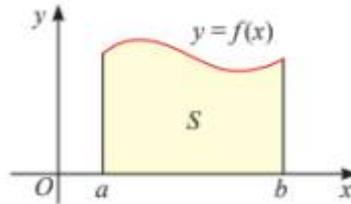


BÀI 2

TÍCH PHÂN

1. Khái niệm tích phân

a. Diện tích hình thang cong



Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính bởi:

$$S = F(b) - F(a)$$

trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

b. Khái niệm tích phân

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ thì hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu $\int_a^b f(x) dx$

Chú ý:

- Hiệu số $F(b) - F(a)$ còn được kí hiệu là $F(x)\Big|_a^b$.

$$\text{Vậy } \int_a^b f(x) dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

- Ta gọi \int_a^b là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên, $f(x) dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân và

$f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

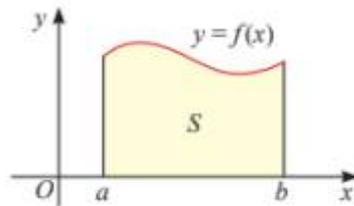
- Quy ước: $\int_a^a f(x) dx; \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

• Tích phân của hàm số f từ a đến b chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào biến x hay t , nghĩa là $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

- Ý nghĩa hình học của tích phân

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$.

$$S = \int_a^b f(x) dx$$



Nhận xét:

- Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx.$$

- Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

- Đạo hàm của quãng đường di chuyển của vật theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mọi thời điểm: $v(t) = s'(t)$. Do đó, nếu biết tốc độ $v(t)$ tại mọi thời điểm $t \in [a; b]$ thì tính được quãng đường

di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b theo công thức: $s = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t) dt$

2. Tính chất của tích phân

Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó:

- **Tính chất 1:** $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$, với k là hằng số.

- **Tính chất 2:** $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

- **Tính chất 3:** $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ với $c \in (a; b)$.

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1
TÍNH TÍCH PHÂN SỬ DỤNG BẢNG NGUYÊN HÀM SƠ CẤP

Nguyên hàm của một hàm số sơ cấp	
Nguyên hàm của hàm số lũy thừa	$\int 0 dx = C$ $\int dx = x + C$ $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (x \neq 0)$
Nguyên hàm của hàm số lượng giác	$\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
Nguyên hàm của hàm số mũ	$\int e^x dx = e^x + C$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$

Chú ý : Dùng công thức sau làm trắc nghiệm cho nhanh

$$\bullet \int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$$

$$\bullet \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\bullet \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

$$\bullet \int a^{\alpha x + \beta} dx = \frac{1}{\alpha} \frac{a^{\alpha x + \beta}}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$$

Bài 1. Tính các tích phân sau đây:

a) $\int_0^3 (3x^2 + 2024) dx$

b) $\int_0^1 (4x^3 + 3x^2 - 2) dx$

c) $\int_{-2}^4 (x+1)(x-1) dx$

d) $\int_1^2 \frac{x-1}{x} dx$

e) $\int_1^2 \frac{2x^3 - x - 2025}{x^2} dx$

f) $\int_1^2 \frac{(x-1)^2}{x} dx$

Bài 2. Tính các tích phân sau đây:

a) $\int_1^3 x^{\sqrt{2024}} dx$

b) $\int_1^3 x^{\frac{2}{3}} dx$

c) $\int_1^8 \sqrt[3]{x} dx$

d) $\int_1^e \frac{7}{3x} dx$

e) $\int_1^2 \frac{1}{x^3} dx$

f) $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

Bài 3. Tính các tích phân sau đây:

a) $\int_1^4 (\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2) dx$

b) $\int_0^4 (\sqrt{x} + 1)(\sqrt[3]{x} - 1) dx$

c) $\int_1^2 \left(\frac{x - \sqrt[4]{x^3}}{x} \right)^2 dx$

d) $\int_{-3}^{-1} \frac{(x^2 + 1)^3}{x^2} dx$

e) $\int_1^4 \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x}} dx$

f) $\int_1^8 \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)^2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

Bài 4. Tính các tích phân sau đây:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin x + 2024) dx$

d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x (1 + \tan x)} dx$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} dx$

Bài 5. Tính các tích phân sau đây:

a) $\int_0^1 (2^{2x} \cdot 3^{x-1}) dx$

b) $\int_0^1 (2 \cdot 3^x - 5e^x) dx$

c) $\int_1^2 \left(4x^3 - 2 \cdot 3^{x+1} + \frac{1}{x^2} \right) dx$

d) $\int_0^1 \frac{(e^{-x} + 2)^2}{e^{x-1}} dx$

e) $\int_0^1 \frac{(2024^x + 1)^2}{e^{-3x}} dx$

f) $\int_1^2 e^{2x} \left(2024 + \frac{2025e^{-2x}}{x^3} \right) dx$

Bài 6. Tính các tích phân sau đây:

a) $\int_0^1 5^{x+1} \cdot 7^{2x-1} dx$

b) $\int_0^1 (x + e^{-x-2}) dx$

c) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$

d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x^2 \left(1 - \frac{\sin x}{x^2} \right) dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) dx$

f) $\int_1^2 2^{x+1} \left(1 - \frac{2}{e^x} \right) dx$

DẠNG 2

TÍCH PHÂN HÀM ẨN BIẾN ĐỔI CƠ BẢN

$$\bullet \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\bullet \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$\bullet \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Bài 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn:

a) $\int_6^0 f(x) dx = 1$. Tính tích phân $\int_0^6 2025 f(x) dx$

b) $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Tính tích phân $\int_0^2 [2f(x) - 1] dx$

c) $\int_2^7 f(x) dx = -3$ và $\int_1^7 f(x) dx = 3$. Tính tích phân $\int_1^2 f(x) dx$.

Bài 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn:

a) $\int_0^1 [f(x) + 2x] dx = 3$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x) dx$

b) $\int_1^3 [f(x) + 2x + 3] dx = 10$. Tính tích phân $\int_1^3 f(x) dx$.

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 4$. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [2f(x) + \sin x] dx$.

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn:

a) $\int_{-6}^{11} f(x) dx = 8$, $\int_2^6 f(x) dx = 3$. Tính giá trị của biểu thức $P = \int_{-6}^2 f(x) dx + \int_6^{11} f(x) dx$.

b) $\int_1^8 f(x) dx = 9$, $\int_4^{12} f(x) dx = 3$, $\int_4^8 f(x) dx = 5$. Tính $I = \int_1^{12} f(x) dx$.

Bài 4. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm liên tục trên \mathbb{R} , thỏa mãn:

a) $\int_2^5 f(x) dx = 3$ và $\int_2^5 g(x) dx = -2$. Tính $\int_2^5 [f(x) + g(x)] dx$

b) $\int_0^1 f(x) dx = 3$ và $\int_0^1 g(x) dx = -4$. Tính $\int_1^0 [f(x) + g(x)] dx$.

c) $\int_1^4 f(x) dx = 6$ và $\int_1^4 g(x) dx = -5$. Tính $\int_1^4 \left[\frac{1}{3} f(x) - \frac{1}{5} g(x) \right] dx$

Bài 5. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm liên tục trên \mathbb{R} , thỏa mãn:

a) $\int_2^3 f(x) dx = 3$ và $\int_3^2 g(x) dx = 1$. Tính $\int_2^3 [f(x) + 2g(x)] dx$

b) $\int_1^3 f(x) dx = 2024$ và $\int_3^1 g(x) dx = 1$. Tính $\int_1^3 \left[\frac{1}{2024} f(x) - 3g(x) \right] dx$

c) $\int_1^2 f(x) dx = 3$ và $\int_2^1 g(x) dx = -2$. Tính $\int_1^2 \left[3f(x) - \frac{1}{2} g(x) \right] dx$

Bài 6. Cho $\int_0^3 f(x) dx = 2024$ và $\int_0^3 g(x) dx = 2025$. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^3 [f(x) + g(x)] dx$

b) $\int_3^0 \frac{1}{5} g(x) dx$

c) $\int_0^3 \left[\frac{1}{2} f(x) - 3g(x) \right] dx$

d) $\int_0^3 \left[\frac{1}{2024} f(x) - 3x^2 \right] dx$

e) $\int_3^0 [g(x) - \sqrt[3]{x^2}] dx$

f) $\int_0^3 \left[\frac{1}{4} f(x) + g(x) - e^{3x+1} \right] dx$

Bài 7. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm liên tục trên đoạn $[1; 3]$ thỏa: $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$,

$\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6$. Tính $I = \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx$.

DẠNG 3**TÍCH PHÂN HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI**

Tính tích phân: $I = \int_a^b |f(x)| dx$

Phương pháp

Bước 1. Xét dấu $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Bước 2. Dựa vào bảng xét dấu trên đoạn $[a; b]$ để khử $|f(x)|$. Sau đó sử dụng các phương pháp tính tích phân đã học để tính $I = \int_a^b |f(x)| dx$

Bài 1. Tính tích phân $I = \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx$.

Bài 2. Tính tích phân $I = \int_{-2}^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx$.

Bài 3. Tính tích phân $I = \int_{-1}^2 |x^3 - 3x + 2| dx$.

Bài 4. Tính tích phân $I = \int_{-2}^2 |x^4 - 3x^2 - 4| dx$.

Bài 5. Tính tích phân $I = \int_0^3 \sqrt{x^3 - 2x^2 + x} dx$.

Bài 6. Tính tích phân $I = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx$.

Bài 7. Tính tích phân $I = \int_{-3}^5 (|x+2| - |x-2|) dx$.

Bài 8. Tính tích phân $I = \int_{-1}^2 (x + |1-x| - |x+2|) dx$.

Bài 9. Tính tích phân $I = \int_2^6 \sqrt{x^2 - 8x + 16} dx$.

Bài 10. Tính tích phân $I = \int_{-2}^1 \sqrt{4x^2 + 6x + 9} dx$.

Bài 11. Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx$.

Bài 12. Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$.

DẠNG 4**TÍCH PHÂN HÀM NHIỀU CÔNG THỨC**

Dạng 1: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{khi } x \leq c \\ h(x) & \text{khi } x > c \end{cases}$ liên tục trên D . Tính $\int_a^b f(x) dx$, với $c \in [a; b]$.

Phương pháp giải:

Bước 1: Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x = c$ hay không (*kiến thức hàm số liên tục tại một điểm lớp 11*)

Tức là kiểm tra $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} h(x) = f(b)$

Bước 2: Tách cận: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c g(x) dx + \int_c^b h(x) dx$.

Bước 3: Tính tích phân $\int_a^c g(x) dx$ và $\int_c^b h(x) dx$ bằng các phương pháp đã học.

Dạng 2: Cho hàm số $f(x; m) = \begin{cases} g(x; m) & \text{khi } x \leq c \\ h(x; m) & \text{khi } x > c \end{cases}$ liên tục trên D và m là tham số. Tính $\int_a^b f(x; m) dx$, với $c \in [a; b]$.

Phương pháp giải:

Bước 1: Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x = c$ hay không.

Tức là kiểm tra: $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x; m) = \lim_{x \rightarrow b^+} f(x; m) = f(b) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow b^-} g(x; m) = \lim_{x \rightarrow b^+} h(x; m) = f(b)$

Chú ý: Bước này tìm tham số m .

Bước 2: Tách cận: $\int_a^b f(x; m) dx = \int_a^c g(x; m) dx + \int_c^b h(x; m) dx$.

Bước 3: Tính tích phân $\int_a^c g(x; m) dx$ và $\int_c^b h(x; m) dx$ bằng các phương pháp đã học.

Bài 1. Cho $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x-1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_{-1}^2 f(x) dx$

Bài 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{khi } x \geq 0 \\ e^{2x} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_{-1}^2 f(x) dx$.

Bài 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x + m & \text{khi } x \geq 1 \\ 5 - 2x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ (m là tham số thực). Biết rằng $f(x)$ có nguyên hàm trên \mathbb{R} là $F(x)$ thỏa mãn $F(-2) = -10$, khi đó tính $F(3)$.

Bài 4. Cho số thực a và $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \leq 0 \\ a(x-x^2) & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

Bài 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^x + m & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2(x^3 + 1)^3 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ (với m tham số). Biết hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và tích phân $\int_{-1}^1 f(x) dx = a.e - \frac{b}{c}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$; $\frac{a}{b}$ tối giản ($e = 2,718281\dots$). Tính giá trị biểu thức $a + b + c + m$.

Bài 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \leq 0 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên \mathbb{R} thỏa mãn $F(3) = 0$. Tính giá trị của $2F(-1) + 3F(2)$.

Bài 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có nguyên hàm trên \mathbb{R} là $F(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 + 4x + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^2 f(x) dx$

Bài 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 1 - 2x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Giả sử F là 1 nguyên hàm của f trên \mathbb{R} thỏa mãn $2020F(-1) + 2021F(2) = -2022$. Tính giá trị của $F(1)$.

Bài 9. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + 2x - 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên \mathbb{R} thỏa mãn $F(2) = 4$. Giá trị của $F(-2) - 4F(3)$ bằng bao nhiêu?

Bài 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 4x - \sqrt{4x+9} & \text{khi } x > 0 \\ 4a + \tan^2 x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$, đồng thời $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^4 f(x) dx = \frac{50}{3}$. Tính a .

Bài 11. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin x + 2 & \text{khi } x \geq 0 \\ 2\cos^2 x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên \mathbb{R} thỏa

mãn $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \pi$. Tính giá trị của $F\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Bài 12. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + a & \text{khi } x \geq 0 \\ \sin 2x + \cos x - b & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục và có nguyên hàm F liên tục trên \mathbb{R}

thỏa mãn $F(2) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 10$ với a, b là tham số thực. Giá trị $\int_{-\frac{\pi}{6}}^1 f(x) dx = \frac{m}{4}$, với m là một số thực.

Khi đó $2m$ bằng bao nhiêu?

DẠNG 5**TÍCH PHÂN HÀM ẨN BIẾN ĐỔI PHỨC TẠP****I. Cần nhớ các công thức đạo hàm của hàm hợp**

- $\int f'(x)dx = f(x) + C$
- $\frac{f'(x)}{f(x)} = [\ln(f(x))]'$
- $-\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left[\frac{1}{f(x)}\right]'$
- $-\frac{f'(x)}{f^n(x)} = \left[\frac{1}{(n-1)[f(x)]^{n-1}}\right]'$
- $n \cdot f'(x) \cdot f(x) = [f(x)^n]'$
- $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = [2\sqrt{f(x)}]'$
- $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]'$
- $\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} = \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'$

II. Các dạng hàm ẩn thường gặp**1. Hàm ẩn có dạng: $f'(x) \cdot f(x) = p(x)$** **Phương pháp giải:**

$$f'(x) \cdot f(x) = p(x) \Leftrightarrow \left[\frac{f^2(x)}{2}\right]' = p(x) \Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \int p(x) dx$$

2. Hàm ẩn có dạng: $f'(x) = p(x) \cdot f(x)$ **Phương pháp giải:**

Chia hai vế với $f(x)$ ta được $\frac{f'(x)}{f(x)} = p(x)$

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int p(x) dx \Leftrightarrow \ln |f(x)| = \int p(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

3. Hàm ẩn có dạng: $f'(x) = p(x) \cdot [f(x)]^n$ **Phương pháp giải:**

$$f'(x) = p(x) \cdot [f(x)]^n$$

Chia hai vế với $[f(x)]^n$ ta được $\frac{f'(x)}{[f(x)]^n} = p(x)$

$$\text{Suy ra } \int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} dx = \int p(x) dx \Leftrightarrow \frac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1} = \int p(x) dx$$

4. Hàm ẩn có dạng: $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$ **Phương pháp giải:**

$$\text{Dễ dàng thấy rằng } u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$$

$$\text{Do đó } u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$$

$$\text{Suy ra } u(x)f(x) = \int h(x) dx$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

5. Hàm ẩn có dạng: $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$ (1)**Ý tưởng giải:**

- Ta cần nhân thêm một lượng $u(x)$ vào (1) để tạo thành $u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x).h(x)$ và

lúc này:

$$u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x).h(x)$$

$$\Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = u(x).h(x)$$

$$\Rightarrow \int [u(x)f(x)]' dx = \int u(x).h(x) dx$$

$$\Rightarrow u(x)f(x) = \int u(x).h(x) dx$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\int u(x).h(x) dx}{u(x)}$$

- Cách tìm $u(x)$

$$u(x) \text{ được chọn sao cho } \begin{cases} u'(x) = A(x) \\ u(x) = B(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{A(x)}{B(x)} \Rightarrow \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int \frac{A(x)}{B(x)} dx \Rightarrow \ln|u(x)| = \int \frac{A(x)}{B(x)} dx \Rightarrow u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} dx}$$

Tóm lại phương pháp giải: $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$ (1) như sau:

+ **Bước 1:** Tìm $u(x)$: $u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} dx}$

+ **Bước 2:** Nhân $u(x)$ vào (1) $\Rightarrow f(x) = \frac{\int u(x) \cdot h(x) dx}{u(x)}$

Hai dạng đặc biệt của (1)

• $f'(x) + f(x) = h(x)$

Phương pháp giải:

Nhân hai vế với e^x ta được $e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x)$

Suy ra $e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

• $f'(x) - f(x) = h(x)$

Phương pháp giải:

Nhân hai vế với e^{-x} ta được $e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x)$

Suy ra $e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Bài 1. Cho hàm số $f(x) \neq 0$, liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(1) = \frac{1}{3}$; $x^2 \cdot f'(x) = f^2(x)$ với

$\forall x \in [1;2]$. Tính tích phân $I = \int_1^2 (2x+1)^2 f(x) dx$

Bài 2. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn $x + 2x \cdot f(x) = [f'(x)]^2$

với $\forall x \in [1;4]$. Biết $f(1) = \frac{3}{2}$, tính $I = \int_1^4 f(x) dx$

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn điều kiện

$x^6 [f'(x)]^3 + 27[f(x) - 1]^4 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 0$. Tính $I = \int_2^3 f(x) dx$

Bài 4. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tính $I = \int_1^2 \frac{f(x)e^x}{x} dx$.

Bài 5. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;4]$, thỏa mãn $\begin{cases} f(1) + g(1) = 4 \\ g(x) = -xf'(x) \\ f(x) = -xg'(x) \end{cases}$ với mọi

$x \in [1;4]$. Tính tích phân $I = \int_1^4 [f(x) + g(x)] dx$.

Bài 6. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn

$$x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ đồng thời thỏa } f(1) = -2. \text{ Tính } \int_1^2 f(x) dx$$

Bài 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} , $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$ và thỏa mãn hệ thức

$$f(x) \cdot f'(x) + 18x^2 = (3x^2 + x)f'(x) + (6x+1)f(x); \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Biết } \int_0^1 (x+1)e^{f(x)} dx = ae^2 + b, (a, b \in \mathbb{Q}). \text{ Giá}$$

trị của $a-b$ bằng bao nhiêu?

Bài 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1;3]$; $f(x) \neq 0, \forall x \in [1;3]$;

$$f'(x)[1+f(x)]^2 = (x-1)^2 [f(x)]^4 \text{ và } f(1) = -1. \text{ Biết rằng } \int_e^3 f(x) dx = a \ln 3 + b (a, b \in \mathbb{Z}), \text{ giá trị của}$$

$a+b^2$ bằng bao nhiêu?

Bài 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018}$,

$\forall x \in [0;1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int_0^1 f(x) dx$.

PHẦN B

TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\int_a^a 2024 f(x) dx = 0$

B. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

C. $\int_a^b \frac{1}{2025} f(x) dx = \frac{1}{2025} \int_a^b f(x) dx$

D. $\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a < b < c$. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$

B. $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$

C. $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx$

D. $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

Câu 3. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trên \mathbb{R} . Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

A. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy$

B. $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

C. $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(t) dt$

D. $\int_a^b (f(x)g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx$

Câu 4. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

A. $\int_{-2024}^{2024} dx = 4048$.

B. $\int_a^b f_1(x) \cdot f_2(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_a^b f_2(x) dx$.

C. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ được gọi là giá trị trung bình

của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

D. Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$.

Câu 5. Cho hàm $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ với $a < b$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $[a; b]$.

Cho các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. $\int_a^b kf(x)dx = k[F(b) - F(a)]$

B. $\int_b^a f(x)dx = F(b) - F(a)$

C. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x = a; x = b$; đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và trục hoành được tính theo công thức $S = F(b) - F(a)$

D. $\int_a^b f(2x+3)dx = F(2x+3)|_a^b$

Câu 6. Nếu $\int_0^3 f(x)dx = 3$ thì $\int_0^3 4f(x)dx$ bằng

A. 3.

B. 12.

C. 36.

D. 4.

Câu 7. Cho $\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2025}$. Tính $I = \int_0^2 2025f(x)dx$.

A. $I = 2$

B. $I = \frac{1}{2025}$

C. $I = 1$

D. $I = 2025$

Câu 8. Nếu $\int_0^5 f(x)dx = 5$ thì $\int_5^0 5f(x)dx$ bằng

A. 1.

B. -1.

C. 25.

D. -25.

Câu 9. Nếu $\int_1^4 f(x)dx = 5$ và $\int_1^4 g(x)dx = -4$ thì $\int_1^4 [f(x) - g(x)]dx$ bằng

A. -1.

B. -9.

C. 1.

D. 9.

Câu 10. Nếu $\int_1^4 f(x)dx = 3$ và $\int_1^4 g(x)dx = -2$ thì $\int_1^4 (f(x) - g(x))dx$ bằng

A. -1.

B. -5.

C. 5.

D. 1.

Câu 11. Cho $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_0^1 g(x)dx = 5$, khi $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)]dx$ bằng

A. -8

B. 1

C. -3

D. 12

Câu 12. Giả sử $\int_0^9 f(x)dx = 7$ và $\int_9^0 g(x)dx = 1$. Khi đó $I = \int_0^9 [2f(x) + 3g(x)]dx$ bằng

A. $I = 11$.

B. $I = 17$.

C. $I = 23$.

D. $I = 8$.

Câu 13. Nếu $\int_{-1}^4 f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^4 g(x)dx = 3$. Khi đó $\int_{-1}^4 [f(x) - g(x)]dx$ bằng

A. 5.

B. 6.

C. 1.

D. -1.

Câu 14. Nếu $\int_0^3 f(x) dx = 6$ thì $\int_0^3 \left[\frac{1}{3} f(x) + 2 \right] dx$ bằng bao nhiêu?

A. 8.

B. 5.

C. 9.

D. 6.

Câu 15. Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 5$ thì $\int_0^2 [2f(x) - 1] dx$ bằng:

A. 8.

B. 9.

C. 10.

D. 12.

Câu 16. Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 3$ thì $\int_0^2 [2f(x) + 2024] dx$ bằng:

A. 4040.

B. 4042.

C. 4044.

D. 4046.

Câu 17. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx = 5$.

A. $I = 7$ B. $I = 5 + \frac{\pi}{2}$ C. $I = 3$ D. $I = 5 + \pi$

Câu 18. Cho $\int_1^2 [4f(x) - 2x] dx = 1$. Khi đó $\int_1^2 f(x) dx$ bằng:

A. 1.

B. -3.

C. 3.

D. -1.

Câu 19. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 1$, tích phân $\int_0^1 (2f(x) - 3x^2) dx$ bằng

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. -1.

Câu 20. Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx$.

A. $I = \frac{17}{2}$ B. $I = \frac{5}{2}$ C. $I = \frac{7}{2}$ D. $I = \frac{11}{2}$

Câu 21. Cho $\int_0^2 f(x) dx = 3$, $\int_0^2 g(x) dx = -1$ thì $\int_0^2 [f(x) - 5g(x) + x] dx$ bằng:

A. 12.

B. 0.

C. 8.

D. 10

Câu 22. Cho $\int_0^5 f(x) dx = -2$. Tích phân $\int_0^5 [4f(x) - 3x^2] dx$ bằng

A. -140.

B. -130.

C. -120.

D. -133.

Câu 23. Cho $\int_1^2 [4f(x) - 2x] dx = 1$. Khi đó $\int_1^2 f(x) dx$ bằng:

A. 1.

B. -3.

C. 3.

D. -1.

Câu 24. Cho $\int_{-2}^2 f(x) dx = 1$, $\int_{-2}^4 f(t) dt = -4$. Tính $\int_2^4 f(y) dy$.

A. $I = 5$.B. $I = -3$.C. $I = 3$.D. $I = -5$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có $\int_0^2 f(x)dx = 9$; $\int_2^4 f(x)dx = 4$. Tính $I = \int_0^4 f(x)dx$.

- A. $I = 5$. B. $I = 36$. C. $I = \frac{9}{4}$. D. $I = 13$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_0^4 f(x)dx = 10$, $\int_3^4 f(x)dx = 4$. Tích phân $\int_0^3 f(x)dx$ bằng

- A. 4. B. 7. C. 3. D. 6.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\int_0^{10} f(x)dx = 7$; $\int_2^6 f(x)dx = 3$. Tính

$$P = \int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx.$$

- A. $P = 4$ B. $P = 10$ C. $P = 7$ D. $P = -4$

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 6]$ thỏa mãn $\int_0^6 f(x)dx = 10$ và $\int_2^4 f(x)dx = 6$. Tính giá

trị của biểu thức $P = \int_0^2 f(x)dx + \int_4^6 f(x)dx$.

- A. $P = 4$. B. $P = 16$. C. $P = 8$. D. $P = 10$.

Câu 29. Tính tích phân $I = \int_0^2 (2x+1)dx$

- A. $I = 5$. B. $I = 6$. C. $I = 2$. D. $I = 4$.

Câu 30. Tích phân $\int_0^1 (3x+1)(x+3)dx$ bằng

- A. 12. B. 9. C. 5. D. 6.

Câu 31. Tính tích phân $I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

- A. $I = \frac{1}{e}$ B. $I = \frac{1}{e} + 1$ C. $I = 1$ D. $I = e$

Câu 32. Biết $\int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = a + b \ln c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}, c < 9$. Tính tổng $S = a + b + c$.

- A. $S = 7$. B. $S = 5$. C. $S = 8$. D. $S = 6$.

Câu 33. Kết quả tích phân $I = \int_0^1 5^x dx$ bằng

- A. $I = \frac{5}{\ln 5}$. B. $I = 4 \ln 5$. C. $I = 5 \ln 5$. D. $I = \frac{4}{\ln 5}$.

Câu 34. Tích phân $\int_0^1 e^{3x} dx$ bằng

A. $e^3 + \frac{1}{2}$.

B. $e - 1$.

C. $\frac{e^3 - 1}{3}$.

D. $e^3 - 1$.

Câu 35. Tích phân $\int_0^1 e^{3x+1} dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}(e^4 + e)$

B. $e^3 - e$

C. $\frac{1}{3}(e^4 - e)$

D. $e^4 - e$

Câu 36. Biết $\int_0^1 \frac{e^x}{2^x} dx = \frac{e}{a} + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = a + b$ là

A. $P = -3$

B. $P = 1$

C. $P = -1$

D. $P = 3$

Câu 37. Giá trị của $I = \int_0^1 \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} dx$ bằng

A. $I = 2(e + 3)0$.

B. $I = \frac{1}{2}(e + 3)$.

C. $I = e - 3$.

D. $I = 2(e - 3)$.

Câu 38. Biết $\int_1^2 e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x}\right) dx = e^2 + a.e + b \ln 2$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = \frac{a+b}{a.b}$ là

A. $P = -3$

B. $P = 1$

C. $P = -1$

D. $P = -2$

Câu 39. Biết $I = \int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx = \frac{1}{a} + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó giá trị của $P = \frac{a+b}{a.b}$ là

A. $P = e^4 - 1$

B. $P = \frac{e^4 - 1}{e^2}$

C. $P = \frac{e^4 - 1}{e^4}$

D. $P = \frac{1 - e^4}{e^4}$

Câu 40. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. -1.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 41. Biết $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x + 3 \cos x + x) dx = \frac{a+b\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi^2}{c}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = a + 2b + 3c$ là

A. $P = 45$

B. $P = 60$

C. $P = 65$

D. $P = 70$

Câu 42. Biết $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3 \tan^2 x dx = a\sqrt{3} + b + \frac{\pi}{c}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = a + b + c$ là

A. $P = 6$

B. $P = -4$

C. $P = 4$

D. $P = -6$

Câu 43. Biết $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (2 \cot^2 x + 5) dx = \frac{\pi}{a} + b\sqrt{3} + c$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = a + b + c$ là

A. $P = 6$

B. $P = -4$

C. $P = 4$

D. $P = -6$

Câu 44. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} dx = \frac{\pi}{c} + \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị của

$P = a + b + c$ là

A. $P = 17$

B. $P = 16$

C. $P = 32$

D. $P = 49$

Câu 45. Giá trị của $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ bằng

A. $\sqrt{3}$.

B. $4\sqrt{2}$.

C. $2\sqrt{3}$.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 46. Tính tích phân $I = \int_0^2 |x - 2| dx$.

A. $I = -2$.

B. $I = 4$.

C. $I = 2$.

D. $I = 0$.

Câu 47. Tính $\int_{-1}^2 |2x + 1| dx$

A. $\frac{1}{2}$.

B. 2.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{13}{2}$.

Câu 48. Tính $I = \int_0^2 |2x - 2| dx$.

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Câu 49. Tính $\int_0^2 \sqrt{x^2 - 2x + 1} dx$

A. $\frac{1}{2}$.

B. 2.

C. $\frac{5}{2}$.

D. 1.

Câu 50. Tính $I = \int_0^3 |x(2x - 4)| dx$.

A. $\frac{16}{3}$.

B. 2.

C. $\frac{16}{3}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Câu 51. Tính tích phân $\int_0^8 |x^2 - 6x| dx$.

A. $\frac{-64}{3}$.

B. $\frac{64}{3}$.

C. $\frac{152}{3}$.

D. $\frac{-152}{3}$.

Câu 52. Biết $I = \int_{-1}^3 |x^2 - 3x + 2| dx = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $T = a - b$

A. 12.

B. 14.

C. 11.

D. 4.

Câu 53. Tính tích phân $I = \int_0^2 |x^3 - x| dx$.

A. $I = -\frac{1}{2}$.

B. $I = 5$.

C. $I = \frac{1}{2}$.

D. $I = \frac{5}{2}$.

Câu 54. Tính tích phân $I = \int_0^2 |x^2 + 2x - 3| dx$.

A. $I = -2$.

B. $I = 4$.

C. $I = 5$.

D. $I = -4$.

Câu 55. Cho tích phân $I = \int_{-3}^3 |\sqrt{3} + \sqrt{2}| x^2 - 1| dx = a\sqrt{3} + b\sqrt{2}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $P = a + b$.

A. $P = \frac{20}{3}$

B. $P = \frac{80}{3}$

C. $P = \frac{17}{3}$

D. $P = \frac{40}{3}$

Câu 56. Tính tích phân $I = \int_{-2}^5 (|x+2| - |x-2|) dx$.

A. $I = 38$.

B. $I = 37$.

C. $I = 44$.

D. $I = 40$.

Câu 57. Biết $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} |\sin x| dx = a - \sqrt{b}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Khi đó $a + 4b$ bằng

A. 5.

B. 8.

C. 10.

D. 7.

Câu 58. Cho tích phân $I = \int_0^3 |2^x - 4| dx = a + \frac{b}{c \ln 2}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính

$P = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $P = 15$

B. $P = 10$

C. $P = 5$

D. $P = 18$

Câu 59. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx$.

A. $\frac{1}{\ln 2}$.

B. $\ln 2$.

C. $2 \ln 2$.

D. $\frac{2}{\ln 2}$.

Câu 60. Tính tích phân $I = \int_{-1}^2 (|x| - |x-1|) dx$.

A. $I = 0$.

B. $I = 2$.

C. $I = -2$.

D. $I = -3$.

Câu 61. Cho a là số thực dương, tính tích phân $I = \int_{-1}^a |x| dx$ theo a .

A. $I = \frac{a^2 + 1}{2}$.

B. $I = \frac{a^2 + 2}{2}$.

C. $I = \frac{-2a^2 + 1}{2}$.

D. $I = \frac{|3a^2 - 1|}{2}$.

Câu 62. Cho số thực $m > 1$ thỏa mãn $\int_1^m |2mx - 1| dx = 1$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $m \in (4; 6)$.

B. $m \in (2; 4)$.

C. $m \in (3; 5)$.

D. $m \in (1; 3)$.

Câu 63. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\int_{-1}^1 |x|^3 dx = \left| \int_{-1}^1 x^3 dx \right|.$

B. $\int_{-1}^{2018} |x^4 - x^2 + 1| dx = \int_{-1}^{2018} (x^4 - x^2 + 1) dx.$

C. $\int_{-2}^3 |e^x(x+1)| dx = \int_{-2}^3 e^x(x+1) dx.$

D. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx.$

Câu 64. Tính tích phân $I = \int_1^4 \sqrt{x^2 - 6x + 9} dx.$

A. $I = \frac{5}{2}.$

B. $I = -\frac{1}{2}.$

C. $I = -2.$

D. $I = \frac{1}{2}.$

Câu 65. Nếu $F'(x) = \frac{1}{2x}$ và $F(1) = 1$ thì giá trị của $F(4)$ bằng

A. $\ln 2.$

B. $1 + \ln 2$

C. $1 + \frac{1}{2} \ln 2$

D. $\frac{1}{2} \ln 2$

Câu 66. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{2}{x}$. Biết $F(-1) = 0$. Tính $F(2)$ kết quả là.

A. $2 \ln 2 + 1.$

B. $\ln 2.$

C. $2 \ln 3 + 2.$

D. $2 \ln 2.$

Câu 67. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $[-1; 2]$, $f(-1) = 8$; $f(2) = -1$. Tích phân $\int_{-1}^2 f'(x) dx$ bằng

A. 1.

B. 7.

C. -9.

D. 9.

Câu 68. Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Giá trị của $\int_1^3 [1 + f(x)] dx$ bằng

A. 10.

B. 8.

C. $\frac{26}{3}.$

D. $\frac{32}{3}.$

Câu 69. Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Giá trị của $\int_1^3 (1 + f(x)) dx$ bằng

A. 20.

B. 22.

C. 26.

D. 28.

Câu 70. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng

A. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 8\sqrt{2} - 16}{16}$

B. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 2\sqrt{2} - 4}{16}$

C. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 8\sqrt{2}}{16}$

D. $\frac{\pi^2 + 16\pi - 16}{16}.$

Câu 71. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2 \cos^2 \frac{x}{2} + 3, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng?

A. $\frac{\pi^2 + 8\pi - 8 - \sqrt{2}}{8}.$

B. $\frac{\pi^2 + 8\pi - 8 - 4\sqrt{2}}{8}.$

C. $\frac{\pi^2 + 6\pi + 8}{8}$.

D. $\frac{\pi^2 + 8\pi - 4\sqrt{2}}{8}$.

Câu 72. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + x + 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biết tích phân $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{a}{b} + \frac{e^2}{c}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$

là phân số tối giản). Giá trị $a + b + c$ bằng

A. 7.

B. 8.

C. 9.

D. 10.

Câu 73. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x(1+x^2) & \text{khi } x \geq 3 \\ \frac{1}{x-4} & \text{khi } x < 3 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_2^4 f(t) dt$ bằng:

A. $\frac{40}{3} - \ln 2$.

B. $\frac{95}{6} + \ln 2$.

C. $\frac{189}{4} + \ln 2$.

D. $\frac{189}{4} - \ln 2$.

Câu 74. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^2 f(x) dx$

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{7}{2}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Câu 75. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 4-x & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 3x^2 & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_0^2 f(x) dx$.

A. $\frac{21}{2}$.

B. $\frac{7}{2}$.

C. 7.

D. $\frac{5}{2}$.

Câu 76. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} , thỏa mãn $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \geq 0 \\ x^3 + x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Tính

$$\int_0^2 f(x-1) dx.$$

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{3}{4}$.

C. $\frac{5}{4}$.

D. $\frac{11}{4}$.

Câu 77. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{khi } x \geq \frac{1}{2} \\ 2x + \frac{7}{4} & \text{khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x) \sin 2x dx$.

