + 5^4 - \dots - 5^{99} + 5^{100}$

2, Tính  $A = 1 - a^d + a^{2d} - a^{3d} + \dots + a^{2nd}$  ( $a \geq 2, n \in \mathbb{N}$ )

3, Chứng tỏ rằng  $2018^{2009} + 1$  chia hết cho 2019

### Lời giải

1, Tương tự

$$\text{Ta có } B = 1 - 5 + 5^2 - 5^3 + 5^4 - \dots - 5^{99} + 5^{100}$$

$$5 \cdot B = 5 - 5^2 + 5^3 - 5^4 + 5^5 - \dots - 5^{100} + 5^{101}$$

Quan sát về quy luật dấu của các số hạng trong tổng  $B$  và  $5B$ . Để các lũy thừa bị triệt tiêu hàng loạt

$$\text{ta nghĩ đến tính } 5B + B = 5^{101} + 1 \Rightarrow 6B = 5^{101} + 1 \Rightarrow B = \frac{5^{101} + 1}{6}$$

2, Ta có:  $A = 1 - a^d + a^{2d} - a^{3d} + \dots + a^{2nd}$

$$a^d A = a^d + a^{2d} - a^{3d} + \dots + a^{(2n+1)d}$$

$$a^d A + A = a^{(2n+1)d} + 1 \Rightarrow A = \frac{a^{(2n+1)d} + 1}{a^d + 1}$$

3, Nhận thấy  $2018+1=2019$ . Với công thức đã tìm được ở câu 2.

Hơn nữa  $A = 1 - a^d + a^{2d} - a^{3d} + \dots + a^{2nd}$  có giá trị là số nguyên

Nên  $a^{(2n+1)d} + 1 : (a^d + 1)$ . Do đó để làm câu d ta nghĩ ngay đến cách làm sau:

$$\text{Xét } S = 1 - 2018 + 2018^2 - 2018^3 + \dots + 2018^{2008}$$

$$2018.S = 2018 - 2018^2 + 2018^3 - 2018^4 + \dots + 2018^{2009}$$

$$2018.S + S = 2018^{2009} + 1 \Rightarrow 2019.S = 2018^{2009} + 1$$

$$2018^{2009} + 1 = 2019.(1 - 2018 + 2018^2 - 2018^3 + \dots + 2018^{2008})$$

Mà  $1 - 2018 + 2018^2 - 2018^3 + \dots + 2018^{2008}$  có giá trị là số nguyên.

Suy ra  $2018^{2009} + 1$  chia hết cho 2019.

.....**☞ HẾT ☞**.....

### CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

#### CHỦ ĐỀ 2-3: SO SÁNH HAI LŨY THỪA BẰNG PHƯƠNG PHÁP SO SÁNH TRỰC TIẾP VÀ PHƯƠNG PHÁP SO SÁNH GIÁN TIẾP

#### PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

##### Quy tắc so sánh:

+ Ta biến đổi hai lũy thừa cần so sánh thành các lũy thừa hoặc cùng cơ số hoặc cùng số mũ để so sánh. Nếu 2 lũy thừa cùng cơ số (lớn hơn 1) thì lũy thừa nào có số mũ lớn hơn sẽ lớn hơn.

$$a^m > a^n (a > 1) \Leftrightarrow m > n$$

Nếu 2 lũy thừa cùng cơ số (nhỏ hơn 1) thì lũy thừa nào có số mũ lớn hơn sẽ nhỏ hơn.

$$a^m > a^n (a < 1) \Leftrightarrow m < n$$

Nếu 2 lũy thừa cùng số mũ (lớn hơn 0) thì lũy thừa nào có cơ số lớn hơn sẽ lớn hơn.

$$a^n > b^n (n > 0) \Leftrightarrow a > b$$

Khi cơ số bằng 1, thì hai lũy thừa bằng nhau với mọi số mũ tự nhiên

+ Để so sánh 2 lũy thừa  $A$  và  $B$ , ta tìm một lũy thừa  $M$  sao cho  $A < M < B$  hoặc  $A > M > B$

Trong đó  $A$  và  $M$ ;  $M$  và  $B$  có thể so sánh trực tiếp được

+ Để so sánh hai lũy thừa  $A$  và  $B$ , ta tìm hai lũy thừa  $X$  và  $Y$  sao cho:  $A < X < Y < B$

Hoặc  $A > X > Y > B$

Trong đó các lũy thừa  $A$  và  $X$ ;  $X$  và  $Y$ ;  $Y$  và  $B$  có thể so sánh trực tiếp được.

#### PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

##### Dạng 1: Biến đổi về cùng cơ số hoặc số mũ

**Bài 1:** Hãy so sánh:

a.  $16^{19}$  và  $8^{25}$

b.  $27^{11}$  và  $81^8$ .

##### Lời giải:

**a) Phân tích:** Ta nhận thấy, ở câu a) thì 16 và 8 là các cơ số liên quan tới lũy thừa cơ số 2, ở câu b) thì 27 và 81 liên quan tới lũy thừa cơ số 3. Do đó để so sánh, ta biến đổi các lũy thừa về các lũy thừa có cùng cơ số, rồi dựa vào so sánh số mũ để so sánh chúng với nhau.

##### b) Lời giải:

a) Ta có  $16^{19} = (2^4)^{19} = 2^{76}$ ;  $8^{25} = (2^3)^{25} = 2^{75}$

Vì  $2^{76} > 2^{75} \Rightarrow 16^{19} > 8^{25}$

b) Ta có

$$\left. \begin{array}{l} 81^8 = (3^4)^8 = 3^{32} \\ 27^{11} = (3^3)^{11} = 3^{33} \end{array} \right\} \Rightarrow 81^8 < 27^{11}$$

**Bài 2:** Hãy so sánh:

a.  $128^7$  và  $4^{24}$

b.  $5^{36}$  và  $11^{24}$

c.  $32^{60}$  và  $81^{50}$

d.  $3^{500}$  và  $7^{300}$ .

**Lời giải:**

a) Ta có :

a) Ta có :

$$128^7 = (2^7)^7 = 2^{49}$$

$$4^{24} = (2^2)^{24} = 2^{48}$$

Vì  $2^{49} > 2^{48}$

Nên  $128^7 > 4^{24}$

b) Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} 5^{36} = 125^{12} \\ 11^{24} = 121^{12} \end{array} \right\} \Rightarrow 5^{36} > 11^{24}$$

c) Ta có :

$$\left. \begin{array}{l} 32^{60} = 2^{300} = 8^{100} \\ 81^{50} = 3^{200} = 9^{100} \end{array} \right\} \Rightarrow 32^{60} < 81^{50}$$

d) Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} 3^{500} = 243^{100} \\ 7^{300} = 343^{100} \end{array} \right\} \Rightarrow 3^{500} < 7^{300}$$

**Bài 3:** Hãy so sánh:

a)  $16^{19}$  và  $8^{25}$

b)  $625^5$  và  $125^7$ .

**Lời giải:**

a) Ta có:  $16^{19} = (2^4)^{19} = 2^{76}$ ;  $8^{25} = (2^3)^{25} = 2^{75}$

Vì  $2^{76} > 2^{75} \Rightarrow 16^{19} > 8^{25}$

b) Ta có:  $625^5 = (5^4)^5 = 5^{20}$ ;  $125 = (5^3)^7 = 5^{21}$

Vì  $5^{20} < 5^{21} \Rightarrow 625^5 < 125^7$

**Bài 4:** Hãy so sánh:

a)  $3^{210}$  và  $2^{350}$

b)  $2^{31}$  và  $3^{21}$

c)  $4^{30}$  và  $3.24^{10}$ .

**Lời giải:**

a) Ta có:

$$3^{210} = 27^{70}$$

$$2^{350} = 32^{70}$$

$$\Rightarrow 3^{210} < 2^{350}$$

b) Ta có:

$$2^{31} = 2.2^{30} = 2.8^{10}$$

$$3^{21} = 3.3^{20} = 3.9^{10}$$

$$\Rightarrow 3^{21} > 2^{31}$$

c) Ta có:

$$4^{30} = 2^{30}.2^{30} = (2^3)^{10}.(2^2)^{15} = 8^{10}.4^{15} > 8^{10}.3^{15}$$

$$3.24^{10} = 3.(3.8)^{10} = 8^{10}.3^{11}$$

Mà  $8^{10}.3^{15} > 8^{10}.3^{11}$  nên  $8^{10}.4^{15} > 8^{10}.3^{11}$  hay  $4^{30} > 3.24^{10}$

**Bài 5:** Chứng minh rằng  $5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$ .

**Lời giải:**

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} 5^{27} = 125^9 \\ 2^{63} = (2^7)^9 = 128^9 \end{array} \right\} \Rightarrow 5^{27} < 2^{63} \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2^{63} = (2^9)^7 = 312^7 \\ 5^{28} = (5^4)^7 = 625^7 \end{array} \right\} \Rightarrow 2^{63} < 5^{28} \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow 5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$

**Bài 6:** Hãy so sánh:

a)  $3^{2n}$  và  $2^{3n}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )

b)  $5^{300}$  và  $3^{500}$ .

**Lời giải:**

**a) Phân tích:** Ta nhận thấy, ở câu a) thì các lũy thừa có chung số mũ  $n$ , ở câu c) thì các lũy thừa có chung số mũ 100. Do đó để so sánh, ta biến đổi các lũy thừa về các lũy thừa có cùng cơ số hoặc số mũ, rồi dựa vào so sánh cơ số để so sánh chúng với nhau.

**b) Lời giải:**

a) Ta có:

$$3^{2n} = (3^2)^n = 9^n$$

$$2^{3n} = (2^3)^n = 8^n$$

mà  $9 > 8$

$$\Rightarrow 3^2 > 2^3$$

Vậy  $3^{2n} > 2^{3n}$

b) Ta có:

$$5^{300} = (5^3)^{100} = 125^{100}$$

$$3^{500} = (3^3)^{100} = 243^{100}$$

$$\Rightarrow 5^{300} < 3^{500}$$

**Bài 7:** Hãy so sánh:

a)  $3^{2n(n+2)}$  và  $9^{(n+1)^2}$

b)  $256^n$  và  $16^{n+5}$  (với  $n \in \mathbb{N}$ )

**Lời giải:**

a) Ta có:

$$3^{2n(n+2)} = 9^{n(n+2)} = 9^{n^2+2n}$$

$$9^{(n+1)^2} = 9^{n^2+2n+1}$$

$$n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n$$

$$\Rightarrow 9^{(n+1)^2} > 9^{n(n+2)}$$

$$\Rightarrow 9^{(n+1)^2} > 3^{2n(n+2)} (\forall n \in \mathbb{N})$$

b) Ta có  $256^n = 16^{2n}$ , suy ra bài toán trở thành so sánh  $2n$  và  $n+5$

+) Nếu  $2n > n+5 \Leftrightarrow n > 5 \Rightarrow 256^n > 16^{2n}$

+) Nếu  $2n = n+5 \Leftrightarrow n = 5 \Rightarrow 256^n = 16^{2n}$

+) Nếu  $2n < n+5 \Leftrightarrow n < 5 \Rightarrow 256^n < 16^{2n}$

**Bài 8:** Hãy so sánh  $3.27^5$  và  $243^5$ .

**Lời giải:**

Ta có:

$$243^5 = (3^5)^5 = 3^{25}$$

$$3.27^5 = 3.(3^3)^5 = 3.3^{15} = 3^{16}$$

$$\text{Vì } 3^{16} < 3^{25} \Rightarrow 3.27^5 < 243^5$$

**Dạng 2: Đưa về một tích trong đó có thừa số giống nhau**

**Bài 1:** Hãy so sánh  $202^{303}$  và  $303^{202}$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có: } 202^{303} = (2.101)^{303} = 2^{303} \cdot 101^{303} = 2^{303} \cdot 101^{3 \cdot 101} = 8^{101} \cdot 101^{3 \cdot 101} = 8^{101} \cdot 101^{101} \cdot 101^{2 \cdot 101}$$

$$303^{202} = (3.101)^{2 \cdot 101} = 3^{2 \cdot 101} \cdot 101^{2 \cdot 101} = 9^{101} \cdot 101^{2 \cdot 101}$$

$$\Rightarrow 202^{303} > 303^{202}$$

**Bài 2:** Hãy so sánh  $21^{15}$  và  $27^5 \cdot 49^8$ .

**Lời giải:**

Ta có:

$$21^{15} = 3^{15} \cdot 7^{15}$$

$$27^5 \cdot 49^8 = 3^{15} \cdot 7^{16}$$

$$\text{Mà } 7^{15} < 7^{16}$$

Vậy  $21^{15} < 27^5 \cdot 49^8$

**Bài 3:** Hãy so sánh  $2015^{2015} - 2015^{2014}$  và  $2015^{2016} - 2015^{2015}$ .

**Lời giải:**

Ta có:

$$2015^{2015} - 2015^{2014} = 2015^{2014} (2015 - 1) = 2014 \cdot 2015^{2014}$$

$$2015^{2016} - 2015^{2015} = 2014 \cdot 2015^{2015}$$

Mà  $2015^{2015} > 2015^{2014}$

$$\Rightarrow 2015^{2016} - 2015^{2015} > 2015^{2015} - 2015^{2014}$$

**Bài 4:** Hãy so sánh  $2015^{10} + 2015^9$  và  $2016^{10}$ .

**Lời giải:**

Ta có:

$$2015^{10} + 2015^9 = 2015^9 (2015 + 1) = 2016 \cdot 2015^9$$

$$2016^{10} = 2016 \cdot 2016^9$$

Mà  $2015 < 2016$

$$\Rightarrow 2016^{10} > 2015^{10} + 2015^9$$

**Bài 5:** Hãy so sánh  $A = 72^{45} - 72^{44}$  và  $B = 72^{44} - 72^{43}$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có: } A = 72^{44} (72 - 1) = 72^{44} \cdot 71$$

$$B = 72^{43} (72 - 1) = 72^{43} \cdot 71 \Rightarrow A > B$$

Mà  $44 > 43$

$$\Rightarrow A > B$$

**Bài 6:** Hãy so sánh  $37^{75}$  và  $71^{50}$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có: } 71^{50} < 72^{50} = (8 \cdot 9)^{50} = 2^{150} \cdot 3^{100} \quad (1)$$

$$37^{75} > 36^{75} = (4 \cdot 9)^{75} = 2^{150} \cdot 3^{150} \quad (2)$$

$$\text{Mà } 2^{150} \cdot 3^{150} > 2^{150} \cdot 3^{100} \quad (3)$$

Từ (1)(2)(3) suy ra  $37^{75} > 71^{50}$

**Bài 7:** Hãy so sánh:

- a)  $5^{23}$  và  $6.5^{22}$
- b)  $7.2^{13}$  và  $2^{16}$
- c)  $15^{12}$  và  $81^3.125^5$ .

**Lời giải:**

**a) Phân tích:** Ta nhận thấy trong các số lũy thừa cần so sánh thì số mũ của chúng đều không có ước chung, hoặc cơ số của chúng không thể biểu diễn dưới dạng chung một cơ số. Do đó việc đưa các lũy thừa về các lũy thừa có cùng cơ số (hoặc số mũ) để so sánh có vẻ không khả quan. Tuy nhiên các cơ số trong các lũy thừa đều có ước chung, nên việc tách các lũy thừa thành tích, để xuất hiện thừa số chung rồi so sánh thừa số riêng có vẻ khả quan. Để làm được điều này ta cần dùng phương pháp sau: Biến đổi  $a^n$  về dạng  $c.d^k$ , biến đổi  $b^m$  về dạng  $e.d^k$  rồi so sánh hai số e và c. Từ đó so sánh được hai số  $a^n$  và  $b^m$

**b) Lời giải:**

a) Ta có:  $5^{23} = 5.5^{22} < 6.5^{22}$

$$\Rightarrow 6.5^{22} > 5^{23}$$

b) Ta có:  $7.2^{13} < 8.2^{13} = 2^3.2^{13} = 2^{16}$

$$\Rightarrow 2^{16} > 7.2^{13}$$

c) Ta có:  $81^3.125^5 = (3^4)^3.(5^3)^5 = 15^{12}.5^3$

$$\text{mà } 15^{12}.5^3 > 15^{12}$$

$$\Rightarrow 81^3.125^5 > 15^{12}$$

**c) Nhận xét:** Việc phân tích lũy thừa thành tích các lũy thừa sẽ giúp nhìn ra thừa số chung của các lũy thừa, từ đó việc so sánh hai lũy thừa chỉ còn dựa vào việc so sánh các thừa số riêng.

**Bài 8:** Hãy so sánh  $99^{20}$  và  $9999^{10}$ .

**Lời giải:**

Ta có:

$$99^{20} = (99^2)^{10} = (99.99)^{10}$$

$$9999^{10} = (99.101)^{10}$$

$$\text{Vì } (99.99)^{10} < (99.101)^{10}$$

$$\text{Nên } 99^2 < 9999^{10}$$

**Bài 9:** Hãy so sánh:

a)  $8^5$  và  $3.4^7$

b)  $10^{10}$  và  $48.50^5$ .

**Lời giải:**

a) Ta có:  $8^5 = 2^{15} = 2.2^{14}$

$$3.4^7 = 3.2^{14}$$

Vì  $2 < 3$

Nên  $2.2^{14} < 3.2^{14}$

Vậy  $8^5 < 3.4^7$

b) Ta có:  $10^{10} = 2^{10}.5^{10} = 2.2^9.5^{10}$

$$48.50^5 = (3.2^4).(2^5.5^{10}) = 3.2^9.5^{10}$$

Vì  $2 < 3$

Nên  $2.2^9.5^{10} < 3.2^9.5^{10}$

$\Rightarrow 10^{10} < 48.50^5$

**Bài 10:** Hãy so sánh  $4^{30}$  và  $3.24^{10}$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $4^{30} = (2^2)^{30} = (2.2)^{30} = 2^{30}.2^{30} = (2^3)^{10} .(2^2)^{15} = 8^{10}.4^{15}$

$$24^{10}.3 = (8.3)^{10} .3 = 8^{10}.3^{10}.3 = 8^{10}.3^{11}$$

Vì  $3^{11} < 4^{15} \Rightarrow 8^{10}.3^{11} < 8^{10}.4^{15} \Rightarrow 4^{30} > 3.24^{10}$

**Bài 11:** Hãy so sánh  $1990^{10} + 1990^9$  và  $1991^{10}$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $1990^{10} + 1990^9 = 1990^9 (1990 + 1) = 1991.1990^9$

$$1991^{10} = 1991.1991^9$$

Vì  $1990^9 < 1991^9 \Rightarrow 1990^{10} + 1990^9 < 1991^{10}$

**Bài 12:** Hãy so sánh  $78^{12} - 78^{11}$  và  $78^{11} - 78^{10}$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $78^{12} - 78^{11} = 78^{11} (78 - 1) = 78^{11}.77$

$$78^{11} - 78^{10} = 78^{10} (78 - 1) = 78^{10}.77$$

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA

---

Vì  $78^{11} > 78^{10} \Rightarrow 78^{11} \cdot 77 > 78^{10} \cdot 77 \Rightarrow 78^{12} - 78^{11} > 78^{11} - 78^{10}$

### Dạng 3: So sánh thông qua một lũy thừa trung gian

**I. Phương pháp giải:** Để so sánh 2 lũy thừa  $A$  và  $B$ , ta tìm một lũy thừa  $M$  sao cho  $A < M < B$  hoặc  $A > M > B$

Trong đó  $A$  và  $M$ ;  $M$  và  $B$  có thể so sánh trực tiếp được

### II. Bài toán

**Bài 1:** Hãy so sánh  $2^{30} + 3^{30} + 4^{30}$  và  $3 \cdot 24^{10}$ .

#### Lời giải:

Ta có:  $4^{30} = (2^2)^{30} = (2 \cdot 2)^{30} = 2^{30} \cdot 2^{30} = (2^3)^{10} \cdot (2^2)^{15} > 8^{10} \cdot 3^{15} > 8^{10} \cdot 3^{10} \cdot 3 = (8 \cdot 3)^{10} \cdot 3 = 24^{10} \cdot 3$

Vậy  $2^{30} + 3^{30} + 4^{30} > 3 \cdot 24^{10}$

**Bài 2:** Hãy so sánh:

a)  $2^{225}$  và  $3^{151}$

b)  $199^{20}$  và  $2003^{15}$

c)  $2^{91}$  và  $5^{36}$ .

#### Lời giải:

a) Ta có  $\underbrace{2^{225}}_A = (2^3)^{75} = 8^{75} < \underbrace{9^{75}}_M = (3^2)^{75} = 3^{150} < \underbrace{3^{151}}_B$

$\Rightarrow 2^{225} < 3^{151}$

b) Ta có:

$199^{20} < 200^{20} = (8 \cdot 25)^{20} = (2^3 \cdot 5^2)^{20} = (2^3 \cdot 5^2)^{20} = 2^{60} \cdot 5^{40}$ ;

$2003^{15} > 2000^{15} = (16 \cdot 125)^{15} = (2^4 \cdot 5^3)^{15} = (2^4 \cdot 5^3)^{15} = 2^{60} \cdot 5^{45}$

$\Rightarrow 2^{60} \cdot 5^{45} > 2^{60} \cdot 5^{40} \Rightarrow 2003^{15} > 199^{20}$

c) Ta có:  $\underbrace{2^{91}}_A > \underbrace{2^{90}}_M = (2^5)^{18} = 32^{18} > \underbrace{25^{18}}_B = 5^{36}$

$\Rightarrow 2^{91} > 5^{36}$

**Bài 3:** Hãy so sánh:

a)  $99^{20}$  và  $9^{10} \cdot 11^{30}$

b)  $961^{42}$  và  $100 \cdot 23^{93}$ .

#### Lời giải:

a) Ta có  $99^{20} = [(99)^2]^{10} = 9801^{10} < (22^3)^{10} = 22^{30}$

$$22^{30} = (2.11)^{30} = 2^{30} \cdot 11^{30} = 8^{10} \cdot 11^{30}$$

mà  $8^{10} \cdot 11^{30} < 9^{10} \cdot 11^{30}$

Nên  $99^{20} < 9^{10} \cdot 11^{30}$

b) Ta có:

$$961^{42} < 1000^{42} = 10^{126} = 100 \cdot 10^{124}$$

$$100 \cdot 10^{124} = 100 \cdot (10^4)^{31} < 100 \cdot (23^3)^{31} = 100 \cdot 23^{93}$$

$$\Rightarrow 961^{42} < 100 \cdot 23^{93}$$

**Bài 4:** Hãy so sánh:

a)  $107^{50}$  và  $73^{75}$

b)  $33^{39}$  và  $11^{21}$ .

**Lời giải:**

a) Ta có

$$107^{50} < 108^{50} = (4.27)^{50} = 2^{100} \cdot 3^{150}$$

$$73^{75} > 72^{75} = (8.9)^{75} = 2^{225} \cdot 3^{150}$$

$$\Rightarrow 73^{75} > 107^{50}$$

b) Ta có:

$$3^{39} < 3^{40} = (3^4)^{10} = 81^{10}$$

$$11^{21} > 11^{20} = (11^2)^{10} = 121^{10}$$

$$\Rightarrow 11^{21} > 3^{39}$$

**Bài 5:** Chứng tỏ rằng:  $5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$ .

**Lời giải:**

**Gợi ý:** Hãy chứng tỏ  $5^{27} < 2^{63}$  và  $2^{63} < 5^{28}$

Ta có:  $2^{63} = (2^7)^9 = 128^9$

$$5^{27} = (5^3)^9 = 125^9$$

$$\Rightarrow 2^{63} > 5^{27} \quad (1)$$

Lại có:  $2^{63} = (2^7)^9 = 128^9$

$$5^{28} = (5^4)^7 = 625^7$$

$$\Rightarrow 2^{63} < 5^{28} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1)(2)} \Rightarrow 5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$$

**Bài 6:** Hãy so sánh  $37^{75}$  và  $71^{50}$ .

**Lời giải:**

a) **Phân tích:** Biến đổi  $a^n$  về dạng  $cd^k$ , biến đổi  $b^m$  về dạng  $ed^k$  rồi so sánh hai số  $e$  và  $c$ . Từ đó so sánh được hai số  $a^n$  và  $b^m$

**b) Lời giải:**

$$\text{Ta có: } 71^{50} < 72^{50} = (8.9)^{50} = 2^{150}.3^{100} \quad (1)$$

$$37^{75} > 36^{75} = (4.9)^{75} = 2^{150}.3^{150} \quad (2)$$

$$\text{Mà } 2^{150}.3^{150} > 2^{150}.3^{100} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1)(2)(3)} \Rightarrow 37^{75} > 71^{50}$$

**Bài 7:** Hãy so sánh:

a)  $50^{20}$  và  $2550^{10}$

b)  $999^{10}$  và  $999999^5$ .

**Lời giải:**

a) Ta có  $50^{20} = [(50)^2]^{10} = 2500^{10} < 2550^{10} \Rightarrow 50^{20} < 2550^{10}$

b) Ta có  $999^{10} = [(999)^2]^5 < 998001^5 < 999999^5 \Rightarrow 999^{10} < 999999^5$

**Bài 8:** Hãy so sánh  $A = 1234^{56789}$  và  $B = 56789^{1234}$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có } \begin{aligned} A &= 1234^{56789} > 1000^{50000} = 10^{150000} \\ B &= 56789^{1234} < 100000^{2000} = 10^{10000} \end{aligned}$$

$$\text{Vì } 10^{10000} < 10^{150000} \Rightarrow 56789^{1234} < 1234^{56789}$$

**Bài 9:** Hãy so sánh  $11^{1979}$  và  $37^{1320}$ .

**Lời giải:**

Ta có

$$11^{1979} < (11^3)^{660} = 1331^{660}$$

$$37^{1320} = (37^2)^{660} = 1369^{660}$$

$$\text{vì } 1331^{660} < 1369^{660}$$

$$\text{Nên } 11^{1979} < 37^{1320}$$

### Dạng 4: So sánh thông qua hai lũy thừa trung gian

**I. Phương pháp giải:** Để so sánh hai lũy thừa  $A$  và  $B$ , ta tìm hai lũy thừa  $X$  và  $Y$  sao cho:  
 $A < X < Y < B$

Hoặc  $A > X > Y > B$

Trong đó các lũy thừa  $A$  và  $X$ ;  $X$  và  $Y$ ;  $Y$  và  $B$  có thể so sánh trực tiếp được.

### II. Bài toán

**Bài 1:** Hãy so sánh

a)  $17^{20}$  và  $31^{15}$

b)  $199^{20}$  và  $100^{24}$

c)  $31^{11}$  và  $17^{14}$ .

**Lời giải:**

a) Ta có:  $\underbrace{17^{20}}_A > \underbrace{16^{20}}_X = 2^{80} > \underbrace{2^{75}}_Y = (2^5)^{15} = 32^{15} > \underbrace{31^{15}}_B$

b) Ta có:

$$199^5 < 200^5 = 2^5 \cdot 100^5 = 32 \cdot 100^5 \quad (1)$$

$$100^6 = 100 \cdot 100^5 \quad (2)$$

$$\Rightarrow 199^5 < 100^6$$

$$\Rightarrow (199^5)^4 < (100^6)^4$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow 199^{20} < 100^{24}$$

c) Ta có:

$$31^{11} < 32^{11} = 2^{55}$$

$$17^{14} < 16^{14} = (2^4)^{14} = 2^{56}$$

$$\Rightarrow 31^{11} < 17^{14}$$

**Bài 2:** Hãy so sánh

a)  $11^{1979}$  và  $37^{1321}$

b)  $107^{50}$  và  $51^{75}$

c)  $3^{201}$  và  $6^{119}$ .

**Lời giải:**

a) Ta có:

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA

---

$$11^{1979} < 11^{1980} = (11^3)^{660} = 1331^{660}$$

$$37^{1321} > 37^{1320} = (37^2)^{660} = 1369^{660}$$

$$\Rightarrow 1331^{660} < 1369^{660}$$

$$\Rightarrow 11^{1979} < 37^{1321}$$

b) Ta có:  $107^{50} < 150^{50} = (3.50)^{50} = 9^{25} \cdot 50^{50} < 50^{25} \cdot 50^{50} = 50^{75} < 51^{75}$

c) Ta có:  $3^{201} > 3^{200} = (3^5)^{40} = 243^{40}$ ;  $6^{119} < 6^{120} = (6^3)^{40} = 216^{40} \Rightarrow 3^{201} > 6^{119}$

**Bài 3:** Chứng minh rằng  $2^{1995} < 5^{863}$ .

**Lời giải:**

**a) Phân tích:** Xét  $a^n$  biến đổi được về dạng  $c^q \cdot d^k$  và  $b^m$  biến đổi được về dạng  $e^p \cdot g^h$

Nếu  $c^q < e^p$  và  $d^k < g^h$  thì  $c^q \cdot d^k < e^p \cdot g^h$

**b) Lời giải:**

$$\text{Ta có: } 2^{1995} = 2^{1990} \cdot 2^5; 5^{863} = 5^{860} \cdot 5^3$$

Nhận xét:  $2^5 = 32 < 5^3 = 125$  nên cần so sánh  $2^{1990}$  và  $5^{860}$

$$\text{Ta có: } 2^{10} = 1024; 5^5 = 3025 \Rightarrow 2^{10} \cdot 3 < 5^5 \Rightarrow 2^{1720} \cdot 3^{172} < 5^{860}$$

Lại có  $2^{1990} = 2^{1720} \cdot 2^{270}$ , cần so sánh  $2^{1720} \cdot 2^{270}$  với số  $2^{1720} \cdot 3^{172}$  như sau:

$$3^7 = 2187; 2^{11} = 2048 \Rightarrow 3^7 > 2^{11}; 3^{172} = (3^7)^{24} \cdot 3^4 > (2^{11}) \cdot 2^4 > (2^{11}) \cdot 2^6 = 2^{270}$$

$$\text{Do đó } 2^{1720} \cdot 2^{270} < 2^{1720} \cdot 3^{172} < 5^{860} \Rightarrow 2^{1990} < 5^{860}$$

$$\text{Mà } 2^5 < 5^3 \Rightarrow 2^{1995} < 5^{863}$$

**Bài 4:** Chứng minh rằng  $2^{1999} < 7^{714}$ .

**Lời giải:**

Ta có:

$$\begin{cases} 2^{10} = 1025 \\ 7^3 = 343 \end{cases} \Rightarrow 2^{10} < 3 \cdot 7^3 \Rightarrow (2^{10})^{238} < 3^{238} \cdot (7^3)^{238} \Rightarrow 2^{2380} < 3^{238} \cdot 7^{714}; \begin{cases} 2^8 = 256 \\ 3^5 = 243 \end{cases} \Rightarrow 3^5 < 2^8$$

$$\text{Mà: } \begin{cases} 3^{238} = 3^3 \cdot 3^{235} = 3^3 \cdot (3^5)^{47} < 3^3 \cdot (2^8)^{47} < 2^5 \cdot 2^{376} = 2^{381} \Rightarrow 3^{238} < 2^{381} \\ 2^{2380} < 3^{238} \cdot 7^{714} \end{cases} \Rightarrow 2^{2380} < 2^{381} \cdot 7^{714} \Rightarrow 2^{1999} < 7^{714}$$

## PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

**Bài 1.** Không tính kết quả của biểu thức, hãy so sánh (Trích đề thi HSG Hoa Lu)

a)  $A = 2019 \cdot 2021$  và  $B = 2020^2$

b)  $M = \frac{10^{2021} + 1}{10^{2022} + 1}$  và  $N = \frac{10^{2022} + 1}{10^{2023} + 1}$ .

