

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN CHUYÊN

Ngày thi: 05/6/2025

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Bài 1. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $2x^2 + \sqrt{x^2 - x + 3} = 2x + 15, (x \in \mathbb{R})$.

2. Một hộp có 50 tấm thẻ được ghi số từ 1 đến 50, hai thẻ khác nhau được ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Gọi biến cố A : “Rút được thẻ ghi số là c sao cho phương trình $x^2 - 8x + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt”. Tính xác suất của biến cố A .

Bài 2. (2,0 điểm)

1. Cho các số thực a, b, c khác $\pm\sqrt{5}$ thỏa mãn $ab + bc + ca = -5$.

Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{a-b}{c^2-5} + \frac{b-c}{a^2-5} + \frac{c-a}{b^2-5}$.

2. Tìm tất cả cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình $x^2 - 9y^2 + 4x + 6y = 9$.

Bài 3. (2,0 điểm)

1. Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn điều kiện $3a + 11b + 4c = 8$. Chứng minh ít nhất một trong hai phương trình: $x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 11abc + 1 = 0$ và $x^2 - 2(b+2)x + b^2 + 6abc + 4 = 0$ có nghiệm.

2. Tìm tất cả cặp số nguyên tố (α, β) sao cho $\alpha^2 + 6\alpha\beta + \beta^2 + 45$ là một số chính phương.

Bài 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , các tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại T . Gọi M, N theo thứ tự là các điểm thuộc tia BT, CT sao cho $BM = BC = CN$. Đường thẳng MN cắt các đường thẳng CA, AB theo thứ tự tại E, F . Đường thẳng BE cắt CT tại P , đường thẳng CF cắt BT tại Q . Kẻ đường phân giác trong AD của tam giác ABC .

1. Chứng minh $\widehat{FBM} = \widehat{ACB}$.

2. Chứng minh QD song song với BF và $CF \cdot BP = BE \cdot FQ$.

3. Chứng minh $DP + AP = DQ + AQ$.

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho 677 số nguyên dương $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{677}$ thỏa mãn $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{677} \leq 2025$. Chứng minh rằng, có hai phân tử a_i, a_j trong số a_1, a_2, \dots, a_{677} sao cho $675 < a_i - a_j < 1350$.

----- HẾT -----

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN CHUYÊN TIN

Ngày thi: 05/6/2025

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Bài 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-3} - \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(\frac{11-x}{\sqrt{x}-3} + \sqrt{x}+3 \right)$, với $x \geq 0$ và $x \neq 9$.

1. Rút gọn biểu thức P .

2. Tìm tất cả giá trị nguyên của x để P có giá trị là một số nguyên.

Bài 2. (2,5 điểm)

1. Giải phương trình $x^2 - x + \sqrt{x^2 - x + 4} = 2, (x \in \mathbb{R})$.

2. Một hộp có 40 tấm thẻ được ghi số từ 1 đến 40, hai thẻ khác nhau được ghi hai số khác nhau. Xét phép thử “Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp”. Gọi biến cố A : “Rút được thẻ ghi số là c sao cho phương trình $x^2 - 6x + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt”. Tính xác suất biến cố A .

3. Cho $a, b, c (a \neq 0)$ là ba số thực và phương trình $ax^2 + bcx + b^3 + c^3 - 4abc = 0$ vô nghiệm. Chứng minh trong hai phương trình: $ax^2 + 2bx + 4c = 0$; $ax^2 + cx + b = 0$ có một phương trình có nghiệm và một phương trình vô nghiệm.

Bài 3. (1,5 điểm)

1. Tìm tất cả cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình $x^2 + xy - x - y = 5$.

2. Tìm tất cả cặp số nguyên tố (α, β) sao cho $\alpha^2 - 6\beta^2 = 1$.

Bài 4. (3,0 điểm)

Cho đường tròn (O) , đường kính $AB = 2R$. Gọi d là tiếp tuyến tại A của (O) . Lấy điểm C thuộc $d (AC > R)$. Từ C kẻ tiếp tuyến CD của đường tròn (O) (D là tiếp điểm, D khác A).

1. Chứng minh bốn điểm A, O, D, C cùng thuộc một đường tròn và $\widehat{BOD} = 2\widehat{OCA}$.

2. Gọi H là giao điểm của đoạn thẳng OC với AD và I là giao điểm của đoạn thẳng OC với đường tròn (O) . Chứng minh rằng $IC \cdot IO = IH \cdot CO$.

3. Gọi K là giao điểm của đoạn thẳng BC với đường tròn (O) . Gọi M là trung điểm HC , AM cắt (O) tại $N (N$ khác $A)$. Chứng minh tam giác HDK vuông tại K và ba điểm N, H, B thẳng hàng.

Bài 5. (1,0 điểm)

Người ta gắn các số $+1$ hoặc -1 vào các đỉnh của một hình lập phương. Mỗi mặt của hình lập phương đó sẽ được gắn với một số bằng tích các số được gắn vào các đỉnh của hình lập phương ứng với mặt đó. Mỗi một lần ta được phép biến đổi dấu của số gắn tại một đỉnh của hình lập phương và số gắn ở các mặt của hình lập phương cũng được tính lại. Hỏi rằng ban đầu nếu tổng các số ở tất cả các đỉnh và các mặt của hình lập phương là 14 thì sau hữu hạn bước đổi dấu ở đỉnh ta có nhận được tổng các số ở đỉnh và mặt của hình lập phương đó bằng 0 hay không?