A. $\frac{17}{24}$.

B. $-\frac{37}{24}$.

C. $\frac{24}{37}$.

D. $\frac{37}{24}$.

Câu 78. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{khi } -3 \leq x \leq -1 \\ x^2 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$ thì $\int_{-3}^3 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{31}{3}$.

B. $\frac{28}{3}$.

C. $\frac{22}{3}$.

D. $\frac{26}{3}$.

Câu 79. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x & \text{khi } x < 0 \\ \sin x & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_{-1}^{\pi} f(x) dx$

A. $\frac{13}{6}$.

B. $\frac{5}{6}$.

C. $-\frac{5}{6}$.

D. $\frac{19}{6}$.

Câu 80. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 4x^3 + 2x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 4x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên \mathbb{R} thỏa

mãn $F(1) = 2$. Giá trị của $2F(-1) + 3F(2)$ bằng.

A. 76.

B. 19.

C. 63.

D. 21.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 81. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_0^3 f(x) dx = 2025$

a) $\int_0^3 2f(x) dx = 4050.$

b) Biết $\int_0^6 f(x) dx = 2024$, khi đó $\int_3^6 f(x) dx = 1$

c) $\int_0^3 [f(x) - 4x^3 + 2x] dx = 1853$

d) $\int_3^0 \left[3^{2x+1} - \frac{1}{2025} f(x) \right] dx = 1191$

Câu 82. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_1^4 f(x) dx = 1$

a) $\int_4^1 \frac{1}{2} f(x) dx = \frac{1}{2}.$

b) $\int_1^4 \left[2f(x) - \frac{3}{x} \right] dx = 2 + 3 \ln 2$

c) Biết $\int_4^1 \left[f(x) - \frac{2}{x^3} + \sqrt[4]{x^3} \right] dx = \frac{a+b\sqrt{2}}{28}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a+b=119$.

d) **Biết** $\int_{-2}^4 [f(x) - e^x] dx = \frac{1}{e^2}$, **khi đó** $\int_{-2}^1 f(x) dx = e^4 - 1$

Câu 83. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{\pi}{4}$

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 1] dx = \frac{3\pi}{4}$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2 \sin x - \frac{1}{2} f(x) \right] dx = \frac{16 - \pi}{8}$

c) **Biết** $\int_{\frac{\pi}{2}}^0 2\pi g(x) dx = 1$, **khi đó** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) - 3g(x) - \cos^2 \frac{x}{2} \right] dx = \frac{3}{2\pi}$

d) **Biết** $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2f(x) dx = \frac{\pi}{2}$ và $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \left[\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} - 2f(x) \right] dx = \frac{\sqrt{2} + a + b\pi}{c}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khi đó

$a + 2024b + c = 2022.$

Câu 84. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_0^1 f(x) dx = -1$, $\int_0^3 f(x) dx = 2025$.

a) $\int_1^0 f(x) dx = 1$

b) $\int_1^3 f(x) dx = 2026$

c) $\int_1^3 [f(x) - e^{-2x+1}] dx = \frac{1}{a.e^5} + \frac{1}{b.e} + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khi đó $a + b + c = 2025$.

d) Biết $\int_3^4 f(x) dx = 2$, khi đó $\int_1^4 [f(x) - 2^{x+1}] dx = 2000$

Câu 85. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_2^1 f(x) dx = 3$, $\int_2^3 f(x) dx = 4$.

a) $\int_2^3 \frac{1}{2} f(x) dx = 8$

b) $\int_1^3 f(x) dx = 1$

c) $\int_1^3 \left[f(x) + \frac{1}{2025x} \right] dx = a + \frac{\ln 3}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $2024a - b = 1$.

d) **Biết** $\int_{-3}^1 f(x) dx = 2$ và $\int_{-3}^3 \left[f(x) - 2x + \frac{1}{e^{2x}} \right] dx = \frac{a.e^{12} + b.e^6 + c}{18e^6}$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. **Khi đó**

$a + b + c = -106$.

Câu 86. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_{-1}^0 f(x) dx = 3$, $\int_0^3 2f(x) dx = 6$.

a) $\int_0^3 f(x) dx = 3$

b) $\int_{-1}^3 f(x) dx = 6$

c) Biết $\int_{-1}^3 [2f(x) - e^{1-2x}] dx = \frac{a.e^8 + b.e^5 + c}{2}$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khi đó $a + b + c = 26$.

d) Biết $\int_3^6 f(x) dx = 2025$ và $\int_{-1}^6 \left[\frac{1}{2} f(x) + 3x^2 \right] dx = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản.. Khi đó

$a + b = 2465$.

Câu 87. Cho hàm số $f(x) = mx + n$ với $m, n \in \mathbb{R}$. $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 3$,

$$\int_0^2 f(x) dx = 8.$$

a) $\int_0^1 \frac{1}{2} f(x) dx = \frac{3}{2}$

b) $\int_1^2 f(x) dx = -5$

c) $\int_1^2 \left[2f(x) - \frac{1}{e^{2x}} \right] dx = \frac{a.e^4 + b.e^2 + c}{2e^4}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khi đó $a + b + c = 20$.

d) $3m + 2n = 10$

Câu 88. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$. $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn

$$\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{2}, \int_0^2 f(x) dx = -2 \text{ và } \int_0^3 f(x) dx = \frac{13}{2}.$$

a) $\int_2^0 f(x) dx = 2$

b) $\int_1^3 f(x) dx = 10$

c) $\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c = -\frac{7}{2}$

d) $a + b + c = \frac{4}{3}$

Câu 89. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ và có bảng biến thiên như sau

x	0	2	3	5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	$-\infty$	0	-1	$f(5)$	$-\infty$

a) $f'(x) \geq 0$ khi $x \in [3; 5]$

b) $\int_3^5 |f'(x)| dx = f(5) + 1$

c) $\int_2^3 |f'(x)| dx = -1$

d) Biết rằng $\int_2^5 |f'(x)| dx = 5$. Khi đó $f(5) = 3$.

Câu 90. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_{-2}^5 f(x)dx = 8, \int_5^{-2} g(x)dx = 3$.

a) $\int_5^{-2} f(x)dx = -8$

b) $\int_5^{-2} [2g(x) - 3]dx = 25$

c) $\int_{-2}^5 [f(x) - 4g(x) - 1]dx = -13$

d) Biết $\int_{-2}^0 \left[\frac{1}{2}f(x) + 2g(x) \right]dx = 2024$, khi đó $\int_0^5 \left[\frac{1}{2}f(x) + 2g(x) \right]dx = 2026$

Câu 91. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_1^2 f(x)dx = 2, \int_1^2 g(x)dx = 6$.

a) $\int_1^2 2025f(x)dx = 4050$

b) $\int_2^1 [2g(x) - x]dx = -\frac{21}{2}$

c) $\int_2^1 [5f(x) - 2g(x) + 3e^{3x}]dx = e^6 - e^3 - 2$

d) Biết $\int_1^4 [2f(x) + g(x)]dx = 5$ và $\int_2^4 [2f(x) + g(x) - \sqrt{x}]dx = \frac{20\sqrt{2} + a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân

thức tối giản. Khi đó $a + b = 83$.

Câu 92. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_2^3 f(x)dx = 4, \int_2^3 g(x)dx = 1$.

a) $\int_3^2 \frac{1}{4}f(x)dx = 1$

b) $\int_2^3 \left[2g(x) - \frac{1}{x} \right]dx = 2 + \ln 3 - \ln 2$

c) Biết $\int_2^3 \left[\frac{1}{2}f(x) - 2024g(x) + e^{2x+1} \right]dx = \frac{a.e^7 + b.e^5 + c}{2}$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khi đó $a + b + c = -4044$.

d) Biết $\int_0^2 [f(x) - 3g(x)]dx = 2024$ và $\int_0^3 [f(x) - 3g(x) + 2^x]dx = \frac{a + b \ln 2}{\ln 2}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Khi đó

$a + b = 2030$.

Câu 93. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_{-3}^0 f(x)dx = -4$; $\int_{-3}^0 g(x)dx = -3$.

a) $\int_0^{-3} f(x)dx = -4$.

b) $\int_{-3}^0 -3f(x)dx = 12$.

c) $\int_{-3}^0 [f(x) + g(x)]dx = -7$.

d) Nếu $\int_{-3}^0 [2f(x) + 3g(x)]dx = -51$ và $\int_{-3}^0 [nf(x) + mg(x)]dx = 20$ thì $m + n = 10$.

Câu 94. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm liên tục trên \mathbb{R} và thoả: $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)]dx = 10$,

$\int_1^3 [2f(x) - g(x)]dx = 6$.

a) $\int_3^1 [f(x) + 3g(x)]dx = -10$.

b) $\int_1^3 [g(x) - 2f(x)]dx = -6$.

c) $\int_1^3 [4g(x) - f(x)]dx = 4$

d) $\int_1^3 [f(x) + g(x)]dx = -6$

Câu 95. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm liên tục trên \mathbb{R} và thoả: $\int_0^4 [2f(x) - g(x)]dx = 7$,

$\int_0^4 [f(x) + 3g(x)]dx = -7$.

a) $\int_0^4 [2f(x) - g(x)]dx = \int_4^0 [f(x) + 3g(x)]dx$.

b) $\int_0^4 [3f(x) + 2g(x)]dx = 14$

c) $\int_0^4 f(x)dx = 2$

d) Biết $\int_0^4 [g(x) + x\sqrt{x}]dx = \frac{m}{n}$, với $m, n \in \mathbb{Z}$ và $\frac{m}{n}$ là phân thức tối giản. Khi đó $m + n = 54$.

Câu 96. Cho hàm số $f(x) = e^x$ liên tục trên \mathbb{R} .

a) $\int_0^1 f(x) dx = e$.

b) $\int_0^1 f(2x+1) dx = e^3 - e$.

c) $\int_0^1 (f(x) - 4x) dx = e - 3$.

d) **Biết** $\int_0^1 \frac{(e^{x+1} - 1)^2}{f(x)} dx = \frac{a.e^4 + b.e^3 + c.e + d}{e}$, với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. **Khi đó** $a + 2b + 3c + 4d = 0$.

Câu 97. Cho $f(x) = \sin x$ liên tục trên \mathbb{R} .

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\int_0^{\pi} f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx = 1$.

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - f(x)) dx = \frac{\pi^2}{4} - 2$.

d) **Biết** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x + \pi) - e^x] dx = -e^{\frac{a\pi}{b}}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. **Khi đó** $a + b = 3$.

Câu 98. Cho $f(x) = 2x - 1$ liên tục trên \mathbb{R} .

a) $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2$.

b) $\int_{-1}^1 |f(x)| dx = \frac{5}{2}$.

c) $\int_{-1}^1 x^2 f(x) dx = -\frac{2}{3}$.

d) **Biết** $\int_{-1}^1 x |f(x)| dx = \frac{a}{b}$, với $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. **Khi đó** $a + b = 1$.

Câu 99. Cho hàm số $f(x) = 2x - 4$ liên tục trên \mathbb{R} .

a) $\int_{2024}^{2024} f(x) dx = 4048$.

b) $\int_1^4 f^2(x) dx = -12$.

$$c) \int_{-2}^5 |f(x)| dx = 3^m \cdot 5^n \text{ với } m^2 + n^2 = 4.$$

$$d) F(a) = \int_0^a f(x) dx \text{ đạt giá trị nhỏ nhất khi } a = 2.$$

Câu 100. Cho hàm số $f(x) = 4x^3 + x$ và $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$, $F(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .

$$a) \int_3^5 f(x) dx = 552.$$

$$b) \text{Biết } F(1) = 4 \text{ thì } F(2) = \frac{41}{2}.$$

$$c) \int_0^2 [1 + 2x + f(x)] dx = -24.$$

$$d) \int_{-2}^1 |f(x)| dx = \frac{39}{2}.$$

Câu 101. Cho hàm số $f(x) = |x^2 - 9|$ với $0 \leq x \leq 9$.

$$a) f(x) = |x^2 - 9| = \begin{cases} -x^2 + 9 & \text{khi } 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 9 & \text{khi } 3 \leq x \leq 9 \end{cases}.$$

$$b) \int_0^9 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx + \int_3^9 f(x) dx.$$

$$c) \int_0^9 f(x) dx = -63.$$

$$d) \int_0^9 [f(x) - \sqrt{x}] dx = 45.$$

Câu 102. Cho hàm số $f(x) = 2^x - 4$.

a) Hàm số $f(x)$ có tập xác định $D = (0; +\infty)$.

$$b) \int_0^3 (2^x - 4) dx = \frac{7}{\ln 2} - 12$$

$$c) \int_0^3 f(x+1) dx = \frac{14}{\ln 2} + 12$$

$$d) \text{Biết } \int_0^3 |f(x)| dx = a + \frac{b}{c \ln 2} \text{ với } a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ và } \frac{b}{c} \text{ là phân số tối giản thì khi đó ta có giá trị của biểu thức}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 18$$

Câu 103. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x \geq 2 \\ x + 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$.

a) $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x+1) dx$

b) $\int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (x^2 - 2x + 3) dx$

c) $\int_1^3 \frac{1}{2} f(x) dx = \frac{41}{12}$

d) Biết $\int_2^3 \frac{f(x)}{x} dx = \frac{a \ln 3 + b \ln 2 + c}{2}$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khi đó $a + b + c = 3$.

Câu 104. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{khi } x \geq 2 \\ x - 2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$.

a) Hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .

b) $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x-2) dx$

c) $\int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (x^2 - 2x) dx$

d) $\int_1^3 f(x) dx = \frac{6}{5}$

Câu 105. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x + m & \text{khi } x \geq 1 \\ 5 - 2x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ (m là tham số thực) liên tục trên \mathbb{R} . Biết rằng

$f(x)$ có nguyên hàm trên \mathbb{R} là $F(x)$ thỏa mãn $F(-2) = -10$.

a) $m = -2$

b) $F(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - 2x + 8 & \text{khi } x \geq 1 \\ -x^2 + 5x + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

c) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{19}{2}$

d) $\int_0^2 f(x) dx = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a + b = 200$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 106. Biết $\int_0^2 (f(x) + 3x^2) dx = 10$. Tính $\int_0^2 f(x) dx$.

Trả lời:

Câu 107. Cho $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Tính $I = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} f(x) + 2 \right] dx$.

Trả lời:

Câu 108. Cho $\int_1^3 f(x) dx = 2$. Tính $I = \int_1^3 [f(x) + 2x] dx$.

Trả lời:

Câu 109. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 1$. Tính tích phân $I = \int_0^1 [2f(x) - 3x^2] dx$

Trả lời:

Câu 110. Cho $\int_1^2 f(x) dx = -1$ và $\int_1^2 g(x) dx = 3$. Tính $\int_2^1 [f(x) - g(x)] dx$.

Trả lời:

Câu 111. Biết $\int_1^{2025} f(x) dx = -3$ và $\int_{2025}^1 g(x) dx = 2$. Tính $I = \int_1^{2025} \left[2f(x) + \frac{1}{2} g(x) \right] dx$.

Trả lời:

Câu 112. Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)] dx$.

Trả lời:

Câu 113. Biết $\int_0^1 f(x) dx = -2$ và $\int_1^0 g(x) dx = -3$. Tính $I = \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx$.

Trả lời:

Câu 114. Biết $\int_1^2 f(x) dx = 3$ và $\int_1^2 g(x) dx = 2$ và $\int_1^2 h(x) dx = 2025$. Tính $I = \int_1^2 [f(x) - g(x) + h(x)] dx$.

Trả lời:

Câu 115. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x) dx = 7$, $\int_2^6 f(x) dx = 3$. Tính

$$P = \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx.$$

Trả lời:

Câu 116. Giả sử $\int_0^1 f(x) dx = 3$ và $\int_0^5 f(z) dz = 9$. Tổng $I = \int_1^3 f(t) dt + \int_3^5 f(t) dt$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 117. Cho $\int_{-1}^2 f(t)dt = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)]dx$

Trả lời:

Câu 118. Nếu $\int_1^4 f(x) dx = -2$ và $\int_1^4 g(x) dx = -6$ thì $\int_1^4 [2f(x) - g(x) + 1] dx$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 119. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_1^5 f(x)dx = 10$, $\int_3^5 f(x)dx = 1$. Khi đó $\int_1^3 f(x)dx$ bằng

bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 120. Nếu $\int_0^1 2f(x)dx = 6$ thì $\int_0^1 \left[\frac{1}{3}f(x) + 2x \right] dx$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 121. Cho $\int_0^{\ln 2} (2f(x) + e^x)dx = 5$. Khi đó $\int_0^{\ln 2} f(x)dx$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 122. Nếu $\int_0^{\ln 3} [f(x) + e^x]dx = 6$ thì $\int_0^{\ln 3} f(x)dx$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 123. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên \mathbb{R} , thỏa mãn $\int_0^{\pi} [f(x) + \sin x]dx = 10$. Tính

$$I = \int_0^{\pi} f(x)dx.$$

Trả lời:

Câu 124. Nếu $\int_0^{\pi} f(x)dx = 3$ thì $\int_0^{\pi} \left[f(x) + \sin \frac{x}{2} \right] dx$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 125. Tích phân $\int_{-e}^{-1} \frac{2}{x} dx$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 126. Biết $\int_0^1 \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} dx = a.e + b$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a + b$ bằng bao

nhiêu?

Trả lời:

Câu 127. Biết $\int_0^1 \frac{e^x}{2^x} dx = \frac{e+a}{b+c \ln 2}$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khi đó $a + b + c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 128. Biết $\int_1^2 e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x}\right) dx = e^2 + a.e + b \ln 2$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Khi đó $2a + 3b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 129. Biết $\int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx = \frac{a.e^4 + b}{e^4}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó

$2024a - 2025b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 130. Biết $\int_0^1 \frac{(e^{-x} + 2)^2}{e^{x-1}} dx = \frac{ae^3 + be^2 + ce + d}{3e^2}$, với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của $P = a + b + c + d$.

Trả lời:

Câu 131. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx = a\sqrt{3} + \frac{\pi}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a + b$ bằng bao

nhiều?

Trả lời:

Câu 132. Cho $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6$. Giá trị của tham số m bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 133. Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Giá trị của $\int_1^2 [2 + f(x)] dx$ bằng

bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 134. Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Giá trị của $\int_1^2 (2 + f(x)) dx$ bằng

bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 135. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x$ trên \mathbb{R} thỏa mãn $F(0) = 0$. Biết

$F(1) = \frac{a}{b \ln 3}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a + b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 136. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = 2^x$ và $F(0) = 0$. Biết $F(1) = a \log_b e$, với

$a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $2024a + b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 137. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} . Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên \mathbb{R} thỏa mãn

$$F(2) - F(0) = 5. \text{ Khi đó } \int_0^2 3f(x) dx \text{ bằng bao nhiêu?}$$

Trả lời:

Câu 138. Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Giá trị của $\int_1^2 (2 + f(x)) dx$ bằng

bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 139. Có hai giá trị của số thực a là $a_1, a_2 (0 < a_1 < a_2)$ thỏa mãn $\int_1^a (2x - 3) dx = 0$. Hãy tính

$$T = 3^{a_1} + 3^{a_2} + \log_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right).$$

Trả lời:

Câu 140. Cho $I = \int_0^1 (4x - 2m^2) dx$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $I + 6 > 0$?

Trả lời:

Câu 141. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của a để $\int_0^a (2x - 3) dx \leq 4$?

Trả lời:

Câu 142. Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi; 3\pi)$ sao cho $\int_{\pi}^b 2 \cos x dx = 1$?

Trả lời:

Câu 143. Tính tích phân sau: $\int_0^2 |2x - 3| dx$.

Trả lời:

Câu 144. Cho $0 \leq m \leq 2$ và tích phân $I = \int_0^m |x - 2| dx = 2$. Khi đó giá trị của tham số m bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 145. Tính tích phân $I = \int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx$.

Trả lời:

Câu 146. Biết $I = \int_1^5 \frac{2|x - 2| + 1}{x} dx = 4 + a \ln 2 + b \ln 5$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a + b$.

Trả lời:

Câu 147. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \\ x+1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Biết $\int_2^0 -3t^2 f(t) dt = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức

tối giản. Khi đó $a+b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 148. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{khi } x < 0 \\ x - 1 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 5 - 2x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Biết $\int_{-5}^9 \frac{1}{7} f(t) dt = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân

thức tối giản. Khi đó $a-b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 149. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biết $\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^3 f(x) dx = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là

phân thức tối giản. Khi đó $a-2b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 150. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{khi } x > 2 \\ -2x+12 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_1^2 f(t) dt + \frac{1}{2} \int_2^{10} f(t) dt$.

Trả lời:

Câu 151. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tích phân Biết $\int_1^3 \frac{1}{2} f(x) dx = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và

$\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a-3b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 152. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \\ x+1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tích phân Biết $\int_2^0 -3t^2 f(t) dt = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là

phân thức tối giản. Khi đó $a-2b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 153. Cho số thực a và hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \leq 0 \\ a(x-x^2) & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Biết tích phân $\int_{-1}^1 f(x) dx = 1$, tính giá

trị của a .

Trả lời:

Câu 154. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+b & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ thỏa mãn $\int_0^2 f(x) dx = 13$. Tính $T = a+b-ab$.

Trả lời:

Câu 155. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $f(x) = \begin{cases} x + m, & x \geq 0 \\ e^{2x}, & x < 0 \end{cases}$ (m là hằng số). Biết

$\int_{-1}^2 f(x) dx = a + \frac{b}{e^2}$ trong đó a, b là các số hữu tỉ. Tính $2a + 4b^2$.

Trả lời:

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 156. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn

$$f'(x) = (2x+1)[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(0) = -1. \text{ Giá trị của tích phân } \int_0^1 (x^3 - 1)f(x)dx \text{ bằng bao nhiêu?}$$

Câu 157. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} thỏa mãn $3f'(x).e^{f^3(x)} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết

$$f(1) = 0, \text{ tính tích phân } I = \int_0^{2024} \frac{1}{\sqrt[3]{2 \ln x}} \cdot f(x) dx.$$

Câu 158. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0) = 1, (f'(x))^3 = e^x (f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Biết $\int_1^2 f(x)dx = a.e^2 + b.e$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + b$.

Trả lời:

Câu 159. Cho hàm số $f(x) > 0$ và thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$.

Biết $\int_1^2 f(x)dx = a.e + b\sqrt{e}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $a - b$.

Câu 160. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 2$. Tính

$$I = \int_1^2 f^2(x)dx.$$

Câu 161. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $(f'(x))^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng bao nhiêu?

Câu 162. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = x^3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 2$.

Biết $f^2(2) = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a - b$.

Câu 163. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} thỏa mãn $(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^x$ và $f(0) = \frac{1}{2}$.

Biết $\int_1^2 (2x+2)f(x)dx = a.e^2 + b.e$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $a - b$.

Câu 164. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên \mathbb{R} thỏa mãn điều kiện

$$f(x) + x(f'(x) - 2 \sin x) = x^2 \cos x, x \in \mathbb{R} \text{ và } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}. \text{ Tính } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x} dx$$

Câu 165. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) + f(x) = 2x \forall x \in (0; +\infty)$,

$f(1) = 1$. Biết $f(4) = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + b$.

Câu 166. Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1)=1$,

$$\left[2f(x)+1-x^2\right]f'(x)=2x[1+f(x)], \forall x \in [0;1]. \text{ Biết } \int_0^1 f(x)dx = \frac{a}{b}, \text{ với } a, b \in \mathbb{Z} \text{ và } \frac{a}{b} \text{ là phân số tối}$$

giản. Tính $a+b$.

Câu 167. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn

$$(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4, \forall x \in [0;1] \text{ và } f(1) = 2. \text{ Biết } \int_0^1 f(x)dx = \frac{a}{b}, \text{ với } a, b \in \mathbb{Z} \text{ và } \frac{a}{b} \text{ là phân số tối}$$

giản. Tính $a+b$.

Câu 168. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} thỏa mãn
$$\begin{cases} f(0) = f'(0) = 1 \\ f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y) - 1 \end{cases}$$

với $x, y \in \mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f(x-1)dx$.

Câu 169. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $x.f(x).f'(x) = f^2(x) - x, \forall x \in \mathbb{R}$

và có $f(2) = 1$. Tích phân $I = \int_0^2 f^2(x)dx$

Câu 170. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;2]$ thỏa mãn $f(1) = g(1) = 0$ và

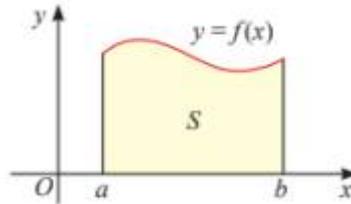
$$\begin{cases} \frac{x}{(x+1)^2} g(x) + 2024x = (x+1)f'(x) \\ \frac{x^3}{x+1} g'(x) + f(x) = 2025x^2 \end{cases}, \forall x \in [1;2]. \text{ Tính tích phân } I = \int_1^2 \left[\frac{x}{x+1} g(x) - \frac{x+1}{x} f(x) \right] dx.$$

BÀI 2

TÍCH PHÂN

1. Khái niệm tích phân

a. Diện tích hình thang cong



Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính bởi:

$$S = F(b) - F(a)$$

trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

b. Khái niệm tích phân

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ thì hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu $\int_a^b f(x) dx$

Chú ý:

- Hiệu số $F(b) - F(a)$ còn được kí hiệu là $F(x) \Big|_a^b$.

$$\text{Vậy } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

- Ta gọi \int_a^b là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên, $f(x) dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân và

$f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

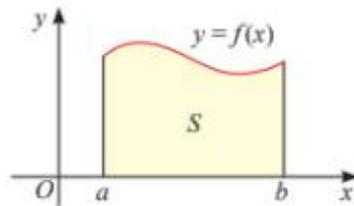
- Quy ước: $\int_a^a f(x) dx; \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

• Tích phân của hàm số f từ a đến b chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào biến x hay t , nghĩa là $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

- Ý nghĩa hình học của tích phân

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$.

$$S = \int_a^b f(x) dx$$



Nhận xét:

- Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx.$$

- Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

- Đạo hàm của quãng đường di chuyển của vật theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mọi thời điểm: $v(t) = s'(t)$. Do đó, nếu biết tốc độ $v(t)$ tại mọi thời điểm $t \in [a; b]$ thì tính được quãng đường

di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b theo công thức: $s = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t) dt$

2. Tính chất của tích phân

Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó:

- **Tính chất 1:** $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$, với k là hằng số.

- **Tính chất 2:** $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

- **Tính chất 3:** $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ với $c \in (a; b)$.

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1
TÍNH TÍCH PHÂN SỬ DỤNG BẢNG NGUYÊN HÀM SƠ CẤP

Nguyên hàm của một hàm số sơ cấp	
Nguyên hàm của hàm số lũy thừa	$\int 0 dx = C$ $\int dx = x + C$ $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (x \neq 0)$
Nguyên hàm của hàm số lượng giác	$\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
Nguyên hàm của hàm số mũ	$\int e^x dx = e^x + C$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$

Chú ý : Dùng công thức sau làm trắc nghiệm cho nhanh

$$\bullet \int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$$

$$\bullet \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\bullet \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

$$\bullet \int a^{\alpha x + \beta} dx = \frac{1}{\alpha} \frac{a^{\alpha x + \beta}}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$$

Bài 1. Tính các tích phân sau đây:

a) $\int_0^3 (3x^2 + 2024) dx$

b) $\int_0^1 (4x^3 + 3x^2 - 2) dx$

c) $\int_{-2}^4 (x+1)(x-1) dx$

d) $\int_1^2 \frac{x-1}{x} dx$

e) $\int_1^2 \frac{2x^3 - x - 2025}{x^2} dx$

f) $\int_1^2 \frac{(x-1)^2}{x} dx$

Lời giải

a) $\int_0^3 (3x^2 + 2024) dx = (x^3 + 2024x) \Big|_0^3 = 3^3 + 2024 \cdot 3 - (0^3 + 2024 \cdot 0) = 6801$

b) $\int_0^1 (4x^3 + 3x^2 - 2) dx = (x^4 + x^3 - 2x) \Big|_0^1 = (1^4 + 1 - 2 \cdot 1) - (0^4 + 0^3 - 2 \cdot 0) = 0$

c) $\int_{-2}^4 (x+1)(x-1) dx = \int_{-2}^4 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_{-2}^4 = 18$

d) $\int_1^2 \frac{x-1}{x} dx = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) dx = (x - \ln|x|) \Big|_1^2 = (2 - \ln 2) - (1 - \ln 1) = 1 - \ln 2.$

e) $\int_1^2 \frac{2x^3 - x - 2025}{x^2} dx = \int_1^2 \left(2x - \frac{1}{x} - \frac{2025}{x^2} \right) dx = \left(x^2 - \ln|x| + \frac{2025}{x} \right) \Big|_1^2$
 $= \left(2^2 - \ln|2| + \frac{2025}{2} \right) - \left(1^2 - \ln|1| + \frac{2025}{1} \right) = -\frac{2031}{2} - \ln 2$

f) $\int_1^2 \frac{(x-1)^2}{x} dx = \int_1^2 \frac{x^2 - 2x + 1}{x} dx = \int_1^2 \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| \right) \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} + \ln 2$

Bài 2. Tính các tích phân sau đây:

a) $\int_1^3 x^{\sqrt{2024}} dx$

b) $\int_1^3 x^{\frac{2}{3}} dx$

c) $\int_1^8 \sqrt[3]{x} dx$

d) $\int_1^e \frac{7}{3x} dx$

e) $\int_1^2 \frac{1}{x^3} dx$

f) $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

Lời giải

a) $\int_1^3 x^{\sqrt{2024}} dx = \frac{x^{\sqrt{2024}+1}}{\sqrt{2024}+1} \Big|_1^3 = \frac{3^{\sqrt{2024}+1}}{\sqrt{2024}+1} - \frac{1^{\sqrt{2024}+1}}{\sqrt{2024}+1} = \frac{3^{\sqrt{2024}+1} - 1}{\sqrt{2024}+1}$

b) $\int_1^3 x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \Big|_1^3 = \frac{3}{5} \cdot \left(3^{\frac{5}{3}} - 1 \right) = \frac{3}{5} \cdot (3\sqrt[3]{9} - 1).$

c) $\int_1^8 \sqrt[3]{x} dx = \int_1^8 x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \Big|_1^8 = \frac{3}{4} \cdot \left(8^{\frac{4}{3}} - 1 \right) = \frac{3}{4} \cdot (\sqrt[3]{8^4} - 1) = \frac{3}{4} \cdot (16 - 1) = \frac{45}{4}.$

d) $\int_1^e \frac{7}{3x} dx = \frac{7}{3} \ln|x| \Big|_1^e = \frac{7}{3} \cdot \ln e - \frac{7}{3} \cdot \ln 1 = \frac{7}{3}.$

$$e) \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx = \int_1^2 x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} \Big|_1^2 = \frac{2^{-2}}{-2} - \frac{1^{-2}}{-2} = \frac{3}{8}.$$

$$f) \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}} dx = x^{\frac{1}{2}} \Big|_1^4 = 4^{\frac{1}{2}} - 1^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Bài 3. Tính các tích phân sau đây:

$$a) \int_1^4 (\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2) dx$$

$$b) \int_0^4 (\sqrt{x} + 1)(\sqrt[3]{x} - 1) dx$$

$$c) \int_1^2 \left(\frac{x - \sqrt[4]{x^3}}{x} \right)^2 dx$$

$$d) \int_{-3}^{-1} \frac{(x^2 + 1)^3}{x^2} dx$$

$$e) \int_1^4 \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x}} dx$$

$$f) \int_1^8 \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)^2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

Lời giải

$$a) \int_1^4 (\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2) dx = \int_1^4 (x - 4) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 4x \right) \Big|_1^4 = \frac{-9}{2}$$

$$b) \int_0^4 (\sqrt{x} + 1)(\sqrt[3]{x} - 1) dx = \int_0^4 \left(x^{\frac{5}{6}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} - 1 \right) dx = \left(\frac{6}{11} x^{\frac{11}{6}} - \frac{2}{3} x\sqrt{x} + \frac{3}{4} x\sqrt[3]{x} - x \right) \Big|_0^4$$

$$= \frac{48}{11} \sqrt[6]{16} + 3\sqrt[3]{4} - \frac{36}{5}$$

$$c) \int_1^2 \left(\frac{x - \sqrt[4]{x^3}}{x} \right)^2 dx = \int_1^2 \left(1 - x^{-\frac{1}{4}} \right)^2 dx = \int_1^2 \left(1 - 2x^{-\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \left(x - \frac{8}{3} \sqrt[4]{x^3} + 2\sqrt{x} \right) \Big|_1^2$$

$$= \left(2 - \frac{8}{3} \sqrt[4]{8} + 2\sqrt{2} \right) - \left(1 - \frac{8}{3} + 2 \right) = \frac{5}{3} + 2\sqrt{2} - \frac{8}{3} \sqrt[4]{8}$$

$$d) \int_{-3}^{-1} \frac{(x^2 + 1)^3}{x^2} dx = \int_{-3}^{-1} \frac{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2} dx = \int_{-3}^{-1} \left(x^4 + 3x^2 + 3 + \frac{1}{x^2} \right) dx = \left(\frac{1}{5} x^5 + x^3 + 3x - \frac{1}{x} \right) \Big|_{-3}^{-1}$$

$$= \left(-\frac{1}{5} - 1 - 3 + 1 \right) - \left(-\frac{243}{5} - 27 - 9 + \frac{1}{3} \right) = \frac{1226}{15}$$

$$e) \int_1^4 \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 \left(x^{\frac{1}{6}} - x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \left(\frac{6}{7} x^{\frac{7}{6}} - 2\sqrt{x} \right) \Big|_1^4 = \left(\frac{24\sqrt[6]{4}}{7} - 4 \right) - \left(\frac{6}{7} - 2 \right) = \frac{24\sqrt[6]{4} - 20}{7}$$

$$f) \int_1^8 \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)^2}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int_1^8 \left(\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx = \int_1^8 \left(1 - x^{-\frac{1}{3}} \right)^2 dx = \int_1^8 \left(1 - 2x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{2}{3}} \right) dx = \left(x - 3\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} \right) \Big|_1^8$$

$$= \left(8 - 3\sqrt[3]{8^2} + 3\sqrt[3]{8} \right) - \left(1 - 3\sqrt[3]{1^2} + 3\sqrt[3]{1} \right) = 1$$

Bài 4. Tính các tích phân sau đây:

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin x + 2024) dx$$

d)
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$$

e)
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x(1 + \tan x)} dx$$

f)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} dx$$

Lời giải

a)
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos 0 \right) = \frac{1}{2}$$

b)
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$$

c)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin x + 2024) dx = (-3 \cos x + 2024x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1012\pi + 3$$

d)
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = (\tan x + \cot x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = 2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

e)
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x(1 + \tan x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx = (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$$

f)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x) dx = (x - \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Bài 5. Tính các tích phân sau đây:

a)
$$\int_0^1 (2^{2x} \cdot 3^{x-1}) dx$$

b)
$$\int_0^1 (2 \cdot 3^x - 5e^x) dx$$

c)
$$\int_1^2 \left(4x^3 - 2 \cdot 3^{x+1} + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

d)
$$\int_0^1 \frac{(e^{-x} + 2)^2}{e^{x-1}} dx$$

e)
$$\int_0^1 \frac{(2024^x + 1)^2}{e^{-3x}} dx$$

f)
$$\int_1^2 e^{2x} \left(2024 + \frac{2025e^{-2x}}{x^3} \right) dx$$

Lời giải

a)
$$\int_0^1 (2^{2x} \cdot 3^{x-1}) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 12^x dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{12^x}{\ln 12} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \left(\frac{12}{\ln 12} - \frac{1}{\ln 12} \right) = \frac{11}{3(2\ln 2 + \ln 3)}$$

b)
$$\int_0^1 (2 \cdot 3^x - 5e^x) dx = \left(\frac{2 \cdot 3^x}{\ln 3} - 5e^x \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{6}{\ln 3} - 5e \right) - \left(\frac{2}{\ln 3} - 5 \right) = \frac{4}{\ln 3} - 5e + 5$$

c)
$$\int_1^2 \left(4x^3 - 2 \cdot 3^{x+1} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \left(x^4 - \frac{6 \cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \left(16 - \frac{54}{\ln 3} - \frac{1}{2} \right) - \left(1 - \frac{18}{\ln 3} - 1 \right) = \frac{31}{2} - \frac{36}{\ln 3}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \int_0^1 \frac{(e^{-x} + 2)^2}{e^{x-1}} dx &= \int_0^1 \frac{e^{-2x} + 4e^{-x} + 4}{e^{x-1}} dx = \int_0^1 (e^{-3x+1} + 4e^{-2x+1} + 4e^{-x+1}) dx = \left(-\frac{1}{3}e^{-3x+1} - 2e^{-2x+1} - 4e^{-x+1} \right) \Big|_0^1 \\ &= \left(-\frac{1}{3e^2} - \frac{2}{e} - 4 \right) - \left(-\frac{1}{3}e - 2e - 4e \right) = \frac{19e}{3} - \frac{1}{3e^2} - \frac{2}{e} - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \int_0^1 \frac{(2024^x + 1)^2}{e^{-3x}} dx &= \int_0^1 \frac{2024^{2x} + 2 \cdot 2024^x + 1}{e^{-3x}} dx = \int_0^1 \left[(2024^2 \cdot e^3)^x + 2 \cdot (2024 \cdot e^3)^x + e^{3x} \right] dx \\ &= \left[\frac{(2024^2 \cdot e^3)^x}{\ln(2024^2 \cdot e^3)} + 2 \cdot \frac{(2024 \cdot e^3)^x}{\ln(2024 \cdot e^3)} + \frac{1}{3} e^{3x} \right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{2024^2 \cdot e^3}{3 + 2 \ln 2024} + 2 \cdot \frac{2024 \cdot e^3}{3 + \ln 2024} + \frac{1}{3} e^3 - \left(\frac{1}{3 + 2 \ln 2024} + 2 \cdot \frac{1}{3 + \ln 2024} + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{2024^2 \cdot e^3 - 1}{3 + 2 \ln 2024} + \frac{4048 \cdot e^3 - 2}{3 + \ln 2024} + \frac{e^3 - 1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \int_1^2 e^{2x} \left(2024 + \frac{2025e^{-2x}}{x^3} \right) dx &= \int_1^2 \left(2024 \cdot e^{2x} + \frac{2025}{x^3} \right) dx = \left(1012 \cdot e^{2x} - \frac{2025}{2x^2} \right) \Big|_1^2 \\ &= \left(1012 \cdot e^4 - \frac{2025}{8} \right) - \left(1012 \cdot e^2 - \frac{2025}{2} \right) = 1012 \cdot e^4 - 1012 \cdot e^2 + \frac{6075}{8} \end{aligned}$$

Bài 6. Tính các tích phân sau đây:

$$\text{a) } \int_0^1 5^{x+1} \cdot 7^{2x-1} dx$$

$$\text{b) } \int_0^1 (x + e^{-x-2}) dx$$

$$\text{c) } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$$

$$\text{d) } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x^2 \left(1 - \frac{\sin x}{x^2} \right) dx$$

$$\text{e) } \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) dx$$

$$\text{f) } \int_1^2 2^{x+1} \left(1 - \frac{2}{e^x} \right) dx$$

Lời giải

DẠNG 2**TÍCH PHÂN HÀM ẨN BIẾN ĐỔI CƠ BẢN**

$$\bullet \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\bullet \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$\bullet \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Bài 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn:

a) $\int_6^0 f(x) dx = 1$. Tính tích phân $\int_0^6 2025 f(x) dx$

b) $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Tính tích phân $\int_0^2 [2f(x) - 1] dx$

c) $\int_2^7 f(x) dx = -3$ và $\int_1^7 f(x) dx = 3$. Tính tích phân $\int_1^2 f(x) dx$.