**Lời giải:**

a)  $A = 2019 \cdot 2021 = 2019 \cdot (2020 + 1) = 2019 \cdot 2020 + 2019$

$$B = 2020^2 = 2020 \cdot 2020 = 2020 \cdot (2019 + 1) = 2020 \cdot 2019 + 2020$$

Vì  $2019 > 2020$

Nên  $A > B$

b)  $10M = 1 + \frac{9}{10^{2022} + 1}$

$$10N = 1 + \frac{9}{10^{2023} + 1}$$

Vì  $\frac{9}{10^{2022} + 1} > \frac{9}{10^{2023} + 1}$

$$\text{Nên } 1 + \frac{9}{10^{2022} + 1} > 1 + \frac{9}{10^{2023} + 1}$$

Vậy  $M > N$

**Bài 2:** Chứng minh rằng  $B = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2021}{3^{2021}} - \frac{2022}{3^{2022}} < \frac{3}{16}$  (Trích đề thi HSG thị xã

Hoài Nhơn).

**Lời giải:**

$$B = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2021}{3^{2021}} - \frac{2022}{3^{2022}}$$

$$\Rightarrow 3B = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{2021}{3^{2020}} - \frac{2022}{3^{2021}}$$

$$\Rightarrow 4B = B + 3B = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2020}} - \frac{2022}{3^{2021}}$$

Đặt  $A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2020}} - \frac{1}{3^{2021}}$

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA

---

$$\Rightarrow 3A = 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2019}} - \frac{1}{3^{2020}}$$

$$4A = A + 3A = 3 - \frac{1}{3^{2021}} < 3$$

$$\Rightarrow A < \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow 4B < A < \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow B < \frac{3}{16}$$

**Bài 3:** Cho  $M = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{101}}$ . Chứng tỏ  $M < 1$

**Lời giải:**

$$\text{Ta có } M = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{100}}$$

$$M = 2M - M = 1 - \frac{1}{2^{101}}$$

$$\text{Mà } M = 1 - \frac{1}{2^{101}} < 1 \Rightarrow M < 1$$

**Bài 4:** So sánh :  $A = \frac{29^{30} + 1}{29^{31} + 1}$  với  $B = \frac{29^{31} + 1}{29^{32} + 1}$

**Lời giải:**

$$\text{Ta có } 29A = \frac{29^{31} + 1 + 28}{29^{31} + 1} = 1 + \frac{28}{29^{31} + 1} \quad (1)$$

$$29B = \frac{29^{32} + 1 + 28}{29^{32} + 1} = 1 + \frac{28}{29^{32} + 1} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $29A > 29B$

Nên  $A > B$

**Bài 5:** Chứng minh rằng  $S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2} < 2$  (Trích đề thi HSG Quảng Trạch).

**Lời giải:**

Ta có

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

...

$$\frac{1}{50^2} < \frac{1}{49 \cdot 50} = \frac{1}{49} - \frac{1}{50}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2} < 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{50}\right)$$

$$S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2} < 2 - \frac{1}{50}$$

$$\text{Mà } 2 - \frac{1}{50} < 2$$

$$\text{Vậy } S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2} < 2$$

**Bài 6:** Cho  $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{100} - 1}$ . Chứng minh  $50 < A < 100$ .

**Lời giải:**

$$A = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{15}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{99}+1} + \dots + \frac{1}{2^{100}-1}\right)$$

Có 99 nhóm trong tổng của  $A$

$$A < 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{99}} + \dots + \frac{1}{2^{99}}\right)$$

$$A < 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 100$$

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{99}+1} + \frac{1}{2^{100}+2} + \dots + \frac{1}{2^{100}-1} + \frac{1}{2^{100}}\right) - \frac{1}{2^{100}}$$

Có 99 nhóm trong tổng của  $A$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{100}} + \frac{1}{2^{100}} + \dots + \frac{1}{2^{100}} + \frac{1}{2^{100}}\right) - \frac{1}{2^{100}}$$

$$A > 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{100 \text{ số hạng}} - \frac{1}{2^{100}} = 1 + 50 - \frac{1}{2^{100}} > 50$$

**Bài 7:** Chứng minh rằng:  $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} < \frac{1}{3}$ .

### Lời giải:

**Hướng dẫn :** Đưa về dạng tổng  $S = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n$  để tính tổng rồi so sánh.

$$\text{Đặt } A = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6}$$

$$\Rightarrow 2A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5}$$

$$\Rightarrow 2A + A = 3A = 1 - \frac{1}{2^6} = \frac{2^6 - 1}{2^6} < 1$$

$$\Rightarrow 3A < 1 \Rightarrow A < \frac{1}{3}$$

**Bài 8:** Cho  $B = \frac{4}{3} + \frac{10}{9} + \frac{28}{27} + \dots + \frac{3^{98} + 1}{3^{98}}$ . Chứng minh  $B < 100$ .

### Lời giải:

$$B = \frac{4}{3} + \frac{10}{9} + \frac{28}{27} + \dots + \frac{3^{98} + 1}{3^{98}} = \frac{4}{3} + \frac{10}{3^2} + \frac{28}{3^3} + \dots + \frac{3^{98} + 1}{3^{98}}$$

$$\Rightarrow B - 98 = \frac{4}{3} - 1 + \frac{10}{3^2} - 1 + \frac{28}{3^3} - 1 + \dots + \frac{3^{98} + 1}{3^{98}} - 1 = \frac{4}{3} + \frac{10}{9} + \frac{28}{27} + \dots + \frac{3^{98} + 1}{3^{98}}$$

$$B - 98 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}}$$

$$\Rightarrow 3(B - 98) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{97}}$$

$$\Rightarrow 3(B - 98) - (B - 98) = 1 - \frac{1}{98}$$

$$\Rightarrow 2(B - 98) = \frac{97}{98} \Rightarrow B - 98 = \frac{97}{196} \Rightarrow B = 98 + \frac{97}{196} < 100 .$$



CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

CHỦ ĐỀ 3: SO SÁNH LŨY THỪA BẰNG PHƯƠNG PHÁP GIÁN TIẾP

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

-Luỹ thừa với số mũ tự nhiên:  $a^n = a.a...a$  ( $n$  thừa số  $a$  với  $n \in N$  )

-Qui ước:  $a^0 = 1(a \neq 0)$

-Các phép tính luỹ thừa:

- Nhân hai luỹ thừa cùng cơ số:  $a^m .a^n = a^{m+n}$

- Chia hai luỹ thừa cùng cơ số :  $a^m : a^n = a^{m-n}(a \neq 0; m \geq n)$

- Luỹ thừa một tích:  $(a.b)^n = a^n .b^n$

- Luỹ thừa một thương:  $(a : b)^n = a^n : b^n (b \neq 0)$

- Luỹ thừa của luỹ thừa:  $(a^m)^n = a^{m.n}$

- Luỹ thừa tầng:  $a^{m^n} = a^{(m^n)}$

- Luỹ thừa với số mũ nguyên âm:  $a^{-n} = \frac{1}{a^n} (a \neq 0)$

2. CÁC PHƯƠNG PHÁP SO SÁNH HAI LŨY THỪA.

**So sánh trực tiếp:**

Để so sánh hai luỹ thừa ta thường đưa về so sánh hai luỹ thừa cùng cơ số hoặc cùng số mũ .

- Nếu hai luỹ thừa cùng cơ số ( lớn hơn 1) thì luỹ thừa nào có số mũ lớn hơn sẽ lớn hơn.

$$a^m > a^n, a > 1 \Leftrightarrow m > n$$

- Nếu hai luỹ thừa cùng số mũ (lớn hơn 0) thì luỹ thừa nào có cơ số lớn hơn sẽ lớn hơn

$$a^n > b^n, n > 0 \Leftrightarrow a > b$$

### So sánh gián tiếp:

Dùng tính chất bắc cầu, tính chất đơn điệu của phép nhân

$$A > B, B > C \Rightarrow A > C$$

$$A.C < B.C, C > 0 \Rightarrow A < B$$

## PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

### Dạng 1: So sánh hai lũy thừa

#### I. Phương pháp giải

- Để so sánh hai lũy thừa  $A$  và  $B$  ta tìm một lũy thừa  $M$  sao cho  $A < M < B$  hoặc  $A > M > B$

Trong đó  $A$  và  $M$ ;  $M$  và  $B$  có thể so sánh trực tiếp được.

- Để so sánh 2 lũy thừa  $A$  và  $B$  ta tìm hai lũy thừa  $M$  và  $N$  sao cho  $A < M < N < B$  hoặc  $A > M > N > B$

Trong đó  $A$  và  $M$ ;  $M$  và  $B$ ;  $M$  và  $N$  có thể so sánh trực tiếp được.

#### II. Bài toán

**Bài 1:** So sánh các số sau:

a)  $199^{20}$  và  $2003^{15}$

b)  $3^{39}$  và  $11^{21}$

#### Lời giải:

a) Ta có:  $199^{20} < 200^{20} = (8.25)^{20} = (2^3.5^2)^{20} = (2^3.5^2)^{20} = 2^{60}.5^{40}$

$$2003^{15} > 2000^{15} = (16.125)^{15} = (2^4.5^3)^{15} = (2^4.5^3)^{15} = 2^{60}.5^{45}$$

$$\text{Vì } 2^{60}.5^{45} > 2^{60}.5^{40} \Rightarrow 200^{15} > 199^{20}$$

$$\text{Vậy } 200^{15} > 199^{20}$$

b)  $3^{39} < 3^{40} = (3^4)^{10} = 81^{10}$

$$11^{21} > 11^{20} = (11^2)^{10} = 121^{10}$$

Do  $121^{10} > 81^{10} \Rightarrow 11^{21} > 3^{39}$

Vậy  $11^{21} > 3^{39}$

**Bài 2:** So sánh các số sau:

$2^{30} + 3^{30} + 4^{30}$  và  $3.24^{10}$

**Lời giải:**

Ta có:

$$4^{30} = (2^2)^{30} = (2.2)^{30} = 2^{30}.2^{30} = (2^3)^{10}.(2^2)^{15} > 8^{10}.3^{15} > 8^{10}.3^{10}.3 = (8.3)^{10}.3 = 24^{10}.3$$

Vậy  $2^{30} + 3^{30} + 4^{30} > 3.24^{10}$

**Bài 3:** So sánh các số sau:

a)  $2^{225}$  và  $3^{151}$

b)  $1990^{20}$  và  $2003^{15}$

c)  $2^{91}$  và  $5^{36}$

**Lời giải**

a) Ta có  $2^{225} = (2^3)^{75} = 8^{75} < 9^{75} = (3^2)^{75} = 3^{150} < 3^{151}$ .

Vậy  $2^{225} < 3^{151}$

b) Ta có:

$$199^{20} < 200^{20} = (8.25)^{20} = (2^3.5^2)^{20} = 2^{60}.5^{40}$$

$$2003^{15} > 2000^{15} = (16.125)^{15} = (2^4.5^3)^{15} = 2^{60}.5^{45}$$

Vì  $2^{60}.5^{45} > 2^{60}.5^{40} \Rightarrow 2003^{15} > 199^{20}$

Vậy  $2003^{15} > 199^{20}$

c) Ta có:  $2^{91} > 2^{90} = (2^5)^{18} = 32^{18} > 25^{18} = 5^{36}$

Vậy  $2^{91} > 5^{36}$

**Bài 4:** So sánh các số sau:

a)  $99^{20}$  và  $9^{10}.11^{30}$

b)  $961^{42}$  và  $100.23^{93}$

**Lời giải:**

a) Ta có

$$99^{20} = [(99)^2]^{10} = 9801^{10} < (22^3)^{10} = 22^{30}; 22^{30} = (2.11)^{30} = 2^{30}.11^{30} = 8^{10}.11^{30} < 9^{10}.11^{30}$$

Vậy  $99^{20} < 9^{10}.11^{30}$

b) Ta có:

$$961^{42} < 1000^{42} = 10^{126} = 100.10^{124}$$

$$100.23^{93} = 100.(23^3)^{31} > 100.(10^4)^{31} = 100.10^{124}$$

$$\Rightarrow 961^{42} < 100.23^{93}$$

Vậy  $961^{42} < 100.23^{93}$

**Bài 5:** So sánh các số sau:

a)  $107^{50}$  và  $73^{75}$

b)  $37^{75}$  và  $71^{50}$

**Lời giải:**

a) Ta có

$$107^{50} < 108^{50} = (4.27)^{50} = 2^{100}.3^{150}$$

$$73^{75} > 72^{75} = (8.9)^{75} = 2^{225}.3^{150}$$

$$\text{Vì } 2^{100}.3^{150} < 2^{225}.3^{150} \Rightarrow 107^{50} < 73^{75}$$

Vậy  $107^{50} < 73^{75}$

b) Ta có:  $71^{50} < 72^{50} = (8.9)^{50} = 2^{150}.3^{100}$  (1)

$$37^{75} > 36^{75} = (4.9)^{75} = 2^{150}.3^{150}$$
 (2)

$$\text{Vì } 2^{150}.3^{150} > 2^{150}.3^{100}$$
 (3)

Từ (1), (2), (3)  $\Rightarrow 37^{75} > 71^{50}$

Vậy  $37^{75} > 71^{50}$

**Bài 6:** Chứng tỏ rằng:  $5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$

**Lời giải:**

Ta có:  $2^{63} = (2^7)^9 = 128^9$ ;  $5^{27} = (5^3)^9 = 125^9 \Rightarrow 2^{63} > 5^{27}$  (1)

$2^{63} = (2^7)^9 = 128^9$ ;  $5^{28} = (5^4)^7 = 625^7 \Rightarrow 2^{63} < 5^{28}$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $\Rightarrow 5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$

**Bài 7:** So sánh các số sau:

a)  $50^{20}$  và  $2550^{10}$

b)  $999^{10}$  và  $999999^5$

**Lời giải:**

a) Ta có:  $50^{20} = [(50)^2]^{10} = 2500^{10} < 2550^{10} \Rightarrow 50^{20} < 2550^{10}$

b) Ta có:  $999^{10} = [(999)^2]^5 < 998001^5 < 999999^5 \Rightarrow 999^{10} < 999999^5$

**Bài 8:** So sánh :  $A = 1234^{56789}$  và  $B = 56789^{1234}$

**Lời giải:**

Ta có:  $A = 1234^{56789} > 1000^{50000} = 10^{150000}$ ;  $B = 56789^{1234} < 100000^{2000} = 10^{10000}$

Vì:  $10^{10000} < 10^{150000} \Rightarrow 56789^{1234} < 1234^{56789}$

**Bài 9:** So sánh các số sau:

a)  $17^{20}$  và  $31^{15}$

b)  $199^{20}$  và  $100^{24}$

c)  $31^{11}$  và  $17^{14}$

**Lời giải:**

a) Ta có:  $17^{20} > 16^{20} = 2^{80} > 2^{75} = (2^5)^{15} = 32^{15} > 31^{15}$

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

---

$$b) 199^{20} > 200^{20} = 2^{20} \cdot 100^{20} < (2^3)^7 \cdot 100^{20} < 10^7 \cdot 100^{20} < 100^{24}$$

$$c) 31^{11} < 32^{11} = 2^{55}; 17^{14} > 16^4 = 2^{56} \Rightarrow 31^{11} < 17^{14}$$

**Bài 10:** So sánh các số sau:

a)  $11^{1979}$  và  $37^{1321}$

b)  $107^{50}$  và  $51^{75}$

c)  $3^{201}$  và  $6^{119}$

**Lời giải:**

a) Ta có:

$$11^{1979} < 11^{1980} = (11^3)^{660} = 1331^{660}; 37^{1321} > 37^{1320} = (37^2)^{660} = 1369^{660} > 1331^{660} = 11^{1979}$$

b) Ta có:  $107^{50} < 150^{50} = (3 \cdot 50)^{50} = 9^{25} \cdot 50^{50} < 50^{25} \cdot 50^{50} = 50^{75} < 51^{75}$

c) Ta có:  $3^{201} > 3^{200} = (3^5)^{40} = 243^{40}; 6^{119} < 6^{120} = (6^3)^{40} = 216^{40} \Rightarrow 3^{201} > 6^{119}$

**Bài 11:** So sánh các số sau:

a)  $2^{1995} < 5^{863}$

b)  $2^{1999} < 7^{714}$

**Lời giải:**

Ta có:  $2^{1995} = 2^{1990} \cdot 2^5; 5^{863} = 5^{860} \cdot 5^3$

Nhận xét:  $2^5 = 32 < 5^3 = 125$  nên cần so sánh  $2^{1990}$  và  $5^{860}$

Ta có:  $2^{10} = 1024; 5^5 = 3025 \Rightarrow 2^{10} \cdot 3 < 5^5 \Rightarrow 2^{1720} \cdot 3^{172} < 5^{860}$

Lại có  $2^{1990} = 2^{1720} \cdot 2^{270}$ , cần so sánh  $2^{1720} \cdot 2^{270}$  với số  $2^{1720} \cdot 3^{172}$  như sau:

$$3^7 = 2187; 2^{11} = 2048 \Rightarrow 3^7 > 2^{11}; 3^{172} = (3^7)^{24} \cdot 3^4 > (2^{11}) \cdot 2^4 > (2^{11}) \cdot 2^6 = 2^{270}$$

Do đó  $2^{1720} \cdot 2^{270} < 2^{1720} \cdot 3^{172} < 5^{860} \Rightarrow 2^{1990} < 5^{860}$

Mà  $2^5 < 5^3 \Rightarrow 2^{1995} < 5^{863}$

b) Ta có:

$$\begin{cases} 2^{10} = 1025 \\ 7^3 = 343 \end{cases} \Rightarrow 2^{10} < 3 \cdot 7^3 \Rightarrow (2^{10})^{238} < 3^{238} \cdot (7^3)^{238} \Rightarrow 2^{2380} < 3^{238} \cdot 7^{714}; \begin{cases} 2^8 = 256 \\ 3^5 = 243 \end{cases} \Rightarrow 3^5 < 2^8$$

$$\text{Mà: } \begin{cases} 3^{238} = 3^3 \cdot 3^{235} = 3^3 \cdot (3^5)^{47} < 3^3 (2^8)^{47} < 2^5 \cdot 2^{376} = 2^{381} \Rightarrow 3^{238} < 2^{381} \\ 2^{2380} < 3^{238} \cdot 7^{714} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2^{2380} < 2^{381} \cdot 7^{714} \Rightarrow 2^{1999} < 7^{714}$$

**Bài 12:** So sánh 2 hiệu sau

$$72^{45} - 72^{44} \text{ và } 72^{44} - 72^{43}$$

**Lời giải:**

Ta có

$$+ 72^{45} - 72^{44} = 72^{44}(72 - 1) = 72^{44} \cdot 71$$

$$+ 72^{44} - 72^{43} = 72^{43}(72 - 1) = 72^{43} \cdot 71$$

$$\text{Vì } 72^{44} \cdot 71 < 72^{43} \cdot 71 \text{ nên } 72^{45} - 72^{44} < 72^{44} - 72^{43}$$

**Bài 13:** So sánh

a)  $1990^{10} + 1990^9$  và  $1991^{10}$

b)  $107^{50}$  và  $37^{75}$

c)  $33^{39}$  và  $11^{21}$

**Lời giải:**

a)  $1990^{10} + 1990^9 = 1990^9(1990 + 1) = 1991 \cdot 1990^9 < 1991 \cdot 1991^9 = 1991^{10}$

Vậy  $1990^{10} + 1990^9 < 1991^{10}$

b) Ta có

+)  $107^{50} < 108^{50} = (4 \cdot 27)^{50} = 2^{100} \cdot 3^{150}$

+)  $37^{75} > 36^{75} = (4 \cdot 9)^{75} = 2^{150} \cdot 3^{150}$

Vì  $2^{150} \cdot 3^{150} > 2^{100} \cdot 3^{150}$

Do đó  $37^{75} > 107^{50}$

c) Ta có:

$$+) 3^{39} < 3^{40} = (3^4)^{10} = 81^{10}$$

$$+) 11^{21} > 11^{20} = (11^2)^{10} = 121^{10}$$

$$\text{Vì } 121^{10} > 81^{10} \Rightarrow 11^{21} > 3^{39}$$

**Bài 14:** So sánh

a.  $99^{20}$  và  $9999^{10}$

b.  $8^5$  và  $3.4^7$

c.  $202^{303}$  và  $303^{202}$

d.  $10^{10}$  và  $48.50^5$

**Lời giải:**

a. Ta thấy :  $99^2 < 99.101 = 9999 \Rightarrow (99^2)^{10} < 9999^{10}$  hay  $99^{20} < 9999^{10}$

b. Ta có:  $8^5 = 2^{15} = 2.2^{14} < 3.2^{14} = 3.4^7 \Rightarrow 8^5 < 3.4^7$

c. Ta có:  $202^{303} = (2.101)^{3.101} = (2^3.101^3)^{101} = (8.101.101^2)^{101} = (808.101)^{101}$

$$303^{202} = (3.101)^{2.101} = (3^2.101^2)^{101} = (9.101^2)^{101}$$

d. Ta có :  $10^{10} = 2^{10} \cdot 5^{10} = 2 \cdot 2^9 \cdot 5^{10}$

$$48.50^5 = (3.2^4) \cdot (2^5 \cdot 5^{10}) = 3.2^9 \cdot 5^{10} (**)$$

Từ (\*) và (\*\*)  $\Rightarrow 10^{10} < 48.50^5$

**Bài 15:** Chứng tỏ rằng:  $5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$

Lời giải

Ta có :  $2^{63} = (2^7)^9 = 128^9$

$$5^{27} = (5^3)^9 = 125^9 \Rightarrow 2^{63} > 5^{27}$$

Lại có :  $2^{63} = (2^9)^7 = 512^7$

$$5^{28} = (5^4)^7 = 625^7 \Rightarrow 2^{63} < 5^{28} \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow 5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$

**Bài 16:** So sánh

a.  $11^{1979}$  và  $37^{1321}$

b.  $107^{50}$  và  $51^{75}$

c.  $3^{201}$  và  $6^{119}$

Lời giải:

$$11^{1979} < 11^{1980} = (11^3)^{660} = 1331^{660}$$

a.  $37^{1321} > 37^{1320} = (37^2)^{660} = 1369^{660} > 1331^{660} = 11^{1979}$

b.  $107^{50} < 150^{50} = (3.50)^{50} = 9^{25} \cdot 50^{50} < 50^{25} \cdot 50^{50} = 50^{75} < 51^{75}$

c.  $3^{201} > 3^{200} = (3^5)^{40} = 243^{40}$ ;  $6^{119} < 6^{120} = (6^3)^{40} = 216^{40} \Rightarrow 3^{201} > 6^{119}$

**Bài 17:** Chứng minh rằng :  $2^{1995} < 5^{863}$

Lời giải

Có  $2^{10} = 1024, 5^5 = 3025 \Rightarrow 2^{10} \cdot 3 < 5^5 \Rightarrow 2^{1720} \cdot 3^{172} < 5^{860}$

Có  $3^7 = 2187; 2^{10} = 1024 \Rightarrow 3^7 > 2^{11}$

$$3^{172} = (3^7)^{24} \cdot 3^4 > (2^{11})^{24} > (2^{11}) \cdot 2^6 = 2^{270} \Rightarrow 2^{1720} \cdot 2^{270} < 2^{1720} \cdot 3^{172} < 5^{860}$$

Vậy  $2^{1990} < 5^{860}$  và  $2^5 < 5^3 \Rightarrow 2^{1995} < 5^{863}$

**Bài 18:** Gọi m là số các số có 9 chữ số mà trong cách ghi của nó không có chữ số 0 .

Hãy so sánh m

với  $10.9^8$ .

### Lời giải:

Có 9 cách chọn chữ số hàng trăm triệu.

Có 9 cách chọn chữ số hàng chục triệu....

$$\Rightarrow m = 9.9.9.9.9.9.9.9 = 9^9$$

$$\text{Mà } 9^9 = 9.9^8 < 10.9^8.$$

Vậy:  $m < 10.9^8$ .

