

CHUYÊN ĐỀ PHÉP CHIA HẾT VÀ PHÉP CHIA CÓ DƯ

Chủ đề 1: Phương pháp phân tích thành thừa số để chứng minh các bài toán chia hết

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. PHÉP CHIA HẾT

Với a, b là các số tự nhiên và b khác 0. Ta nói a chia hết cho b nếu tồn tại số tự nhiên q sao cho $a = b.q$.

2. TÍNH CHẤT CHUNG

- 1) $a:b$ và $b:c$ thì $a:c$.
- 2) $a:a$ với mọi a khác 0.
- 3) $0:b$ với mọi b khác 0.
- 4) Bất cứ số nào cũng chia hết cho 1.

3. TÍNH CHẤT CHIA HẾT CỦA TỔNG, HIỆU

- Nếu a, b cùng chia hết cho m thì $a + b$ chia hết cho m và $a - b$ chia hết cho m .
- Tổng của 2 số chia hết cho m và 1 trong 2 số ấy chia hết cho m thì số còn lại cũng chia hết cho m .
- Nếu 1 trong 2 số a, b chia hết cho m số kia không chia hết cho m thì tổng, hiệu của chúng không chia hết cho m .

4. TÍNH CHẤT CHIA HẾT CỦA MỘT TÍCH

- Nếu một thừa số của tích chia hết cho m thì tích chia hết cho m .
- Nếu a chia hết cho m , b chia hết cho n thì $a.b$ chia hết cho $m.n$.
- Nếu a chia hết cho b thì: $a^n : b^n$.

**) Chú ý:*

$$(a^n - b^n) : (a - b), \forall n \geq 2.$$

$$(a^n - b^n) : (a + b), \forall n \text{ chẵn}.$$

5. DẤU HIỆU CHIA HẾT

- a) Dấu hiệu chia hết cho 2: một số chia hết cho 2 khi và chỉ khi chữ số tận cùng của số đó là số chẵn.
- b) Dấu hiệu chia hết cho 3 (hoặc 9): một số chia hết cho 3 (hoặc 9) khi và chỉ khi tổng các chữ của số đó chia hết cho 3 (hoặc 9).

***) Chú ý:** Một số chia hết cho 3 (hoặc 9) dư bao nhiêu thì tổng các chữ số của nó chia cho 3 (hoặc 9) cũng dư bấy nhiêu và ngược lại.

c) Dấu hiệu chia hết cho 5: một số chia hết cho 5 khi và chỉ khi chữ số của số đó có tận cùng bằng 0 hoặc 5.

d) Dấu hiệu chia hết cho 4 (hoặc 25): một số chia hết cho 4 (hoặc 25) khi và chỉ khi hai chữ số tận cùng của số đó chia hết cho 4 (hoặc 25)

e) Dấu hiệu chia hết cho 8 (hoặc 125): một số chia hết cho 8 (hoặc 125) khi và chỉ khi ba chữ số tận cùng của số đó chia hết cho 8 (hoặc 125).

f) Dấu hiệu chia hết cho 11: một số chia hết cho 11 khi và chỉ khi hiệu giữa tổng các chữ số hàng lẻ và tổng các chữ số hàng chẵn (từ trái sang phải) chia hết cho 11.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: Chứng minh biểu thức số có chứa lũy thừa chia hết cho một số tự nhiên hoặc một biểu thức số

I. Phương pháp giải:

- Vận dụng phân tích đa thức thành nhân tử (phân tích thành thừa số) để xét tính chất chia hết.
- Chứng minh hai biểu thức cùng chia hết cho một biểu thức số khác

II. Bài toán

Bài 1: Chứng minh rằng: $A = 27^{27} + 3^{77}$ chia hết cho 82

Lời giải

Ta có $A = 27^{27} + 3^{77} = (3^3)^{27} + 3^{77} = 3^{81} + 3^{77} = 3^{77}(3^4 + 1) = 82 \cdot 3^{77} : 82$ (đpcm)

Bài 2: Chứng minh rằng:

a) $A = 5^5 - 5^4 + 5^3 : 7$

b) $B = 10^6 - 5^7 : 59$

c) $C = 81^7 - 27^9 - 9^{13} : 45$

d) $D = 10^9 + 10^8 + 10^7 : 555$ và 222

e) $F = 16^5 + 2^{15} : 33$.

Lời giải

a) Ta có $A = 5^5 - 5^4 + 5^3 = 5^3(5^2 - 5 + 1) = 5^3 \cdot 21 : 7$

b) Ta có $B = 10^6 - 5^7 = (2 \cdot 5)^6 - 5^7 = 5^6(2^6 - 5) = 59 \cdot 5^6 : 59$

c) Ta có $C = 81^7 - 27^9 - 9^{13} = 3^{28} - 3^{27} - 3^{26} = 3^{26}(3^2 - 3 - 1) = 5 \cdot 3^{26} : 5 \cdot 3^2$

d) Ta có $D = 10^9 + 10^8 + 10^7 = 10^7(10^2 + 10 + 1) = 111 \cdot 10^7 = 111 \cdot (2 \cdot 5)^7 = 222 \cdot 2^6 \cdot 5^7 : 222 (= 555 \cdot 2^7 \cdot 5^6 : 555)$

e) Ta có $F = 16^5 + 2^{15} = 2^{20} + 2^{15} = 2^{15}(2^5 + 1) = 33 \cdot 2^{15} : 33$

Bài 3: Chứng minh rằng:

a) $A = 2^{51} - 1 : 7$

b) $B = 17^{19} + 19^{17} : 18$

c) $C = 36^{63} - 1 : 7$

Lời giải

a) Ta có $A = 2^{51} - 1 = (2^3)^{17} - 1 = (2^3 - 1) \cdot (2^{48} + 2^{45} + \dots + 1) = 7 \cdot (2^{48} + 2^{45} + \dots + 1) : 7$

b) Ta có $B = 17^{19} + 19^{17} = (17^{19} + 1) + (19^{17} - 1)$

Mà $17^{19} + 1 = (17^{19} + 17^{18}) - (17^{18} + 17^{17}) + (17^{17} + 17^{16}) - \dots + (17 + 1)$

$$= 17^{18} \cdot (17 + 1) - 17^{17} \cdot (17 + 1) + 17^{16} \cdot (17 + 1) - \dots + (17 + 1)$$

$$= 18 \cdot 17^{18} - 18 \cdot 17^{17} + 18 \cdot 17^{16} - \dots + 18$$

$$= 18 \cdot (17^{18} - 17^{17} + 17^{16} + \dots + 1) : 18 \quad (1)$$

Mà $19^{17} - 1 = (19^{17} - 19^{16}) + (19^{16} - 19^{15}) + (19^{15} - 19^{14}) + \dots + (19 - 1)$

$$= 19^{16} \cdot (19 - 1) + 19^{15} \cdot (19 - 1) + 19^{14} \cdot (19 - 1) + \dots + (19 - 1)$$

$$= 19^{16} \cdot 18 + 19^{15} \cdot 18 + 19^{14} \cdot 18 + \dots + 18$$

$$= 18 \cdot (19^{16} + 19^{15} + 19^{14} + \dots + 1) : 18 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow B = 17^{19} + 19^{17} : 18$ (đpcm).

c) Ta có $C = 36^{63} - 1 = (36^{63} - 36^{62}) + (36^{62} - 36^{61}) + (36^{61} - 36^{60}) + \dots + (36 - 1)$

$$C = 36^{62} \cdot (36 - 1) + 36^{61} \cdot (36 - 1) + 36^{60} \cdot (36 - 1) + \dots + (36 - 1)$$

$$C = 36^{62} \cdot 35 + 36^{61} \cdot 35 + 36^{60} \cdot 35 + \dots + 35$$

$$C = 35 \cdot (36^{62} + 36^{61} + 36^{60} + \dots + 1) : 7 \text{ (đpcm)}.$$

Bài 4: Chứng minh rằng:

a) $A = 16^5 + 2^{15} : 33$

b) $B = 8^8 + 2^{20} : 17$

Lời giải

a) Ta có $A = 16^5 + 2^{15} = (2^4)^5 + 2^{15} = 2^{20} + 2^{15} = 2^{15} \cdot (2^5 + 1) = 2^{15} \cdot 33 : 33$

b) Ta có $B = 8^8 + 2^{20} = (2^3)^8 + 2^{20} = 2^{24} + 2^{20} = 2^{20} \cdot (2^4 + 1) = 2^{20} \cdot 17 : 17$

Bài 5: Cho $A = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99}$. Chứng minh A chia hết cho 31.

Lời giải

Nhận xét: Để chứng minh một tổng lũy thừa chia hết cho một số k ta cần thực hiện nhóm số hạng để biến đổi tổng đó về dạng tích của số k với một biểu thức nào đó

$$\begin{aligned} A &= 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99} \\ &= (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^5 \cdot (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + 2^{95} \cdot (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4) \\ &= (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4) \cdot (1 + 2^5 + 2^{10} + \dots + 2^{95}) \\ &= 31 \cdot (1 + 2^5 + 2^{10} + \dots + 2^{95}) : 31 \end{aligned}$$

Bài 6: Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99}$ hoặc $A = 2^{100} - 1$. Chứng minh rằng A chia hết cho 3; 15; 31.

Lời giải

Ta có A có 100 số hạng

a) Ta có $A = (1 + 2) + (2^2 + 2^3) + \dots + (2^{98} + 2^{99})$

$$= 3 + 2^2 \cdot (1 + 2) + \dots + 2^{98} \cdot (1 + 2)$$

$$= 3 \cdot (1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{98}) : 3$$

b) Ta có $A = (1 + 2 + 2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7) + \dots + (2^{96} + \dots + 2^{99})$

$$= 15 \cdot (1 + 2^4 + \dots + 2^{96}) : 15$$

Bài 7: Cho $M = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{118} + 3^{119}$. Chứng minh rằng M chia hết cho 13.

Lời giải

Ta có:

$$M = (1 + 3 + 3^2) + (3^3 + 3^4 + 3^5) + \dots + (3^{117} + 3^{118} + 3^{119})$$

$$= (1 + 3 + 3^2) + 3^3(1 + 3 + 3^2) + \dots + 3^{117} \cdot (1 + 3 + 3^2)$$

$$\Rightarrow M = 13 + 3^3 \cdot 13 + \dots + 13 \cdot 3^{117} = 13 \cdot (1 + 3^3 + \dots + 3^{117}) : 13$$

Bài 8: Cho $B = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{11}$. Chứng minh rằng B chia hết cho 4.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}B &= 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{11} = (1 + 3) + (3^2 + 3^3) + \dots + (3^{10} + 3^{11}) \\&= 4 + 3^2 \cdot (1 + 3) + \dots + 3^{10} \cdot (1 + 3) \\&= 4 + 3^2 \cdot 4 + \dots + 3^{10} \cdot 4 \\&= 4 \cdot (1 + 3^2 + \dots + 3^{10}) : 4\end{aligned}$$

Bài 9: Cho $C = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^8$. Chứng minh rằng C chia hết cho 30.

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } C &= 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^8 = (5 + 5^2) + (5^3 + 5^4) + \dots + (5^7 + 5^8) \\&= 30 + 5^2 \cdot (5 + 5^2) + \dots + 5^6 \cdot (5 + 5^2) \\&= 30 + 5^2 \cdot 30 + \dots + 5^6 \cdot 30 = 30 \cdot (1 + 5^2 + \dots + 5^6) : 30\end{aligned}$$

Bài 10: Cho $D = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60}$. Chứng minh rằng D chia hết cho 3, 7, 15.

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } D &= 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60} \\&= (2 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + \dots + (2^{59} + 2^{60}) \\&= 2 \cdot (1 + 2) + 2^3 \cdot (1 + 2) + \dots + 2^{59} \cdot (1 + 2) \\&= 2 \cdot 3 + 2^3 \cdot 3 + \dots + 2^{59} \cdot 3 = 3 \cdot (2 + 2^3 + \dots + 2^{59}) : 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D &= 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60} \\&= (2 + 2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5 + 2^6) + \dots + (2^{58} + 2^{59} + 2^{60}) \\&= 2 \cdot (1 + 2 + 2^2) + 2^4 \cdot (1 + 2 + 2^2) + \dots + 2^{58} \cdot (1 + 2 + 2^2) \\&= 2 \cdot 7 + 2^4 \cdot 7 + \dots + 2^{58} \cdot 7 \\&= 7 \cdot (2 + 2^4 + \dots + 2^{58}) : 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D &= 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60} \\&= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + (2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8) + \dots + (2^{57} + 2^{58} + 2^{59} + 2^{60}) \\&= 2 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3) + 2^5 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3) + \dots + 2^{57} \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3) \\&= 2 \cdot 15 + 2^5 \cdot 15 + \dots + 2^{57} \cdot 15 = 15 \cdot (2 + 2^5 + \dots + 2^{57}) : 15\end{aligned}$$

Bài 11: Cho $E = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1991}$. Chứng minh rằng E chia hết cho 13 và 41.

Lời giải

Ta có: $E = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1991} = (1 + 3 + 3^2) + (3^3 + 3^4 + 3^5) + \dots + (3^{1989} + 3^{1990} + 3^{1991})$

$E = 13 + 3^3 \cdot (3 + 3 + 3^2) + \dots + 3^{1989} \cdot (1 + 3 + 3^2) = 13 + 13 \cdot 3^3 + \dots + 3^{1989} \cdot 13 = 13 \cdot (1 + 3^3 + \dots + 3^{1989}) : 13$

$E = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1991}$

$E = (1 + 3^2 + 3^4 + 3^6) + (3 + 3^3 + 3^5 + 3^7) + \dots + (3^{1984} + 3^{1986} + 3^{1988} + 3^{1990}) + (3^{1985} + 3^{1987} + 3^{1989} + 3^{1991})$

$E = (1 + 3^2 + 3^4 + 3^6) + 3 \cdot (1 + 3^2 + 3^4 + 3^6) + \dots + 3^{1984} \cdot (1 + 3^2 + 3^4 + 3^6) + 3^{1985} \cdot (1 + 3^2 + 3^4 + 3^6)$

$E = (1 + 3^2 + 3^4 + 3^6) \cdot (1 + 3 + \dots + 3^{1984} + 3^{1985}) = 820 \cdot (1 + 3 + \dots + 3^{1984} + 3^{1985}) = 41 \cdot 20 \cdot (1 + 3 + \dots + 3^{1984} + 3^{1985}) : 41$

Bài 12:

a) Chứng minh rằng: $2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100} : 3$.

b) Chứng minh rằng: $7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2000} : 8$.

c) Chứng minh rằng: $S = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1997} + 3^{1998} : 26$

d) Chứng minh rằng: $B = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$ (có 100 số hạng) chia hết cho 120.

Lời giải

a) Ta có $2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100} = (2^1 + 2^2) + \dots + (2^{99} + 2^{100})$

$= 2^1(1 + 2) + \dots + 2^{99}(1 + 2) = 3(2^1 + 2^3 + \dots + 2^{99}) : 3$

b) Ta có: $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \dots + 7^{2000} = (7 + 7^2) + (7^3 + 7^4) + \dots + (7^{1999} + 7^{2000})$

$= 7(1 + 7) + 7^3(1 + 7) + \dots + 7^{1999}(1 + 7) = 8(7 + 7^3 + \dots + 7^{1999}) : 8$

c) Ta có $26 = 13 \cdot 2$, ta đi chứng minh S chia hết cho 13 và 2

Ta có S có 1998 số hạng, chia ra làm 666 nhóm

$S = (3^1 + 3^2 + 3^3) + \dots + (3^{1996} + 3^{1997} + 3^{1998}) = 13 \cdot \underbrace{(3^1 + 3^4 + \dots + 3^{1996})}_{666 \text{ số hạng lẻ chẵn} : 2} \Rightarrow S : 13 \cdot 2 = 26$

d) Ta có $B = \underbrace{(3 + 3^2 + 3^3 + 3^4)}_{:120} + \dots + \underbrace{(3^{97} + 3^{98} + 3^{99} + 3^{100})}_{:120} \Rightarrow B : 120$

Bài 13: Cho $C = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11}$. Chứng minh rằng

a) C chia hết cho 13

b) C chia hết cho 40.

Lời giải

a) Ta có $C = (1 + 3 + 3^2) + (3^3 + 3^4 + 3^5) + \dots + (3^9 + 3^{10} + 3^{11}) = 13(1 + 3^3 + \dots + 3^9) : 13$

b) Nhóm 4 số hạng vào 1 nhóm ta được $C = 40.(1 + 3^4 + 3^8)$ chia hết cho 40 (đpcm)

Bài 14: Chứng minh rằng: $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 100^3$ chia hết cho $B = 1 + 2 + \dots + 100$.

Lời giải

Ta có $B = (1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (50 + 50) = 101.50$

Để chứng minh A chia hết cho B ta chứng minh A chia hết cho 50 và 101

$$A = (1^3 + 100^3) + (2^3 + 99^3) + \dots + (50^3 + 51^3)$$

$$A = (1 + 100)(1^2 + 100 + 100^2) + (2 + 99)(2^2 + 2.99 + 99^2) + \dots + (50 + 51)(50^2 + 50.51 + 51^2)$$

$$A = 101(1^2 + 100 + 100^2 + 2^2 + 2.99 + 99^2 + \dots + 50^2 + 50.51 + 51^2) : 101 \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } A = \underbrace{(1^3 + 99^3)}_{:50} + \underbrace{(2^3 + 98^3)}_{:50} + \dots + \underbrace{(50^3 + 100^3)}_{:50} \Rightarrow A : 50(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra A chia hết cho $50.101 = B$

Dạng 2: Chứng minh biểu thức đại số có chứa lũy thừa chia hết cho một số tự nhiên.

I. Phương pháp giải:

- Vận dụng phân tích đa thức thành nhân tử (phân tích thành thừa số) để xét tính chất chia hết.

- Vận dụng các tính chất chia hết của một tổng, một hiệu.

II. Bài toán

Bài 15: Chứng minh rằng:

a) $A = n^5 - n : 30, \forall n \in \mathbb{Z}$

b) $B = n^4 - 10n^2 + 9 : 384$ với mọi n lẻ và $n \in \mathbb{Z}$

c) $C = 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n : 10$

d) $D = 2^{4n} - 1 : 15, \forall n \in \mathbb{N}$

e) $C = 10^n + 18.n - 1 : 27$.

Lời giải

a) Ta có $A = n^5 - n = n \cdot (n^4 - 1)$

$$= n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1) \cdot (n^2 + 1)$$

$$= (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (n^2 + 1) : 6$$

vì $(n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3. (*)

$$\begin{aligned}
 \text{Mặt khác } A &= n^5 - n = n \cdot (n^4 - 1) \\
 &= n \cdot (n^2 - 1) \cdot (n^2 + 1) \\
 &= n \cdot (n^2 - 1) \cdot (n^2 - 4 + 5) \\
 &= n \cdot (n^2 - 1) \cdot (n^2 - 4) + 5 \cdot n \cdot (n^2 - 1) \\
 &= (n - 2) \cdot (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) + 5 \cdot n \cdot (n^2 - 1)
 \end{aligned}$$

Mà $(n - 2)(n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)$ là tích của năm số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 5 và $5 \cdot n \cdot (n^2 - 1)$ chia hết cho 5.

$$\Rightarrow A = n^5 - n : 5 \quad (**)$$

Từ (*) và (**), ta có A chia hết cho 30.

$$\begin{aligned}
 \text{b) Ta có } A &= n^4 - 10n^2 + 9 = (n^4 - n^2) - (9n^2 - 9) \\
 &= n^2 \cdot (n^2 - 1) - 9 \cdot (n^2 - 1) \\
 &= (n^2 - 1) \cdot (n^2 - 9) \\
 &= (n - 1) \cdot (n + 1) \cdot (n - 3) \cdot (n + 3) \\
 &= (n - 3) \cdot (n - 1) \cdot (n + 1) \cdot (n + 3)
 \end{aligned}$$

Vì n lẻ nên đặt $n = 2k + 1 (k \in \mathbb{Z})$ nên

$$\begin{aligned}
 A &= (2k - 2) \cdot 2k \cdot (2k + 2) \cdot (2k + 4) \\
 &= 16 \cdot (k - 1) \cdot k \cdot (k + 1) \cdot (k + 2) : 16 \quad (1)
 \end{aligned}$$

Và $(k - 1) \cdot k \cdot (k + 1) \cdot (k + 2)$ là tích của 4 số nguyên liên tiếp nên A có chứa bội của 2, 3, 4 nên A là bội của 24 hay A chia hết cho 24. (2)

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow A : (16 \cdot 24) \text{ hay } A : 384.$$

$$\text{c) Ta có } C = 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 3^n \cdot (3^2 + 1) - 2^n \cdot (2^2 + 1) = \underbrace{10 \cdot 3^n}_{:10} - \underbrace{5 \cdot 2^n}_{:10}$$

$$\text{d) Ta có } D = 2^{4 \cdot n} - 1 = 16^n - 1 = (16^n - 16^{n-1}) + (16^{n-1} - 16^{n-2}) + \dots + (16 - 1)$$

$$D = 16^{n-1} \cdot (16 - 1) + 16^{n-2} \cdot (16 - 1) + \dots + (16 - 1)$$

$$D = 16^{n-1} \cdot 15 + 16^{n-2} \cdot 15 + \dots + 15$$

$$D = 15 \cdot (16^{n-1} + 16^{n-2} + \dots + 1) : 15$$

e) Ta có $C = 10^n + 18 \cdot n - 1 = (10^n - 1) + 18 \cdot n = 99 \dots 9 + 18 \cdot n$ (Số 99...9 có n chu số 9)

$$C = 9 \cdot (11 \dots 1 + 2 \cdot n) \text{ (Số 11...1 có n chu số 1)}$$

$$C = 9 \cdot L$$

Xét biểu thức trong ngoặc

$$L = 11 \dots 1 + 2 \cdot n = 11 \dots 1 - n + 3 \cdot n \text{ (Số 11...1 có n chu số 1)}$$

Ta đã biết một số tự nhiên và tổng các chữ số của nó sẽ có cùng số dư trong phép chia cho 3.

Số 11...1 (n chu số 1) có tổng các chữ số là $1 + 1 + \dots + 1 = n$ (vì có n chu số 1)

$\Rightarrow 11 \dots 1$ (n chu số 1) và n có cùng số dư trong phép chia cho 3n.

$$\Rightarrow (11 \dots 1 - n) : 3$$

$$\Rightarrow L : 3$$

$$\Rightarrow 9 \cdot L : 27$$

$$\Rightarrow C = 10^n + 18n - 1 : 27$$

Điều ngược lại cũng đúng.

Bài 16: Cho n là số tự nhiên khác 0, chứng minh rằng $A = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 : 9$.

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \underbrace{3 \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n-1)}_{:9} + \underbrace{9 \cdot n^2 + 18 \cdot n + 9}_{:9} \text{ (đpcm)}$$

Bài 17: Chứng minh rằng: $A = 10^n + 72 \cdot n - 1$ chia hết cho 81.