Lời giải

a) Ta có: $\int_0^6 2025 f(x) dx = 2025 \int_0^6 f(x) dx = -2025 \int_6^0 f(x) dx = -2025 \cdot 1 = -2025$

b) Ta có: $\int_0^2 [2f(x) - 1] dx = \int_0^2 2f(x) dx - \int_0^2 1 dx = 2 \cdot 4 - 2 = 6$.

c) Ta có ;

$$\int_1^2 f(x) dx + \int_2^7 f(x) dx = \int_1^7 f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx + (-3) = 3$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx = 6.$$

Bài 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn:

a) $\int_0^1 [f(x) + 2x] dx = 3$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x) dx$

b) $\int_1^3 [f(x) + 2x + 3] dx = 10$. Tính tích phân $\int_1^3 f(x) dx$.

$$c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 4. \text{ Tính tích phân } \int_0^{\frac{\pi}{2}} [2f(x) + \sin x] dx.$$

Lời giải

a) Ta có:

$$\int_0^1 [f(x) + 2x] dx = 3$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 2x dx = 3$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + x^2 \Big|_0^1 = 3 \quad .$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + 1 = 3$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 2$$

b) Ta có :

$$\int_1^3 [f(x) + 2x + 3] dx = 10$$

$$\Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx + \int_1^3 (2x + 3) dx = 10$$

$$\Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx + 14 = 10$$

$$\Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx = -4$$

$$c) \text{Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{2}} [2f(x) + \sin x] dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 2 \cdot 4 + 1 = 9.$$

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn:

$$a) \int_{-6}^{11} f(x) dx = 8, \int_2^6 f(x) dx = 3. \text{ Tính giá trị của biểu thức } P = \int_{-6}^2 f(x) dx + \int_6^{11} f(x) dx.$$

$$b) \int_1^8 f(x) dx = 9, \int_4^{12} f(x) dx = 3, \int_4^8 f(x) dx = 5. \text{ Tính } I = \int_1^{12} f(x) dx.$$

Lời giải

a) Ta có:

$$\int_{-6}^{11} f(x) dx = 8$$

$$\Leftrightarrow \int_{-6}^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx + \int_6^{11} f(x) dx = 8$$

$$\Leftrightarrow \int_{-6}^2 f(x) dx + 3 + \int_6^{11} f(x) dx = 8$$

$$\Leftrightarrow \int_{-6}^2 f(x) dx + \int_6^{11} f(x) dx = 5$$

$$\Leftrightarrow P = 5$$

$$b) I = \int_1^{12} f(x) dx = \int_1^8 f(x) dx + \int_8^{12} f(x) dx = \int_1^8 f(x) dx + \int_4^{12} f(x) dx - \int_4^8 f(x) dx = 9 + 3 - 5 = 7.$$

Bài 4. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm liên tục trên \mathbb{R} , thỏa mãn:

$$a) \int_2^5 f(x) dx = 3 \text{ và } \int_2^5 g(x) dx = -2. \text{ Tính } \int_2^5 [f(x) + g(x)] dx$$

$$b) \int_0^1 f(x) dx = 3 \text{ và } \int_0^1 g(x) dx = -4. \text{ Tính } \int_1^0 [f(x) + g(x)] dx.$$

$$c) \int_1^4 f(x) dx = 6 \text{ và } \int_1^4 g(x) dx = -5. \text{ Tính } \int_1^4 \left[\frac{1}{3} f(x) - \frac{1}{5} g(x) \right] dx$$

Lời giải

$$a) \int_2^5 [f(x) + g(x)] dx = \int_2^5 f(x) dx + \int_2^5 g(x) dx = 3 + (-2) = 1.$$

$$b) \text{Ta có } \int_1^0 [f(x) + g(x)] dx = -\int_0^1 [f(x) + g(x)] dx = -\int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx = -3 + 4 = 1.$$

$$c) \int_1^4 \left[\frac{1}{3} f(x) - \frac{1}{5} g(x) \right] dx = \frac{1}{3} \int_1^4 f(x) dx - \frac{1}{5} \int_1^4 g(x) dx = \frac{1}{3} \cdot 6 - \frac{1}{5} \cdot (-5) = 3.$$

Bài 5. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm liên tục trên \mathbb{R} , thỏa mãn:

$$a) \int_2^3 f(x) dx = 3 \text{ và } \int_3^2 g(x) dx = 1. \text{ Tính } \int_2^3 [f(x) + 2g(x)] dx$$

$$b) \int_1^3 f(x) dx = 2024 \text{ và } \int_3^1 g(x) dx = 1. \text{ Tính } \int_1^3 \left[\frac{1}{2024} f(x) - 3g(x) \right] dx$$

$$c) \int_1^2 f(x) dx = 3 \text{ và } \int_2^1 g(x) dx = -2. \text{ Tính } \int_1^2 \left[3f(x) - \frac{1}{2} g(x) \right] dx$$

Lời giải

$$a) \text{Ta có: } \int_3^2 g(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 g(x) dx = -1$$

$$\Rightarrow \int_2^3 [f(x) + 2g(x)] dx = \int_2^3 f(x) dx + 2 \int_2^3 g(x) dx = 3 + 2 \cdot (-1) = 1$$

b) Ta có: $\int_3^1 g(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_1^3 g(x) dx = -1$

$$\Rightarrow \int_1^3 \left[\frac{1}{2024} f(x) - 3g(x) \right] dx = \frac{1}{2024} \int_1^3 f(x) dx - 3 \int_1^3 g(x) dx = \frac{1}{2024} \cdot 2024 - 3(-1) = 4$$

c) Ta có: $\int_2^1 g(x) dx = -2 \Leftrightarrow \int_1^2 g(x) dx = 2$

$$\Rightarrow \int_1^2 \left[3f(x) - \frac{1}{2} g(x) \right] dx = 3 \int_1^2 f(x) dx - \frac{1}{2} \int_1^2 g(x) dx = 3 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 8.$$

Bài 6. Cho $\int_0^3 f(x) dx = 2024$ và $\int_0^3 g(x) dx = 2025$. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^3 [f(x) + g(x)] dx$

b) $\int_3^0 \frac{1}{5} g(x) dx$

c) $\int_0^3 \left[\frac{1}{2} f(x) - 3g(x) \right] dx$

d) $\int_0^3 \left[\frac{1}{2024} f(x) - 3x^2 \right] dx$

e) $\int_3^0 [g(x) - \sqrt[3]{x^2}] dx$

f) $\int_0^3 \left[\frac{1}{4} f(x) + g(x) - e^{3x+1} \right] dx$

Lời giải

a) $\int_0^3 [f(x) + g(x)] dx = \int_0^3 f(x) dx + \int_0^3 g(x) dx = 2024 + 2025 = 4049.$

b) $\int_3^0 \frac{1}{5} g(x) dx = -\frac{1}{5} \int_0^3 g(x) dx = -\frac{1}{5} \cdot 2025 = -405$

c) $\int_0^3 \left[\frac{1}{2} f(x) - 3g(x) \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^3 f(x) dx - 3 \int_0^3 g(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 2024 - 3 \cdot 2025 = -5063$

d) $\int_0^3 \left[\frac{1}{2024} f(x) - 3x^2 \right] dx = \frac{1}{2024} \int_0^3 f(x) dx - 3 \int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{2024} \cdot 2024 - x^3 \Big|_0^3 = -26$

e) $\int_3^0 [g(x) - \sqrt[3]{x^2}] dx = -\int_0^3 [g(x) - \sqrt[3]{x^2}] dx = -\int_0^3 g(x) dx + \int_0^3 \sqrt[3]{x^2} dx = -2025 + \frac{5}{3} x^{\frac{5}{3}} \Big|_0^3 = 5\sqrt[3]{9} - 2025$

f) $\int_0^3 \left[\frac{1}{4} f(x) + g(x) - e^{3x+1} \right] dx = \frac{1}{4} \int_0^3 f(x) dx + \int_0^3 g(x) dx - \int_0^3 e^{3x+1} dx = \frac{1}{4} \cdot 2024 + 2025 - \frac{1}{3} e^{3x+1} \Big|_0^3$

$= 2531 - \frac{1}{3} e^{10} + \frac{1}{3} e$

Bài 7. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm liên tục trên đoạn $[1; 3]$ thoả: $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$,

$\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6$. Tính $I = \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx$.

Lời giải

Đặt $a = \int_1^3 f(x) dx$ và $b = \int_1^3 g(x) dx$.

Khi đó, $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = a + 3b$, $\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 2a - b$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} a + 3b = 10 \\ 2a - b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}$.

Vậy $I = \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx = a + b = 6$.

DẠNG 3

TÍCH PHÂN HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI

Tính tích phân: $I = \int_a^b |f(x)| dx$

Phương pháp

Bước 1. Xét dấu $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Bước 2. Dựa vào bảng xét dấu trên đoạn $[a; b]$ để khử $|f(x)|$. Sau đó sử dụng các phương pháp tính tích phân đã học để tính $I = \int_a^b |f(x)| dx$

Bài 1. Tính tích phân $I = \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx$.

Lời giải

$$I = \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx -$$

Xét $f(x) = x^2 - 1$ trên $[-3; 3]$.

$$\text{Cho } f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-3		-1		1		3	$+\infty$
$f(x)$			+	0	-	0	+		

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } I &= \int_{-3}^{-1} (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx + \int_1^3 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 - x \right) \Big|_{-3}^{-1} + \left(x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{1}{3} x^3 - x \right) \Big|_1^3 \\ &= \frac{20}{3} + \frac{4}{3} + \frac{16}{3} = \frac{40}{3} \end{aligned}$$

Bài 2. Tính tích phân $I = \int_{-2}^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx$.

Lời giải

$$I = \int_{-2}^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx.$$

Xét $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ trên $[-2; 1]$.

$$\text{Cho } f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
$f(x)$	[Hatched]		0	+	0
			-	0	[Hatched]

$$\text{Do đó: } I = \int_{-2}^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx = \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx - \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right) \Big|_{-2}^0 - \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right) \Big|_0^1 = -\left(-\frac{8}{3} \right) - \left(-\frac{5}{12} \right) = \frac{37}{12}.$$

Bài 3. Tính tích phân $I = \int_{-1}^2 |x^3 - 3x + 2| dx$.

Lời giải

$$I = \int_{-1}^2 |x^3 - 3x + 2| dx$$

Xét $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên $[-1; 2]$.

$$\text{Cho } f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f(x)$	[Hatched]		-	[Hatched]

$$\text{Do đó: } I = -\int_{-1}^2 (x^3 - 3x + 2) dx = -\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right) \Big|_{-1}^2 = 6 - \left(-\frac{3}{4} \right) = \frac{27}{4}.$$

Bài 4. Tính tích phân $I = \int_{-2}^2 |x^4 - 3x^2 - 4| dx$.

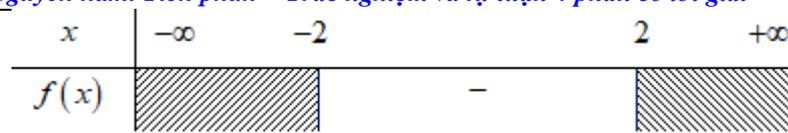
Lời giải

$$I = \int_{-2}^2 |x^4 - 3x^2 - 4| dx.$$

Xét $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ trên $[-2; 2]$.

$$\text{Cho } f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in [-2; 2] \\ x = -2 \in [-2; 2] \end{cases}.$$

Bảng xét dấu:



Do đó: $I = -\int_{-2}^2 (x^4 - 3x^2 - 4) dx = -\left(\frac{1}{5}x^5 - x^3 - 4x\right)\Big|_{-2}^2 = \frac{48}{5} - \left(-\frac{48}{5}\right) = \frac{96}{5}$.

Bài 5. Tính tích phân $I = \int_0^3 \sqrt{x^3 - 2x^2 + x} dx$.

Lời giải

$$I = \int_0^3 \sqrt{x^3 - 2x^2 + x} dx = \int_0^3 \sqrt{x(x^2 - 2x + 1)} dx = \int_0^3 |x-1| \sqrt{x} dx.$$

Ta có: $|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } I &= \int_0^1 (1-x) \sqrt{x} dx + \int_1^3 (x-1) \sqrt{x} dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right) dx + \int_1^3 \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right) dx \\ &= \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\Big|_1^3 = \frac{4}{15} + \left[\frac{8\sqrt{3}}{5} - \left(-\frac{4}{15}\right)\right] = \frac{24\sqrt{3} + 8}{15}. \end{aligned}$$

Bài 6. Tính tích phân $I = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx$.

Lời giải

$$I = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx.$$

Ta có: $|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{khi } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx = \int_1^2 \frac{2(2-x)+1}{x} dx + \int_2^5 \frac{2(x-2)+1}{x} dx = \int_1^2 \frac{5-2x}{x} dx + \int_2^5 \frac{2x-3}{x} dx \\ &= \int_1^2 \left(\frac{5}{x} - x\right) dx + \int_2^5 \left(2 - \frac{3}{x}\right) dx = (5\ln|x|-x)\Big|_1^2 + (2x-3\ln|x|)\Big|_2^5 = 8\ln 2 - 3\ln 5 + 4. \end{aligned}$$

Bài 7. Tính tích phân $I = \int_{-3}^5 (|x+2| - |x-2|) dx$.

Lời giải

$$I = \int_{-3}^5 (|x+2| - |x-2|) dx = \int_{-3}^5 |x+2| dx - \int_{-3}^5 |x-2| dx.$$

Ta có:

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{khi } x \geq -2 \\ -x-2 & \text{khi } x < -2 \end{cases}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{khi } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } I &= -\int_{-3}^{-2} (x+2) dx + \int_{-2}^5 (x+2) dx - \int_{-3}^2 (x-2) dx + \int_{-3}^2 (x-2) dx \\ &= -\left(\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_{-3}^{-2} + \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_{-2}^5 - \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big|_{-3}^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big|_2^5 = 8 \end{aligned}$$

Cách 2:

Ta có bảng xét dấu để phá trị tuyệt đối:

x	-3	-2	2	5	
$ x+2 $	$-x-2$	0	$x+2$	$x+2$	
$ x-2 $	$-x+2$		$-x+2$	0	$x-2$
$ x+2 - x-2 $	-4		$2x$		4

$$\text{Khi đó: } I = \int_{-3}^5 (|x+2|-|x-2|) dx = \int_{-3}^{-2} -4 dx + \int_{-2}^2 2x dx + \int_2^5 4 dx = -4x\Big|_{-3}^{-2} + x^2\Big|_{-2}^2 + 4x\Big|_2^5 = 8.$$

Bài 8. Tính tích phân $I = \int_{-1}^2 (x + |1-x| - |x+2|) dx$.

Lời giải

$$I = \int_{-1}^2 (x + |1-x| - |x+2|) dx = \int_{-1}^2 x dx + \int_{-1}^2 |1-x| dx - \int_{-1}^2 |x+2| dx$$

Ta có:

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x & \text{khi } x \leq 1 \\ -1+x & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{khi } x \geq -2 \\ -x-2 & \text{khi } x < -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } I &= \int_{-1}^2 x dx + \int_{-1}^1 (1-x) dx - \int_1^2 (1-x) dx + \int_{-1}^2 (x+2) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^2 + \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^1 - \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_{-1}^2 = -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

Cách 2:

Ta có bảng xét dấu để phá trị tuyệt đối:

x	-1	1	2
$ 1-x $	$1-x$	0	$x-1$
$ x+2 $	$x+2$		$x+2$
$x + 1-x - x+2 $	$-x-1$		$x-3$

Khi đó:

$$I = \int_{-1}^2 (x + |1-x| - |x+2|) dx = \int_{-1}^1 (-x-1) dx + \int_1^2 (x-3) dx$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{x^2}{2} - 3x \right) \Big|_1^2 = \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left[-4 - \left(-\frac{5}{2} \right) \right] = -\frac{7}{2}$$

Bài 9. Tính tích phân $I = \int_2^6 \sqrt{x^2 - 8x + 16} dx$.

Lời giải

Bài 10. Tính tích phân $I = \int_{-2}^1 \sqrt{4x^2 + 6x + 9} dx$.

Lời giải

Bài 11. Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx$.

Lời giải

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \cos^2 x} dx = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} |\cos x| dx$$

$$\text{Ta có: } |\cos x| = \begin{cases} \cos x & \text{khi } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \\ -\cos x & \text{khi } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } I = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx + \sqrt{2} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x dx$$

$$= \sqrt{2} \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{2} \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \sqrt{2} \sin x \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = 4\sqrt{2}$$

Bài 12. Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$.

Lời giải

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2 x} dx = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} |\sin x| dx$$

$$\text{Ta có: } |\sin x| = \begin{cases} \sin x & \text{khi } 0 \leq x \leq \pi \\ -\sin x & \text{khi } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } I = \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin x dx - \sqrt{2} \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\sqrt{2} \cos x \Big|_0^{\pi} + \sqrt{2} \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = 4\sqrt{2}$$

DẠNG 4**TÍCH PHÂN HÀM NHIỀU CÔNG THỨC**

Dạng 1: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{khi } x \leq c \\ h(x) & \text{khi } x > c \end{cases}$ liên tục trên D . Tính $\int_a^b f(x) dx$, với $c \in [a; b]$.

Phương pháp giải:

Bước 1: Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x = c$ hay không (*kiến thức hàm số liên tục tại một điểm lớp 11*)

Tức là kiểm tra $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} h(x) = f(b)$

Bước 2: Tách cận: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c g(x) dx + \int_c^b h(x) dx$.

Bước 3: Tính tích phân $\int_a^c g(x) dx$ và $\int_c^b h(x) dx$ bằng các phương pháp đã học.

Dạng 2: Cho hàm số $f(x; m) = \begin{cases} g(x; m) & \text{khi } x \leq c \\ h(x; m) & \text{khi } x > c \end{cases}$ liên tục trên D và m là tham số. Tính $\int_a^b f(x; m) dx$, với $c \in [a; b]$.

Phương pháp giải:

Bước 1: Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x = c$ hay không.

Tức là kiểm tra: $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x; m) = \lim_{x \rightarrow b^+} f(x; m) = f(b) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow b^-} g(x; m) = \lim_{x \rightarrow b^+} h(x; m) = f(b)$

Chú ý: Bước này tìm tham số m .

Bước 2: Tách cận: $\int_a^b f(x; m) dx = \int_a^c g(x; m) dx + \int_c^b h(x; m) dx$.

Bước 3: Tính tích phân $\int_a^c g(x; m) dx$ và $\int_c^b h(x; m) dx$ bằng các phương pháp đã học.

Bài 1. Cho $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x-1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_{-1}^2 f(x) dx$

Lời giải

$$\text{Ta có: } I = \int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$$

$$\text{Tính } I_1 = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (2x-1) dx = (x^2 - x) \Big|_{-1}^1 = 0 - 2 = -2$$

$$\text{Tính } I_2 = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 1 dx = 2 - 1 = 1.$$

$$\text{Vậy } I = 1 - 2 = -1.$$

Bài 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{khi } x \geq 0 \\ e^{2x} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_{-1}^2 f(x) dx$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } I &= \int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = \int_{-1}^0 e^{2x} dx + \int_0^2 (x+1) dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) + \left(\frac{4}{2} + 2 \right) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2e^2} = \frac{9e^2 - 1}{2e^2}. \end{aligned}$$

Bài 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x + m & \text{khi } x \geq 1 \\ 5 - 2x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ (m là tham số thực). Biết rằng $f(x)$ có nguyên

hàm trên \mathbb{R} là $F(x)$ thỏa mãn $F(-2) = -10$, khi đó tính $F(3)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } F(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + mx + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 5x - x^2 + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } F(-2) = 5(-2) - (-2)^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = -10 + 4 = 4$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 + x^2 + mx + C_1) = m + 2 + C_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (5x - x^2 + C_2) = 4 + C_2$$

$$F(x) \text{ liên tục tại } x=1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = F(1) \Leftrightarrow m + 2 + C_1 = 4 + C_2 \Leftrightarrow C_1 = 6 - m$$

$$\text{Hàm số } f(x) \text{ liên tục tại } x=1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m + 5 = 3 \Leftrightarrow m = -2 \Rightarrow C_1 = 8$$

$$\text{Vậy } F(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - 2x + 8 & \text{khi } x \geq 1 \\ 5x - x^2 + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } F(3) = 3^3 + 3^2 - 2 \cdot 3 + 8 = 38$$

Bài 4. Cho số thực a và $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \leq 0 \\ a(x-x^2) & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tính tích

phân $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

Lời giải

Ta thấy, $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 2x dx + \int_0^1 a(x-x^2) dx$

$$= (x^2) \Big|_{-1}^0 + a \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = -1 + a \left(\frac{1}{6} \right) = \frac{a}{6} - 1.$$

Bài 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^x + m & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2(x^3+1)^3 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ (với m tham số). Biết hàm số $f(x)$ liên tục trên

\mathbb{R} và tích phân $\int_{-1}^1 f(x) dx = a.e - \frac{b}{c}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$; $\frac{a}{b}$ tối giản ($e = 2,718281\dots$). Tính giá trị biểu thức

$a+b+c+m$.

Lời giải

Vì hàm số liên tục trên \mathbb{R} nên hàm số liên tục tại điểm $x=0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + m) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2(x^3+1)^3) = 1 + m \Leftrightarrow m = -1.$$

$$\text{Ta có: } \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 x^2(x^3+1)^3 dx + \int_0^1 (e^x - 1) dx = e - \frac{23}{12}.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a=1 \\ b=23 \Rightarrow a+b+c+m=35. \\ c=12 \end{cases}$$

Bài 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \leq 0 \\ x^2-2x+3 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên \mathbb{R} thỏa mãn

$F(3)=0$. Tính giá trị của $2F(-1)+3F(2)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^0 (2x+3) dx + \int_0^2 (x^2-2x+3) dx = (x^2+3x) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \Big|_0^2 = 2 + \frac{14}{3} = \frac{20}{3}.$$

$$\text{Mà } \int_{-1}^2 f(x) dx = F(x) \Big|_{-1}^2 = F(2) - F(-1) \text{ nên } F(2) - F(-1) = \frac{20}{3} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } F(x) = \int f(x) dx = \begin{cases} x^2 + 3x + C_1 & \text{khi } x \leq 0 \\ \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C_2 & \text{khi } x > 0 \end{cases}.$$

Vì $F(3)=0$ nên $9-9+9+C_2=0$ suy ra $C_2=-9$.

Vậy $F(2) = \frac{8}{3} - 2^2 + 3 \cdot 2 - 9 = -\frac{13}{3}$. Thay $F(2) = -\frac{13}{3}$ vào (1) ta được $F(-1) = -11$.

Suy ra $2F(-1) + 3F(2) = 2 \cdot (-11) + 3 \cdot \left(-\frac{13}{3}\right) = -35$.

Bài 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có nguyên hàm trên \mathbb{R} là $F(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 + 4x + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tính tích phân

$$\int_0^2 f(x) dx$$

Lời giải

Vì hàm số $F(x)$ liên tục tại $x = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = F(1) \Rightarrow 1^2 + 5 \cdot 1 + C_1 = 1^3 + 4 \cdot 1 + C_2$

$$\Rightarrow C_1 - C_2 = -1$$

Ta có: $\int_0^2 f(x) dx = F(2) - F(0) = 2^2 + 5 \cdot 2 + C_1 - (0^3 + 4 \cdot 0 + C_2)$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = 14 + C_1 - C_2 = 14 - 1 = 13$$

Bài 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 1 - 2x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Giả sử F là 1 nguyên hàm của f trên \mathbb{R} thỏa

mãn $2020F(-1) + 2021F(2) = -2022$. Tính giá trị của $F(1)$.

Lời giải

Ta có $I = 2020 \int_1^{-1} f(x) dx + 2021 \int_1^2 f(x) dx = 2020F(-1) + 2021F(2) - 4041F(1)$.

$$\Rightarrow 4041F(1) = 2020F(-1) + 2021F(2) - I.$$

$$\text{Mà } \int_1^{-1} f(x) dx = - \left[\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx \right] = - \left[\int_{-1}^0 (1 - 2x) dx + \int_0^1 (3x^2 - 2x + 1) dx \right] = -3.$$

$$\text{và } \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (3x^2 - 2x + 1) dx = 5.$$

$$\text{Suy ra } I = 2020 \cdot (-3) + 2021 \cdot 5 = 4045.$$

$$\text{Vậy } 4041F(1) = 2020F(-1) + 2021F(2) - I = -6067 \Rightarrow F(1) = -\frac{6067}{4041}.$$

Bài 9. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + 2x - 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên \mathbb{R}

thỏa mãn $F(2) = 4$. Giá trị của $F(-2) - 4F(3)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(x) = \begin{cases} 3-2x & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+2x-4 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 3x-x^2+C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3+x^2-4x+C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$

$$\text{Vì } F(2) = 4 \Rightarrow C_1 = 2 \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 3x-x^2+2 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3+x^2-4x+C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x-x^2+2) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3+x^2-4x+C_2) \Leftrightarrow 3-1+2 = 1+1-4+C_2 \Leftrightarrow C_2 = 6$$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 3x-x^2+2 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3+x^2-4x+6 & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } F(-2) - 4F(3) = 10 - 4 \cdot 2 = 2.$$

Bài 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 4x - \sqrt{4x+9} & \text{khi } x > 0 \\ 4a + \tan^2 x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$, đồng thời $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^4 f(x) dx = \frac{50}{3}$. Tính a .

Lời giải

$$\text{Ta có: } I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^4 f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (4a + \tan^2 x) dx + \int_0^4 (4x - \sqrt{4x+9}) dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (4a-1) dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (1 + \tan^2 x) dx + \int_0^4 (4x - \sqrt{4x+9}) dx$$

$$= (4a-1) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^0 + \tan x \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^0 + \left(2x^2 - \frac{\sqrt{(4x+9)^3}}{6} \right) \Big|_0^4 = (4a-1)\pi + 1 + \frac{47}{3} = \frac{50}{3} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}.$$

Bài 11. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin x + 2 & \text{khi } x \geq 0 \\ 2\cos^2 x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên \mathbb{R} thỏa

$$\text{mãn } F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \pi. \text{ Tính giá trị của } F\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } F\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= F\left(-\frac{\pi}{6}\right) - F(0) + F(0) - F\left(\frac{\pi}{6}\right) + 3F\left(\frac{\pi}{6}\right) - 3F\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2F\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2F\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2F\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 f(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx - 3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx - 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx + 2F\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 (\sin x + 2) dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2 \cos^2 x dx - 3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos^2 x dx - 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2 \cos^2 x dx + 2F\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&= -\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 (\sin x + 2) dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x + 1) dx - 3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x + 1) dx - 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos 2x + 1) dx + 2F\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&= -(-\cos x + 2x) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^0 - \left(\frac{1}{2} \sin 2x + x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - 3 \left(\frac{1}{2} \sin 2x + x\right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} - 2 \left(\frac{1}{2} \sin 2x + x\right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + 2F\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}\right) - 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{12}\right) - 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{12}\right) + 2\pi = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{13\pi}{12}
\end{aligned}$$

Bài 12. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + a & \text{khi } x \geq 0 \\ \sin 2x + \cos x - b & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục và có nguyên hàm F liên tục trên \mathbb{R}

thỏa mãn $F(2) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 10$ với a, b là tham số thực. Giá trị $\int_{-\frac{\pi}{6}}^1 f(x) dx = \frac{m}{4}$, với m là một số thực.

Khi đó $2m$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} nên $a = 1 - b$.

$$\text{Mặt khác } F(2) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 10 \Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^2 f(x) dx = 10$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (\sin 2x + \cos x - b) dx + \int_0^2 (3x^2 + a) dx = 10 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2} \cos 2x + \sin x - bx\right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 + (x^3 + ax) \Big|_0^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow 2a - \frac{b\pi}{2} = 2 \text{ suy ra } \begin{cases} a + b = 1 \\ 2a - \frac{b\pi}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \text{ hay } f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ \sin 2x + \cos x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Ta được

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^1 f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 (\sin 2x + \cos x) dx + \int_0^1 (3x^2 + 1) dx = \left(-\frac{1}{2} \cos 2x + \sin x\right) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^0 + (x^3 + x) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

Suy ra $m = 9$ vậy $2m = 18$.

DẠNG 5**TÍCH PHÂN HÀM ẨN BIẾN ĐỔI PHỨC TẠP****I. Cần nhớ các công thức đạo hàm của hàm hợp**

$$\bullet \int f'(x)dx = f(x) + C$$

$$\bullet \frac{f'(x)}{f(x)} = \left[\ln(f(x)) \right]'$$

$$\bullet -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left[\frac{1}{f(x)} \right]'$$

$$\bullet -\frac{f'(x)}{f^n(x)} = \left[\frac{1}{(n-1)[f(x)]^{n-1}} \right]'$$

$$\bullet n.f'(x).f(x) = \left[f(x)^n \right]'$$

$$\bullet \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \left[2\sqrt{f(x)} \right]'$$

$$\bullet f'(x).g(x) + f(x).g'(x) = \left[f(x).g(x) \right]'$$

$$\bullet \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)} = \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]'$$

II. Các dạng hàm ẩn thường gặp**1. Hàm ẩn có dạng: $f'(x) \cdot f(x) = p(x)$** **Phương pháp giải:**

$$f'(x) \cdot f(x) = p(x) \Leftrightarrow \left[\frac{f^2(x)}{2} \right]' = p(x) \Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \int p(x) dx$$

2. Hàm ẩn có dạng: $f'(x) = p(x) \cdot f(x)$ **Phương pháp giải:**

Chia hai vế với $f(x)$ ta được $\frac{f'(x)}{f(x)} = p(x)$

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int p(x) dx \Leftrightarrow \ln |f(x)| = \int p(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

3. Hàm ẩn có dạng: $f'(x) = p(x) \cdot [f(x)]^n$ **Phương pháp giải:**

$$f'(x) = p(x) \cdot [f(x)]^n$$

Chia hai vế với $[f(x)]^n$ ta được $\frac{f'(x)}{[f(x)]^n} = p(x)$

$$\text{Suy ra } \int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} dx = \int p(x) dx \Leftrightarrow \frac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1} = \int p(x) dx$$

4. Hàm ẩn có dạng: $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$ **Phương pháp giải:**

$$\text{Dễ dàng thấy rằng } u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$$

$$\text{Do đó } u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$$

$$\text{Suy ra } u(x)f(x) = \int h(x) dx$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

5. Hàm ẩn có dạng: $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$ (1)**Ý tưởng giải:**

- Ta cần nhân thêm một lượng $u(x)$ vào (1) để tạo thành $u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x)h(x)$ và

lúc này:

$$u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x)h(x)$$

$$\Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = u(x)h(x)$$

$$\Rightarrow \int [u(x)f(x)]' dx = \int u(x)h(x) dx$$

$$\Rightarrow u(x)f(x) = \int u(x)h(x) dx$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\int u(x)h(x) dx}{u(x)}$$

- Cách tìm $u(x)$

$$u(x) \text{ được chọn sao cho : } \begin{cases} u'(x) = A(x) \\ u(x) = B(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{A(x)}{B(x)} \Rightarrow \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int \frac{A(x)}{B(x)} dx \Rightarrow \ln|u(x)| = \int \frac{A(x)}{B(x)} dx \Rightarrow u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} dx}$$

Tóm lại phương pháp giải: $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$ (1) như sau:

+ **Bước 1:** Tìm $u(x)$: $u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} dx}$

+ **Bước 2:** Nhân $u(x)$ vào (1) $\Rightarrow f(x) = \frac{\int u(x) \cdot h(x) dx}{u(x)}$

Hai dạng đặc biệt của (1)

• $f'(x) + f(x) = h(x)$

Phương pháp giải:

Nhân hai vế với e^x ta được $e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x)$

Suy ra $e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

• $f'(x) - f(x) = h(x)$

Phương pháp giải:

Nhân hai vế với e^{-x} ta được $e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x)$

Suy ra $e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Bài 1. Cho hàm số $f(x) \neq 0$, liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(1) = \frac{1}{3}$; $x^2 \cdot f'(x) = f^2(x)$ với

$\forall x \in [1;2]$. Tính tích phân $I = \int_1^2 (2x+1)^2 f(x) dx$

Lời giải

Ta có

$$x^2 \cdot f'(x) = f^2(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{f(x)} \right)' = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\int \frac{1}{x^2} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x} + C$$

$$\text{Mà } f(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow 3 = 1 + C \Rightarrow C = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x} + 2$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{2x+1}$$

$$\text{Do đó: } I = \int_1^2 (2x+1)^2 f(x) dx = \int_1^2 (2x+1)^2 \frac{x}{2x+1} dx = \int_1^2 (2x^2 + x) dx = \frac{37}{6}$$

Bài 2. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn $x + 2x.f(x) = [f'(x)]^2$

với $\forall x \in [1;4]$. Biết $f(1) = \frac{3}{2}$, tính $I = \int_1^4 f(x) dx$

Lời giải

Do $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[1;4] \Rightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in [1;4]$

Ta có $x + 2x.f(x) = [f'(x)]^2 \Leftrightarrow x(1 + 2.f(x)) = [f'(x)]^2$, do $x \in [1;4]$ và $f'(x) \geq 0, \forall x \in [1;4]$

$$\Rightarrow f(x) > \frac{-1}{2} \text{ và}$$

$$f'(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + 2f(x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} = \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{1 + 2f(x)})' = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + 2f(x)} = \int \sqrt{x} dx$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 + 2f(x)} = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + c$$

$$\text{Vì } f(1) = \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{2}{3} + C \Leftrightarrow C = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + 2f(x)} = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2f(x) = \left(\frac{2}{3} x\sqrt{x} + \frac{4}{3} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{9} x^3 + \frac{8}{9} x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{18}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \left(\frac{2}{9} x^3 + \frac{8}{9} x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{18} \right) dx = \left(\frac{1}{18} x^4 + \frac{16}{45} x^{\frac{5}{2}} + \frac{7}{18} x \right) \Big|_1^4 = \frac{1186}{45}$$

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn điều kiện

$$x^6 [f'(x)]^3 + 27[f(x) - 1]^4 = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(1) = 0. \text{ Tính } I = \int_2^3 f(x) dx$$

Lời giải

Ta có

$$x^6 [f'(x)]^3 + 27 [f(x) - 1]^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^6 [f'(x)]^3 = -27 [f(x) - 1]^4$$

$$\Leftrightarrow \frac{[f'(x)]^3}{[f(x) - 1]^4} = -\frac{27}{x^6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{[f'(x)]^3}{[f(x) - 1]^3 [f(x) - 1]} = -\frac{27}{x^6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{(f(x) - 1)\sqrt[3]{f(x) - 1}} = -\frac{3}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{-3(f(x) - 1)\sqrt[3]{f(x) - 1}} = \frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x) - 1}} \right]' = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Do đó } \int \left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x) - 1}} \right]' dx = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{\sqrt[3]{f(x) - 1}} = -\frac{1}{x} + C.$$

$$\text{Có } f(1) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$\text{Do đó } f(x) = 1 - x^3.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (1 - x^3) dx = -\frac{61}{4}$$

Bài 4. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tính $I = \int_1^2 \frac{f(x)e^x}{x} dx$.