### **Dạng 2: So sánh hai biểu thức chứa lũy thừa.**

#### *I. Phương pháp giải*

- Phương pháp so sánh phân bù:

Với  $a, n, m, k \in \mathbb{N}^*$ . Ta có:

$$+ \text{ Nếu } m > n \text{ thì } k - \frac{a}{m} > k - \frac{a}{n} \text{ và } k + \frac{a}{m} < k + \frac{a}{n}$$

$$+ \text{ Nếu } m < n \text{ thì } k - \frac{a}{m} < k - \frac{a}{n} \text{ và } k + \frac{a}{m} > k + \frac{a}{n}$$

- Với biểu thức là tổng các số  $\frac{1}{a^2}$  ( $a \in \mathbb{N}^*$ ) ta có vận dụng so sánh sau:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a}.$$

- Sử dụng kết quả của bài toán:

Cho phân số  $\frac{a}{b}$  ( $a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$ )

$$+ \text{ Nếu } \frac{a}{b} < 1 \text{ và } m \in \mathbb{N}, m \neq 0 \text{ thì: } \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$$

$$+ \text{ Nếu } \frac{a}{b} > 1 \text{ và } m \in \mathbb{N}, m \neq 0 \text{ thì: } \frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m}$$

**II. Bài toán**

**Bài 1:** So sánh:

a)  $A = \frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1}$  và  $B = \frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1}$

b)  $C = \frac{2^{2008} - 3}{2^{2007} - 1}$  và  $D = \frac{2^{2007} - 3}{2^{2006} - 1}$

**Lời giải:**

a) Ta có  $A = \frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1} \Rightarrow 10A = 10 \cdot \left( \frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1} \right) = \frac{10^{16} + 10}{10^{16} + 1} = \frac{10^{16} + 1 + 9}{10^{16} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{16} + 1}$

$$B = \frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1} \Rightarrow 10B = 10 \cdot \left( \frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1} \right) = \frac{10^{17} + 10}{10^{17} + 1} = \frac{10^{17} + 1 + 9}{10^{17} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{17} + 1}$$

Vì  $10^{16} + 1 < 10^{17} + 1 \Rightarrow \frac{9}{10^{16} + 1} > \frac{9}{10^{17} + 1} \Rightarrow 1 + \frac{9}{10^{16} + 1} > 1 + \frac{9}{10^{17} + 1} \Rightarrow 10A > 10B$  hay

$$A > B$$

b) Ta có  $C = \frac{2^{2008} - 3}{2^{2007} - 1} \Rightarrow \frac{1}{2}C = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{2^{2008} - 3}{2^{2007} - 1} \right) = \frac{2^{2008} - 3}{2^{2008} - 2} = \frac{2^{2008} - 2 - 1}{2^{2008} - 2} = 1 - \frac{1}{2^{2008} - 2}$

$$D = \frac{2^{2007} - 3}{2^{2006} - 1} \Rightarrow \frac{1}{2}D = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{2^{2007} - 3}{2^{2006} - 1} \right) = \frac{2^{2007} - 3}{2^{2007} - 2} = \frac{2^{2007} - 2 - 1}{2^{2007} - 2} = 1 - \frac{1}{2^{2007} - 2}$$

Vì

$$2^{2008} - 2 > 2^{2007} - 2 \Rightarrow \frac{1}{2^{2008} - 2} < \frac{1}{2^{2007} - 2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^{2008} - 2} > 1 - \frac{1}{2^{2007} - 2} \Rightarrow \frac{1}{2}C > \frac{1}{2}D \Rightarrow C > D$$

**Bài 2:** So sánh:

a)  $A = \frac{2008^{2008} + 1}{2008^{2009} + 1}$  và  $B = \frac{2008^{2007} + 1}{2008^{2008} + 1}$

b)  $C = \frac{100^{100} + 1}{100^{99} + 1}$  và  $D = \frac{100^{101} + 1}{100^{100} + 1}$

**Lời giải:**

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

---

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{2008^{2008} + 1}{2008^{2009} + 1} < 1 \Rightarrow A < \frac{2008^{2008} + 1 + 2007}{2008^{2009} + 1 + 2007} = \frac{2008^{2008} + 2008}{2008^{2009} + 2008} \\ &= \frac{2008(2008^{2007} + 1)}{2008(2008^{2008} + 1)} = B \end{aligned}$$

Vậy  $A < B$

$$\text{b) Ta có : } D = \frac{100^{101} + 1}{100^{100} + 1} > 1 \Rightarrow D > \frac{100^{101} + 1 + 99}{100^{100} + 1 + 99} = \frac{100^{101} + 100}{100^{100} + 100} = \frac{100(100^{100} + 1)}{100(100^{99} + 1)} = C$$

Vậy  $C < D$

**Bài 3:** So sánh:

$$\text{a) } A = \frac{13^{15} + 1}{13^{16} + 1} \text{ và } B = \frac{13^{16} + 1}{13^{17} + 1}$$

$$\text{b) } A = \frac{1999^{1999} + 1}{1999^{1998} + 1} \text{ và } B = \frac{1999^{2000} + 1}{1999^{1999} + 1}$$

**Lời giải:**

$$\text{a) } B = \frac{13^{16} + 1}{13^{17} + 1} < 1 \Rightarrow B < \frac{13^{16} + 1 + 12}{13^{17} + 1 + 12} = \frac{13^{16} + 13}{13^{17} + 13} = \frac{13(13^{15} + 1)}{13(13^{16} + 1)} = A$$

Vậy  $A > B$

$$\text{b) } B = \frac{1999^{2000} + 1}{1999^{1999} + 1} > 1 \Rightarrow B > \frac{1999^{2000} + 1 + 1998}{1999^{1999} + 1 + 1998} = \frac{1999^{2000} + 1999}{1999^{1999} + 1999} = \frac{1999(1999^{1999} + 1)}{1999(1999^{1998} + 1)}$$

=A

Vậy  $A < B$

**Bài 4:** So sánh:

$$\text{a) } A = \frac{100^{100} + 1}{100^{99} + 1} \text{ và } B = \frac{100^{98} + 1}{100^{97} + 1}$$

$$\text{b) } A = \frac{10^{11} - 1}{10^{12} - 1} \text{ và } B = \frac{10^{10} + 1}{10^{11} + 1}$$

**Lời giải:**

$$a) A = \frac{100^{100} + 1}{100^{99} + 1} > 1 \Rightarrow A > \frac{100^{100} + 1 + 9999}{100^{99} + 1 + 9999} = \frac{100^{100} + 10^2}{100^{99} + 10^2} = \frac{100^2 (100^{98} + 1)}{100^2 (100^{97} + 1)} = B$$

Vậy  $A > B$

$$b) A = \frac{10^{11} - 1}{10^{12} - 1} < 1 \Rightarrow A < \frac{10^{11} - 1 + 11}{10^{12} - 1 + 11} = \frac{10^{11} + 10}{10^{12} + 10} = \frac{10(10^{10} + 1)}{10(10^{11} + 1)} = B$$

Vậy  $A < B$

**Bài 5:** So sánh:

$$a) A = \frac{10^7 + 5}{10^7 - 8} \text{ và } B = \frac{10^8 + 6}{10^8 - 7}$$

$$b) A = \frac{10^8 + 2}{10^8 - 1} \text{ và } B = \frac{10^8}{10^8 - 3}$$

**Lời giải:**

$$a) A = \frac{10^7 + 5}{10^7 - 8} = \frac{10^7 - 8 + 13}{10^7 - 8} = 1 + \frac{13}{10^7 - 8}$$

$$B = \frac{10^8 + 6}{10^8 - 7} = \frac{10^8 - 7 + 13}{10^8 - 7} = 1 + \frac{13}{10^8 - 7}$$

$$\text{Mà: } \frac{13}{10^7 - 8} > \frac{13}{10^8 - 7} \Rightarrow 1 + \frac{13}{10^7 - 8} > 1 + \frac{13}{10^8 - 7} \Rightarrow A > B$$

Vậy  $A > B$

$$b) A = \frac{10^8 + 2}{10^8 - 1} = \frac{10^8 - 1 + 3}{10^8 - 1} = 1 + \frac{3}{10^8 - 1}$$

$$B = \frac{10^8}{10^8 - 3} = \frac{10^8 - 3 + 3}{10^8 - 3} = 1 + \frac{3}{10^8 - 3}$$

$$\text{Mà: } \frac{3}{10^8 - 1} < \frac{3}{10^8 - 3} \Rightarrow 1 + \frac{3}{10^8 - 1} < 1 + \frac{3}{10^8 - 3} \Rightarrow A < B$$

Vậy  $A < B$

**Bài 6:** So sánh:

a)  $A = \frac{19^{20} + 5}{19^{20} - 8}$  và  $B = \frac{19^{21} + 6}{19^{21} - 7}$

b)  $A = \frac{100^{2009} + 1}{100^{2008} + 1}$  và  $B = \frac{100^{2010} + 1}{100^{2009} + 1}$

**Lời giải:**

a)  $A = \frac{19^{20} + 5}{19^{20} - 8} = \frac{19^{20} - 8 + 13}{19^{20} - 8} = 1 + \frac{13}{19^{20} - 8}$

$$B = \frac{19^{21} + 6}{19^{21} - 7} = \frac{19^{21} - 7 + 13}{19^{21} - 7} = 1 + \frac{13}{19^{21} - 7},$$

Mà:  $\frac{13}{19^{20} - 8} > \frac{13}{19^{21} - 7} \Rightarrow 1 + \frac{13}{19^{20} - 8} > 1 + \frac{13}{19^{21} - 7} \Rightarrow A > B$

Vậy  $A > B$

b)  $B = \frac{100^{2010} + 1}{100^{2009} + 1} > 1 \Rightarrow B > \frac{100^{2010} + 1 + 99}{100^{2009} + 1 + 99} = \frac{100(100^{2009} + 1)}{100(100^{2008} + 1)} = A,$

Vậy  $A < B$

**Bài 7:** So sánh:

a)  $A = \frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1}$  và  $B = \frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1}$

b)  $A = \frac{10^{2004} + 1}{10^{2005} + 1}$  và  $B = \frac{10^{2005} + 1}{10^{2006} + 1}$

**Lời giải:**

a)  $B = \frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1} < 1 \Rightarrow B < \frac{10^{16} + 1 + 9}{10^{17} + 1 + 9} = \frac{10(10^{15} + 1)}{10(10^{16} + 1)} = A$

Vậy:  $A > B$

b)  $B = \frac{10^{2005} + 1}{10^{2006} + 1} < 1 \Rightarrow B < \frac{10^{2005} + 1 + 9}{10^{2006} + 1 + 9} = \frac{10(10^{2004} + 1)}{10(10^{2005} + 1)} = A$

Vậy  $A > B$

**Bài 8:** So sánh:

a)  $A = \frac{10^{1992} + 1}{10^{1991} + 1}$  và  $B = \frac{10^{1993} + 3}{10^{1992} + 3}$

b)  $A = \frac{10^{10} + 1}{10^{10} - 1}$  và  $B = \frac{10^{10} - 1}{10^{10} - 3}$

**Lời giải:**

a)  $B = \frac{10^{1993} + 3}{10^{1992} + 3} > 1 \Rightarrow B > \frac{10^{1993} + 3 + 7}{10^{1992} + 3 + 7} = \frac{10(10^{1992} + 1)}{10(10^{1991} + 1)} = A$

Vậy  $B > A$

b)  $A = \frac{10^{10} + 1}{10^{10} - 1} = \frac{10^{10} - 1 + 2}{10^{10} - 1} = 1 + \frac{2}{10^{10} - 1}$

$$B = \frac{10^{10} - 1}{10^{10} - 3} = \frac{10^{10} - 3 + 2}{10^{10} - 3} = 1 + \frac{2}{10^{10} - 3},$$

Mà:  $\frac{2}{10^{10} - 1} < \frac{2}{10^{10} - 3} \Rightarrow 1 + \frac{2}{10^{10} - 1} < 1 + \frac{2}{10^{10} - 3} \Rightarrow A < B$

Vậy  $A < B$

**Bài 9:** So sánh:

a)  $A = \frac{10^{20} + 6}{10^{21} + 6}$  và  $B = \frac{10^{21} + 6}{10^{22} + 6}$

b)  $A = \frac{15^{2016} + 5}{15^{2017} + 5}$  và  $B = \frac{15^{2017} + 1}{15^{2018} + 1}$

**Lời giải:**

a)  $B = \frac{10^{21} + 6}{10^{22} + 6} < 1 \Rightarrow B < \frac{10^{21} + 6 + 54}{10^{22} + 6 + 54} = \frac{10^{21} + 60}{10^{22} + 60} = \frac{10(10^{21} + 6)}{10(10^{21} + 6)} = A$

Vậy  $A > B$

b)  $B = \frac{15^{2017} + 1}{15^{2018} + 1} < 1 \Rightarrow B < \frac{15^{2017} + 1 + 74}{15^{2018} + 1 + 74} = \frac{15^{2017} + 75}{15^{2018} + 75} = \frac{15(15^{2016} + 5)}{15(15^{2017} + 5)} = A$

Vậy  $A > B$

**Bài 10:** So sánh:

a)  $A = \frac{10^{20} + 3}{10^{21} + 3}$  và  $B = \frac{10^{21} + 4}{10^{22} + 4}$

b)  $A = \frac{20^{21} + 3}{20^{22} + 4}$  và  $B = \frac{20^{22} + 8}{20^{23} + 28}$

**Lời giải:**

a)  $B = \frac{10^{21} + 4}{10^{22} + 4} < 1 \Rightarrow B < \frac{10^{21} + 4 + 26}{10^{22} + 4 + 26} = \frac{10^{21} + 30}{10^{22} + 30} = \frac{10(10^{20} + 3)}{10(10^{21} + 3)} = A$

Vậy  $A > B$

b)  $B = \frac{20^{22} + 8}{20^{23} + 28} < 1 \Rightarrow B < \frac{20^{22} + 8 + 52}{20^{23} + 28 + 52} = \frac{20^{22} + 60}{20^{23} + 80} = \frac{20(20^{21} + 3)}{20(20^{22} + 4)} = A$

Vậy  $A > B$

**Bài 11:** So sánh:  $A = \frac{100^{100} + 1}{100^{99} + 1}$  và  $B = \frac{100^{69} + 1}{100^{68} + 1}$

**Lời giải:**

Quy đồng mẫu ta có:

$$A = \frac{(100^{100} + 1)(100^{68} + 1)}{(100^{99} + 1)(100^{68} + 1)}, \text{ và } B = \frac{(100^{69} + 1)(100^{99} + 1)}{(100^{68} + 1)(100^{99} + 1)}$$

Xét hiệu

$$A - B = \frac{(100^{100} + 1)(100^{68} + 1) - (100^{69} + 1)(100^{99} + 1)}{(100^{99} + 1)(100^{68} + 1)}$$

$$A - B = \frac{100^{100} - 100^{99} - 100^{69} + 100^{68}}{(100^{99} + 1)(100^{68} + 1)}$$

$$A - B = \frac{100 \cdot 100^{99} - 100^{99} - 100 \cdot 100^{68} + 100^{68}}{(100^{99} + 1)(100^{68} + 1)}$$

$$A - B = \frac{99(100^{99} - 100^{68})}{(100^{99} + 1)(100^{68} + 1)} > 0$$

Vậy  $A > B$ .

**Bài 12:** So sánh:

a)  $A = \frac{2^{18} - 3}{2^{20} - 3}$  và  $B = \frac{2^{20} - 3}{2^{22} - 3}$

b)  $A = \frac{15^{23} - 3}{15^{22} - 138}$  và  $B = \frac{15^{22} + 4}{15^{21} - 5}$

**Lời giải:**

a) Chú ý trong trường hợp ta trừ cả tử và mẫu với cùng 1 số thì ta đảo chiều của bất

đẳng thức  $B = \frac{2^{20} - 3}{2^{22} - 3} < 1 \Rightarrow B > \frac{2^{20} - 3 - 9}{2^{22} - 3 - 9} = \frac{2^{20} - 12}{2^{22} - 12} = \frac{2^2(2^{18} - 3)}{2^2(2^{20} - 3)} = A$

Vậy  $B > A$

b)  $A = \frac{15^{23} - 3}{15^{22} - 138} > 1 \Rightarrow A > \frac{15^{23} - 3 + 63}{15^{22} - 138 + 63} = \frac{15^{23} + 60}{15^{22} - 75} = \frac{15(15^{22} + 4)}{15(15^{21} - 5)} = B$

Vậy  $A > B$

**Bài 13:** So sánh:  $A = \frac{10^{14} - 1}{10^{15} - 11}$  và  $B = \frac{10^{14} + 1}{10^{15} + 9}$

**Lời giải:**

Ta có

+)  $10A = \frac{10^{15} - 10}{10^{15} - 11} = \frac{(10^{15} - 11) + 1}{10^{15} - 11} = 1 + \frac{1}{10^{15} - 11}$

+)  $10B = \frac{10^{15} + 10}{10^{15} + 9} = \frac{(10^{15} + 9) + 1}{10^{15} + 9} = 1 + \frac{1}{10^{15} + 9}$

$$\text{Vì } \frac{1}{10^{15}-11} > \frac{1}{10^{15}+9} \Rightarrow 10A > 10B$$

Vậy  $A > B$

### PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

**Bài 1:** ( Lương Tài 2017 – 2018 )

So sánh  $A$  và  $B$  biết

$$A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1}; B = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1}$$

**Lời giải:**

**Cách 1:**

Ta có

$$+) 17A = \frac{17^{19} + 17}{17^{19} + 1} = 1 + \frac{16}{17^{19} + 1}$$

$$+) 17B = \frac{17^{18} + 17}{17^{18} + 1} = 1 + \frac{16}{17^{18} + 1}$$

$$\text{Vì } \frac{16}{17^{19} + 1} < \frac{16}{17^{18} + 1} \Rightarrow 17A < 17B$$

Vậy  $A < B$

**Cách 2:**

$$\text{Vì } A < 1 \Rightarrow A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < \frac{17^{18} + 1 + 16}{17^{19} + 1 + 16} = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1} = B$$

Vậy  $A < B$

**Bài 2:**

So sánh  $A$  và  $B$  biết

$$A = \frac{10^{2014} + 2016}{10^{2015} + 2016} \text{ và } B = \frac{10^{2015} + 2016}{10^{2016} + 2016}$$

**Lời giải:**

**Cách 1:**

Ta có

$$+) 10A = \frac{10^{2015} + 2016 + 9 \cdot 2016}{10^{2015} + 2016} = 1 + \frac{9 \cdot 2016}{10^{2015} + 2016}$$

$$+) 10B = \frac{10^{2016} + 2016 + 9 \cdot 2016}{10^{2016} + 2016} = 1 + \frac{9 \cdot 2016}{10^{2016} + 2016}$$

$$\text{Vì } \frac{9 \cdot 2016}{10^{2015} + 2016} > \frac{9 \cdot 2016}{10^{2016} + 2016} \Rightarrow 10A > 10B$$

Vậy  $A > B$

**Cách 2:**

$$\text{Vì } B < 1 \Rightarrow B < \frac{(10^{2015} + 2016) + 9 \cdot 2016}{(10^{2016} + 2016) + 9 \cdot 2016} = \frac{10^{2014} + 2016}{10^{2015} + 2016} = A$$

Vậy  $A > B$

**Bài 3:** ( Hoài Nhơn 2015 – 2016 )

So sánh  $M$  và  $N$  biết

$$M = \frac{19^{30} + 5}{19^{31} + 5} \text{ và } N = \frac{19^{31} + 5}{19^{32} + 5}$$

**Lời giải:**

**Cách 1:**

Ta có

$$+) 19M = \frac{19^{31} + 5 + 18.5}{19^{31} + 5} = 1 + \frac{18.5}{19^{31} + 5}$$

$$+) 19N = \frac{19^{32} + 5 + 18.5}{19^{32} + 5} = 1 + \frac{18.5}{19^{32} + 5}$$

$$\text{Vì } \frac{18.5}{19^{31} + 5} > \frac{18.5}{19^{32} + 5} \Rightarrow 19M > 19N$$

Vậy  $M > N$

**Cách 2:**

$$\text{Vì } N = \frac{19^{31} + 5}{19^{32} + 5} < 1 \Rightarrow N < \frac{(19^{31} + 5) + 18.5}{(19^{32} + 5) + 18.5} = \frac{19^{30} + 5}{19^{31} + 5} = M$$

Vậy  $M > N$

**Bài 4:** ( Hậu Lộc 2015 – 2016 )

So sánh  $A$  và  $B$  biết

$$A = \frac{2009^{2008} + 1}{2009^{2009} + 1} \text{ và } B = \frac{2009^{2009} + 1}{2009^{2010} + 1}$$

**Lời giải:**

Giải tương tự như bài 3.

**Bài 5:** ( Lương Tài 2015 – 2016 )

So sánh  $A$  và  $B$  biết

$$A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} \text{ và } B = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1}$$

**Lời giải:**

Giải tương tự như bài 3.

**Bài 6:** ( Hoa Lư 2020 – 2021 )

So sánh  $M$  và  $N$  biết

$$M = \frac{10^{2021} + 1}{10^{2022} + 1} \text{ và } N = \frac{10^{2022} + 1}{10^{2023} + 1}$$

**Lời giải:**

Giải tương tự như bài 3.

**Bài 7:** ( Quận Hà Đông 2020 – 2011 )

So sánh  $A$  và  $B$  biết

$$A = \frac{2021^{2020} + 2}{2021^{2020} - 1} \text{ và } B = \frac{2021^{2020}}{2021^{2020} - 3}$$

**Lời giải:**

$$\text{Vì } A = \frac{2021^{2020} + 2}{2021^{2020} - 1} > 1 \Rightarrow A < \frac{(2021^{2020} + 2) - 2}{(2021^{2020} - 1) - 2} = B$$

Vậy  $A < B$

**Bài 8:** ( Lạng Giang 2020 – 2011 )

So sánh  $x$  và  $y$  biết

$$x = 2021^{2021} - 2021^{2020}; y = 2021^{2019} - 2021^{2018}$$

**Lời giải:**

Ta có

$$+) x = 2021^{2021} - 2021^{2020} = 2021^{2020}(2021 - 1) = 2020 \cdot 2021^{2020} \quad (1)$$

$$+) y = 2021^{2019} - 2021^{2018} = 2021^{2018}(2021 - 1) = 2020 \cdot 2021^{2018} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $x > y$

**Bài 9:** ( Nông Công 2020 – 2011 )

$$\text{So sánh: } A = \frac{10^{2019} + 1}{10^{2020} + 1} \text{ và } B = \frac{10^{2020} + 1}{10^{2021} + 1}$$

**Lời giải:**

**Ta có:**

$$A = \frac{10^{2019} + 1}{10^{2020} + 1} \Rightarrow 10A = \frac{10^{2020} + 10}{10^{2020} + 1} = \frac{10^{2020} + 1 + 9}{10^{2020} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2020} + 1}$$

$$B = \frac{10^{2020} + 1}{10^{2021} + 1} \Rightarrow 10B = \frac{10^{2021} + 10}{10^{2021} + 1} = \frac{10^{2021} + 1 + 9}{10^{2021} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2021} + 1}$$

$$\text{Mà } 10^{2021} + 1 > 10^{2020} + 1 \text{ nên } \frac{9}{10^{2020} + 1} > \frac{9}{10^{2021} + 1}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{9}{10^{2020} + 1} > 1 + \frac{9}{10^{2021} + 1}$$

Hay  $10A > 10B \Rightarrow A > B$

**Bài 10:** ( Phù Cát 2020 – 2011 )

So sánh  $M$  và  $N$ , biết:  $M = \frac{20^{21} + 5}{20^{22} + 5}$ ;  $N = \frac{20^{22} + 5}{20^{23} + 5}$

**Lời giải:**

$$\text{Vì } N = \frac{20^{22} + 5}{20^{23} + 5} < 1 \Rightarrow N = \frac{20^{22} + 5}{20^{23} + 5} < \frac{20^{22} + 5 + 95}{20^{23} + 5 + 95}$$

$$\Rightarrow \frac{20^{22} + 5}{20^{23} + 5} < \frac{20^{22} + 20.5}{20^{23} + 20.5}$$

$$\Rightarrow \frac{20^{22} + 5}{20^{23} + 5} < \frac{20(20^{21} + 5)}{20(20^{22} + 5)}$$

$$\Rightarrow \frac{20^{22} + 5}{20^{23} + 5} < \frac{20^{21} + 5}{20^{22} + 5} = M$$

Vậy:  $M > N$

**Bài 11:** ( Ngọc Lạc 2020 – 2011 )

So sánh:  $A = \frac{10^{2019} - 1}{10^{2020} + 1}$  và  $B = \frac{10^{2020} - 1}{10^{2021} + 1}$

**Lời giải:**

Ta có:

$$10A = \frac{10^{2020} - 10}{10^{2020} + 1} = 1 - \frac{11}{10^{2020} + 1}$$

$$10B = \frac{10^{2021} - 10}{10^{2021} + 1} = 1 - \frac{11}{10^{2021} + 1}$$

$$\text{Vì } \frac{11}{10^{2020} + 1} > \frac{11}{10^{2021} + 1} \Rightarrow 10A > 10B$$

Vậy  $A > B$

**Bài 12:** ( Chư Sê 2020 – 2011 )

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

---

So sánh hai phân số  $A = \frac{25^{2019} + 1}{25^{2020} + 1}$  và  $B = \frac{25^{2020} + 1}{25^{2021} + 1}$

**Lời giải:**

Ta có:

$$+) A = \frac{25^{2019} + 1}{25^{2020} + 1} \Rightarrow 25A = \frac{25^{2020} + 25}{25^{2020} + 1} = 1 + \frac{24}{25^{2020} + 1}$$

$$+) B = \frac{25^{2020} + 1}{25^{2021} + 1} \Rightarrow 25B = \frac{25^{2021} + 25}{25^{2021} + 1} = 1 + \frac{24}{25^{2021} + 1}$$

$$\text{Vì } 1 + \frac{24}{25^{2020} + 1} > 1 + \frac{24}{25^{2021} + 1} \Rightarrow 25A > 25B \Rightarrow A > B$$

**Bài 13:** ( Gia Bình 2020 – 2011 )

So sánh 2 phân số sau:  $A = \frac{2019^{2020} + 1}{2019^{2019} + 1}$  và  $B = \frac{2019^{2019} + 1}{2019^{2018} + 1}$

**Lời giải:**

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2019^{2020} + 1}{2019^{2019} + 1} = \frac{2019^{2020} + 2019 - 2018}{2019^{2019} + 1} \\ &= \frac{2019(2019^{2019} + 1) - 2018}{2019^{2019} + 1} = 2019 - \frac{2018}{2019^{2019} + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{2019^{2019} + 1}{2019^{2018} + 1} = \frac{2019^{2019} + 2019 - 2018}{2019^{2018} + 1} \\ &= \frac{2019(2019^{2018} + 1) - 2018}{2019^{2018} + 1} = 2019 - \frac{2018}{2019^{2018} + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Vì } 2019^{2019} + 1 > 2019^{2018} + 1 \Rightarrow \frac{2018}{2019^{2019} + 1} < \frac{2018}{2019^{2018} + 1}$$

$$\Rightarrow -\frac{2018}{2019^{2019} + 1} > -\frac{2018}{2019^{2018} + 1} \Rightarrow 2019 - \frac{2018}{2019^{2019} + 1} > 2019 - \frac{2018}{2019^{2018} + 1}$$

Vậy  $A > B$

**Bài 14:** ( ? 2020 – 2011 )

So sánh  $A = \frac{2020^{2018} - 1}{2020^{2019} - 2019}$  với  $B = \frac{2020^{2019} + 1}{2020^{2020} + 2019}$ .

**Lời giải:**

Ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{2020^{2019} + 1}{2020^{2020} + 2019} < 1 \Rightarrow B > \frac{(2020^{2019} + 1) - 2021}{(2020^{2020} + 2019) - 2021} \\ &= \frac{2020(2020^{2018} - 1)}{2020^{2020} - 2} > \frac{2020(2020^{2018} - 1)}{2020^{2020} + 2020 \cdot 2019} = \frac{2020^{2018} - 1}{2020^{2019} + 2019} = A \end{aligned}$$

Vậy  $B > A$

**Bài 15:** ( ??? )

So sánh :  $A = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}}$  và  $B = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

**Lời giải:**

Ta có:

$$+) A = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2006}} + \frac{-7}{10^{2006}}$$

$$+) B = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$$

$$\text{Do } \frac{8}{10^{2006}} < \frac{8}{10^{2005}} \Rightarrow \frac{-8}{10^{2006}} > \frac{-8}{10^{2005}}$$

Vậy  $A > B$ .

CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

CHỦ ĐỀ 4: PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG ĐỂ TÌM THÀNH PHẦN CHƯA BIẾT CỦA LŨY THỪA

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Lũy thừa bậc  $n$  của số  $a$  là tích của  $n$  thừa số bằng nhau, mỗi thừa số bằng  $a$

$$a^n = \underbrace{a.a\dots a}_{n \text{ thừa số}} \quad (n \neq 0). \quad a \text{ gọi là cơ số, } n \text{ gọi là số mũ.}$$

**Chú ý:**

$a^2$  còn được gọi là  $a$  bình phương (hay bình phương của  $a$ ).

$a^3$  còn được gọi là  $a$  lập phương (hay lập phương của  $a$ ).

**Quy ước:**  $a^1 = a$

2. Nhân hai lũy thừa cùng cơ số  $a^m . a^n = a^{m+n}$

3. Chia hai lũy thừa cùng cơ số  $a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0, m > n)$

Quy ước  $a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$

4. Lũy thừa của lũy thừa  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

5. Lũy thừa một tích  $(a.b)^m = a^m . b^m$

6. Một số lũy thừa của 10 :

- Một nghìn:  $1\ 000 = 10^3$

- Một vạn:  $10\ 000 = 10^4$

- Một triệu:  $1\ 000\ 000 = 10^6$

- Một tỉ:  $1\ 000\ 000\ 000 = 10^9$

Tổng quát: nếu  $n$  là số tự nhiên khác 0 thì:  $10^n = 1000\dots 00$  (có  $n$  chữ số 0)

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

**Dạng 1: Tìm số mũ, thành phần trong số mũ của lũy thừa**

### I. Phương pháp giải

- Đưa hai lũy thừa về cùng cơ số
- Sử dụng tính chất

Nếu  $a^m = a^n$  thì  $m = n$  ( $a \in \mathbb{N}^*$ ;  $a \neq 1, m, n \in \mathbb{N}$ )

### II. Bài toán

**Bài 1:** Tìm số tự nhiên  $x$  thoả mãn

a)  $6^x = 216$

b)  $3^{2x} = 81$

c)  $7^{3x-2} - 3 \cdot 7^3 = 7^3 \cdot 4$

d)  $\frac{1}{9} \cdot 3^5 \cdot 3^x = 3^{2x+1}$

#### Lời giải:

a)  $6^x = 216$

$$\Leftrightarrow 6^x = 6^3$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

Vậy  $x = 3$

b)  $3^{2x} = 81$

$$\Leftrightarrow 3^{2x} = 9^2 = 3^4$$

$$\Leftrightarrow 2x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Vậy  $x = 2$ .

c)  $7^{3x-2} - 3 \cdot 7^3 = 7^3 \cdot 4$

$$\Leftrightarrow 7^{3x-2} = 7^3(3+4)$$

$$\Leftrightarrow 7^{3x-2} = 7^4$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Vậy  $x = 2$ .

d)  $\frac{1}{9} \cdot 3^5 \cdot 3^x = 3^{2x+1}$

$$\Leftrightarrow 3^3 \cdot 3^x = 3^{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow 3^{x+3} = 3^{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow x+3 = 2x+1$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Vậy  $x = 2$ .