Lời giải

$$\text{Ta có } A = 10^n - 1 + 72 \cdot n = (10 - 1) \cdot (10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1)$$

$$= 9 \cdot (10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1) - 9 \cdot n + 81 \cdot n$$

$$= 9 \cdot (10^{n-1} + \dots + 10 + 1 - n) + 81 \cdot n$$

$$= 9 \cdot [(10^{n-1} - 1) + (10^{n-2} - 1) + \dots + (1 - 1)] + 81 \cdot n$$

$$\text{Lại có: } 10^k - 1 = (10 - 1)(10^{k-1} + \dots + 10 + 1) : 9$$

$$\Rightarrow 9[(10^{n-1} - 1) + (10^{n-2} - 1) + \dots + (1 - 1)] : 81$$

$$\Rightarrow 9[(10^{n-1} - 1) + (10^{n-2} - 1) + \dots + (1 - 1)] + 81.n : 81$$

$$\Rightarrow A : 81$$

Dạng 3: Chứng minh biểu thức đại số chia hết cho một số.

I. Phương pháp giải:

- Chứng minh biểu thức có chữ số tận cùng chia hết cho số đó
- Vận dụng tính chất chia hết của một tổng

II. Bài toán

Bài 18: Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}$ thì tích $(n+3).(n+6)$ chia hết cho 2.

Lời giải

Ta xét các trường hợp:

Nếu n là số lẻ thì $n+3$ là số chẵn; $n+6$ là số lẻ.

Mà số chẵn nhân với số lẻ có tận cùng là số chẵn.

$\Rightarrow (n+3)(n+6) : 2$. Nếu n là số chẵn thì $n+3$ là số lẻ; $n+6$ là số chẵn.

Mà tích của một số lẻ với một số chẵn có tận cùng là chữ số chẵn

$\Rightarrow (n+3).(n+6) : 2$.

Vậy với mọi n thuộc $\mathbb{N}$ thì tích $(n+3)(n+6)$ chia hết cho 2 (đpcm).

Bài 19: Chứng minh rằng $(1005.a + 2100.b)$ chia hết cho 15 với mọi a, b thuộc $\mathbb{N}$.

Lời giải

Vì $1005 : 3$ nên $1005.a : 3$ với $\forall a \in \mathbb{N}$.

Vì $2100 : 3$ nên $2100.b : 3$ với $\forall b \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow (1005.a + 2100.b) : 3, \forall a, b \in \mathbb{N}$.

Vì $1005 : 5$ nên $1005.a : 5$ với $\forall a \in \mathbb{N}$.

Vì $2100 : 5$ nên $2100.b : 5$ với $\forall b \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow (1005.a + 2100.b) : 5, \forall a, b \in \mathbb{N}$.

Mà $(3; 5) = 1 \Rightarrow (1005.a + 2100.b) : 15$ với $\forall a, b \in \mathbb{N}$.

Dạng 4: Chứng minh các bài toán chia hết theo tính chất hai chiều.

I. Phương pháp giải:

- Vận dụng tính chất chia hết của một tổng

II. Bài toán

Bài 20: Chứng minh rằng

a) $\overline{abcd}$ chia hết cho 29 $\Leftrightarrow a + 3.b + 9.c + 27.d : 29$

b) $\overline{abc}$ chia hết cho 21 $\Leftrightarrow a + 2.b + 4.c : 21$

c) $m + 4.n$ chia hết cho 13 $\Leftrightarrow 10.m + n : 13, \forall m, n \in \mathbb{N}.$

Lời giải

a) Ta có: $\overline{abcd} : 29 \Leftrightarrow 1000.a + 100.b + 10.c + d : 29$

$$\Leftrightarrow 2000.a + 200.b + 20.c + 2.d : 29$$

$$\Leftrightarrow 2001.a - a + 203.b - 3.b + 29.c - 9.c + 29.d - 27.d : 29$$

$$\Leftrightarrow (2001.a + 203.b + 29.c + 29.d) - (a + 3.b + 9.c - 27.d) : 29$$

$$\Leftrightarrow (29.69.a + 29.7.b + 29.c + 29.d) - (a + 3.b + 9.c - 27.d) : 29$$

$$\Leftrightarrow (a + 3.b + 9.c - 27.d) : 29$$

b) Ta có:

$$\overline{abc} : 21$$

$$\Leftrightarrow 100.a + 10.b + c : 21$$

$$\Leftrightarrow (100.a - 84.a) + (10.b - 42.b) + (c + 63.c) + 84.a + 42.b - 63.c : 21$$

$$\Leftrightarrow 16.a - 32.b + 64.c + 84.a + 42.b - 63.c : 21$$

$$\Leftrightarrow (16.a - 32.b + 64.c) + (84.a + 42.b - 63.c) : 21$$

$$\Leftrightarrow 16.(a - 2.b + 4.c) + (21.4.a + 21.2.b - 21.3.c) : 21$$

$$\Leftrightarrow a - 2.b + 4.c : 21$$

c) Ta có:

$$m + 4.n : 13$$

$$\Leftrightarrow 3.(m + 4.n) : 13$$

$$\Leftrightarrow 3.m + 12.n : 13$$

$$\Leftrightarrow 13.m - 10.m + 13.n - n : 13$$

$$\Leftrightarrow (13.m + 13.n) - (10.m + n) : 13$$

$$\Leftrightarrow 13.(m + n) - (10.m + n):13$$

$$\Leftrightarrow (10.m + n):13$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overline{abcabc} &= \overline{abc000} + \overline{abc} = 1000.\overline{abc} + \overline{abc} \\ &= 1001.\overline{abc} = 7.11.13.\overline{abc}:7;11;13. \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Bài 21: Chứng minh rằng

a) Nếu $\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}$ chia hết cho 11 thì $\overline{abcdeg}$ cũng chia hết cho 11, điều ngược lại có đúng không?

b) Nếu $\overline{abc} - \overline{deg}:7$ thì $\overline{abcdeg}$ cũng chia hết cho 7.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } \overline{abcdeg} &= 10000.\overline{ab} + 100.\overline{cd} + \overline{eg} \\ &= \underbrace{9999.\overline{ab}}_{:11} + \underbrace{99.\overline{cd}}_{:11} + \underbrace{\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}}_{:11} \Rightarrow \overline{abcdeg}:11 \end{aligned}$$

Điều ngược lại cũng đúng

$$\begin{aligned} \text{b) } \overline{abcdeg} &= 1000.\overline{abc} + \overline{deg} \\ &= 1001.\overline{abc} - \overline{abc} + \overline{deg} \\ &= \underbrace{1001.\overline{abc}}_{:7} - \underbrace{(\overline{abc} - \overline{deg})}_{:7} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{abcdeg}:7$$

Dạng 5: Chứng minh các bài toán có vận dụng tính chất chia hết để tìm số dư.

I. Phương pháp giải:

- Vận dụng tính chất chia hết của một tổng

II. Bài toán

Bài 22:

a) Chứng minh rằng: Tổng của ba số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 3 còn tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp không chia hết cho 4.

b) Chứng minh rằng: Tổng của 5 số chẵn liên tiếp chia hết cho 10, tổng của 5 số lẻ liên tiếp chia 10 dư 5.

Lời giải

a) Ta có tổng của ba số tự nhiên liên tiếp là: $n + n + 1 + n + 2 = (3.n + 3):3$ với mọi n là số tự nhiên

và tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp là $n + n + 1 + n + 2 + n + 3 = 4.n + 6 \not\vdots 4$ với mọi n là số tự nhiên.

b) Tổng của 5 số tự nhiên chẵn liên tiếp là $2.k + 2.k + 2 + 2.k + 4 + 2.k + 6 + 2.k + 8 = (10.k + 20):10$ với mọi k

Tổng của 5 số tự nhiên lẻ liên tiếp là $2.k + 1 + 2.k + 3 + 2.k + 5 + 2.k + 7 + 2.k + 9 = 10.k + 25$ chia cho 10 dư 5 (đpcm).

Bài 23:

a) Chứng minh rằng: Với mọi n thuộc $\mathbb{N}$ thì $60.n + 45$ chia hết cho 15 nhưng không chia hết cho 30.

b) Chứng minh rằng không có số tự nhiên nào mà chia cho 15 dư 6 và chia 9 dư 1.

c) Chứng minh rằng: $A = n^2 + n + 1$ không chia hết cho 2 và 5, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Lời giải

a) Ta có: $60:15 \Rightarrow 60.n:15 \Rightarrow 60.n + 45:15$ (theo tính chất chia hết của một tổng)

$60:30 \Rightarrow 60.n:30$; 45 không chia hết cho 30

$\Rightarrow 60.n + 45$ không chia hết cho 30 (theo tính chất chia hết của một tổng)

b) Giả sử có số $a \in \mathbb{N}$ thỏa mãn cả hai điều kiện trên thì

$$a = 15.q_1 + 6:3$$

$$a = 9.q_2 + 1 \text{ không chia hết cho 3}$$

Đó là điều mâu thuẫn.

Vậy không có số tự nhiên nào thỏa mãn (đpcm).

c) Vì $n.(n+1)$ là tích hai số tự nhiên liên tiếp, trong hai số liên tiếp luôn luôn có một số chẵn

$\Rightarrow n.(n+1)$ là số chẵn, cộng thêm 1 là số lẻ.

$\Rightarrow n.(n+1) + 1$ là số lẻ

$\Rightarrow n.(n+1) + 1$ không chia hết cho 2.

Để chứng minh $n.(n+1) + 1$ không chia hết cho 5 ta thấy hai số n và $n+1$ có các chữ số tận cùng sau:

$$n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

Tương ứng số tận cùng của $n+1$ lần lượt là 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 0.

$\Rightarrow$ tích của $n.(n+1)$ tận cùng là 0; 2; 6; 0; 0; 2; 6; 2; 0.

Hay là $n.(n+1) + 1$ tận cùng là: 1; 3; 7 không chia hết cho 5.

Bài 25: Cho $S = 3^2 + 3^4 + \dots + 3^{998} + 3^{1000}$

a) Tính S

b) Chứng minh rằng S chia cho 7 dư 6.**Lời giải**

a) Ta có tổng S có 100 số hạng

$$S = 3^2 + 3^4 + \dots + 3^{998} + 3^{1000} \Rightarrow 3^2 \cdot S = 3^4 + \dots + 3^{998} + 3^{1000} + 3^{1002}$$

$$3^2 \cdot S - S = 3^{1002} - 3^2 \Rightarrow S = \frac{3^{1002} - 3^2}{8}$$

b) Nhóm 3 hạng tử với nhau vậy dư 2 hạng tử dư

$$S = \underbrace{(3^2 + 3^4)}_{=90:7 \text{ dư } 6} + \underbrace{(3^6 + 3^8 + 3^{10})}_{:7} + \dots + \underbrace{(3^{96} + 3^{98} + 3^{100})}_{:7}$$

Bài 26: Cho $B = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$ (có 100 số hạng). Tìm số dư khi chia B cho 82.**Lời giải**

Ta có $3^0 + 3^4 = 82$, tổng hai lũy thừa cách nhau 4 số hạng chia hết cho 82 nên ta nhóm 8 số hạng với nhau và còn dư 4 số hạng

$$B = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + (3^5 + \dots + 3^{12}) + \dots + (3^{93} + \dots + 3^{100})$$

Ta đi chứng minh: $3^k + 3^{k+1} + \dots + 3^{k+7} : 82$

$$\text{Thật vậy: } (3^k + 3^{k+4}) + (3^{k+1} + 3^{k+5}) + (3^{k+3} + 3^{k+2+7}) = (3^k + 3^{k+1} + 3^{k+2} + 3^{k+3})(1 + 3^4) : 82 \text{ (đúng)}$$

Vậy số dư khi chia B cho 82 là số dư của 4 hạng tử còn lại là: $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4$ cho 82.

Kết luận: số dư là 38.

Bài 27: Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho khi viết tiếp số đó vào 2015 ta được một số chia hết cho 113**Lời giải**

Giả sử n có k chữ số

Theo bài ra ta có: $\overline{2015.n} : 113$

$$\text{Có: } \overline{2015.n} = 2015 \cdot \underbrace{10^k}_{k \text{ chữ số } 0} + n = (17 \cdot 13 + 94) \cdot 10^k + n$$

$$\Rightarrow \overline{2015.n} : 13 \Leftrightarrow 94 \cdot 10^k + n : 113 \quad (1)$$

$$+) \quad k = 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 94 \cdot 10 + n : 113 \Leftrightarrow 8 \cdot 113 + 36 + n : 113 \Leftrightarrow 36 + n : 113$$

$$0 < n \leq 9 \Rightarrow 36 + n : 113 \text{ (loại)}$$

$$+) \quad k = 2 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 94 \cdot 10^2 + n : 113 \Leftrightarrow 8 \cdot 113 + 21 + n : 113 \Leftrightarrow 21 + n : 113$$

CHUYÊN ĐỀ PHÉP CHIA HẾT VÀ PHÉP CHIA CÓ DƯ

$$\text{Mà } 10 \leq n \leq 99 \Rightarrow 21 + n = 113 \Leftrightarrow n = 92$$

Vậy $n = 92$ là giá trị cần tìm.

Bài 28: Chứng minh rằng: Nếu $\overline{abc} : 37$ thì $\overline{bca}; \overline{cab}$ đều chia hết cho 37.

Lời giải

Ta có:

$$A = \overline{abc} = (a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c) : 37$$

$$\Rightarrow 10A = (a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + 10 \cdot c) : 37$$

$$\Rightarrow 10A = 1000 \cdot a + 10^2 \cdot b + 10 \cdot c$$

$$\Rightarrow 10 \cdot A = \underbrace{10^2 \cdot b + 10 \cdot c + a}_{\overline{bca}} + 999 \cdot a = \overline{bca} + \underbrace{999 \cdot a}_{37 \cdot 27 \cdot a}$$

$$10 \cdot A : 37 \Rightarrow \overline{bca} : 37$$

$$\text{Tương tự } 10 \cdot \overline{bca} : 37; 999 \cdot b : 37 \Rightarrow \overline{cab} : 37$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Chứng minh rằng tổng của ba số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 3.

Lời giải

Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là: $a; a+1; a+2 (a \in \mathbb{N})$

Tổng của ba số tự nhiên liên tiếp là: $a + a + 1 + a + 2 = (3 \cdot a + 3) : 3$ (đpcm)

Bài 2: Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp có chia hết cho 4 không?

Lời giải

Gọi 4 số tự nhiên liên tiếp là: $a; a+1; a+2; a+3 (a \in \mathbb{N})$

Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp là: $a + a + 1 + a + 2 + a + 3 = 4 \cdot a + 6$

Do 4 chia hết cho 4 nên $4a$ chia hết cho 4 mà 6 không chia hết cho 4 nên $(4 \cdot a + 6)$ không chia hết cho 4.

$\Rightarrow$ Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp không chia hết cho 4.

Kết luận: Vậy không phải lúc nào tổng n số tự nhiên liên tiếp cũng chia hết cho n

Bài 3: Chứng minh $(495 \cdot a + 1035 \cdot b)$ chia hết cho 45 với mọi a, b là số tự nhiên.

Lời giải

Vì $495 : 9$ nên $1980 \cdot a : 9$ với mọi a .

Vì $1035:9$ nên $1035.b:9$ với mọi b .

Nên $(495.a + 1035.b):9$.

Chúng minh tương tự ta có: $(1980.a + 1995.b):5$ với mọi a, b .

Mà $(9, 5) = 1$.

$\Rightarrow (495.a + 1035.b):45$.

Bài 4: Chứng minh rằng tích của hai số chẵn liên tiếp luôn chia hết cho 8.

Lời giải

Gọi hai số chẵn liên tiếp là: $2.n; 2.n + 2 (n \in \mathbb{N}^*)$

Tích của hai số chẵn liên tiếp là: $2.n.(2.n + 2) = 4.n.(n + 1)$

Vì $n; n + 1$ không cùng tính chẵn lẻ nên $n; n + 1$ chia hết cho 2.

Mà 4 chia hết cho 4 nên $4.n.(n + 1)$ chia hết cho 4.2

$\Rightarrow 4.n.(n + 1):8$.

$\Rightarrow 2.n.(2.n + 2):8$.

Bài 5: Chứng minh rằng

a) Tích của ba số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 3.

b) Tích của bốn số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 4.

Lời giải

a) Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là $n, n + 1, n + 2$.

Tích của ba số tự nhiên liên tiếp là $n.(n + 1).(n + 2)$.

Một số tự nhiên khi chia cho 3 có thể nhận một trong các số dư 0; 1; 2.

Nếu $r = 0$ thì n chia hết cho 3 $\Rightarrow n.(n + 1).(n + 2):3$.

Nếu $r = 1$ thì $n = 3.k + 1$ (k là số tự nhiên).

$\Rightarrow n + 2 = 3.k + 1 + 2 = (3.k + 3):3$.

$\Rightarrow n.(n + 1).(n + 2):3$

Nếu $r = 2$ thì $n = 3.k + 2$ (k là số tự nhiên).

$\Rightarrow n + 1 = 3.k + 2 + 1 = (3.k + 3):3$.

CHUYÊN ĐỀ PHÉP CHIA HẾT VÀ PHÉP CHIA CÓ DƯ

$$\Rightarrow n.(n+1).(n+2):3.$$

Tóm lại: $n.(n+1).(n+2)$ chia hết cho 3 với mọi n là số tự nhiên.

b. Chứng minh tương tự ta có $\Rightarrow n.(n+1).(n+2).(n+3):4$ chia hết cho 4 với mọi n là số tự nhiên.

Kết luận: Tích của n số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho n .

Bài 6: Chứng minh rằng:

a) $\overline{ab} + \overline{ba}$ chia hết cho 11

b) $\overline{ab} - \overline{ba}$ chia hết cho 9 với $a > b$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\overline{ab} + \overline{ba} = (10.a + b) + (10.b + a)$
 $= 11.a + 11.b$ chia hết cho 11.

b) Ta có: $\overline{ab} - \overline{ba} = (10.a + b) - (10.b + a)$
 $= 9.a - 9.b$ chia hết cho 9.

Bài 7: Chứng minh nếu $\overline{ab} + \overline{cd}:11$ thì $\overline{abcd}:11$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\overline{abcd} = 100.\overline{ab} + \overline{cd}$
 $= 99.\overline{ab} + (\overline{ab} + \overline{cd}):11$

Bài 8: Biết $\overline{abc}:27$ chứng minh $\overline{bca}:27$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\overline{abc}:27 \Rightarrow \overline{abc0}:27$
 $\Rightarrow 1000.a + \overline{bc0}:27$
 $\Rightarrow 999.a + a + \overline{bc0}:27$
 $\Rightarrow 27.37a + \overline{bca}:27$

Vì $27.37a:27$ nên $\overline{bca}:27$

Bài 9: Cho các chữ số 0, a, b. Hãy viết tất cả các số có ba chữ số tạo bởi ba số trên. Chứng minh rằng tổng tất cả các số đó chia hết cho 211.

Hướng dẫn giải

Tất cả các số có ba chữ số tạo bởi ba chữ 0, a, b là: $\overline{a0b}$; $\overline{ab0}$; $\overline{ba0}$; $\overline{b0a}$.

Tổng của các số đó là:

$$\begin{aligned}\overline{a0b} + \overline{ab0} + \overline{ba0} + \overline{b0a} &= 100.a + b + 100.a + 10.b + 100.b + 10.a + 100.b + a \\ &= 211a + 211b = 211.(a + b):211\end{aligned}$$

Bài 10: Chứng minh rằng $2113^{2000} - 2011^{2000}$ chia hết cho cả 2 và 5.

Hướng dẫn giải

Để số vừa chia hết cho cả 2 và 5 thì số phải có chữ số tận cùng là 0

$\Rightarrow$ Cần chứng minh số bị trừ và số trừ đều có chữ số tận cùng là 1

Chú ý: Số tự nhiên a có chữ số tận cùng là 1 thì a^n cũng có chữ số tận cùng là 1

$$2113^{2000} = (2113^4)^{500} = \dots^{-500} \Rightarrow 2113^{2000} \text{ có chữ số tận cùng là 1}$$

2011^{2000} luôn có chữ số tận cùng là 1

$\Rightarrow 2113^{2000} - 2011^{2000}$ có chữ số tận cùng là 0

$\Rightarrow 2113^{2000} - 2011^{2000}$ chia hết cho cả 2 và 5.

Bài 11: Chứng minh rằng

a) Nếu viết thêm vào đằng sau một số tự nhiên có 2 chữ số gồm chính 2 chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại thì được 1 số chia hết cho 11

b) Nếu viết thêm vào đằng sau một số tự nhiên có 3 chữ số gồm chính 3 chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại thì được 1 số chia hết cho 11.

Hướng dẫn giải

a) Gọi số tự nhiên có 2 chữ số là $\overline{ab}$, khi viết thêm ta được số $\overline{abba}$

Ta có: $\overline{abba} = 1000.a + 100.b + 10.b + a$

$$= 1001.a + 110.b$$

$$= 11.(91.a + 10.b):11$$

b) Gọi số tự nhiên có 3 chữ số là $\overline{abc}$, khi viết thêm ta được số $\overline{abccba}$

Ta có:

$$\overline{abccba} = 100000a + 10000b + 1000c + 100c + 10b + a$$

$$= 100001a + 10010b + 1100c$$

$$= 11(9091.a + 910.b + 100.c):11$$

Bài 12: Chứng minh nếu $\overline{ab} = 2.\overline{cd}$ thì $\overline{abcd} : 67$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\overline{abcd} = 100.\overline{ab} + \overline{cd} = 100.(2.\overline{cd}) + \overline{cd} = 201.\overline{cd}$

Vì $201 : 67 \Rightarrow \overline{abcd} : 67$

Bài 13: Chứng minh rằng $A = n^5 - n$ chia hết cho 30.