Lời giải

$$f(x) + f'(x) = e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow f(x)e^x + f'(x)e^x = 1.$$

$$\Leftrightarrow (f(x)e^x)' = 1$$

$$\Rightarrow f(x)e^x = \int x dx$$

$$\Leftrightarrow f(x)e^x = x + C$$

Vì $f'(0) = 2$ nên $C = 2$.

$$\Rightarrow f(x)e^x = x + 2$$

$$I = \int_1^2 \frac{f(x)e^x}{x} dx = \int_1^2 \frac{x+2}{x} dx = \int_1^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right) dx = (x + 2 \ln|x|) \Big|_1^2 = 1 + 2 \ln 2$$

Bài 5. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;4]$, thỏa mãn
$$\begin{cases} f(1) + g(1) = 4 \\ g(x) = -xf'(x) \\ f(x) = -xg'(x) \end{cases}$$
 với mọi

$x \in [1;4]$. Tính tích phân $I = \int_1^4 [f(x) + g(x)] dx$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $f(x) + g(x) = -x.f'(x) - x.g'(x)$

$$\Leftrightarrow [f(x) + x.f'(x)] + [g(x) + x.g'(x)] = 0 \Leftrightarrow [x.f(x)]' + [x.g(x)]' = 0$$

$$\Rightarrow x.f(x) + x.g(x) = C$$

$$\Rightarrow f(x) + g(x) = \frac{C}{x}$$

$$\text{Mà } f(1) + g(1) = 4 \Rightarrow C = 4$$

$$\Rightarrow f(x) + g(x) = \frac{4}{x}$$

$$\Rightarrow I = \int_1^4 [f(x) + g(x)] dx = \int_1^4 \frac{4}{x} dx = 8 \ln 2$$

Bài 6. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn

$x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1$, với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ đồng thời thỏa $f(1) = -2$. Tính $\int_1^2 f(x) dx$

Lời giải

Ta có

$$x^2 f^2(x) + 2xf(x) + 1 = xf'(x) + f(x)$$

$$\Leftrightarrow (xf(x) + 1)^2 = (xf(x) + 1)'$$

Do đó

$$\frac{(xf(x) + 1)'}{(xf(x) + 1)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \int \frac{(xf(x) + 1)'}{(xf(x) + 1)^2} dx = \int 1 dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{xf(x) + 1} = x + c$$

$$\Rightarrow xf(x) + 1 = -\frac{1}{x+c}$$

Mặt khác $f(1) = -2$ nên $-2 + 1 = -\frac{1}{1+c} \Rightarrow c = 0 \Rightarrow xf(x) + 1 = -\frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$

Vậy $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx = \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

Bài 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} , $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ và thỏa mãn hệ thức

$$f(x) \cdot f'(x) + 18x^2 = (3x^2 + x)f'(x) + (6x + 1)f(x); \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Biết } \int_0^1 (x+1)e^{f(x)} dx = ae^2 + b, (a, b \in \mathbb{Q}). \text{ Giá}$$

trị của $a - b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $f(x) \cdot f'(x) + 18x^2 = (3x^2 + x)f'(x) + (6x + 1)f(x)$

lấy nguyên hàm 2 vế ta được: $\frac{f^2(x)}{2} + 6x^3 = (3x^2 + x)f(x)$

$$\Rightarrow f^2(x) - 2(3x^2 + x)f(x) + 12x^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 6x^2 \\ f(x) = 2x \end{cases}$$

TH1: $f(x) = 6x^2$ không thỏa mãn kết quả $\int_0^1 (x+1)e^{f(x)} dx = ae^2 + b, (a, b \in \mathbb{Q})$

TH2: $f(x) = 2x \Rightarrow \int_0^1 (x+1)e^{f(x)} dx = \int_0^1 (x+1)e^{2x} dx = \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4}$. Suy ra $a = \frac{3}{4}; b = -\frac{1}{4}$

Vậy $a - b = 1$

Bài 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1; 3]$; $f(x) \neq 0, \forall x \in [1; 3]$;

$$f'(x)[1 + f(x)]^2 = (x-1)^2 [f(x)]^4 \text{ và } f(1) = -1. \text{ Biết rằng } \int_e^3 f(x) dx = a \ln 3 + b (a, b \in \mathbb{Z}), \text{ giá trị của}$$

$a + b^2$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Từ $f'(x)[1 + f(x)]^2 = (x-1)^2 [f(x)]^4$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f^4(x)} + \frac{2f'(x)}{f^3(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)} = (x-1)^2.$$

Hay $\int \left(\frac{f'(x)}{f^4(x)} + \frac{2f'(x)}{f^3(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right) dx = \int (x-1)^2 dx$

$$\Rightarrow -\left(\frac{1}{3f^3(x)} + \frac{1}{f^2(x)} + \frac{1}{f(x)} \right) = \frac{1}{3}(x-1)^3 + C \quad (2).$$

Do $f(1) = -1$ nên $C = \frac{1}{3}$.

Thay vào (2) ta được $\left(\frac{1}{f(x)} + 1\right)^3 = -(x-1)^3 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x}$.

Khi đó: $\int_e^3 \frac{-1}{x} dx = -\ln|x| \Big|_e^3 = -\ln 3 + 1 \Rightarrow a = -1, b = 1$, nên $a + b^2 = 0$.

Cách khác

Từ $f'(x)[1 + f(x)]^2 = (x-1)^2 [f(x)]^4$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)} + 1\right)^2 \cdot \frac{f'(x)}{f^2(x)} = (x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{f(x)} + 1\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{f(x)} + 1\right)' = (x-1)^2.$$

Nên $-\int \left(\frac{1}{f(x)} + 1\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{f(x)} + 1\right)' dx = \int (x-1)^2 dx$

$$\Rightarrow -\int \left(\frac{1}{f(x)} + 1\right)^2 d\left(\frac{1}{f(x)} + 1\right) = \int (x-1)^2 dx$$

Suy ra $-\frac{1}{3} \left(\frac{1}{f(x)} + 1\right)^3 = \frac{1}{3} (x-1)^3 + C$ (2).

Do $f(1) = -1$ nên $C = 0$.

Thay vào (2) ta được $\left(\frac{1}{f(x)} + 1\right)^3 = -(x-1)^3 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x}$.

Khi đó: $\int_e^3 \frac{-1}{x} dx = -\ln|x| \Big|_e^3 = -\ln 3 + 1 \Rightarrow a = -1, b = 1$, nên $a + b^2 = 0$.

Bài 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018}$,

$\forall x \in [0;1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int_0^1 f(x) dx$.

Lời giải

Ta có:

$$3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018}, \forall x \in [0;1]$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 f(x) + x^3 \cdot f'(x) \geq x^{2020} \forall x \in [0;1]$$

$$\Leftrightarrow (x^3 f(x))' \geq x^{2020}, \forall x \in [0;1]$$

$$\Rightarrow x^3 f(x) \geq \int x^{2020} dx, \forall x \in [0;1] \Rightarrow x^3 f(x) \geq \frac{x^{2021}}{2021} + C, \forall x \in [0;1].$$

Cho $x = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow x^3 f(x) \geq \frac{x^{2021}}{2021}, \forall x \in [0;1] \Rightarrow f(x) \geq \frac{x^{2018}}{2021}, \forall x \in [0;1].$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 \frac{x^{2018}}{2021} dx = \left(\frac{x^{2019}}{2019 \cdot 2021}\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2019 \cdot 2021}.$$

PHẦN B

TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\int_a^a 2024 f(x) dx = 0$

B. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

C. $\int_a^b \frac{1}{2025} f(x) dx = \frac{1}{2025} \int_a^b f(x) dx$

D. $\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$

Lời giải

Chọn D.

Lý thuyết

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a < b < c$. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$

B. $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$

C. $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx$

D. $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

Lời giải

Chọn B.

Lý thuyết

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Câu 3. Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên \mathbb{R} . Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

A. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy$

B. $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

C. $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(t) dt$

D. $\int_a^b (f(x)g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx$

Lời giải

Chọn D.

Lý thuyết

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(t)dt$$

Câu 4. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

A. $\int_{-2024}^{2024} dx = 4048.$

B. $\int_a^b f_1(x) \cdot f_2(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_a^b f_2(x) dx.$

C. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

D. Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx.$

Lời giải

Chọn B.

Câu 5. Cho hàm $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ với $a < b$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $[a; b]$.

Cho các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. $\int_a^b kf(x) dx = k[F(b) - F(a)]$

B. $\int_b^a f(x) dx = F(b) - F(a)$

C. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x = a; x = b$; đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và trục hoành được tính theo công thức $S = F(b) - F(a)$

D. $\int_a^b f(2x+3) dx = F(2x+3) \Big|_a^b$

Lời giải

Chọn A.

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx = k[F(b) - F(a)] \Big|_a^b = k[F(b) - F(a)]$$

Câu 6. Nếu $\int_0^3 f(x)dx = 3$ thì $\int_0^3 4f(x)dx$ bằng

A. 3.

B. 12.

C. 36.

D. 4.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\int_0^3 4f(x)dx = 4 \int_0^3 f(x)dx = 4 \cdot 3 = 12$.

Câu 7. Cho $\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2025}$. Tính $I = \int_0^2 2025f(x)dx$.

A. $I = 2$ B. $I = \frac{1}{2025}$ C. $I = 1$ D. $I = 2025$

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $I = \int_0^2 2025f(x)dx = 2025 \int_0^2 f(x)dx = 2025 \cdot \frac{1}{2025} = 1$

Câu 8. Nếu $\int_0^5 f(x)dx = 5$ thì $\int_5^0 5f(x)dx$ bằng

A. 1.

B. -1.

C. 25.

D. -25.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\int_5^0 5f(x)dx = -\int_0^5 5f(x)dx = -5 \int_0^5 f(x)dx = -5 \cdot 5 = -25$

Câu 9. Nếu $\int_1^4 f(x)dx = 5$ và $\int_1^4 g(x)dx = -4$ thì $\int_1^4 [f(x) - g(x)]dx$ bằng

A. -1.

B. -9.

C. 1.

D. 9.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\int_1^4 [f(x) - g(x)]dx = \int_1^4 f(x)dx - \int_1^4 g(x)dx = 5 - (-4) = 9$.

Câu 10. Nếu $\int_1^4 f(x)dx = 3$ và $\int_1^4 g(x)dx = -2$ thì $\int_1^4 (f(x) - g(x))dx$ bằng

A. -1.

B. -5.

C. 5.

D. 1.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\int_1^4 [f(x) - g(x)]dx = \int_1^4 f(x)dx - \int_1^4 g(x)dx = 3 - (-2) = 5$.

Câu 11. Cho $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_0^1 g(x)dx = 5$, khi $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)]dx$ bằng

A. -8

B. 1

C. -3

D. 12

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Có } \int_0^1 [f(x) - 2g(x)]dx = \int_0^1 f(x)dx - 2\int_0^1 g(x)dx = 2 - 2 \cdot 5 = -8.$$

Câu 12. Giả sử $\int_0^9 f(x)dx = 7$ và $\int_9^0 g(x)dx = 1$. Khi đó $I = \int_0^9 [2f(x) + 3g(x)]dx$ bằng

A. $I = 11$.B. $I = 17$.C. $I = 23$.D. $I = 8$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có: } I = 2\int_0^9 f(x)dx + 3\int_0^9 g(x)dx = 2 \cdot 7 + 3 \cdot (-1) = 11.$$

Câu 13. Nếu $\int_{-1}^4 f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^4 g(x)dx = 3$. Khi đó $\int_{-1}^4 [f(x) - g(x)]dx$ bằng

A. 5.

B. 6.

C. 1.

D. -1.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } \int_{-1}^4 [f(x) - g(x)]dx = \int_{-1}^4 f(x)dx - \int_{-1}^4 g(x)dx = 2 - 3 = -1.$$

Câu 14. Nếu $\int_0^3 f(x)dx = 6$ thì $\int_0^3 \left[\frac{1}{3}f(x) + 2 \right]dx$ bằng bao nhiêu?

A. 8.

B. 5.

C. 9.

D. 6.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \int_0^3 \left[\frac{1}{3}f(x) + 2 \right]dx = \frac{1}{3}\int_0^3 f(x)dx + \int_0^3 2dx = \frac{1}{3} \cdot 6 + 6 = 8.$$

Câu 15. Nếu $\int_0^2 f(x)dx = 5$ thì $\int_0^2 [2f(x) - 1]dx$ bằng:

A. 8.

B. 9.

C. 10.

D. 12.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \int_0^2 [2f(x) - 1]dx = 2\int_0^2 f(x)dx - \int_0^2 1dx = 2 \cdot 5 - 2 = 8$$

Câu 16. Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 3$ thì $\int_0^2 [2f(x) + 2024] dx$ bằng:

- A. 4040. **B. 4042.** C. 4044. D. 4046.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có: } \int_0^2 [2f(x) - 1] dx = 2 \int_0^2 f(x) dx - 2024 \int_0^2 dx = 2 \cdot 3 - 2024 \cdot 2 = 4042$$

Câu 17. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx = 5$.

- A. $I = 7$** **B. $I = 5 + \frac{\pi}{2}$** C. $I = 3$ D. $I = 5 + \pi$

Lời giải

Chọn A.

Ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx - 2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 5 - 2(0 - 1) = 7.$$

Câu 18. Cho $\int_1^2 [4f(x) - 2x] dx = 1$. Khi đó $\int_1^2 f(x) dx$ bằng:

- A. 1.** **B. -3.** C. 3. D. -1.

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{aligned} \int_1^2 [4f(x) - 2x] dx = 1 &\Leftrightarrow 4 \int_1^2 f(x) dx - 2 \int_1^2 x dx = 1 \Leftrightarrow 4 \int_1^2 f(x) dx - 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow 4 \int_1^2 f(x) dx = 4 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx = 1 \end{aligned}$$

Câu 19. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 1$, tích phân $\int_0^1 (2f(x) - 3x^2) dx$ bằng

- A. 1.** **B. 0.** C. 3. D. -1.

Lời giải

Chọn A.

$$\int_0^1 (2f(x) - 3x^2) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx - 3 \int_0^1 x^2 dx = 2 - 1 = 1.$$

Câu 20. Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx$.

- A. $I = \frac{17}{2}$** **B. $I = \frac{5}{2}$** C. $I = \frac{7}{2}$ D. $I = \frac{11}{2}$

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có: } I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^2 + 2 \int_{-1}^2 f(x) dx - 3 \int_{-1}^2 g(x) dx = \frac{3}{2} + 2 \cdot 2 - 3(-1) = \frac{17}{2}.$$

Câu 21. Cho $\int_0^2 f(x) dx = 3$, $\int_0^2 g(x) dx = -1$ thì $\int_0^2 [f(x) - 5g(x) + x] dx$ bằng:

- A. 12. B. 0. C. 8. D. 10

Lời giải

Chọn D.

$$\int_0^2 [f(x) - 5g(x) + x] dx = \int_0^2 f(x) dx - 5 \int_0^2 g(x) dx + \int_0^2 x dx = 3 + 5 + 2 = 10$$

Câu 22. Cho $\int_0^5 f(x) dx = -2$. Tích phân $\int_0^5 [4f(x) - 3x^2] dx$ bằng

- A. -140. B. -130. C. -120. D. -133.

Lời giải

Chọn D.

$$\int_0^5 [4f(x) - 3x^2] dx = 4 \int_0^5 f(x) dx - \int_0^5 3x^2 dx = -8 - x^3 \Big|_0^5 = -8 - 125 = -133.$$

Câu 23. Cho $\int_1^2 [4f(x) - 2x] dx = 1$. Khi đó $\int_1^2 f(x) dx$ bằng:

- A. 1. B. -3. C. 3. D. -1.

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{aligned} \int_1^2 [4f(x) - 2x] dx = 1 &\Leftrightarrow 4 \int_1^2 f(x) dx - 2 \int_1^2 x dx = 1 \Leftrightarrow 4 \int_1^2 f(x) dx - 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow 4 \int_1^2 f(x) dx = 4 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx = 1 \end{aligned}$$

Câu 24. Cho $\int_{-2}^2 f(x) dx = 1$, $\int_{-2}^4 f(t) dt = -4$. Tính $\int_2^4 f(y) dy$.

- A. $I = 5$. B. $I = -3$. C. $I = 3$. D. $I = -5$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } \int_{-2}^4 f(t) dt = \int_{-2}^4 f(x) dx, \int_2^4 f(y) dy = \int_2^4 f(x) dx.$$

$$\text{Khi đó: } \int_{-2}^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = \int_{-2}^4 f(x) dx.$$

$$\Rightarrow \int_2^4 f(x) dx = \int_{-2}^4 f(x) dx - \int_{-2}^2 f(x) dx = -4 - 1 = -5.$$

$$\text{Vậy } \int_2^4 f(y) dy = -5.$$

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có $\int_0^2 f(x) dx = 9$; $\int_2^4 f(x) dx = 4$. Tính $I = \int_0^4 f(x) dx$.

A. $I = 5$.

B. $I = 36$.

C. $I = \frac{9}{4}$.

D. $I = 13$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } I = \int_0^4 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = 9 + 4 = 13.$$

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_0^4 f(x) dx = 10$, $\int_3^4 f(x) dx = 4$. Tích phân $\int_0^3 f(x) dx$ bằng

A. 4.

B. 7.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Theo tính chất của tích phân, ta có: } \int_0^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx = \int_0^4 f(x) dx.$$

$$\text{Suy ra: } \int_0^3 f(x) dx = \int_0^4 f(x) dx - \int_3^4 f(x) dx = 10 - 4 = 6.$$

$$\text{Vậy } \int_0^3 f(x) dx = 6.$$

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\int_0^{10} f(x) dx = 7$; $\int_2^6 f(x) dx = 3$. Tính

$$P = \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx.$$

A. $P = 4$

B. $P = 10$

C. $P = 7$

D. $P = -4$

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có: } \int_0^{10} f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx.$$

$$\Rightarrow 7 = P + 3 \Rightarrow P = 4.$$

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 6]$ thỏa mãn $\int_0^6 f(x)dx = 10$ và $\int_2^4 f(x)dx = 6$. Tính giá

trị của biểu thức $P = \int_0^2 f(x)dx + \int_4^6 f(x)dx$.

A. $P = 4$.

B. $P = 16$.

C. $P = 8$.

D. $P = 10$.

Lời giải

Chọn A.

Câu 29. Tính tích phân $I = \int_0^2 (2x+1)dx$

A. $I = 5$.

B. $I = 6$.

C. $I = 2$.

D. $I = 4$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $I = \int_0^2 (2x+1)dx = (x^2 + x)\Big|_0^2 = 4 + 2 = 6$.

Câu 30. Tích phân $\int_0^1 (3x+1)(x+3)dx$ bằng

A. 12.

B. 9.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\int_0^1 (3x+1)(x+3)dx = \int_0^1 (3x^2 + 10x + 3)dx = (x^3 + 5x^2 + 3x)\Big|_0^1 = 9$.

Vậy: $\int_0^1 (3x+1)(x+3)dx = 9$.

Câu 31. Tính tích phân $I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$

A. $I = \frac{1}{e}$

B. $I = \frac{1}{e} + 1$

C. $I = 1$

D. $I = e$

Lời giải

Chọn A.

$I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \left(\ln|x| + \frac{1}{x}\right)\Big|_1^e = \frac{1}{e}$.

Câu 32. Biết $\int_1^3 \frac{x+2}{x}dx = a + b \ln c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}, c < 9$. Tính tổng $S = a + b + c$.

A. $S = 7$.

B. $S = 5$.

C. $S = 8$.

D. $S = 6$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = \int_1^3 \left(1 + \frac{2}{x}\right) dx = \int_1^3 dx + \int_1^3 \frac{2}{x} dx = 2 + 2 \ln|x| \Big|_1^3 = 2 + 2 \ln 3.$$

Do đó $a = 2, b = 2, c = 3 \Rightarrow S = 7$.

Câu 33. Kết quả tích phân $I = \int_0^1 5^x dx$ bằng

A. $I = \frac{5}{\ln 5}$.

B. $I = 4 \ln 5$.

C. $I = 5 \ln 5$.

D. $I = \frac{4}{\ln 5}$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } I = \int_0^1 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} \Big|_0^1 = \frac{5^1}{\ln 5} - \frac{5^0}{\ln 5} = \frac{4}{\ln 5}.$$

Câu 34. Tích phân $\int_0^1 e^{3x} dx$ bằng

A. $e^3 + \frac{1}{2}$.

B. $e - 1$.

C. $\frac{e^3 - 1}{3}$.

D. $e^3 - 1$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \int_0^1 e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 e^{3x} d(3x) = \frac{1}{3} e^{3x} \Big|_0^1 = \frac{e^3 - 1}{3}.$$

Câu 35. Tích phân $\int_0^1 e^{3x+1} dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}(e^4 + e)$

B. $e^3 - e$

C. $\frac{1}{3}(e^4 - e)$

D. $e^4 - e$

Lời giải

Chọn C.

$$\int_0^1 e^{3x+1} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 e^{3x+1} d(3x+1) = \frac{1}{3} e^{3x+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(e^4 - e).$$

Câu 36. Biết $\int_0^1 \frac{e^x}{2^x} dx = \frac{e}{a} + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = a + b$ là

A. $P = -3$

B. $P = 1$

C. $P = -1$

D. $P = 3$

Lời giải

Chọn B.

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{2^x} dx = \int_0^1 \left(\frac{e}{2}\right)^x dx = \left[\left(\frac{e}{2}\right)^x\right]_0^1 = \frac{e}{2} - 1$$

Câu 37. Giá trị của $I = \int_0^1 \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} dx$ bằng

- A. $I = 2(e+3)0$. B. $I = \frac{1}{2}(e+3)$. C. $I = e-3$. D. $I = 2(e-3)$.

Lời giải

Chọn C.

$$I = \int_0^1 \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} dx = \int_0^1 \frac{(e^x - 2)(e^x + 2)}{e^x + 2} dx = \int_0^1 (e^x - 2) dx = (e^x - 2x)_0^1 = e - 3$$

Câu 38. Biết $\int_1^2 e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x}\right) dx = e^2 + a.e + b \ln 2$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = \frac{a+b}{a.b}$ là

- A. $P = -3$ B. $P = 1$ C. $P = -1$ D. $P = -2$

Lời giải

Chọn D.

$$I = \int_1^2 e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x}\right) dx = \int_1^2 \left(e^x - \frac{1}{x}\right) dx = (e^x - \ln|x|)_1^2 = e^2 - e - \ln 2$$

Câu 39. Biết $I = \int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx = \frac{1}{a} + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó giá trị của $P = \frac{a+b}{a.b}$ là

- A. $P = e^4 - 1$ B. $P = \frac{e^4 - 1}{e^2}$ C. $P = \frac{e^4 - 1}{e^4}$ D. $P = \frac{1 - e^4}{e^4}$

Lời giải

Chọn D.

$$I = \int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx = \int_0^1 (e^{x-1} - e^{-4x} + e^{-x}) dx = \left(e^{x-1} - \frac{e^{-4x}}{-4} + \frac{e^{-x}}{-1} \right) \Big|_0^1 = \frac{1 - e^4}{e^4} = \frac{1}{e^4} - 1$$

$$\Rightarrow P = \frac{a+b}{a.b} = \frac{1 - e^4}{e^4}$$

Câu 40. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng

- A. 0. B. 1. C. -1. D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

$$+ \text{Tính được } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Câu 41. Biết $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x + 3 \cos x + x) dx = \frac{a + b\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi^2}{c}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = a + 2b + 3c$ là

A. $P = 45$

B. $P = 60$

C. $P = 65$

D. $P = 70$

Lời giải

Chọn B.

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x + 3 \cos x + x) dx = \left(-2 \cos x + 3 \sin x + \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12 - 3\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi^2}{18}$$

$$\Rightarrow P = a + 2b + 3c = 60$$

Câu 42. Biết $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3 \tan^2 x dx = a\sqrt{3} + b + \frac{\pi}{c}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = a + b + c$ là

A. $P = 6$

B. $P = -4$

C. $P = 4$

D. $P = -6$

Lời giải

Chọn B.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3 \tan^2 x dx = 3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = 3 \left(\tan x - x \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 3\sqrt{3} - 3 - \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow P = a + b + c = 3 - 3 - 4 = -4$$

Câu 43. Biết $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (2 \cot^2 x + 5) dx = \frac{\pi}{a} + b\sqrt{3} + c$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = a + b + c$ là

A. $P = 6$

B. $P = -4$

C. $P = 4$

D. $P = -6$

Lời giải

Chọn C.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (2 \cot^2 x + 5) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(2 \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) + 5 \right) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(3 - \frac{2}{\sin^2 x} \right) dx = (3x - \cot x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \sqrt{3} - 1$$

Câu 44. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} dx = \frac{\pi}{c} + \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị của

$P = a + b + c$ là

A. $P = 17$

B. $P = 16$

C. $P = 32$

D. $P = 49$

Lời giải

Chọn D.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos x}{2} \right) dx = \frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{4} \sin x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{32}$$

$$\Rightarrow P = a + b + c = 1 + 32 + 16 = 49$$

Câu 45. Giá trị của $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ bằng

- A. $\sqrt{3}$. B. $4\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2 x} dx = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} |\sin x| dx$$

- Do : $x \in [0; \pi] \rightarrow \sin x > 0 \Rightarrow |\sin x| = \sin x$; $x \in [\pi; 2\pi] \rightarrow \sin x < 0 \Rightarrow |\sin x| = -\sin x$

$$\text{Vậy : } I = \sqrt{2} \left(\int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x dx \right) = \sqrt{2} \left(-\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) = \sqrt{2} (1 + 1 + 1 + 1) = 4\sqrt{2}$$

Câu 46. Tính tích phân $I = \int_0^2 |x - 2| dx$.

- A. $I = -2$. B. $I = 4$. C. $I = 2$. D. $I = 0$.

Lời giải

Chọn C.

$$I = \int_0^2 |x - 2| dx.$$

+ Do : $x \in [0; 2] \Rightarrow x - 2 < 0, \Leftrightarrow |x - 2| = 2 - x$

$$+ \text{ Vậy : } I = \int_0^2 (2 - x) dx = \left(2x - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^2 = 4 - 2 = 2$$

Câu 47. Tính $\int_{-1}^2 |2x + 1| dx$

- A. $\frac{1}{2}$. B. 2. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{13}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } \int_{-1}^2 |2x + 1| dx$$

$$= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} |2x + 1| dx + \int_{-\frac{1}{2}}^2 |2x + 1| dx = -\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (2x + 1) dx + \int_{-\frac{1}{2}}^2 (2x + 1) dx = (x^2 + x) \Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}} + (x^2 + x) \Big|_{-\frac{1}{2}}^2 = \frac{13}{2}$$

Câu 52. Biết $I = \int_{-1}^3 |x^2 - 3x + 2| dx = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $T = a - b$

A. 12.

B. 14.

C. 11.

D. 4.

Lời giải

Chọn B.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } I &= \int_{-1}^3 |x^2 - 3x + 2| dx = \int_{-1}^1 (x^2 - 3x + 2) dx - \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx + \int_2^3 (x^2 - 3x + 2) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-1}^1 - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right) \Big|_2^3 \\ &= \frac{14}{3} - \left(-\frac{1}{6} \right) + \frac{5}{6} = \frac{17}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } T = a - b = 17 - 3 = 14$$

Câu 53. Tính tích phân $I = \int_0^2 |x^3 - x| dx$.

A. $I = -\frac{1}{2}$.B. $I = 5$.C. $I = \frac{1}{2}$.D. $I = \frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

$$I = \int_0^2 |x^3 - x| dx.$$

$$+ \text{ Do : } f(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -1; x = 1$$

$$\Rightarrow f(x) > 0 \forall x \in [1; 2]; f(x) < 0 \forall x \in [0; 1]$$

$$+ \text{ Vậy : } I = \int_0^1 (x - x^3) dx + \int_1^2 (x^3 - x) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{2}$$

Câu 54. Tính tích phân $I = \int_0^2 |x^2 + 2x - 3| dx$.

A. $I = -2$.B. $I = 4$.C. $I = 5$.D. $I = -4$.

Lời giải

Chọn C.

$$I = \int_0^2 |x^2 + 2x - 3| dx.$$

$$+ \forall x: f(x) = x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x = 1, x = -3 \Rightarrow f(x) > 0 \forall x \in [1; 2]; f(x) < 0 \forall x \in [0; 1]$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 -f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 (3 - 2x - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 + 2x - 3) dx$$

$$= \left(3x - x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x \right) \Big|_1^2 = \left(3 - 1 - \frac{1}{3} \right) + \left[\left(\frac{8}{3} + 4 - 6 \right) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3 \right) \right] = 5$$

Câu 55. Cho tích phân $I = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx = a\sqrt{3} + b\sqrt{2}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $P = a + b$.

A. $P = \frac{20}{3}$

B. $P = \frac{80}{3}$

C. $P = \frac{17}{3}$

D. $P = \frac{40}{3}$

Lời giải

Chọn A.

$$I = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx.$$

Tính $I = \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx$

- Vì: $f(x) = x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = -1; x = 1 \Rightarrow f(x) > 0 \forall x \in [-3; -1] \cup [1; 3]; f(x) < 0 \forall x \in [-1; 1]$

$$\begin{aligned} - \text{Vậy: } I &= \int_{-3}^{-1} (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx + \int_1^3 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \Big|_{-3}^{-1} + \left(x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \Big|_1^3 \\ &= \frac{20}{3} + \frac{4}{3} + \frac{16}{3} = \frac{40}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx = \frac{40}{3}\sqrt{3} + \frac{40}{3}\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{40}{3}; b = \frac{40}{3} \Rightarrow P = a + b = \frac{20}{3}$$

Câu 56. Tính tích phân $I = \int_{-2}^5 (|x + 2| - |x - 2|) dx$.

A. $I = 38$.

B. $I = 37$.

C. $I = 44$.

D. $I = 40$.

Lời giải

Chọn B.

$$I = \int_{-2}^5 (|x + 2| - |x - 2|) dx.$$

- Lập bảng xét dấu: $f(x) = 4 \forall x \in [-2; 2]; f(x) = 2x \forall x \in [2; 5]$

$$- \text{Vậy: } \int_{-2}^5 f(x) dx = \int_{-2}^2 4 dx + \int_2^5 2x dx = 4x \Big|_{-2}^2 + x^2 \Big|_2^5 = 16 + 21 = 37$$

Câu 57. Biết $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} |\sin x| dx = a - \sqrt{b}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Khi đó $a + 4b$ bằng

A. 5.

B. 8.

C. 10.

D. 7.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có: } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} |\sin x| dx = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x dx = (\cos x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 - (\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\text{Suy ra: } a = 2, b = \frac{3}{4} \text{ nên } a + 4b = 5$$

Câu 58. Cho tích phân $I = \int_0^3 |2^x - 4| dx = a + \frac{b}{c \ln 2}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính

$$P = a^2 + b^2 + c^2.$$

A. $P = 15$

B. $P = 10$

C. $P = 5$

D. $P = 18$

Lời giải**Chọn D.**

$$I = \int_0^3 |2^x - 4| dx$$

- Nhận xét : $2^x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 2 \Rightarrow f(x) > 0 \forall x \in [2; 3]; f(x) < 0 \forall x \in [0; 2]$

$$\text{- Vậy : } I = \int_0^2 (4 - 2^x) dx + \int_2^3 (2^x - 4) dx = \left(4x - \frac{1}{\ln 2} 2^x \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{1}{\ln 2} 2^x - 4x \right) \Big|_2^3$$

$$= \left(8 - \frac{3}{\ln 2} \right) + \left(\frac{4}{\ln 2} - 4 \right) = 4 + \frac{1}{\ln 2}$$

$$\Rightarrow P = a^2 + b^2 + c^2 = 4^2 + 1^2 + 1^2 = 18$$

Câu 59. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx$.

A. $\frac{1}{\ln 2}$.

B. $\ln 2$.

C. $2 \ln 2$.

D. $\frac{2}{\ln 2}$.

Lời giải**Chọn A.**

$$I = \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx \text{ ta có } 2^x - 2^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx = \int_{-1}^0 |2^x - 2^{-x}| dx + \int_0^1 |2^x - 2^{-x}| dx = \left| \int_{-1}^0 (2^x - 2^{-x}) dx \right| + \left| \int_0^1 (2^x - 2^{-x}) dx \right|$$

$$= \left| \left(\frac{2^x + 2^{-x}}{\ln 2} \right) \Big|_{-1}^0 \right| + \left| \left(\frac{2^x + 2^{-x}}{\ln 2} \right) \Big|_0^1 \right| = \frac{1}{\ln 2}.$$

Câu 60. Tính tích phân $I = \int_{-1}^2 (|x| - |x-1|) dx$.

A. $I = 0$.

B. $I = 2$.

C. $I = -2$.

D. $I = -3$.

Lời giải

Chọn A.

$$I = \int_{-1}^2 (|x| - |x-1|) dx$$

Cách 1.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^2 (|x| - |x-1|) dx = \int_{-1}^2 |x| dx - \int_{-1}^2 |x-1| dx = -\int_{-1}^0 x dx + \int_0^2 x dx + \int_{-1}^1 (x-1) dx - \int_1^2 (x-1) dx \\ &= -\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 + \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_{-1}^1 - \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^2 = 0. \end{aligned}$$

Cách 2.