**Bài 2:** Tìm số tự nhiên  $x$  thoả mãn

$$\text{a) } 5^{x-2} - 3^2 = 2^4 - (6^8 : 6^6 - 6^2)$$

$$\text{b) } 3^x + 16 = 19^6 : (19^3 \cdot 19^2) - 3 \cdot 1^{2005} + 1$$

**Lời giải:**

$$\text{a) } 5^{x-2} - 3^2 = 2^4 - (6^8 : 6^6 - 6^2)$$

$$\Leftrightarrow 5^{x-2} - 9 = 16 - (6^2 - 6^2)$$

$$\Leftrightarrow 5^{x-2} - 9 = 16 - 0$$

$$\Leftrightarrow 5^{x-2} = 25$$

$$\Leftrightarrow 5^{x-2} = 25$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

Vậy  $x = 4$ .

$$\text{b) } 3^x + 16 = 19^6 : (19^3 \cdot 19^2) - 3 \cdot 1^{2005} + 1$$

$$\Leftrightarrow 3^x + 16 = 19^6 : 19^5 - 3 + 1$$

$$\Leftrightarrow 3^x + 16 = 19 - 3 + 1$$

$$\Leftrightarrow 3^x + 16 = 17$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Vậy  $x = 0$

**Bài 3:** Tìm số tự nhiên  $x$  thoả mãn

a)  $15^{x^2} \cdot 15^{2x} = 1$

b)  $5^{x^2} \cdot 5 = 5^{2x}$

c)  $9^{x^2} \cdot 81^x = 729$

d)  $11^{7x} = 11^{x^2} \cdot 11^{12}$

**Lời giải:**

a)  $15^{x^2} \cdot 15^{2x} = 1$

$$\Leftrightarrow 15^{x^2+2x} = 15^0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy  $x = 0$

b)  $5^{x^2} \cdot 5 = 5^{2x}$

$$\Leftrightarrow 5^{x^2+1} = 5^{2x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) - (x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Vậy  $x = 1$

$$c) 9^{x^2} \cdot 81^x = 729$$

$$\Leftrightarrow 9^{x^2} \cdot 9^{2x} = 9^3$$

$$\Leftrightarrow 9^{x^2+2x} = 9^3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+3) - (x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Vậy  $x = 1$

$$d) 11^{7x} = 11^{x^2} \cdot 11^{12}$$

$$\Leftrightarrow 11^{7x} = 11^{x^2+12}$$

$$\Leftrightarrow 7x = x^2 + 12$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 3x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-4) - 3(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=3 \end{cases}$$

Vậy  $x = 4; x = 3$

**Bài 4:** Tìm số tự nhiên  $x$  thoả mãn

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

---

a)  $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$

b)  $5^{x+1} - 5^x = 2 \cdot 2^x + 8 \cdot 2^x$

c)  $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x$

d)  $3^x + 25 = 26 \cdot 2^3 + 2 \cdot 3^0$

**Lời giải:**

a)  $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$

$$\Leftrightarrow 2^x(1 + 2 + 2^2 + 2^3) = 480$$

$$\Leftrightarrow 2^x \cdot 15 = 480$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 2^5$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

Vậy  $x = 5$

b)  $5^{x+1} - 5^x = 2 \cdot 2^x + 8 \cdot 2^x$

$$\Leftrightarrow 5^x(5 - 1) = 2^x(2 + 8)$$

$$\Leftrightarrow 2^2 \cdot 5^x = 2^{x+1} \cdot 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^2 \cdot 5^x}{2^2 \cdot 5} = \frac{2^{x+1} \cdot 5}{2^2 \cdot 5}$$

$$\Leftrightarrow 5^{x-1} = 2^{x-1}$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy  $x = 1$

c)  $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x$

$$\Leftrightarrow 7 \cdot 6^x = 7 \cdot 2^x$$

$$\Leftrightarrow 6^x = 2^x$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Vậy  $x = 0$

d)  $3^x + 25 = 26 \cdot 2^3 + 2 \cdot 3^0$

$$\Leftrightarrow 3^x = 185$$

Vì 185 không viết được dưới dạng lũy thừa của 3 nên không có số tự nhiên  $x$  nào thỏa mãn

Vậy không có giá trị nào của  $x$  thoả mãn

**Bài 5:** Tìm số tự nhiên  $x$ , biết

$$a) 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 1080$$

$$b) 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} + 5^{x+3} = 1 + 2 + 3 \dots + 87 + 88 - 4^2$$

**Lời giải:**

$$a) 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 1080$$

$$\Leftrightarrow 3^x(1 + 3 + 9 + 27) = 1080$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 27 \Leftrightarrow x = 3$$

Vậy  $x = 3$  là giá trị cần tìm.

$$b) 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} + 5^{x+3} = 1 + 2 + 3 \dots + 87 + 88 - 4^2$$

$$\Leftrightarrow 5^x(1 + 5 + 25 + 125) = (1 + 88)88 : 2 - 16$$

$$\Leftrightarrow 5^x \cdot 156 = 3916 - 16$$

$$\Leftrightarrow 5^x \cdot 156 = 3900$$

$$\Leftrightarrow 5^x = 25$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Vậy  $x = 2$ .

**Bài 6:** Tìm hai số tự nhiên  $m, n$  biết  $2^m + 2^n = 2^{m+n}$

**Lời giải:**

$$2^m + 2^n = 2^{m+n}$$

$$\Leftrightarrow 2^{m+n} - 2^m - 2^n = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^m \cdot 2^n - 2^m - 2^n + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2^m(2^n - 1) - (2^n - 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow (2^m - 1)(2^n - 1) = 1$$

$$\text{Vì } 2^m \geq 1 \text{ và } 2^n \geq 1 \text{ nên } \Rightarrow \begin{cases} 2^m - 1 = 1 \\ 2^n - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^m = 2 \\ 2^n = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \end{cases}$$

Vậy  $m = n = 1$

**Bài 7:** Có bao nhiêu số tự nhiên  $x$  thỏa mãn  $16^x = 16^{x^3}$

**Lời giải:**

$$16^x = 16^{x^3}$$

$$\Leftrightarrow x = x^3$$

$$\Leftrightarrow x(1 - x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy có 2 số tự nhiên  $x$  thỏa mãn là  $x = 0; x = 1$

**Bài 8:**

a) Cho  $A = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{100}$ . Tìm số tự nhiên  $n$  biết  $4A + 5 = 5^{n+1}$

b) Cho  $B = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ . Tìm số tự nhiên  $n$  biết  $2^{2n+1} - 2 = B$

**Lời giải:**

a) Ta có

$$A = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{100}$$

$$\Rightarrow 5A = 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{100} + 5^{101}$$

$$\Rightarrow 5A - A = (5^2 + 5^3 + \dots + 5^{100} + 5^{101}) - (5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{100})$$

$$\Rightarrow 4A = 5^{101} - 5$$

$$\Rightarrow 4A + 5 = 5^{101}$$

Theo đầu bài ta có:

$$4A + 5 = 5^{n+1}$$

$$\Rightarrow 5^{101} = 5^{n+1} \Rightarrow n = 100.$$

Vậy  $n = 100$ .

b) Ta có :

$$B = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$$

$$\Rightarrow 2B = 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99} + 2^{100} + 2^{101}$$

$$\Rightarrow 2B - B = 2^{101} - 2$$

$$\Rightarrow B = 2^{101} - 2$$

$$\text{Mà } 2^{2n+1} - 2 = B$$

$$\Rightarrow 2^{101} = 2^{2n+1} \Rightarrow 2n+1 = 101 \Rightarrow n = 50$$

Vậy  $n = 50$

### **Bài 9:**

a) Cho  $A = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{99}$ . Tìm số tự nhiên  $n$  biết rằng  $3A + 4 = 4^{n-2}$ .

b) Cho  $B = 4 + 4^3 + 4^5 + \dots + 4^{99}$ . Tìm số tự nhiên  $n$  biết rằng  $15B = 4^{2n+1} - 4$ .

### Lời giải

$$\text{a) } A = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{99}$$

$$\Rightarrow 4A = 4^2 + 4^3 + 4^4 \dots + 4^{100}$$

$$\Rightarrow 4A - A = (4^2 + 4^3 + 4^4 \dots + 4^{100}) - (4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{99})$$

$$\Rightarrow 3A = 4^{100} - 4$$

$$\text{Có } 3A + 4 = 4^{n-2} \Rightarrow 4^{100} - 4 + 4 = 4^{n-2}$$

$$\Rightarrow 4^{100} = 4^{n-2}$$

$$\Rightarrow n - 2 = 100$$

$$\Rightarrow n = 102$$

Vậy  $n = 102$ .

$$\text{a) } B = 4 + 4^3 + 4^5 + \dots + 4^{99}$$

$$\Rightarrow 4^2 B = 4^3 + 4^5 + 4^7 \dots + 4^{101}$$

$$\Rightarrow 16B - B = (4^3 + 4^5 + 4^7 \dots + 4^{101}) - (4 + 4^3 + 4^5 + \dots + 4^{99})$$

$$\Rightarrow 15B = 4^{101} - 4$$

$$\text{Có } 15B = 4^{2n+1} - 4 \Rightarrow 4^{101} - 4 = 4^{2n+1} - 4$$

$$\Rightarrow 4^{101} = 4^{2n+1}$$

$$\Rightarrow 2n+1 = 101$$

$$\Rightarrow n = 50$$

Vậy  $n = 50$ .

**Bài 10:** Tìm số tự nhiên  $x$  biết:  $\frac{7^{x+2} + 7^{x+1} + 7^x}{57} = \frac{5^{2x} + 5^{2x+1} + 5^{2x+3}}{131}$

**Lời giải:**

$$\frac{7^{x+2} + 7^{x+1} + 7^x}{57} = \frac{5^{2x} + 5^{2x+1} + 5^{2x+3}}{131}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7^x(49 + 7 + 1)}{57} = \frac{5^{2x}(1 + 5 + 125)}{131}$$

$$\Leftrightarrow 7^x = 25^x \Rightarrow x = 0$$

Vậy  $x = 0$

**Bài 11:** Tìm số tự nhiên  $n$  biết:  $\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 8^n$

**Lời giải:**

$$\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 8^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 \cdot 4^5}{3 \cdot 3^5} \cdot \frac{6^5 \cdot 6}{2 \cdot 2^5} = 2^{3n}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{24}{6}\right)^5 \cdot \frac{24}{6} = 2^{3n}$$

$$\Leftrightarrow 4^5 \cdot 4 = 2^{3n}$$

$$\Leftrightarrow 2^{12} = 2^{3n} \Leftrightarrow 3n = 12 \Leftrightarrow n = 4$$

Vậy  $n = 4$

**Bài 12:** Tìm hai số tự nhiên  $x, y$  thoả mãn  $2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x$

**Lời giải:**

$$2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x$$

$$\Leftrightarrow 2^{x+1} \cdot 3^y = 2^{2x} \cdot 3^x$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} : 2^{x+1} = 3^y : 3^x$$

$$\Leftrightarrow 2^{x-1} = 3^{y-x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y-x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = 1$$

Vậy  $x = y = 1$

**Bài 13:** Tìm  $x$  biết:

a)  $2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800$

b)  $4^{x+3} \cdot 5^{x+1} \cdot 6^x = 192000$

**Lời giải:**

a)  $2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800$

$$\Leftrightarrow 2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=4 \\ x+1=3 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

Vậy  $x = 2$ .

b)  $4^{x+3} \cdot 5^{x+1} \cdot 6^x = 192000$

$$\Leftrightarrow 4^{x+3} \cdot 5^{x+1} \cdot 6^x = 4^4 \cdot 5^3 \cdot 6$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3=4 \\ x+1=3 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

Vậy không tìm được số tự nhiên  $x$  thoả mãn bài toán

**Bài 14:** Tìm  $x, y \in N$  biết  $4^x + 3124 = 5^y$

**Lời giải:**

Nếu  $x = 0$  thì  $5^y = 4^0 + 3124 = 3125 = 5^5 \Rightarrow y = 5$

Nếu  $x \neq 0$  thì vế trái là số chẵn, vế phải là số lẻ với mọi  $x, y \in N$  ( vô lý)

Vậy  $x = 0, y = 5$

**Dạng 2: Tìm cơ số, thành phần của cơ số trong lũy thừa.**

**I. Phương pháp giải**

- Đưa về hai lũy thừa cùng số mũ

- Sử dụng tính chất

+) Ta có  $x^n = 0 (n \in N^*) \Leftrightarrow x = 0$

+) Ta có  $x^n = a^n (a, x \in N; n \in N^*) \Leftrightarrow x = a$

### II. Bài toán

**Bài 1:** Tìm số tự nhiên  $x$ , biết:

a)  $x^n = 1 \ (n \in \mathbb{N}^*)$

b)  $x^n = 0 \ (n \in \mathbb{N}^*)$

c)  $x^n = 1 \ (n \in \mathbb{N})$

**Lời giải:**

a)  $x^n = 1 \Rightarrow x = 1 \ (n \in \mathbb{N}^*)$

b)  $x^n = 0 \Rightarrow x = 0 \ (n \in \mathbb{N}^*)$

c)  $x^n = 1 \ (n \in \mathbb{N})$

Nếu  $n = 0$  thì  $x^0 = 1 \Rightarrow x \in \mathbb{N}^*$

Nếu  $n \neq 0$  thì  $x^n = 1 \Rightarrow x = 1 \ (n \in \mathbb{N}^*)$ .

**Bài 2:** Tìm số tự nhiên  $x$ , biết:

a)  $x^2 = 16$

b)  $x^5 = 125$

c)  $x = 2021^0$

d)  $x^2 = 2^3 + 3^2 + 4^3$

e)  $\frac{2 \cdot x^3}{3^2} = 48$

**Lời giải:**

a) Ta có  $x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 4^2 \Rightarrow x = 4$

b) Ta có  $x^5 = 125 \Rightarrow x^5 = 5^3 \Rightarrow x = 5$

c) Ta có  $x = 2021^0 = 1$

d) Ta có  $x^2 = 2^3 + 3^2 + 4^3 = 8 + 9 + 64 = 81 = 9^2 \Rightarrow x = 9$

e) Ta có  $\frac{2 \cdot x^3}{3^2} = 48$

$$\frac{2.x^3}{9} = 48$$

$$2.x^3 = 48.9$$

$$2.x^3 = 432$$

$$x^3 = 216 = 6^3$$

$$x = 6$$

Vậy  $x = 6$

**Bài 3:** Tìm số tự nhiên  $x$ , biết:

a)  $(x-3)^3 = 27$

b)  $(2x+1)^3 = 125$

c)  $288 : (x-3)^2 = 2$

d)  $(1+3x)^4 = 256$

**Lời giải:**

a) Ta có  $(x-3)^3 = 27$

$$(x-3)^3 = 3^3$$

$$x-3 = 3$$

$$x = 6$$

Vậy  $x = 6$

b) Ta có  $(2x+1)^3 = 125$

$$(2x+1)^3 = 5^3$$

$$2x+1 = 5$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

Vậy  $x = 2$

c) Ta có  $288 : (x-3)^2 = 2$

$$(x-3)^2 = 288 : 2$$

$$(x-3)^2 = 144$$

$$(x-3)^2 = 12^2$$

$$x-3 = 12$$

$$x = 15$$

Vậy  $x = 15$

d) Ta có  $(1+3x)^4 = 256$

$$(1+3x)^4 = 4^4$$

$$1+3x = 4$$

$$3x = 4-1$$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

Vậy  $x = 1$

**Bài 4:** Tìm số tự nhiên  $x$ , biết:

a)  $x^3 = x^2$

b)  $(x^4)^{11} = x$

c)  $(x^{54})^2 = x$

**Lời giải:**

a) Ta có  $x^3 = x^2$  suy ra  $x^3 - x^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy  $x = 0$  hoặc  $x = 1$ .

b) Ta có  $(x^4)^{11} = x$  suy ra  $x^{44} - x = 0$

$$x(x^{43} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^{43} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^{43} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy  $x = 0$  hoặc  $x = 1$ .

c) Ta có  $(x^{54})^2 = x$  suy ra  $x^{108} - x = 0$

$$x(x^{107} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^{107} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^{107} = 1 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy  $x = 0$  hoặc  $x = 1$ .

**Bài 5:** Tìm số tự nhiên  $x$ , biết:

a)  $2 \cdot (2x - 1)^2 = 50$

b)  $(7x - 11)^3 = 2^5 \cdot 5^2 + 200$

c)  $720 : [41 - (2x - 5)] = 2^3 \cdot 5$

**Lời giải:**

a) Ta có  $2 \cdot (2x - 1)^2 = 50$

$$(2x - 1)^2 = 50 : 2$$

$$(2x - 1)^2 = 25 = 5^2$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = 5$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Vậy  $x = 3$

b) Ta có:  $(7x - 11)^3 = 2^5 \cdot 5^2 + 200$

$$(7x - 11)^3 = 1000 = 10^3$$

$$\Rightarrow 7x - 11 = 10$$

$$7x = 21$$

$$x = 3$$

Vậy  $x = 3$

c) Ta có:  $720 : [41 - (2x - 5)] = 2^3 \cdot 5$

$$720 : [41 - (2x - 5)] = 40$$

$$[41 - (2x - 5)] = 720 : 40$$

$$[41 - (2x - 5)] = 18$$

$$2x - 5 = 23$$

$$2x = 28$$

$$x = 14$$

Vậy  $x = 14$ .

**Bài 6:** Tìm số tự nhiên  $x$ , biết:

a)  $(x - 2)^6 = (x - 2)^8$

b)  $(3x - 6)^4 = (3x - 6)^6$

**Lời giải:**

a) Ta có:  $(x - 2)^6 = (x - 2)^8$

$$\Rightarrow (x - 2)^6 - (x - 2)^8 = 0$$

$$(x - 2)^6 [1 - (x - 2)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^6 = 0 \\ 1 - (x - 2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ (x - 2)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy  $x = 2$  hoặc  $x = 3$ .

b) Ta có:  $(3x - 6)^4 = (3x - 6)^6$

$$\Rightarrow (3x - 6)^4 - (3x - 6)^6 = 0$$

$$(3x - 6)^4 [1 - (3x - 6)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x - 6)^4 = 0 \\ [1 - (3x - 6)^2] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 6 = 0 \\ (3x - 6)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 6 \\ 3x - 6 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 3x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{7}{3} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy  $x = 2$ .

**Bài 7:** Tìm số tự nhiên  $x$ , biết:  $(x-2)^m - (x-2)^{m+3} = 0$  ( $m \in \mathbb{N}$ )

**Lời giải:**

Ta có:  $(x-2)^m - (x-2)^{m+3} = 0$  ( $m \in \mathbb{N}$ )

$$(x-2)^m [1 - (x-2)^3] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-2)^m = 0 \\ [1 - (x-2)^3] = 0 \end{cases} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^m = 0 \\ [1 - (x-2)^3] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 0 \\ (x-2)^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x-2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy  $x = 2$  hoặc  $x = 3$ .

**Bài 8:** Tìm số tự nhiên  $x$ , biết  $(x-1)^{x+2} = (x-1)^{x+4}$  (1)

**Lời giải:**

Đặt  $x-1 = y \Rightarrow x+2 = y+3; x+4 = y+5$

Ta có (1) trở thành  $y^{y+3} = y^{y+5}$

$$y^{y+3}(y^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^{y+3} = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow x \in \{1; 2\}$$

Vậy  $x \in \{1; 2\}$  là giá trị cần tìm.

**Bài 9:** Tìm các số tự nhiên  $x$  và  $y$  biết rằng:  $10^x + 48 = y^2$

**Lời giải:**

Nếu  $x = 0$  ta có  $y^2 = 10^0 + 48 = 1 + 48 = 49 = 7^2 \Rightarrow y = 7$ .

Nếu  $x \neq 0$  ta có  $10^x$  có chữ số tận cùng là 0, do đó  $10^x + 48$  có chữ số tận cùng là 8 mà  $y^2$  không thể có chữ số tận cùng là 8.

Vậy  $x = 0, y = 7$ .

**Bài 10:** Tìm số tự nhiên  $x$ , biết:

a)  $1600 : [41 - (2x - 5)^5] = 40$

b)  $(x^2 + 1) + (x^2 + 2) + (x^2 + 3) + \dots + (x^2 + 100) = 15050$

**Lời giải:**

a) Ta có:  $1600 : [41 - (2x - 5)^5] = 40$

$$[41 - (2x - 5)^5] = 1600 : 40$$

$$\left[41 - (2x - 5)^5\right] = 40$$

$$(2x - 5)^5 = 41 - 40$$

$$(2x - 5)^5 = 1$$

$$2x - 5 = 1$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Vậy  $x = 3$ .

b) Ta có:  $(x^2 + 1) + (x^2 + 2) + (x^2 + 3) + \dots + (x^2 + 100) = 15050$

$$x^2 \cdot 100 + (1 + 2 + 3 + \dots + 100) = 15050$$

$$x^2 \cdot 100 + (1 + 100) \left[ \frac{(100 - 1) : 1 + 1}{2} \right] = 15050$$

$$x^2 \cdot 100 + 101 \cdot 50 = 15050$$

$$x^2 \cdot 100 + 5050 = 15050$$

$$x^2 \cdot 100 = 15050 - 5050$$

$$x^2 \cdot 100 = 10000$$

$$x^2 = 100 = 10^2$$

$$\Rightarrow x = 10$$

Vậy  $x = 10$ .

**Bài 11:** Tìm số tự nhiên  $x$ , biết:

a)  $(1 + 2 + 3 + 4)^2 \cdot (1 - x)^{2021} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$

b)  $(125^3 \cdot 7^5 - 175^5 : 5) : 2021^{2022} = x^{2022}$

**Lời giải:**

a) Ta có:  $(1 + 2 + 3 + 4)^2 \cdot (1 - x)^{2021} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$

$$10^2 \cdot (1 - x)^{2021} = 1 + 8 + 27 + 64$$

$$100 \cdot (1 - x)^{2021} = 100$$

$$(1 - x)^{2021} = 100 : 100$$

$$(1 - x)^{2021} = 1$$

$$\Rightarrow 1 - x = 1$$

$$x = 2$$

Vậy  $x = 2$ .

b) Ta có:  $(125^3 \cdot 7^5 - 175^5 : 5) : 2021^{2022} = x^{2022}$

$$\left[ (5^3)^3 \cdot 7^5 - (25 \cdot 7)^5 : 5 \right] : 2021^{2022} = x^{2022}$$

$$\left[ 5^9 \cdot 7^5 - 25^5 \cdot 7^5 : 5 \right] : 2021^{2022} = x^{2022}$$

$$\left[ 5^9 \cdot 7^5 - 5^{10} \cdot 7^5 : 5 \right] : 2021^{2022} = x^{2022}$$

$$\left[ 5^9 \cdot 7^5 - 5^9 \cdot 7^5 \right] : 2021^{2022} = x^{2022}$$

$$0 : 2021^{2022} = x^{2022}$$

$$x^{2021} = 0$$

$$x = 0$$

Vậy  $x = 0$ .

**Bài 12.** Tìm  $x \in \mathbb{N}$ , biết:  $\left\{x^2 - \left[6^2 - (8^2 - 9 \cdot 7)^3 - 7.5\right]^3 - 5.3\right\}^3 = 1$

**Lời giải:**

Ta có:  $\left\{x^2 - \left[6^2 - (8^2 - 9 \cdot 7)^3 - 7.5\right]^3 - 5.3\right\}^3 = 1$

$$\left\{x^2 - \left[36 - (64 - 63)^3 - 35\right]^3 - 15\right\}^3 = 1$$

$$\left\{x^2 - \left[36 - 1^3 - 35\right]^3 - 15\right\}^3 = 1$$

$$\left\{x^2 - 15\right\}^3 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 15 = 1$$

$$x^2 = 16 = 4^2$$

$$x = 4.$$

Vậy  $x = 4$ .

**Bài 13.** Tìm  $x \in \mathbb{N}$ , biết:  $(x-3)^2 = (1-3x)^2$

**Lời giải:**

Ta có  $(x-3)^2 = (1-3x)^2 \Rightarrow x-3 = 1-3x$

$$4x = 4$$

$$x = 1$$

Vậy  $x = 1$

**Bài 14.** Tìm số tự nhiên  $x$  và  $y$ , biết:  $(3x-6)^{100} + (2y-4)^{200} \leq 0$

**Lời giải:**

Ta có  $(3x-6)^{100} \geq 0, (2y-4)^{200} \geq 0, \forall x, y$

$$\Rightarrow (3x-6)^{100} + (2y-4)^{200} \geq 0, \forall x, y$$

Mà  $(3x-6)^{100} + (2y-4)^{200} \leq 0$

$$\text{nên } (3x-6)^{100} + (2y-4)^{200} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-6)^{100} = 0 \\ (2y-4)^{200} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-6 = 0 \\ 2y-4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy  $x = y = 2$ .

**Bài 15.** Tìm số tự nhiên  $a$  và  $b$ , biết:  $3^a + 9b = 183$

**Lời giải:**

Nếu  $a = 0$  ta có  $3^0 + 9b = 183$

$$1 + 9b = 183$$

$$9b = 182$$

$$\Rightarrow b \notin \mathbb{N}$$

Nếu  $a = 1$  ta có  $3^1 + 9b = 183$

$$9b = 180$$

$$b = 20$$

Nếu  $a \geq 2$  ta có  $3^a$  chia hết cho 9,  $9b$  chia hết cho 9  $\Rightarrow 3^a + 9b$  chia hết cho 9 nhưng 183 không chia hết cho 9.  $3^a + 9b = 183$  Vô lý.

Vậy  $a = 1, b = 20$ .

**Bài 16.** Tìm số tự nhiên  $a$  và  $b$ , biết:  $10^a + 168 = b^2$

**Lời giải:**

Nếu  $a = 0$  ta có  $b^2 = 10^0 + 168$

$$b^2 = 169$$

$$b = 13^2$$

$$\Rightarrow b = 13$$

Nếu  $a \neq 0$  ta có  $3^1 + 9b = 183$

$$9b = 180$$

$$b = 20$$

Nếu  $a \geq 2$  ta có  $3^a$  chia hết cho 9,  $9b$  chia hết cho 9  $\Rightarrow 3^a + 9b$  chia hết cho 9 nhưng 183 không chia hết cho 9.  $3^a + 9b = 183$  Vô lý.

Vậy  $a = 1, b = 20$ .

**Bài 17.** Tổng bình phương của ba số tự nhiên là 2596. Biết rằng tỉ số giữa số thứ nhất và số thứ hai là  $\frac{2}{3}$ , giữa số thứ hai và số thứ ba là  $\frac{5}{6}$ . Tìm ba số đó.

**Lời giải:**

Gọi  $a, b, c$  là ba số tự nhiên phải tìm, ta có:  $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}; \frac{b}{c} = \frac{5}{6} \Rightarrow a = \frac{2}{3}b; c = \frac{6}{5}b$

Có  $a^2 + b^2 + c^2 = 2596$  nên  $\frac{4}{9}b^2 + b^2 + \frac{36}{25}b^2 = 2596$

$$\text{Hay } \frac{649}{225}b^2 = 2596 \Rightarrow b^2 = 900$$

$$\Rightarrow b = 30, a = \frac{2}{3}.30 = 20, c = \frac{6}{5}b = \frac{6}{5}.30 = 36$$

Vậy ba số cần tìm lần lượt là 20, 30, 36.

**Bài 18.** Tìm số tự nhiên  $x$  và  $y$ , biết:  $(x-2)^2 + 2(y-3)^2 < 4$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (x-2)^2 \geq 0, \forall x \\ 2(y-3)^2 \geq 0, \forall y \end{cases} \Rightarrow (x-2)^2 + 2(y-3)^2 \geq 0$$

$$\text{Mà } (x-2)^2 + 2(y-3)^2 < 4$$

$0 \leq (x-2)^2 + 2(y-3)^2 < 4$  mà  $2(y-3)^2$  là số chẵn nên ta có các trường hợp:

Xét trường hợp 1.

$$\begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ 2(y-3)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

Xét trường hợp 2.

$$\begin{cases} (x-2)^2 = 1 \\ 2(y-3)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=1 \\ (y-3)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$$

Vậy  $x=2, y=3$  hoặc  $x=3, y=4$ .

### PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG. ( Khoảng 15 bài )

#### Bài 1: ĐỀ THI HUYỆN HOA LƯ

Tìm  $x$  biết:  $3^{2x} = 81$

**Lời giải:**

$$\begin{aligned} 3^{2x} &= 81 \\ \Rightarrow 3^{2x} &= 3^4 \\ \Rightarrow 2x &= 4 \\ \Rightarrow x &= 2 \end{aligned}$$

#### Bài 2: ĐỀ THI HUYỆN PHÙ CÁT

Tìm số tự nhiên  $x$ , biết:

a)  $(7x-11)^3 = 2^5 \cdot 5^2 + 2 \cdot 10^2$

b)  $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + \dots + 2^{x+2021} = 2^{2026} - 16$

**Lời giải:**

a) Ta có  $(7x-11)^3 = 2^5 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^2 \cdot 2^2$

$$(7x-11)^3 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot (2^2 + 1)$$

$$(7x-11)^3 = 2^3 \cdot 5^3$$

$$(7x-11)^3 = 10^3$$

$$7x - 11 = 10$$

$$7x = 21$$

$$x = 3$$

Vậy  $x = 3$

b)  $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + \dots + 2^{x+2021} = 2^{2026} - 16$

Đặt  $A = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + \dots + 2^{x+2021}$

$$\Rightarrow 2A = 2^{x+1} + 2^{x+2} + \dots + 2^{x+2022}$$

$$\Rightarrow 2A - A = 2^{x+2022} - 2^x$$

$$\Rightarrow A = 2^{x+2022} - 2^x = 2^x (2^{2022} - 1)$$

Từ (1):

$$\Rightarrow 2^x (2^{2022} - 1) = 2^4 (2^{2022} - 1)$$

$$\Rightarrow 2^x = 2^4$$

$$x = 4$$

Vậy  $x = 4$

### **Bài 3: ĐỀ THI HUYỆN TP NINH BÌNH**

Tìm các số nguyên  $x$  biết:

$$(7x-11)^3 = (-3)^2 \cdot 15 + 208$$

**Lời giải:**

$$(7x-11)^3 = (-3)^2 \cdot 15 + 208$$

$$(7x-11)^3 = 9 \cdot 15 + 208$$

$$(7x-11)^3 = 7^3$$

$$7x - 11 = 7$$

$$x = \frac{18}{7}$$

### **Bài 4: ĐỀ THI HUYỆN TIÊN DU**

Tìm số tự nhiên  $x$  biết:

$$2 \cdot 3^x + 5 \cdot 3^{x+1} = 153$$

**Lời giải:**

$$\begin{aligned}2 \cdot 3^x + 5 \cdot 3^{x+1} &= 153 \\(2+15) \cdot 3^x &= 153 \\17 \cdot 3^x &= 153 \\3^x &= 9 \\x &= 2 \\ \text{Vậy } x &= 2\end{aligned}$$

**Bài 5: ĐỀ THI HUYỆN CHƯ SÊ**

Tìm  $x \in \mathbb{N}$ , biết:  $2^x + 2^{x+2} = \frac{200}{19} \cdot \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{19 \cdot 20} \right)$

**Lời giải:**

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \frac{200}{19} \cdot \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{19 \cdot 20} \right) &= \frac{200}{19} \left( 1 - \frac{1}{20} \right) = 10 \\ \Rightarrow 2^x + 2^{x+2} &= 10 \\ \Rightarrow 2^x (1+4) &= 10 \\ \Rightarrow 2^x = 2 &\Rightarrow x = 1\end{aligned}$$

**Bài 6: ĐỀ THI HƯNG HÀ**

a) Tìm số tự nhiên  $x$  biết:  $5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} = \underbrace{1000\dots 0}_{15 \text{ chữ số } 0} : 2^{15}$

**Lời giải:**

$$5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} = \underbrace{1000\dots 0}_{15 \text{ chữ số } 0} : 2^{15}$$

$$5^{3x+3} = 10^{15} : 2^{15}$$

$$5^{3x+3} = 5^{15}$$

Suy ra:  $3x + 3 = 15$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

Vậy  $x = 4$

**Bài 7: ĐỀ THI HUYỆN CHƯƠNG MỸ**

Tìm số nguyên  $x$  thỏa mãn:  $5^{2x-3} + 7 \cdot 5^2 = 12 \cdot 5^2$

**Lời giải:**

$$5^{2x-3} + 7.5^2 = 12.5^2$$

$$5^{2x-3} = 12.5^2 - 7.5^2$$

$$5^{2x-3} = (12 - 7).5^2$$

$$5^{2x-3} = 5^3$$

$$2x - 3 = 3$$

$$2x = 3$$

$$x = 3$$

Vậy  $x = 3$

**Bài 8: ĐỀ THI HUYỆN KIẾN XƯƠNG**

Tìm  $x$  biết:  $26 - 3.(2x - 3)^2 = -7^2$

**Lời giải:**

$$26 - 3.(2x - 3)^2 = -7^2$$

$$26 - 3.(2x - 3)^2 = -49$$

$$3.(2x - 3)^2 = 75$$

$$(2x - 3)^2 = 25$$

$$\Rightarrow 2x - 3 = 5 \text{ hoặc } 2x - 3 = -5$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ hoặc } x = -1$$

Vậy  $x = 4$  hoặc  $x = -1$

**Bài 9: ĐỀ THI KỶ ANH**

Tìm  $x$  biết:  $(3x - 7)^3 = 2^3.3^2 + 53$

**Lời giải:**

$$(3x - 7)^3 = 2^3.3^2 + 53$$

$$(3x - 7)^3 = 8.9 + 53$$

$$(3x - 7)^3 = 125$$

$$(3x - 7)^3 = 5^3$$

$$3x - 7 = 5$$

$$3x = 12$$

$$x = 12 : 3$$

$$x = 4$$

**Bài 10: ĐỀ THI HUYỆN THANH TRÌ**

Tìm số tự nhiên  $x$ , biết:

a)  $x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + \dots + (x+20) = 420$ .

b)  $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} + \dots + 2^{x+2020} = 2^{2023} - 4$ .

