

Thời gian làm bài: 120 phút.

(Đề khảo sát gồm 1 trang)

**Bài 1(5,0 điểm).**

1) Phân tích đa thức  $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y$  thành nhân tử.

2) Cho biểu thức  $P = \frac{x+2}{x+3} - \frac{5}{(x+3)(x-2)} - \frac{1}{x-2}$  với  $x \neq 2, x \neq -3$ .

Rút gọn P và tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

3) Cho hai số a, b thỏa mãn  $a^3 - 3a^2 + 5a - 2025 = 0$  và  $b^3 - 3b^2 + 5b + 2019 = 0$ .

Tính a + b.

**Bài 2(4,0 điểm).**

1) Tìm x biết  $(x-7)(x-5)(x-4)(x-2) = 72$ .

2) Bác Tâm gửi ngân hàng 200 triệu đồng theo hình thức lãi kép với lãi suất 8%/năm. Hỏi sau 2 năm tổng số tiền bác Tâm thu về là bao nhiêu? (Số tiền gửi của năm thứ hai bằng tổng số tiền gửi và lãi của năm thứ nhất).

**Bài 3(4,0 điểm).**

1) Tìm dư của đa thức f(x) khi chia cho đa thức  $x^2 + x - 2$ , biết rằng f(x) chia cho  $x - 1$  dư 2 và f(x) chia cho  $x + 2$  dư 3.

2) Cho hai số nguyên x, y thỏa mãn  $x^2 + y^2 + 1 = 2(xy + x + y)$ . Chứng minh rằng x và y là hai số chính phương liên tiếp.

**Bài 4(6,0 điểm).**

1) Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường phân giác AD ( $D \in BC$ ). Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên AB và AC.

a) Chứng minh tứ giác AEDF là hình vuông và  $\frac{BE}{CF} = \frac{AB^2}{AC^2}$ .

b) Cho  $AB = 3\text{cm}$ ,  $AC = 4\text{cm}$ . Tính độ dài đoạn thẳng AD.

2) Cho tứ giác ABCD ( $AC > CD$ ). Lấy điểm M, P theo thứ tự trên đoạn thẳng AB, AC sao

cho  $\frac{AM}{AB} = \frac{CP}{CD}$ . Trên tia CA lấy điểm K sao cho  $CK = CD$ . Chứng minh rằng khi M di động

trên AB và P di động trên AC thỏa mãn giả thiết bài toán thì trung điểm I của đoạn thẳng MP luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

**Bài 5(1,0 điểm).**

Cho 19 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng và nằm trong tam giác đều có diện tích bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một tam giác có ba đỉnh là ba điểm trong 19 điểm đã cho có diện tích nhỏ hơn  $\frac{1}{9}$ .

.....**Hết**.....

Họ và tên thí sinh : .....Số báo danh:.....

Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

## HƯỚNG DẪN CHẤM TOÁN 8

### I. Hướng dẫn chung

1. Hướng dẫn chấm chỉ trình bày các bước cơ bản của 1 cách giải. Nếu thí sinh làm theo cách khác mà đúng thì vẫn cho điểm tối đa.
2. Bài làm của thí sinh đúng đến đâu cho điểm đến đó theo đúng biểu điểm.
3. Bài hình học, thí sinh vẽ hình đúng ý nào thì chấm điểm ý đó, thí sinh vẽ sai hình hoặc không vẽ hình thì cho 0 điểm bài hình đó.
4. Bài có nhiều ý liên quan tới nhau, nếu thí sinh mà công nhận ý trên (hoặc làm ý trên không đúng) để làm ý dưới mà thí sinh làm đúng thì cho 0 điểm điểm ý đó.
5. Điểm của bài thi là tổng điểm các Bài làm đúng và tuyệt đối không làm tròn.