Bảng xét dấu

x	-1	0	1	2
x	-	0	+	+
$x-1$	-	-	0	+

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^0 (-x + x - 1) dx + \int_0^1 (x + x - 1) dx + \int_1^2 (x - x + 1) dx = -x \Big|_{-1}^0 + (x^2 - x) \Big|_0^1 + x \Big|_1^2 = 0$$

Câu 61. Cho a là số thực dương, tính tích phân $I = \int_{-1}^a |x| dx$ theo a .

- A.** $I = \frac{a^2 + 1}{2}$. **B.** $I = \frac{a^2 + 2}{2}$. **C.** $I = \frac{-2a^2 + 1}{2}$. **D.** $I = \frac{|3a^2 - 1|}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Vì $a > 0$ nên $I = -\int_{-1}^0 x dx + \int_0^a x dx = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{1+a^2}{2}$

Câu 62. Cho số thực $m > 1$ thỏa mãn $\int_1^m |2mx - 1| dx = 1$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A.** $m \in (4; 6)$. **B.** $m \in (2; 4)$. **C.** $m \in (3; 5)$. **D.** $m \in (1; 3)$.

Lời giải

Chọn D.

Do $m > 1 \Rightarrow 2m > 2 \Rightarrow \frac{1}{2m} < 1$. Do đó với $m > 1, x \in [1; m] \Rightarrow 2mx - 1 > 0$.

Vậy $\int_1^m |2mx - 1| dx = \int_1^m (2mx - 1) dx = (mx^2 - x) \Big|_1^m = m^3 - m - m + 1 = m^3 - 2m + 1$.

Từ đó theo bài ra ta có $m^3 - 2m + 1 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm\sqrt{2} \end{cases}$. Do $m > 1$ vậy $m = \sqrt{2}$.

Câu 63. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\int_{-1}^1 |x|^3 dx = \left| \int_{-1}^1 x^3 dx \right|$.

B. $\int_{-1}^{2018} |x^4 - x^2 + 1| dx = \int_{-1}^{2018} (x^4 - x^2 + 1) dx$.

C. $\int_{-2}^3 |e^x(x+1)| dx = \int_{-2}^3 e^x(x+1) dx$.

D. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Lời giải**Chọn B.**

Ta có: $x^4 - x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó: $\int_{-1}^{2018} |x^4 - x^2 + 1| dx = \int_{-1}^{2018} (x^4 - x^2 + 1) dx$.

Câu 64. Tính tích phân $I = \int_1^4 \sqrt{x^2 - 6x + 9} dx$.

A. $I = \frac{5}{2}$.

B. $I = -\frac{1}{2}$.

C. $I = -2$.

D. $I = \frac{1}{2}$.

Lời giải**Chọn A.**

$$I = \int_1^4 \sqrt{x^2 - 6x + 9} dx = \int_1^4 |x - 3| dx$$

- Ta có: $x - 3 > 0 \forall x \in [3; 4]; x - 3 < 0 \forall x \in [1; 3]$

- Vậy: $I = \int_1^3 (3 - x) dx + \int_3^4 (x - 3) dx = \left(3x - \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_1^3 + \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x\right) \Big|_3^4 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

Câu 65. Nếu $F'(x) = \frac{1}{2x}$ và $F(1) = 1$ thì giá trị của $F(4)$ bằng

A. $\ln 2$.

B. $1 + \ln 2$

C. $1 + \frac{1}{2} \ln 2$

D. $\frac{1}{2} \ln 2$

Lời giải**Chọn B.**

Ta có: $\int_1^4 F'(x) dx = \int_1^4 \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \ln |x| \Big|_1^4 = \ln 2$.

Lại có: $\int_1^4 F'(x) dx = F(x) \Big|_1^4 = F(4) - F(1)$.

Suy ra $F(4) - F(1) = \ln 2$.

Do đó $F(4) = F(1) + \ln 2 = 1 + \ln 2$.

Câu 66. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{2}{x}$. Biết $F(-1) = 0$. Tính $F(2)$ kết quả là.

A. $2 \ln 2 + 1$.

B. $\ln 2$.

C. $2 \ln 3 + 2$.

D. $2 \ln 2$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } \int_{-1}^2 f(x)dx = F(x)\Big|_{-1}^2 = F(2) - F(-1)$$

$$\int_{-1}^2 f(x)dx = \int_{-1}^2 \frac{2}{x} = 2 \ln|x|\Big|_{-1}^2 = 2 \ln 2 - 2 \ln 1 = 2 \ln 2$$

$$\Rightarrow F(2) - F(-1) = 2 \ln 2$$

$$\Leftrightarrow F(2) = 2 \ln 2 \quad (\text{do } F(-1) = 0).$$

Câu 67. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $[-1; 2]$, $f(-1) = 8$; $f(2) = -1$. Tích phân $\int_{-1}^2 f'(x)dx$

bằng

A. 1.

B. 7.

C. -9.

D. 9.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } x \int_{-1}^2 f'(x)dx = f(x)\Big|_{-1}^2 = f(2) - f(-1) = -1 - 8 = -9$$

Câu 68. Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Giá trị của $\int_1^3 [1 + f(x)]dx$ bằng

A. 10.

B. 8.

C. $\frac{26}{3}$.

D. $\frac{32}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \int_1^3 [1 + f(x)]dx = (x + F(x))\Big|_1^3 = (x + x^2)\Big|_1^3 = 12 - 2 = 10.$$

Câu 69. Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Giá trị của $\int_1^3 (1 + f(x))dx$ bằng

A. 20.

B. 22.

C. 26.

D. 28.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } \int_1^3 [1 + f(x)]dx = [x + F(x)]\Big|_1^3 = [x + x^3]\Big|_1^3 = 30 - 2 = 28.$$

Câu 70. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 8\sqrt{2} - 16}{16}$

B. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 2\sqrt{2} - 4}{16}$

C. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 8\sqrt{2}}{16}$

D. $\frac{\pi^2 + 16\pi - 16}{16}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $f(x) = \int \left(2\sin^2 \frac{x}{2} + 1 \right) dx = \int (2 - \cos x) dx = 2x - \sin x + C$.

Vì $f(0) = 4 \Rightarrow C = 4$

Hay $f(x) = 2x - \sin x + 4$.

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x - \sin x + 4) dx$

$$= \left(x^2 + \cos x + 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi - 1 = \frac{\pi^2 + 16\pi + 8\sqrt{2} - 16}{16}.$$

Câu 71. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2\cos^2 \frac{x}{2} + 3, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng?

A. $\frac{\pi^2 + 8\pi - 8 - \sqrt{2}}{8}$.

B. $\frac{\pi^2 + 8\pi - 8 - 4\sqrt{2}}{8}$.

C. $\frac{\pi^2 + 6\pi + 8}{8}$.

D. $\frac{\pi^2 + 8\pi - 4\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $f(x) = \int f'(x) dx = \int (2\cos^2 \frac{x}{2} + 3) dx = \int (2 \cdot \frac{1 + \cos x}{2} + 3) dx = \int (\cos x + 4) dx = \sin x + 4x + C$

$$\Rightarrow f(x) = \sin x + 4x + C$$

do $f(0) = 4 \Rightarrow C = 4$.

Vậy $f(x) = \sin x + 4x + 4$ nên $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + 4x + 4) dx$

$$= (-\cos x + 2x^2 + 4x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2 + 8\pi - 8 - 4\sqrt{2}}{8}.$$

Câu 72. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + x + 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biết tích phân $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{a}{b} + \frac{e^2}{c}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$

là phân số tối giản). Giá trị $a + b + c$ bằng

A. 7.

B. 8.

C. 9.

D. 10.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I = \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 (x^2 + x + 2)dx + \int_0^1 e^{2x}dx = \frac{4}{3} + \frac{e^2}{2}$.

Vậy $a + b + c = 9$.

Câu 73. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x(1+x^2) & \text{khi } x \geq 3 \\ \frac{1}{x-4} & \text{khi } x < 3 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_2^4 f(t)dt$ bằng:

- A. $\frac{40}{3} - \ln 2$. B. $\frac{95}{6} + \ln 2$. C. $\frac{189}{4} + \ln 2$. D. $\frac{189}{4} - \ln 2$.

Lời giải

Chọn D.

$I = \int_2^4 f(t)dt = \int_2^3 f(x)dx + \int_3^4 x(1+x^2)dx = \int_2^3 \frac{1}{x-4}dx + \int_3^4 x(1+x^2)dx = \frac{189}{4} - \ln 2$.

Câu 74. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^2 f(x)dx$

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{7}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 3x^2dx + \int_1^2 (4-x)dx = \frac{7}{2}$.

Câu 75. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 4-x & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 3x^2 & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_0^2 f(x)dx$.

- A. $\frac{21}{2}$. B. $\frac{7}{2}$. C. 7. D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $I = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 (4-x)dx + \int_1^2 3x^2dx = \frac{21}{2}$

Câu 76. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} , thỏa mãn $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \geq 0 \\ x^3 + x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Tính

$\int_0^2 f(x-1)dx$.

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{5}{4}$. D. $\frac{11}{4}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \int_0^2 f(x-1)dx &= \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 (x^3 + x + 1)dx + \int_0^1 2xdx \\ &= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-1}^0 + x^2 \Big|_0^1 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 + 1 = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Câu 77. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{khi } x \geq \frac{1}{2} \\ 2x + \frac{7}{4} & \text{khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x) \sin 2x dx$.

A. $\frac{17}{24}$. B. $-\frac{37}{24}$. C. $\frac{24}{37}$. D. $\frac{37}{24}$.

Lời giải

Chọn D.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x) \sin 2x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x) \cdot 2 \sin x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cdot f(\sin^2 x) d(\sin x) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x) d(\sin^2 x) = \int_0^1 f(u) du = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(2x + \frac{7}{4} \right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x^2 - x + 1) dx = \frac{37}{24}. \end{aligned}$$

Câu 78. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{khi } -3 \leq x \leq -1 \\ x^2 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$ thì $\int_{-3}^3 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{31}{3}$. B. $\frac{28}{3}$. C. $\frac{22}{3}$. D. $\frac{26}{3}$.

Lời giải

Chọn B.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_{-3}^3 f(x) dx &= \int_{-3}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-3}^{-1} (x + 2) dx + \int_{-1}^3 x^2 dx = 0 + \frac{28}{3} = \frac{28}{3}. \\ \text{Vậy } \int_{-3}^3 f(x) dx &= \frac{28}{3}. \end{aligned}$$

Câu 79. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x & \text{khi } x < 0 \\ \sin x & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_{-1}^{\pi} f(x) dx$

A. $\frac{13}{6}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $-\frac{5}{6}$. D. $\frac{19}{6}$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } I = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_{-1}^0 (2x^2 - x) dx + \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{7}{6} + 2 = \frac{19}{6}$$

Câu 80. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 4x^3 + 2x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 4x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên \mathbb{R} thỏa

mãn $F(1) = 2$. Giá trị của $2F(-1) + 3F(2)$ bằng.

A. 76.

B. 19.

C. 63.

D. 21.

Lời giải

Chọn C.

Vì F là nguyên hàm của f trên \mathbb{R} nên ta có:

$$\begin{cases} \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (4x+1) dx = F(0) - F(-1) = -1 \\ \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (4x^3 + 2x + 1) dx = F(1) - F(0) = 3 \\ \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (4x^3 + 2x + 1) dx = F(2) - F(1) = 19 \\ F(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(0) - F(-1) = -1 \\ F(0) = -1 \\ F(2) = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(-1) = 0 \\ F(2) = 21 \end{cases}$$

Vậy $2F(-1) + 3F(2) = 63$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 81. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_0^3 f(x) dx = 2025$

a) $\int_0^3 2f(x) dx = 4050.$

b) Biết $\int_0^6 f(x) dx = 2024$, khi đó $\int_3^6 f(x) dx = 1$

c) $\int_0^3 [f(x) - 4x^3 + 2x] dx = 1853$

d) $\int_3^0 \left[3^{2x+1} - \frac{1}{2025} f(x) \right] dx = 1191$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	SAI	SAI	SAI

a) Ta có: $\int_0^3 2f(x) dx = 2 \int_0^3 f(x) dx = 2.2025 = 4050.$

b) $\int_0^6 f(x) dx = 2024 \Leftrightarrow \int_0^3 f(x) dx + \int_3^6 f(x) dx = 2024 \Leftrightarrow 2025 + \int_3^6 f(x) dx = 2024 \Leftrightarrow \int_3^6 f(x) dx = -1$

c) $\int_0^3 [f(x) - 4x^3 + 2x] dx = \int_0^3 f(x) dx - \int_0^3 4x^3 dx + \int_0^3 2x dx = 2025 - x^4 \Big|_0^3 + x^2 \Big|_0^3 = 1953$

d) $\int_3^0 \left[3^{2x+1} - \frac{1}{2025} f(x) \right] dx = \int_3^0 3^{2x+1} dx - \frac{1}{2025} \int_3^0 f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 3^{2x+1} \Big|_3^0 - \frac{1}{2025} (-2025) = 1091$

Câu 82. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_1^4 f(x) dx = 1$

a) $\int_4^1 \frac{1}{2} f(x) dx = \frac{1}{2}.$

b) $\int_1^4 \left[2f(x) - \frac{3}{x} \right] dx = 2 + 3 \ln 2$

c) Biết $\int_4^1 \left[f(x) - \frac{2}{x^3} + \sqrt[4]{x^3} \right] dx = \frac{a+b\sqrt{2}}{28}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a+b=119.$

d) **Biết** $\int_{-2}^4 [f(x) - e^x] dx = \frac{1}{e^2}$, khi đó $\int_{-2}^1 f(x) dx = e^4 - 1$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	SAI	SAI	ĐÚNG

$$a) \int_4^1 \frac{1}{2} f(x) dx = -\frac{1}{2} \int_1^4 f(x) dx = -\frac{1}{2}.$$

$$b) \int_1^4 \left[2f(x) - \frac{3}{x} \right] dx = 2 \int_1^4 f(x) dx + 3 \int_1^4 \frac{1}{x} dx = 2 \cdot 1 + 3 \cdot \ln|x| \Big|_1^4 = 2 + 6 \ln 2$$

$$c) \int_4^1 \left[f(x) - \frac{2}{x^3} + \sqrt[4]{x^3} \right] dx = \int_4^1 f(x) dx + 2 \int_4^1 \frac{1}{x^3} dx + \int_4^1 \sqrt[4]{x^3} dx = -1 + \frac{1}{x^2} \Big|_4^1 + \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} \sqrt[4]{x^3} \Big|_4^1 = \frac{9 - 128\sqrt{2}}{28}$$

$$\Rightarrow a = 9; b = -128 \Rightarrow a + b = -119$$

d)

$$\int_{-2}^4 [f(x) - e^x] dx = \frac{1}{e^2}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-2}^4 f(x) dx - \int_{-2}^4 e^x dx = \frac{1}{e^2}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx - \int_{-2}^4 e^x dx = \frac{1}{e^2}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-2}^1 f(x) dx + 1 - e^x \Big|_{-2}^4 = \frac{1}{e^2}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-2}^1 f(x) dx + 1 - e^4 + \frac{1}{e^2} = \frac{1}{e^2}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-2}^1 f(x) dx = e^4 - 1$$

Câu 83. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{\pi}{4}$

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 1] dx = \frac{3\pi}{4}$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2 \sin x - \frac{1}{2} f(x) \right] dx = \frac{16 - \pi}{8}$$

$$c) \text{Biết } \int_{\frac{\pi}{2}}^0 2\pi g(x) dx = 1, \text{ khi đó } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) - 3g(x) - \cos^2 \frac{x}{2} \right] dx = \frac{3}{2\pi}$$

$$d) \text{Biết } \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2f(x) dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{và} \quad \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \left[\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} - 2f(x) \right] dx = \frac{\sqrt{2} + a + b\pi}{c} \quad \text{với } a, b, c \in \mathbb{Z}. \text{ Khi đó}$$

$$a + 2024b + c = 2022.$$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x)+1] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{4} + x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2\sin x - \frac{1}{2} f(x) \right] dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = -2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{16+\pi}{8}$$

$$c) \text{Ta có } \int_{\frac{\pi}{2}}^0 2\pi g(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx = -\frac{1}{2\pi}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) - 3g(x) - \cos^2 \frac{x}{2} \right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx - 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \frac{x}{2} dx = \frac{\pi}{4} - 3 \left(-\frac{1}{2\pi} \right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos x}{2} dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2\pi} - \frac{1}{2} (x + \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2\pi}$$

$$d) \text{Ta có: } \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2f(x) dx = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 2f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2f(x) dx = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(x) dx + 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(x) dx = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Khi đó: } \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \left[\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} - 2f(x) \right] dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} dx - 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \sin x dx - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} \cos x \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^0 - \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-2-\pi}{4}$$

$$\Rightarrow a = -2; b = -1; c = 4 \Rightarrow a + 2024b + c = -2022$$

Câu 84. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_0^1 f(x) dx = -1, \int_0^3 f(x) dx = 2025$.

$$a) \int_1^0 f(x) dx = 1$$

$$b) \int_1^3 f(x) dx = 2026$$

$$c) \int_1^3 [f(x) - e^{-2x+1}] dx = \frac{1}{a.e^5} + \frac{1}{b.e} + c, \text{ với } a, b, c \in \mathbb{Z}. \text{ Khi đó } a + b + c = 2025.$$

$$d) \text{Biết } \int_3^4 f(x) dx = 2, \text{ khi đó } \int_1^4 [f(x) - 2^{x+1}] dx = 2000$$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

a) $\int_1^0 f(x) dx = -\int_0^1 f(x) dx = 1$

b)

$$\int_0^3 f(x) dx = 2025$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 2025$$

$$\Leftrightarrow -1 + \int_1^3 f(x) dx = 2025$$

$$\Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx = 2026$$

c) Ta có: $\int_1^3 f(x) dx = 2026$

$$\int_1^3 [f(x) - e^{-2x+1}] dx = \int_1^3 f(x) dx - \int_1^3 e^{-2x+1} dx = 2026 + \frac{1}{2} e^{-2x+1} \Big|_1^3 = \frac{1}{2e^5} - \frac{1}{2e} + 2026$$

$$\Rightarrow a = 2; b = -2; c = 2026 \Rightarrow a + b + c = 2026$$

d) Ta có: $\int_1^3 f(x) dx = 2026$ và $\int_3^4 f(x) dx = 2$

nên $\int_1^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx = 2026 + 2 \Leftrightarrow \int_1^4 f(x) dx = 2028$,

khi đó $\int_1^4 [f(x) - 2^{x+1}] dx = \int_1^4 f(x) dx - \int_1^4 2^{x+1} dx = 2028 - 2^{x+1} \Big|_1^4 = 2000$

Câu 85. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_2^1 f(x) dx = 3$, $\int_2^3 f(x) dx = 4$.

a) $\int_2^3 \frac{1}{2} f(x) dx = 8$

b) $\int_1^3 f(x) dx = 1$

c) $\int_1^3 \left[f(x) + \frac{1}{2025x} \right] dx = a + \frac{\ln 3}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $2024a - b = 1$.

d) **Biết** $\int_{-3}^1 f(x) dx = 2$ và $\int_{-3}^3 \left[f(x) - 2x + \frac{1}{e^{2x}} \right] dx = \frac{a.e^{12} + b.e^6 + c}{18e^6}$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. **Khi đó**

$$a + b + c = -106.$$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

$$a) \int_2^3 \frac{1}{2} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_2^3 f(x) dx = 2$$

$$b) \int_2^1 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx = -3$$

$$\int_1^3 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = -3 + 4 = 1$$

$$c) \text{Ta có: } \int_1^3 f(x) dx = 1$$

$$\text{Khi đó: } \int_1^3 \left[f(x) + \frac{1}{2025x} \right] dx = \int_1^3 f(x) dx + \frac{1}{2025} \int_1^3 \frac{1}{x} dx = 1 + \frac{1}{2025} \ln|x| \Big|_1^3 = 1 + \frac{\ln 3}{2025}$$

$$\Rightarrow a = 1; b = 2025 \Rightarrow 2024a - b = -1$$

$$d) \text{Ta có: } \int_1^3 f(x) dx = 1 \text{ và } \int_{-3}^1 f(x) dx = 2$$

$$\text{Do đó: } \int_{-3}^3 f(x) dx = \int_{-3}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 2 + 1 = 3$$

$$\text{Khi đó } \int_{-3}^3 \left[f(x) - 2x + \frac{1}{e^{2x}} \right] dx = \int_{-3}^3 f(x) dx - \int_{-3}^3 2x dx + \int_{-3}^3 \frac{1}{e^{2x}} dx = 3 - x^2 \Big|_{-3}^3 - \frac{1}{2e^{2x}} \Big|_{-3}^3 = \frac{9e^{12} - 106e^6 - 9}{18e^6}$$

$$\Rightarrow a = 9; b = -106; c = -9 \Rightarrow a + b + c = -106$$

Câu 86. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_{-1}^0 f(x) dx = 3$, $\int_0^3 2f(x) dx = 6$.

$$a) \int_0^3 f(x) dx = 3$$

$$b) \int_{-1}^3 f(x) dx = 6$$

$$c) \text{Biết } \int_{-1}^3 [2f(x) - e^{1-2x}] dx = \frac{a.e^8 + b.e^5 + c}{2}, \text{ với } a, b, c \in \mathbb{Z}. \text{ Khi đó } a + b + c = 26.$$

$$d) \text{Biết } \int_3^6 f(x) dx = 2025 \text{ và } \int_{-1}^6 \left[\frac{1}{2} f(x) + 3x^2 \right] dx = \frac{a}{b}, \text{ với } a, b \in \mathbb{Z} \text{ và } \frac{a}{b} \text{ là phân thức tối giản. Khi đó}$$

$$a + b = 2465.$$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

a) $\int_0^3 2f(x) dx = 6 \Leftrightarrow 2 \int_0^3 f(x) dx = 6 \Leftrightarrow \int_0^3 f(x) dx = 3$

b) $\int_{-1}^0 f(x) dx = 3; \int_0^3 f(x) dx = 3$

$\Rightarrow \int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx = 3 + 3 = 6$

c) Ta có: $\int_{-1}^3 f(x) dx = 6$

Do đó: $\int_{-1}^3 [2f(x) - e^{1-2x}] dx = 2 \int_{-1}^3 f(x) dx - \int_{-1}^3 e^{1-2x} dx = 2 \cdot 6 + \frac{1}{2} e^{1-2x} \Big|_{-1}^3 = \frac{-e^8 + 24e^5 + 1}{2}$

$\Rightarrow a = -1; b = 24; c = 1 \Rightarrow a + b + c = 24.$

d) Ta có: $\int_{-1}^3 f(x) dx = 6$ và $\int_3^6 f(x) dx = 2025$

nên: $\int_{-1}^6 f(x) dx = \int_{-1}^3 f(x) dx + \int_3^6 f(x) dx = 6 + 2025 = 2031$

khi đó $\int_{-1}^6 \left[\frac{1}{2} f(x) + 3x^2 \right] dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^6 f(x) dx + \int_{-1}^6 3x^2 dx = \frac{2031}{2} + x^3 \Big|_{-1}^6 = \frac{2031}{2} + 6^3 - (-1)^3 = \frac{2465}{2}$

$\Rightarrow a = 2465; b = 2 \Rightarrow a + b = 2467$

Câu 87. Cho hàm số $f(x) = mx + n$ với $m, n \in \mathbb{R}$. $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 3,$

$\int_0^2 f(x) dx = 8.$

a) $\int_0^1 \frac{1}{2} f(x) dx = \frac{3}{2}$

b) $\int_1^2 f(x) dx = -5$

c) $\int_1^2 \left[2f(x) - \frac{1}{e^{2x}} \right] dx = \frac{a \cdot e^4 + b \cdot e^2 + c}{2e^4}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khi đó $a + b + c = 20.$

d) $3m + 2n = 10$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{1}{2} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

$$\text{b) } \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \Leftrightarrow 8 = 3 + \int_1^2 f(x) dx \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx = 5$$

$$\text{c) Ta có: } \int_1^2 f(x) dx = 5$$

$$\text{Do đó: } \int_1^2 \left[2f(x) - \frac{1}{e^{2x}} \right] dx = 2 \int_1^2 f(x) dx - \int_1^2 \left(\frac{1}{e^2} \right)^x dx = 2 \cdot 5 - \left. \frac{\left(\frac{1}{e^2} \right)^x}{\ln \frac{1}{e^2}} \right|_1^2 = \frac{20e^4 - e^2 + 1}{2e^4}$$

$$\Rightarrow a = 20; b = -1; c = 1 \Rightarrow a + b + c = 20$$

d)

$$\text{Ta có: } \int f(x) dx = \int (mx + n) dx = \frac{m}{2} x^2 + nx + C.$$

$$\text{Lại có: } \int_0^1 f(x) dx = 3 \Rightarrow \left(\frac{m}{2} x^2 + nx \right) \Big|_0^1 = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} m + n = 3 \quad (1).$$

$$\int_0^2 f(x) dx = 8 \Rightarrow \left(\frac{m}{2} x^2 + nx \right) \Big|_0^2 = 8 \Leftrightarrow 2m + 2n = 8 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: } \begin{cases} \frac{1}{2} m + n = 3 \\ 2m + 2n = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 2 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow 3m + 2n = 10.$$

Câu 88. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$. $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn

$$\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{2}, \int_0^2 f(x) dx = -2 \text{ và } \int_0^3 f(x) dx = \frac{13}{2}.$$

$$\text{a) } \int_2^0 f(x) dx = 2$$

$$\text{b) } \int_1^3 f(x) dx = 10$$

$$\text{c) } \frac{1}{3} a + \frac{1}{2} b + c = -\frac{7}{2}$$

$$\text{d) } a + b + c = \frac{4}{3}$$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

a) $\int_2^0 f(x) dx = -\int_0^2 f(x) dx = 2$

b) $\int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx \Leftrightarrow \frac{13}{2} = -\frac{7}{2} + \int_1^3 f(x) dx \Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx = 10$

c) Ta có: $\int f(x) dx = \int (ax^2 + bx + c) dx = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + C.$

Do đó: $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{2} \Rightarrow \left(\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx\right)\Big|_0^1 = -\frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c = -\frac{7}{2}$ (1).

d) Ta lại có:

$\int_0^2 f(x) dx = -2 \Rightarrow \left(\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx\right)\Big|_0^2 = -2 \Leftrightarrow \frac{8}{3}a + 2b + 2c = -2$ (2).

$\int_0^3 f(x) dx = \frac{13}{2} \Rightarrow \left(\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx\right)\Big|_0^3 = \frac{13}{2} \Leftrightarrow 9a + \frac{9}{2}b + 3c = \frac{13}{2}$ (3).

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c = -\frac{7}{2} \\ \frac{8}{3}a + 2b + 2c = -2 \\ 9a + \frac{9}{2}b + 3c = \frac{13}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -\frac{16}{3} \end{cases}.$$

$\Rightarrow a + b + c = 1 + 3 + \left(-\frac{16}{3}\right) = -\frac{4}{3}.$

Câu 89. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ và có bảng biến thiên như sau

x	0	2	3	5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	$-\infty$	0	-1	$f(5)$	$-\infty$

a) $f'(x) \geq 0$ khi $x \in [3; 5]$

b) $\int_3^5 |f'(x)| dx = f(5) + 1$

c) $\int_2^3 |f'(x)| dx = -1$

d) **Biết rằng** $\int_2^5 |f'(x)| dx = 5$. Khi đó $f(5) = 3$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
----	----	----	----

ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG
-------------	-------------	------------	-------------

Từ bảng biến thiên ta có $x \in [3;5] \Rightarrow f'(x) \geq 0$ và $x \in [2;3] \Rightarrow f'(x) \leq 0, f(2) = 0, f(3) = -1$.

a) $f'(x) \geq 0$ khi $x \in [3;5]$

b) $\int_3^5 |f'(x)| dx = \int_3^5 f'(x) dx = f(x)|_3^5 = f(5) - f(3) = f(5) + 1$

c) $\int_2^3 |f'(x)| dx = -\int_2^3 f'(x) dx = f(x)|_3^2 = f(2) - f(3) = 0 - (-1) = 1$

d)

$$\int_2^5 |f'(x)| dx = 5$$

$$\Leftrightarrow \int_2^3 |f'(x)| dx + \int_3^5 |f'(x)| dx = 5$$

$$\Leftrightarrow 1 + f(5) + 1 = 5$$

$$\Leftrightarrow f(5) + 2 = 5$$

$$\Leftrightarrow f(5) = 3$$

Câu 90. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_{-2}^5 f(x) dx = 8, \int_5^{-2} g(x) dx = 3$.

a) $\int_5^{-2} f(x) dx = -8$

b) $\int_5^{-2} [2g(x) - 3] dx = 25$

c) $\int_{-2}^5 [f(x) - 4g(x) - 1] dx = -13$

d) Biết $\int_{-2}^0 \left[\frac{1}{2} f(x) + 2g(x) \right] dx = 2024$, khi đó $\int_0^5 \left[\frac{1}{2} f(x) + 2g(x) \right] dx = 2026$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	SAI	SAI	SAI

a) $\int_5^{-2} f(x) dx = -\int_{-2}^5 f(x) dx = -8$

b) $\int_5^{-2} [2g(x) - 3] dx = 2 \int_5^{-2} g(x) dx - 3 \int_5^{-2} 1 dx = 2 \cdot 3 - 3x|_5^{-2} = 27$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int_{-2}^5 [f(x) - 4g(x) - 1] dx &= \int_{-2}^5 f(x) dx - \int_{-2}^5 4g(x) dx - \int_{-2}^5 dx = \int_{-2}^5 f(x) dx - 4 \int_{-2}^5 g(x) dx - \int_{-2}^5 dx \\ &= \int_{-2}^5 f(x) dx + 4 \int_5^{-2} g(x) dx - \int_{-2}^5 dx = 8 + 4.3 - x \Big|_{-2}^5 = 8 + 4.3 - 7 = 13. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{cases} \int_{-2}^5 f(x) dx = 8 \\ \int_5^{-2} g(x) dx = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_{-2}^5 \frac{1}{2} f(x) dx = 4 \\ \int_{-2}^5 2g(x) dx = -6 \end{cases} \Rightarrow \int_{-2}^5 \frac{1}{2} f(x) dx + \int_{-2}^5 2g(x) dx = 4 - 6 \Leftrightarrow \int_{-2}^5 \left[\frac{1}{2} f(x) + 2g(x) \right] dx = -2$$

khi đó:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^5 \left[\frac{1}{2} f(x) + 2g(x) \right] dx &= -2 \\ \Leftrightarrow \int_{-2}^0 \left[\frac{1}{2} f(x) + 2g(x) \right] dx + \int_0^5 \left[\frac{1}{2} f(x) + 2g(x) \right] dx &= -2 \\ \Leftrightarrow 2024 + \int_0^5 \left[\frac{1}{2} f(x) + 2g(x) \right] dx &= -2 \\ \Leftrightarrow \int_0^5 \left[\frac{1}{2} f(x) + 2g(x) \right] dx &= -2026 \end{aligned}$$

Câu 91. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_1^2 f(x) dx = 2$, $\int_1^2 g(x) dx = 6$.

a) $\int_1^2 2025 f(x) dx = 4050$

b) $\int_2^1 [2g(x) - x] dx = -\frac{21}{2}$

c) $\int_2^1 [5f(x) - 2g(x) + 3e^{3x}] dx = e^6 - e^3 - 2$

d) Biết $\int_1^4 [2f(x) + g(x)] dx = 5$ và $\int_2^4 [2f(x) + g(x) - \sqrt{x}] dx = \frac{20\sqrt{2} + a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân

thức tối giản. Khi đó $a + b = 83$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

a) Ta có: $\int_1^2 2025 f(x) dx = 2025 \int_1^2 f(x) dx = 2025.2 = 4050$

$$\text{b) Ta có: } \int_2^1 [2g(x) - x] dx = 2 \int_2^1 g(x) dx - \int_2^1 x dx = -2 \int_1^2 g(x) dx - \frac{1}{2} x^2 \Big|_2^1 = -2 \cdot 6 - \frac{1}{2} (1 - 4) = -\frac{21}{2}$$

c) Ta có:

$$\int_2^1 [5f(x) - 2g(x) + 3e^{3x}] dx = - \int_1^2 [5f(x) - 2g(x) + 3e^{3x}] dx = -5 \int_1^2 f(x) dx + 2 \int_1^2 g(x) dx - \int_1^2 3e^{3x} dx$$

$$= -5 \cdot 2 + 2 \cdot 6 - e^{3x} \Big|_1^2 = 2 + e^3 - e^6$$

$$\text{d) Ta có: } \begin{cases} \int_1^2 f(x) dx = 2 \\ \int_2^1 g(x) dx = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_1^2 2f(x) dx = 4 \\ \int_1^2 g(x) dx = 6 \end{cases} \Rightarrow \int_1^2 [2f(x) + g(x)] dx = 10$$

Do đó:

$$\int_1^4 [2f(x) + g(x)] dx = 5$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 [2f(x) + g(x)] dx + \int_2^4 [2f(x) + g(x)] dx = 5$$

$$\Leftrightarrow 10 + \int_2^4 [2f(x) + g(x)] dx = 5$$

$$\Leftrightarrow \int_2^4 [2f(x) + g(x)] dx = -5$$

$$\text{Nên: } \int_2^4 [2f(x) + g(x) - \sqrt{x}] dx = \int_2^4 [2f(x) + g(x)] dx - \int_2^4 \sqrt{x} dx = -5 - \frac{2}{3} x\sqrt{x} \Big|_2^4 = \frac{20\sqrt{2} - 80}{3}$$

$$\Rightarrow a = -80; b = 3 \Rightarrow a + b = -77$$

Câu 92. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_2^3 f(x) dx = 4, \int_2^3 g(x) dx = 1.$

$$\text{a) } \int_3^2 \frac{1}{4} f(x) dx = 1$$

$$\text{b) } \int_2^3 \left[2g(x) - \frac{1}{x} \right] dx = 2 + \ln 3 - \ln 2$$

$$\text{c) Biết } \int_2^3 \left[\frac{1}{2} f(x) - 2024g(x) + e^{2x+1} \right] dx = \frac{a \cdot e^7 + b \cdot e^5 + c}{2}, \text{ với } a, b, c \in \mathbb{Z}. \text{ Khi đó } a + b + c = -4044.$$

$$\text{d) Biết } \int_0^2 [f(x) - 3g(x)] dx = 2024 \text{ và } \int_0^3 [f(x) - 3g(x) + 2^x] dx = \frac{a + b \ln 2}{\ln 2}, \text{ với } a, b \in \mathbb{Z}. \text{ Khi đó}$$

$$a + b = 2030.$$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
----	----	----	----

SAI	SAI	ĐÚNG	SAI
------------	------------	-------------	------------

a) $\int_3^2 \frac{1}{4} f(x) dx = -\frac{1}{4} \int_2^3 f(x) dx = -1$

b) $\int_2^3 \left[2g(x) - \frac{1}{x} \right] dx = 2 \int_2^3 g(x) dx - \int_2^3 \frac{1}{x} dx = 2.1 - \ln|x| \Big|_2^3 = 2 + \ln 2 - \ln 3$

c) $\int_2^3 \left[\frac{1}{2} f(x) - 2024g(x) + e^{2x+1} \right] dx = \frac{1}{2} \int_2^3 f(x) dx - 2024 \int_2^3 g(x) dx + \int_2^3 e^{2x+1} dx$
 $= \frac{1}{2} \cdot 4 - 2024 \cdot 1 + \frac{1}{2} e^{2x+1} \Big|_2^3 = -2022 + \frac{1}{2} (e^7 - e^5) = \frac{e^7 - e^5 - 4044}{2}$

$\Rightarrow a = 1; b = -1; c = -4044 \Rightarrow a + b + c = -4044$

d) Ta có: $\begin{cases} \int_2^3 f(x) dx = 4 \\ \int_2^3 g(x) dx = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_2^3 f(x) dx = 4 \\ \int_2^3 3g(x) dx = 3 \end{cases} \Rightarrow \int_2^3 [f(x) - 3g(x)] dx = 1$

Với: $\int_0^2 [f(x) - 3g(x)] dx = 2024$

Nên: $\int_0^3 [f(x) - 3g(x) + 2^x] dx = \int_0^3 [f(x) - 3g(x)] dx + \int_0^3 2^x dx$

$= \int_0^2 [f(x) - 3g(x)] dx + \int_2^3 [f(x) - 3g(x)] dx + \int_0^3 2^x dx = 2024 + 1 + \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^3 = \frac{7 + 2025 \ln 2}{\ln 2}$

$\Rightarrow a = 7; b = 2025 \Rightarrow a + b = 2032$

Câu 93. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_{-3}^0 f(x) dx = -4; \int_{-3}^0 g(x) dx = -3.$

a) $\int_0^{-3} f(x) dx = -4.$

b) $\int_{-3}^0 -3f(x) dx = 12.$

c) $\int_{-3}^0 [f(x) + g(x)] dx = -7.$

d) Nếu $\int_{-3}^0 [2f(x) + 3g(x)] dx = -51$ và $\int_{-3}^0 [nf(x) + mg(x)] dx = 20$ thì $m + n = 10.$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG

$$\text{a) } \int_0^{-3} f(x) dx = - \int_{-3}^0 f(x) dx \Rightarrow \int_0^{-3} f(x) dx = 4.$$

$$\text{b) } \int_{-3}^0 (-3) f(x) dx = (-3) \cdot \int_{-3}^0 f(x) dx = (-3) \cdot (-4) = 12.$$

$$\text{c) } \int_{-3}^0 [f(x) + g(x)] dx = \int_{-3}^0 f(x) dx + \int_{-3}^0 g(x) dx = (-4) + (-3) = -7.$$

$$\text{d) Ta có } \int_{-3}^0 [mf(x) + ng(x)] dx = -51 \text{ và } \int_{-3}^0 [nf(x) + mg(x)] dx = 20$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} m \int_{-3}^0 f(x) dx + n \int_{-3}^0 g(x) dx = -51 \\ n \int_{-3}^0 f(x) dx + m \int_{-3}^0 g(x) dx = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4m - 3n = -51 \\ -4n - 3m = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 21 \\ n = -11 \end{cases} \Rightarrow m + n = 10.$$

Câu 94. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm liên tục trên \mathbb{R} và thỏa: $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$,

$$\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6.$$

$$\text{a) } \int_3^1 [f(x) + 3g(x)] dx = -10.$$

$$\text{b) } \int_1^3 [g(x) - 2f(x)] dx = -6.$$

$$\text{c) } \int_1^3 [4g(x) - f(x)] dx = 4$$

$$\text{d) } \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx = -6$$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

$$\text{a) } \int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10 \Leftrightarrow - \int_3^1 [f(x) + 3g(x)] dx = 10 \Leftrightarrow \int_3^1 [f(x) + 3g(x)] dx = -10.$$

$$\text{b) } \int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6 \Leftrightarrow - \int_3^1 [2f(x) - g(x)] dx = -6 \Leftrightarrow \int_3^1 [g(x) - 2f(x)] dx = -6.$$

$$\text{c) } \int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx - \int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6 - 10$$

$$\Leftrightarrow \int_1^3 [4g(x) - f(x)] dx = -4$$

d) Đặt $a = \int_1^3 f(x) dx$ và $b = \int_1^3 g(x) dx$.