**Lời giải**

a)  $x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + \dots + (x+20) = 420$

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + \dots + x + 20 = 420$$

$$(x + x + \dots + x) + (1 + 2 + 3 + \dots + 20) = 420$$

$$21x + \frac{21 \cdot 20}{2} = 420$$

$$21x + 210 = 420$$

$$21x = 420 - 210$$

$$21x = 210$$

$$x = 10$$

Vậy  $x = 10$ .

b)  $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} + \dots + 2^{x+2020} = 2^{2023} - 4$ .

$$2^x (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2020}) = 2^2 (2^{2021} - 1) \quad (1)$$

$$\text{Đặt } A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2020} \Rightarrow 2A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2021}$$

$$\Rightarrow 2A - A = 2^{2021} - 1 \Rightarrow A = 2^{2021} - 1$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow 2^x (2^{2021} - 1) = 2^2 (2^{2021} - 1)$$

$$\Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$$

Vậy  $x = 2$ .

**Bài 11: ĐỀ THI YÊN ĐỊNH**

Tìm  $x$  biết  $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 112$

**Lời giải**

Ta có:  $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 112$

$$2^{x-1} + 2^{x-1} \cdot 2 + 2^{x-1} \cdot 2^2 = 112$$

$$2^{x-1} \cdot (1 + 2 + 2^2) = 112$$

$$2^{x-1} \cdot 7 = 112$$

$$2^{x-1} = 112 : 7$$

$$2^{x-1} = 16$$

$$2^{x-1} = 2^4$$

$$x - 1 = 4$$

$$x = 5$$

**Bài 12: ĐỀ THI THANH BA**

Cho  $x, y$  là các số tự nhiên thỏa mãn các hệ thức  $(x-2)^5 = 243$ ;  $2^y + 2^{y+4} = 272$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A.  $x + y = 9$ .

B.  $x - y = -1$ .

C.  $x^2 + y^2 = 40$ .

D.  $x^2 - y^2 = -9$ .

**Lời giải**

Ta có  $(x-2)^5 = 243 = 3^5$

$$x - 2 = 3$$

$$x = 5$$

Ta có  $2^y + 2^{y+4} = 272$

$$2^y (1 + 2^4) = 272$$

$$2^y \cdot 17 = 272$$

$$2^y = 272 : 17 = 16$$

$$2^y = 16 = 2^4$$

$$y = 4$$

Vậy  $x + y = 9$

**Bài 13. ĐỀ THI THỊ XÃ HOÀI NHƠN**

Cho  $A = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2019}$ . Tìm  $x$  để  $2A + 3 = 3^x$

**Lời giải**

$$A = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2019}$$

$$3A = 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2020}$$

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

---

$$\Rightarrow 3A - A = (3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2020}) - (3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2019})$$

$$\Rightarrow 2A = 3^{2020} - 3$$

$$\Rightarrow 2A + 3 = 3^{2020}$$

$$\text{Mà } 2A + 3 = 3^x$$

$$\Rightarrow x = 2020$$

Vậy  $x = 2020$  thì  $2A + 3 = 3^x$

### Bài 14. ĐỀ THI KIẾN XƯƠNG

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } \left( \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \dots + \frac{1}{73.76} \right) \cdot x^2 = 2\frac{16}{19}$$

#### Lời giải

$$\left( \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + \dots + \frac{1}{73.76} \right) \cdot x^2 = 2\frac{16}{19}$$

$$\frac{1}{3} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \dots + \frac{1}{73} - \frac{1}{76} \right) \cdot x^2 = 2\frac{16}{19}$$

$$\frac{3}{38} \cdot x^2 = 2\frac{16}{19}$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm 6$$

Vậy  $x = \pm 6$

### Bài 14. ĐỀ THI HUYỆN ĐÔNG HƯNG

Tìm  $x$  biết:

a)  $(2x - 1)^2 = 25$

b)  $3(5^x - 1) - 2 = 70$

#### Lời giải

a)  $(2x - 1)^2 = 25$

$$\text{Ta có: } 25 = 5^2 \Rightarrow (2x-1)^2 = 5^2 \text{ hoặc } (-5)^2$$

$$\text{Trường hợp 1: } 2x-1 = -5 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$$

$$\text{Trường hợp 2: } 2x-1 = 5 \Rightarrow 2x = 5+1 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{Vậy } x = 3 \text{ hoặc } x = -2$$

$$\text{b, } 3(5^x - 1) - 2 = 70$$

$$3.(5^x - 1) - 2 = 70$$

$$3.(5^x - 1) = 72$$

$$5^x - 1 = 24$$

$$5^x = 25$$

$$x = 2$$

$$\text{Vậy } x = 2$$

### Bài 15. ĐỀ THI HUYỆN HƯNG HÀ

$$\text{Tìm số tự nhiên } x \text{ biết: } 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + \dots + 2^{x+2017} = 2^{2020} - 4.$$

#### Lời giải

$$\text{Tìm số tự nhiên } x \text{ biết: } 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + \dots + 2^{x+2017} = 2^{2020} - 4.$$

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + \dots + 2^{x+2017} = 2^{2020} - 4$$

$$2^x.(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2017}) = 2^{2020} - 4$$

$$2^x.(2^{2018} - 1) = 2^{2020} - 4$$

$$2^x = \frac{2^{2020} - 4}{2^{2018} - 1}$$

$$2^x = \frac{2^2(2^{2018} - 1)}{2^{2018} - 1}$$

$$2^x = 2^2$$

Vậy  $x = 2$ .

CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

CHỦ ĐỀ 6: PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ ĐỂ TÌM THÀNH PHẦN CHƯA BIẾT CỦA LŨY THỪA

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. KHÁI NIỆM:

Luỹ thừa với số mũ tự nhiên:  $a^n = a.a...a$  ( $n$  thừa số  $a$  với  $a \neq 0; n \in \mathbb{N}$ ).

2. QUI ƯỚC:  $a^0 = 1$  ( $a \neq 0$ ) và  $a^1 = a$

$a^2$ : Bình phương của  $a$  ( $a \neq 0$ )

$a^3$ : Lập phương của  $a$  ( $a \neq 0$ )

Các chữ cái là biến số cần đưa vào `mathtype`

3. CÁC PHÉP TÍNH LŨY THỪA:

+ Nhân hai lũy thừa cùng cơ số:  $a^m . a^n = a^{m+n}$

+ Chia hai lũy thừa cùng cơ số:  $a^m : a^n = a^{m-n}$  ( $a \neq 0; m \geq n$ )

+ Lũy thừa của một thương:  $(a : b)^n = a^n : b^n$  ( $b \neq 0$ )

+ Lũy thừa của lũy thừa:  $(a^m)^n = a^{m.n}$

+ Lũy thừa tầng:  $a^{m^n} = a^{(m^n)}$

+ Lũy thừa với số mũ âm:  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$  ( $a \neq 0$ )

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

I. Phương pháp giải

Nội dung bài toán: Tìm  $x$  để  $VT(x) = VP$ , ta đi đánh giá như sau

+ Nếu  $x > x_0 \Rightarrow VT(x) > VP$

+ Nếu  $x < x_0 \Rightarrow VT(x) < VP$

+ Nếu  $x = x_0 \Rightarrow VT(x) = VP$

Kết luận:  $x = x_0$  là giá trị cần tìm.

II. Bài toán

**Bài 1:** Tìm các số nguyên  $n$  thỏa mãn  $3^{64} < n^{48} < 5^{72}$

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

---

**Phân tích:** số cần tìm đóng vai trò cơ số, phần số mũ đã biết ta cần phân tích về lũy thừa có cùng số mũ để có thể so sánh được phần cơ số với nhau.

Ta có: Hai lũy thừa đầu có số mũ là 64, 48 cùng chia hết cho 16. Hai lũy thừa sau có số mũ 48, 72 cùng chia hết cho 24

### Lời giải

Với  $n \in \mathbb{Z}$ , ta có:  $3^{64} < n^{48}$

$$\Rightarrow (n^3)^{16} > (3^4)^{16}$$

$$\Rightarrow (n^3)^{16} > 81^{16}$$

$$\Rightarrow n^3 > 81 \Rightarrow n > 4 \quad (1)$$

Mặt khác, với  $n \in \mathbb{Z}$ , ta có:  $n^{48} < 5^{72}$

$$\Rightarrow (n^2)^{24} < (5^3)^{24}$$

$$\Rightarrow (n^2)^{24} < 125^{24}$$

$$\Rightarrow n^2 < 125 \Rightarrow -11 \leq n \leq 11 \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (2)$$

Từ (1); (2)  $\Rightarrow 4 < n \leq 11$ , mà  $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \in \{5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$

Vậy n nhận các giá trị nguyên là: 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11

**Bài 2:** Tìm số nguyên dương n biết rằng:

a)  $64 < 2^n < 512$

b)  $243 > 3^n \geq 9$

**Phân tích:** số cần tìm đóng vai trò số mũ trong lũy thừa, phần cơ số đã biết ta cần phân tích về lũy thừa có cùng cơ số để có thể so sánh được phần số mũ với nhau.

### Lời giải

a) Ta có:  $64 < 2^n < 512$

$$\Rightarrow 2^6 < 2^n < 2^8$$

$$\Rightarrow 6 < n < 8$$

mà  $n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow n = 7$

b) Ta có:  $243 > 3^n \geq 9$

$$\Rightarrow 3^5 > 3^n \geq 3^2$$

$$\Rightarrow 5 > n \geq 2$$

$$\text{mà } n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow n \in \{2; 3; 4\}$$

**Bài 3:** Tìm số tự nhiên  $n$ , biết rằng:

a)  $32 < 2^n < 512$

b)  $3^{18} < n^{12} < 20^8$

**Phân tích:** Nhận xét tương tự bài 1 và bài 2.

Câu a phân tích đưa về lũy thừa có cùng cơ số để so sánh số mũ.

Câu b phân tích đưa về lũy thừa có cùng số mũ để so sánh cơ số.

**Lời giải**

a) Với  $n \in \mathbb{N}$ , ta có:

$$32 < 2^n \Rightarrow 2^5 < 2^n \Rightarrow 5 < n \quad (1)$$

$$2^n < 512 \Rightarrow 2^n < 2^9 \Rightarrow n < 9 \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow 5 < n < 9$ , mà  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in \{6; 7; 8\}$

Vậy  $n \in \{6; 7; 8\}$

b) Với  $n \in \mathbb{N}$ , ta có:  $3^{18} < n^{12} \Leftrightarrow (3^3)^6 < (n^2)^6 \Leftrightarrow 3^3 < n^2 \Leftrightarrow 27 < n^2$

$$\text{Vì } 5^2 < 27 < 6^2, \text{ nên } 6^2 \leq n^2 \Rightarrow 6 \leq n \quad (1)$$

$$\text{Với } n \in \mathbb{N}, \text{ ta có: } n^{12} \leq 20^8 \Leftrightarrow (n^3)^4 < (20^2)^4 \Leftrightarrow n^3 < 20^2 \Leftrightarrow n^3 < 400$$

$$\text{Vì } 7^3 < 400 < 8^3, \text{ nên } n^3 \leq 7^3 \Rightarrow n \leq 7 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra  $6 \leq n \leq 7$ , mà  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in \{6; 7\}$

**Bài 4:** Tìm số tự nhiên  $x > 0$  thỏa mãn

a)  $4^{x-1} + 4^x = 5$

b)  $3^x + 3^{2x-1} = 2268$

**Phân tích:** Các lũy thừa có cùng cơ số, nên học sinh hướng tới nghĩ đến đưa về cùng cơ số để nhóm, rút gọn đơn giản phép tính. Dễ dàng thực hiện được câu a. Hướng dẫn cách đánh giá để có cách khác tìm  $x$ .

Câu b làm theo cách 1 thì sẽ gặp phải vấn đề xuất hiện bình phương trong phép tính khó thu gọn ở câu 4. Hướng dẫn cách nhẩm nghiệm và đánh giá so sánh để làm được theo cách 2 ở câu a.

**Lời giải**

a)  $4^{x-1} + 4^x = 5$

Cách 1.

$$4^{x-1} + 4^x = 5$$

$$\Leftrightarrow 4^x : 4 + 4^x = 5$$

$$\Leftrightarrow 4^x \cdot \frac{1}{4} + 4^x = 5$$

$$\Leftrightarrow 4^x \cdot \frac{5}{4} = 5$$

$$\Leftrightarrow 4^x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Vậy  $x = 1$  là giá trị cần tìm.

Cách 2.

Theo đề,  $x$  số tự nhiên  $x > 0 \Rightarrow x \geq 1$

+ TH1:  $x > 1$

Ta có:  $x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4^{x-1} > 4^{1-1} \\ 4^x > 4^1 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4^{x-1} > 4^0 \\ 4^x > 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4^{x-1} > 1 \\ 4^x > 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4^{x-1} + 4^x > 5$$

$\Rightarrow x > 1$  không thỏa mãn

+ TH2:  $x = 1 \Rightarrow 4^{x-1} + 4^x = 4^0 + 4^1 = 5 = VP$  (thỏa mãn)

Vậy  $x = 1$  là giá trị cần tìm.

b)  $3^x + 3^{2x-1} = 2268$

Ta có:

+ Nếu  $x = 4 \Rightarrow 3^4 + 3^{2 \cdot 4 - 1} = 2268 \Rightarrow VT = VP$  (thỏa mãn)

+ Nếu  $x > 4 \Rightarrow 3^x + 3^{2x-1} > 3^4 + 3^7 = 2268$  (không thỏa mãn)

$$+ \text{ Nếu } x < 4 \Rightarrow 3^x + 3^{2x-1} < 226 = VP \text{ (không thỏa mãn)}$$

Vậy  $x = 4$  là giá trị cần tìm.

**Bài 5:** Tìm số tự nhiên  $x > 0$  thỏa mãn

a)  $2^x + 5^x + 7^x = 14$

b)  $2^x + x = 20$

c)  $2^x = 46 - 3x$

**Phân tích:** Câu a các lũy thừa không cùng cơ số nên không thu gọn biến đổi được biểu thức về trái. Nhận thấy tổng các cơ số  $2+5+7=14$  nên  $x=1$  là một giá trị thỏa mãn. Đánh giá với các giá trị  $x < 1$  (vì  $x > 0$  theo đề bài nên loại) và  $x > 1$

Câu b và c số cần tìm xuất hiện ở số mũ trong lũy thừa và cả ở biểu thức, ta thay các giá trị  $x$  lần lượt từ 1, 2, 3, 4, ... và nhận xét kết quả. Sau đó dựa vào kết quả nhận được để chia các trường hợp đánh giá.

**Lời giải**

a)  $2^x + 5^x + 7^x = 14$

Ta có:

$$+ \text{ Nếu } x = 0 \text{ thì } 2^0 + 5^0 + 7^0 = 3 \neq 14 \Rightarrow x = 0 \text{ (loại)}$$

$$+ \text{ Nếu } x = 1 \text{ thì } 2^1 + 5^1 + 7^1 = 14 \Rightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$+ \text{ Nếu } x > 1 \text{ thì } 2^x + 5^x + 7^x > 2^1 + 5^1 + 7^1 = 14 \text{ (loại)}$$

Vậy  $x = 1$  là giá trị cần tìm.

b)  $2^x + x = 20$

Ta có:

$$+ \text{ Nếu } x = 4 \text{ thì } 2^4 + 4 = 20 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$+ \text{ Nếu } x > 4 \text{ thì } 2^x + x > 2^4 + 4 = 20 \text{ (loại)}$$

$$+ \text{ Nếu } 0 < x < 4 \text{ thì } 2^x + x < 2^4 + 4 = 20 \text{ (loại)}$$

Vậy  $x = 4$  là giá trị cần tìm.

c)  $2^x = 46 - 3x$

Ta có:  $2^x = 46 - 3x \Rightarrow 2^x + 3x = 46$

+ TH1:  $x \geq 5 \Rightarrow 2^x \geq 2^5 = 21$

$$\text{mà } 3x \geq 3 \cdot 5 = 15$$

$$\Rightarrow 2^x + 3x \geq 21 + 15 = 36 > 46$$

$$\Rightarrow x \geq 5 \text{ (không thỏa mãn)}$$

$$+ \text{ TH2: } 0 < x \leq 4 \Rightarrow 2^x \leq 2^4 = 16;$$

$$\text{mà } 3x \leq 3 \cdot 4 = 12$$

$$\Rightarrow 2^x + 3x \leq 28 < 46 \text{ (loại)}$$

Vậy không tồn tại giá trị của  $x$  thỏa mãn yêu cầu đề bài

$$\text{Bài 6: Tìm số tự nhiên } x, \text{ biết } 3^x + 3^{x+1} + 2^{x+2} = 388 \text{ (1)}$$

**Phân tích:** Các lũy thừa có cơ số khác nhau, không thực hiện được các phép biến đổi biểu thức, ta thay các giá trị  $x$  lần lượt từ 1, 2, 3, 4, ... và nhận xét kết quả. Sau đó dựa vào kết quả nhận được để chia các trường hợp đánh giá.

### Lời giải

$$+ \text{ TH1: } 0 \leq x < 4$$

$$\Rightarrow 3^x + 3^{x+1} + 2^{x+2} < 3^4 + 3^{4+1} + 2^{4+2}$$

$$\Rightarrow 3^x + 3^{x+1} + 2^{x+2} < 388$$

$$\Rightarrow VT(1) < VP(1)$$

$$\Rightarrow 0 \leq x < 4 \text{ không thỏa mãn}$$

$$+ \text{ TH2: } x > 4$$

$$\Rightarrow 3^x + 3^{x+1} + 2^{x+2} > 3^4 + 3^{4+1} + 2^{4+2}$$

$$\Rightarrow 3^x + 3^{x+1} + 2^{x+2} > 388$$

$$\Rightarrow VT(1) > VP(1)$$

$$\Rightarrow x > 4 \text{ không thỏa mãn}$$

$$+ \text{ TH3: } x = 4$$

$$\Rightarrow 3^x + 3^{x+1} + 2^{x+2} = 3^4 + 3^{4+1} + 2^{4+2}$$

$$\Rightarrow 3^x + 3^{x+1} + 2^{x+2} = 388$$

$$\Rightarrow VT(1) = VP(1)$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ thỏa mãn}$$

Vậy  $x = 4$  là giá trị cần tìm.

$$\text{Bài 7: Tìm } x, y, z \in N, \text{ biết } x \leq y \leq z \text{ và } 2^x + 3^y + 5^z = 156 \text{ (1)}$$

**Phân tích:** Các lũy thừa có cơ số khác nhau, không thực hiện được các phép biến đổi biểu thức, ta nhận thấy  $2^x + 3^y + 5^z = 156 \Rightarrow 5^z < 156 \Rightarrow z \leq 3 \Rightarrow z \in \{0; 1; 2; 3\}$ . Chia các trường hợp của  $x$  để tìm  $x, y$ .

### Lời giải

#### Cách 1:

Ta có:  $2^x + 3^y + 5^z = 156$

$$\Rightarrow 5^z < 156$$

$$\Rightarrow z \leq 3$$

$$\Rightarrow z \in \{0; 1; 2; 3\}.$$

Vì  $x \leq y \leq z$  nên ta xét trường hợp sau:

TH1:  $z = 0 \Rightarrow x \leq y \leq 0$  hay  $x = y = z = 0$ , thay vào (1) ta được:  $VT(1) = 2^0 + 3^0 + 5^0 = 3 < 156$  (loại)

TH2:  $z = 1 \Rightarrow x \leq y \leq 1$ , thay vào (1) ta được:  $VT(1) < 156$  (loại)

TH3:  $z = 2 \Rightarrow x \leq y \leq 2$ , thay vào (1) ta được:  $VT(1) \leq 2^2 + 3^2 + 5^2 < 156$  (loại)

TH4:  $z = 3 \Rightarrow x \leq y \leq 3$ , thay vào (1) ta được  $2^x + 3^y + 125 = 156 \Leftrightarrow 2^x + 3^y = 31$  (2)

Ta có  $3^y < 31$  và  $y \leq 3$

+ Nếu  $y = 3$ , thay vào (2) ta được  $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$  (thỏa mãn)

+ Nếu  $y \in \{0, 1, 2\}$  thay vào (2) ta không tìm được giá trị của  $x$  thỏa mãn.

Vậy  $x = 2; y = 3; z = 3$

#### Cách 2:

Ta có:  $5^z < 156 \Rightarrow z \leq 3$

+ Nếu  $z = 2 \Rightarrow x \leq y \leq 2$ , thay vào (1) ta được:  $VT(1) \leq 2^2 + 3^2 + 5^2 < 156 \Rightarrow$  loại trường hợp  $z = 2$

+ Nếu  $z = 3 \Rightarrow x \leq y \leq 3$ , thay vào (1) ta được:  $2^x + 3^y + 5^3 = 156 \Rightarrow 2^x + 3^y = 31$  (\*)

+ Nếu  $y \leq 2 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow 2^x + 3^y \leq 2^2 + 3^2 = 13 < 31$  (loại)

$$\Rightarrow y = 3 \Rightarrow 2^x + 3^3 = 31 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2.$$

Vậy  $(x; y; z) = (2; 3; 4)$

**Bài 8:** Tìm  $x, y, z \in N$ , thỏa mãn  $2^{x^2+2} + 3^{2y+1} + 5^z = 40$  và  $2^x + 3^y + 5^z = 156$

**Phân tích:** Các lũy thừa có cơ số khác nhau, không thực hiện được các phép biến đổi biểu thức, ta thấy

$$2^{x^2+2} < 32 \Rightarrow 2^{x^2+2} < 2^5 \Rightarrow x^2 + 2 \leq 5 \Leftrightarrow x^2 \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Chia các trường hợp của  $x$  để tìm  $y, z$

### Lời giải

Với  $x, y, z \in N$ , mà  $2^{x^2+2} + 3^{2y+1} + 5^z = 40$  (1), nên ta có:

$$2^{x^2+2} < 32 \Rightarrow 2^{x^2+2} < 2^5$$

$$\Rightarrow x^2 + 2 \leq 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

TH1:  $x = 0$

$$\text{Với } x = 0, \text{ từ (1) ta có } 2^2 + 3^{2y+1} + 5^z = 40 \Leftrightarrow 3^{2y+1} + 5^z = 36 \quad (2)$$

Ta có vế trái của (2) không chia hết cho 3 và vế phải của (2) chia hết cho 3 nên  $x = 0$  loại

TH2:  $x = 1$

$$\text{Với } x = 1, \text{ từ (1) ta có: } 2^3 + 3^{2y+1} + 5^z = 40 \Leftrightarrow 3^{2y+1} + 5^z = 32 \quad (3)$$

$$\text{Ta có } 3^{2y+1} < 32 \Leftrightarrow 2y+1 \leq 3 \Leftrightarrow y \leq 1$$

$$+ \text{ Nếu } y = 1 \Rightarrow \text{thay vào (3) ta được } 27 + 5^z = 32 \Leftrightarrow z = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$+ \text{ Nếu } y = 0 \Rightarrow \text{thay vào (3) ta được } 3 + 5^z = 32 \Leftrightarrow 5^z = 29 \text{ (loại)}$$

Vậy  $x = y = z = 1$

**Bài 9\*:** Tìm  $x, y, z \in N$ , thỏa mãn  $2^x + 2^y + 2^z = 2^{10}$

**Phân tích:** Các lũy thừa có cơ số giống nhau, vai trò của  $x, y, z$  sẽ như nhau nên không mất tính tổng quát, ta giả sử  $x \leq y \leq z$  từ đó đánh giá được  $x \leq 8$ . Tiếp tục để đánh giá lần lượt được  $y$  và  $z$  ta biến đổi phân tích đặt  $2^x$  ra ngoài làm thừa số chung để đánh giá được  $y - x$  và  $z - x$ .

Nhận xét nếu  $y - x > 0$  vô lí nên ta có được  $y = x$ , thay vào biểu thức nhận xét và tìm được giá trị của  $z$

Từ đó tìm được  $x$  và  $y$

### Lời giải

Vì  $x, y, z$  có vai trò như nhau nên không mất tính tổng quát, ta giả sử  $x \leq y \leq z$

Ta có:  $2^{10} = 1024$

$$\text{Mà } x \leq y \leq z \Rightarrow 2^x + 2^y + 2^z \geq 3 \cdot 2^x$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 2^x \leq 2^{10} \Rightarrow x \leq 8$$

Lại có:  $2^x + 2^y + 2^z = 2^{10}$

$$\Rightarrow 2^x (1 + 2^{y-x} + 2^{z-x}) = 2^{10}$$

$$\Rightarrow 1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} = 2^{10} : 2^x$$

$$\Rightarrow 1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} = 2^{10-x}$$

Mà  $x \leq 8 \Rightarrow 1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} = 2^{10-x} \geq 2^{10-8}$

$$\Rightarrow 1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} = 2^{10-x} \geq 4 \quad (*)$$

+ Nếu  $y > x \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow y - x \geq 1; z - x \geq 1$

Ta có VT(\*) là số lẻ và VP(\*) là số chẵn  $\Rightarrow$  loại trường hợp  $y > x$ ,

do vậy  $y = x$ , thay vào (\*) ta được:

$$(*) \Leftrightarrow 1 + 2^0 + 2^{z-x} = 2^{10-x} \geq 2^{10-8} (**)$$

+ Nếu  $z - x = 0 \Rightarrow VT(**) = 3$  còn VP(\*\*) là số chẵn nên loại

$$\Rightarrow z - x \geq 1$$

Do đó  $(**) \Leftrightarrow 2 + 2^{z-x} = 2^{10-x}$

$$\Leftrightarrow 1 + 2^{z-x-1} = 2^{9-x} (***)$$

+ Nếu  $z - x - 1 \geq 1 \Rightarrow VT(***)$  là số lẻ và VP(\*\*\*) là số chẵn  $\Rightarrow$  loại  $\Rightarrow z - x - 1 = 0$

Từ (\*\*\*)  $\Rightarrow 2 = 2^{9-x} \Rightarrow x = 8 \Rightarrow y = 8; z = 9$

Vậy  $x = 8; y = 8; z = 9$

**Bài 10:** Tìm các số nguyên dương  $x$  sao cho  $3^x + 4^x = 5^x$

**Phân tích:** Các lũy thừa có cơ số khác nhau, không thực hiện được các phép biến đổi biểu thức, ta thay các giá trị  $x$  lần lượt từ 1, 2, 3, 4, ... và nhận xét kết quả. Sau đó dựa vào kết quả nhận được đánh giá. Để dễ dàng đánh giá thì ta biến đổi một vế không chứa  $x$  bằng cách chia cả hai vế cho  $5^x$ .