### II. Đáp án và thang điểm

HƯỚNG DẪN CHẤM		Điểm
<b>Bài 1(5,0 điểm).</b>		
1) Phân tích đa thức $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y$ thành nhân tử.		
2) Cho biểu thức $P = \frac{x+2}{x+3} - \frac{5}{(x+3)(x-2)} - \frac{1}{x-2}$ với $x \neq 2, x \neq -3$ .		
Rút gọn P và tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.		
3) Cho hai số a, b thỏa mãn $a^3 - 3a^2 + 5a - 2025 = 0$ và $b^3 - 3b^2 + 5b + 2019 = 0$ .		
Tính a + b.		
1) 1,5đ	Ta có: $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y = (x - 2y)^2 + 2(x - 2y)$ $= (x - 2y)(x - 2y + 2)$	0,75  0,75
2) 2,5đ	Với $x \neq 2, x \neq -3$ ta có: $P = \frac{x+2}{x+3} - \frac{5}{(x+3)(x-2)} - \frac{1}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2) - 5 - (x+3)}{(x+3)(x-2)}$ $= \frac{x^2 - 4 - 5 - x - 3}{(x+3)(x-2)} = \frac{x^2 - x - 12}{(x+3)(x-2)}$ $= \frac{(x-4)(x+3)}{(x+3)(x-2)} = \frac{x-4}{x-2}$ Vậy với $x \neq 2, x \neq -3$ thì $P = \frac{x-4}{x-2}$ Với $x \neq 2, x \neq -3$ , ta có $P = 1 - \frac{2}{x-2}$ Do x nguyên nên P nguyên khi $\frac{2}{x-2}$ nguyên suy ra $2 : x - 2$ , suy ra $x - 2 \in \{\pm 1; \pm 2\}$ Từ đó tìm được $x \in \{0; 1; 3; 4\}$	0,5  0,5  0,25  0,25  0,25  0,25
	Kết hợp với điều kiện, ta có $x \in \{0; 1; 3; 4\}$ thì P nguyên.	0,25

3) 1,0đ	Từ điều kiện của bài toán, ta có $(a-1)^3 + 2(a-1) - 2022 = 0$ (1) và $(b-1)^3 + 2(b-1) + 2022 = 0$ (2)	0,5
	Từ (1) và (2) suy ra $(a-1)^3 + (b-1)^3 + 2(a-1+b-1) = 0$ $(a+b-2)\left[(a-1)^2 - (a-1)(b-1) + (b-1)^2\right] + 2(a+b-2) = 0$ $(a+b-2)\left[(a-1)^2 - (a-1)(b-1) + (b-1)^2 + 2\right] = 0$	0,25
	HS lập luận chỉ ra $(a-1)^2 - (a-1)(b-1) + (b-1)^2 + 2 > 0 \quad \forall a, b$ Suy ra $a+b-2 = 0$ hay $a+b = 2$ Vậy $a+b = 2$ .	0,25

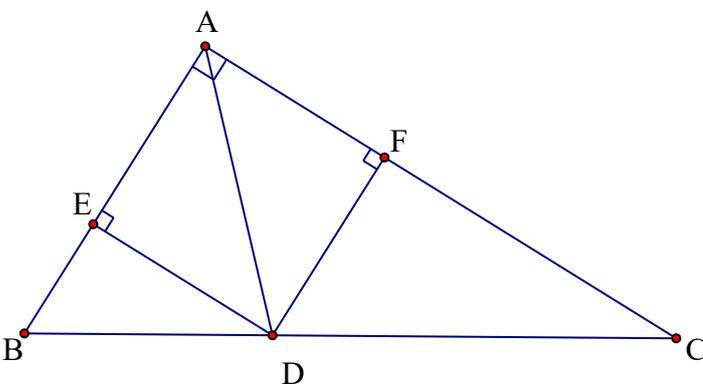
**Bài 2(4,0 điểm).**

- 1) Tìm x biết  $(x-7)(x-5)(x-4)(x-2) = 72$ .
- 2) Bác Tâm gửi ngân hàng 200 triệu đồng theo hình thức lãi kép với lãi suất 8%/năm. Hỏi sau 2 năm tổng số tiền bác Tâm thu về là bao nhiêu? (Số tiền gửi của năm thứ hai bằng tổng số tiền gửi và lãi của năm thứ nhất).