Hướng dẫn giải

Bài toán luôn đúng với $n = 0$ và $n = 1$

Xét $n \geq 2$

Đặt $A = n^5 - n = n.(n^2 + 1).(n^2 - 1)$

$$= n.(n^2 + 1).(n + 1).(n - 1)$$

Ta có $A : 10$ (vì n^5 và n có chữ số tận cùng giống nhau)

$A : 3$ (vì trong A có tích của 3 số tự nhiên liên tiếp $(n - 1).n.(n + 1)$)

$\Rightarrow A : 3; A : 10$

Mà $\text{UCLN}(3; 10) = 1 \Rightarrow A : 3.10 = 30$

Vậy $A : 30$

Bài 14: Cho 1 số có 3 chữ số có dạng $\overline{abc}$. Chứng minh rằng: $(\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}) : (a + b + c)$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\overline{abc} + (\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}) = 100.a + 100.b + 100.c + 10.a + 10.b + 10.c + a + b + c$

$$= 111.a + 111.b + 111.c + 111.(a + b + c)$$

$\Rightarrow (\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}) : (a + b + c)$

Bài 15: Chứng minh rằng $\overline{abcdeg}$ chia hết cho 23 và 29, biết rằng $\overline{abc} = 2.\overline{deg}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\overline{abcdeg} = 1000.\overline{abc} + \overline{deg}$

mà $\overline{abc} = 2.\overline{deg}$

$$\Rightarrow \overline{abcdeg} = 2001.\overline{deg} = 23.29.3.\overline{deg}$$

$\Rightarrow \overline{abcdeg}$ chia hết cho 23 và 29

Bài 16: Chứng minh rằng $\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}$ chia hết cho 11 thì $\overline{abcdeg}$ chia hết cho 11.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\overline{abcdeg} = 10000.\overline{ab} + 100.\overline{cd} + \overline{eg}$

$$= 9999.\overline{ab} + 99.\overline{cd} + (\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg})$$

Mà $(\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}) : 11$ và $9999.\overline{ab} : 11$ và $99.\overline{cd} : 11$

$\Rightarrow \overline{abcdeg}$ chia hết cho 11

CHUYÊN ĐỀ PHÉP CHIA HẾT VÀ PHÉP CHIA CÓ DƯ

Chủ đề 2: Dùng các dấu hiệu để chứng minh bài toán chia hết

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phép chia hết

Với a, b là số TN và b khác 0. Ta nói a chia hết b nếu tồn tại số TN q sao cho $a = b.q$

2. Tính chất chung

- 1) $a : b$ và $b : c$ thì $a : c$
- 2) $a : a$ với mọi a khác 0
- 3) $0 : b$ với mọi b khác 0
- 4) Bất cứ số nào cũng chia hết cho 1

3. Tính chất chia hết của tổng, hiệu

- Nếu a, b cùng chia hết cho m thì $a + b$ chia hết cho m và $a - b$ chia hết cho m .
- Tổng của 2 số chia hết cho m và 1 trong 2 số ấy chia hết cho m thì số còn lại cũng chia hết cho m .
- Nếu 1 trong 2 số a, b chia hết cho m số kia không chia hết cho m thì tổng, hiệu của chúng không chia hết cho m .

4. Tính chất chia hết của 1 tích

- Nếu một thừa số của tích chia hết cho m thì tích chia hết cho m .
- Nếu a chia hết cho m , b chia hết cho n thì $a.b$ chia hết cho $m.n$.
- Nếu a chia hết cho b thì: $a^n : b^n$

*) *Chú ý:*

$$a^n - b^n : (a - b) \forall n \geq 2$$

$$a^n - b^n : (a + b) \forall n \text{ chẵn}$$

5. Dấu hiệu chia hết

- a) Dấu hiệu chia hết cho 2: Một số chia hết cho 2 khi và chỉ khi chữ số tận cùng của số đó là số chẵn.
- b) Dấu hiệu chia hết cho 3 (hoặc 9)
 - Một số chia hết cho 3 (hoặc 9) khi và chỉ khi tổng các chữ của số đó chia hết cho 3 (hoặc 9).
 - Chú ý: Một số chia hết cho 3 (hoặc 9) dư bao nhiêu thì tổng các chữ số của nó chia cho 3 (hoặc 9) cũng dư bấy nhiêu và ngược lại.
- c) Dấu hiệu chia hết cho 5
 - Một số chia hết cho 5 khi và chỉ khi chữ số của số đó có tận cùng bằng 0 hoặc 5.
- d) Dấu hiệu chia hết cho 4 (hoặc 25)

- Một số chia hết cho 4 (hoặc 25) khi và chỉ khi hai chữ số tận cùng của số đó chia hết cho 4 (hoặc 25).

e) Dấu hiệu chia hết cho 8 (hoặc 125)

- Một số chia hết cho 8 (hoặc 125) khi và chỉ khi ba chữ số tận cùng của số đó chia hết cho 8 (hoặc 125).

f) Dấu hiệu chia hết cho 11

- Một số chia hết cho 11 khi và chỉ khi hiệu giữa tổng các chữ số hàng lẻ và tổng các chữ số hàng chẵn (từ trái sang phải) chia hết cho 11.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI TOÁN CHIA HẾT

Dạng 1: Chứng minh một biểu thức chia hết cho một số

I. Phương pháp giải: Chứng minh biểu thức A chia hết cho số m.

- Viết biểu thức A thành một tổng (hiệu) các số trong đó mỗi số đều chia hết cho m từ đó suy ra A chia hết cho m.

- Viết biểu thức A thành một tích các thừa số trong đó có thừa số chia hết cho m từ đó suy ra A chia hết cho m.

- Viết m thành một tích các thừa số nguyên tố cùng nhau và chỉ ra biểu thức A chia hết cho các thừa số của m từ đó suy ra A chia hết cho m.

- Viết biểu thức A và m thành một tích các thừa số và chỉ ra mỗi thừa số của A chia hết cho một thừa số của m từ đó suy ra A chia hết cho m.

- Viết A thành một tổng hoặc hiệu các số mà có tổng hoặc hiệu các số dư chia hết cho m từ đó suy ra A chia hết cho m.

Cụ thể ta có thể vận dụng các PHƯƠNG PHÁP sau:

+ PHƯƠNG PHÁP 1: Nếu số A là một số cụ thể ta vận dụng dấu hiệu chia hết 2 ; 3 ; 4 ; 8 ; 9 ; 11 ; ... để chứng minh.

+ PHƯƠNG PHÁP 2: Nếu số A có tổng hoặc hiệu các số, ta cần phân tích số A để đưa số A về hoặc hiệu hoặc tích của các số có dấu hiệu chia hết rồi áp dụng tính chất chia hết của tổng (hiệu) hoặc tích để chứng minh.

+ PHƯƠNG PHÁP 3: Để chứng minh A chia hết cho p, ta xét mọi trường hợp về số dư khi chia A cho p.

+ PHƯƠNG PHÁP 4: Ngoài ra ta cũng có thể dùng cách tìm chữ số tận cùng của A để chứng minh A chia hết cho một số.

+ PHƯƠNG PHÁP 5: Nếu $A : m$ và $A : n$, đồng thời m và n là hai số nguyên tố cùng nhau thì A chia hết cho tích m.n

II. Bài toán

Bài 1: Tìm tất cả các cặp số $(x; y)$ sao cho

a) $\overline{34x5y} : 36$

b) $\overline{423x7y}:45$

c) $\overline{1x8y2}:36 \Leftrightarrow :4,9$

d) $\overline{21xy}:60$

Lời giải:

a) Ta có $\overline{34x5y}:36 \Leftrightarrow :4,9$

$$\Rightarrow \overline{5y}:4 \Leftrightarrow y \in \{2;6\} \Rightarrow x \in \{4;0;9\}$$

Vậy các cặp số $(x;y) = (4;2);(0;6);(9;6)$

b) Ta có $\overline{423x7y}:45 \Leftrightarrow :5,9$

$$\Rightarrow y \in \{0;5\} \Rightarrow x \in \{2;6\}$$

c) Ta có $\overline{1x8y2}:36 \Leftrightarrow :4,9$

$$\Rightarrow \overline{y2}:4 \Rightarrow y \in \{1;3;5;7;9\} \Rightarrow x \in \{6;4;2;0;9;7\}$$

$\Rightarrow$ có 6 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn bài toán

d) Ta có $\overline{21xy}:60$ hay $2100 + \overline{xy}:60$

$$\Rightarrow \overline{xy} = 00; \overline{xy} = 60$$

Bài 2: Tìm hai số tự nhiên liên tiếp trong đó có một số chia hết cho 9, biết rằng tổng của hai số đó thỏa mãn các điều kiện sau

- a) Là số có ba chữ số
- b) Là số chia hết cho 5
- c) Tổng của chữ x số hàng trăm và chữ số hàng đơn vị là số chia hết cho 9
- d) Tổng của chữ số hàng trăm và chữ số hàng chục là số chia hết cho 4

Lời giải:

Tổng của hai số tự nhiên chia hết cho 5 nên tận cùng là 5

Mà tổng của chữ số hàng trăm và hàng đơn vị bằng 9 nên chữ số hàng trăm phải bằng 4

Vậy tổng hai số tự nhiên có dạng: $\overline{4a5}$

$$\text{Mà } a + 4 : 4 \Rightarrow a \in \{0;4;8\}$$

Tổng của hai số đó là: $405 = 202 + 203; 445 = 222 + 333; 485 = 242 + 243$

Bài 3: Tìm các chữ số a, b sao cho $\overline{a56b}:45$

Lời giải:

Ta thấy $45 = 5.9$ mà $(5; 9) = 1$

$$\text{để } \overline{a56b}:45 \Leftrightarrow \overline{a56b}:5;9$$

$$\text{Xét } \overline{a56b}:5 \Leftrightarrow b \in \{0; 5\}$$

Nếu $b = 0$ ta có số $\overline{a56b}:9$

$$\Leftrightarrow (a + 5 + 6 + 0):9$$

$$\Leftrightarrow (a + 11):9 \Leftrightarrow a = 7$$

Nếu $b = 5$ ta có số $\overline{a56b}:9$

$$\Leftrightarrow (a + 5 + 6 + 5):9$$

$$\Leftrightarrow (a + 16):9 \Leftrightarrow a = 2$$

Vậy: $a = 7$ và $b = 0$ ta có số 7560

$a = 2$ và $b = 5$ ta có số 2560

Bài 4: Biết tổng các chữ số của 1 số là không đổi khi nhân số đó với 5. Chứng minh rằng số đó chia hết cho 9.

Lời giải:

Gọi số đã cho là a

Ta có: a và $5a$ khi chia cho 9 cùng có 1 số dư

$$\Leftrightarrow (5a - a):9$$

$$\Leftrightarrow 4a:9$$

$$\Leftrightarrow a:9$$

Vậy $a:9$

Bài 5: CMR số $\underbrace{111 \dots 111}_{81 \text{ số } 1}:81$

Lời giải:

Ta thấy: $11111111:9$

$$\text{Có } \underbrace{111 \dots 111}_{81 \text{ số } 1} = 11111111(10^{72} + 10^{63} + \dots + 10^9 + 1)$$

Mà tổng $(10^{72} + 10^{63} + \dots + 10^9 + 1)$ có tổng các chữ số bằng $9:9$

$$\Rightarrow (10^{72} + 10^{63} + \dots + 10^9 + 1):9$$

Vậy: $\underbrace{111 \dots 111}_{81 \text{ số } 1} : 81$

Bài 6: Tìm các chữ số x, y sao cho

a. $\overline{34x5y} : 4; 9$

b. $\overline{2x78} : 17$

Lời giải:

a) Để $\overline{34x5y} : 4 \Leftrightarrow \overline{5y} : 4 \Leftrightarrow y \in \{2, 6\}$

Nếu $y = 2$ ta có số $\overline{34x5y} : 9$

$$\Leftrightarrow (3 + 4 + 2 + 5 + x) : 9$$

$$\Leftrightarrow (x + 14) : 9 \Leftrightarrow x = 4$$

Nếu $y = 6$ ta có số $\overline{34x5y} : 9$

$$\Leftrightarrow (x + 5 + 6 + 6) : 9$$

$$\Leftrightarrow (x + 17) : 9 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy: $x = 1$ và $y = 6$ ta có số 34156

$x = 4$ và $y = 2$ ta có số 34452

b) $\overline{2x78} = 17(122 + 6x) + 2(2-x) : 17 \Leftrightarrow x = 2$

Bài 7: Cho số $N = \overline{dcba}$ CMR

a. $N : 4 \Rightarrow (a + 2b) : 4$

b. $N : 16 \Rightarrow (a + 2b + 4c + 8d) : 16$ với b chẵn

c. $N : 29 \Rightarrow (a + 3b + 9c + 27d) : 29$

Lời giải:

a. Ta có:

$$N : 4 \Leftrightarrow \overline{ba} : 4 \Leftrightarrow (10b + a) : 4$$

$$\Leftrightarrow 8b + (2b + a) : 4 \Rightarrow (2b + a) : 4$$

b. $N : 16 \Leftrightarrow 1000d + 100c + 10b + a : 16$

$$\Leftrightarrow (992d + 96c + 8b) + (8d + 4c + 2b + a) : 16$$

$$\Leftrightarrow (a + 2b + 4c + 8d) : 16$$

với b chẵn

c. Ta có:

$$100(d + 3c + 9b + 27a) - \overline{dbca} : 29$$

$$(1000; 29) = 1; \overline{dbca} : 29 \Rightarrow (d + 3c + 9b + 27a) : 29$$

Bài 8: Tìm tất cả các số có 2 chữ số sao cho mỗi số gấp 2 lần tích các chữ số của số đó.

Lời giải:

Gọi $\overline{ab}$ là số có 2 chữ số

Theo bài ra ta có:

$$\overline{ab} = 10a + b = 2ab(1)$$

$$\overline{ab} : 2 \Rightarrow b \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$$

Thay vào (1) $a = 3; b = 6$

Bài 9: Viết liên tiếp tất cả các số có 2 chữ số từ 19 đến 80 ta được số $A = 192021...7980$. Hỏi số A có chia hết cho 1980 không? Vì sao?

Lời giải:

$$\text{Có } 1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$$

Vì 2 chữ số tận cùng của a là $80 : 4$ và 5

$$\Rightarrow A : 4; 5$$

$$\text{Tổng các số hàng lẻ } 1 + (2 + 3 + \dots + 7) \cdot 10 + 8 = 279$$

$$\text{Tổng các số hàng chẵn } 9 + (0 + 1 + \dots + 9) \cdot 6 + 0 = 279$$

$$\text{Có } 279 + 279 = 558 : 9 \Rightarrow A : 9$$

$$279 - 279 = 0 : 11 \Rightarrow A : 11$$

Bài 10: Tổng của 46 số tự nhiên liên tiếp có chia hết cho 46 không? Vì sao?

Lời giải:

Có 46 số tự nhiên liên tiếp

$\Rightarrow$ có 23 cặp số mỗi cặp có tổng là 1 số lẻ

$\Rightarrow$ tổng 23 cặp không chia hết cho 2.

Vậy tổng của 46 số tự nhiên liên tiếp không chia hết cho 46.

Bài 11: Chứng tỏ rằng số $\underbrace{11 \dots 11}_{100 \text{ số } 1} \underbrace{22 \dots 22}_{100 \text{ số } 2}$ là tích của 2 số tự nhiên liên tiếp.

Lời giải:

$$\text{Có } \underbrace{11 \dots 11}_{100 \text{ số } 1} \underbrace{22 \dots 22}_{100 \text{ số } 2} = \underbrace{11 \dots 11}_{100 \text{ số } 1} \underbrace{100 \dots 02}_{99 \text{ số } 0}$$

$$\text{Mà } \underbrace{100 \dots 02}_{99 \text{ số } 0} = 3 \cdot \underbrace{33 \dots 34}_{99 \text{ số } 3}$$

$$\Rightarrow \underbrace{11 \dots 11}_{100 \text{ số } 1} \underbrace{22 \dots 22}_{100 \text{ số } 2} = \underbrace{33 \dots 33}_{100 \text{ số } 3} \underbrace{33 \dots 34}_{99 \text{ số } 3} \text{ (Đpcm)}$$

Dạng 2: Chứng minh một biểu thức chia hết cho một biểu thức.

I. Phương pháp giải:

- Biến đổi biểu thức bị chia thành tích của các biểu thức nhỏ trong đó có biểu thức chia hết cho biểu thức chia.

II. Bài toán

Bài 1: Cho $n \in \mathbb{N}, n > 2$. Chứng minh rằng a) $10^n + 2^3 : 9$

b) $10^n + 26 : 18$

c) $9^{2n+1} + 1 : 10$

Lời giải:

a) Ta có: $10^n + 2^3 : 9$ có tổng các chữ số = 9 nên chia hết cho 9

b) Ta có $10^n + 26 = 100\dots026$ (n-2 chữ số 0) có tổng các chữ số = 9 nên chia hết cho 9 và là số chẵn nên chia hết cho 2. Vậy chia hết cho 18

c) Ta có $9^{2n+1} + 1$ có tận cùng là 0 suy ra chia hết cho 10.

Vì 9^{2n+1} tận cùng là 9 do $2n+1$ lẻ.

Bài 2: Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng: $A = (2^{10} + 1)^{11} : 25$

b) $B = 39^{1001} + 21^{1000} : 10$

Lời giải:

$$\text{Ta có } A = (2^{10} + 1)^{11} = 1025^{11} : 25$$

Bài 4: Giả sử $S(a)$ là tổng các chữ số của số tự nhiên a. Chứng minh rằng

a) $a - S(a) : 9$

b) Nếu $S(a) = S(2a)$ thì a chia hết cho 9, điều ngược lại có đúng không?

Lời giải:

a) Đặt $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \rightarrow S(a) = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 + a_0$

$$\Rightarrow a - S(a) = a_n \cdot \underbrace{(10^n - 1)}_{:(10-1)} + a_{n-1} \cdot \underbrace{(10^{n-1} - 1)}_{:(10-1)} + \dots + \underbrace{9a_1}_{:9}$$

$$\Rightarrow a - S(a) : 9$$

b. $S(a) = S(2a)$

$$\Rightarrow a = \underbrace{[2a - S(2a)]}_{:9} - \underbrace{[a - S(a)]}_{:9}$$

$$\Rightarrow a : 9$$

Ví dụ: $a = 18 \Rightarrow S(a) = 9$

$$\Rightarrow a - S(a) = 9 : 9; 2a = 36$$

$$\Rightarrow S(2a) = 9$$

Bài 5: Số tự nhiên a có 26 chữ số, người ta đổi chỗ các chữ số của A để được 1 số B lớn gấp 3 lần số A. Chứng minh rằng $B : 27$

Lời giải:

$$B = 3A \Rightarrow B : 3 \Rightarrow S(A) : 3 \Rightarrow S(A) : 3 \Rightarrow A : 3$$

$$\text{Mà } \left. \begin{matrix} B = 3A \\ A : 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow B : 9 \Rightarrow S(B) : 9 \Rightarrow S(A) : 9 \Rightarrow A : 9$$

$$\text{Và } \left. \begin{matrix} B = 3A \\ A : 9 \end{matrix} \right\} \Rightarrow B : 27 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 6: Viết các số tự nhiên liên tiếp từ 10 đến 99 ta được số A. Số A có chia hết cho 99 không?

Lời giải:

Ta có 90 số thảo mãn bài toán: 10, 11, ..., 99

Tổng các chữ số hàng đơn vị là: $(0 + 1 + 2 + \dots + 9) \cdot 9 = 45 \cdot 9 = 405$

Tổng các chữ số hàng chục là: $(1 + 2 + \dots + 9) \cdot 10 = 45 \cdot 10 = 450$

Tổng các chữ số của A là: $405 + 450 = 855 \div 9 \Rightarrow A \div 9$

Bài 7: Chứng minh với mọi n là STN lẻ thì số $A = n^2 + 4n + 5 : 8$

Lời giải:

Vì n lẻ, ta đặt $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned}\Rightarrow A &= (2k+1)^2 + 4(2k+1) + 5 \\ &= 4k(k+1) + 8(k+1) + 2\end{aligned}$$

- Ta có k và $k+1$ là hai số TN liên tiếp có một số chẵn nên $4k(k+1):8$

Lại có $8(k+1):8; 2 \nmid 8 \Rightarrow A$ chia 8 dư 2.

Dạng 3: Cho một biểu thức chia hết cho m chứng minh một biểu thức khác chia hết cho m .

I. Phương pháp giải

- Vận dụng tính chất: $A:C; B:C \Rightarrow pA+qB:C$ từ đó tìm giá trị p và q thích hợp.

II. Bài toán

Bài 1: Chứng minh $(495a+1035b):45$ với mọi a, b là số tự nhiên.

Lời giải:

Vì $495:9$ nên $1980.a:9$ với mọi a .

Vì $1035:9$ nên $1035.b:9$ với mọi b .

Nên: $(495a+1035b):9$

Chứng minh tương tự ta có: $(495a+1035b):5$ với mọi a, b .

Mà $(9;5)=1 \Rightarrow (495a+1035b):45$ với mọi a, b là số tự nhiên.

Bài 2: Chứng minh rằng: Nếu $\overline{ab}+\overline{cd}:11$ thì $\overline{abcd}:11$

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{a, Ta có: } \overline{ab}+\overline{cd} &= a.10+b+10c+d \\ &= (a+c)10+b+d \\ &= \overline{(a+c)(b+d)}:11\end{aligned}$$

hay $(a+c)-(b+d):11$

Khi đó $\overline{abcd}:11$ vì có $(a+c)-(b+d):11$

Bài 3: Chứng minh rằng:

$$\text{a, CMR: } \overline{ab}=2.\overline{cd} \rightarrow \overline{abcd}:67$$

$$\text{b, Cho } \overline{abc}:27 \text{ cmr } \overline{bca}:27$$

Lời giải:

$$\text{a, Ta có: } \overline{abcd}=100\overline{ab}+\overline{cd}$$

$$= 200\overline{cd} + \overline{cd}$$

$$= 201\overline{cd}:67$$

b, Ta có : $\overline{abc}:27 \Rightarrow \overline{abc0}:27$

$$\Rightarrow 1000a + \overline{bc0}:27$$

$$\Rightarrow 999a + a + \overline{bc0}:27$$

$$\Rightarrow 27.37a + \overline{bca}:27$$

Nên $\overline{bca}:27$

Bài 4: Chứng minh rằng:

a, Nếu $(\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}):11$ thì $\overline{abcdeg}:11$

b, Nếu $\overline{abc} + \overline{deg}:37$ thì $\overline{abcdeg}:37$

c, Nếu $\overline{abcd}:99$ thì $\overline{ab} + \overline{cd}:99$

Lời giải:

a, Ta có : $\overline{abcdeg} = 10000.\overline{ab} + 100\overline{cd} + \overline{eg}$

$$= 9999\overline{ab} + 99\overline{cd} + (\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}):11$$

b, Ta có : $\overline{abcdeg} = 1000\overline{abc} + \overline{deg}$

$$= 999\overline{abc} + (\overline{abc} + \overline{deg}):37$$

c, Ta có : $\overline{abcd} = 100.\overline{ab} + \overline{cd}$

$$= 99.\overline{ab} + (\overline{ab} + \overline{cd}):99 \Rightarrow \overline{ab} + \overline{cd}:99$$

Câu 5: Chứng minh rằng: với $\forall n \in \mathbb{Z}$.

$$A = \left[n^3 (n^2 - 7)^2 - 36n \right] : 7$$

Lời giải

Ta có: $A = \left[n^3 (n^2 - 7)^2 - 36n \right]$

$$= n \left[n(n^2 - 7) - 6 \right] \left[n(n^2 - 7) + 6 \right]$$

$$= n(n^3 - 7n - 6)(n^3 - 7n + 6)$$

$$= n(n^3 - n - 6n - 6)(n^3 - n - 6n + 6)$$

$$\begin{aligned}
 &= n \left[(n^2 - 1) - 6(n+1) \right] \left[n(n^2 - 1) - 6(n-1) \right] \\
 &= n(n+1)(n^2 - n - 6)(n-1)(n^2 + n - 6) \\
 &= n(n+1)(n+2)(n-3)(n-1)(n-2)(n+3)
 \end{aligned}$$

Do đó A là tích của 7 số nguyên liên tiếp $\Rightarrow A:7 \forall n \in \mathbb{Z}$

Câu 6: Chứng minh rằng: $2009^{2008} + 2011^{2010}$ chia hết cho 2010

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2009^{2008} + 2011^{2010} = (2009^{2008} + 1) + (2011^{2010} - 1)$$

$$\text{Vì } 2009^{2008} + 1 = (2009 + 1)(2009^{2007} - \dots) = 2010 \cdot (\dots) \text{ chia hết cho 2010 (1)}$$

$$\text{Vì } 2011^{2010} - 1 = (2011 - 1)(2011^{2009} + \dots) = 2010 \cdot (\dots) \text{ chia hết cho 2010 (2)}$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Câu 7

a) Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9

b) Tìm các số nguyên n để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$

Lời giải

a) Gọi 2 số phải tìm là a và b , ta có $a + b$ chia hết cho 3

$$\text{Ta có: } a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b) \left[(a + b)^2 - 3ab \right]$$

Vì $a + b$ chia hết cho 3 nên $(a + b)^2 - 3ab$ chia hết cho 3.