**Lời giải**

Ta có  $3^x + 4^x = 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$

+ Với  $x = 1$ , ta có:  $\left(\frac{3}{5}\right)^1 + \left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{7}{5} \neq 1$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ không thỏa mãn;}$$

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

---

$$+ \text{ Với } x = 2, \text{ ta có: } \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

$\Rightarrow x = 2$  thỏa mãn;

$$+ \text{ Với } x > 2, \text{ mà các cơ số } \frac{3}{5} < \frac{4}{5} < 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 < 1$$

$\Rightarrow x > 2$  không thỏa mãn;

Vậy  $x = 2$  là giá trị cần tìm.

**Bài 11:** Tìm các số nguyên dương  $x, y$  sao cho  $5x^3 = 3^y + 317$

**Phân tích:** Các lũy thừa có cơ số, số mũ khác nhau đều chứa số cần tìm, không thực hiện được các phép biến đổi biểu thức, ta thay các giá trị  $x, y$  lần lượt từ 1, 2, 3, 4, ... và nhận xét kết quả. Sau đó dựa vào kết quả nhận được đánh giá.

**Lời giải**

$$+ \text{ Nếu } y = 0 \Rightarrow 5x^3 = 1 \Rightarrow \text{không có giá trị nguyên nào của } x \text{ thỏa mãn}$$

$$+ \text{ Nếu } y = 1 \Rightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$+ \text{ Nếu } y \geq 2 \text{ thì } 3^y \text{ chia hết cho 9, mà } 317 \text{ chia cho 9 dư 2 và } 5x^3 = 3^y + 317 \text{ nên } 5x^3 \text{ chia 9 dư 2}$$

Điều này mâu thuẫn vì  $5x^3$  chia 9 dư 0 hoặc 4

Vậy  $x = 4; y = 1$  thỏa mãn bài toán

**Bài 12:** Tìm  $x \in \mathbb{N}$ , biết

$$a) 16^x < 128^4$$

$$b) 5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} \leq \underbrace{100 \dots 0}_{18 \text{ chũ số } 0} : 2^{18}$$

**Phân tích:**

Câu a các lũy thừa có cơ số khác nhau, nhưng đều đưa được về lũy thừa cơ số 2. Dùng công thức lũy thừa đưa về cùng cơ số để so sánh.

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

---

Câu b các lũy thừa có cùng một cơ số dùng phép biến đổi đưa về cùng lũy thừa số sau đó so sánh để tìm ra giá trị của  $x$ .

### Lời giải

a) Theo đề, ta có:  $16^x < 128^4$

$$\Rightarrow (2^4)^x < (2^7)^4$$

$$\Rightarrow 2^{4x} < 2^{28}$$

$$\Rightarrow 4x < 28$$

$$\Rightarrow x < 7$$

Mà  $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

b) Ta có:  $5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} \leq \underbrace{100 \dots 0}_{18 \text{ chu số } 0} : 2^{18}$

$$\Rightarrow 5^{3x+3} \leq 10^{18} : 2^{18}$$

$$\Rightarrow 5^{3x+3} \leq 5^{18}$$

$$\Rightarrow 3x+3 \leq 18$$

$$\Rightarrow x \leq 5$$

Mà  $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

**Bài 13:** Tìm các số nguyên dương  $m$  và  $n$  sao cho:  $2^m - 2^n = 256$

**Phân tích:** Các lũy thừa có cùng cơ số 2, nhận thấy  $256 > 0$  nên  $m > n$ .

Đặt  $2^n$  ra ngoài làm thừa số chung chia các trường hợp để nhận xét tính được  $m, n$ .

### Lời giải

$$\text{Ta có: } 2^m - 2^n = 256 = 2^8 \Rightarrow 2^n (2^{m-n} - 1) = 2^8 \quad (1)$$

Dễ thấy  $m \neq n$ , ta xét 2 trường hợp:

$$+ \text{ TH1: } m - n = 1, \text{ từ (1) ta có: } 2^n (2^1 - 1) = 2^8 \Leftrightarrow 2^n = 2^8 \Leftrightarrow n = 8$$

$$\text{Do } m - n = 1 \Rightarrow m = 9$$

$$\Rightarrow n = 8; m = 9$$

+ TH2:  $m - n \geq 2 \Rightarrow 2^{m-n} - 1$  là một số lẻ lớn hơn 1 nên vế trái của (1) chứa thừa số nguyên tố lẻ khi phân tích ra thừa số nguyên tố. Còn vế phải của (1) chỉ chứa thừa số nguyên tố 2

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

---

⇒ mâu thuẫn.

Vậy  $m = 9; n = 8$ .

**Bài 14:** Tìm các số tự nhiên  $x$ , biết:  $100 < 5^{2x-1} < 5^6$

**Phân tích:** Các lũy thừa của  $5^{2x-1} < 5^6$  có cùng cơ số 5, dễ dàng tìm được  $2x < 7$ .

Không biến đổi được 100 về cơ số 5, ta so sánh được  $5^2 < 100$ .

Theo tính chất bắc cầu ta có:  $5^2 < 100 < 5^{2x+1}$

Từ đó tìm được các số tự nhiên  $x$

**Lời giải**

Ta có:  $100 < 5^{2x-1} < 5^6$

$$\Rightarrow 5^2 < 100 < 5^{2x-1} < 5^6$$

$$\Rightarrow 2 < 2x - 1 < 6$$

$$\Rightarrow 3 < 2x < 7$$

Vì  $x$  là các số tự nhiên  $\Rightarrow x \in \{2; 3\}$

**Bài 15:** Tìm số tự nhiên  $a, b$  sao cho:  $(a + b)^3 = \overline{aba}$

**Phân tích:**  $\overline{aba}$  là số tự nhiên có 3 chữ số nên  $100 \leq \overline{aba} \leq 999 \Rightarrow 100 \leq (a + b)^3 \leq 999$

$$\Rightarrow 5 \leq a + b \leq 9$$

Từ đó ta có bảng giá trị chia cá trường hợp và tìm được số tự nhiên  $a, b$ .

**Lời giải**

Vì  $\overline{aba}$  là số tự nhiên có ba chữ số nên  $100 \leq \overline{aba} \leq 999$

$$\Rightarrow 100 \leq (a + b)^3 \leq 999$$

$$\Rightarrow 5 \leq a + b \leq 9$$

Ta có bảng:

$a + b$	5	6	7	8	9
$\overline{aba} = (a + b)^3$	125	216	343	512	729
$a$	/	/	3	/	/
$b$	/	/	4	/	/

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

---

Vậy  $a = 3; b = 4$ .

**Bài 16:** Tìm số tự nhiên  $x, y$  sao cho:  $5^x + 11^y = 26$

**Phân tích:** Các lũy thừa có cơ số, số mũ khác nhau, không thực hiện được các phép biến đổi biểu thức, ta thay các giá trị  $x, y$  lần lượt từ 1, 2, 3, 4, ... và nhận xét kết quả. Sau đó dựa vào kết quả nhận được để chia các trường hợp đánh giá.

**Lời giải**

+ Với  $y = 0$ , ta có:  $5^x + 11^0 = 26$

$$\Leftrightarrow 5^x + 1 = 26$$

$$\Leftrightarrow 5^x = 25$$

$$\Leftrightarrow 5^x = 5^2$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

+ Với  $y = 1$ , ta có:  $5^x + 11^1 = 26$

$$\Leftrightarrow 5^x = 26 - 11 = 15$$

Vì  $x$  là số tự nhiên nên không có giá trị của  $x$  thỏa mãn  $5^x = 15$

$\Rightarrow y = 1$  không thỏa mãn

+ Với  $y \geq 2$ , ta có:  $11^2 = 121 > 26$ , nên không có giá trị thỏa  $5^x + 11^y = 26$  khi  $y \geq 2$ .

Vậy  $x = 2; y = 0$ .

**Bài 17:** Tìm  $x, y \in \mathbb{N}$  sao cho:  $2^x + 624 = 5^y$

**Phân tích:** Các lũy thừa có cơ số, số mũ khác nhau, không thực hiện được các phép biến đổi biểu thức, ta thay các giá trị  $x, y$  lần lượt từ 1, 2, 3, 4, ... và nhận xét kết quả. Sau đó dựa vào kết quả nhận được để chia các trường hợp đánh giá.

**Lời giải**

+ Với  $x = 0$  thì  $2^0 + 624 = 5^y \Leftrightarrow 5^y = 625 \Leftrightarrow 5^y = 5^4 \Rightarrow y = 4$

+ Với  $x \geq 1$ , ta có  $2^x + 624$  là số chẵn,  $5^y$  là số lẻ với mọi  $y \in \mathbb{N}$ : vô lí

Vậy  $x = 0; y = 4$

**Bài 18:** Chứng minh rằng:  $M = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{4}$

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

---

**Phân tích:** Nhận thấy mẫu đều là các số chẵn chia hết cho 2, khi bình phương lên xuất hiện  $\frac{1}{4}$ , ta biến đổi đặt được  $\frac{1}{4}$  ra ngoài làm thừa số chung. Để  $M < \frac{1}{4}$  thì biểu thức còn lại so sánh 1.

Bằng tính chất của phân số, ta so sánh biểu thức còn lại với 1 và chứng minh được  $M < \frac{1}{4}$

### Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } M &= \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \\ &= \frac{1}{(2.2)^2} + \frac{1}{(2.3)^2} + \frac{1}{(2.4)^2} + \dots + \frac{1}{(2.n)^2} \\ &= \frac{1}{4.2^2} + \frac{1}{4.3^2} + \frac{1}{4.4^2} + \dots + \frac{1}{4.n^2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)\end{aligned}$$

$$\text{Mà } \frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2}; \quad \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3}; \quad \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4}; \quad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1).n}$$

$$\begin{aligned}\text{Suy ra } M &< \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} \right) \\ &\Rightarrow M < \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n} \right) \\ &\Rightarrow M < \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } M < \frac{1}{4}$$

## PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

**Bài 1:** Tìm các số tự nhiên  $x, y$ , sao cho  $7^x + 12^y = 50$

(Trích đề thi Olympic lớp 6 huyện Thanh Oai năm học 2017 – 2018)

### Lời giải

+ Với  $y = 0$ , ta có:  $7^x + 12^0 = 50$

$$\Leftrightarrow 7^x + 1 = 50$$

$$\Leftrightarrow 7^x = 49$$

$$\Leftrightarrow 7^x = 7^2$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

+ Với  $y = 1$ , ta có:  $7^x + 12^1 = 50$

$$\Leftrightarrow 7^x = 50 - 12 = 28$$

Vì  $x$  là số tự nhiên nên không có giá trị của  $x$  thỏa mãn  $7^x = 28 \Rightarrow y = 1$  không thỏa mãn

+ Với  $y \geq 2$ , ta có:  $12^2 = 144 > 56$ ,  $\Rightarrow VT > VP$  nên không có giá trị thỏa  $7^x + 12^y = 50$  khi  $y \geq 2$ .

**Bài 2:** Tìm  $x, y \in \mathbb{N}$ , sao cho  $2^x + 624 = 5^y$

(Trích đề thi HSG lớp 6 trường THCS Nguyễn Khuyến năm học 2016 – 2017)

**Lời giải**

+ Với  $x = 0$ , ta có:  $2^0 + 624 = 5^y$

$$\Leftrightarrow 5^y = 625$$

$$\Leftrightarrow 5^y = 5^4$$

$$\Leftrightarrow y = 4 \text{ (thỏa mãn)}$$

+ Với mọi  $x \in \mathbb{N}$ ,  $x \neq 0$ , ta có: vế trái  $2^x + 624$  là số chẵn, vế phải  $5^y$  là số lẻ  $\Rightarrow$  vô lí

Vậy  $x = 0; y = 4$

**Bài 3:** Tìm các số tự nhiên  $a, b$  thỏa mãn  $(100a + 3b + 1)(2^a + 10a + b) = 225$

(Trích đề thi HSG lớp 6 huyện Thạch Thành năm học 2018 – 2019)

**Lời giải**

Ta có:  $(100a + 3b + 1)(2^a + 10a + b) = 225$  (1)

Vì 225 là số lẻ nên  $(100a + 3b + 1)(2^a + 10a + b)$  là lẻ  $\Rightarrow \begin{cases} 100a + 3b + 1 \\ 2^a + 10a + b \end{cases}$  cùng là số lẻ (2)

+ Với  $a = 0$ , từ (1)  $\Rightarrow (100 \cdot 0 + 3b + 1)(2^0 + 10 \cdot 0 + b) = 225$

$$\Leftrightarrow (3b + 1)(b + 1) = 225$$

$$\Leftrightarrow (3b + 1)(b + 1) = 3^2 \cdot 5^2 \quad (3)$$

Vì  $3b + 1$  chia 3 dư 1 và  $3b + 1 > b + 1$  nên

$$\text{Từ (3)} \Rightarrow (3b + 1)(b + 1) = 25 \cdot 9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3b+1=25 \\ b+1=9 \end{cases} \Leftrightarrow b=8 \text{ (thỏa mãn)}$$

+ Với  $a \in \mathbb{N}$ ,  $a \geq 1 \Rightarrow 100a$  chẵn, mà từ (2) ta có  $100a + 3b + 1$  là số lẻ

$$\Rightarrow 3b + 1 \text{ là số lẻ} \Rightarrow b \text{ là số chẵn}$$

Vì  $b$  là số chẵn nên  $2^a + 10a + b$  cũng là số chẵn, trái với (2)  $\Rightarrow$  vô lí với giả thiết

$$\Rightarrow b \in \emptyset$$

Vậy  $a = 0$ ;  $b = 8$

**Bài 4:** Tìm các số tự nhiên  $a, b$  thỏa mãn  $2^a + 124 = 5^b$  (1)

(Trích đề thi HSG lớp 6 huyện Nguyễn Khuyến năm học 2018 – 2019)

**Lời giải**

+ Với  $a = 0$ , từ (1) suy ra  $2^0 + 124 = 5^b$

$$\Rightarrow 5^b = 125$$

$$\Rightarrow 5^b = 5^3$$

$$\Rightarrow b = 3 \text{ (thỏa mãn)}$$

+ Với  $a \geq 1$ , ta có vế trái  $2^a + 124$  luôn là số chẵn, mà vế phải  $5^b$  luôn là số lẻ với mọi  $a \geq 1$ ,  $a, b \in \mathbb{N}$ , điều này vô lí.

Vậy  $a = 0$ ;  $b = 3$

**Bài 5:** Tìm  $a, b \in \mathbb{N}$  thỏa mãn  $10^a + 168 = b^2$  (2)

(Trích đề thi HSG lớp 6)

**Lời giải**

+ Với  $a = 0$ , từ (2) suy ra  $10^0 + 168 = b^2$

$$\Rightarrow b^2 = 169$$

$$\Rightarrow b^2 = 13^2 \text{ mà } a, b \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow b = 13 \text{ (thỏa mãn)}$$

+ Với  $a \geq 1$ , ta có  $10^a$  có chữ số tận cùng là 0

$\Rightarrow$  Vế trái (2) là  $10^a + 168$  có chữ số tận cùng là 8

Mà Vế phải (2) là số chính phương  $b^2$  nên không chữ số tận cùng không thể là 8

## CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

---

⇒ điều này vô lí.

Vậy  $a = 0; b = 13$

**Bài 6:** Tìm các số nguyên  $x, y, z$  sao cho:  $(x - y^2 + z)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 0$

**Phân tích:**

Nhận thấy bình phương của mọi số nguyên đều không âm nên ta có được 
$$\begin{cases} x - y^2 + z = 0 \\ y - 2 = 0 \\ z + 3 = 0 \end{cases}$$

Từ đó tìm được các số nguyên  $x, y, z$ .

**Lời giải**

Với mọi số nguyên  $x, y, z$  ta luôn có: 
$$\begin{cases} (x - y^2 + z)^2 \geq 0 \\ (y - 2)^2 \geq 0 \\ (z + 3)^2 \geq 0 \end{cases}$$

Ta có:  $(x - y^2 + z)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - y^2 + z)^2 \geq 0 \\ (y - 2)^2 \geq 0 \\ (z + 3)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y^2 + z)^2 = 0 \\ (y - 2)^2 = 0 \\ (z + 3)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y^2 + z = 0 \\ y - 2 = 0 \\ z + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y^2 + z = 0 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2^2 + (-3) = 0 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$$

**Bài 7:** Tìm các số nguyên  $x$  sao cho  $2^{x^2} + 3^{x^2} + 4^{x^2} + 5^{x^2} = 4^{1-x^2}$

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Quang Trung năm học 2008-2009)

**Lời giải**

Với mọi giá trị của  $x$  ta có:  $x^2 \geq 0$ . Nên:

$$\begin{cases} 2^{x^2} \geq 2^0 = 1 \\ 3^{x^2} \geq 3^0 = 1 \\ 4^{x^2} \geq 4^0 = 1 \\ 5^{x^2} \geq 5^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2^{x^2} + 3^{x^2} + 4^{x^2} + 5^{x^2} \geq 4$$

Mà  $4^{1-x^2} \leq 4$  nên để VT = VP thì  $x^2 = 0$  hay  $x = 0$

Vậy  $x = 0$  là giá trị cần tìm.

**Bài 8:** Tìm các số nguyên dương  $x$  sao cho  $6^x - 2^x = 32$

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Nguyễn Du năm học 2007-2008)

**Lời giải**

$$\text{Ta có } 32 + 2^x = 6^x \Leftrightarrow 32 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$$

$$+ \text{ Với } x = 1, \text{ ta có: } 32 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{17}{3} \neq 1$$

$\Rightarrow x = 1$  không thỏa mãn;

$$+ \text{ Với } x = 2, \text{ ta có: } 32 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

$\Rightarrow x = 2$  thỏa mãn;

$$+ \text{ Với } x > 2, \text{ mà các cơ số } \frac{1}{6} < \frac{1}{3} < 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{6}\right)^x < \left(\frac{1}{6}\right)^2 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 32 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x < 32 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow 32 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x < 32 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 < 1$$

$\Rightarrow x > 2$  không thỏa mãn;

Vậy  $x = 2$  là giá trị cần tìm.

**Bài 9:** Tìm các số nguyên dương  $x$  sao cho  $10^{2x} - 8^{2x} = 6^{2x}$

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Nam Trực năm học 2005-2006)

**Lời giải**

$$\text{Ta có } 10^{2x} - 8^{2x} = 6^{2x} \Leftrightarrow 6^{2x} + 8^{2x} = 10^{2x} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} + \left(\frac{4}{5}\right)^{2x} = 1$$

$$+ \text{ Với } x = 1, \text{ ta có: } \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

$\Rightarrow x = 1$  thỏa mãn;

+ Với  $x > 1$ , mà các cơ số  $\frac{3}{5} < \frac{4}{5} < 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} < \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ \left(\frac{4}{5}\right)^{2x} < \left(\frac{4}{5}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} + \left(\frac{4}{5}\right)^{2x} < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 < 1$$

$\Rightarrow x > 1$  không thỏa mãn;

Vậy  $x = 1$  là giá trị cần tìm.

**Bài 10:** Tìm các số nguyên  $x, y, z$  sao cho:  $(1-x)^2 + (3-y)^2 + (y^2 - x - z)^2 = 0$

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Sóc Sơn năm học 2014-2015)

**Lời giải**

Với mọi số nguyên  $x, y, z$  ta luôn có: 
$$\begin{cases} (1-x)^2 \geq 0 \\ (3-y)^2 \geq 0 \\ (y^2 - x - z)^2 \geq 0 \end{cases}$$

Ta có:  $(1-x)^2 + (3-y)^2 + (y^2 - x - z)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)^2 = 0 \\ (3-y)^2 = 0 \\ (y^2 - x - z)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = 0 \\ 3-y = 0 \\ y^2 - x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 8 \end{cases}$$

**Bài 11:** Tìm số nguyên dương  $x$  sao cho  $2^x = 52 - 4x$

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Quang Trung năm học 2011-2012)

**Lời giải**

Ta có:

+ Nếu  $x = 5$  thì  $2^5 = 52 - 4 \cdot 5$  (thỏa mãn)

+ Nếu  $x > 5$  thì 
$$\begin{cases} 2^x > 2^5 \\ 52 - 4x < 52 - 4 \cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x > 32 \\ 52 - 4x < 32 \end{cases} \text{ (loại)}$$

+ Nếu  $0 < x < 5$  thì 
$$\begin{cases} 2^x < 2^5 \\ 52 - 4x > 52 - 4 \cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x < 32 \\ 52 - 4x > 32 \end{cases} \text{ (loại)}$$

Vậy  $x = 5$  là giá trị cần tìm.

**Bài 12:** Tìm các số nguyên dương  $a$  và  $b$  sao cho:  $2^a - 2^b = 16$

(Trích đề thi HSG lớp 6)

**Lời giải**

Ta có:  $2^a - 2^b = 16 = 2^4 \Rightarrow 2^b(2^{a-b} - 1) = 2^4$  (1)

Để thấy  $a \neq b$ , ta xét 2 trường hợp:

+ TH1:  $a - b = 1$ , từ (1) ta có:  $2^b(2^1 - 1) = 2^4 \Leftrightarrow 2^b = 2^4 \Leftrightarrow b = 4$

Do  $a - b = 4 \Rightarrow a = 5$

$\Rightarrow b = 4; a = 5$

+ TH2:  $a - b \geq 2 \Rightarrow 2^{a-b} - 1$  là một số lẻ lớn hơn 1 nên vế trái của (1) chứa thừa số nguyên tố lẻ khi phân tích ra thừa số nguyên tố. Còn vế phải của (1) chỉ chứa thừa số nguyên tố 2  $\Rightarrow$  mâu thuẫn.

Vậy  $b = 4; a = 5$ .

☞ HẾT ☞

# CHUYÊN ĐỀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

## CHỦ ĐỀ 6: TÌM CHỮ SỐ TẬN CÙNG

### PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1. Tìm 1 chữ số tận cùng

##### Tính chất 1:

- Các số có chữ số tận cùng là 0, 1, 5, 6 khi nâng lên lũy thừa bậc bất kì thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.
- Các số có chữ số tận cùng là 4, 9 khi nâng lên lũy thừa bậc lẻ thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.
- Các số có chữ số tận cùng là 3, 7, 9 khi nâng lên lũy thừa bậc  $4n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) thì chữ số tận cùng là 1.
- Các số có chữ số tận cùng là 2, 4, 8 khi nâng lên lũy thừa bậc  $4n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) thì chữ số tận cùng là 6.

**Chú ý:** Muốn tìm chữ số tận cùng của số tự nhiên  $x = a^m$ , trước hết ta xác định chữ số tận cùng của  $a$ :

- Nếu chữ số tận cùng của  $a$  là 0, 1, 5, 6 thì  $x$  cũng có chữ số tận cùng là 0, 1, 5, 6.

- Nếu chữ số tận cùng của  $a$  là 3, 7, 9:

Phân tích:  $a^m = a^{4n+r} = a^{4n} \cdot a^r$  với  $r = 0, 1, 2, 3$

Từ tính chất 1c  $\Rightarrow$  chữ số tận cùng của  $x$  chính là chữ số tận cùng của  $a^r$ .

- Nếu chữ số tận cùng của  $a$  là 2, 4, 8: cũng như trường hợp trên

Từ tính chất 1d  $\Rightarrow$  chữ số tận cùng của  $x$  chính là chữ số tận cùng của  $6a^r$ .

##### Tính chất 2:

Một số tự nhiên bất kì, khi nâng lên lũy thừa bậc  $4n+1$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

Chữ số tận cùng của một tổng các lũy thừa được xác định bằng cách tính tổng các chữ số tận cùng của từng lũy thừa trong tổng.

##### Tính chất 3:

a) Số có chữ số tận cùng là 3 khi nâng lên lũy thừa bậc  $4n+3$  sẽ có chữ số tận cùng là 7; số có chữ số tận cùng là 7 khi nâng lên lũy thừa bậc  $4n+3$  sẽ có chữ số tận cùng là 3.

b) Số có chữ số tận cùng là 2 khi nâng lên lũy thừa bậc  $4n+3$  sẽ có chữ số tận cùng là 8; số có chữ số tận cùng là 8 khi nâng lên lũy thừa bậc  $4n+3$  sẽ có chữ số tận cùng là 2.

c) Các số có chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9 khi nâng lên lũy thừa bậc  $4n+3$  sẽ không thay đổi chữ số tận cùng.

##### Tính chất 4:

Nếu  $a \in \mathbb{N}$  và  $(a, 5) = 1$  thì  $a^{100} - 1$  chia hết cho 125.

### Chứng minh:

Do  $a^{20} - 1$  chia hết cho 25 nên  $a^{20}, a^{40}, a^{60}, a^{80}$  khi chia cho 25 có cùng số dư là 1

$\Rightarrow a^{20} + a^{40} + a^{60} + a^{80} + 1$  chia hết cho 5.

Vậy  $a^{100} - 1 = (a^{20} - 1)(a^{80} + a^{60} + a^{40} + a^{20} + 1)$  chia hết cho 125.

**\* Phương pháp dùng cấu tạo số để tìm chữ số tận cùng của số  $A = n^k$  với  $n, k \in \mathbb{N}$ .**

- Giả sử  $A = 10q + r$ . Khi đó,  $A^k = (10q + r)^k = 10^t p + r^k$  với  $r \in \mathbb{N}; 0 \leq r \leq 9$

Suy ra, chữ số cuối cùng của  $A$  chính là chữ số cuối cùng của số  $r^k$ .

- Nếu  $A = 100a + \overline{bc} = \overline{abc}$  thì  $\overline{bc}$  là hai chữ số cuối cùng của  $A$ .

- Nếu  $A = 1000a + \overline{bcd} = \overline{abcd}$  thì  $\overline{bcd}$  là ba chữ số cuối cùng của  $A$ .

- Nếu  $A = 10^m \cdot a_m + \overline{a_{m-1} \dots a_0} = \overline{a_m \dots a_1 a_0}$  thì  $\overline{a_{m-1} \dots a_0}$  là  $m$  chữ số cuối cùng của  $A$ .

### 2. Tìm hai chữ số tận cùng

**Việc tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên  $x$  chính là việc tìm số dư của phép chia  $x$  cho 100.**

Phương pháp tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên  $x = a^n$ :

Trước hết, ta có nhận xét sau:

$$2^{20} \equiv 76 \pmod{100}$$

$$3^{20} \equiv 01 \pmod{100}$$

$$6^5 \equiv 76 \pmod{100}$$

$$7^4 \equiv 01 \pmod{100}$$

Mà:  $76^n \equiv 76 \pmod{100}$  với  $n \geq 1$ ,

$5^n \equiv 25 \pmod{100}$  với  $n \geq 2$ .

Suy ra kết quả sau với  $k \in \mathbb{N}^*$ :

$$a^{20k} \equiv 00 \pmod{100} \text{ nếu } a \equiv 0 \pmod{10},$$

$$a^{20k} \equiv 01 \pmod{100} \text{ nếu } a \equiv 1; 3; 7; 9 \pmod{10},$$

$$a^{20k} \equiv 25 \pmod{100} \text{ nếu } a \equiv 5 \pmod{10},$$

$$a^{20k} \equiv 76 \pmod{100} \text{ nếu } a \equiv 2; 4; 6; 8 \pmod{10}.$$

Vậy để tìm hai chữ số tận cùng của  $a^n$  ta lấy số mũ  $n$  chia cho 20.

### Một số trường hợp cụ thể về 2 chữ số tận cùng

- Các số có tận cùng bằng 01; 25; 76 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 01; 25; 76
- Các số  $3^{20}$  (hoặc  $81^5$ );  $7^4$ ;  $51^2$ ;  $99^2$  có tận cùng bằng 01.
- Các số  $2^{20}$ ;  $6^5$ ;  $18^4$ ;  $24^2$ ;  $68^4$ ;  $74^2$  có tận cùng bằng 76.
- Số  $26^n$  ( $n > 1$ ) có tận cùng bằng 76.
- Các số có chữ số tận cùng là 01; 25; 76 khi nâng lên lũy thừa bậc bất kì khác 0 thì hai chữ số tận cùng vẫn không thay đổi. (1)
- Các số  $3^{20}$ ;  $7^4$ ;  $9^{10}$ ;  $51^2$ ;  $81^5$ ;  $99^2$  có chữ số tận cùng là 01. (2)
- Các số  $4^{10}$ ;  $6^5$ ;  $18^4$ ;  $24^2$ ;  $68^4$ ;  $74^2$  có chữ số tận cùng là 76. (3)
- Số  $26^n$  ( $n > 1$ ) có chữ số tận cùng là 76. (4)

Như vậy, muốn tìm chữ số tận cùng của số tự nhiên  $x = a^m$ , trước hết ta xác định chữ số tận cùng của a.

#### CHÚ Ý:

- $4^{10}$  có 2 chữ số tận cùng là 76.
- $5^2$  có 2 chữ số tận cùng là 25.
- $8^{20}$  có 2 chữ số tận cùng là 76.
- $9^{10}$  có 2 chữ số tận cùng là 01.

### 3. Tìm ba chữ số tận cùng trở lên

**Việc tìm ba chữ số tận cùng của số tự nhiên  $x$  chính là việc tìm số dư của phép chia  $x$  cho 1000.**

Giả sử  $n = 100k + r$  với  $0 \leq r < 100$ , khi đó:  $a^n = a^{100k+r} = (a^{100})^k \cdot a^r$ .

Giả sử:  $a \equiv x \pmod{10}$ ,  $x \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

Ta có:  $a^{100} = (10k + x)^{100} \equiv x^{100} \pmod{1000}$

Vậy 3 chữ số tận cùng của  $a^{100}$  cũng chính là 3 chữ số tận cùng của  $x^{100}$ .