Khi đó, $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = a + 3b$, $\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 2a - b$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} a + 3b = 10 \\ 2a - b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}$.

Vậy $\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx = a + b = 6$.

Câu 95. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm liên tục trên \mathbb{R} và thoả: $\int_0^4 [2f(x) - g(x)] dx = 7$,

$\int_0^4 [f(x) + 3g(x)] dx = -7$.

a) $\int_0^4 [2f(x) - g(x)] dx = \int_4^0 [f(x) + 3g(x)] dx$.

b) $\int_0^4 [3f(x) + 2g(x)] dx = 14$

c) $\int_0^4 f(x) dx = 2$

d) Biết $\int_0^4 [g(x) + x\sqrt{x}] dx = \frac{m}{n}$, với $m, n \in \mathbb{Z}$ và $\frac{m}{n}$ là phân thức tối giản. Khi đó $m + n = 54$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

a) Ta có: $\int_0^4 [f(x) + 3g(x)] dx = -7 \Leftrightarrow \int_4^0 [f(x) + 3g(x)] dx = 7$

$\Rightarrow \int_0^4 [2f(x) - g(x)] dx = \int_4^0 [f(x) + 3g(x)] dx = 7$.

b) $\int_0^4 [2f(x) - g(x)] dx + \int_0^4 [f(x) + 3g(x)] dx = 7 + (-7)$

$\Leftrightarrow \int_0^4 [2f(x) - g(x) + f(x) + 3g(x)] dx = 0$

$\Leftrightarrow \int_0^4 [3f(x) + 2g(x)] dx = 0$

c) Đặt $a = \int_0^4 f(x) dx$ và $b = \int_0^4 g(x) dx$.

$$\text{Khi đó, } \begin{cases} \int_0^4 [2f(x) - g(x)] dx = 7 \\ \int_0^4 [f(x) + 3g(x)] dx = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = 7 \\ a + 3b = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_0^4 f(x) dx = 2 \\ \int_0^4 g(x) dx = -3 \end{cases}$$

Vậy $\int_0^4 f(x) dx = 2$.

d) Ta có; $\int_0^4 g(x) dx = -3$

Do đó; $\int_0^4 [g(x) + x\sqrt{x}] dx = \int_0^4 g(x) dx + \int_0^4 x\sqrt{x} dx = -3 + \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} dx = -3 + \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \sqrt{x} \Big|_0^4 = \frac{49}{5}$

$\Rightarrow m = 49; n = 5 \Rightarrow m + n = 54$

Câu 96. Cho hàm số $f(x) = e^x$ liên tục trên \mathbb{R} .

a) $\int_0^1 f(x) dx = e$.

b) $\int_0^1 f(2x+1) dx = e^3 - e$.

c) $\int_0^1 (f(x) - 4x) dx = e - 3$.

d) **Biết** $\int_0^1 \frac{(e^{x+1} - 1)^2}{f(x)} dx = \frac{a.e^4 + b.e^3 + c.e + d}{e}$, với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. **Khi đó** $a + 2b + 3c + 4d = 0$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

a) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 e^x dx = e - 1$

b) $\int_0^1 f(2x+1) dx = \int_0^1 e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} e^{2x+1} \Big|_0^1 = \frac{e^3 - e}{2}$

c) $\int_0^1 (f(x) - 4x) dx = \int_0^1 (e^x - 4x) dx = e^x - 2x^2 \Big|_0^1 = e - 3$

$$d) \int_0^1 \frac{(e^{x+1} - 1)^2}{f(x)} dx = \int_0^1 \frac{e^{2x+2} - 2e^{x+1} + 1}{e^x} dx = \int_0^1 (e^{x+2} - 2e + e^{-x}) dx = (e^{x+2} - 2e + e^{-x}) \Big|_0^1 = \frac{e^4 - e^3 - e + 1}{e}$$

$$\Rightarrow a = 1; b = -1; c = -1; d = 1 \Rightarrow a + 2b + 3c + 4d = 0$$

Câu 97. Cho $f(x) = \sin x$ liên tục trên \mathbb{R} .

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$b) \int_0^{\pi} f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx = 1.$$

$$c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - f(x)) dx = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

$$d) \text{Biết } \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x + \pi) - e^x] dx = -e^{\frac{a\pi}{b}}, \text{ với } a, b \in \mathbb{Z} \text{ và } \frac{a}{b} \text{ là phân thức tối giản. Khi đó } a + b = 3.$$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	SAI	SAI	ĐÚNG

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b) \int_0^{\pi} f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx = \int_0^{\pi} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx = -\int_0^{\pi} \cos x dx = -\sin x \Big|_0^{\pi} = 0.$$

$$c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - f(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = \frac{\pi^2}{4} - 1$$

$$d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x + \pi) - e^x] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(x + \pi) - e^x] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin x - e^x) dx = (-\sin x - e^x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow a = 1; b = 2 \Rightarrow a + b = 3$$

Câu 98. Cho $f(x) = 2x - 1$ liên tục trên \mathbb{R} .

$$a) \int_{-1}^1 f(x) dx = 2.$$

$$b) \int_{-1}^1 |f(x)| dx = \frac{5}{2}.$$

$$c) \int_{-1}^1 x^2 f(x) dx = -\frac{2}{3}.$$

d) Biết $\int_{-1}^1 x|f(x)|dx = \frac{a}{b}$, với $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a+b=1$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG

a) Ta có $\int_{-1}^1 f(x)dx = -2$

b) Ta có $2x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

suy ra $\int_{-1}^1 |2x-1|dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} |2x-1|dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |2x-1|dx = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$.

c) $\int_{-1}^1 x^2 f(x)dx = \int_{-1}^1 x^2(2x-1)dx = -\frac{2}{3}$

d) Ta có: $\int_{-1}^1 x|f(x)|dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} x|2x-1|dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x|2x-1|dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} x(1-2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x(2x-1)dx = -\frac{9}{8} + \frac{5}{24} = -\frac{11}{12}$

Vì $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$ nên $a = -11; b = 12 \Rightarrow a+b = 1$

Câu 99. Cho hàm số $f(x) = 2x - 4$ liên tục trên \mathbb{R} .

a) $\int_{2024}^{2024} f(x)dx = 4048$.

b) $\int_1^4 f^2(x)dx = -12$.

c) $\int_{-2}^5 |f(x)|dx = 3^m \cdot 5^n$ với $m^2 + n^2 = 4$.

d) $F(a) = \int_0^a f(x)dx$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $a = 2$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

a) Ta có $\int_{2024}^{2024} f(x)dx = 0$

b) Ta có $\int_1^4 f^2(x)dx = \int_1^4 (2x-4)^2 dx = \int_1^4 (4x^2 - 16x + 16)dx = \left(\frac{4}{3}x^3 - 8x^2 + 16x \right) \Big|_1^4 = 12$.

c) Ta có:

$$\int_{-2}^5 |f(x)| dx = \int_{-2}^5 |2x-4| dx = \int_{-2}^2 (4-2x) dx + \int_2^5 (2x-4) dx = (4x-x^2) \Big|_{-2}^2 + (x^2-4x) \Big|_2^5 = 25 = 3^0 \cdot 5^2$$

Suy ra $m=0, n=2 \Rightarrow m^2+n^2=4$.

$$d) F(a) = \int_0^a f(x) dx = \int_0^a (2x-4) dx = (x^2-4x) \Big|_0^a = a^2-4a = (a-2)^2 - 4 \geq -4$$

Suy ra $F(a)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng -4 khi $a=2$.

Câu 100. Cho hàm số $f(x) = 4x^3 + x$ và $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$, $F(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .

a) $\int_3^5 f(x) dx = 552$.

b) **Biết** $F(1) = 4$ **thì** $F(2) = \frac{41}{2}$.

c) $\int_0^2 [1+2x+f(x)] dx = -24$.

d) $\int_{-2}^1 |f(x)| dx = \frac{39}{2}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

a) Ta có $\int_3^5 (4x^3+x) dx = 552$.

b) Ta có $F(2) - F(1) = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (4x^3+x) dx = \left(x^4 + \frac{x^2}{2}\right) \Big|_1^2 = \frac{33}{2}$

$\Rightarrow F(2) - 4 = \frac{33}{2} \Rightarrow F(2) = \frac{41}{2}$

Cách 2:

$$F(x) = \int f(x) dx = \int (4x^3+x) dx = x^4 + \frac{x^2}{2} + C$$

$F(1) = 4 \Rightarrow 1^4 + \frac{1^2}{2} + C = 4 \Rightarrow C = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow F(x) = x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{2} \Rightarrow F(2) = 2^4 + \frac{2^2}{2} + \frac{5}{2} = \frac{41}{2}$

c) Ta có $\int_0^2 (1+2x+f(x)) dx = \int_0^2 (1+2x+4x^3+x) dx = \int_0^2 (4x^3+3x+1) dx = \left(x^4 + \frac{3}{2}x^2 + x\right) \Big|_0^2$

$$= \left(2^4 + \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 2 \right) - 0 = 24.$$

$$\text{d) Ta có } \int_{-2}^1 |f(x)| dx = \int_{-2}^1 |4x^3 + x| dx = \int_{-2}^0 (-4x^3 - x) dx + \int_0^1 (4x^3 + x) dx = 18 + \frac{3}{2} = \frac{39}{2}.$$

Câu 101. Cho hàm số $f(x) = |x^2 - 9|$ với $0 \leq x \leq 9$.

$$\text{a) } f(x) = |x^2 - 9| = \begin{cases} -x^2 + 9 & \text{khi } 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 9 & \text{khi } 3 \leq x \leq 9 \end{cases}.$$

$$\text{b) } \int_0^9 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx + \int_3^9 f(x) dx.$$

$$\text{c) } \int_0^9 f(x) dx = -63.$$

$$\text{d) } \int_0^9 [f(x) - \sqrt{x}] dx = 45.$$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

a) Ta có: $x^2 - 9 \leq 0, \forall x \in [0, 3]$ và $x^2 - 9 \geq 0, \forall x \in [3, 9]$

$$\text{Do đó: } f(x) = |x^2 - 9| = \begin{cases} -x^2 + 9 & \text{khi } 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 9 & \text{khi } 3 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

$$\text{b) } \int_0^9 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx + \int_3^9 f(x) dx.$$

$$\text{c) Ta có: } \int_0^9 |x^2 - 9| dx = \int_0^3 |x^2 - 9| dx + \int_3^9 |x^2 - 9| dx = \int_0^3 [-(x^2 - 9)] dx + \int_3^9 (x^2 - 9) dx$$

$$= -\int_0^3 (x^2 - 9) dx + \int_3^9 (x^2 - 9) dx = (9 - x^2) \Big|_0^3 + (x^2 - 9) \Big|_3^9 = 63$$

$$\text{d) Ta có: } \int_0^9 f(x) dx = 63$$

$$\text{Nên } \int_0^9 [f(x) - \sqrt{x}] dx = \int_0^9 f(x) dx - \int_0^9 \sqrt{x} dx = 63 - \frac{2}{3} x\sqrt{x} \Big|_0^9 = 45$$

Câu 102. Cho hàm số $f(x) = 2^x - 4$.

a) Hàm số $f(x)$ có tập xác định $D = (0; +\infty)$.

$$\text{b) } \int_0^3 (2^x - 4) dx = \frac{7}{\ln 2} - 12$$

c) $\int_0^3 f(x+1)dx = \frac{14}{\ln 2} + 12$

d) **Biết** $\int_0^3 |f(x)|dx = a + \frac{b}{c \ln 2}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản thì khi đó ta có giá trị của biểu thức

$a^2 + b^2 + c^2 = 18$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

a) Hàm số $f(x)$ có tập xác định trên $D = \mathbb{R}$.

b) $\int_0^3 (2^x - 4)dx = \left(\frac{1}{\ln 2} 2^x - 4x \right) \Big|_0^3 = \frac{7}{\ln 2} - 12$

c) $\int_0^3 f(x+1)dx = \int_0^3 (2^{x+1} - 4)dx = \int_0^3 (2 \cdot 2^x - 4)dx = \left(\frac{2 \cdot 2^x}{\ln 2} - 4x \right) \Big|_0^3 = \frac{14}{\ln 2} - 12$

d) $\int_0^3 |f(x)|dx = \int_0^2 |2^x - 4|dx + \int_2^3 (2^x - 4)dx = \int_0^2 (4 - 2^x)dx + \int_2^3 (2^x - 4)dx = \left(4x - \frac{1}{\ln 2} 2^x \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{1}{\ln 2} 2^x - 4x \right) \Big|_2^3$

$= \left(8 - \frac{3}{\ln 2} \right) + \left(\frac{4}{\ln 2} - 4 \right) = 4 + \frac{1}{\ln 2} = a + \frac{b}{c \ln 2} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 4^2 + 1^2 + 1^2 = 18.$

Câu 103. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x \geq 2 \\ x + 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$

a) $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (x+1)dx$

b) $\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 (x^2 - 2x + 3)dx$

c) $\int_1^3 \frac{1}{2} f(x)dx = \frac{41}{12}$

d) **Biết** $\int_2^3 \frac{f(x)}{x}dx = \frac{a \ln 3 + b \ln 2 + c}{2}$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khi đó $a + b + c = 3$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

$$\text{Do } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x \geq 2 \\ x + 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

$$\text{a) } \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x+1) dx$$

$$\text{b) } \int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (x^2 - 2x + 3) dx$$

$$\text{c) } \int_1^3 \frac{1}{2} f(x) dx = \frac{1}{2} \left(\int_1^2 (x+1) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x + 3) dx \right) = \frac{41}{12}$$

$$\text{d) } \int_2^3 \frac{f(x)}{x} dx = \int_2^3 \frac{x^2 - 2x + 3}{x} dx = \int_2^3 \left(x - 2 + \frac{3}{x} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| \right) \Big|_2^3 = \frac{2 \ln 3 - 2 \ln 2 + 1}{2}$$

$$\Rightarrow a = 2; b = -2; c = 1 \Rightarrow a + b + c = 1$$

Câu 104. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{khi } x \geq 2 \\ x - 2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$.

a) Hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .

$$\text{b) } \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x-2) dx$$

$$\text{c) } \int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (x^2 - 2x) dx$$

$$\text{d) } \int_1^3 f(x) dx = \frac{6}{5}$$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{khi } x \geq 2 \\ x - 2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

Khi $x > 2$ thì $f(x) = x^2 - 2x$ nên hàm số liên tục trên khoảng $(2; +\infty)$

Khi $x < 2$ thì $f(x) = x - 2$ nên hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; 2)$

Khi $x = 2$, ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 2x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 2) = 0$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 0$ nên hàm số tại $x = 2$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .

$$b) \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x-2) dx$$

$$c) \int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (x^2 - 2x) dx$$

$$d) \int_1^3 f(x) dx = \int_1^2 (x-2) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_2^3 = \left(-2 - \frac{-3}{2} \right) + \left(0 - \frac{-4}{3} \right) = \frac{5}{6}$$

Câu 105. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x + m & \text{khi } x \geq 1 \\ 5 - 2x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ (m là tham số thực) liên tục trên \mathbb{R} . Biết rằng

$f(x)$ có nguyên hàm trên \mathbb{R} là $F(x)$ thỏa mãn $F(-2) = -10$.

a) $m = -2$

b) $F(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - 2x + 8 & \text{khi } x \geq 1 \\ -x^2 + 5x + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

c) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{19}{2}$

d) $\int_0^2 f(x) dx = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a + b = 200$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

a) Ta có $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} nên $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m + 5 = 3 \Leftrightarrow m = -2$.

b) $F(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - 2x + 8 & \text{khi } x \geq 1 \\ 5x - x^2 + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

Ta có $F(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + mx + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 5x - x^2 + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

$F(-2) = 5(-2) - (-2)^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = -10 + 4 = -6$.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 + x^2 + mx + C_1) = m + 2 + C_1$.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (5x - x^2 + C_2) = 4 + C_2$.

Ta lại có $F(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = F(1) \Leftrightarrow m + 2 + C_1 = 4 + C_2 \Leftrightarrow C_1 = 6 - m$ mà $m = -2$ nên $C_1 = 8$

$$\text{Vậy } f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - 2x + 8 & \text{khi } x \geq 1 \\ -x^2 + 5x + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$

$$\text{c) } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (-x^2 + 5x + 4) dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 4x \right) \Big|_0^1 = \frac{19}{3}$$

$$\text{d) Ta có: } \int_0^1 f(x) dx = \frac{19}{3}$$

$$\text{Nên } \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \frac{19}{3} + \int_1^2 (x^3 + x^2 - 2x + 8) dx = \frac{19}{3} + \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 8x \right) \Big|_1^2 = \frac{197}{12}$$

$$\Rightarrow a = 197; b = 12 \Rightarrow a + b = 209$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 106. Biết $\int_0^2 (f(x) + 3x^2) dx = 10$. Tính $\int_0^2 f(x) dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có: $\int_0^2 (f(x) + 3x^2) dx = 10$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 3x^2 dx = 10$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 10 - \int_0^2 3x^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 10 - x^3 \Big|_0^2$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 10 - 8 = 2.$$

Câu 107. Cho $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Tính $I = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} f(x) + 2 \right] dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 6

Ta có: $I = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} f(x) + 2 \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 2 dx = \frac{1}{2} \cdot 4 + 4 = 6$.

Câu 108. Cho $\int_1^3 f(x) dx = 2$. Tính $I = \int_1^3 [f(x) + 2x] dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 10

Ta có: $\int_1^3 [f(x) + 2x] dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_1^3 2x dx = 2 + x^2 \Big|_1^3 = 2 + 3^2 - 1^2 = 10$.

Câu 109. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 1$. Tính tích phân $I = \int_0^1 [2f(x) - 3x^2] dx$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 1

$$I = \int_0^1 [2f(x) - 3x^2] dx = 2 \int_0^1 f(x) dx - 3 \int_0^1 x^2 dx = 2.1 - x^3 \Big|_0^1 = 2.1 - 1 = 1.$$

Câu 110. Cho $\int_1^2 f(x) dx = -1$ và $\int_1^2 g(x) dx = 3$. Tính $\int_2^1 [f(x) - g(x)] dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 4

Ta có: $\int_1^2 f(x) dx = -1 \Leftrightarrow \int_2^1 f(x) dx = 1$; $\int_1^2 g(x) dx = 3 \Leftrightarrow \int_2^1 g(x) dx = -3$

$$\int_2^1 [f(x) - g(x)] dx = \int_2^1 f(x) dx - \int_2^1 g(x) dx = 1 - (-3) = 4.$$

Câu 111. Biết $\int_1^{2025} f(x) dx = -3$ và $\int_1^{2025} g(x) dx = 2$. Tính $I = \int_1^{2025} \left[2f(x) + \frac{1}{2}g(x) \right] dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: -7

Ta có: $\int_1^{2025} g(x) dx = 2 \Leftrightarrow \int_{2025}^1 g(x) dx = -2$

$$\Rightarrow I = \int_1^{2025} \left[2f(x) + \frac{1}{2}g(x) \right] dx = 2 \int_1^{2025} f(x) dx + \frac{1}{2} \int_1^{2025} g(x) dx = 2(-3) + \frac{1}{2}(-2) = -7$$

Câu 112. Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)] dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 2,5

Ta có $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)] dx = \int_{-1}^2 x dx + 2 \int_{-1}^2 f(x) dx + 3 \int_{-1}^2 g(x) dx = \frac{3}{2} + 4 - 3 = \frac{5}{2} = 2,5$

Câu 113. Biết $\int_0^1 f(x) dx = -2$ và $\int_1^0 g(x) dx = -3$. Tính $I = \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: -5

$$\int_0^1 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx = -2 - 3 = -5.$$

Câu 114. Biết $\int_1^2 f(x)dx = 3$ và $\int_1^2 g(x)dx = 2$ và $\int_1^2 h(x)dx = 2025$. Tính $I = \int_1^2 [f(x) - g(x) + h(x)]dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 2026

Ta có: $I = \int_1^2 [f(x) - g(x) + h(x)]dx = \int_1^2 f(x)dx - \int_1^2 g(x)dx + \int_1^2 h(x)dx = 3 - 2 + 2025 = 2026$.

Câu 115. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x)dx = 7$, $\int_2^6 f(x)dx = 3$. Tính

$$P = \int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx.$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 4

$$\text{Ta có } \int_0^{10} f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^6 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx$$

$$\text{Suy ra } \int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx - \int_2^6 f(x)dx = 7 - 3 = 4.$$

Câu 116. Giả sử $\int_0^1 f(x)dx = 3$ và $\int_0^5 f(z)dz = 9$. Tổng $I = \int_1^3 f(t)dt + \int_3^5 f(t)dt$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 6

$$\int_0^1 f(x)dx = 3 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t)dt = 3 \Leftrightarrow \int_1^0 f(t)dt = -3$$

$$\int_0^5 f(z)dz = 9 \Leftrightarrow \int_0^5 f(t)dt = 9$$

$$\Rightarrow \int_1^0 f(t)dt + \int_0^5 f(t)dt = 6 \Leftrightarrow \int_1^5 f(t)dt = 6$$

$$I = \int_1^3 f(t)dt + \int_3^5 f(t)dt = \int_1^5 f(t)dt = 6$$

Câu 117. Cho $\int_{-1}^2 f(t)dt = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)]dx$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 8,5

$$\text{Ta có } I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx = \int_{-1}^2 x dx + 2 \int_{-1}^2 f(x) dx - 3 \int_{-1}^2 g(x) dx = \frac{3}{2} + 2 \cdot 2 - 3(-1) = \frac{17}{2} = 8,5$$

Câu 118. Nếu $\int_1^4 f(x) dx = -2$ và $\int_1^4 g(x) dx = -6$ thì $\int_1^4 [2f(x) - g(x) + 1] dx$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 5

$$\int_1^4 [2f(x) - g(x) + 1] dx = 2 \int_1^4 f(x) dx - \int_1^4 g(x) dx + \int_1^4 1 dx = 2 \cdot (-2) + 6 + 3 = 5.$$

Câu 119. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_1^5 f(x) dx = 10$, $\int_3^5 f(x) dx = 1$. Khi đó $\int_1^3 f(x) dx$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 9

$$\text{Ta có } \int_1^3 f(x) dx = \int_1^5 f(x) dx - \int_3^5 f(x) dx = 10 - 1 = 9.$$

Câu 120. Nếu $\int_0^1 2f(x) dx = 6$ thì $\int_0^1 \left[\frac{1}{3} f(x) + 2x \right] dx$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 2

$$\text{Ta có } \int_0^1 \left[\frac{1}{3} f(x) + 2x \right] dx = \frac{1}{3} \int_0^1 f(x) dx + 2 \int_0^1 x dx = \frac{1}{6} \int_0^1 2f(x) dx + x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \cdot 6 + 1 = 2.$$

Câu 121. Cho $\int_0^{\ln 2} (2f(x) + e^x) dx = 5$. Khi đó $\int_0^{\ln 2} f(x) dx$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 2

$$\text{Ta có } \int_0^{\ln 2} (2f(x) + e^x) dx = 2 \int_0^{\ln 2} f(x) dx + \int_0^{\ln 2} e^x dx = 2 \int_0^{\ln 2} f(x) dx + e^x \Big|_0^{\ln 2} = 2 \int_0^{\ln 2} f(x) dx + 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{\ln 2} f(x) dx = 2.$$

Câu 122. Nếu $\int_0^{\ln 3} [f(x) + e^x] dx = 6$ thì $\int_0^{\ln 3} f(x) dx$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 4

$$\text{Ta có: } \int_0^{\ln 3} [f(x) + e^x] dx = \int_0^{\ln 3} f(x) dx + \int_0^{\ln 3} e^x dx = \int_0^{\ln 3} f(x) dx + 2$$

$$\text{Suy ra } \int_0^{\ln 3} f(x) dx = 6 - 2 = 4.$$

Câu 123. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên \mathbb{R} , thỏa mãn $\int_0^{\pi} [f(x) + \sin x] dx = 10$. Tính

$$I = \int_0^{\pi} f(x) dx.$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 8

$$\text{Ta có } \int_0^{\pi} [f(x) + \sin x] dx = \int_0^{\pi} f(x) dx + \int_0^{\pi} \sin x dx = \int_0^{\pi} f(x) dx - \cos x \Big|_0^{\pi} = 10$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} f(x) dx = 10 + (\cos \pi - \cos 0) = 8.$$

Câu 124. Nếu $\int_0^{\pi} f(x) dx = 3$ thì $\int_0^{\pi} \left[f(x) + \sin \frac{x}{2} \right] dx$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 5

$$\text{Ta có } \int_0^{\pi} \left[f(x) + \sin \frac{x}{2} \right] dx = \int_0^{\pi} f(x) dx + \int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} dx = 3 - 2 \cos \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} = 3 - 2(0 - 1) = 5.$$

Câu 125. Tích phân $\int_{-e}^{-1} \frac{2}{x} dx$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: -2

$$\int_{-e}^{-1} \frac{2}{x} dx = 2 \ln |x| \Big|_{-e}^{-1} = 2 \ln |-1| - 2 \ln |-e| = -2.$$

Câu 126. Biết $\int_0^1 \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} dx = a.e + b$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a + b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: -2

$$\int_0^1 \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} dx = \int_0^1 \frac{(e^x - 2)(e^x + 2)}{e^x + 2} dx = \int_0^1 (e^x - 2) dx = (e^x - 2x) \Big|_0^1 = e - 3$$

$$\Rightarrow a = 1; b = -3 \Rightarrow a + b = -2$$

Câu 127. Biết $\int_0^1 \frac{e^x}{2^x} dx = \frac{e+a}{b+c \ln 2}$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khi đó $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:**Lời giải****Đáp án:** -2

$$\int_0^1 \frac{e^x}{2^x} dx = \int_0^1 \left(\frac{e}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{e}{2}\right)^x}{\ln \frac{e}{2}} \Big|_0^1 = \frac{e-2}{2-2 \ln 2}$$

$$\Rightarrow a = -2; b = 2; c = -2 \Rightarrow a + b + c = -2$$

Câu 128. Biết $\int_1^2 e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x}\right) dx = e^2 + a.e + b \ln 2$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Khi đó $2a + 3b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:**Lời giải****Đáp án:** -8

$$\int_1^2 e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x}\right) dx = \int_1^2 \left(e^x - \frac{1}{x}\right) dx = (e^x - \ln |x|) \Big|_1^2 = e^2 - e - \ln 2$$

$$\Rightarrow a = -1; b = -2 \Rightarrow 2a + 3b = -8$$

Câu 129. Biết $\int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx = \frac{a.e^4 + b}{e^4}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó

$2024a - 2025b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:**Lời giải****Đáp án:** 4049

$$\int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx = \int_0^1 (e^{x-1} - e^{-4x} + e^{-x}) dx = (e^{x-1} - e^{-4x} + e^{-x}) \Big|_0^1 = \frac{e^4 - 1}{e^4}$$

$$\Rightarrow a = 1; b = -1 \Rightarrow 2024a - 2025b = 4049$$

Câu 130. Biết $\int_0^1 \frac{(e^{-x} + 2)^2}{e^{x-1}} dx = \frac{ae^3 + be^2 + ce + d}{3e^2}$, với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của $P = a + b + c + d$.

Trả lời:**Lời giải**

Đáp án: 0

$$I = \int_0^1 \frac{(e^{-x} + 2)^2}{e^{x-1}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-2x} + 4e^{-x} + 4}{e^{x-1}} dx = \int_0^1 (e^{-3x+1} + 4e^{-2x+1} + 4e^{-x+1}) dx$$

$$= \left(\frac{e^{-3x+1}}{-3} + \frac{4e^{-2x+1}}{-2} + \frac{4e^{-x+1}}{-1} \right) \Big|_0^1 = \frac{19e}{3} - \frac{1}{3e^2} - \frac{2}{e} - 4 = \frac{19e^3 - 12e^2 - 6e - 1}{3e^2}$$

$$\Rightarrow P = a + b + c = 0$$

Câu 131. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx = a\sqrt{3} + \frac{\pi}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a + b$ bằng bao

nhiêu?

Trả lời:**Lời giải****Đáp án:** -2

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = (\tan x - x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow a + b = -2$$

Câu 132. Cho $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6$. Giá trị của tham số m bằng bao nhiêu?

Trả lời:**Lời giải****Đáp án:** 2

$$\text{Ta có: } \int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6 \Leftrightarrow (x^3 - x^2 + x) \Big|_0^m = 6 \Leftrightarrow m^3 - m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 133. Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Giá trị của $\int_1^2 [2 + f(x)] dx$ bằng

bao nhiêu?

Trả lời:**Lời giải****Đáp án:** 5

$$\text{Ta có: } \int_1^2 [2 + f(x)] dx = (2x + x^2) \Big|_1^2 = 8 - 3 = 5$$

Câu 134. Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Giá trị của $\int_1^2 (2 + f(x)) dx$ bằng

bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 9

$$\text{Ta có } \int_1^2 (2 + f(x)) dx = \int_1^2 2 dx + \int_1^2 f(x) dx = 2x \Big|_1^2 + F(x) \Big|_1^2 = 2x \Big|_1^2 + x^3 \Big|_1^2 = 9$$

Câu 135. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x$ trên \mathbb{R} thỏa mãn $F(0) = 0$. Biết

$$F(1) = \frac{a}{b \ln 3}, \text{ với } a, b \in \mathbb{Z} \text{ và } \frac{a}{b} \text{ là phân thức tối giản. Khi đó } a + b \text{ bằng bao nhiêu?}$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 3

$$\text{Ta có: } F(1) - F(0) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} \Big|_0^1 = \frac{3}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} = \frac{2}{\ln 3}$$

$$\text{Suy ra } F(1) = \frac{2}{\ln 3} + F(0) = \frac{2}{\ln 3} + 0 = \frac{2}{\ln 3}$$

$$\Rightarrow a = 2; b = 1 \Rightarrow a + b = 3$$

Câu 136. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = 2^x$ và $F(0) = 0$. Biết $F(1) = a \cdot \log_b e$, với

$$a, b \in \mathbb{Z} \text{ và } \frac{a}{b} \text{ là phân thức tối giản. Khi đó } 2024a + b \text{ bằng bao nhiêu?}$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 2027

$$\text{Ta có } F(1) - F(0) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^1 = \frac{2^1 - 2^0}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} = \log_2 e.$$

$$\text{Vậy } F(1) = \log_2 e.$$

$$\Rightarrow a = 1; b = 2 \Rightarrow 2024a + b = 2027$$

Câu 137. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} . Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên \mathbb{R} thỏa mãn

$$F(2) - F(0) = 5. \text{ Khi đó } \int_0^2 3f(x) dx \text{ bằng bao nhiêu?}$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 15

$$\text{Ta có: } \int_0^2 3f(x) dx = 3 \int_0^2 f(x) dx = 3(F(2) - F(0)) = 3 \cdot 5 = 15.$$

Câu 138. Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Giá trị của $\int_1^2 (2 + f(x)) dx$ bằng

bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 9

$$\text{Ta có } \int_1^2 (2 + f(x)) dx = \int_1^2 2 dx + \int_1^2 f(x) dx = 2x \Big|_1^2 + x^3 \Big|_1^2 = 9.$$

Câu 139. Có hai giá trị của số thực a là $a_1, a_2 (0 < a_1 < a_2)$ thỏa mãn $\int_1^a (2x - 3) dx = 0$. Hãy tính

$$T = 3^{a_1} + 3^{a_2} + \log_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right).$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 13

$$\text{Ta có: } \int_1^a (2x - 3) dx = (x^2 - 3x) \Big|_1^a = a^2 - 3a + 2.$$

$$\text{Vì } \int_1^a (2x - 3) dx = 0 \text{ nên } a^2 - 3a + 2 = 0, \text{ suy ra } \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}.$$

Lại có $0 < a_1 < a_2$ nên $a_1 = 1; a_2 = 2$.

$$\text{Nhu vậy } T = 3^{a_1} + 3^{a_2} + \log_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right) = 3^1 + 3^2 + \log_2 \left(\frac{2}{1} \right) = 13.$$

Câu 140. Cho $I = \int_0^1 (4x - 2m^2) dx$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $I + 6 > 0$?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 3

$$\text{Theo định nghĩa tích phân ta có } I = \int_0^1 (4x - 2m^2) dx = (2x^2 - 2m^2x) \Big|_0^1 = -2m^2 + 2.$$

$$\text{Khi đó } I + 6 > 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 2 + 6 > 0 \Leftrightarrow -m^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$$

Mà m là số nguyên nên $m \in \{-1; 0; 1\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 141. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của a để $\int_0^a (2x - 3) dx \leq 4$?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 4

Ta có: $\int_0^a (2x-3)dx = (x^2 - 3x)\Big|_0^a = a^2 - 3a$.