Do vậy, $(a + b) \left[(a + b)^2 - 3ab \right]$ chia hết cho 9

b) Ta có:

$$n^5 + 1 : (n^3 + 1) \Leftrightarrow (n^5 + n^2 - n^2 + 1) : (n^3 + 1)$$

$$\Leftrightarrow n^2(n^3 + 1) - (n^2 - 1) : (n^3 + 1)$$

$$\Leftrightarrow (n - 1)(n + 1) : (n + 1)(n^2 - n + 1)$$

$$\Leftrightarrow n - 1 : n^2 - n + 1$$

$$\Rightarrow n(n - 1) : n^2 - n + 1$$

Hay $n^2 - n : n^2 - n + 1$

$$\Rightarrow (n^2 - n + 1) - 1 : (n^2 - n + 1)$$

$$\Rightarrow 1 : n^2 - n + 1$$

Xét hai trường hợp:

$$TH1: n^2 - n + 1 = 1 \Leftrightarrow n^2 - n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \end{cases}$$

$$TH2: n^2 - n + 1 = -1 \Leftrightarrow n^2 - n + 2 = 0, \text{ không có giá trị của } n \text{ thỏa mãn}$$

Câu 8: Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9

Lời giải

Gọi 2 số phải tìm là a và b , ta có $a + b$ chia hết cho 3.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ &= (a+b)[(a^2 + 2ab + b^2) - 3ab] \\ &= (a+b)[(a+b)^2 - 3ab] \end{aligned}$$

Vì $a + b$ chia hết cho 3 nên $(a+b)^2 - 3ab$ chia hết cho 3

Do vậy $(a+b)[(a+b)^2 - 3ab]$ chia hết cho 9

Câu 9: Chứng minh $n^3 + 17n$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{Z}$

Lời giải

$$n^3 + 17n = n^3 - n + 18n = n(n-1)(n+1) + 18n$$

Vì $n(n-1)(n+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3, $(2, 3) = 1$ nên chia hết cho 6

$18n:6$, suy ra điều phải chứng minh

Câu 10: Chứng minh rằng:

$$A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11} \text{ chia hết cho } 40.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11} \\ &= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) + (3^8 + 3^9 + 3^{10} + 3^{11}) \\ &= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^4 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^8(1 + 3 + 3^2 + 3^3) \\ &= 40 + 3^4 \cdot 40 + 3^8 \cdot 40 \\ &= 40 \cdot (1 + 3^4 + 3^8)40 \end{aligned}$$

Vậy $A:40$

Câu 11:

- a) Chứng minh rằng tổng lập phương của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 9
b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $A = 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} : 59$

Lời giải

- a) Ta phải chứng minh $A = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 : 9$ với $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} A &= n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8 \\ &= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 \\ &= 3n^3 - 3n + 9n^2 + 18n + 9 \\ &= 3n(n-1)(n+1) + 9(n^2 + 2n + 1) \end{aligned}$$

Nhận thấy $n(n-1)(n+1) : 3 \Rightarrow 3n(n-1)(n+1) : 9$ và $9(n^2 + 2n + 1) : 9$

Vậy $A : 9$

$$\begin{aligned} \text{b) } 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} &= 25 \cdot 5^n + 26 \cdot 5^n + 8 \cdot 8^{2n} \\ &= 5^n(59 - 8) + 8 \cdot 64^n \\ &= 59 \cdot 5^n + 8(64^n - 5^n) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } 59 \cdot 5^n : 59 \text{ và } 8 \cdot (64^n - 5^n) : (64 - 5) = 59$$

$$\text{Vậy } 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} : 59$$

Câu 12: Chứng minh rằng

- a) $8^5 + 2^{11}$ chia hết cho 17
b) $19^{19} + 69^{19}$ chia hết cho 44

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } 8^5 + 2^{11} &= (2^3)^5 + 2^{11} = 2^{15} + 2^{11} \\ &= 2^{11} \cdot (2^4 + 1) = 2^{11} \cdot 17 \text{ chia hết cho 17} \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} 19^{19} + 69^{19} &= (19 + 69)(19^{18} - 19^{17} \cdot 69 + \dots + 69^{18}) \\ &= 88 \cdot (19^{18} - 19^{17} \cdot 69 + \dots + 69^{18}) \text{ chia hết cho 44} \end{aligned}$$

Câu 13: Chứng minh rằng $a^5 - a : 30$ ($a \in \mathbb{Z}$)**Lời giải**

$$\begin{aligned}a^5 - a &= a(a^4 - 1) \\&= a(a^2 - 1)(a^2 + 1) \\&= a(a+1)(a-1)[(a-4)^2 + 5] \\&= a(a+1)(a-1)(a-2)(a+2) + 5a(a+1)(a-1)\end{aligned}$$

Do tích của số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 5 và trong 5 số nguyên liên tiếp luôn có ba số nguyên liên tiếp mà tích của chúng chia hết cho 6 và $(6, 5) = 1$

Suy ra $a(a+1)(a-1)(a-2)(a+2) : 30$ và $5a(a+1)(a-1) : 30$.

Vậy $a^5 - a : 30$

Câu 14: Cho a, b là hai số tự nhiên. Biết rằng a chia cho 5 dư 3 và b chia cho 5 dư 2. Hỏi tích $a.b$ chia cho 5 dư bao nhiêu ?

Lời giải

a chia cho 5 dư 3 nên tồn tại số tự nhiên m sao cho $a = 5m + 3$ (1)

b chia cho 5 dư 2 nên tồn tại số tự nhiên n sao cho $b = 5n + 2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a.b = (5m + 3).(5n + 2) = 5(5mn + 2m + 3n + 1) + 1$

Suy ra $a.b$ chia cho 5 dư 1.

Câu 15: Cho các số nguyên $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Đặt $S = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3$ và $P = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Chứng minh rằng: S chia hết cho 6 khi và chỉ khi P chia hết cho 6.

Lời giải

HD: Xét hiệu: $S - P$

Chứng minh: $a^3 - a = (a-1)a(a+1) : 6$ với mọi số nguyên a .

Sau đó sử dụng tính chất chia hết của một tổng suy ra đpcm.

Câu 16: Chứng minh rằng: $21^{30} + 39^{21}$ chia hết cho 45

Lời giải

Chứng minh rằng: $21^{30} + 39^{21}$ chia hết cho 45.

HD: Đặt $M = 21^{30} + 39^{21}$

Nhận xét $45 = 5.9$ mà 5 và 9 là hai số nguyên tố cùng nhau (1)

Vậy để c/m $M : 45$ ta cần c/m $M : 5$ và $M : 9$

Thật vậy, $M = 21^{30} + 39^{21} = (21^{30} - 1^{30}) + (39^{21} - (-1)) : 5$ (2)

(Vì $(21^{30} - 1^{30}) : (21 - 1) : 5$ và $(39^{21} - (-1)) : (39 - (-1)) : 5$)

Mặt khác, $21 : 3 \Rightarrow 21^{30} : 9$ và $39 : 3 \Rightarrow 39^{21} : 9$. Do đó, $M : 9$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra đpcm.

* Chú ý: $(a^n - b^n) : (a - b)$

Câu 17: Chứng minh rằng: $B = n^3 + 6n^2 - 19n - 24$ chia hết cho 6

Lời giải

Chứng minh rằng: $B = n^3 + 6n^2 - 19n - 24$ chia hết cho 6

Ta có:

$$\begin{aligned} B &= n^3 + 6n^2 - 19n - 24 = n^3 - n + 6n^2 - 18n - 24 \\ &= n(n^2 - 1) + 6(n^2 - 3n - 4) \\ &= (n-1)n(n+1) + 6(n^2 - 3n - 4) \end{aligned}$$

Vì $(n-1)n(n+1) : 6$ và $6(n^2 - 3n - 4) : 6$ nên $B = n^3 + 6n^2 - 19n - 24$ chia hết cho 6

(đpcm)

Câu 18: Chứng minh: Với mọi n là số tự nhiên chẵn thì biểu thức: $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1$ chia hết cho 6
chia hết cho 323 chia hết cho 6

Lời giải

Chứng minh: Với mọi n là số tự nhiên chẵn thì biểu thức: $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1$
chia hết cho 323

Ta có: $323 = 17 \cdot 19$ và $(17; 19) = 1$. Ta cần c/m: $A : 17; 19$

Ta có $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1 = (20^n - 3^n) + (16^n - 1)$

Mà $(20^n - 3^n) : (20 - 3) : 17(1)$

Và $(16^n - 1) : (16 + 1) : 17(2)$ (vì n là số chẵn) hay Từ (1) và (2) suy ra $A : 17$.

Tương tự, $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1 = (20^n - 1) + (16^n - 3^n)$

Mà $(20^n - 1) : (20 - 1) : 19(3)$

Và $(16^n - 3^n) : (16 + 3) : 19(4)$ (vì n là số chẵn)

Từ (3) và (4) suy ra $A : 19$.

$A = 20^n + 16^n - 3^n - 1$ chia hết cho 323 (đpcm)

Câu 19: a) Chứng minh rằng tổng lập phương của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 9

b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $A = 5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} : 59$

Lời giải

a) Ta phải chứng minh: $A = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 : 9$ với $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} A &= n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8 \\ &= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 \\ &= 3n^3 - 3n + 9n^2 + 18n + 9 \\ &= 3n(n-1)(n+1) + 9(n^2 + 2n + 1) \end{aligned}$$

Nhận thấy $n(n-1)(n+1) : 3 \Rightarrow 3n(n-1)(n+1) : 9$ và $9(n^2 + 2n + 1) : 9$

Vậy $A : 9$

$$\begin{aligned} b) 5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} &= 25.5^n + 26.5^n + 8.8^{2n} \\ &= 5^n(59 - 8) + 8.64^n = 59.5^n + 8(64^n - 5^n) \\ 59.5^n : 59 \text{ và } 8.(64^n - 5^n) : (64 - 5) &= 59 \end{aligned}$$

Vậy $5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} : 59$

Câu 20: Cho $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$ là các số tự nhiên có tổng chia hết cho 3

Chứng minh rằng: $A = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2016}^3$ chia hết cho 3.

Lời giải

Dễ thấy $a^3 - a = a(a-1)(a+1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 3

Xét hiệu:

$$\begin{aligned} A - (a_1 + a_2 + \dots + a_{2016}) &= (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2016}^3) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{2016}) \\ &= (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \dots + (a_{2016}^3 - a_{2016}) \end{aligned}$$

Các hiệu trên chia hết cho 3, do vậy A chia hết cho 3

Câu 21: Cho hai số nguyên, số thứ nhất chia cho 5 dư 1, số thứ hai chia cho 5 dư 2. Hỏi tổng bình phương của chúng có chia hết cho 5 không?

Lời giải

Vì số thứ nhất chia cho 5 dư 1 nên có dạng $5a + 1$, số thứ hai chia cho 5 dư 2 nên có dạng $5b + 2$ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

Ta có tổng bình phương hai số đó là:

$$(5a+1)^2 + (5b+1)^2 = 25a^2 + 10a + 1 + 25b^2 + 10b + 1 = 5(5a^2 + 5b^2 + 2a + 2b + 1) : 5$$

Vậy tổng bình phương của hai số chia hết cho 5

Câu 22: Chứng minh rằng $2009^{2008} + 2011^{2010}$ chia hết cho 2010

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2009^{2008} + 2011^{2010} = (2009^{2008} + 1) + (2011^{2010} - 1)$$

$$\text{Vì } 2009^{2008} + 1 = (2009 + 1)(2009^{2007} + \dots) : 2010 \quad (1)$$

$$2011^{2010} - 1 = (2011 - 1)(2011^{2009} + \dots) : 2010 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có đpcm.

Câu 23: Chứng minh rằng:

$$A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11} \text{ chia hết cho 40}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11} \\ &= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) + (3^8 + 3^9 + 3^{10} + 3^{11}) \\ &= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^4 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^8 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3) \\ &= 40 + 3^4 \cdot 40 + 3^8 \cdot 40 = 40 \cdot (1 + 3^4 + 3^8) : 40 \end{aligned}$$

Vậy $A : 40$

Câu 24: Chứng minh rằng $11^{10} - 1$ chia hết cho 100

Lời giải

$$\begin{aligned} 11^{10} - 1 &= (11 - 1)(11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1) \\ &= 10 \cdot (11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1) \end{aligned}$$

Vì $10 : 10$

Và $(11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1)$ có chữ số tận cùng bằng 0

Nên $(11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1)$ chia hết cho 10

Vậy $11^{10} - 1$ chia hết cho 100.

Câu 25: Chứng minh rằng $2009^{2008} + 2011^{2010}$ chia hết cho 2010

Lời giải

Ta có: $2009^{2008} + 2011^{2010} = (2009^{2008} + 1) + (2011^{2010} - 1)$

Vì $2009^{2008} + 1 = (2009 + 1)(2009^{2007} - \dots)$

$= 2010 \cdot (\dots)$ chia hết cho 2010 (1)

Vì $2011^{2010} - 1 = (2011 - 1)(2011^{2009} + \dots)$

$= 2010 \cdot (\dots)$ chia hết cho 2010 (2)

Từ (1) và (2) ta có đpcm.

Câu 26: Chứng minh rằng:

a) $8^5 + 2^{11}$ chia hết cho 17

b) $19^{19} + 69^{19}$ chia hết cho 44

Lời giải

Ta có: $8^5 + 2^{11} = (2^3)^5 + 2^{11} = 2^{15} + 2^{11} = 2^{11} \cdot (2^4 + 1) = 2^{11} \cdot 17$

Rõ ràng kết quả trên chia hết cho 17

Áp dụng hằng đẳng thức:

$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$ với mọi n lẻ

Ta có: $19^{19} + 69^{19} = (19 + 69)(19^{18} - 19^{17} \cdot 69 + \dots + 69^{18})$

$= 88 \cdot (19^{18} - 19^{17} \cdot 69 + \dots + 69^{18})$ chia hết cho 44

Câu 27: a) Chứng minh rằng: $n^3 + 3n^2 + 2n : 6$ với mọi số nguyên n

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} n^3 + 3n^2 + 2n &= n(n^2 + 3n + 2) = n(n^2 + n + 2n + 2) \\ &= n[(n^2 + n) + (2n + 2)] = n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

Vì n là số nguyên nên: $n; n+1; n+2$ là ba số nguyên liên tiếp. Do đó có ít nhất một số chia hết cho 2, 1 số chia hết cho 3

$\Rightarrow n(n+1)(n+2) : 6$ hay $n^3 + 3n^2 + 2n : 6$ với mọi số nguyên n

b) Tìm số nguyên n sao cho: $2n^3 + n^2 + 7n + 1 : (2n - 1)$

Lời giải

Để $2n^3 + n^2 + 7n + 1 : 2n - 1$ thì $5 : 2n - 1$ hay $2n - 1$ là Ư(5)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2n-1=-5 \\ 2n-1=-1 \\ 2n-1=1 \\ 2n-1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=-2 \\ n=0 \\ n=1 \\ n=3 \end{cases}$$

Vậy $n \in \{-2; 0; 1; 3\}$ thì $2n^3 + n^2 + 7n + 1 : 2n - 1$

Câu 28: Cho số tự nhiên $n > 3$.

Chứng minh rằng nếu $2^n = 10a + b$ ($a, b \in \mathbb{N}, 0 < b < 10$) thì tích ab chia hết cho 6

Lời giải

Ta có: $2^n = 10a + b \Rightarrow b : 2 \Rightarrow ab : 2$ (1)

Ta chứng minh $ab : 3$ (2)

Thật vậy, từ đẳng thức $2^n = 10a + b \Rightarrow 2^n$ có chữ số tận cùng là b

Đặt $n = 4k + r$ ($k, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r \leq 3$) ta có: $2^n = 16^k \cdot 2^r$

Nếu $r = 0$ thì $2^n - 2^r = 2^r \cdot (16^k - 1) : 10 \Rightarrow 2^n$ tận cùng là 2^r

Suy ra $b = 2^r \Rightarrow 10a = 2^n - 2^r = 2^r \cdot (16^k - 1) : 3 \Rightarrow a : 3 \Rightarrow ab : 3$

Từ (1) và (2) suy ra $ab : 6$

Câu 30: Cho n là số nguyên dương, chứng minh rằng $16^n - 15n - 1$ chia hết cho 225.

Lời giải

Với $n = 1$ ta có: $16 - 15 - 1 = 0 : 225$

Giả sử bài toán đúng với $n = k$ tức là ta có: $16^k - 15k - 1 : 225$

Ta chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$

Thật vậy:

$$\begin{aligned} 16^{k+1} - 15(k+1) &= 16 \cdot 16^k - 15k - 15 - 1 \\ &= 16(15+1) - 15k - 15 - 1 \\ &= 16^k - 15k - 1 + 15(15^k - 1) \\ &= 16^k - 15k - 1 + 15A(k) : 225 \end{aligned}$$

Vậy $16^n - 15n - 1$ chia hết cho 225 với mọi n là số nguyên dương.

Câu 31: Chứng minh rằng $2^{2008} + 2^{2009} + 2^{2010}$ chia hết cho 7

Lời giải

$$2^{2008} + 2^{2009} + 2^{2010} = 2^{2008} \cdot (1 + 2 + 4) = 7 \cdot 2^{2008} : 7$$

∞ HẾT ∞

CHUYÊN ĐỀ PHÉP CHIA HẾT VÀ PHÉP CHIA CÓ DƯ
CHỦ ĐỀ 3: DÙNG TÍNH CHẤT CHỨNG MINH BÀI TOÁN CHIA HẾT

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. TÍNH CHẤT CHUNG

- 1) $a:b$ và $b:c$ thì $a:c$
- 2) $a:a$ với mọi a khác 0
- 3) $0:b$ với mọi b khác 0
- 4) Bất cứ số nào cũng chia hết cho 1

2. TÍNH CHẤT CHIA HẾT CỦA TỔNG, HIỆU

- Nếu a, b cùng chia hết cho m thì $a + b$ chia hết cho m và $a - b$ chia hết cho m
- Tổng (Hiệu) của 2 số chia hết cho m và 1 trong 2 số ấy chia hết cho m thì số còn lại cũng chia hết cho m .
- Nếu 1 trong 2 số a, b chia hết cho m số kia không chia hết cho m thì tổng, hiệu của chúng không chia hết cho m .

3. TÍNH CHẤT CHIA HẾT CỦA 1 TÍCH

- Nếu một thừa số của tích chia hết cho m thì tích chia hết cho m
- Nếu a chia hết cho m thì bội của a cũng chia hết cho m
- Nếu a chia hết cho m , b chia hết cho n thì $a.b$ chia hết cho $m.n$
- Nếu a chia hết cho b thì: $a^m : b^m$

4. CÁC TÍNH CHẤT KHÁC:

- 1) $0:a$ ($a \neq 0$)
- 2) $a:a; a:1$ ($a \neq 0$)
- 3) $a:b; b:c \Rightarrow a:c$
- 4) $a:m; b:m \Rightarrow pa \pm qb : m$
- 5) $a:(m.n) \Rightarrow a:m; a:n$
- 6) $a:m; a:n; (m, n) = 1 \Rightarrow a:mn$
- 7) $a:m; b:n \Rightarrow ab:mn$
- 8) $ab:m; (b, m) = 1 \Rightarrow a:m$
- 9) $ab:p$ (p là số nguyên tố) thì hoặc $a:p$ hoặc $b:p$

5. CÁC TÍNH CHẤT SUY LUẬN ĐƯỢC

- Trong hai số tự nhiên liên tiếp có một số chẵn và một số lẻ.
- Tổng hai số tự nhiên liên tiếp là một số lẻ.
- Tích hai số tự nhiên liên tiếp là một số chẵn.
- Tích hai số chẵn liên tiếp chia hết cho 8.
- Tổng của hai số tự nhiên bất kỳ là một số lẻ thì có một số tự nhiên là số chẵn.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

- 1, **Dạng 1:** Chứng minh một biểu thức chia hết cho một số.
- 2, **Dạng 2:** Cho một biểu thức chia hết cho m chứng minh một biểu thức khác chia hết cho m .
- 3, **Dạng 3:** Tìm n để biểu thức $A(n)$ chia hết cho biểu thức $B(n)$
- 4, **Dạng 4:** Bài toán chứng minh chia hết liên quan đến số chính phương.
- 5, **Dạng 5:** Chứng minh một biểu thức chia hết cho một biểu thức.
- 6, **Dạng 6:** Chứng minh chia hết từ một đẳng thức cho trước.

Dạng 1: Chứng minh một biểu thức chia hết cho một số

I. Phương pháp giải: Chứng minh biểu thức A chia hết cho số m .

- Viết biểu thức A thành một tổng(hiệu) các số trong đó mỗi số đều chia hết cho m từ đó suy ra A chia hết cho m .
- Viết biểu thức A thành một tích các thừa số trong đó có thừa số chia hết cho m từ đó suy ra A chia hết cho m .
- Viết m thành một tích các thừa số nguyên tố cùng nhau và chỉ ra biểu thức A chia hết cho các thừa số của m từ đó suy ra A chia hết cho m .
- Viết biểu thức A và m thành một tích các thừa số và chỉ ra mỗi thừa số của A chia hết cho một thừa số của m từ đó suy ra A chia hết cho m .
- Viết A thành một tổng hoặc hiệu các số mà có tổng hoặc hiệu các số dư chia hết cho m từ đó suy ra A chia hết cho m .

Cụ thể ta có thể vận dụng các PHƯƠNG PHÁP sau:

- + PHƯƠNG PHÁP 1: Nếu A là một số cụ thể ta vận dụng dấu hiệu chia hết 2; 3; 4; 8; 9; 11; ... để chứng minh.
- + PHƯƠNG PHÁP 2: Nếu A có tổng hoặc hiệu các số, ta cần phân tích A để đưa A về hoặc hiệu hoặc tích của các số có dấu hiệu chia hết rồi áp dụng tính chất chia hết của tổng (hiệu) hoặc tích để chứng minh.
- + PHƯƠNG PHÁP 3: Để chứng minh A chia hết cho p , ta xét mọi trường hợp về số dư khi chia A cho p .
- + PHƯƠNG PHÁP 4: Ngoài ra ta cũng có thể dùng cách tìm chữ số tận cùng của A để chứng minh A chia hết cho một số.