Dùng quy nạp với mọi  $n \geq 1$ , ta có:

$$625^n \equiv 625 \pmod{1000},$$

$$376^n \equiv 376 \pmod{1000}.$$

- Nếu  $x = 0$  thì  $x^{100} \equiv 000 \pmod{1000}$

- Nếu  $x = 5$  thì  $x^4 = 5^4 = 625 \Rightarrow x^{100} = (5^4)^{25} \equiv 625 \pmod{10^3}$

- Nếu  $x = 1; 3; 7; 9$  ta có tương ứng:

$$x^4 = 1; 81; 2401; 6561 \equiv 1 \pmod{40} \Rightarrow x^{100} = (40k + 1)^{25} \equiv 1 \pmod{10^3}$$

- Nếu  $x = 2; 4; 6; 8$  thì  $x^{100} : 2^{100} : 8$ .

Ta có:  $(x, 125) = 1$  nên  $x^{100} \equiv 1 \pmod{125}$  (Định lí Euler).

Giả sử 3 chữ số tận cùng của  $x^{100}$  là  $\overline{abc}$  ta có:

$$x^{100} = 1000k + \overline{abc} \Rightarrow \overline{abc} : 8 \text{ và } \overline{abc} \equiv 1 \pmod{125}$$

Trong các số 1; 126; 376; 501; 626; 751; 876 (các số có 3 chữ số chia cho 125 dư 1) chỉ có duy nhất một số chia hết cho 8 là 376. Vậy  $x^{100} \equiv 376 \pmod{1000}$ .

Do đó ta có kết quả sau:

$$a^{100k} \equiv 000 \pmod{10^3} \text{ nếu } a \equiv 0 \pmod{10}$$

$$a^{100k} \equiv 001 \pmod{10^3} \text{ nếu } a \equiv 1; 3; 7; 9 \pmod{10}$$

$$a^{100k} \equiv 625 \pmod{10^3} \text{ nếu } a \equiv 5 \pmod{10}$$

$$a^{100k} \equiv 376 \pmod{10^3} \text{ nếu } a \equiv 2; 4; 6; 8 \pmod{10}$$

Vậy để tìm ba chữ số tận cùng của  $a^n$  ta tìm 2 chữ số tận cùng của số mũ  $n$ .

### Một số trường hợp cụ thể về 3 chữ số tận cùng

- Các số có tận cùng bằng 001; 376; 625 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 001; 376; 625.

- Các số có tận cùng bằng 0625 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 0625.

## PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

### Dạng 1: Tìm 1 chữ số tận cùng

Ví dụ 1.1: Tìm chữ số tận cùng của  $187^{324}$

Lời giải:

Ta thấy các số có tận cùng bằng 7 nâng lên lũy thừa bậc 4 thì được số có tận cùng bằng 1. Các số có tận cùng bằng 1 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 1.

Do đó:

$$187^{324} = (187^4)^{81} = (\overline{\dots 1})^{81} = (\overline{\dots 1})$$

Vậy chữ số tận cùng của  $187^{324}$  là 1

Ví dụ 1.2: Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a)  $156^7$

b)  $1061^9$

c)  $156^7 + 1061^9$

d)  $156^7 \cdot 1061^9$

Phân tích:

- Ta biết rằng các số có chữ số tận cùng là 0,1,5,6 khi nâng lên lũy thừa bậc bất kì thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

- Để tìm chữ số tận cùng của mỗi lũy thừa trên ta chỉ cần tìm chữ số tận cùng của hàng đơn vị.

### Lời giải

a)  $156^7$  có chữ số tận cùng là 6

b)  $1061^9$  có chữ số tận cùng là 1

c) Theo câu a) và b)  $\Rightarrow$  Chữ số tận cùng của lũy thừa :  $156^7 + 1061^9$  là 7

d) Theo kết quả câu a) và b)  $\Rightarrow$  Chữ số tận cùng của lũy thừa:  $156^7 \cdot 1061^9$  là 6.

**Ví dụ 1.3:** Tìm chữ số tận cùng của  $5^{2020}$

### Phân tích:

Để tìm được chữ số tận cùng của số trên ta phải đưa về số có tận cùng là 5.

### Lời giải

Ta thấy  $5^4 = 625$ , số tận cùng bằng 5 nâng lên bậc lũy thừa nào cũng có chữ số tận cùng bằng 5 nên ta phân tích  $5^{2020} = 5^{4 \cdot 505} = 625^{505}$ .

Vậy số  $5^{2020}$  có chữ số tận cùng bằng 5.

**Ví dụ 1.4:** Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a)  $7^{2006}$

b)  $87^{32}$

c)  $9^{1991}$

d)  $23^{35}$

e)  $74^{30}$

f)  $7^{4n} - 1$

### Lời giải

a)  $7^{2006} = 7^{2004} \cdot 7^2 = 7^{4 \cdot 501} \cdot 7^2 = \overline{\dots 1.49} = \overline{\dots 9}$

Vậy chữ số tận cùng của  $7^{2006}$  là 9.

b)  $87^{32} = 87^{4 \cdot 8} = \overline{\dots 1}$

Vậy chữ số tận cùng của  $87^{32}$  là 1.

c)  $9^{1991} = 9^{1988} \cdot 9^3 = 9^{4 \cdot 497} \cdot 9^3 = \overline{\dots 1} \cdot \overline{\dots 9} = \overline{\dots 9}$

Vậy chữ số tận cùng của  $9^{1991}$  là 9.

d)  $23^{35} = 23^{32} \cdot 23^3 = 23^{4 \cdot 8} \cdot 23^3 = \overline{\dots 1} \cdot \overline{\dots 7} = \overline{\dots 7}$

Vậy chữ số tận cùng của  $23^{35}$  là 7.

e)  $74^{30} = (74^2)^{15} = (\overline{\dots 6})^{15} = \overline{\dots 6}$

Vậy chữ số tận cùng của  $74^{30}$  là: 6.

f)  $7^{4n} - 1 = \overline{\dots 1} - 1 = \overline{\dots 0}$

Vậy chữ số tận cùng của  $7^{4n} - 1$  là 0.

**Ví dụ 1.5:** Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a)  $7^{35} - 4^{31}$

b)  $2^{4n+1} + 2$

c)  $2^{1930} \cdot 9^{1945}$

### Lời giải

a) Ta có:  $7^{35} = 7^{32} \cdot 7^3 = 7^{4 \cdot 8} \cdot 7^3 = \overline{\dots 1.343} = \overline{\dots 3}$

Vậy chữ số tận cùng của  $7^{35} - 4^{31}$  là 3.

b) Ta có:  $2^{4n+1} = 2^{4n} \cdot 2 = (2^4)^n \cdot 2 = 16^n \cdot 2 = \overline{\dots 2}$

$\Rightarrow 2^{4n+1} + 2 = \overline{\dots 2} + 2 = \overline{\dots 4}$

Vậy chữ số tận cùng của  $2^{4n+1} + 2$  là 4.

c) Ta có:  $2^{1930} = 2^{1928} \cdot 2^2 = 2^{4 \cdot 482} \cdot 4 = \overline{\dots 6.4} = \overline{\dots 4}$

$9^{1945} = 9^{1944} \cdot 9^1 = 9^{4 \cdot 486} \cdot 9 = \overline{\dots 1.9} = \overline{\dots 9}$

$\Rightarrow 2^{1930} \cdot 9^{1945} = \overline{\dots 4} \cdot \overline{\dots 9} = \overline{\dots 6}$

Vậy chữ số tận cùng của  $2^{1930} \cdot 9^{1945}$  là 6.

**Ví dụ 1.6:** Tìm chữ số tận cùng của các phép toán sau:

a)  $11^8 + 12^8 + 13^8 + 14^8 + 15^8 + 16^8$

b)  $11^{123} + 13^{124} + 15^{125}$

c)  $125^{205} - 237^{15}$

**Lời giải**

a) Ta có:

-  $1^8$  có chữ số tận cùng là 1.

-  $2^8$  có chữ số tận cùng là 6.

-  $3^8$  có chữ số tận cùng là 1.

-  $4^8$  có chữ số tận cùng là 6.

-  $5^8$  có chữ số tận cùng là 5.

-  $6^8$  có chữ số tận cùng là 6.

Tổng các chữ số này bằng:  $1 + 6 + 1 + 6 + 5 + 6 = 25$ .

Vậy  $11^8 + 12^8 + 13^8 + 14^8 + 15^8 + 16^8$  có chữ số tận cùng là 5.

b) Ta có:

-  $1^{123}$  có chữ số tận cùng là 1.

-  $3^{124}$  có chữ số tận cùng là 1.

-  $5^{125}$  có chữ số tận cùng là 5.

Tổng các chữ số này bằng:  $1 + 1 + 5 = 7$ .

Vậy  $11^{123} + 13^{124} + 15^{125}$  có chữ số tận cùng là 7.

c) Ta có:

-  $5^{205}$  có chữ số tận cùng là 5.

-  $7^{15}$  có chữ số tận cùng là 3.

Tổng các chữ số này bằng:  $5 - 3 = 2$ .

Vậy  $125^{205} - 237^{15}$  có chữ số tận cùng là 2.

**Ví dụ 1.7:** Tìm chữ số tận cùng của các tổng sau:

$$S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 2004^{8009}.$$

**Phân tích:**

Trong dạng bài này ta phải tìm được quy luật của tổng, quy luật ở đây chính là số mũ của các số hạng trong S, các số mũ này đều chia 4 dư 1. Mà ta biết các số khi nâng lên lũy thừa dạng  $4n + 1$  sẽ có tận cùng không đổi.

**Lời giải:**

Nhận xét: Mọi lũy thừa trong S đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 1 (các lũy thừa đều có dạng  $n^{4(n-2)+1}$ ,  $n$  thuộc  $\{2; 3; 4; \dots; 2004\}$ )

Theo tính chất, suy ra mọi lũy thừa trong S và các cơ số tương ứng đều có chữ số tận cùng giống nhau, bằng chữ số tận cùng của tổng:

$$(2 + 3 + \dots + 9) + 199 \cdot (1 + 2 + \dots + 9) + 1 + 2 + 3 + 4 = 200(1 + 2 + \dots + 9) + 9 = 9009.$$

Vậy chữ số tận cùng của tổng S là 9.

**Tổng quát hóa:**

Tìm chữ số tận cùng của tổng sau:  $S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + n^{4(n-2)+1}$

**Ví dụ 1.8:** Tìm chữ số tận cùng của tổng  $T = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + \dots + 2004^{8011}$ .

**Lời giải:**

Nhận xét: Mọi lũy thừa trong T đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 3 (các lũy thừa đều có dạng  $n^{4(n-2)+3}$ ,  $n$  thuộc  $\{2; 3; 4; \dots; 2004\}$ )

Theo quy tắc 3 thì  $2^3$  có chữ số tận cùng là 8;  $3^7$  có chữ số tận cùng là 7;  $4^{11}$  có chữ số tận cùng là 4;

Như vậy, tổng T có chữ số tận cùng bằng chữ số tận cùng của tổng:

$$(8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 199 \cdot (1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 1 + 8 + 7 + 4 \\ = 200 \cdot (1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 8 + 7 + 4 = 9019$$

Vậy chữ số tận cùng của tổng T là 9

**Tương tự hóa:**

Tìm chữ số tận cùng của  $S = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + \dots + n^{4(n-2)+3}$

**Dạng 2: Tìm hai chữ số tận cùng**

**Ví dụ 2.1:** Tìm hai chữ số tận cùng của các số:

a)  $2^{2003}$

b)  $7^{99}$

**Lời giải:**

a) Do  $2^{2003}$  là số chẵn, ta tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho  $2^n - 1 \vdots 25$ .

Ta có  $2^{10} = 1024 \Rightarrow 2^{10} + 1 = 1025 : 25 \Rightarrow 2^{20} - 1 = (2^{10} + 1)(2^{10} - 1) : 25 \Rightarrow 2^3 (2^{20} - 1) : 100$ .

Mặt khác:

$$2^{2003} = 2^3 (2^{2000} - 1) + 2^3 = 2^3 \left( (2^{20})^{100} - 1 \right) + 2^3 = 100k + 8 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Vậy hai chữ số tận cùng của  $2^{2003}$  là 08.

b) Do  $7^{99}$  là số lẻ, ta tìm số tự nhiên  $n$  bé nhất sao cho  $7^n - 1 : 100$ .

$$\text{Ta có } 7^4 = 2401 \Rightarrow 74 - 1 : 100.$$

$$\text{Mặt khác : } 9^9 - 1 \not\equiv 4 \Rightarrow 9^9 = 4k + 1 \quad (k \in \mathbb{N})$$

Vậy  $7^{99} = 7^{4k+1} = 7(7^{4k} - 1) + 7 = 100q + 7 \quad (q \in \mathbb{N})$  tận cùng bởi hai chữ số 07.

**Ví dụ 2.2:** Tìm hai chữ số tận cùng của  $7^{1991}$

**Lời giải**

Ta thấy:  $7^4 = 2401$ , số có tận cùng bằng 01 nâng lên lũy thừa nào cũng tận cùng bằng 01.

$$\text{Do đó: } 7^{1991} = 7^{1988} \cdot 7^3 = (7^4)^{497} \cdot 343 = (\overline{\dots 01})^{497} \cdot 343 = \overline{\dots 01} \cdot 343 = \overline{\dots 43}.$$

Vậy  $7^{1991}$  có hai chữ số tận cùng là 43.

**Ví dụ 2.3:** Tìm hai số tận cùng của  $2^{100}$

**Lời giải**

Chú ý rằng:  $2^{10} = 1024$  bình phương của số có tận cùng bằng 24 thì tận cùng bằng 76, số có tận cùng bằng 76 thì nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 76.

$$\text{Do đó } 2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10} = (1024^2)^5 = (\overline{\dots 76})^5 = \overline{\dots 76}$$

Vậy hai chữ số tận cùng của  $2^{100}$  là 76.

**Ví dụ 2.4:** Tìm hai chữ số tận cùng của:

a)  $51^{51}$ ;

b)  $99^{99^{99}}$ ;

c)  $6^{666}$ ;

d)  $14^{101} \cdot 16^{101}$

**Hướng dẫn:**

$$\text{a) } 51^{51} = (51^2)^{25} \cdot 51 = (\overline{\dots 01})^{25} \cdot 51 = \overline{\dots 51}.$$

$$\text{b) } 99^{99^{99}} = 99^{2k+1} = (99^2)^k \cdot 99 = (\overline{\dots 01})^k \cdot 99 = (\overline{\dots 99}).$$

$$\text{c) } 6^{666} = (6^5)^{133} \cdot 6 = (\overline{\dots 76}) \cdot 6 = \overline{\dots 56}.$$

$$\text{d) } 14^{101} \cdot 16^{101} = (14 \cdot 16)^{101} = 224^{101} = (224^2)^{50} \cdot 224 = (\overline{\dots 76})^{50} \cdot 224$$

$$= (\overline{\dots 76}).\overline{224} = \overline{\dots 24}.$$

**Ví dụ 2.5:** Tìm 2 chữ số tận cùng của  $1976^{56} \cdot 2015^{77}$

**Lời giải**

Ta thấy:

Chữ số tận cùng của  $1976^{56}$  cũng là chữ số tận cùng của  $76^{56}$  mà  $76^{56} = \dots 76$

Chữ số tận cùng của  $2015^{77}$  cũng là chữ số tận cùng của  $15^{77}$

$$\text{mà } 15^{77} = (3.5)^{77} = 3^{77} \cdot 5^{77} = 3^{20 \cdot 3 + 17} \cdot 5^{77} = 3^{17} (\overline{\dots 01}) (\overline{\dots 25}) = (\overline{\dots 63}) (\overline{\dots 25}) = \overline{\dots 75}.$$

$$\text{Suy ra: } 1976^{56} \cdot 2015^{77} = (\overline{\dots 76}) (\overline{\dots 75}) = \overline{\dots 00}.$$

Vậy  $1976^{56} \cdot 2015^{77}$  có 2 chữ số tận cùng là 00.

**Ví dụ 2.6:** Tìm hai chữ số tận cùng của số  $C = 2^{999}$

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } 2^{10} + 1 = 1024 + 1 = 1025 : 25 \text{ suy ra } 2^{20} - 1 = (2^{10} + 1)(2^{10} - 1) : 25$$

$$\text{Ta lại có } 2^{1000} - 1 = (2^{20})^{50} - 1 : 2^{20} - 1 \text{ suy ra } 2^{1000} - 1 : 25$$

Do đó  $2^{1000}$  chữ số tận cùng là 26; 51; 76 nhưng  $2^{1000} : 4$

$$\text{Suy ra } 2^{1000} \text{ tận cùng là } 76 \Rightarrow 2^{999} \text{ tận cùng là } 38 \text{ hoặc } 88 \text{ vì } 2^{999} : 4$$

Vậy  $2^{999}$  tận cùng là 88

Vậy  $C = 2^{999}$  có hai chữ số tận cùng là 88.

**Ví dụ 2.7:** Tìm 2 chữ số tận cùng của  $51^{2020}$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } 2020 = 2 \cdot 1010 \text{ nên } 51^{2020} = (51^2)^{1010} = 2601^{1010}.$$

Khi đó theo quy tắc (1) chữ số tận cùng của  $51^{2020}$  là 01.

**Ví dụ 2.8:** Tìm 2 chữ số tận cùng của **a)**  $7^{2015}$  **b)**  $57^{66}$

**Lời giải**

$$\text{a) Ta có: } 7^4 = 2401 \text{ nên } 7^{2015} = 7^{4 \cdot 503 + 3} = (7^4)^{503} \cdot 7^3 = 2401^{503} \cdot 343 = (\dots 01) \cdot 343 = \dots 43$$

Chữ số tận cùng của  $7^{2015}$  là 43.

$$\text{b) Ta có } 57^{66} = (57^4)^{16} \cdot 57^2 = (\dots 01)^{16} \cdot 3249 = \dots 49$$

Chữ số tận cùng của  $57^{66}$  là 49.

### **Dạng 3: Tìm ba chữ số tận cùng**

**Ví dụ 3.1:** Tìm ba chữ số tận cùng của  $5^{2008}$

**Lời giải:**

$$5^{2008} = 5^{4 \cdot 502} = (5^4)^{502}$$

$5^4$  có tận cùng là 625

Suy ra  $(5^4)^{502}$  có tận cùng là 625

Vậy  $5^{2008}$  có 3 chữ số tận cùng là 625.

**Ví dụ 3.2:** Tìm ba chữ số tận cùng của  $2^{100}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } 2^{10} = 1024 \equiv 024 \pmod{1000}$$

$$2^{50} = (2^{10})^5 \equiv 24^5 \equiv 624 \pmod{1000}$$

$$2^{100} = (2^{50})^2 \equiv 624^2 \equiv 376 \pmod{1000}$$

Vậy ba chữ số tận cùng của  $2^{100}$  là 376.

**Ví dụ 3.3:** Tìm ba chữ số tận cùng của  $123^{101}$

**Phân tích:**

Nhận thấy rằng  $(123, 5) = 1$  nên ta sẽ áp dụng tính chất 4, khi đó chia hết cho 125.

**Lời giải:**

+ Vì  $(123, 5) = 1$  nên áp dụng tính chất ta có  $123^{101} - 1$  chia hết cho 125. (1)

+ Ta lại có chia hết cho 8 (2)

Vì  $(8, 125) = 1$  và kết hợp (1), (2) ta có chia hết cho 1000

Khi đó

Vậy ba chữ số tận cùng của là 123.

**Ví dụ 3.4:** Tìm ba chữ số tận cùng của  $2^{9^{2003}}$

**Lời giải**

- Tìm 2 chữ số tận cùng của  $9^{2003}$

$$\text{Ta có } 9^{2003} = 9^3 \cdot 9^{2000} = 9^3 \cdot (3^{20})^{50} \equiv 29 \pmod{100}$$

$$\text{- Khi đó ta có } 2^{9^{2003}} = 2^{100k+29} = 2^{29} \cdot 2^{100k} \equiv 912 \cdot 376 \equiv 912 \pmod{1000}$$

Vậy 3 chữ số tận cùng là 912.

**Ví dụ 3.5:** Tìm ba chữ số tận cùng của  $3^{7^{213}}$

**Lời giải**

Ta có  $7^{213} \equiv 7^{26 \cdot 8 + 5} \equiv (7^8)^{26} \cdot 7^5 \equiv 1^{26} \cdot 7^5 \equiv 7^5 \equiv 7 \pmod{100}$

Khi đó  $3^{7^{213}} = 3^{100k+7} = 3^{100k} \cdot 3^7 \equiv 1 \cdot 3^7 \equiv 187 \pmod{1000}$

Vậy ba chữ số tận cùng của  $3^{7^{213}}$  là 187.

**Ví dụ 3.6:** Tìm ba chữ số tận cùng của  $5^{1992}$

**Lời giải**

$$5^{1992} = (5^4)^{498} = 625^{498} = 0625^{498} = \overline{\dots 0625}$$

Vậy bốn chữ số tận cùng của  $5^{1992}$  là 0625

**Ví dụ 3.7:** Tìm ba chữ số tận cùng của số  $T = 5^{946}$

**Lời giải**

Ta có  $5^3$  có ba chữ số tận cùng là 125

$$\text{Suy ra } T = 5^{946} = (5^3)^{315} \cdot 5 = \overline{(n125)^{315}} \cdot 5 = \overline{m125} \cdot 5 = \overline{t625}$$

(Với  $n, m, t \in \mathbb{N}$ )

Vậy  $T = 5^{946}$  có ba chữ số tận cùng là 125.

**Ví dụ 3.8:** Tìm ba chữ số tận cùng của số:  $P = 5^{1994}$

**Lời giải**

Ta có:

$5^4 = 0625$ tận cùng là 0625 ;	$5^5$ tận cùng là 3125 ;	$5^6$ tận cùng là 5625
$5^7$ tận cùng là 8125 ;	$5^8$ tận cùng là 0625 ;	$5^9$ tận cùng là 3125 ;
$5^{10}$ tận cùng là 5625 ;	$5^{11}$ tận cùng là 8125 ;	$5^{12}$ tận cùng là 0625

Chu kỳ lặp là 4.

Suy ra:

$5^{4m}$ tận cùng là 0625 ;	$5^{4m+1}$ tận cùng là 3125
$5^{4m+2}$ tận cùng là 5625 ;	$5^{4m+3}$ tận cùng là 8125

Mà 1994 có dạng  $4m + 2$ , do đó  $M = 5^{1994}$  có 4 chữ số tận cùng là 5625.

**Ví dụ 3.9:** Tìm ba chữ số tận cùng của số:  $R = 123^{101}$

**Lời giải**

$$\text{Do } (123, 5) = 1 \Rightarrow 123^{100} - 1 \text{ chia hết cho } 125 \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác: } 123^{100} - 1 = (123^{25} - 1)(123^{25} + 1)(123^{50} + 1) \Rightarrow 123^{100} - 1 \text{ chia hết cho } 8 \quad (2).$$

Vì  $(8, 125) = 1$ , từ (1) và (2) suy ra:  $123^{100} - 1$  chỉ hết cho 1000

$$\Rightarrow 123^{101} = 123(123^{100} - 1) + 123 = 1000k + 123(k \cap N).$$

Vậy  $123^{101}$  có ba chữ số tận cùng là 123.

**Ví dụ 3.10:** Tìm ba chữ số tận cùng của  $3^{399 \dots 98}$

**Lời giải**

Do  $(9, 5) = 1 \Rightarrow 9^{100} - 1$  chia hết cho 125 (1).

Ta có  $9^{100} - 1$  chia hết cho 8 (2).

Vì  $(8, 125) = 1$ , từ (1) và (2) suy ra:  $9^{100} - 1$  chia hết cho 1000

$$\Rightarrow 3^{399 \dots 98} = 9^{199 \dots 9} = 9^{100p+99} = 9^{99}(9^{100p} - 1) + 9^{99} = 1000q + 9^{99} (p, q \in \mathbb{N}).$$

Vậy ba chữ số tận cùng của  $3^{399 \dots 98}$  cũng chính là ba chữ số tận cùng của  $9^{99}$ .

Lại vì  $9^{100} - 1$  chia hết cho 1000  $\Rightarrow$  ba chữ số tận cùng của  $9^{100}$  là 001 mà  $9^{99} = 9^{100} : 9$

$\Rightarrow$  ba chữ số tận cùng của  $9^{99}$  là 889 (để kiểm tra chữ số tận cùng của  $9^{99}$  là 9, sau đó dựa vào phép nhân  $??9 \times 9 = \dots 001$  để xác định  $??9 = 889$ ).

Vậy ba chữ số tận cùng của  $3^{399 \dots 98}$  là 889.

**Ví dụ 3.11:** Tìm ba chữ số tận cùng của  $2004^{200}$

**Lời giải**

Do  $(2004, 5) = 1$

$\Rightarrow 2004^{100}$  chia cho 125 dư 1

$\Rightarrow 2004^{200} = (2004^{100})^2$  chia cho 125 dư 1

$\Rightarrow 2004^{200}$  chỉ có thể tận cùng là 126, 251, 376, 501, 626, 751, 876.

Do  $2004^{200}$  chia hết cho 8 nên chỉ có thể tận cùng là 376.

**Ví dụ 3.12:** Tìm ba chữ số tận cùng của tổng  $S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 2004^{8009}$ .

**Lời giải**

**Nhận thấy:** lũy thừa trong S đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 1

(các lũy thừa đều có dạng  $n^{4(k-2)+1}$ , k thuộc  $\{2, 3, \dots, 2004\}$ ).

Mọi lũy thừa trong S đều có chữ số tận cùng là chữ số tận cùng của cơ số tương ứng:

$\Rightarrow$  Chữ số tận cùng của tổng S là chữ số tận cùng của tổng:

$$(2 + 3 + \dots + 9) + 199 \cdot (0 + 1 + 2 + \dots + 9) + 1 + 2 + 3 + 4$$

$$= 200(1 + 2 + \dots + 9) + 9 = 9009.$$

Vậy ba chữ số tận cùng sẽ là 009

#### **Dạng 4: Vận dụng chứng minh chia hết, chia có dư.**

\* **Chú ý:**

**a. Dấu hiệu chia hết cho 2:**

Một số chia hết cho 2 khi và chỉ khi chữ số tận cùng của số đó là số chẵn.

**b. Dấu hiệu chia hết cho 3 (hoặc 9):**

Một số chia hết cho 3 (hoặc 9) khi và chỉ khi tổng các chữ số của số đó chia hết cho 3 (hoặc 9).

**Chú ý:** Một số chia hết cho 3 (hoặc 9) dư bao nhiêu thì tổng các chữ số của nó chia cho 3 (hoặc 9) cũng dư bấy nhiêu và ngược lại.

**c. Dấu hiệu chia hết cho 5:**

Một số chia hết cho 5 khi và chỉ khi chữ số của số đó có tận cùng bằng 0 hoặc bằng 5.

**d. Dấu hiệu chia hết cho 4 (hoặc 25):**

Một số chia hết cho 4 (hoặc 25) khi và chỉ khi hai chữ số tận cùng của số đó chia hết cho 4 (hoặc 25).

**e. Dấu hiệu chia hết cho 8 (hoặc 125):**

Một số chia hết cho 8 (hoặc 125) khi và chỉ khi ba chữ số tận cùng của số đó chia hết cho 8 (hoặc 125).

**f. Dấu hiệu chia hết cho 11:**

Một số chia hết cho 11 khi và chỉ khi hiệu giữa tổng các chữ số hàng lẻ và tổng các chữ số hàng chẵn (từ trái sang phải) chia hết cho 11.

**Ví dụ 4.1:** Cho  $999993^{1999} - 555557^{1997}$ . Chứng minh rằng A chia hết cho 5.

**Lời giải:**

Để chứng minh  $A:5$ , ta xét chữ số tận cùng của A bằng việc xét chữ số tận cùng của từng số hạng.

$$\text{Ta có: } 3^{1999} = (3^4)^{499} = 81^{499} \cdot 27$$

Suy ra:  $3^{1999}$  có chữ số tận cùng là 7.

$$7^{1997} = (7^4)^{499} \cdot 7 = 2041^{499} \cdot 7$$

Suy ra:  $7^{1997}$  có chữ số tận cùng là 7.

Vậy A có chữ số tận cùng bằng 0.

Do đó:  $A:5$ .

**Ví dụ 4.2:** Cho  $n \in \mathbb{N}$ , chứng minh rằng  $n^2 + n + 1$  không chia hết cho 4 và không chia hết cho 5.

**Lời giải:**

$$\text{Ta có: } n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$$

$n(n+1)$  là tích của hai số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2. Suy ra  $n(n+1) + 1$  là một số lẻ nên không chia hết cho 4.

$n(n+1)$  là tích của hai số tự nhiên liên tiếp nên không có tận cùng là 4 hoặc 9 nên  $n(n+1)+1$  không có tận cùng là 5 hoặc 0. Do đó  $n(n+1)+1$  không chia hết cho 5.

**Ví dụ 4.3:** Chứng tỏ rằng  $10^{2003} + 8$  chia hết cho 2.

**Lời giải:**

Ta có:  $10^{2003}$  có chữ số tận cùng là 0.

Do đó:  $10^{2003} + 8$  có chữ số tận cùng là 8.

Vậy  $10^{2003} + 8$  chia hết cho 2

**Ví dụ 4.4:** Chứng minh  $2113^{2000} - 2011^{2000}$  chia hết cho cả 2 và 5.

**Lời giải:**

Để  $2113^{2000} - 2011^{2000}$  vừa chia hết cho cả 2 và 5 thì số phải có chữ số tận cùng là 0.

Suy ra: Cần chứng minh số bị trừ và số trừ đều có chữ số tận cùng là 1.