Khi đó: $\int_0^a (2x-3)dx \leq 4 \Leftrightarrow a^2 - 3a \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq a \leq 4$

Mà $a \in \mathbb{N}^*$ nên $a \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 4 giá trị của a thỏa đề bài.

Câu 142. Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi; 3\pi)$ sao cho $\int_{\pi}^b 2 \cos x dx = 1$?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có: $\int_{\pi}^b 2 \cos x dx = 1 \Leftrightarrow 2 \sin x \Big|_{\pi}^b = 1 \Leftrightarrow \sin b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ b = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$.

Do $b \in (\pi; 3\pi)$ nên có 2 số thực $b = \frac{\pi}{6}; b = \frac{5\pi}{6}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 143. Tính tích phân sau: $\int_0^2 |2x-3| dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 2,5

Ta có $\int_0^2 |2x-3| dx = \int_0^{\frac{3}{2}} (3-2x) dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 (2x-3) dx = (3x-x^2)\Big|_0^{\frac{3}{2}} + (x^2-3x)\Big|_{\frac{3}{2}}^2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2} = 2,5$

Câu 144. Cho $0 \leq m \leq 2$ và tích phân $I = \int_0^m |x-2| dx = 2$. Khi đó giá trị của tham số m bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 2

Do $x \in [0; m] \Rightarrow x-2 \leq x-m \leq 0 \Rightarrow |x-2| = 2-x$

Vậy $I = \int_0^m (2-x) dx = \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^m = 2m - \frac{m^2}{2} = 2 \Rightarrow m = 2$

Câu 145. Tính tích phân $I = \int_{-2}^2 |x^2-1| dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 4

$$I = \int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx.$$

Xét $f(x) = x^2 - 1$ trên đoạn $[-2; 2]$.

$$\text{Cho } f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in [-2; 2] \\ x = 1 \in [-2; 2] \end{cases}.$$

Bảng xét dấu:

x	-2		-1		1		2
$x^2 - 1$		+	0	-	0	+	

$$\text{Do đó: } I = \int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_{-2}^{-1} + \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^2 = \left[\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right] + \left[\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right] + \left[\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right] = 4.$$

Câu 146. Biết $I = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx = 4 + a \ln 2 + b \ln 5$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a + b$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 5

$$\text{Ta có } |x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{khi } x \geq 2 \\ 2-x & \text{khi } x \leq 2 \end{cases} \text{ do đó } I = \int_1^2 \frac{2|x-2|+1}{x} dx + \int_2^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx.$$

$$= \int_1^2 \frac{2(2-x)+1}{x} dx + \int_2^5 \frac{2(x-2)+1}{x} dx = \int_1^2 \left(\frac{5}{x} - 2 \right) dx + \int_2^5 \left(2 - \frac{3}{x} \right) dx$$

$$= (5 \ln|x| - 2x) \Big|_1^2 + (2x - 3 \ln|x|) \Big|_2^5 = 4 + 8 \ln 2 - 3 \ln 5 \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow S = a + b = 5.$$

Câu 147. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \\ x+1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Biết $\int_2^0 -3t^2 f(t) dt = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân thức

tối giản. Khi đó $a + b$ bằng bao nhiêu?**Trả lời:**

Lời giải

Đáp án: 37

$$\int_2^0 -3t^2 f(t) dt = -3 \int_2^0 t^2 f(t) dt = 3 \int_0^2 x^2 f(x) dx = 3 \left[\int_0^1 x^2 (x+1) dx + \int_1^2 x dx \right] = \frac{25}{12}.$$

$$\Rightarrow a = 25; b = 12 \Rightarrow a + b = 37$$

Câu 148. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{khi } x < 0 \\ x - 1 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 5 - 2x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Biết $\int_{-5}^9 \frac{1}{7} f(t) dt = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân

thức tối giản. Khi đó $a - b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 88

$$\begin{aligned} \int_{-5}^9 \frac{1}{7} f(t) dt &= \frac{1}{7} \int_{-5}^9 f(t) dt = \frac{1}{7} \int_{-5}^9 f(x) dx = \frac{1}{7} \int_{-5}^0 f(x) dx + \frac{1}{7} \int_0^2 f(x) dx + \frac{1}{7} \int_2^9 f(x) dx \\ &= \frac{1}{7} \int_{-5}^0 (2x^2 - 1) dx + \frac{1}{7} \int_0^2 (x - 1) dx + \frac{1}{7} \int_2^9 (5 - 2x) dx = \frac{109}{21}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = 109; b = 21 \Rightarrow a - b = 88$$

Câu 149. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biết $\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^3 f(x) dx = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là

phân thức tối giản. Khi đó $a - 2b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 4

$$I_1 = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

$$\text{Do } f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_{-1}^0 x dx + \int_0^1 (x^2 - x) dx = -\frac{2}{3}.$$

$$\Rightarrow I_2 = \int_{-1}^3 f(x) dx$$

$$\text{Do } f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_2 = \int_{-1}^0 x dx + \int_0^3 (x^2 - x) dx = 4.$$

$$\text{Vậy } I_1 + I_2 = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow a = 10; b = 3 \Rightarrow a - 2b = 4$$

Câu 150. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{khi } x > 2 \\ -2x+12 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_1^2 f(t) dt + \frac{1}{2} \int_5^{10} f(t) dt$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 84

$$I_1 = \int_1^2 f(t) dt = \int_1^2 f(t) dt = \int_1^2 f(x) dx$$

$$\text{Do } f(x) = \begin{cases} 4x & \text{khi } x > 2 \\ -2x+12 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_1^2 (-2x+12) dx = 9.$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_5^{10} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_5^{10} f(x) dx$$

$$\text{Do } f(x) = \begin{cases} 4x & \text{khi } x > 2 \\ -2x+12 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} \int_5^{10} 4x = 75.$$

$$\text{Vậy } I = I_1 + I_2 = 84$$

Câu 151. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tích phân $\int_1^3 \frac{1}{2} f(x) dx = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và

$\frac{a}{b}$ là phân thức tối giản. Khi đó $a - 3b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 5

$$\text{Ta có: } \int_1^3 \frac{1}{2} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \left[\int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx + \int_2^3 (x^2 - 1) dx \right] = \frac{23}{6}.$$

$$\Rightarrow a = 23; b = 6 \Rightarrow a - 3b = 5$$

Câu 152. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \\ x+1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tích phân $\int_2^0 -3t^2 f(t) dt = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là

phân thức tối giản. Khi đó $a - 2b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 1

$$\int_2^0 -3t^2 f(t) dt = -3 \int_2^0 t^2 f(t) dt = 3 \int_0^2 x^2 f(x) dx = 3 \left[\int_0^1 x^2 (x+1) dx + \int_1^2 x dx \right] = \frac{25}{12}$$

$$\Rightarrow a = 25; b = 12 \Rightarrow a - 2b = 1$$

Câu 153. Cho số thực a và hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \leq 0 \\ a(x-x^2) & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Biết tích phân $\int_{-1}^1 f(x) dx = 1$, tính giá

trị của a .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 12

Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a(x-x^2)) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x) = 0 \end{cases}$, và $f(0) = 0$ nên hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .

$$\text{Do đó } \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 2x dx + \int_0^1 a(x-x^2) dx$$

$$= (x^2) \Big|_{-1}^0 + a \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = -1 + a \left(\frac{1}{6} \right) = \frac{a}{6} - 1.$$

$$\text{Mà } \int_{-1}^1 f(x) dx = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{6} - 1 = 1 \Leftrightarrow a = 12$$

Câu 154. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+b & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ thỏa mãn $\int_0^2 f(x) dx = 13$. Tính $T = a + b - ab$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: -11

Để tồn tại $\int_0^2 f(x) dx \Leftrightarrow f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 2]$ $\Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 1$

(Vì $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(0; 1)$ và $(1; 2)$).

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + 2 = b + 3 \Leftrightarrow a = b + 1 \quad (1)$$

Ta có

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 (3x^2 + b) dx + \int_1^2 (2x + a) dx = (x^3 + bx) \Big|_0^1 + (x^2 + ax) \Big|_1^2$$

$$= a + b + 4$$

$$\text{Mà } \int_0^2 f(x) dx = 13 \Rightarrow a + b = 9 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a = 5; b = 4 \Rightarrow T = a + b - ab = -11$.

Câu 155. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $f(x) = \begin{cases} x+m, & x \geq 0 \\ e^{2x}, & x < 0 \end{cases}$ (m là hằng số). Biết

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = a + \frac{b}{e^2} \text{ trong đó } a, b \text{ là các số hữu tỉ. Tính } 2a + 4b^2.$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 10

Do hàm số liên tục trên \mathbb{R} nên hàm số liên tục tại $x=0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow m=1$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó ta có } \int_{-1}^2 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = \int_{-1}^0 e^{2x} dx + \int_0^2 (x+1) dx \\ &= \frac{e^{2x}}{2} \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} - \frac{e^{-2}}{2} + 4 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2e^2}. \end{aligned}$$

Do đó $a = \frac{9}{2}$; $b = -\frac{1}{2}$. Vậy $2a + 4b^2 = 10$.

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 156. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn

$$f'(x) = (2x+1)[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(0) = -1. \text{ Giá trị của tích phân } \int_0^1 (x^3 - 1)f(x)dx \text{ bằng bao nhiêu?}$$

Lời giải

$$f'(x) = (2x+1)[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2} = -(2x+1), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{f(x)} \right)' = -(2x+1), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{f(x)} = -\int (2x+1)dx = -x^2 - x + C \Rightarrow f(x) = \frac{1}{-x^2 - x + C}.$$

$$\text{Do } f(0) = -1 \Rightarrow C = -1.$$

$$\text{Vậy } f(x) = -\frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

$$\int_0^1 (x^3 - 1)f(x)dx = -\int_0^1 (x^3 - 1) \left(\frac{1}{x^2 + x + 1} \right) dx = \int_0^1 (1 - x)dx = \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} = 0,5$$

Câu 157. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} thỏa mãn $3f'(x).e^{f^3(x)} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết

$$f(1) = 0, \text{ tính tích phân } I = \int_0^{2024} \frac{1}{\sqrt[3]{2 \ln x}} \cdot f(x) dx.$$

Lời giải

Ta có

$$3f'(x).e^{f^3(x)} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0 \Leftrightarrow 3f^2(x).f'(x).e^{f^3(x)} = 2x \Rightarrow \left(e^{f^3(x)} \right)' = 2x \Rightarrow e^{f^3(x)} = \int 2x dx$$

$$\Rightarrow e^{f^3(x)} = x^2 + C$$

$$\text{Mặt khác } f(1) = 0 \Rightarrow e^{f^3(1)} = 1 + C \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow e^{f^3(x)} = x^2 \Rightarrow f^3(x) = \ln x^2 \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{2 \ln x}$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^{2024} \frac{1}{\sqrt[3]{2 \ln x}} \cdot f(x) dx = \int_0^{2024} \frac{1}{\sqrt[3]{2 \ln x}} \cdot \sqrt[3]{2 \ln x} dx = \int_0^{2024} dx = 2024$$

Câu 158. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0) = 1, (f'(x))^3 = e^x (f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Biết } \int_1^2 f(x) dx = a.e^2 + b.e, \text{ với } a, b \in \mathbb{Z} \text{ và } \frac{a}{b} \text{ là phân số tối giản. Tính } a + b.$$

Lời giải

Ta có: $(f'(x))^3 = e^x (f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \sqrt[3]{e^x} \cdot \sqrt[3]{(f(x))^2} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{(f(x))^2}} = \sqrt[3]{e^x} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{(f(x))^2}} = \sqrt[3]{e^x} \Leftrightarrow f'(x) \cdot (f(x))^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^x}$$

$$\Leftrightarrow 3 \left[(f(x))^{\frac{1}{3}} \right]' = \sqrt[3]{e^x} \Leftrightarrow \left[(f(x))^{\frac{1}{3}} \right]' = \frac{1}{3} \sqrt[3]{e^x} \Leftrightarrow (f(x))^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \int \sqrt[3]{e^x} dx \Leftrightarrow (f(x))^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{x}{3}} + C$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow 1 = 1 + C \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow (f(x))^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{x}{3}} \Rightarrow f(x) = e^x$$

$$\text{Do đó: } \int_1^2 e^x dx = e^2 - e \Rightarrow a = 1; b = -1 \Rightarrow a + b = 0$$

Câu 159. Cho hàm số $f(x) > 0$ và thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$.

Biết $\int_1^2 f(x) dx = a \cdot e + b \sqrt{e}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $a - b$.

Lời giải

Ta có

$$(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = e^x \Leftrightarrow (f(x) \cdot f'(x))' = e^x$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot f'(x) = \int e^x dx \Rightarrow f(x) \cdot f'(x) = e^x + C$$

Từ $f(0) = f'(0) = 1$. Suy ra $C = 0$.

$$\text{Vậy } f(x) \cdot f'(x) = e^x$$

Tiếp đến có:

$$2f(x) \cdot f'(x) = e^x \Leftrightarrow (f^2(x))' = e^x \Rightarrow f^2(x) = \int e^x dx \Rightarrow f^2(x) = e^x + C$$

Từ $f(0) = 1$. Suy ra $C = 0$.

$$\text{Vậy } f^2(x) = e^x \Rightarrow f(x) = \sqrt{e^x} \text{ (do } f(x) > 0)$$

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \sqrt{e^x} dx = \int_1^2 e^{\frac{x}{2}} dx = 2e^{\frac{x}{2}} \Big|_1^2 = 2e - 2\sqrt{e} \Rightarrow a = 2; b = -2 \Rightarrow a - b = 4$$

Câu 160. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 2$. Tính

$$I = \int_1^2 f^2(x) dx.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } [f(x) f'(x)]' = [f'(x)]^2 + f(x) f''(x).$$

$$\text{Do đó theo giả thiết ta được } [f(x) f'(x)]' = 2x.$$

Suy ra $f(x)f'(x) = x^2 + C$.

Hơn nữa $f(0) = f'(0) = 2$ suy ra $C = 1$.

$$\Rightarrow f(x)f'(x) = x^2 + 1$$

Tương tự vì $[f^2(x)]' = 2f(x)f'(x)$ nên $[f^2(x)]' = 2(x^2 + 1)$.

$$\text{Suy ra } f^2(x) = \int 2(x^2 + 1)dx \Rightarrow f^2(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x + C$$

$$\text{cũng vì } f(0) = 2 \text{ suy ra } C = 2 \Rightarrow f^2(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x + 2.$$

$$I = \int_1^2 f^2(x)dx = \int_1^2 \left(\frac{2}{3}x^3 + 2x + 2 \right) dx = \frac{15}{2} = 7,5$$

Câu 161. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $(f'(x))^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Theo giả thiết, $\forall x \in \mathbb{R} : (f'(x))^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x$

$$\Leftrightarrow f'(x).f'(x) + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x$$

$$\Leftrightarrow [f(x).f'(x)]' = 15x^4 + 12x$$

$$\Leftrightarrow f(x).f'(x) = \int (15x^4 + 12x)dx = 3x^5 + 6x^2 + C \quad (1).$$

Thay $x=0$ vào (1), ta được: $f(0).f'(0) = C \Leftrightarrow C = 1$.

Khi đó, (1) trở thành: $f(x).f'(x) = 3x^5 + 6x^2 + 1$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x).f'(x)dx = \int_0^1 (3x^5 + 6x^2 + 1)dx$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{2}f^2(x) \right]_0^1 = \left(\frac{1}{2}x^6 + 2x^3 + x \right)_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[f^2(1) - f^2(0)] = \frac{7}{2} \Leftrightarrow f^2(1) - 1 = 7 \Leftrightarrow f^2(1) = 8.$$

Vậy $f^2(1) = 8$.

Câu 162. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = x^3 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 2$.

Biết $f^2(2) = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a - b$.

Lời giải

Ta có: $[f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = x^3 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (f'(x).f(x))' = x^3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta có: $\int (f'(x).f(x))' dx = \int (x^3 - 2x) dx \Leftrightarrow f'(x).f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + C$

Theo đề ra ta có: $f'(0).f(0) = C = 4$

Suy ra: $\int_0^2 f'(x).f(x).dx = \int_0^2 \left(\frac{x^4}{4} - x^2 + 4 \right) dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} \Big|_0^2 = \frac{104}{15} \Leftrightarrow f^2(2) = \frac{268}{15}$.

$\Rightarrow a = 268; b = 15 \Rightarrow a - b = 253$

Câu 163. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} thỏa mãn $(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^x$ và $f(0) = \frac{1}{2}$.

Biết $\int_1^2 (2x+2)f(x)dx = a.e^2 + b.e$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $a - b$.

Lời giải

Ta có

$$(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^x \Leftrightarrow (x+1)f(x) + f(x) + (x+1)f'(x) = e^x$$

$$\Leftrightarrow [(x+1)f(x)] + [(x+1)f(x)]' = e^x \Leftrightarrow e^x [(x+1)f(x)] + e^x [(x+1)f(x)]' = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow [e^x(x+1)f(x)]' = e^{2x}$$

$$\Rightarrow \int [e^x(x+1)f(x)]' dx = \int e^{2x} dx$$

$$\Leftrightarrow e^x(x+1)f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

Mà $f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 0$.

Vậy $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x}{x+1}$

$$\Rightarrow \int_1^2 (2x+2) \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x}{x+1} dx = \int_1^2 e^x dx = e^2 - e \Rightarrow a = 1; b = -1 \Rightarrow a - b = 2$$

Câu 164. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên \mathbb{R} thỏa mãn điều kiện

$$f(x) + x(f'(x) - 2 \sin x) = x^2 \cos x, x \in \mathbb{R} \text{ và } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}. \text{ Tính } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x} dx$$

Lời giải

Từ giả thiết $f(x) + x(f'(x) - 2 \sin x) = x^2 \cos x$

$$\Leftrightarrow f(x) + xf'(x) = x^2 \cos x + 2x \sin x$$

$$\Leftrightarrow (xf(x))' = (x^2 \sin x)'$$

$$\Leftrightarrow xf(x) = x^2 \sin x + C$$

Mặt khác: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = x \sin x$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$$

Câu 165. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) + f(x) = 2x \quad \forall x \in (0; +\infty)$,

$f(1) = 1$. Biết $f(4) = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + b$.

Lời giải

Xét phương trình $2xf'(x) + f(x) = 2x$ (1) trên $(0; +\infty)$: (1) $\Leftrightarrow f'(x) + \frac{1}{2x} \cdot f(x) = 1$ (2).

Đặt $g(x) = \frac{1}{2x}$, ta tìm một nguyên hàm $G(x)$ của $g(x)$.

Ta có $\int g(x) dx = \int \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \ln x + C = \ln \sqrt{x} + C$. Ta chọn $G(x) = \ln \sqrt{x}$.

Nhân cả 2 vế của (2) cho $e^{G(x)} = \sqrt{x}$, ta được: $\sqrt{x} \cdot f'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot f(x) = \sqrt{x}$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} \cdot f(x))' = \sqrt{x} \quad (3).$$

Lấy tích phân 2 vế của (3) từ 1 đến 4, ta được: $\int_1^4 (\sqrt{x} \cdot f(x))' dx = \int_1^4 \sqrt{x} dx$

$$\Rightarrow (\sqrt{x} \cdot f(x)) \Big|_1^4 = \left(\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right) \Big|_1^4 \Rightarrow 2f(4) - f(1) = \frac{14}{3} \Rightarrow f(4) = \frac{1}{2} \left(\frac{14}{3} + 1 \right) = \frac{17}{6} \quad (\text{vì } f(1) = 1).$$

Vậy $f(4) = \frac{17}{6}$.

$$\Rightarrow a = 17; b = 6 \Rightarrow a + b = 23$$

Câu 166. Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $f(1) = 1$,

$[2f(x) + 1 - x^2] f'(x) = 2x[1 + f(x)]$, $\forall x \in [0; 1]$. Biết $\int_0^1 f(x) dx = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối

giản. Tính $a + b$.

Lời giải

Xét trên đoạn $[0; 1]$, theo đề bài: $[2f(x) + 1 - x^2] f'(x) = 2x[1 + f(x)]$

$$\Leftrightarrow 2f(x) \cdot f'(x) = 2x + (x^2 - 1) \cdot f'(x) + 2x \cdot f(x)$$

$$\Leftrightarrow [f^2(x)]' = [x^2 + (x^2 - 1) \cdot f(x)]'$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = x^2 + (x^2 - 1) \cdot f(x) + C \quad (1).$$

Thay $x=1$ vào (1) ta được: $f^2(1) = 1 + C \Leftrightarrow C = 0$ (vì $f(1) = 1$).

Do đó, (1) trở thành: $f^2(x) = x^2 + (x^2 - 1) \cdot f(x)$

$$\Leftrightarrow f^2(x) - 1 = x^2 - 1 + (x^2 - 1) \cdot f(x)$$

$$\Leftrightarrow [f(x) - 1] \cdot [f(x) + 1] = (x^2 - 1) \cdot [f(x) + 1]$$

$$\Leftrightarrow f(x) - 1 = x^2 - 1 \quad (\text{vì } f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) + 1 > 0 \quad \forall x \in [0; 1])$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x^2.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow a = 1; b = 3 \Rightarrow a + b = 4$$

Câu 167. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$, thỏa mãn

$(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4, \forall x \in [0; 1]$ và $f(1) = 2$. Biết $\int_0^1 f(x) dx = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối

giản. Tính $a + b$.

Lời giải

$$\text{Có } (f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4 \Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2 dx + 4 \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (8x^2 + 4) dx = \frac{20}{3}. \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \int_0^1 xf'(x) dx = xf(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = 2 - \int_0^1 f(x) dx \Rightarrow -4 \int_0^1 xf'(x) dx = -8 + 4 \int_0^1 f(x) dx. \quad (2)$$

$$\int_0^1 (2x)^2 dx = \frac{4}{3}. \quad (3)$$

$$\text{Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được } \int_0^1 (f'(x) - 2x)^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f(x) = x^2 + C.$$

$$\text{Có } f(1) = C + 1 = 2 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = x^2 + 1.$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \frac{4}{3} \Rightarrow a = 4; b = 3 \Rightarrow a + b = 7$$

Câu 168. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} thỏa mãn $\begin{cases} f(0) = f'(0) = 1 \\ f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y) - 1 \end{cases}$,

với $x, y \in \mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f(x-1) dx$.

Lời giải

Lấy đạo hàm theo hàm số y

$$f'(x+y) = f'(y) + 3x^2 + 6xy, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Cho } y=0 \Rightarrow f'(x) = f'(0) + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 1 + 3x^2$$

$$\Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = x^3 + x + C \text{ mà } f(0) = 1 \Rightarrow C = 1.$$

$$\text{Do đó } f(x) = x^3 + x + 1.$$

$$\Rightarrow f(x-1) = (x-1)^3 + x - 1 + 1 = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x-1) dx = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 4x - 1) dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (x^3 + x + 1) dx = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Câu 169. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $x.f(x).f'(x) = f^2(x) - x, \forall x \in \mathbb{R}$

và có $f(2) = 1$. Tích phân $I = \int_0^2 f^2(x) dx$

Lời giải

Ta có:

$$x.f(x).f'(x) = f^2(x) - x$$

$$\Leftrightarrow 2x.f(x).f'(x) = 2f^2(x) - 2x$$

$$\Leftrightarrow 2x.f(x).f'(x) + f^2(x) = 3f^2(x) - 2x$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 (x.f^2(x))' dx = 3 \int_0^2 f^2(x) dx - \int_0^2 2x dx$$

$$\Leftrightarrow (x.f^2(x)) \Big|_0^2 = 3I - 4$$

$$\Leftrightarrow 2 = 3I - 4$$

$$\Leftrightarrow I = 2$$

Câu 170. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1; 2]$ thỏa mãn $f(1) = g(1) = 0$ và

$$\begin{cases} \frac{x}{(x+1)^2} g(x) + 2024x = (x+1)f'(x) \\ \frac{x^3}{x+1} g'(x) + f(x) = 2025x^2 \end{cases}, \quad \forall x \in [1; 2]. \text{ Tính tích phân } I = \int_1^2 \left[\frac{x}{x+1} g(x) - \frac{x+1}{x} f(x) \right] dx.$$

Lời giải

$$\text{Từ giả thiết ta có: } \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} g(x) - \frac{x+1}{x} f'(x) = -2024 \\ \frac{x}{x+1} g'(x) + \frac{1}{x^2} f(x) = 2025 \end{cases}, \quad \forall x \in [1; 2].$$

Suy ra:

$$\left[\frac{1}{(x+1)^2} g(x) + \frac{x}{x+1} g'(x) \right] - \left[\frac{x+1}{x} f'(x) - \frac{1}{x^2} f(x) \right] = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x}{x+1} g(x) \right]' - \left[\frac{x+1}{x} f(x) \right]' = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+1} g(x) - \frac{x+1}{x} f(x) = x + C.$$

$$\text{Mà } f(1) = g(1) = 0 \Rightarrow C = -1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+1} g(x) - \frac{x+1}{x} f(x) = x - 1$$

$$I = \int_1^2 \left[\frac{x}{x+1} g(x) - \frac{x+1}{x} f(x) \right] dx = \int_1^2 (x-1) dx = \frac{1}{2} = 0,5$$

CHỦ ĐỀ 2**ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG THỰC TIỄN****PHẦN A****TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN****DẠNG 1****ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG**

• Giả sử $v(t)$ là vận tốc của vật M tại thời điểm t và $s(t)$ là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian t tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Ta có mối liên hệ giữa $s(t)$ và $v(t)$ như sau:

+ Đạo hàm của quãng đường là vận tốc: $s'(t) = v(t)$

+ Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường: $s(t) = \int v(t) dt$

Nếu gọi $a(t)$ là gia tốc của vật M thì ta có mối liên hệ giữa $v(t)$ và $a(t)$ như sau:

+ Đạo hàm của vận tốc là gia tốc: $v'(t) = a(t)$.

+ Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc: $v(t) = \int a(t) dt$

• Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

• Đạo hàm của quãng đường di chuyển của vật theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mọi thời điểm: $v(t) = s'(t)$. Do đó, nếu biết tốc độ $v(t)$ tại mọi thời điểm $t \in [a; b]$ thì tính được quãng đường

di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b theo công thức: $s = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t) dt$

Một vật chuyển động có phương trình gia tốc $a(t)$ thì vận tốc của vật đó sau khoảng thời gian

$\Delta t = t_2 - t_1$ là: $v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dx$.

Bài 1. Một ô tô chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 160 - 10t$ (m/s).



a) Ô tô chuyển động chậm dần cho đến khi dừng hẳn mất hết bao nhiêu giây?

b) Hỏi rằng trong 3s trước khi dừng hẳn vật di chuyển được bao nhiêu mét ?

Bài 2. Một xe mô tô phân khối lớn đang chạy với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc được biểu diễn bởi phương $a(t) = t^2 + 3t$ (m/s^2).



a) Vận tốc của xe mô tô ở giây thứ 3 bằng bao nhiêu kể từ khi tăng tốc?

b) Hỏi quãng đường của xe mô tô đi được trong quãng thời gian 10s đầu tiên sau khi tăng tốc ?

c) Tính vận tốc trung bình của xe mô tô đi trong quãng thời gian 10s đầu tiên sau khi tăng tốc.

Bài 3. Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t) = t^2 - t - 6$ (mét/giây). Quãng đường (mét) vật đi được trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 4$ bằng bao nhiêu?

Bài 4. Một chiếc xe ô tô đang chạy trên đường cao tốc với vận tốc $72(km/h)$ thì tài xế bất ngờ đạp phanh làm cho chiếc ô tô chuyển động chậm với gia tốc $a(t) = -\frac{8}{5}t$ (m/s^2), trong đó t là thời gian tính bằng giây.



a) Kể từ khi đạp phanh, sau 3 giây thì vận tốc của ô tô bằng bao nhiêu?

b) Hỏi kể từ khi đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn thì ô tô di chuyển bao nhiêu mét (m)?

Bài 5.

a) Cho một vật chuyển động với vận tốc $y = v(t)$ (m/s). Cho $0 < a < b$ và hàm vận tốc $v(t) > 0$ với mọi $t \in [a; b]$. Hãy giải thích vì sao $\int_a^b v(t) dt$ biểu thị quãng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian từ a đến b (tính theo giây).

b) Một vật chuyển động với vận tốc được biểu thị bởi phương trình $v(t) = 2 - \sin t$ (m/s). Tính quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}$ (s).

Bài 6. Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t) = t^2 - t - 6$ (m/s).

a) Tìm độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 4$, tức là tính $\int_1^4 v(t) dt$.

b) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này, tức là tính $\int_1^4 |v(t)| dt$.

Bài 7. Một người đi xe mô tô với độ tăng vận tốc tại một thời điểm t (tính theo giây, $t \geq 0$) được cho bởi hàm số $f(t) = \frac{1}{300}t^2 + \frac{1}{1350}t$ (km/s²). Nếu bắt đầu tăng tốc tính từ lúc khởi động máy (vận tốc bằng 0km/h), hỏi mất bao lâu thì người đó đạt đến tốc độ 120 km/h?

Bài 8. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trong thành phố thì các xe khi dừng lại phải cách nhau một khoảng tối thiểu là 1m. Một xe máy di chuyển trên đường thì gặp đèn đỏ từ xa, người điều khiển xe máy đạp phanh và xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 10 - 5t$ (m/s). Hỏi để giữ khoảng cách an toàn, người điều khiển xe máy phải bắt đầu đạp phanh khi cách xe đang dừng phía trước tối thiểu một khoảng bao xa, biết rằng ngay lúc đạp phanh thì xe phía trước đang đứng yên?

Bài 9. Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s²) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

Bài 10. Biết rằng tốc độ v (km/phút) của một ca nô cao tốc thay đổi theo thời gian t (phút) như sau:

$$v(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & \text{khi } 0 \leq t < 2 \\ 1 & \text{khi } 2 \leq t < 15 \\ 4 - \frac{1}{5}t & \text{khi } 15 \leq t \leq 20 \end{cases}$$

Tính quãng đường ca nô di chuyển được trong khoảng thời gian từ 0 tới 20 phút.



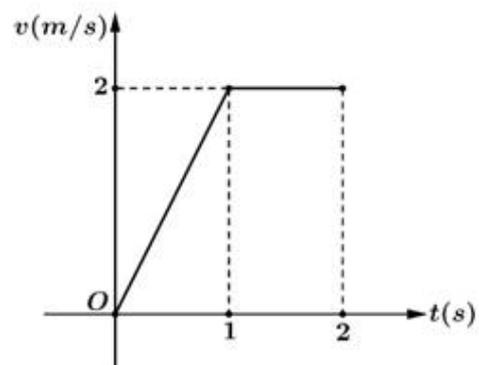
Bài 11. Giả sử tốc độ $v(m/s)$ của một thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất theo thời gian

$$t \text{ (giây) được cho bởi công thức: } v(t) = \begin{cases} t & \text{khi } 0 \leq t \leq 2 \\ 2 & \text{khi } 2 < t \leq 20 \\ 12 - \frac{1}{5}t & \text{khi } 20 < t \leq 24 \end{cases} . \text{ Tính quãng đường chuyển động và}$$

tốc độ trung bình của thang máy.

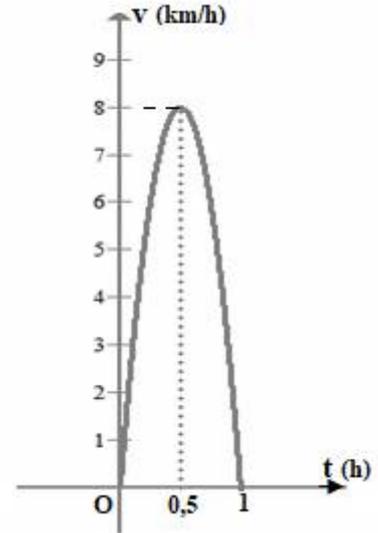


Bài 12. Cho hình vẽ dưới đây là đồ thị vận tốc $v(t) (m/s)$ của một chiếc xuồng đi trên sông trong 2 giây đầu tiên ($t = 0$ là thời điểm chiếc xuồng bắt đầu chuyển động).



- a) Tính quãng đường mà chiếc xuồng đi được trong 1 giây đầu tiên.
- b) Tính vận tốc trung bình của chiếc xuồng đi trong 2 giây đầu tiên.

Bài 13. Bạn Trúc Linh chạy bộ trong thời gian 1 giờ, với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là một phần của parabol có đỉnh $I(0,5;8)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình vẽ.



- a) Tính quãng đường bạn Trúc Linh chạy được trong thời gian 45 phút, kể từ khi bắt đầu chạy.
- b) Tính gia tốc của bạn Trúc Linh tại thời điểm 1 giờ 30 phút, kể từ khi bắt đầu chạy.

DẠNG 2**ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG BÀI TOÁN LIÊN QUAN VẬT LÝ VÀ THỰC TIỄN**

• Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

• Điện lượng chuyển qua tiết diện của dây dẫn của đoạn mạch trong thời gian từ t_1 đến t_2 là:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$$

• Theo định luật Hooke thì lực cần dùng để giữ lò xo giãn thêm x mét từ độ dài tự nhiên là $f(x) = kx$, với k (N/m) là độ cứng của lò xo.

Công cần để kéo dẫn lò xo từ độ dài l_1 đến độ dài l_2 là: $A = \int_{l_1}^{l_2} f(x) dx$.

Bài 1.

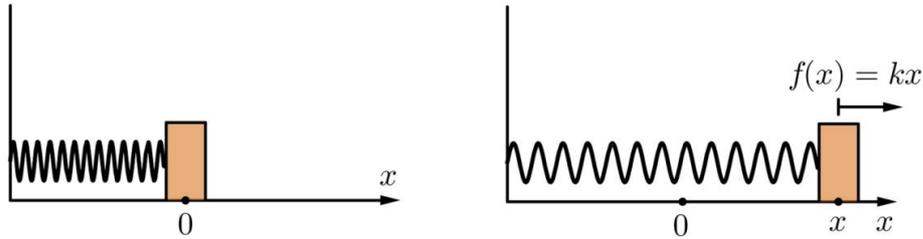
a) Cường độ dòng điện chạy trong cuộn dây là $y = I(t)$ (A). Cho $0 < a < b$ và $I(t) > 0$ với mọi $t \in [a; b]$. Hãy giải thích vì sao $\int_a^b I(t) dt$ biểu thị điện lượng (C) đã phóng qua cuộn dây trong khoảng thời gian từ a đến b (tính theo giây).

b) Cường độ dòng điện chạy trong cuộn dây là $I = 2 \sin(t)$ (A). Tính điện lượng (C) phóng ra trong cuộn dây khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm $t = \frac{\pi}{2}$ (s).

Bài 2. Một mạch kín gồm một nguồn điện có suất điện động biến thiên theo thời gian được biểu diễn bởi $e = 10 \cos(100\pi t)$ (V) và điện trở trong không đáng kể, nối với mạch ngoài có một điện trở $R = 50 \Omega$.

Tính điện lượng chuyển qua điện trở trong thời gian từ $t = 0$ đến $t = \frac{1}{600}$ s?

Bài 3. Một lực có độ lớn 40 N cần thiết để kéo căng một chiếc lò xo có độ dài tự nhiên 10 cm lên 15 cm. Biết rằng theo định luật Hooke trong Vật lý, khi một chiếc lò xo bị kéo căng thêm x so với độ dài tự nhiên của lò xo thì lò xo trở lại với một lực cho bởi công thức $f(x) = kx$ (N), trong đó k là hệ số đàn hồi của lò xo. Hãy tìm công sinh ra khi kéo lò xo có độ dài từ 15 cm đến 20 cm?