+ PHƯƠNG PHÁP 5: Nếu $A:m$ và $A:n$ mà m và n là hai số nguyên tố cùng nhau thì $A:m.n$

II. Bài toán

Bài 1: Chứng minh rằng

a. $A = 10^{28} + 8 : 72$ b. $B = 81^7 - 27^9 - 9^{13} : 45$

Lời giải

a) **Cách 1:**

Ta có: $10^{28} = 2^{28} \cdot 5^{28} = 2^3 \cdot 2^{25} \cdot 5^{28} : 8$ và $8 : 8 \Rightarrow A : 8$

Lại có $10^{28} + 8$ có tổng các chữ số là 9 nên chia hết cho 9. Vậy A chia hết cho 72

Cách 2:

$10^{28} + 8$ có ba chữ số tận cùng là 008 nên chia hết cho 8

$$10^{28} + 8 = \underbrace{10^{28} - 1}_{:9} + \underbrace{9}_{:9} \Rightarrow A : 9 \Rightarrow A : 72$$

b) Ta có $81^7 ; 27^9 ; 9^{13}$ chia hết cho 9 nên B chia hết cho 9

Lại có 81^7 có tận cùng là 1

$$27^9 = 27^8 \cdot 27 = \overline{\dots 1} \cdot 27 \text{ có tận cùng là } 7$$

$$9^{13} = 9^{12} \cdot 9 = \overline{\dots 1} \cdot 9 \text{ có tận cùng là } 9$$

nên B có tận cùng là 5 nên B chia hết cho 5.

$$\text{Mà } (5; 9) = 1 \Rightarrow B : 5 \cdot 9 \Rightarrow B : 45$$

Bài 2: Chứng minh : $A = 2^{20} \cdot 2^4 + 2^{20}$ chia hết cho 17.

Lời giải

$$A = 2^{20} \cdot (16 + 1) = 2^{20} \cdot 17$$

$$\Rightarrow A : 17$$

Bài 3: Chứng minh rằng: $A = 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$ chia hết cho 19

Lời giải

$$\text{Thêm bớt } 7 \cdot 6^n, \text{ ta được: } A = 7 \cdot 25^n - 7 \cdot 6^n + 19 \cdot 6^n = 7 \cdot (25^n - 6^n) + 19 \cdot 6^n$$

$$\text{Ta có: } 25^n \equiv 6^n \pmod{19}$$

$$\Rightarrow (25^n - 6^n) \equiv 0 \pmod{19}$$

$$\Rightarrow 7 \cdot (25^n - 6^n) + 19 \cdot 6^n \equiv 19 \cdot 6^n \pmod{19}$$

$$\Rightarrow A \equiv 0 \pmod{19}$$

Vậy $A : 19$

Ghi chú: Đối với một số bài toán lớp 8 nếu ta sử dụng đến hằng đẳng thức: $a^n - b^n : a - b$ với $(n \in \mathbb{N})$ $a^n + b^n : a + b$ với $(n \in \mathbb{N}; n \text{ lẻ})$. Thì ta có thể giải được một cách dễ dàng, tuy nhiên với học sinh lớp 6 thì chưa thể sử dụng những hằng đẳng thức đó. Vì vậy, ta có thể sử dụng Đồng dư thức để có được lời giải phù hợp với trình độ của học sinh lớp 6.

Bài 4: Chứng minh rằng: a) $A = 2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7.

b) $B = 1961^{1962} + 1963^{1964} + 1965^{1966} + 2$ chia hết cho 7.

Lời giải

a) Ta có $A = (5555^{2222} - 4^{2222}) + (2222^{5555} + 4^{5555}) - (4^{5555} - 4^{2222})$

$$\text{Mà } (5555^{2222} - 4^{2222}) : (5555 - 4) \Rightarrow (5555^{2222} - 4^{2222}) : 7$$

$$\text{Tương tự: } (2222^{5555} + 4^{5555}) : 7$$

$$4^{5555} - 4^{2222} = (4^5)^{1111} - (4^2)^{1111} : (4^5 - 4^2) \Rightarrow 4^{5555} - 4^{2222} : 7$$

Vậy $A = 2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7.

b) $B = 1961^{1962} + 1963^{1964} + 1965^{1966} + 2 : 7$

Sử dụng tính chất: $(a + b)^n$ khi chia cho a có số dư là b

$$\text{Ta có } B = (1960 + 1)^{1962} + (1960 + 3)^{1964} + (1965 - 2)^{1966} + 2$$

$$B = (7m + 1)^{1962} + (7n + 3)^{1964} + (7p - 2)^{1966} + 2$$

$$B = 7q + 1 + 3^{1964} + 2^{1966} + 2$$

$$B = 7q + 9 \cdot 27^{654} + 2 \cdot 2^{3 \cdot 655} + 3$$

$$B = 7r + 9 + 2 + 3$$

$$B = 7r + 14 : 7$$

Bài 5 : Chứng minh rằng: $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{200}$ chia hết cho 6

Lời giải

Ta có:

$$\text{Tổng của hai số hạng : } 2 + 2^2 = 2 + 4 = 6$$

Tổng A có 200 số hạng ta chia thành 100 nhóm chứa hai số hạng có tổng 6.

$$\text{Nên: } A = (2 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + \dots + (2^{199} + 2^{200})$$

$$A = 6 + 2^2(2 + 2^2) + \dots + 2^{198}(2 + 2^2)$$

$$A = 6 + 2^2(6) + \dots + 2^{198}(6)$$

$$A = 6(1 + 2^2 + \dots + 2^{198})$$

Vậy A chia hết cho 6

Bài 6 : Chứng minh rằng: $A = 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{20}$ chia hết cho 4 và 5.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= (2^2 + 2^4) + (2^6 + 2^8) + \dots + (2^{18} + 2^{20}) \\ \Rightarrow A &= 20 + 2^4(2^2 + 2^4) + \dots + 2^{16}(2^2 + 2^4) \\ \Rightarrow A &= 20 + 2^4(20) + \dots + 2^{16}(20) \\ \Rightarrow A &= 20.(1 + 2^4 + \dots + 2^{16}) \\ \Rightarrow A &= 5.4.(1 + 2^4 + \dots + 2^{16}) \end{aligned}$$

Vậy A chia hết cho 5 và 4.

Bài 7 : Chứng minh rằng:

a, $(n+10)(n+15):2$

b, $n(n+1)(n+2):2;3$

c, $n^2 + n + 1 \not\vdots 4;2;5$

Lời giải

a, Ta có:

Nếu n là số lẻ thì $n+15:2$

Nếu n là số chẵn thì $n+10:2$

Như vậy với mọi n là số tự nhiên thì : $(n+10)(n+15):2$

b, Ta có: $n(n+1)(n+2)$ là tích ba số tự nhiên liên tiếp nên sẽ có một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3.

c, Ta có: $n(n+1)+1$ là 1 số lẻ nên $n(n+1)+1 \not\vdots 4;2$ và có chữ số tận cùng khác 0 và 5

Bài 8: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì:

a. $A = n(2n+1)(7n+1):6$

b. $B = n^3 - 13n:6$

Lời giải

a) Ta có: $n + 7n + 1 = 8n + 1$ là số lẻ nên n chẵn hoặc $7n$ chẵn,

$$\Rightarrow n(2n+1)(7n+1):2 \quad (1)$$

Xét các trường hợp :

$$n = 3k \Rightarrow n(2n+1)(7n+1):3$$

$$n = 3k + 1 \Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 3 \text{ (do } 2n+1 : 3)$$

$$n = 3k + 2 \Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 3 \text{ (do } 7n+1 : 3)$$

$$\Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 3 \text{ với mọi số tự nhiên } n \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 2.3$ (Do 2; 3 là hai số nguyên tố cùng nhau)

$$\Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 6$$

$$\text{b) } B = n^3 - 13n = n^3 - n - 12n = \underbrace{n(n-1)(n+1)}_{:6} - \underbrace{12n}_{:6} \quad \text{Vậy } B = n^3 - 13n : 6$$

Bài 9: Chứng minh rằng tổng của ba số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 3.

Lời giải

Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là: $a, a+1, a+2$

Tổng của ba số tự nhiên liên tiếp là

$$a + a+1 + a+2 = (a+a+a) + (1+2) = (3a+3) : 3 \text{ (Tính chất chia hết của một tổng).}$$

Nâng cao: Có phải tổng của n số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho n hay không?

Bài 10: Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp có chia hết cho 4 hay không ?

Lời giải

Gọi 4 số tự nhiên liên tiếp là $a, a+1, a+2, a+3$.

Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp là:

$$a + a+1 + a+2 + a+3 = (a+a+a+a) + (1+2+3) = (4a+6).$$

Do 4 chia hết cho 4 nên $4a$ chia hết cho 4 mà 6 không chia hết cho 4 nên $(4a+6)$ không chia hết cho 4 $\Rightarrow$ Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp không chia hết cho 4.

Kết luận nâng cao: Vậy không phải lúc nào tổng n số tự nhiên liên tiếp cũng chia hết cho n

Bài 11: Chứng minh $(495a + 1035b)$ chia hết cho 45 với mọi a, b là số tự nhiên.

Lời giải

Vì 495 chia hết cho 9 nên $1980.a$ chia hết cho 9 với mọi a .

Vì 1035 chia hết cho 9 nên $1035.b$ chia hết cho 9 với mọi b .

Nên: $(495a + 1035b)$ chia hết cho 9.

Chứng minh tương tự ta có: $(1980a + 1995b)$ chia hết cho 5 với mọi a, b

Mà $(9; 5) = 1 \Rightarrow (495a + 1035b)$ chia hết cho 45.

Bài 12: Chứng minh rằng tích của hai số chẵn liên tiếp luôn chia hết cho 8.

Lời giải

Gọi hai số chẵn liên tiếp là $2n, 2n+2$.

Tích của hai số chẵn liên tiếp là: $2n.(2n+2) = 4n.(n+1)$

Vì $n, n+1$ không cùng tính chẵn lẻ nên $n, n+1$ chia hết cho 2.

Mà 4 chia hết cho 4 nên $4n.(n+1)$ chia hết cho (4.2)

$\Rightarrow 4n.(n+1)$ chia hết cho 8.

$\Rightarrow 2n.(2n+2)$ chia hết cho 8.

Bài 13: Chứng minh rằng:

- a) Tích của ba số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 3.
- b) Tích của bốn số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 4.

Lời giải

- a) Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là $n, n+1, n+2$.

Tích của ba số tự nhiên liên tiếp là: $n.(n+1).(n+2)$.

Một số tự nhiên khi chia cho 3 có thể nhận một trong các số dư 0; 1; 2.

+) Nếu $r = 0$ thì n chia hết cho 3 $\Rightarrow n.(n+1).(n+2)$ chia hết cho 3.

+) Nếu $r = 1$ thì $n = 3k + 1$ (k là số tự nhiên).

$\Rightarrow n+2 = 3k + 1 + 2 = (3k + 3)$ chia hết cho 3.

$\Rightarrow n.(n+1).(n+2)$ chia hết cho 3.

+) Nếu $r = 2$ thì $n = 3k + 2$ (k là số tự nhiên).

$\Rightarrow n+1 = 3k + 2 + 1 = (3k + 3)$ chia hết cho 3.

$\Rightarrow n.(n+1).(n+2)$ chia hết cho 3.

Tóm lại: $n.(n+1).(n+2)$ chia hết cho 3 với mọi n là số tự nhiên.

- b) Chứng minh tương tự ta có $n.(n+1).(n+2).(n+3)$ chia hết cho 4 với mọi n là số tự nhiên.

Kết luận: Tích của n số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho n .

Dạng 2: Cho một biểu thức chia hết cho m chứng minh một biểu thức khác chia hết cho m

I. Phương pháp giải

- Vận dụng tính chất: $A:C; B:C \Rightarrow pA + qB:C$ từ đó tìm giá trị p và q thích hợp.

II. Bài toán

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên x, y thì:

a. $2x+3y:17 \Leftrightarrow 9x+5y:17$

b. $7x+9y:13 \Leftrightarrow x+5y:13$

c. $x+4y:19 \Leftrightarrow 13x+14y:19$

d. $20x+7y:31 \Leftrightarrow x+5y:31$

Lời giải

a) *Gợi ý:* Tìm p, q sao cho

$$p(2x+3y)+q(9x+5y):17\forall x,y \Leftrightarrow (2p+9q)x+(3p+5q)y:17\forall x,y \Leftrightarrow \begin{cases} 2p+9q:17 \\ 3p+5q:17 \end{cases}$$

Chọn $p=4; q=1 \Rightarrow 4(2x+3y)+(9x+5y):17 \forall x,y$

Trình bày bài:

Cách 1:

* Chứng minh: $2x+3y:17 \Rightarrow 9x+5y:17$

Từ $2x+3y:17 \Rightarrow 4(2x+3y):17$

Mà $17x+17y:17$ nên $17x+17y-4(2x+3y):17 \Rightarrow 9x+5y:17$

* Chứng minh: $9x+5y:17 \Rightarrow 2x+3y:17$

Từ $9x+5y:17 \Rightarrow 17x+17y-(9x+5y):17 \Rightarrow 8x+12y:17$

$\Rightarrow 4(2x+3y):17 \Rightarrow 2x+3y:17$ (Vì 4 và 17 nguyên tố cùng nhau)

Cách 2:

* Chứng minh: $2x+3y:17 \Rightarrow 9x+5y:17$

Vì $17x+17y:17 \Rightarrow (8x+12y)+(9x+5y):17 \Rightarrow 4(2x+3y)+(9x+5y):17$ (1)

Mà $(2x+3y):17 \Rightarrow 4(2x+3y):17$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $9x+5y:17$

* Chứng minh: $9x+5y:17 \Rightarrow 2x+3y:17$

Vì $17x+17y:17 \Rightarrow (8x+12y)+(9x+5y):17 \Rightarrow 4(2x+3y)+(9x+5y):17$

Mà $(9x+5y):17 \Rightarrow 4(2x+3y):17 \Rightarrow 2x+3y:17$ (Vì 4 và 17 nguyên tố cùng nhau)

b)
$$\begin{cases} 7p+q:13 \\ 9p+5q:13 \end{cases} \Rightarrow \text{chọn } p=1; q=6$$

c)
$$\begin{cases} p=6 \\ q=13 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} p=3 \\ q=1 \end{cases}$$

Bài 2: Chứng minh rằng: Nếu $2x+y:9$ thì $5x+7y:9$

Lời giải

Ta có : $2x+y:9 \Rightarrow 7(2x+y):9 \Rightarrow 14x+7y:9 \Rightarrow 9x+5x+7y:9 \Rightarrow 5x+7y:9$

Bài 3: Chứng minh rằng:

a, Nếu $\overline{ab} + \overline{cd} : 11$ thì $\overline{abcd} : 11$

b, Nếu $\overline{abc} - \overline{deg} : 7$ thì $\overline{abcdeg} : 7$

Lời giải

a, Ta có: $\overline{ab} + \overline{cd} = a.10 + b + 10c + d = (a + c)10 + b + d = (a + c)(b + d) : 11$

hay $(a + c) - (b + d) : 11$

Khi đó $\overline{abcd} : 11$ vì có $(a + c) - (b + d) : 11$

b, Ta có: $\overline{abcdeg} = 1000\overline{abc} + \overline{deg} = 1001\overline{abc} - (\overline{abc} - \overline{deg})$

mà $\overline{abc} - \overline{deg} : 7$ nên $\overline{abcdeg} : 7$

Bài 4: Chứng minh rằng:

a, Nếu $\overline{ab} = 2.\overline{cd}$ thì $\overline{abcd} : 67$

b, Nếu $\overline{abc} : 27$ thì $\overline{bca} : 27$

Lời giải

a, Ta có: $\overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 200\overline{cd} + \overline{cd} = 201\overline{cd} : 67$

b, Ta có: $\overline{abc} : 27 \Rightarrow \overline{abc0} : 27 \Rightarrow 1000a + \overline{bc0} : 27$
 $\Rightarrow 999a + a + \overline{bc0} : 27 \Rightarrow 27.37a + \overline{bca} : 27$

Mà $27.37a : 27$ nên $\overline{bca} : 27$

Bài 5: Chứng minh rằng:

a, Nếu $(\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}) : 11$ thì $\overline{abcdeg} : 11$

b, Nếu $\overline{abc} + \overline{deg} : 37$ thì $\overline{abcdeg} : 37$

c, Nếu $\overline{abcd} : 99$ thì $\overline{ab} + \overline{cd} : 99$

Lời giải

a, Ta có: $\overline{abcdeg} = 10000.\overline{ab} + 100\overline{cd} + \overline{eg} = 9999\overline{ab} + 99\overline{cd} + (\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}) : 11$

b, Ta có: $\overline{abcdeg} = 1000\overline{abc} + \overline{deg} = 999\overline{abc} + (\overline{abc} + \overline{deg}) : 37$

c, Ta có: $\overline{abcd} = 100.\overline{ab} + \overline{cd} = 99.\overline{ab} + (\overline{ab} + \overline{cd}) : 99 \Rightarrow \overline{ab} + \overline{cd} : 9$

Bài 6: Chứng minh rằng: Nếu $\overline{abcd} : 101$ thì $\overline{ab} - \overline{cd} : 101$

Lời giải

Ta có: $\overline{abcd} : 101 \Rightarrow 100.\overline{ab} + \overline{cd} = 101.\overline{ab} - \overline{ab} + \overline{cd} = 101.\overline{ab} - (\overline{ab} - \overline{cd}) : 101$

$\Rightarrow \overline{ab} - \overline{cd} : 101$

Bài 7: Chứng minh rằng:

a, $2a - 5b + 6c : 17$ nếu $a - 11b + 3c : 17$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$)

b, $3a + 2b : 17$ nếu $10a + b : 17$ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

Lời giải

a, Ta có: $a - 11b + 3c : 17$ và $17a - 34b + 51c : 17$

nên $18a - 45b + 54c : 17 \Rightarrow 9(2a - 5b + 6c) : 17$

b, Ta có: $3a + 2b : 17$ và $17a - 34b : 17$

nên $20a - 32b : 17 \Rightarrow 10a - 16b : 17$

$\Rightarrow 10a + 17b - 16b : 17$

$\Rightarrow 10a + b : 17$

Bài 8: Chứng minh rằng:

a, $\overline{abcd} : 29$ thì $a + 3b + 9c + 27d : 29$

b, $\overline{abc} : 21$ thì $a - 2b + 4c : 21$

Lời giải

a, Ta có: $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d : 29 \Rightarrow 2000a + 200b + 20c + 2d : 29$

$\Rightarrow 2001a - a + 203b - 3b + 29c - 9c + 29d - 27d : 29$

$\Rightarrow (2001a + 203b + 29c + 29d) - (a + 3b + 9c + 27d) : 29$

$\Rightarrow (a + 3b + 9c + 27d) : 29$

b, Ta có: $\overline{abc} = 100a + 10b + c : 21$

$\Rightarrow 100a - 84a + 10b - 42b + c + 63c : 21$

$\Rightarrow 16a - 32b + 64c : 21 \Rightarrow 16(a - 2b + 4c) : 21$

Bài 9: Cho a, b là các số nguyên. CMR nếu $6a + 11b$ chia hết cho 31 thì $a + 7b$ cũng chia hết cho 31

Lời giải

Ta có: $6a + 11b : 31 \Rightarrow 6(a + 7b) - 31b : 31 \Rightarrow a + 7b : 31$

Bài 10: Cho a, b là các số nguyên. CMR : $5a + 2b : 17 \Leftrightarrow 9a + 7b : 17$

Lời giải

Ta có: $5a + 2b : 17$

$\Rightarrow 5a - 68a + 2b - 51b : 17 \Rightarrow -63a - 49b : 17 \Rightarrow -7(9a + 7b) : 17 \Rightarrow 9a + 7b : 17$

$$\begin{aligned}\text{Ngược lại ta có: } 9a + 7b : 17 &\Rightarrow 7(9a + 7b) : 17 \Rightarrow 63a + 49b : 17 \\ &\Rightarrow 68a - 5a + 51b - 2b : 17 \Rightarrow -5a - 2b : 17 \Rightarrow -(5a + 2b) : 17 \Rightarrow (5a + 2b) : 17\end{aligned}$$

Bài 11: Cho a, b là các số nguyên. CMR nếu $2a + 3b : 7$ thì $8a + 5b : 7$ và ngược lại.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2a + 3b : 7 \Rightarrow 4(2a + 3b) : 7 \Rightarrow 8a + 12b : 7 \Rightarrow 8a + 12b - 7b : 7 \Rightarrow 8a + 5b : 7$$

$$\text{Ngược lại ta có: } 8a + 5b : 7 \Rightarrow 8a + 12b - 7b : 7 \Rightarrow 8a + 12b : 7 \Rightarrow 4(2a + 3b) : 7 \Rightarrow 2a + 3b : 7$$

Bài 12: Cho a, b là các số nguyên. CMR nếu $a - 2b : 7$ thì $a - 9b : 7$

điều ngược lại có đúng không?

Lời giải

$$\text{Ta có: } a - 2b : 7 \Rightarrow a - 2b - 7b : 7 \Rightarrow a - 9b : 7$$

Điều ngược lại vẫn đúng

Bài 13: Cho a, b là các số nguyên và $5a + 8b : 3$. Chứng minh rằng:

$$\text{a, } -a + 2b : 3 \qquad \text{b, } 10a + b : 3 \qquad \text{c, } a + 16b : 3$$

Lời giải

$$\text{a, Ta có: } 5a + 8b : 3 \Rightarrow 5a - 6a + 8b - 6b : 3 \Rightarrow -a + 2b : 3$$

$$\text{b, Ta có: } 5a + 8b : 3 \Rightarrow 2(5a + 8b) : 3 \Rightarrow 10a + 16b : 3 \Rightarrow 10a + 16b - 15b : 3$$

$$\text{c, Ta có: } 5a + 8b : 3 \Rightarrow 5(a + 16b) - 72b : 3 \Rightarrow a + 16b : 3$$

Bài 14: Cho biết $a - b : 6$. CMR các biểu thức sau cũng chia hết cho 6

$$\text{a, } a + 5b$$

$$\text{b, } a + 17b$$

$$\text{c, } a - 13b$$

Lời giải

$$\text{a, Ta có: } a - b : 6 \Rightarrow a - b + 6b : 6 \Rightarrow a + 5b : 6$$

$$\text{b, Ta có: } a - b : 6 \Rightarrow a - b + 18b : 6 \Rightarrow a + 17b : 6$$

$$\text{c, Ta có: } a - b : 6 \Rightarrow a - b - 12b : 6 \Rightarrow a - 13b : 6$$

Dạng 3: Tìm n để biểu thức $A(n)$ chia hết cho biểu thức $B(n)$

Bài 1: Tìm số tự nhiên n để $(3n + 14)$ chia hết cho $(n + 2)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 5n + 14 = 5.(n + 2) + 4$$

$$\text{Mà } 5.(n+2) : (n+2)$$

Do đó $(5n+14):(n+2) \Leftrightarrow 4:(n+2) \Leftrightarrow (n+2)$ là ước của 4.

$$\Leftrightarrow (n+2) \in \{1; 2; 4\} \Rightarrow n \in \{0; 2\}$$

Vậy với $n \in \{0; 2\}$ thì $(5n+14) : (n+2)$

Bài 2: Tìm số tự nhiên n để $\frac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên .

Lời giải

Để $\frac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên thì $(n+15):(n+3)$.

$$\Rightarrow [(n+15)-(n+3)]:(n+3).$$

$$\Leftrightarrow 12:(n+3) \Leftrightarrow (n+3) \in U(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

$$\Leftrightarrow n \in \{0; 1; 3; 9\}$$

Vậy với $n \in \{0; 1; 3; 9\}$ thì $\frac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên.

Bài 3: Tìm số tự nhiên n sao cho $4n-5:2n-1$

Lời giải

$$\text{Ta có } 4n-5 = 2(2n-1)-3$$

$$\text{Để } 4n-5:2n-1 \text{ thì } 3:2n-1$$

$$\text{Với } 2n-1=1 \Rightarrow n=1$$

$$\text{Với } 2n-1=3 \Rightarrow n=2$$

$$\text{Vậy } n = 1; 2$$

Bài 4: Tìm số tự nhiên n để $n^2+3n+6:n+3$.

Lời giải

$$n^2+3n+6:n+3$$

$$n(n+3)+6:n+3 \Leftrightarrow 6:n+3$$

$$\Rightarrow n+3 \in U(6) = \{1; 2; 3; 6\}$$

$$\Rightarrow n=0; n=3$$

Bài 5: Tìm $a \in \mathbb{N}$ để $a+1$ là bội của $a-1$

Lời giải

Để $a + 1$ là bội của $a - 1$ thì $\frac{a+1}{a-1}$ là số nguyên $\frac{a+1}{a-1} = 1 + \frac{2}{a-1}$

$$\Rightarrow a-1 \in U(2) = \{-1; 1; 2\}$$

$$\Rightarrow a = \{0; 2; 3\} \text{ (thỏa mãn } a \in \mathbb{N})$$

Bài 6: Tìm số nguyên n để: $5 + n^2 - 2n$ chia hết cho $n - 2$

Lời giải

$$\text{Ta có } 5 + n^2 - 2n = 5 + n(n-2)$$

$$\Rightarrow 5 + n^2 - 2n : (n-2) \text{ khi } 5 : (n-2)$$

$$\Rightarrow n-2 \in U(5) = \{-5; -1; 1; 5\}$$

$$\Rightarrow n \in \{-3; 1; 3; 7\}$$

Bài 7: Tìm tất cả các số nguyên n để phân số $\frac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên

Lời giải

$$\frac{n+1}{n-2} \text{ là số nguyên khi } (n+1) : (n-2)$$

$$\text{Ta có } (n+1) = [(n-2) + 3]$$

$$\text{Vậy } (n+1) : (n-2) \text{ khi } 3 : (n-2)$$

$$(n-2) \in U(3) = \{-3; -1; 1; 3\}$$

$$\Rightarrow n \in \{-1; 1; 3; 5\}$$

Bài 8: Cho $A = \frac{n-1}{n+4}$. Tìm n nguyên để A là một số nguyên.

Lời giải

$$A = \frac{n-1}{n+4} = \frac{n+4-5}{n+4} = 1 - \frac{5}{n+4}$$

$$\text{Với } n \text{ nguyên, } A \text{ nhận giá trị nguyên} \Leftrightarrow 5 : n+4 \text{ hay } n+4 \in U(5)$$

$$\text{Lập luận tìm ra được } n \in \{-9; -5; -3; 1\}$$

Bài 9: Tìm số nguyên n để phân số $\frac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{4n+5}{2n-1} = \frac{4n-2+7}{2n-1} = \frac{n(2n-1)+7}{2n-1} = n + \frac{7}{2n-1}$$

Vì n nguyên nên để $\frac{4n+5}{2n-1}$ nguyên thì $\frac{7}{2n-1}$ nguyên

$$\Rightarrow 2n-1 \in U(7) = \{-7; -1; 1; 7\}$$

$$\Leftrightarrow 2n \in \{-6; 0; 2; 8\} \Leftrightarrow n \in \{-3; 0; 1; 4\}$$

Vậy với $n \in \{-3; 0; 1; 4\}$ thì $\frac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên

Bài 10: Tìm số tự nhiên n để biểu thức sau là số tự nhiên: $B = \frac{2n+2}{n+2} + \frac{5n+17}{n+2} - \frac{3n}{n+2}$

Lời giải

$$B = \frac{2n+2}{n+2} + \frac{5n+17}{n+2} - \frac{3n}{n+2} = \frac{2n+2+5n+17-3n}{n+2} = \frac{4n+19}{n+2}$$

$$B = \frac{4n+19}{n+2} = \frac{4(n+2)+11}{n+2} = 4 + \frac{11}{n+2}$$

Để B là số tự nhiên thì $\frac{11}{n+2}$ là số tự nhiên

$$\Rightarrow 11 \mid (n+2) \Rightarrow n+2 \in U(11) = \{\pm 1; \pm 11\}$$

Do $n+2 > 1$ nên $n+2 = 11 \Rightarrow n = 9$

Vậy $n = 9$ thì B là số tự nhiên

Dạng 3: Bài toán chứng minh chia hết liên quan đến số chính phương

I. Phương pháp giải

- Kết hợp các tính chất chia hết với tính chất của số chính phương để giải bài tập.

- Tính chất của số chính phương :

Số chính phương chỉ có tận cùng là một trong các chữ số 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9.

Khi phân tích ra TSNT thì số chính phương chỉ chứa TSNT với số mũ chẵn.

Một số chính phương chia hết cho số nguyên tố p thì cũng chia hết cho p^2

Một số là số chính phương khi và chỉ khi có số ước lẻ.

II. Bài toán

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n(n^2+1)(n^2+4) \vdots 5$

Lời giải

Nhận xét: Số chính phương chỉ có tận cùng là một trong các chữ số 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9 nên một số chính phương khi chia cho 5 có số dư là: 0, 1, 4. Ta xét các trường hợp sau :

Nếu n^2 chia 5 dư 0 hay $n^2 \vdots 5$ thì $n \vdots 5$ (vì 5 là số nguyên tố) $\Rightarrow n(n^2+1)(n^2+4) \vdots 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Nếu n^2 chia 5 dư 1 thì $n^2+4 \vdots 5 \Rightarrow n(n^2+1)(n^2+4) \vdots 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Nếu n^2 chia 5 dư 4 thì $n^2 + 1 : 5 \Rightarrow n(n^2 + 1)(n^2 + 4) : 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Vậy với mọi số tự nhiên n thì $n(n^2 + 1)(n^2 + 4) : 5$

Bài 2: a) Chứng minh rằng một số chính phương khi chia cho 3 chỉ có số dư là 0 hoặc 1.

b) Chứng minh rằng một số chính phương khi chia cho 4 chỉ có số dư là 0 hoặc 1.

Lời giải

Gọi $A = n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$

a) Xét:

$$n = 3k \quad (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow A = 9k^2 \text{ nên } A : 3$$

$$n = 3k + 1 \quad (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow A = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 \text{ nên } A \text{ chia cho 3 dư 1}$$

$$n = 3k + 2 \quad (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow A = 9k^2 + 12k + 4 = 9k^2 + 12k + 3 + 1 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 \text{ nên } A \text{ chia cho 3 dư 1.}$$

Vậy: Một số chính phương chia cho 3 chỉ có số dư là 0 hoặc 1

b) Xét:

$$n = 2k \quad (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow A = 4k^2 \text{ nên } A : 4$$

$$n = 2k + 1 \quad (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow A = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1 \text{ nên } A \text{ chia cho 4 dư 1}$$

Vậy: Một số chính phương chia cho 4 chỉ có số dư là 0 hoặc 1.

Nhận xét: Một số chính phương chẵn thì chia hết cho 4, một số chính phương lẻ khi chia cho 4 chỉ có số dư là 0 hoặc 1.

Bài 3: Cho a, b là hai số chính phương lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng: $(a-1)(b-1) : 192$

Lời giải

Ta có $192 = 3.8.8$; $(3; 8) = 1$

Nhận xét: Nếu n lẻ thì $n^2 - 1 : 8$

Thật vậy: $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ mà $(n+1)$ và $(n-1)$ là hai số chẵn liên tiếp nên $(n-1)(n+1) : 8$

Từ đó $\Rightarrow a-1 : 8 ; b-1 : 8 \Rightarrow (a-1)(b-1) : 8.8 = 64 \quad (1)$

a, b là các số chính phương nên a, b chia 3 dư 1 hoặc 0

Vì a, b là các số chính phương lẻ liên tiếp nên luôn có một trong hai số không chia hết cho 3

$$\Rightarrow \begin{cases} a \not\vdots 3 \\ b \not\vdots 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-1 : 3 \\ b-1 : 3 \end{cases} \Rightarrow (a-1)(b-1) : 3 \quad (2)$$

Mà $(3, 64) = 1 \Rightarrow (a-1)(b-1) : 4.3 = 192 \Rightarrow \text{đpcm.}$

Bài 4: Có hay không số tự nhiên n để $2010 + n^2$ là số chính phương.

Lời giải

Giả sử $2010 + n^2$ là số chính phương thì $2010 + n^2 = m^2 \quad (m \in \mathbb{N})$

Từ đó suy ra $m^2 - n^2 = 2010 \Leftrightarrow m^2 - mn + mn - n^2 = 2010$

$$\Leftrightarrow m(m-n) + n(m-n) = 2010$$

$$\Leftrightarrow (m-n)(m+n) = 2010$$

Như vậy trong 2 số $m+n$ và $m-n$ phải có ít nhất 1 số chẵn (1)

Mặt khác $(m+n)$ và $(m-n)$ có cùng tính chẵn lẻ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow (m+n)$ và $(m-n)$ là 2 số chẵn.

$$\Rightarrow (m+n):2 \text{ và } (m-n):2$$

$$\Rightarrow (m+n)(m-n):4 \text{ nhưng } 2010 \text{ không chia hết cho } 4$$

$\Rightarrow$ Điều giả sử sai.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để $2010 + n^2$ là số chính phương.

Dạng 4: Chứng minh một biểu thức chia hết cho một biểu thức

I. Phương pháp giải:

- Biến đổi biểu thức bị chia thành tích của các biểu thức nhỏ trong đó có biểu thức chia hết cho biểu thức chia.

II. Bài toán

Bài 1: Cho $A = 4 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99}$. Chứng minh rằng A chia hết cho 2^{99}

Lời giải

$$\text{Ta có } A = 4 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99}$$

$$\Rightarrow 2A = 2(4 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99})$$

$$\Rightarrow 2A = 8 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{100}$$

$$\text{Xét } 2A - A = (8 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{100}) - (4 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99})$$

$$\Rightarrow A = (8 + 2^{100}) - (4 + 2^2) = 2^{100}$$

$$\text{Vì } 2^{100} : 2^{99} \text{ nên } A : 2^{99}$$

Bài 2: Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99}$ Chứng minh rằng A chia hết cho $2^{100} - 1$

Lời giải

$$\text{Ta có } A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99}$$

$$\Rightarrow 2A = 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99})$$

$$\Rightarrow 2A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{100}$$

$$\text{Xét } 2A - A = (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{100}) - (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99})$$

$$\text{suy ra } A = 2^{100} - 1$$

$$\text{Vậy } A \text{ chia hết cho } 2^{100} - 1$$

Bài 3: Tính tổng $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1)$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Từ đó chứng minh S luôn chia hết cho hai trong ba số $n; (n+1); (n+2)$

Lời giải

Ta có $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1)$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

$$\Rightarrow 3S = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + \dots + n(n+1).3$$

$$\Rightarrow 3S = 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \dots + n(n+1).[(n+2)-(n-1)]$$

$$\Rightarrow 3S = 1.2.3 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)$$

$$\Rightarrow 3S = n(n+1)(n+2)$$

$$\Rightarrow S = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Vì $n; (n+1); (n+2)$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên luôn có một số chia hết cho 3, hai số còn lại là chia hết cho chính nó $\Rightarrow n(n+1)(n+2):3$

$\Rightarrow S$ là một số tự nhiên chia hết cho hai trong ba số $n; (n+1); (n+2)$

Bài 4: Tính tổng $D = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + n(n+1)(n+2)$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Từ đó chứng minh S luôn chia hết cho ba trong bốn số $n; (n+1); (n+2); (n+3)$.

Lời giải

Ta có : $D = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + n(n+1)(n+2)$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Xét $4D = 1.2.3.4 + 2.3.4.4 + 3.4.5.4 + \dots + n(n+1)(n+2).4$

$$\Rightarrow 4D = 1.2.3.4 + 2.3.4.(5-1) + 3.4.5.(6-2) + \dots + n(n+1)(n+2).[(n+3)-(n-1)]$$

$$\Rightarrow 4D = 1.2.3.4 + 2.3.4.5 - 1.2.3.4 + 3.4.5.6 - 2.3.4.5 + \dots + n(n+1)(n+2)(n+3) - (n-1)n(n+1)(n+2)$$

$$\Rightarrow 4D = n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$\Rightarrow D = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Vì $n; (n+1); (n+2); (n+3)$ là bốn số tự nhiên liên tiếp nên luôn có một số chia hết cho 3, ba số còn lại là chia hết cho chính nó $\Rightarrow n(n+1)(n+2)(n+3):4$

$\Rightarrow D$ là một số tự nhiên chia hết cho ba trong bốn số $n; (n+1); (n+2); (n+3)$

Bài 5: Cho biểu thức $E = 1.4 + 2.5 + 3.6 + \dots + n(n+3)$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

a) Thu gọn biểu thức E .

b) Chứng minh $n(n+1)(n+5)$ luôn chia hết cho 3.

c) Chứng minh E luôn chia hết cho hai trong ba số $n; (n+1); (n+5)$

Lời giải

a) Ta có : $E = 1.4 + 2.5 + 3.6 + \dots + n(n+3) \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad (1)$

$$\Rightarrow E = 1.(2+2) + 2.(3+2) + 3.(4+2) + \dots + n(n+1+2)$$

$$\Rightarrow E = (1.2 + 2.1) + (2.3 + 2.2) + (3.4 + 2.3) + \dots + [n(n+1) + 2n]$$

$$\Rightarrow E = [1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1)] + (2.1 + 2.2 + 2.3 + \dots + 2n)$$

$$\Rightarrow E = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{(2n+2).n}{2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{3(n+1).n}{3}$$

$$\Rightarrow E = \frac{n(n+1)[(n+2)+3]}{3}$$

$$\Rightarrow E = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}$$

$$\text{Vậy } E = \frac{n(n+1)(n+5)}{3} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

b) Từ (1) suy ra E là số tự nhiên $\Rightarrow \frac{n(n+1)(n+5)}{3}$ là số tự nhiên $\Rightarrow n(n+1)(n+5) : 3$ (ĐPCM)

c) Ta có $n(n+1)(n+5) = n(n+1)(n+2+3) \quad (2)$

Lại có $n; (n+1); (n+2)$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên luôn có một số chia hết cho 3, nếu $(n+2)$ chia hết cho 3 thì $(n+2+3)$ cũng chia hết cho 3. (3)

Từ (2); (3) suy ra trong 3 số $n; (n+1); (n+5)$ luôn có một số chia hết cho 3, hai số còn lại là chia hết cho chính nó.

Suy ra E là số tự nhiên luôn chia hết cho hai trong ba số $n; (n+1); (n+5)$ (ĐPCM)

Bài 6: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì:

a. $S = (n+1)(n+2)\dots 2n : 2^n$ (tích $2n$ số nguyên dương đầu)

b. $P = (n+1)(n+2)\dots 3n : 3^n$ (tích $3n$ số nguyên dương đầu)

Lời giải

a) Xét biểu thức: $1.2\dots n.S = 1.2.3\dots n(n+1)(n+2)\dots(2n)$

$$= 2.4.6\dots(2n).1.3.5\dots(2n-1)$$

$$= 2^n.(1.2.3\dots n).1.3.5\dots(2n-1)$$

$$\Rightarrow S = 2^n.1.3.5\dots(2n-1) : 2^n$$

$$\text{Vậy } S : 2^n \quad (\text{ĐPCM})$$

b) Xét biểu thức: $1.2.3\dots n.P = 1.2.3\dots n(n+1)(n+2)\dots(3n)$

$$= [3.6\dots(3n)].[1.2.4.5\dots(3n-1)]$$

$$= 3^n \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n) \cdot [1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \dots (3n-1)]$$

$$P = 3^n \cdot [1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \dots (3n-1)] : 3^n$$

Vậy $P : 3^n$ (ĐPCM)

Bài 7: Chứng minh rằng: $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 100^3$ chia hết cho $B = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$

Lời giải

Ta có: $B = (1+100) + (2+99) + \dots + (50 + 51) = 101 \cdot 50$

Để chứng minh A chia hết cho B ta chứng minh A chia hết cho 50 và 101

Ta có: $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 100^3 = (1^3 + 100^3) + (2^3 + 99^3) + \dots + (50^3 + 51^3)$

Với n lẻ ta có: $a^n + b^n : a + b$ ($a, b \in \mathbb{N}^*$)

Suy ra mỗi tổng trong ngoặc của A chia hết cho 101 nên $A : 101$ (1)

Lại có: $A = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 49^3) + (51^3 + 52^3 + 53^3 + \dots + 99^3) + 50^3 + 100^3$

$A = (1^3 + 99^3) + (2^3 + 98^3) + \dots + (49^3 + 51^3) + (50^3 + 100^3)$

Tương tự ta có mỗi tổng trong ngoặc của A chia hết cho 50 nên $A : 50$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra A chia hết cho 101.50 nên A chia hết cho B

Bài 8: Cho số tự nhiên $n \geq 1$, Chứng minh rằng: $S = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5 : (1 + 2 + 3 + \dots + n)$

Lời giải

Đặt: $2A = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) = n(n+1)$

Mặt khác, với n lẻ ta có: $a^n + b^n : a + b$ ($a, b \in \mathbb{N}^*$)

Nên $2S = (1^5 + n^5) + [2^5 + (n-1)^5] + \dots + (n^5 + 1) : n+1$

Cũng có $2S = [(1^5 + (n-1)^5) + (2^5 + (n-2)^5) + \dots + ((n-1)^5 + 1)] + 2n^5 : n$

Mà $(n; n+1) = 1 \Rightarrow 2S : n(n+1) = 2A \Rightarrow S : A$

Dạng 5: Chứng minh chia hết từ một đẳng thức cho trước:

I. Phương pháp giải:

Cách 1: Từ đẳng thức đã cho biến đổi, lập luận để làm xuất hiện số bị chia, số chia. Từ đó dựa vào các tính chất chia hết lập luận suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2: Biến đổi số bị chia làm xuất hiện vế trái hoặc vế phải của đẳng thức, thay số và lập luận suy ra điều phải chứng minh.

II. Bài toán

Bài 1: Chứng minh rằng:

a) Nếu $\overline{ab} = 2.\overline{cd}$ thì $\overline{abcd} : 67$

b) Nếu $\overline{abc} = 2.\overline{deg}$ thì $\overline{abcdeg} : 23; 29$

Lời giải

a) Ta có: $\overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 200\overline{cd} + \overline{cd} = 201\overline{cd} : 67$

b) Ta có: $\overline{abcdeg} = 1000\overline{abc} + \overline{deg} = 1000.2\overline{deg} + \overline{deg} = 2001\overline{deg} = \overline{deg}.23.29.3$

Bài 2: Cho số tự nhiên $\overline{ab}$ bằng 3 lần tích các chữ số của nó.

a) Chứng minh rằng: $b : a$

b) Đặt $b = ka$. Chứng minh rằng $10 : k$

c) Tìm số tự nhiên $\overline{ab}$

Lời giải

a) Theo bài ra có $\overline{ab} = 3ab \Rightarrow 10a + b = 3ab \quad (1)$

$$\Rightarrow 10a + b : a$$

$$\Rightarrow b : a \quad (\text{ĐPCM})$$

b) Thay $b = ka$ vào (1) ta được $10a + ka = 3a.ka$

$$\Leftrightarrow 10 + k = 3ak \quad (2)$$

$$\Rightarrow 10 + k : k$$

$$\Rightarrow 10 : k \quad (\text{ĐPCM})$$

c) Từ (2) $\Rightarrow k < 10$ mà $10 : k \Rightarrow k \in \{1; 2; 5\}$

Thay các giá trị của k vào (2) ta có các trường hợp:

$$+) k = 1 \Rightarrow 11 = 3a \Rightarrow a = \frac{11}{3} \quad (\text{loại})$$

$$+) k = 2 \Rightarrow 12 = 6a \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow \overline{ab} = 24$$

$$+) k = 5 \Rightarrow 15 = 15a \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow \overline{ab} = 15$$

Vậy tìm được 2 số tự nhiên $\overline{ab}$ thỏa mãn đề bài là 24; 15

Bài 3: Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 = c^2$, chứng minh rằng:

a. Trong hai số a, b có ít nhất một số chia hết cho 2

b. Trong hai số a, b có ít nhất một số chia hết cho 3

c. Trong hai số a, b có ít nhất một số chia hết cho 4

Lời giải

Chứng minh bài toán phụ: Một số chính phương khi chia cho 3; 4 chỉ có số dư là 0 hoặc 1.

(Bài 2, dạng 3, chủ đề này)

a. Giả sử cả a, b đều không chia hết cho 2 $\Rightarrow a^2, b^2$ chia 4 dư 1

$\Rightarrow a^2 + b^2$ chia 4 dư 2 $\Rightarrow c^2$ chia 4 dư 2 (mâu thuẫn vì c^2 cũng là số chính phương)

$\Rightarrow$ Điều giả sử là sai $\Rightarrow$ Trong hai số a, b có ít nhất một số chẵn.

Vậy trong hai số a, b có ít nhất một số chia hết cho 2.

b. Giả sử a, b đều không chia hết cho 3 $\Rightarrow a^2, b^2$ chia 3 dư 1

$\Rightarrow a^2 + b^2$ chia 3 dư 2 $\Rightarrow c^2$ chia 3 dư 2 (mâu thuẫn vì c^2 cũng là số chính phương)

$\Rightarrow$ Điều giả sử là sai $\Rightarrow$ Trong hai số a, b có ít nhất một số chia hết cho 3

c. Giả sử a, b đều không chia hết cho 4 $\Rightarrow a^2, b^2$ chia 4 dư 1

$\Rightarrow a^2 + b^2$ chia 4 dư 2 $\Rightarrow c^2$ chia 4 dư 2 (mâu thuẫn vì c^2 cũng là số chính phương)

$\Rightarrow$ Điều giả sử là sai $\Rightarrow$ Trong hai số a, b có ít nhất một số chia hết cho 4.