**Chú ý:** Số tự nhiên  $a$  có chữ số tận cùng là 1 thì  $a^n$  cũng có chữ số tận cùng là 1.

Ta có:  $2113^{2000} = (2113^4)^{500} = \overline{\dots 1}^{500}$ . Suy ra:  $2113^{2000}$  có chữ số tận cùng là 1.

$2011^{2000}$  luôn có chữ số tận cùng là 1.

Suy ra:  $2113^{2000} - 2011^{2000}$  có chữ số tận cùng là 0.

Vậy:  $2113^{2000} - 2011^{2000}$  chia hết cho cả 2 và 5.

**Ví dụ 4.5:** Cho 1 số có 4 chữ số:  $\overline{*26*}$ . Điền các chữ số thích hợp vào dấu (\*) để được số có bốn chữ số khác nhau chia hết cho tất cả bốn số: 2; 3; 5; 9.

**Lời giải:**

Số  $\overline{*26*}$  đảm bảo chia hết cho 2 nên số đó là số chẵn.

Số  $\overline{*26*}$  chia hết cho 5 nên số đó phải có chữ số tận cùng là số 0 hoặc 5.

Số  $\overline{*26*}$  vừa chia hết cho 3 và 9 nên số đó phải có tổng các chữ số chia hết cho 9.

Suy ra: Chữ số tận cùng của số  $\overline{*26*}$  là 0.

Do đó ta có số  $\overline{*260} \Rightarrow$ . Chữ số đầu là số 1

Vậy: số đã cho là 1260.

**Ví dụ 4.6:** Chứng tỏ rằng hiệu  $1983^{1983} - 1917^{1917}$  chia hết cho 10.

**Lời giải:**

Ta có:  $1983^{1983} = (1983^4)^{495} \cdot 1983^3$

Số  $1983^4$  có chữ số tận cùng bằng 1

Suy ra  $(1983^4)^{495}$  có tận cùng bằng 1

Số  $1983^3$  có tận cùng bằng 7

Do đó:  $1983^{1983}$  có tận cùng bằng 7

Phân tích tương tự,  $1917^{1917}$  có tận cùng bằng 7

Do đó:  $1983^{1983} - 1917^{1917}$  có tận cùng bằng 0

Vậy:  $1983^{1983} - 1917^{1917}$  chia hết cho 10.

**Ví dụ 4.7:** Chứng tỏ rằng:  $2007^5 + 2014^4 - 2013^{13}$  chia hết cho 10.

**Lời giải:**

Ta có:  $7^5 = 7^4 \cdot 7 = 2401 \cdot 7$  tận cùng bằng chữ số 7 nên số  $2007^5$  cũng tận cùng bằng chữ số 7.

$4^4 = 256$  tận cùng bằng chữ số 6 nên  $2014^4$  cũng tận cùng bằng chữ số 6.

$3^{13} = (3^4)^3 \cdot 3 = 81^3 \cdot 3$  tận cùng bằng chữ số 3 nên số  $2013^{13}$  cũng tận cùng bằng chữ số 3.

Suy ra:  $2007^5 + 2014^4 - 2013^{13}$  tận cùng bằng chữ số 0.

Vậy: số  $2007^5 + 2014^4 - 2013^{13}$  chia hết cho 10.

**Ví dụ 4.8:** Tìm bốn chữ số tận cùng của  $5^{1994}$  khi viết trong hệ thập phân.

**Lời giải:**

**Cách 1:**  $5^4 = 625$

Ta thấy số tận cùng bằng 0625 nâng lên lũy thừa nguyên dương bất kì vẫn tận cùng bằng 0625.

Do đó:  $5^{1994} = 5^{4k+2} = 25(5^4)^k = 25(0625)^k = 25(\overline{...0625}) = \overline{...5625}$

**Cách 2:** Tìm số dư khi chia  $5^{1994}$  cho  $10000 = 2^4 \cdot 5^4$

Nhận xét:  $5^{4k} - 1$  chia hết cho  $5^4 - 1 = (5^2 - 1)(5^2 - 1)$  nên chia hết cho 16.

Ta có:  $5^{1994} = 5^6 (5^{1988} - 1) + 5^6$

Do  $5^6$  chia hết cho  $5^4$  còn  $5^{1988} - 1$  chia hết cho 16 (theo nhận xét trên)

Nên:  $5^6 (5^{1988} - 1)$  chia hết cho 10000

Tính  $5^6 = 15625$

Vậy bốn chữ số tận cùng của  $5^{1994}$  là 5625.

**Ví dụ 4.9:** Chứng minh rằng  $33^{66} + 77^{55} - 2$  chia hết cho 5

**Lời giải:**

Ta chứng minh  $33^{66} + 77^{55} - 2$  có tận cùng là 0 sau đó vận dụng dấu hiệu chia hết cho 5

Thật vậy,  $33^{66}$  có cùng chữ số tận cùng với  $3^3$ , mà  $3^{66} = 9^{33} = 9 \cdot 9^{2 \cdot 16}$  suy ra  $33^{66}$  có tận cùng là 9,  $77^{55}$  có cùng chữ số tận cùng với  $7^3$ , vì  $7^{55} = 7^3 \cdot 7^{4 \cdot 13}$  nên  $77^{55}$  có tận cùng là 3. Do đó  $33^{66}$ ,  $77^{55}$  có chữ số tận cùng lần lượt là 9, 3 suy ra  $33^{66} + 77^{55} - 2$  tận cùng là 0 (đpcm)

**Đạng 5: Vận dụng chữ số tận cùng vào bài toán chính phương.**

\* **Chú ý:**

- Số chính phương chỉ có chữ số tận cùng là: 0;1;4;5;6;9
- Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với lũy thừa chẵn
- Số chính phương thì chia hết cho 4 hoặc chia cho 4 dư 1
- Số chính phương thì chia hết cho 3 hoặc chia cho 3 dư 1
- Số chính phương chia hết cho 1 thì sẽ chia hết cho 4
- Số chính phương chia hết cho 3 thì chia hết cho 9
- Số chính phương chia hết cho 5 thì chia hết cho 25
- Số chính phương chia hết cho 8 thì chia hết cho 16
- Số chính phương tận cùng là 1 hoặc 4 hoặc 9 thì chữ số hàng chục là số chẵn
- Số chính phương tận cùng là 5 thì chữ số hàng chục là 2
- Số chính phương tận cùng là 6 thì chữ số hàng chục là số lẻ.
- Số tự nhiên A không phải là số chính phương nếu:
  - + A có chữ số tận cùng là 2;3;7;8.
  - + A có chữ số tận cùng là 6 mà chữ số hàng chục là chữ số chẵn.
  - + A có chữ số hàng đơn vị khác 6 mà chữ số hàng chục là lẻ.
  - + A có chữ số hàng đơn vị là 5 mà chữ số hàng chục khác 2.
  - + A có hai chữ số tận cùng là lẻ.

**Ví dụ 5.1:** Các số sau có phải là số chính phương không? Vì sao?

a)  $10^{2019} + 8$  ;

b)  $1.2.3.4...2019+7$

**Lời giải:**

a) Ta có:  $10^{2019}$  có chữ số tận cùng là 0

Suy ra:  $10^{2019} + 8$  có chữ số tận cùng là 8.

Do đó:  $10^{2019} + 8$  không là số chính phương.

b) Ta có:  $1.2.3.4...2019$  có chữ số tận cùng là 0.

Suy ra:  $1.2.3.4...2019+7$  có chữ số tận cùng là 7.

Do đó:  $1.2.3.4...2019+7$  không là số chính phương.

**Ví dụ 5.2:** Cho  $A=2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2020}$ . Chứng minh rằng  $A+4$  không là số chính phương.

**Lời giải:**

Ta có:  $A=2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2020}$

$2A=2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{2021}$

Suy ra:  $2A - A = 2^{2021} - 4$

Suy ra:  $A + 4 = 2^{2021} - 4 + 4 = 2^{2021}$

$$= (2^4)^{505} \cdot 2$$

$$=16^{505} \cdot 2$$

Ta có:  $10^{505}$  có chữ số tận cùng là 6.

Suy ra:  $16^{505}$  có chữ số tận cùng là 2.

Do đó:  $A+4$  có chữ số tận cùng là 2.

Vậy  $A+4$  không phải là số chính phương.

**Ví dụ 5.3:** Cho  $a \in \mathbb{N}$  và  $n-1$  không chia hết cho 4. Chứng minh rằng  $7^n + 2$  không thể là số chính phương.

**Lời giải:**

Do  $n-1$  không chia hết cho 4 nên  $n=4k+r$  ( $r \in \{0, 2, 3\}$ ).

Ta có  $7^4 - 1 = 2400:10$ . Ta viết  $7^n + 2 = 7^{4k+r} + 2 = 7^r (7^{4k} - 1) + 7^r + 2$ .

Vậy hai chữ số tận cùng của  $7^n + 2$  cũng chính là hai chữ số tận cùng của  $7^r + 2$  ( $r=0; 2; 3$ ) nên chỉ có thể là 03; 51; 45. Theo tính chất trên thì rõ ràng  $7^n + 2$  không thể là số chính phương khi  $n$  không chia hết cho 4.

**Ví dụ 5.4:** Cho  $S=1+3^1+3^2+3^3+\dots+3^{30}$ . Tìm chữ số tận cùng của S, từ đó suy ra S không phải là số chính phương.

**Lời giải:**

Tổng có 31 số hạng, nhóm các số hạng từ trái sang phải, mỗi nhóm 4 hạng, còn thừa ba số hạng cuối là  $3^{28} + 3^{29} + 3^{30}$ . Trong mỗi nhóm, chữ số tận cùng của tổng là 0.

Vậy chữ số tận cùng của tổng S là chữ số tận cùng của tổng  $3^{28} + 3^{29} + 3^{30}$ .

Ta có:  $3^{29} = 3^{28} \cdot 3 = \overline{\dots 1} \cdot 3 = \overline{\dots 3}$

$$3^{30} = 3^{28} \cdot 3^2 = \overline{\dots 1} \cdot 9 = \overline{\dots 9}$$

Tổng S có chữ số tận cùng  $1+3+9 = \overline{\dots 3}$

Số chính phương không có tận cùng bằng 3. Suy ra S không phải là số chính phương.

**Ví dụ 5.5:** Cho tổng  $S=1+3+5+\dots+2009+2011$

a) Tính S

b) Chứng tỏ S là một số chính phương.

**Lời giải:**

a) Ta có:  $S=1+3+5+\dots+2009+2011 = \left(\frac{2011+1}{2}\right) \cdot \left(\frac{2011-1}{2} + 1\right) = 1006^2 = 1012036$

b)  $S=2^2 \cdot 503^2 = 1006^2$  có chữ số tận cùng là 6 nên S là số chính phương.

**Ví dụ 5.6:** Tìm số chính phương có bốn chữ số, được viết với các chữ số 3; 6; 8; 8.

**Lời giải:**

Gọi  $n^2$  là số chính phương cần tìm.

Số chính phương không tận cùng bằng 3 và 8 nên  $n^2$  phải tận cùng bằng 6.

Số tận cùng bằng 86 thì chia hết cho 2, không chia hết cho 4 nên không là số chính phương.

Vậy  $n^2$  phải tận cùng bằng 36

Suy ra số chính phương cần tìm là:  $8836=94^2$

## **BÀI TẬP**

**Bài 1:** Chứng tỏ rằng  $10^{2003} + 8$  chia hết cho 2.

**Lời giải:**

**Cách 1:**  $10^{2003} = 10 \cdot 10^{2002} = 2.5 \cdot 10^{2002}$  chia hết cho 2 và 8 chia hết cho 2.

Do đó:  $10^{2003} + 8$  chia hết cho 2.

**Cách 2:**  $10^{2003}$  có chữ số tận cùng là 0. Do đó:  $10^{2003} + 8$  có chữ số tận cùng là 8.

Vậy:  $10^{2003} + 8$  chia hết cho 2.

**Bài 2:** Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a)  $234^{367}$  ; b)  $579^{675}$

**Lời giải:**

a) Số 243 có tận cùng là 4, nâng lên lũy thừa lẻ nên có chữ số tận cùng là 4.

b) Số 579 có tận cùng là 9, nâng lên lũy thừa chẵn nên có tận cùng là 1.

**Bài 3:** Tìm chữ số tận cùng của các số sau:  $6^{1995}$  ;  $9^{1995}$  ;  $3^{1995}$  ;  $2^{1995}$

**Lời giải:**

Ta có:  $6^{1995}$  có số tận cùng là 6

$9^{1995}$  có số tận cùng là 9

$3^{1995}$  có số tận cùng là 7 ( $1995=4 \cdot 498+3$ )

$2^{1995}$  có số tận cùng là 8

**Bài 4:** Tìm chữ số cuối cùng của số  $7^{9^9}$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $7^{4k}$  có chữ số cuối cùng là 7.

Mà:  $9^9 = (2 \cdot 4 + 1)^9$

Do đó: chữ số cuối cùng của số  $7^{9^9}$  là 7.

**Bài 5:** Tích các số lẻ liên tiếp có tận cùng là 7. Hỏi tích đó có bao nhiêu thừa số?

**Lời giải:**

Nếu tích có 5 thừa số lẻ liên tiếp trở lên thì ít nhất cũng có một thừa số có chữ số tận cùng là 5. Do đó tích phải tận cùng là 5 nên trái đề bài. Vậy số thừa số của tích nhỏ nhất phải lớn hơn 5.

Nếu tích có 4 thừa số lẻ liên tiếp thì hoặc tích có tận cùng bằng 5, hoặc tận cùng bằng 9 nên trái đề bài.

Nếu tích có 2 thừa số lẻ liên tiếp thì tích có tận cùng là 3 hoặc 5 hoặc 9 nên trái đề bài.

Vậy tích đó chỉ có 3 thừa số.

**Bài 6:** Tích  $A=2.2^2.2^3 \dots 2^{10}.5^2.5^4.5^6 \dots 5^{14}$  tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0.

**Lời giải:**

$$\text{Ta có: } 2.2^2.2^3 \dots 2^{10} = 2^{1+2+3+\dots+10} = 2^{55}$$

$$5^2.5^4.5^6 \dots 5^{14} = 5^{2+4+6+\dots+14} = 5^{56}$$

$$\text{Do đó: } A = 2^{55} \cdot 5^{56} = 2^{55} \cdot 5^{55} \cdot 5 = 10^{55} \cdot 5$$

Vậy A có tận cùng bằng 55 chữ số 0.

**Bài 7:** Tìm số tự nhiên có 5 chữ số biết rằng số gồm năm chữ số đó viết theo thứ tự ngược lại bằng bốn lần số phải tìm.

**Lời giải:**

Gọi số phải tìm là  $\overline{abcde}$  ( $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}; 1 < a, e \leq 9; 0 \leq b, c, d \leq 9$ )

Theo đầu bài ta có:  $4.\overline{abcde} = \overline{edcba}$  (\*)

Vì  $4.\overline{abcde}$  bằng một số có năm chữ số nên  $a \leq 2$ , a lại chẵn nên  $a = 2$ .

Tích  $4e$  là một số tận cùng bằng 2, do đó  $e = 3$  hoặc  $e = 8$ .

Vì e là chữ số đầu của số tận cùng bằng b nên b phải là số lẻ, do đó  $b = 1$ .

Xét tích  $4d$ . Đó là một số cộng với 3 được một số tận cùng bằng 1 nên  $4d$  tận cùng bằng 8.

Vậy  $d = 2$  hoặc  $d = 7$ .

Bằng cách thử trực tiếp, ta được  $d = 7$ , do đó  $c = 9$ .

Vậy số phải tìm là 21978.

**Bài 8:** Hãy thay vào a, b, c, d các chữ số thích hợp, biết rằng:

$$\text{a) } \overline{abc} \cdot 5 = \overline{dad} ; \quad \text{b) } \overline{abc} + \overline{ba} = \overline{dcca} ; \quad \text{c) } \overline{acc} = \overline{cca} = \overline{aa}$$

**Lời giải:**

a) Tích  $\overline{abc} \cdot 5$  là một số có ba chữ số, nên  $a = 1$ .  $c \cdot 5$  là một số tận cùng bằng 0 hoặc 5 (tức là  $d = 0$  hoặc  $d = 5$ ) nhưng  $d \neq 0$  nên  $d = 5$ , suy ra  $\overline{dad} = 515$ .

Vậy:  $\overline{abc} = 515 : 5 = 103$ . Ta có phép tính  $103 \cdot 5 = 515$ .

b) Ta viết lại phép tính như sau:

$$\begin{array}{r} \text{ba} \\ + \text{abc} \\ \hline \end{array}$$

dcca

Ta có:  $a+c=a$  (vì  $a+c \neq 10+a$ ) nên  $c=0$ . Tổng là một số có bốn chữ số chỉ trong trường hợp  $a=9$ . Khi đó  $d=1$ ;  $b+b$  là một số tận cùng bằng 0, hơn nữa  $b+b$  phải khác 0 vì nếu không ta phải có  $b=0$ , trái với đầu bài. Do đó:  $b+b=10$  và  $b=5$ .

Ta có phép tính:  $950+59=1009$

c) Ta viết lại phép tính bằng:

$$\begin{array}{r} \text{aa} \\ + \text{cca} \\ \hline \text{acc} \end{array}$$

Nếu  $a+c < 10$  thì  $a+c=0$  suy ra  $a=0$ , điều này vô lý vì rõ ràng  $a$  phải khác 0.

Do đó:  $a+a=10+c$  và  $a+c+1=10+c(a+c+1 \neq c)$ .

Từ đó  $a=9$  nhưng  $a+a=10+c$ , nghĩa là  $10+c=18$  nên  $c=8$ .

Ta có phép tính:  $988-889=99$ .

**Bài 9:** Nếu  $a \in \mathbb{N}$  và  $(a;5)=1$  thì  $a^{100}-1$  chia hết cho 125.

**Lời giải:**

Do  $a^{20}-1$  chia hết cho 25 nên  $a^{20}; a^{40}; a^{60}; a^{80}$  khi chia cho 25 có cùng số dư là 1.

Suy ra:  $a^{20}+a^{40}+a^{60}+a^{80}+1$  chia hết cho 5.

Vậy  $a^{100}-1=(a^{20}-1)(a^{80}+a^{60}+a^{40}+a^{20}+1)$  chia hết cho 125.

**Bài 10:** Chứng minh rằng: Trong 11 số nguyên bất kì thế nào cũng có hai số có cùng chữ số tận cùng.

**Lời giải:**

Một số nguyên chỉ có thể tận cùng bằng 1 trong 10 chữ số 0;1;2;...;9

Lập 11 số nguyên, theo nguyên tắc Dirichlet phải có hai số có cùng chữ số tận cùng.

### PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

**Bài 1:** Tìm một số tự nhiên có 6 chữ số tận cùng là chữ số 4. Biết rằng khi chuyển chữ số 4 đó lên đầu còn các chữ số khác giữ nguyên thì ta được số mới gấp 4 lần số cũ. (**Đề thi HSG Gia Lai năm 2018 - 2019**)

**Lời giải:**

Gọi số cần tìm là  $\overline{abcde4}$ , ta có:  $\overline{abcde4}.4 = \overline{4abcde}$

Đặt  $\overline{abcde} = x \Rightarrow \overline{abcde4} = \overline{x4}$

Ta có:  $\overline{x4}.4 = 400000 + x$

$(10x+4).4 = 400000 + x$

$$40x+16=400000+x$$

$$39x=399984$$

$$x=10256$$

Vậy số cần tìm là 10256.

**Bài 2:** Cho  $A=2017+2017^2+2017^3+\dots+2017^{18}$ . Chứng tỏ rằng  $A:2018$ . Tìm chữ số tận cùng của A. (**Đề HSG Trục Ninh năm 2017 - 2018**)

**Lời giải:**

Ta có  $A=2017+2017^2+2017^3+\dots+2017^{18}$  (tổng A có 2018 số hạng,  $2018:2$ )

$$\begin{aligned}A &= (2017+2017^2) + (2017^3+2017^4) + \dots + (2017^{2017}+2017^{2018}) \\ &= 2017 \cdot (1+2017) + 2017^3 \cdot (1+2017) + \dots + 2017^{2017} (1+2017) \\ &= 2018 \cdot (2017+2017^3+\dots+2017^{2017}) : 2018 \\ &= 2017+2017^2+(2017^3+2017^4+2017^5+2017^6)+\dots+(2017^{2015}+2017^{2016}+2017^{2017}+2017^{2018}) \\ &= (\overline{\dots 6}) + 2017^3 \cdot (\overline{\dots 0}) + \dots + 2017^{2015} \cdot (\overline{\dots 0}) \\ &= (\overline{\dots 6})\end{aligned}$$

Vậy chữ số tận cùng của A là 6.

**Bài 3:** Tìm chữ số tận cùng của số  $P=14^{14^{14}}+9^{9^9}+2^{3^4}$  (**Đề HSG Lý Nhân năm 2018 - 2019**).

**Lời giải:**

Chữ số tận cùng của  $14^{14^{14}}$  là 6.

Chữ số tận cùng của  $9^{9^9}$  là 9.

Chữ số tận cùng của  $2^{3^4}$  là 2.

Chữ số tận cùng của P là chữ số tận cùng của tổng  $(6+9+2)$  là 7.

**Bài 4:** Cho  $M=2+2^2+2^3+\dots+2^{20}$  (**Đề HSG Bắc Ninh năm 2016 - 2017**)

a) Chứng tỏ rằng  $M:5$ .

b) Tìm chữ số tận cùng của M.

**Lời giải:**

$$\begin{aligned}\text{a) Ta có: } M &= 2+2^2+2^3+\dots+2^{20} \\ &= (2+2^2+2^3+2^4)+\dots+(2^{17}+2^{18}+2^{19}+2^{20}) \\ &= 2(1+2+2^2+2^3)+\dots+2^{17}(1+2+2^2+2^3)\end{aligned}$$

$$=15(2+\dots+2^{17})$$

$$=5.3.(2+\dots+2^{17}):5$$

b) Dễ thấy  $M:2; M:5 \Rightarrow M:10$

Do đó: M có chữ số tận cùng bằng 0.

**Bài 5:** Cho  $A=3(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ . Không làm phép tính, hãy rút gọn biểu thức rồi tìm số tận cùng của A. (**Đề HSG Bắc Ninh năm 2016 - 2017**)

**Lời giải:**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= 3(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\ &= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\ &= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\ &= (2^8-1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\ &= (2^{16}-1)(2^{16}+1) \\ &= 2^{32}-1 \end{aligned}$$

Vì  $2^{32}$  có chữ số tận cùng là 2 nên  $A=2^{32}-1$  có chữ số tận cùng là 1.

**Bài 6:** Cho  $A=\frac{1}{2}(7^{2012^{2015}}-3^{92^{94}})$ . Chứng minh A là số tự nhiên chia hết cho 5. (**Đề HSG Hoàng Hoá năm 2018 - 2019**)

**Lời giải:**

Vì  $2012; 92$  đều là bội của 4 nên  $2012^{2015}$  và  $92^{94}$  cũng là bội của 4.

$$\text{Suy ra: } 2012^{2015} = 4m \quad (m \in \mathbb{N}^*)$$

$$92^{94} = 4n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{Khi đó: } 7^{2012^{2015}} - 3^{92^{94}} = 7^{4m} - 3^{4n} = (\overline{\dots 1}) - (\overline{\dots 1}) = 0$$

Vậy A có tận cùng là 0 nên chia hết cho 10 nên  $A=\frac{1}{2}(7^{2012^{2015}}-3^{92^{94}}):5$ .

**Bài 7:** Cho  $A=10^{2012}+10^{2011}+10^{2010}+10^{2009}+8$ . Chứng minh rằng A không phải là số chính phương. (**Đề HSG Buôn Mê Thuật năm 2018 - 2019**)

**Lời giải:**

Ta có các số  $10^{2012}; 10^{2011}; 10^{2010}; 10^{2009}$  đều có chữ số tận cùng là 0.

Do đó:  $A=10^{2012}+10^{2011}+10^{2010}+10^{2009}+8$  có chữ số tận cùng là 8.

Vậy A không phải là số chính phương.

**Bài 8:** Tìm chữ số tận cùng của các số sau: (*Đề HSG Tân Uyên 2018 - 2019*)

a)  $57^{2011}$

b)  $93^{1999}$

**Lời giải:**

a) Xét  $7^{2011}$ , ta có:  $7^{2011} = (7^4)^{502} \cdot 7^3 = 2401^{502} \cdot 343$

Suy ra chữ số tận cùng bằng 3

Vậy số  $57^{2011}$  có chữ số tận cùng là 3

b) Xét  $3^{1999}$  ta có:  $3^{1999} = (3^4)^{499} \cdot 3^3 = 81^{499} \cdot 27$

Suy ra chữ số tận cùng bằng 7

Vậy số  $93^{1999}$  có chữ số tận cùng là 7

**Bài 9:** (*Đề HSG Yên Lạc 2018 - 2019*)

a) Tìm chữ số tận cùng của các số sau:  $49^{31}; 32^{2000}$

b) Chứng tỏ rằng:  $10^{2011} + 8$  chia hết cho 72

**Lời giải:**

a) Do 49 có chữ số tận cùng là 9, khi đó nâng lên lũy bậc lẻ có chữ số tận cùng là 9

Vậy  $49^{31}$  có chữ số tận cùng là 9

Ta có  $32^{2000} = 32^{4 \cdot 500}$  có chữ số tận cùng là 0 nên khi nâng lên lũy thừa  $4n$  có tận cùng là chữ số 0.

Vậy  $32^{2000}$  có chữ số tận cùng là 0

b) Vì  $10^{2011} + 8$  có tổng các chữ số chia hết cho 9 nên tổng chia hết cho 9

Lại có  $10^{2011} + 8$  có 3 chữ số tận cùng là 008 nên chia hết cho 8

Vậy  $10^{2011} + 8$  chia hết cho 72.

**Bài 10:** Cho  $A = 5 + 5^2 + \dots + 5^{96}$ . Tìm chữ số tận cùng của A. (*Đề HSG 2017 - 2018*)

**Lời giải:**

Ta có:  $A = 5 + 5^2 + \dots + 5^{96}$

$$5A = 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{96} + 5^{97}$$

Do đó:  $5A - A = 5^{97} - 5$

Suy ra:  $A = \frac{5^{97} - 5}{4}$

Ta có:  $5^{97}$  có chữ số tận cùng là 5

Suy ra  $5^{97} - 5$  có chữ số tận cùng là 0

Vậy chữ số tận cùng của A là 0.

**Bài 11:** Chứng minh rằng:  $10^{2002} + 8$  chia hết cho cả 9 và 2. (*Đề HSG Cao Lộc 2020 - 2021*)

**Lời giải:**

a) Ta có:  $10^{2002} + 8 = 10 \dots 000 + 8$  (2002 số 0)  $= 10 \dots 008$  (2001 số 0) có 8 tận cùng nên chia hết cho 2 và tổng các chữ số của nó là:  $1 + 0 + \dots + 0 + 0 + 8 = 9$  nên chia hết cho 9

Vậy  $10^{2002} + 8$  chia hết cho 9 và 2.

**Bài 12:** Cho  $B = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{40}$ . Tìm chữ số tận cùng của  $B$ . (*Đề HSG Lục Ngạn 2020 - 2021*)

**Lời giải:**

Ta có:  $B = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{40}$

$$2B = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{41}$$

Do đó:  $2B - B = 2^{41} - 2$

$$\text{Suy ra: } B = \frac{2^{41} - 2}{1}$$

Ta có:  $2^{41}$  có chữ số tận cùng là 2.

Suy ra:  $2^{41} - 2$  có chữ số tận cùng là 0.

Vậy chữ số tận cùng của  $B$  là 0.

**Bài 13:** Tìm chữ số tận cùng của dãy phép tính sau:  $P = 2001.2002.2003.2004 + 2005.2006.2007.2008.2009$ . (*Đề HSG Cao Lộc năm 2020 2021*)

**Lời giải:**

Ta gọi  $2001.2002.2003.2004$  là vế A. Ta sẽ nhân chữ số tận cùng của các thừa số ở vế A lại với nhau ta được:  $1.2.3.4 = 24$  nên vế A có chữ số tận cùng là 4.

Gọi  $2005.2006.2007.2008.2009$  là vế B. Ta sẽ nhân chữ số tận cùng của các thừa số ở vế B lại với nhau ta được:  $5.6.7.8.9 = 15120$  nên vế B có chữ số tận cùng là 0.

Vậy chữ số tận cùng của  $P = 2001.2002.2003.2004 + 2005.2006.2007.2008.2009$  là  $4 + 0 = 4$ .

**Bài 14:** Tìm một chữ số tận cùng của:  $A = 3^{n+2} + 2^{n+2} + 3^n + 2^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). (*Đề HSG Kon Tum năm 2020 - 2021*)

**Lời giải:**

Ta có:  $A = 3^{n+2} + 2^{n+2} + 3^n + 2^n$

$$= 3^n \cdot 3^2 + 2^n \cdot 2^2 + 3^n + 2^n$$

$$= 3^n (3^2 + 1) + 2^n (2^2 + 1)$$

$$= 3^n \cdot 10 + 2^n \cdot 5$$

Ta có:  $3^n \cdot 10$  có chữ số tận cùng là 0.

$2^n \cdot 5$  có chữ số tận cùng là 0.

Vậy A có chữ số tận cùng là 0

**Bài 15:** Tìm hai chữ số tận cùng của  $2^{100}$ . (*Đề HSG năm 2016 - 2017*)

**Lời giải:**

Ta có:  $2^{10} = 1024$

$$2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10} = (1024^2)^5$$

Mà  $1024^2$  có hai chữ số tận cùng là 76

Suy ra:  $(1024^2)^5$  có hai chữ số tận cùng là 76

Vậy  $2^{100}$  có hai chữ số tận cùng là 76.