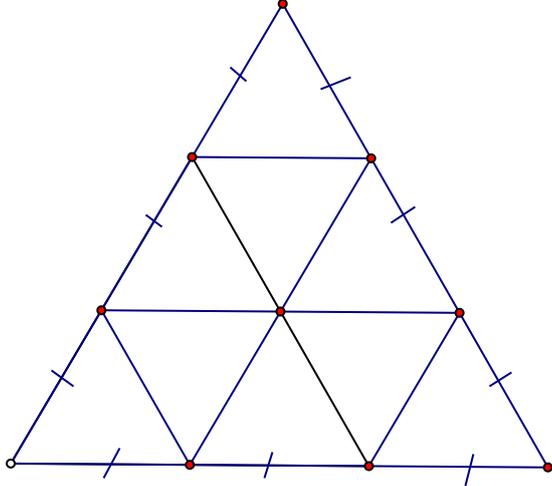
1) 2,0đ	Ta có $(x-7)(x-5)(x-4)(x-2) = 72$ $(x^2 - 9x + 14)(x^2 - 9x + 20) = 72$	0,5
	$(x^2 - 9x + 17 - 3)(x^2 - 9x + 17 + 3) = 72$	0,25
	$(x^2 - 9x + 17)^2 - 9 = 72$	0,25
	$(x^2 - 9x + 17)^2 = 81$ hay $x^2 - 9x + 17 = \pm 9$	0,25
	* $x^2 - 9x + 17 = 9$ hay $x^2 - 9x + 8 = 0$ , từ đây tìm được $x \in \{1; 8\}$	0,25
	* $x^2 - 9x + 17 = -9$ hay $x^2 - 9x + 26 = 0$ HS chứng minh được $x^2 - 9x + 26 > 0 \quad \forall x$ , suy ra không có giá trị nào của x thỏa mãn.	0,25
	Vậy $x \in \{1; 8\}$	0,25
2) 2,0đ	Số tiền lãi của năm thứ nhất bác An nhận là: $200 \cdot 8\% = 16$ triệu đồng	0,5
	Số tiền gốc của năm thứ hai bác An gửi là: $200 + 16 = 216$ triệu đồng	0,5
	Số tiền lãi của năm thứ hai bác An nhận là: $216 \cdot 8\% = 17,28$ triệu đồng	0,5
	Vậy sau 2 năm bác An nhận được tổng số tiền là: $216 + 17,28 = 233,28$ triệu đồng	0,5

**Bài 3(4,0 điểm).**

- 1) Tìm dư của đa thức  $f(x)$  khi chia cho đa thức  $x^2 + x - 2$ , biết rằng  $f(x)$  chia cho  $x - 1$  dư 2 và  $f(x)$  chia cho  $x + 2$  dư 3.
- 2) Cho hai số nguyên  $x, y$  thỏa mãn  $x^2 + y^2 + 1 = 2(xy + x + y)$ . Chứng minh rằng  $x$  và  $y$  là hai số chính phương liên tiếp.

1) 2,0đ	Vì $f(x)$ chia cho $x - 1$ dư 2 và $f(x)$ chia cho $x + 2$ dư 3.	0,5
	Suy ra $f(1) = 2$ và $f(-2) = 3$	
	Mà $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$	0,25
	Suy ra $f(x) = (x - 1)(x + 2)g(x) + ax + b$	0,25
	Suy ra $a + b = 2$ và $-2a + b = 3$	0,5
	Giải được $a = \frac{-1}{3}$ , $b = \frac{7}{3}$	0,25
	Vậy dư của đa thức $f(x)$ khi chia cho đa thức $x^2 + x - 2$ là $\frac{-1}{3}x + \frac{7}{3}$	0,25
2) 2,0đ	Từ gt ta có $x^2 + y^2 + 1 = 2(xy + x + y)$	0,5
	$x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y = 4x$	
	$(x - y + 1)^2 = 4x$ do $x, y$ nguyên, suy ra $x$ là số chính phương	0,5
	Đặt $x = m^2$ , $m$ là số nguyên, suy ra $(m^2 - y + 1)^2 = 4m^2$	0,5
	Suy ra $m^2 - y + 1 = 2m$ , suy ra $y = (m - 1)^2$	0,25
	Hoặc $m^2 - y + 1 = -2m$ , suy ra $y = (m + 1)^2$ suy ra đpcm	0,25
<b>Bài 4(6,0 điểm).</b>		
1) Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường phân giác AD ( $D \in BC$ ). Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên AB và AC.		
a) Chứng minh tứ giác AEDF là hình vuông và $\frac{BE}{CF} = \frac{AB^2}{AC^2}$ .		
b) Cho $AB = 3\text{cm}$ , $AC = 4\text{cm}$ . Tính độ dài đoạn thẳng AD.		
2) Cho tứ giác ABCD ( $AC > CD$ ). Lấy điểm M, P theo thứ tự trên cạnh AB, AC sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{CP}{CD}$ . Trên tia CA lấy điểm K sao cho $CK = CD$ . Chứng minh rằng khi M di động trên AB và P di động trên AC thỏa mãn giả thiết bài toán thì trung điểm I của đoạn thẳng MP luôn chạy trên một đường thẳng cố định.		
		