Bài 4: Cho ba số nguyên dương a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 = c^2$, chứng minh rằng: $abc : 60$

Lời giải

Ta có: $60 = 3.4.5$

+) Nếu a, b, c đều không chia hết cho 3 $\Rightarrow a^2, b^2, c^2$ chia cho 3 dư 1

$\Rightarrow a^2 + b^2$ chia cho 3 dư 2 $\Rightarrow a^2 + b^2 \neq c^2$,

Do đó trong 3 số a, b, c phải có ít nhất 1 số chia hết cho 3. Vậy $abc : 3$ (1)

+) Nếu a, b, c đều không chia hết cho 5

$\Rightarrow a^2, b^2, c^2$ chia 5 dư 1 hoặc 4 (vì SCP chỉ có tận cùng là 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9

$\Rightarrow a^2 + b^2$ chia 5 dư 2 hoặc 3 $\Rightarrow a^2 + b^2 \neq c^2$

Do đó trong 3 số a, b, c phải có ít nhất 1 số chia hết cho 5. Vậy $abc : 5$ (2)

+) Nếu a, b, c đều là các số không chia hết cho 4 $\Rightarrow a^2, b^2, c^2$ chia 4 dư 1

$\Rightarrow a^2 + b^2$ chia 4 dư 2 $\Rightarrow a^2 + b^2 \neq c^2$

Do đó trong 3 số a, b, c phải có ít nhất 1 số chia hết cho 4. Vậy $abc : 4$ (3)

Ta thấy 3; 4; 5 đôi một nguyên tố cùng nhau nên kết hợp với (1),(2),(3) $\Rightarrow abc : 3.4.5$

$\Rightarrow abc : 60$ (ĐPCM)

Bài 5: Cho $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{18} = \frac{a}{b}$, chứng minh rằng $b : 2431$

Lời giải

Tách $2431 = 17.13.11$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{18} = \frac{a}{b}$$

Quy đồng A với mẫu chung là tích của các mẫu ta thấy rằng $b = 1.2.3. \dots .18$ có chứa 17.13.11

Gọi $k_1, k_2, k_3, \dots, k_{18}$ là các thừa số phụ tương ứng ta có $a = k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_{18}$ trong đó k_{11} không chứa 11 ; k_{13} không chứa 13 ; k_{17} không chứa 17 nên a không chia hết cho 11; 13; 17 suy ra b luôn chứa 17.13.11 khi $\frac{a}{b}$ ở dạng tối giản $\Rightarrow b:17.13.11 \Rightarrow b:2431$

Vậy $b:2431$ (ĐPCM)

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10.

Lời giải

Ta có : $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = (3^{n+2} + 3^n) - (2^{n+2} + 2^n) = 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1)$
 $= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 = 10 \cdot (3^n - 2^{n-1})$ chia hết cho 10.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10.

Bài 2: Tìm số nguyên n sao cho $\frac{4n-1}{n-1}$ có giá trị là số nguyên.

Lời giải

Ta có $\frac{4n-1}{n-1}$ có giá trị là số nguyên khi $(4n-1):(n-1)$ mà $4n-1 = 4(n-1) + 3$

$$\Rightarrow 3:(n-1) \Rightarrow (n-1) \in \{\pm 1; \pm 3\} \Rightarrow n \in \{-2; 0; 2; 4\}$$

Vậy với $n \in \{-2; 0; 2; 4\}$ thì $\frac{4n-1}{n-1}$ có giá trị là số nguyên

Bài 3: Cho $S = 9^{23} + 5 \cdot 3^{43}$. Chứng minh rằng: $S:32$

Lời giải

Ta có $S = 9^{23} + 5 \cdot 3^{43} = 3^{46} - 5 \cdot 3^{43} = 3^{43}(3^3 - 5) = 3^{43} \cdot 32:32$.

Vậy $S:32$

Bài 4: Tìm số tự nhiên n thỏa mãn $(2n+7):n+1$

Lời giải

Ta có $(2n+7):n+1 \Leftrightarrow 2n+7-2(n+1):n+1$

$$\Leftrightarrow (2n+7)-(2n+2):n+1 \Leftrightarrow 2n+7-2n-2:n+1 \Leftrightarrow 5:n+1$$

$$\Rightarrow n+1 \in \{\pm 1; \pm 5\} \Rightarrow n \in \{-6; -2; 0; 4\}$$

Vì $n \in \mathbb{N}$ nên $n \in \{0; 4\}$

Vậy với $n \in \{0; 4\}$ thì $(2n+7):n+1$

Bài 5: Chứng minh rằng nếu a là một số lẻ không chia hết cho 3 thì $a^2 - 1:6$

Lời giải

Vì a là một số lẻ nên a^2 cũng là một số lẻ, suy ra $a^2 - 1 \vdots 2$ (1)

Vì a là một số không chia hết cho 3 nên a có dạng $a = 3k + 1$ hoặc $a = 3k + 2$

+ Nếu $a = 3k + 1 \Rightarrow a^2 - 1 = (3k + 1)^2 - 1 = (3k + 1)(3k + 1) - 1 = 3k(3k + 1) + 3k \vdots 3$ (2)

+ Nếu $a = 3k + 2 \Rightarrow a^2 - 1 = (3k + 2)^2 - 1 = (3k + 2)(3k + 2) - 1 = 3k(3k + 2) + 6k + 3 \vdots 3$ (3)

Từ (1), (2), (3) và $(2; 3) = 1$, suy ra $a^2 - 1 \vdots 6$

Bài 6: Cho $S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99}$. Tính S và tìm số dư khi chia 3^{100} cho 4.

Lời giải

Ta có $S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99}$

$3S = 3 - 3^2 + 3^3 - 3^4 + \dots + 3^{99} - 3^{100}$

$$\Rightarrow S + 3S = 1 - 3^{100} \Rightarrow 4S = 1 - 3^{100} \Rightarrow S = \frac{(1 - 3^{100})}{4}$$

Vì $S = \frac{(1 - 3^{100})}{4}$ mà S là số nguyên $\Rightarrow (1 - 3^{100}) \vdots 4$

$\Rightarrow 3^{100}$ chia cho 4 dư 1.

Vậy 3^{100} chia cho 4 dư 1.

Bài 7: Cho $B = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100}$

a) Chứng tỏ B chia hết cho 4.

b) Tìm số dư trong phép chia B cho 13

Lời giải

a) $B = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100}$

$B = (3 + 3^2) + (3^3 + 3^4) + \dots + (3^{99} + 3^{100})$

$B = 3 \cdot (1 + 3) + 3^3 \cdot (1 + 3) + \dots + 3^{99} \cdot (1 + 3)$

$B = 3 \cdot 4 + 3^3 \cdot 4 + \dots + 3^{99} \cdot 4$

$B = (3 + 3^3 + \dots + 3^{99}) \cdot 4 \vdots 4$

Vậy B chia hết cho 4

b) Ta có $B = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100}$

Tổng B có 100 số hạng ta nhóm 3 số thành một nhóm ta được 33 nhóm và thừa ra một số:

$B = 3 + (3^2 + 3^3 + 3^4) + (3^5 + 3^6 + 3^7) + \dots + (3^{98} + 3^{99} + 3^{100})$

$B = 3 + 3^2(1 + 3 + 3^2) + 3^5(1 + 3 + 3^2) + \dots + 3^{98}(1 + 3 + 3^2)$

$B = 3 + 3^2 \cdot 13 + 3^5 \cdot 13 + \dots + 3^{98} \cdot 13$

$B = 3 + (3^2 + 3^5 + \dots + 3^{98}) \cdot 13$

Vì $(3^2 + 3^5 + \dots + 3^{98}) \cdot 13$ chia hết cho 13 nên $3 + (3^2 + 3^5 + \dots + 3^{98}) \cdot 13$ chia cho 13 dư 3

Vậy số dư trong phép chia B cho 13 là 3

Bài 8: Chứng minh rằng tổng $D = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100}$ chia hết cho 3.

Lời giải

Ta có: $D = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100}$

$$D = (2 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + \dots + (2^{99} + 2^{100})$$

$$D = 2(1 + 2) + 2^3(1 + 2) + \dots + 2^{99}(1 + 2)$$

$$D = 2.3 + 2^3.3 + \dots + 2^{99}.3$$

$$D = 3.(2 + 2^3 + \dots + 2^{99}) : 3$$

Bài 9: Chứng minh rằng: $1 + 5^2 + 5^4 + \dots + 5^{38}$ chia hết cho 26.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 1 + 5^2 + 5^4 + \dots + 5^{36} + 5^{38} &= (1 + 5^2) + 5^4(1 + 5^2) + \dots + 5^{36}(1 + 5^2) \\ &= 26 + 5^4.26 + \dots + 5^{36}.26 \\ &= 26(1 + 5^4 + \dots + 5^{36}) : 26 \end{aligned}$$

$$\text{Hay } (1 + 5^2 + 5^4 + \dots + 5^{38}) : 26$$

Bài 10: Cho $B = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$. Tìm số dư khi chia B cho 7.

Lời giải

Ta có: $B = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$

$$B = 2 + (2^2 + 2^3 + 2^4) + (2^5 + 2^6 + 2^7) + \dots + (2^{98} + 2^{99} + 2^{100})$$

$$B = 2 + 2^2(1 + 2 + 2^2) + 2^5(1 + 2 + 2^2) + \dots + 2^{98}(1 + 2 + 2^2)$$

$$B = 2 + 2^2.7 + 2^5.7 + \dots + 2^{98}.7$$

$$B = 2 + 7(2^2 + 2^5 + \dots + 2^{98})$$

Vì $7(2^2 + 2^5 + \dots + 2^{98})$ chia hết cho 7; 2 chia 7 dư 2

nên $2 + 7(2^2 + 2^5 + \dots + 2^{98})$ chia 7 dư 2 hay B chia cho 7 dư 2

Bài 11: Cho $M = 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + \dots + 4^{100}$. Chứng tỏ M chia hết cho 5.

Lời giải

Ta có: $M = 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + \dots + 4^{100}$

$$M = (4 + 4^2) + (4^3 + 4^4) + (4^5 + 4^6) + \dots + (4^{99} + 4^{100}) \quad (100 \text{ số hạng nhóm thành } 50 \text{ tổng nhỏ})$$

$$M = 4(1 + 4) + 4^3(1 + 4) + 4^5(1 + 4) + \dots + 4^{99}(1 + 4)$$

$$M = 4.5 + 4^3.5 + 4^5.5 + \dots + 4^{99}.5 = 5.(4 + 4^3 + 4^5 + \dots + 4^{99})$$

Do $4 + 4^3 + 4^5 + \dots + 4^{99}$ nguyên dương suy ra M chia hết cho 5

Bài 12: Cho $B = 999993^{1999} - 555557^{1997}$. Chứng minh rằng B chia hết cho 5

Lời giải

Ta có $999993^{1999} = 999993^{1996} \cdot 999993^3 = (999993^4)^{499} \cdot 999993^3 = (\overline{...1})^{499} \cdot (\overline{...7}) = (\overline{...1}) \cdot (\overline{...7}) = \overline{...7}$

Lại có $555557^{1997} = 555557^{1996} \cdot 555557 = (555557^4)^{499} \cdot 555557 = (\overline{...1})^{499} \cdot (\overline{...7}) = (\overline{...1}) \cdot (\overline{...7}) = \overline{...7}$

Suy ra $B = 999993^{1999} - 555557^{1997} = \overline{...7} - \overline{...7} = \overline{...0} : 5$

Vậy B chia hết cho 5.

CHUYÊN ĐỀ PHÉP CHIA HẾT VÀ PHÉP CHIA CÓ DƯ
CHỦ ĐỀ 4: PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC CHỨNG MINH BÀI TOÁN
CHIA HẾT

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. TÍNH CHẤT CHUNG ($n \in \mathbb{N}$)

- 1) $a:b$ và $b:c$ thì $a:c$
- 2) $a:a$ với mọi a khác 0
- 3) $0:b$ với mọi b khác 0
- 4) Bất cứ số nào cũng chia hết cho 1

2. TÍNH CHẤT CHIA HẾT CỦA TỔNG, HIỆU

- Nếu a, b cùng chia hết cho m thì $a + b$ chia hết cho m và $a - b$ chia hết cho m
- Tổng (Hiệu) của 2 số chia hết cho m và 1 trong 2 số ấy chia hết cho m thì số còn lại cũng chia hết cho m .
- Nếu 1 trong 2 số a, b chia hết cho m số kia không chia hết cho m thì tổng, hiệu của chúng không chia hết cho m .

3. TÍNH CHẤT CHIA HẾT CỦA 1 TÍCH

- Nếu một thừa số của tích chia hết cho m thì tích chia hết cho m
- Nếu a chia hết cho m thì bội của a cũng chia hết cho m
- Nếu a chia hết cho m , b chia hết cho n thì $a.b$ chia hết cho $m.n$
- Nếu a chia hết cho b thì: $a^m : b^m$

4. CÁC TÍNH CHẤT KHÁC:

- 1) $0:a$ ($a \neq 0$)
- 2) $a:a; a:1$ ($a \neq 0$)
- 3) $a:b; b:c \Rightarrow a:c$
- 4) $a:m; b:m \Rightarrow pa \pm qb:m$
- 5) $a:(m.n) \Rightarrow a:m; a:n$
- 6) $a:m; a:n; (m, n) = 1 \Rightarrow a:mn$
- 7) $a:m; b:n \Rightarrow ab:mn$
- 8) $ab:m; (b, m) = 1 \Rightarrow a:m$
- 9) $ab:p$ (p là số nguyên tố) thì hoặc $a:p$ hoặc $b:p$

5. CÁC TÍNH CHẤT SUY LUẬN ĐƯỢC

- Trong hai số tự nhiên liên tiếp có một số chẵn và một số lẻ.
- Tổng hai số tự nhiên liên tiếp là một số lẻ.
- Tích hai số tự nhiên liên tiếp là một số chẵn.
- Tích hai số chẵn liên tiếp chia hết cho 8.
- Tổng của hai số tự nhiên bất kỳ là một số lẻ thì có một số tự nhiên là số chẵn.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

1, Dạng 1: Dùng phương pháp quy nạp để chứng minh một biểu thức (với n là số mũ) chia hết cho một số.

2, Dạng 1: Dùng phương pháp quy nạp để chứng minh một biểu thức (với n là cơ số) chia hết cho một số.

3, Dạng 3: Dùng phương pháp quy nạp để chứng minh đẳng thức.

Dạng 1: Dùng phương pháp quy nạp để chứng minh một biểu thức (với n là số mũ) chia hết cho một số.

I. Phương pháp giải:

Để chứng minh một mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp toán học, ta thực hiện các bước sau:

PHƯƠNG PHÁP 1:

Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = 1$

Bước 2: Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$ (giả thiết quy nạp)

Bước 3: Cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

PHƯƠNG PHÁP 2:

Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = 1$ có nghĩa là $F_1 : A$

Bước 2: Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$ có nghĩa là $F_k : A$

Bước 3: Ta chứng minh $F_{k+1} - F_k : A$.

II. Bài toán:

Bài 1: Chứng minh rằng: $4^n + 5$ chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Giải:

Đặt $A_n = 4^n + 5$

* Với $n = 0$, ta có $A_0 = 4^0 + 5 = 6 : 3$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 0$, suy ra $A_k = 4^k + 5 : 3$

* Với $n = k + 1$, xét $A_{k+1} = 4^{k+1} + 5 = 4^k \cdot 4 + 5$

$$= 4^k \cdot (3+1) + 5 = \underbrace{4^k \cdot 3}_{\vdots 3} + \underbrace{4^k + 5}_{\vdots 3}$$

$$\Rightarrow A_{k+1} \vdots 3$$

Vậy $4^n + 5$ chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài 2: Chứng minh rằng: $7^n - 1$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải:

Đặt $A_n = 7^n - 1$

* Với $n = 1$, ta có $A_1 = 7^1 - 1 = 6 \vdots 6$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $A_k = 7^k - 1 \vdots 6$

* Với $n = k + 1$, xét $A_{k+1} = 7^{k+1} - 1 = 7^k \cdot 7 - 1$

$$= 7^k \cdot (6+1) - 1 = \underbrace{7^k \cdot 6}_{\vdots 6} + \underbrace{7^k - 1}_{\vdots 6}$$

$$\Rightarrow A_{k+1} \vdots 6$$

Vậy $7^n - 1$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 3: Chứng minh rằng: $9^n - 1$ chia hết cho 8 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải:

Đặt $A_n = 9^n - 1$

* Với $n = 1$, ta có $A_1 = 9^1 - 1 = 8 \vdots 8$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $A_k = 9^k - 1 \vdots 8$

* Với $n = k + 1$, xét $A_{k+1} = 9^{k+1} - 1 = 9^k \cdot 9 - 1$

$$= 9^k \cdot (8+1) - 1 = \underbrace{9^k \cdot 8}_{\vdots 8} + \underbrace{9^k - 1}_{\vdots 8}$$

$$\Rightarrow A_{k+1} \vdots 8$$

Vậy $9^n - 1$ chia hết cho 8 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 4: Chứng minh rằng: $13^n - 1$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải:

Đặt $A_n = 13^n - 1$

* Với $n = 1$, ta có $A_1 = 13^1 - 1 = 12 \vdots 6$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $A_k = 13^k - 1 \vdots 6$

* Với $n = k + 1$, xét $A_{k+1} = 13^{k+1} - 1 = 13^k \cdot 13 - 1$

$$= 13^k \cdot (12+1) - 1 = \underbrace{13^k \cdot 12}_{\vdots 6} + \underbrace{13^k - 1}_{\vdots 6}$$

$$\Rightarrow A_{k+1} \vdots 6$$

Vậy $13^n - 1$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 5: Chứng minh rằng: $16^n - 1$ chia hết cho 15 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải:

Đặt $A_n = 16^n - 1$

* Với $n = 1$, ta có $A_1 = 16^1 - 1 = 15 \vdots 15$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $A_k = 16^k - 1 \vdots 15$

* Với $n = k + 1$, xét $A_{k+1} = 16^{k+1} - 1 = 16^k \cdot 16 - 1$

$$= 16^k \cdot (15+1) - 1 = \underbrace{16^k \cdot 15}_{\vdots 15} + \underbrace{16^k - 1}_{\vdots 15}$$

$$\Rightarrow A_{k+1} \vdots 15$$

Vậy $16^n - 1$ chia hết cho 15 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 6: Chứng minh rằng: $2^{2n+1} + 1$ chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải:

Đặt $B_n = 2^{2n+1} + 1$

* Với $n = 1$, ta có $B_1 = 2^2 - 1 = 3 \vdots 3$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $B_k = 2^{2k+1} + 1 \vdots 3$

* Với $n = k + 1$, xét $B_{k+1} = 2^{2(k+1)+1} + 1 = 2^{2k+1+2} + 1$

$$= 2^{2n+1} \cdot 2^2 + 1 = 2^{2n+1} \cdot (3+1) + 1$$

$$= \underbrace{3 \cdot 2^{2k+1}}_{\vdots 3} + \underbrace{2^{2k+1} + 1}_{\vdots 3}$$

$$\Rightarrow B_{k+1} \vdots 3$$

Vậy $2^{2n+1} + 1$ chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 7: Chứng minh rằng: $6^{2n} - 1$ chia hết cho 35 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Giải:

Đặt $B_n = 6^{2n} - 1$

* Với $n = 1$, ta có $B_1 = 6^2 - 1 = 35 \vdots 35$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $B_k = 6^{2k} - 1 \vdots 35$

$$\begin{aligned}
 * \text{ Với } n = k + 1, \text{ xét } B_{k+1} &= 6^{2(k+1)} - 1 = 6^{2k} \cdot 6^2 - 1 \\
 &= 6^{2k} \cdot (35 + 1) - 1 = \underbrace{6^{2k} \cdot 35}_{\vdots 35} + \underbrace{6^{2k} - 1}_{\vdots 35} \\
 &\Rightarrow B_{k+1} \vdots 35
 \end{aligned}$$

Vậy $6^{2n} - 1$ chia hết cho 35 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 8: Chứng minh rằng: $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải:

Đặt $C_n = 4^n + 15n - 1$

* Với $n = 1$, ta có $C_1 = 4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 18 \vdots 9$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $C_k = 4^k + 15k - 1 \vdots 9$

$$\begin{aligned}
 * \text{ Với } n = k + 1, \text{ xét } C_{k+1} &= 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 \\
 &= 4 \cdot 4^k + 15k + 14 \\
 &= 4 \cdot (4^k + 15k - 1) - 45k + 18 \\
 &= 4 \cdot \underbrace{(4^k + 15k - 1)}_{\vdots 9} + \underbrace{9(2 - 5k)}_{\vdots 9} \\
 &\Rightarrow C_{k+1} \vdots 9
 \end{aligned}$$

Vậy $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 9: Chứng minh rằng: $4^n + 6n + 8$ chia hết cho 9 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải:

Đặt $D_n = 4^n + 6n + 8$

* Với $n = 1$, ta có $D_1 = 4^1 + 6 \cdot 1 + 8 = 18 \vdots 9$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $D_k = 4^k + 6k + 8 \vdots 9$

$$\begin{aligned}
 * \text{ Với } n = k + 1, \text{ xét } D_{k+1} &= 4^{k+1} + 6(k+1) + 8 \\
 &= 4 \cdot 4^k + 6k + 14 \\
 &= 4 \cdot (4^k + 6k + 8) - 18k + 18 \\
 &= 4 \cdot \underbrace{(4^k + 6k + 8)}_{\vdots 9} + \underbrace{18(1 - k)}_{\vdots 9} \\
 &\Rightarrow D_{k+1} \vdots 9
 \end{aligned}$$

Vậy $4^n + 6n + 8$ chia hết cho 9 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 10: Chứng minh rằng: $7^n + 3n - 1$ chia hết cho 9 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Giải:

Đặt $E_n = 7^n + 3n - 1$

* Với $n = 1$, ta có $E_1 = 7^1 + 3.1 - 1 = 9 \div 9$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $E_k = 7^k + 3k - 1 \div 9$

* Với $n = k + 1$, Xét $E_{k+1} = 7^{k+1} + 3(k+1) - 1$

$$\begin{aligned} &= 7.7^k + 21k - 7 - 18k + 9 \\ &= 7.\underbrace{(7^k + 3k - 1)}_{\div 9} - \underbrace{9(2k - 1)}_{\div 9} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_{k+1} \div 9$$

Vậy $7^n + 3n - 1$ chia hết cho 9 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Bài 11: Chứng minh rằng: $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải:

Đặt $E_n = 4^n + 15n - 1$

* Với $n = 1$, ta có $E_1 = 4^1 + 15.1 - 1 = 18 \div 9$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $E_k = 4^k + 15k - 1 \div 9$

* Với $n = k + 1$, xét $E_{k+1} = 4^{k+1} + 15(k+1) - 1$

$$\begin{aligned} &= 4.4^k + 15k + 15 - 1 \\ &= 3.4^k + 15 + 4^k + 15k - 1 \\ &= 3.(4^k + 5) + E_k \end{aligned}$$

$$\text{Mà } (4^k + 5) \div 3 \Rightarrow 3.(4^k + 5) \div 9$$

$$\Rightarrow E_{k+1} \div 9$$

Vậy $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 12: Chứng minh rằng: $16^n - 15n - 1$ chia hết cho 225 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải:

Đặt $F_n = 16^n - 15n - 1$

* Với $n = 1$, ta có $F_1 = 16^1 - 15.1 - 1 = 0 \div 225$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $F_k = 16^k - 15k - 1 \div 225$

* Với $n = k + 1$, xét $F_{k+1} = 16^{k+1} - 15(k+1) - 1$

$$\begin{aligned} &= 16.16^k - 15k - 16 \\ &= 16^k - 15k - 1 - 15(16^k - 1) \end{aligned}$$

$$= F_k - 15(16^k - 1)$$

Ta có : $16^k - 1 : 15 \Rightarrow 15(16^k - 1) : 225$

$$\Rightarrow F_{k+1} : 225$$

Vậy $16^n - 15n - 1$ chia hết cho 225 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 13: Chứng minh rằng $B_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Giải:

* Với $n = 0$, ta có $B_0 = 3^1 + 2^2 = 7 : 7$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 0$, suy ra $B_k = 3^{2k+1} + 2^{k+2} : 7$

$$\begin{aligned} * \text{ Với } n = k + 1, \text{ xét } B_{k+1} &= 3^{2(k+1)+1} + 2^{k+1+2} \\ &= 3^2 \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot 2^{k+2} \\ &= 9(3^{2k+1} + 2^{k+2}) - 7 \cdot 2^{k+2} \\ &= 9 \cdot \underbrace{B_k}_{: 7} + \underbrace{7 \cdot 2^{k+2}}_{: 7} \end{aligned}$$

Vậy $B_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài 14: Chứng minh rằng $B_n = 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ chia hết cho 133 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải:

* Với $n = 1$, ta có $B_1 = 11^2 + 12^1 = 133 : 133$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $B_k = 11^{k+1} + 12^{2k-1} : 133$

$$\begin{aligned} * \text{ Với } n = k + 1, \text{ xét } B_{k+1} &= 11^{k+1+2} + 12^{2(k+1)+1} \\ &= 11 \cdot 11^{k+1} + 12^{2k-1} \cdot 12^2 \\ &= 11 \cdot 11^{k+1} + 12^{2k+1} (11 + 133) \\ &= 11 \cdot \underbrace{B_k}_{: 133} + \underbrace{133 \cdot 12^{2k-1}}_{: 133} \\ &\Rightarrow B_{k+1} : 133 \end{aligned}$$

Vậy $B_n = 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ chia hết cho 133.