1a) 2,5đ	Hs cm được tứ giác AEDF là hình chữ nhật	1,0
	Mà AD là phân giác $\widehat{BAC}$ suy ra tứ giác AEDF là hình vuông	0,25
	HS chỉ ra được $DE \parallel AC$ suy ra $\frac{BE}{AB} = \frac{DE}{AC}$ (1)	0,5

	DF // AB, suy ra $\frac{CF}{AC} = \frac{DF}{AB}$ (2)	0,25
	Mà AEDF là hình vuông, suy ra DE = DF (3)	0,25
	Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{BE}{CF} = \frac{AB^2}{AC^2}$	0,25
1b) 1,5đ	Hs chỉ ra được $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC}$	0,25
	Suy ra $\frac{1}{2} AB.AC = \frac{1}{2} DE.AB + \frac{1}{2} DF.AC$ hay $AB.AC = DE.AB + DF.AC$	0,25
	Do DE = DF Suy ra $AB.AC = DE.(AB + AC)$	0,25
	HS cm được $\Delta AED$ vuông cân nên $DE = \frac{AD}{\sqrt{2}}$	0,25
	Suy ra $\frac{AD}{\sqrt{2}} = \frac{AB.AC}{AB + AC} = \frac{3.4}{3+4} = \frac{12}{7}$	0,25
	Suy ra $AD = \frac{12\sqrt{2}}{7}$ cm . kl.....	0,25
2) 2,0đ		
	Gọi H là trung điểm BK, từ M và P kẻ các đường thẳng song song với BK lần lượt cắt AH, CH tại N, Q	0,25
	Ta có $\frac{AM}{AB} = \frac{CP}{CD}$ mà CK = CD suy ra $\frac{AM}{AB} = \frac{CP}{CK}$ (1)	0,25
	Mà MN // BH suy ra $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AH}$ (2), PQ // HK, suy ra $\frac{CQ}{CH} = \frac{CP}{CK}$ (3)	0,25
	Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{AN}{AH} = \frac{CQ}{CH}$ , suy ra NQ // AC	0,25
	Hs chứng minh được $\frac{MN}{BH} = \frac{QP}{HK}$ mà BH = HK, suy ra MN = QP	0,25
	Mà MN // QP ( cùng // BK), suy ra tứ giác MNPQ là hình bình hành Suy ra I là trung điểm MP đồng thời là trung điểm NQ	0,25
	Gọi HI cắt AC tại O. HS chứng minh được O là trung điểm AC	0,25

	HS chỉ ra được H, O cố định, suy ra điểm I di chuyển trên đường thẳng cố định HO (đpcm)	0,25
<b>Bài 5(1,0 điểm).</b> Cho 19 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng và nằm trong tam giác đều có diện tích bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một tam giác có ba đỉnh là ba điểm trong 19 điểm đã cho có diện tích nhỏ hơn $\frac{1}{9}$ .		
1,0đ		
	Hs chỉ ra được cách chia tam giác đều ban đầu thành 9 tam giác đều bằng nhau không có điểm chung trong như hình vẽ	0,25
	Vì 19 điểm nằm trong tam giác đều ban đầu nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất 3 điểm trong 19 điểm đã cho nằm trong 1 tam giác trong 9 tam giác trên	0,25
	Do trong 19 điểm không có ba điểm nào thẳng hàng nên tam giác tạo bởi 3 điểm nói trên nằm trọn trong 1 tam giác trong 9 tam giác trên.	0,25
	Mà diện tích của một tam giác trong 9 tam giác trên là $\frac{1}{9}$	
	Vậy diện tích tam giác tạo bởi ba điểm nói trên có diện tích nhỏ hơn $\frac{1}{9}$ (đpcm)	0,25

Xem thêm: **ĐỀ THI HSG TOÁN 8**  
<https://thcs.toanmath.com/de-thi-hsg-toan-8>