Bài 15: Chứng minh rằng: $4 \cdot 3^{2n+2} + 32n - 36$ chia hết cho 32 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Giải:

Đặt $G_n = 4 \cdot 3^{2n+2} + 32n - 36$

* Với $n = 0$, ta có $G_0 = 4 \cdot 3^2 + 32 \cdot 0 - 36 = 0 : 32$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 0$, suy ra $G_k = 4 \cdot 3^{2k+2} + 32k - 36 \vdots 32$

$$\begin{aligned}
 * \text{ Với } n = k + 1, \text{ xét } G_{k+1} &= 4 \cdot 3^{2(k+1)+2} + 32(k+1) - 36 \\
 &= 9 \cdot 4 \cdot 3^{2k+2} + 32k - 4 \\
 &= 9(4 \cdot 3^{2k+2} + 32k - 36) - 32(8k - 32) \\
 &= 9 \underbrace{G_k}_{\vdots 32} - 32 \underbrace{(8k - 32)}_{\vdots 32} \\
 &\Rightarrow G_{k+1} \vdots 32
 \end{aligned}$$

Vậy $4 \cdot 3^{2n+2} + 32n - 36$ chia hết cho 32 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài 16: Chứng minh rằng: $3^{3n+3} - 26n - 27$ chia hết cho 169 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Giải:

Đặt $G_n = 3^{3n+3} - 26n - 27$

* Với $n = 0$, ta có $G_0 = 3^3 - 26 \cdot 0 - 27 = 0 \vdots 169$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 0$, suy ra $G_k = 3^{3k+3} - 26k - 27 \vdots 169$

$$\begin{aligned}
 * \text{ Với } n = k + 1, \text{ xét } G_{k+1} &= 3^{3(k+1)+3} - 26(k+1) - 27 \\
 &= 27 \cdot 3^{3k+3} - 26k - 26 - 27 \\
 &= 27(3^{3k+3} - 26k - 27) + 26 \cdot 26k + 676 \\
 &= 27 \underbrace{G_k}_{\vdots 169} + 169 \underbrace{(4k + 4)}_{\vdots 169} \\
 &\Rightarrow G_{k+1} \vdots 169
 \end{aligned}$$

Vậy $3^{3n+3} - 26n - 27$ chia hết cho 169 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài 17: Chứng minh rằng: $3^{2n+3} + 5$ chia hết cho 8 với mọi $n \in \mathbb{N}$

Giải: Ta sử dụng phương pháp 2

Đặt $G_n = 3^{2n+3} + 5$

* Với $n = 0$, ta có $G_0 = 3^3 + 5 = 32 \vdots 8$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 0$, suy ra $G_k = 3^{2k+3} + 5 \vdots 8$

$$\begin{aligned}
 * \text{ Xét } G_{k+1} - G_k &= 3^{2(k+1)+3} + 5 - (3^{2k+3} + 5) \\
 &= 3^{2k+5} - 3^{2k+3} \\
 &= 9 \cdot 3^{2k+3} - 3^{2k+3} \\
 &= 3^{2k+3} (9 - 1) = 3^{2k+3} \cdot 8 \vdots 8
 \end{aligned}$$

Vậy $3^{2n+3} + 5$ chia hết cho 8 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài 18: Chứng minh rằng: $10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Giải: Ta sử dụng phương pháp 2

Đặt $G_n = 10^n + 18n - 1$

* Với $n = 0$, ta có $G_0 = 1 + 18 \cdot 0 - 1 = 0 \vdots 27$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 0$, suy ra $G_k = 10^k + 18k - 1 \vdots 27$

$$\begin{aligned} * \text{ Xét } G_{k+1} - G_k &= 10^{k+1} + 18(k+1) - 1 - (10^k + 18k - 1) \\ &= 10^k(9+1) + 18 \\ &= 9 \cdot (10^k + 2) \end{aligned}$$

Đặt $H_k = 10^k + 2$

Ta có $H_0 = 10^0 + 2 = 3 \vdots 3$ và $H_{k+1} - H_k = 9 \cdot 10^k \vdots 3$

Nên: $G_{k+1} - G_k = 9 \cdot (10^k + 2) \vdots 27$

Vậy $10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài 19: Chứng minh rằng: $3^{2n+3} + 40n - 27$ chia hết cho 64 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Giải: Ta sử dụng phương pháp 2

Đặt $G_n = 3^{2n+3} + 40n - 27$

* Với $n = 0$, ta có $G_0 = 3^3 + 40 \cdot 0 - 27 = 0 \vdots 64$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 0$, suy ra $G_k = 3^{2k+3} + 40k - 27 \vdots 64$

$$\begin{aligned} * \text{ Xét } G_{k+1} - G_k &= 3^{2(k+1)+3} + 40(k+1) - 27 - (3^{2k+3} + 40k - 27) \\ &= 3^{2k+5} - 3^{2k+3} + 40 \\ &= 8 \cdot 3^{2k+3} + 40 \\ &= 8 \cdot (3^{2k+3} + 5) \end{aligned}$$

Mà $3^{2k+3} + 5$ chia hết cho 8 với mọi $n \in \mathbb{N}$ (bài 17)

Nên: $G_{k+1} - G_k = 8 \cdot (3^{2k+3} + 5) \vdots 64$

Vậy $3^{2n+3} + 40n - 27$ chia hết cho 64 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài 20: Chứng minh rằng: $3^{2n+1} + 40n - 67$ chia hết cho 64 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Giải: Ta sử dụng phương pháp 2

Đặt $G_n = 3^{2n+1} + 40n - 67$

* Với $n = 1$, ta có $G_1 = 3^3 + 40 \cdot 1 - 67 = 0 \div 64$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $G_k = 3^{2k+1} + 40k - 67 \div 64$

$$\begin{aligned} * \text{ Xét } G_{k+1} - G_k &= 3^{2(k+1)+1} + 40(k+1) - 67 - (3^{2k+1} + 40k - 67) \\ &= 3^{2k+3} - 3^{2k+1} + 40 \\ &= 8 \cdot 3^{2k+1} + 40 \\ &= 8 \cdot (3^{2k+1} + 5) \end{aligned}$$

Đặt $H_k = 3^{2k+1} + 5$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } H_1 &= 3^3 + 5 = 32 \div 8 \text{ và } H_{k-1} - H_k = 3^{2(k+1)+1} + 5 - (3^{2k+1} + 5) \\ &= 3^{2k+3} - 3^{2k+1} = 8 \cdot 3^{2k+1} \div 8 \end{aligned}$$

$$\text{Nên: } G_{k+1} - G_k = 8 \cdot (3^{2k+1} + 5) \div 64$$

Vậy $3^{2n+3} + 40n - 27$ chia hết cho 64 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dạng 2: Dùng phương pháp quy nạp để chứng minh một biểu thức (với n là cơ số) chia hết cho một số.

I. Phương pháp giải:

Để chứng minh một mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp toán học, ta thực hiện các bước sau:

PHƯƠNG PHÁP:

Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = 1$

Bước 2: Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$ (giả thiết quy nạp)

Bước 3: Cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$

Ta dùng một số Hằng đẳng thức sau:

$$1. (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2. (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$3. (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$4. (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

II. Bài toán:

Bài 1: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 - n$ chia hết cho 3.

Giải:

$$\text{Đặt } A_n = n^3 - n$$

* Với $n = 1$, ta có $A_1 = 1^3 - 1 = 0 \div 3$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $A_k = k^3 - k \vdots 3$

* Với $n = k + 1$, xét $A_{k+1} = (k+1)^3 - (k+1)$

$$\begin{aligned} &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 \\ &= \underbrace{(k^3 - k)}_{\vdots 3} + 3 \underbrace{(k^2 + k)}_{\vdots 3} \\ &\Rightarrow A_{k+1} \vdots 6 \end{aligned}$$

Vậy với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 - n$ chia hết cho 3.

Bài 2: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

Giải:

Đặt $A_n = n^3 + 11n$

* Với $n = 1$, ta có $A_1 = 1^3 + 11 \cdot 1 = 12 \vdots 6$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $A_k = k^3 + 11k \vdots 6$

* Với $n = k + 1$, xét $A_{k+1} = (k+1)^3 + 11(k+1)$

$$\begin{aligned} &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11 \\ &= (k^3 + 11k) + 3(k^2 + k + 4) \\ &= \underbrace{(k^3 + 11k)}_{\vdots 6} + 3 \underbrace{(k^2 + k + 4)}_{\vdots 2} \\ &\Rightarrow A_{k+1} \vdots 6 \end{aligned}$$

Vậy với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

Bài 3: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta luôn có $n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3.

Giải:

Đặt $A_n = n^3 + 3n^2 + 5n$

* Với $n = 1$, ta có $A_1 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 9 \vdots 3$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $A_k = k^3 + 3k^2 + 5k \vdots 3$

* Với $n = k + 1$, xét $A_{k+1} = (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1)$

$$\begin{aligned} &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k^2 + 6k + 3 + 5k + 5 \\ &= k^3 + 3k^2 + 5k + 3k^2 + 9k + 9 \\ &= \underbrace{A_k}_{\vdots 3} + 3 \underbrace{(k^2 + 3k + 3)}_{\vdots 3} \\ &\Rightarrow A_{k+1} \vdots 3 \end{aligned}$$

Vậy với $n \in \mathbb{N}^*$ ta luôn có $n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3.

Bài 4: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta luôn có $2n^3 - 3n^2 + n$ chia hết cho 6.

Giải:

Đặt $A_n = 2n^3 - 3n^2 + n$

* Với $n = 1$, ta có $A_1 = 2.1^3 - 3.1^2 + 1 = 0 \vdots 6$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $A_k = 2k^3 - 3k^2 + k \vdots 6$

$$\begin{aligned} * \text{ Với } n = k + 1, \text{ xét } A_{k+1} &= 2(k+1)^3 - 3(k+1)^2 + (k+1) \\ &= 2k^3 + 6k^2 + 6k + 2 - 3k^2 - 6k - 3 + k + 1 \\ &= 2k^3 - 3k^2 + k + 6k^2 \\ &= \underbrace{A_k}_{\vdots 6} + \underbrace{6k^2}_{\vdots 6} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_{k+1} \vdots 6$$

Vậy với $n \in \mathbb{N}^*$ ta luôn có $2n^3 - 3n^2 + n$ chia hết cho 6.

Bài 5 : Chứng minh rằng với mọi số $n \in \mathbb{N}^*$ thì $S_n = (n+1)(n+2)...(n+n)$ chia hết cho 2^n .

Giải:

* Với $n = 1$, ta có $S_1 = 1+1 = 2 \vdots 2^1 = 2$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $S_k = (k+1)(k+2)...(k+k) \vdots 2^k$

$$\begin{aligned} * \text{ Với } n = k + 1, \text{ xét } S_{k+1} &= (k+2)(k+3)...[(k+1) + (k+1)] \\ &= 2(k+1)(k+2)...(k+k) \\ &= 2.S_k \end{aligned}$$

$$\text{Mà } S_k \vdots 2^k \Rightarrow 2.S_k \vdots 2^{k+1}$$

$$\Rightarrow S_{k+1} \vdots 2^{k+1}$$

Vậy với mọi số $n \in \mathbb{N}^*$ thì $S_n = (n+1)(n+2)...(n+n)$ chia hết cho 2^n .

Dạng 3: Dùng phương pháp quy nạp để chứng minh đẳng thức.

I. Phương pháp giải:

Để chứng minh một mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp toán học, ta thực hiện các bước sau:

PHƯƠNG PHÁP:

Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = 1$

Bước 2: Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$ (giả thiết quy nạp)

Bước 3: Cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$ có nghĩa là khi $n = k + 1$ ta chứng minh vế trái bằng vế phải.

II. Bài toán:

Bài 1: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có đẳng thức: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Giải:

* Với $n = 1$, ta có vế trái chỉ có một số hạng là 1, vế phải bằng $1^1 = 1$

Vậy hệ thức đúng với $n = 1$

* Đặt vế trái bằng S_n , giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$

Tức là: $S_k = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$

Ta phải chứng minh đẳng thức trên cũng đúng với $n = k + 1$, nghĩa là phải chứng minh:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k + 1) + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$$

Thật vậy, ta có: $S_{k+1} = S_k + [2(k + 1) - 1]$

$$= k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

Vậy đẳng thức trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 2: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có đẳng thức: $2 + 5 + 8 + \dots + 3n - 1 = \frac{n(3n + 1)}{2}$.

Giải:

* Với $n = 1$, ta có vế trái chỉ có một số hạng là 2, vế phải bằng $\frac{1(3 \cdot 1 + 1)}{2} = 2$

Vậy hệ thức đúng với $n = 1$

* Đặt vế trái bằng S_n , giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$

Tức là: $S_k = 2 + 5 + 8 + \dots + 3k - 1 = \frac{k(3k + 1)}{2}$

Ta phải chứng minh đẳng thức trên cũng đúng với $n = k + 1$, nghĩa là phải chứng minh:

$$2 + 5 + 8 + \dots + (3k - 1) + [3(k + 1) - 1] = \frac{(k + 1)[(3(k + 1) + 1)]}{2}$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp, ta có:

$$S_{k+1} = S_k + 3k + 2$$

$$= \frac{k(3k + 1)}{2} + 3k + 2$$

$$= \frac{3k^2 + k + 6k + 4}{2}$$

$$= \frac{3(k^2 + 2k + 1) + k + 1}{2}$$

$$= \frac{(k+1)[3(k+1)+1]}{2}$$

Vậy đẳng thức trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 3: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có đẳng thức: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Giải:

* Với $n = 1$, ta có vế trái chỉ có một số hạng là 1, vế phải bằng $\frac{1(1+1)}{2} = 1$

Vậy hệ thức đúng với $n = 1$

* Đặt vế trái bằng S_n , giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$

Tức là: $S_k = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

Ta phải chứng minh đẳng thức trên cũng đúng với $n = k + 1$, nghĩa là phải chứng minh:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp, ta có: $S_{k+1} = S_k + k + 1$

$$\begin{aligned} &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\ &= \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 4: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có đẳng thức: $1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Giải:

* Với $n = 1$, ta có vế trái bằng $1.2 = 2$, vế phải bằng $\frac{1(1+1)(1+2)}{3} = 2$

Vậy hệ thức đúng với $n = 1$

* Đặt vế trái bằng S_n , giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$

Tức là: $S_k = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$

Ta phải chứng minh đẳng thức trên cũng đúng với $n = k + 1$, nghĩa là phải chứng minh:

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Thật vậy, ta có: $S_{k+1} = S_k + (k+1)(k+2)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \\
 &= \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3} \\
 &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}
 \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 5: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có đẳng thức: $1.2 + 2.5 + 3.8 + \dots + n(3n-1) = n^2(n+1)$.

Giải:

* Với $n = 1$, ta có vế trái bằng $1.2 = 2$, vế phải bằng $1^2(1+1) = 2$

Vậy hệ thức đúng với $n = 1$

* Đặt vế trái bằng S_n , giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$

Tức là: $S_k = 1.2 + 2.5 + 3.8 + \dots + k(3k-1) = k^2(k+1)$

Ta phải chứng minh đẳng thức trên cũng đúng với $n = k+1$, nghĩa là phải chứng minh:

$$S_{k+1} = 1.2 + 2.5 + 3.8 + \dots + k(3k-1) + (k+1)(3k+2) = (k+1)^2(k+2)$$

Thật vậy, ta có: $S_{k+1} = S_k + (k+1)(3k+2)$

$$\begin{aligned}
 &= k^2(k+1) + (k+1)(3k+2) \\
 &= (k+1)(k^2 + 3k + 2) \\
 &= (k+1)(k+2)(k+3)
 \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 6: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có đẳng thức: $1.4 + 2.7 + 3.10 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2$.

Giải:

* Với $n = 1$, ta có vế trái bằng $1.4 = 4$, vế phải bằng $1(1+1)^2 = 4$

Vậy hệ thức đúng với $n = 1$

* Đặt vế trái bằng S_n , giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$

Tức là: $S_k = 1.4 + 2.7 + 3.10 + \dots + k(3k+1) = k(k+1)^2$

Ta phải chứng minh đẳng thức trên cũng đúng với $n = k+1$, nghĩa là phải chứng minh:

$$S_{k+1} = 1.4 + 2.7 + 3.10 + \dots + k(3k+1) + (k+1)(3k+4) = (k+1)(k+2)^2$$

Thật vậy, ta có: $S_{k+1} = S_k + (k+1)(3k+4)$

$$\begin{aligned}
 &= k(k+1)^2 + (k+1)(3k+4) \\
 &= (k+1)[k(k+1) + 3k+4]
 \end{aligned}$$

$$= (k+1)(k^2 + 4k + 4)$$

$$= (k+1)(k+2)^2$$

Vậy đẳng thức trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 7: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có đẳng thức: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$.

Giải:

* Với $n = 1$, ta có vế trái bằng $\frac{1}{2}$, vế phải bằng $\frac{2^1 - 1}{2^1} = \frac{1}{2}$

Vậy hệ thức đúng với $n = 1$

* Đặt vế trái bằng S_n , giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$

$$\text{Tức là: } S_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^k} = \frac{2^k - 1}{2^k}$$

Ta phải chứng minh đẳng thức trên cũng đúng với $n = k + 1$, nghĩa là phải chứng minh:

$$S_{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}$$

$$\text{Thật vậy, ta có: } S_{k+1} = S_k + \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$= \frac{2^k - 1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$= \frac{2(2^k - 1)}{2 \cdot 2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$= \frac{2^{k+1} - 2}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}$$

Vậy đẳng thức trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 8: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có đẳng thức: $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Giải:

* Với $n = 1$, ta có vế trái bằng $\frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}$, vế phải bằng $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

Vậy hệ thức đúng với $n = 1$

* Đặt vế trái bằng S_n , giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$

$$\text{Tức là: } S_k = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

Ta phải chứng minh đẳng thức trên cũng đúng với $n = k + 1$, nghĩa là phải chứng minh:

$$S_{k+1} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Thật vậy, ta có:
$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 9: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có đẳng thức: $\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$.

Giải:

* Với $n = 1$, ta có vế trái bằng $\frac{1}{1.4} = \frac{1}{4}$, vế phải bằng $\frac{1}{3.1+1} = \frac{1}{4}$

Vậy hệ thức đúng với $n = 1$

* Đặt vế trái bằng S_n , giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$

Tức là:
$$S_k = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \dots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{k}{3k+1}$$

Ta phải chứng minh đẳng thức trên cũng đúng với $n = k + 1$, nghĩa là phải chứng minh:

$$S_{k+1} = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \dots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k+1}{3k+4}$$

Thật vậy, ta có:
$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} \\ &= \frac{k}{3k+1} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} \\ &= \frac{k(3k+4)+1}{(3k+1)(3k+4)} \\ &= \frac{3k^2+4k+1}{(3k+1)(3k+4)} \\ &= \frac{(k+1)(3k+1)}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k+1}{3k+4} \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Bài 10: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \geq 2$ ta có:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

Giải:

* Với $n = 2$, ta có vế trái bằng $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, vế phải bằng $\frac{2+1}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$

Vậy hệ thức đúng với $n = 2$

* Đặt vế trái bằng S_n , giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 2$

Tức là: $S_k = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{k+1}{2k}$

Ta phải chứng minh đẳng thức trên cũng đúng với $n = k + 1$, nghĩa là phải chứng minh:

$$S_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+2}{2(k+1)}$$

Thật vậy, ta có:
$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \\ &= \frac{k+1}{2k} \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \\ &= \frac{k+1}{2k} \cdot \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} = \frac{k+2}{2(k+1)} \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 11: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có đẳng thức: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Giải:

* Với $n = 1$, ta có vế trái bằng $1^1 = 1$, vế phải bằng $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$

Vậy hệ thức đúng với $n = 1$

* Đặt vế trái bằng S_n , giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$

Tức là: $S_k = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Ta phải chứng minh đẳng thức trên cũng đúng với $n = k + 1$, nghĩa là phải chứng minh:

$$S_{k+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Thật vậy, ta có: $S_{k+1} = S_k + (k+1)^2$

$$\begin{aligned}&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\&= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\&= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\end{aligned}$$

Vậy đẳng thức trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.