Bài 4. Ở nhiệt độ 37°C , một phản ứng hóa học từ chất A, chuyển hóa thành sản phẩm chất B theo phương trình: $A \rightarrow B$. Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị mol L^{-1}) tại thời gian x (giây), $y(x) > 0$ với $x \geq 0$ thỏa mãn hệ thức $y'(x) = -7 \cdot 10^{-4} y(x)$ với $x \geq 0$. Biết rằng $x = 0$ thì nồng độ (đầu) của chất A là $0,05 \text{ mol L}^{-1}$

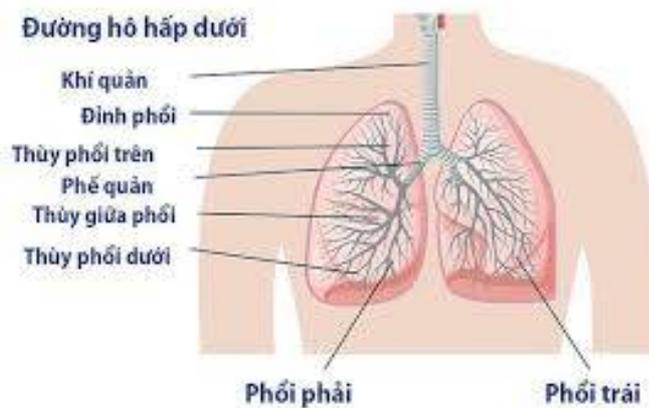
a) Xét hàm số $f(x) = \ln y(x)$ với $x \geq 0$. Hãy tính $f'(x)$ từ đó tìm hàm số $f(x)$.

b) Giả sử ta tính nồng độ trung bình chất A (đơn vị mol L^{-1}) từ thời điểm a (giây) đến thời điểm b (giây) với $0 < a < b$ theo công thức $\frac{1}{b-a} \int_a^b y(x) dx$. Xác định nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm

15 giây đến thời điểm 30 giây.

Bài 5. Giả sử rằng sau t năm, vốn đầu tư của một công ty bất động sản phát sinh lợi nhuận với tốc độ $P'(t) = 126 + t^2$ (triệu đồng/năm). Hỏi sau 10 năm đầu tiên thì công ty bất động thu được lợi nhuận là bao nhiêu (đơn vị triệu đồng)?

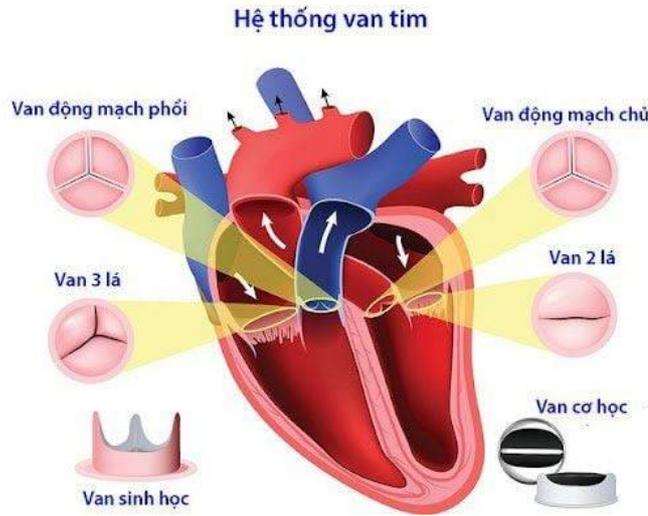
Bài 6. Việc thở là những vòng tuần hoàn, mỗi vòng tính từ lúc bắt đầu hít vào đến lúc kết thúc thở ra, thường kéo dài trong 5s. Vận tốc cực đại của khí là V (l/s) nên vì thế nó được mô hình hoá bởi công thức $v(t) = V \sin \frac{3\pi t}{5}$. Tính thể tích khí hít vào phổi sau thời gian 2s.



Bài 7. Hiệu suất của tim là lưu lượng máu được bơm bởi tim trên một đơn vị thời gian (lưu lượng máu chảy vào động mạch chủ). Để đo hiệu suất của tim, người ta bơm A (mg) chất chỉ thị màu vào tâm nhĩ phải, chảy qua tim rồi vào động mạch chủ và đo nồng độ chất chỉ thị màu còn lại ở tim đến thời điểm T (s) khi chất chỉ thị màu tan sạch. Gọi $c(t)$ là nồng độ (mg/l) chất chỉ thị màu tại thời điểm t (s) thì

hiệu suất của tim được xác định bởi $F = \frac{A}{\int_0^T c(t) dt} (1/s)$. Tính hiệu suất của tim khi bơm 8 mg chất chỉ thị

màu vào tâm nhĩ phải, biết $c(t) = \frac{1}{4}t(12-t)$ với $0 \leq t \leq 12$.



Bài 8. Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động mạch bán kính R không đổi, có thể được mô hình hóa bởi công thức

$$\frac{1}{R-0} \int_0^R k(R^2 - r^2) dr = \frac{1}{R} \left(kR^2 r - k \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^R = \frac{1}{R} \left(kR^3 - k \frac{R^3}{3} \right) = kR^2 - \frac{kR^2}{3} = \frac{2}{3}kR^2.$$

Trong đó k là một hằng số. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0 \leq r \leq R$. Vận tốc lớn nhất của dòng máu lớn hơn vận tốc trung bình bao nhiêu lần?

Bài 9. Tại một nhà máy ta gọi $C(x)$ là tổng chi phí (tính theo triệu đồng) để sản xuất x tấn sản phẩm A trong một tháng. Khi đó đạo hàm $C'(x)$ gọi là chi phí cận biên, cho biết tốc độ tăng tổng chi phí theo lượng sản phẩm được sản xuất. Giả sử chi phí cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức: $C'(x) = 5 - 0,06x + 0,00072x^2$ với $0 \leq x \leq 150$.

Biết rằng $C(0) = 30$ triệu đồng, gọi là chi phí cố định. Tính tổng chi phí khi nhà máy sản xuất 100 tấn sản phẩm A trong tháng.

Bài 10. Một doanh nghiệp sản xuất mặt hàng với chi phí cận biên được mô tả bởi hàm số:

$$f(x) = \frac{1}{10}(x^2 - 16x + 93), \quad x \text{ là số sản phẩm sản xuất}$$

Giả sử rằng doanh nghiệp bán được hết số lượng sản phẩm sản xuất được. Biết rằng doanh thu cận biên

được mô tả bởi hàm số $g(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{x-8} + 5$, với x là số lượng sản phẩm được bán ra. Giả sử rằng tổng chi

phí khi chưa sản xuất sản phẩm nào là 0 đồng và tổng doanh thu khi chưa bán được sản phẩm nào là 0 đồng. Hỏi khi sản xuất 8 sản phẩm và bán hết thì doanh nghiệp thu được lợi nhuận là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai sau dấu phẩy)

PHẦN B

TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì gặp chướng ngại vật, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.



- A. $55m$. B. $25m$. C. $50m$. D. $16m$.

Câu 2. Một ô tô đang chạy với tốc độ $20(m/s)$ thì gặp chướng ngại vật, người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét (m)?



- A. $20m$. B. $30m$. C. $10m$. D. $40m$.

Câu 3. Một ô tô bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0 , sau 6 giây chuyển động thì gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t) = -\frac{5}{2}t + a (m/s)$, ($t \geq 6$) cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng thì ô tô đi được quãng đường là $80m$. Tìm v_0 .



- A. $v_0 = 35 \text{ m/s}$. B. $v_0 = 25 \text{ m/s}$. C. $v_0 = 10 \text{ m/s}$. D. $v_0 = 20 \text{ m/s}$.

Câu 4. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 16 m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t) = 16 - 4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để có 2 ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?



- A. 31. B. 12. C. 33. D. 32.

Câu 5. Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t) = t^2 + 10t$ (m/s) với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc 200 (m/s) thì rời đường băng.



Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là:

- A. $\frac{2500}{3} \text{ (m)}$. B. 2000 (m) . C. 500 (m) . D. $\frac{4000}{3} \text{ (m)}$.

Câu 6. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5s, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc

$a = -70 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng đường S đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.



- A. $S = 96,25 \text{ (m)}$. B. $S = 87,5 \text{ (m)}$. C. $S = 94 \text{ (m)}$. D. $S = 95,7 \text{ (m)}$.

Câu 7. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 2t \text{ (m/s)}$. Đi được 12 giây, người lái xe gặp chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -12 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng đường $s \text{ (m)}$ đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn?



- A. $s = 168 \text{ (m)}$. B. $s = 166 \text{ (m)}$. C. $s = 144 \text{ (m)}$. D. $s = 152 \text{ (m)}$.

Câu 8. Một ô tô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a(t) = 6 - 2t \text{ (m/s}^2\text{)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ô tô bắt đầu chuyển động. Hỏi quãng đường ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ô tô đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét?

- A. $18m$. B. $36m$. C. $22,5m$. D. $6,75m$.



Câu 9. Một xe gắn máy đang chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t) = t^2 + 3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi xe gắn máy bắt đầu tăng tốc.



A. 136m.

B. 126m.

C. 276m.

D. 216m.

Câu 10. Một xe mô tô điếm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15\text{ m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t\text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng đường xe mô tô đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.



A. 70,25 m.

B. 68,25 m.

C. 67,25 m.

D. 69,75 m.

Câu 11. Một chất điếm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}t\text{ (m/s)}$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điếm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a\text{ (m/s}^2\text{)}$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. 21 (m/s) B. 25 (m/s) C. 36 (m/s) D. 30 (m/s)

Câu 12. Một chiếc xuồng chuyển động với gia tốc $a(t) = \frac{1}{t^2 + 3t + 2}\text{ (m/s}^2\text{)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ thời điểm ban đầu. Vận tốc chuyển động của chiếc xuồng là $v(t)$. Vào thời điểm $t = 11\text{ (s)}$ thì vận tốc của chiếc xuồng là $v\text{ (m/s)}$, biết vận tốc ban đầu của chiếc xuồng là $v_0 = 3\ln 2\text{ (m/s)}$.



Giá trị của v gần giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

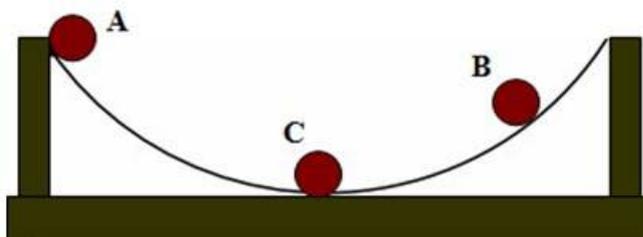
- A. 2,35. B. 2,69. C. 2,29. D. 2,16.

Câu 13. Một chiếc ca nô chạy trên sông có vận tốc theo hàm $v(t) = 3t^2 + 5$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc Ca nô bắt đầu chuyển động. Quãng đường Ca nô đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là:



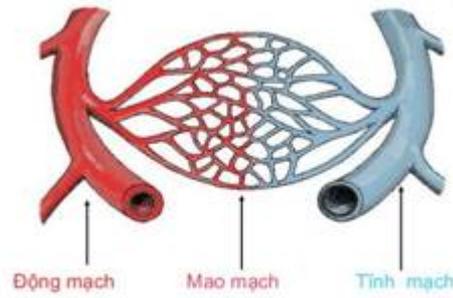
- A. 669 m. B. 966 m. C. 699 m. D. 696 m.

Câu 14. Một viên bi chuyển động từ vị trí A đến vị trí B với gia tốc là hàm $a(t) = 2\cos t$ (m/s²), biết rằng tại thời điểm $t = 0$ (s) viên bi bắt đầu chuyển động (vị trí A) có vận tốc bằng 0 và đến vị trí B tại thời điểm $t = \pi$ (s). Tính quãng đường viên bi đi được từ vị trí A đến vị trí B.



- A. 5(m). B. 3(m). C. 2(m). D. 4(m).

Câu 15. Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động mạch bán kính $R = 9$, có thể được mô hình hóa bởi công thức $v = k(R^2 - r^2)$, trong đó k là một hằng số. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0 \leq r \leq R$.

A. $9k$.B. $45k$.C. $54k$.D. $27k$.

Câu 16. Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x) = -0,0004x + 9,3$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm. Khi đó sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 125 đơn vị sản phẩm là

A. 232,325 triệu đồng.

B. 230,315 triệu đồng.

C. 321,385 triệu đồng.

D. 231,375 triệu đồng.

Câu 17. Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ được định nghĩa là

$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. Giả sử lượng khách tham quan (đơn vị nghìn người) tháp Bà Ponaga Nha Trang trung

bình tại thời điểm t ngày trong khoảng thời gian từ ngày 01/05/2024 đến ngày 31/05/2024 được mô hình hóa bởi hàm số: $Q(x) = 100 + 10(t - 60)$ với $1 \leq t \leq 31$.



Lượng khách tham quan trung bình tháng 05/2024 ở tháp Bà Ponaga Nha Trang là bao nhiêu người?

A. 220 nghìn người.

B. 180 nghìn người.

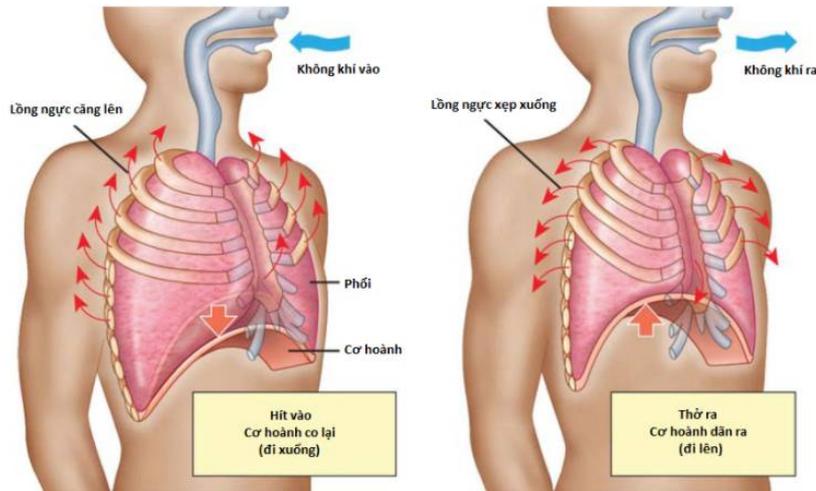
C. 240 nghìn người.

D. 200 nghìn người.

Câu 18. Công ty vừa đưa vào một dây chuyền sản xuất để chế tạo máy tính mới. Sau vài tuần, sản lượng đạt được $q(t) = 4000 \left(1 - \frac{10}{(10-t)^2} \right)$ máy/tuần. Số máy sản xuất được từ tuần thứ ba đến hết tuần thứ tư gần với số nào dưới đây nhất.

- A. 5000 máy tính. **B. 6333 máy tính.** C. 6244 máy tính. D. 5860 máy tính.

Câu 19. Việc thở là những vòng tuần hoàn, mỗi vòng tính từ lúc bắt đầu hít vào đến lúc kết thúc thở ra, thường kéo dài trong 5s. Vận tốc cực đại của khí là V (lít/giây), vì thế nó được mô hình hoá bởi $v(t) = V \sin \frac{2\pi t}{5}$. Tính thể tích khí hít vào phổi sau thời gian 2 giây.



- A. 1,44V lít khí.** B. 1,22V lít khí.. C. 2,14V lít khí.. D. 1,64V lít khí..

Câu 20. Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là 90 m^3 và sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là 504 m^3 . Tính thể tích của lượng nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.



- A. $1600(m^3)$. **B. $1548(m^3)$.** C. $1540(m^3)$. D. $1458(m^3)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 21. Một chiếc mô tô đang chạy với vận tốc 18 (m/s) thì người lái hãm phanh. Sau khi hãm phanh, mô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 18 - 36t \text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian được tính bằng giây kể từ lúc mô tô bắt đầu hãm phanh.



- a) Thời gian kể từ lúc hãm phanh đến lúc xe mô tô dừng hẳn là $0,5$ giây.
- b) Quãng đường xe mô tô đi được sau $0,3$ giây kể từ lúc hãm phanh là $3,78$ mét.
- c) Quãng đường kể từ lúc hãm phanh đến lúc xe mô tô dừng hẳn là $5,5$ mét.
- d) Gia tốc tức thời của chuyển động xe mô tô là $-36 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

Câu 22. Một ô tô đang di chuyển với tốc độ 20 (m/s) thì hãm phanh nên tốc độ (m/s) theo thời gian t được tính theo công thức $v(t) = 20 - 5t$, với $0 \leq t \leq 4$.



- a) Sau khi hãm phanh, tốc độ của xe tăng.
- b) Tốc độ của xe tại thời điểm 3 (giây) sau hãm phanh là 5 (m/s)
- c) Sau khi hãm phanh 4 (giây) thì xe dừng hẳn.
- d) Kể từ khi hãm phanh đến khi dừng hẳn, xe đi được quãng đường 40 (m) .

Câu 23. Sau khi xuất phát, xe đạp di chuyển với tốc độ $v(t) = 2,01t - 0,025t^2$, với $0 \leq t \leq 10$. Trong đó $v(t)$ tính theo (m/s) , thời gian t tính theo s với $t = 0$ là thời điểm xe đạp xuất phát.



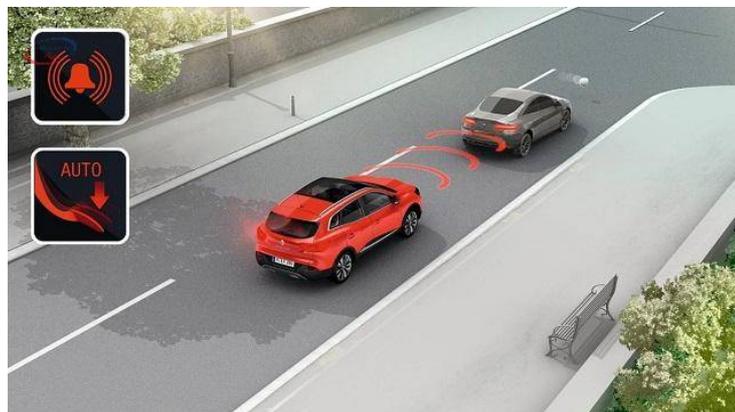
a) Quãng đường xe đạp di chuyển được tính theo công thức là $s(t) = 2,01 - 0,05t$ ($0 \leq t \leq 10$)

b) Quãng đường xe đạp di chuyển được trong 3 giây là $8,82(m)$.

c) Quãng đường xe đạp di chuyển được trong giây thứ 9 xấp xỉ $15,28(m)$ (kết quả làm tròn đến phần trăm của mét).

d) Trong khoảng thời gian không quá 10s đầu, khi vận tốc đạt giá trị lớn nhất thì gia tốc của xe đạp là $2,51(m/s^2)$.

Câu 24. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu $1(m)$. Một ô tô A đang chạy với vận tốc $15(m/s)$ bỗng gặp ô tô B đang đứng chờ đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều bởi vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t) = 15 - 5t$ (m/s). Gọi $s(t)$ là quãng đường ô tô A di chuyển ở thời điểm t giây.



a) Quãng đường ô tô A di chuyển được tính theo công thức là $s(t) = 15t - \frac{5}{2}t^2 + 15$.

b) Thời gian ô tô A từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn hết 3 giây.

c) Quãng đường ô tô A đi được từ lúc ô tô A đạp phanh đến khi dừng hẳn là $22,5(m)$.

d) Để hai ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là $23,5(m)$.

Câu 25. Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang (chiều dương hướng sang phải) với gia tốc phụ thuộc vào thời gian $t(s)$ là $a(t) = 2t - 7$ (m/s^2). Biết vận tốc đầu bằng 6 (m/s).

a) Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(s)$ xác định bởi $v(t) = t^2 - 7t + 6$.

b) Tại thời điểm $t = 7$ (s), vận tốc của chất điểm là $5(m/s)$

c) Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 7$ là $18(m)$.

d) Trong 8 giây đầu tiên, thời điểm chất điểm xa nhất về phía bên phải là $t = 6$ (s).

Câu 26. Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t(m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng $a(m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A .

a) Quãng đường chuyển động của chất điểm A tại thời điểm t theo hàm $s(t) = \frac{1}{540}t^3 + \frac{11}{36}t^2 + C$ (m), với C là hằng số.

b) Quãng đường chất điểm B đi được từ lúc xuất phát đến khi gặp chất điểm B là $70(m)$.

c) Vận tốc của chất điểm B là $v_B(t) = a.t$ (m/s).

d) Vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $10(m/s)$.

Câu 27. Lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của sản phẩm **iPhone 16 Pro** được mô hình hóa bằng công thức $P'(x) = -0,0008x + 10,4$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x sản phẩm.



a) Lợi nhuận khi bán được x sản phẩm **iPhone 16 Pro** được tính bằng $P(x) = -0,0004x^2 + 10,4x$.

b) Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm **iPhone 16 Pro** đầu tiên là 525 triệu đồng.

c) Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 sản phẩm **iPhone 16 Pro** là 50,1 triệu đồng.

d) Biết sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a sản phẩm **iPhone 16 Pro** lớn hơn 517 triệu đồng, khi đó giá trị nhỏ nhất của a là 101.

Câu 28. Giả sử chi phí mua và bảo trì một thiết bị trong x năm có thể được mô hình hóa theo công thức

$$C = 5000 \left(25 + 3 \int_0^x t^{\frac{1}{4}} dt \right).$$

a) Chi phí mua 1 sản phẩm là 125000 đồng.

b) Chi phí bảo trì năm đầu tiên của 1 sản phẩm là 10000 đồng.

c) Sau 6 năm thì số tiền mua một sản phẩm bằng số tiền bảo trì sản phẩm đó.

d) Nếu một nhà đầu tư có 10 triệu, thì họ có thể mua và bảo trì tối đa 29 sản phẩm trong 10 năm.

Câu 29. Tại một nhà máy sản xuất một loại phân bón. Gọi $P(x)$ là lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán x (tấn) sản phẩm trong một tuần. Khi đó đạo hàm $P'(x)$ gọi là lợi nhuận cận biên, cho biết tốc độ tăng lợi nhuận theo lượng sản phẩm bán được. Giả sử lợi nhuận cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức: $P'(x) = 17 - 0,025x$ với $0 \leq x \leq 1000$. Biết nhà máy lỗ 24 triệu đồng nếu không bán được lượng sản phẩm nào trong tuần.



a) Công thức lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán x (tấn) sản phẩm trong một tuần là $P(x) = 17x - 0,0125x^2$.

b) Lợi nhuận nhà máy thu được khi bán 80 tấn sản phẩm trong tuần là 1 tỉ 256 triệu đồng.

c) Nếu nhà máy bán được từ 1,2 tấn sản phẩm trên tuần trở lên thì nhà máy luôn có lãi.

b) Lợi nhuận nhà máy thu được lớn nhất khi bán 680 tấn sản phẩm trong tuần.

Câu 30. Ở nhiệt độ 36°C , một phản ứng hóa học từ chất đầu A , chuyển hóa thành chất sản phẩm B theo phương trình: $A \rightarrow B$. Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị mol L^{-1}) tại thời điểm x (giây), $y(x) > 0$ với $x \geq 0$, thỏa mãn hệ thức: $y'(x) = -7 \cdot 10^{-4} y(x)$ với $x \geq 0$. Biết rằng tại $x = 0$, nồng độ (đầu) của A là $0,05 \text{ mol L}^{-1}$. Xét hàm số $f(x) = \ln y(x)$ với $x \geq 0$.

a) $f'(x) = -7 \cdot 10^{-4}$

b) $f(x) = -7 \cdot 10^{-4} x + \ln(0,05)$

c) $y(30) - y(15) = -6 \cdot 10^{-4}$

d) Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây gần bằng 0,05.

Câu 31. Giả sử tốc độ $v(m/s)$ của một thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất theo thời gian

t (giây) được cho bởi công thức: $v(t) = \begin{cases} t & \text{khi } 0 \leq t \leq 2 \\ 2 & \text{khi } 2 < t \leq 20 \\ 12 - 0,5t & \text{khi } 20 < t \leq 24 \end{cases}$.



- a) Tốc độ tại thời điểm giây thứ 2 của thang máy là $2(m/s)$.
- b) Gia tốc chuyển động của thang máy tại thời điểm giây thứ 10 là $2(m/s^2)$.
- c) Quãng đường chuyển động của thang máy từ tầng 1 lên tầng cao nhất là $40(m)$.
- d) Tốc độ trung bình của thang máy từ tầng 1 lên tầng cao nhất là $1,5(m/s)$.

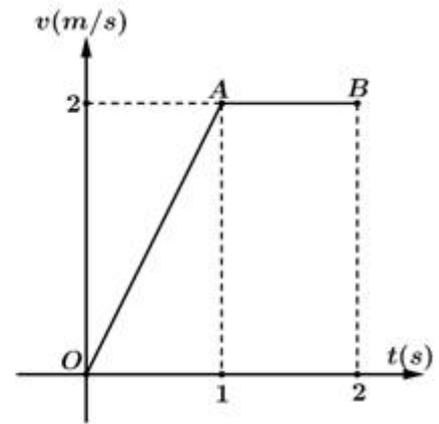
Câu 32. Khảo sát chuyển động của xe khách trong 30 phút trên một quãng đường ta thu được kết quả: vận tốc v (mét/phút) của xe khách theo thời gian t (phút) được biểu diễn bởi hàm số:

$$v(t) = \begin{cases} 100t & \text{khi } 0 \leq t \leq 10 \\ 20t + 800 & \text{khi } 10 < t \leq 20 \\ -10t + 1400 & \text{khi } 20 < t \leq 30 \end{cases}$$



- a) Vận tốc của xe khách ở phút thứ 8 là 800 (mét/phút)
- b) Vận tốc của xe khách ở phút thứ 20 là 1000 (mét/phút)
- c) Quãng đường chuyển động của xe khách trong 30 phút khảo sát là $2750(m)$.
- d) Vận tốc trung bình của xe khách trong 30 phút khảo sát là 910 (mét/phút) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét/phút)

Câu 33. Một chiếc xe đạp chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường thẳng tại thời điểm $0 \leq t \leq 1(s)$ và $1 < t \leq 2(s)$ với vận tốc được cho bởi đồ thị trong hệ trục tOv như hình sau:



Gọi quãng đường của chiếc xe đạp tại thời điểm t là $s(t)$.

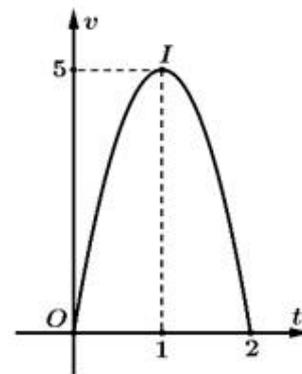
a) Vận tốc của chiếc xe đạp tại thời điểm t được xác định bởi $v(t) = \begin{cases} 2t & \text{khi } 0 \leq t \leq 1 \\ 2 & \text{khi } 1 < t \leq 2 \end{cases}$.

b) Quãng đường chiếc xe đạp đi được trong 1 giây đầu tiên được xác định bởi công thức $s(t) = \int_0^1 v(t) dt$

c) Quãng đường chiếc xe đạp đi được trong khoảng thời gian từ 1 giây đến 2 giây được xác định bởi công thức $s(t) = \int_0^2 v(t) dt$

d) Quãng đường mà chiếc xe đạp đi được trong 2 giây đầu tiên là $4(m)$.

Câu 34. Bạn Nam chạy bộ trong 2 giờ, vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị là một phần của đường Parabol với đỉnh $I(1;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung Ov như hình vẽ.



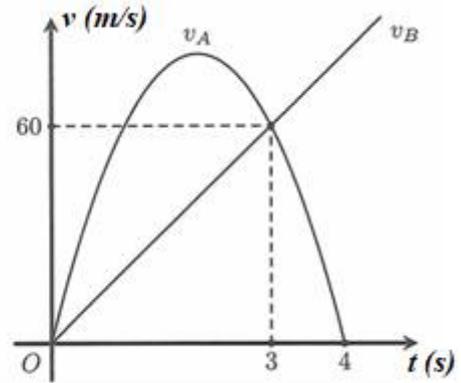
a) Vận tốc chạy bộ của bạn Nam trong giờ thứ 2 tăng dần.

b) Vận tốc lớn nhất trong 2 giờ chạy của bạn Nam là $5(km/h)$.

c) Gia tốc chạy bộ của bạn Nam tại thời điểm 1,5 giờ là $5(km/h)$.

d) Quãng đường bạn Nam chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy là $6,63(km)$ (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân).

Câu 35. Cho đồ thị biểu diễn vận tốc của hai xe A và B khởi hành cùng một lúc và cùng vạch xuất phát, đi cùng chiều trên một con đường. Biết đồ thị biểu diễn vận tốc $v_A(t)$ (m/s) của xe A là một đường Parabol và đồ thị biểu diễn vận tốc $v_B(t)$ (m/s) của xe B là một đường thẳng như hình vẽ bên. Biết rằng xe A sẽ dừng lại khi vận tốc bằng 0.



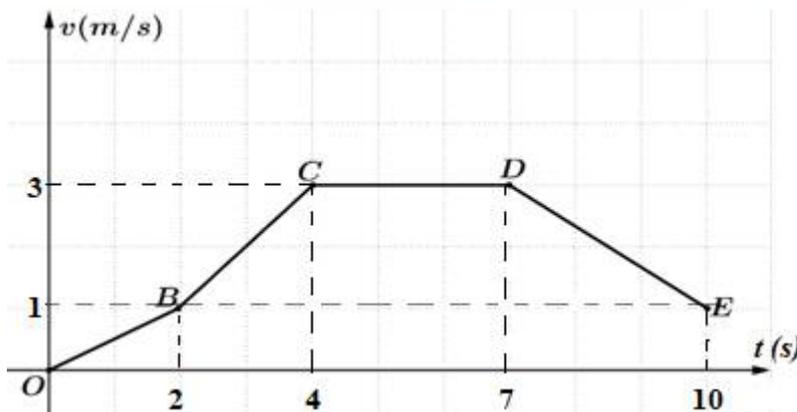
a) Vận tốc của xe B tại thời điểm t giây là $v_B(t) = 20t$ (m/s).

b) Vận tốc của xe A tại thời điểm t giây là $v_A(t) = 20t^2 - 80t$ (m/s).

c) Quãng đường xe A đi được sau 4 giây là 213,3(m) (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của mét).

d) Sau 5 giây kể từ lúc xuất phát thì khoảng cách giữa hai xe là 38,7(m) (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của mét).

Câu 36. Cho hình vẽ dưới đây là đồ thị vận tốc $v(t)$ (m/s) của một ca nô chạy trên sông trong 10 giây đầu tiên ($t = 0$ là thời điểm ca nô bắt đầu chuyển động).



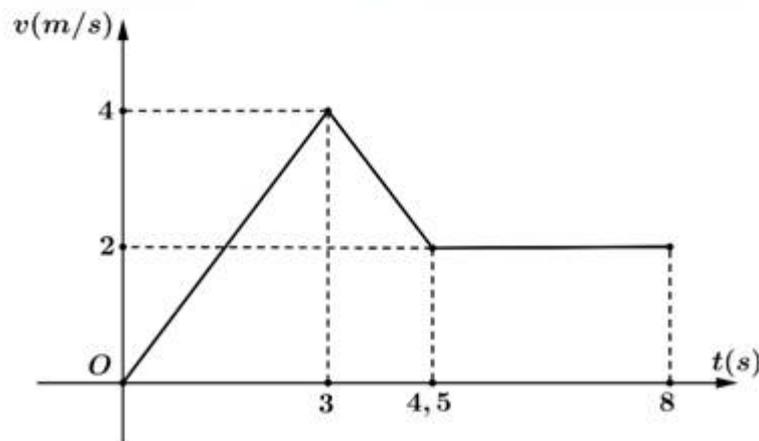
a) Vận tốc chạy của ca nô chạy trong khoảng thời gian từ 4 giây đầu tiên tăng dần.

b) Trong 10 giây đầu tiên, vận tốc ca nô chạy lớn nhất trong 4 giây.

c) Trong 10 giây đầu tiên, ca nô chạy với vận tốc $v(t)$ theo hàm $v(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & \text{khi } 0 \leq t \leq 2 \\ t-1 & \text{khi } 2 < t \leq 4 \\ 3 & \text{khi } 4 < t \leq 7 \\ -\frac{2}{3}t + \frac{23}{3} & \text{khi } 7 < t \leq 10 \end{cases}$

d) Vận tốc chạy trung bình của ca nô 10 giây đầu tiên là $2,5(m/s)$.

Câu 37. Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t)$ (m/s) trong 8 giây đầu tiên ($t = 0$ là thời điểm máy bay bắt đầu chuyển động) được cho bởi đồ thị ở hình vẽ dưới đây.



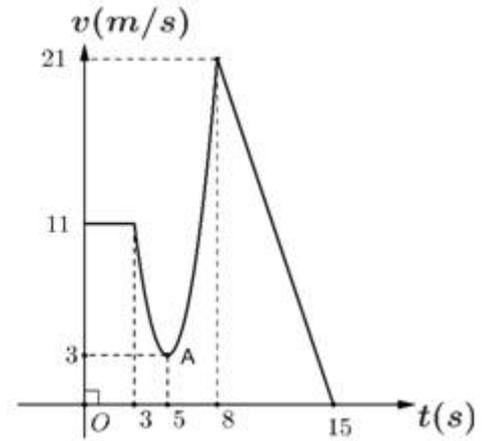
a) Trong 8 giây đầu tiên, vận tốc của máy bay lớn nhất là $4(m/s)$.

b) Trong 8 giây đầu tiên, vận tốc của máy bay không đổi trong thời gian 3 giây.

c) Quãng đường mà máy bay di chuyển được trong 3 giây đầu tiên là $11(m)$.

d) Vận tốc chạy trung bình của máy bay 8 giây đầu tiên là $4,521(m/s)$.

Câu 38. Chạt chiếc ca nô chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)$ (m/s) có dạng đường thẳng tại thời điểm $0 \leq t \leq 3(s)$ và $8 \leq t \leq 15(s)$ và $v(t)$ có dạng đường Parabol khi $3 \leq t \leq 8(s)$ như đồ thị bên dưới.



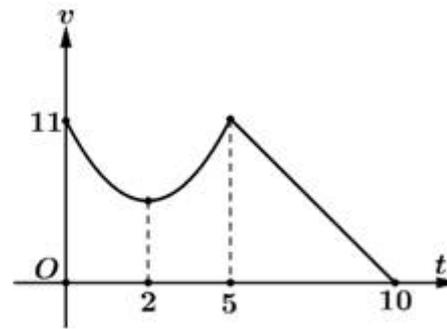
a) Vận tốc của ca nô tại thời điểm $t = 5(s)$ là $3(m/s)$.

b) Quãng đường ca nô di chuyển được trong 3 giây đầu tiên là: $\int_0^3 11 dt (m)$

c) Quãng đường ca nô đi được trong khoảng thời gian từ 8 giây đến 15 giây bằng $70,5(m)$

d) Vận tốc trung bình v_{tb} của ca nô trong khoảng thời gian từ 3 đến 8 giây bằng $7,67(m/s)$ (kết quả làm tròn đến phần trăm của mét/giây).

Câu 39. Một ô tô chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường Parabol khi $0 \leq t \leq 5(s)$ và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5 \leq t \leq 10(s)$. Biết đỉnh Parabol là $I(2,3)$ như đồ thị bên dưới.



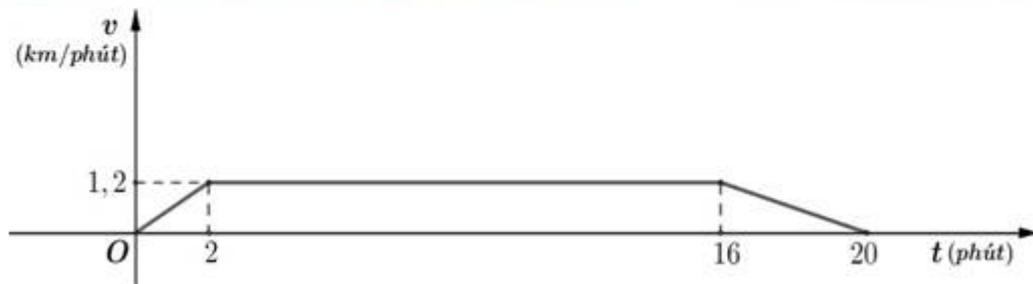
a) Vận tốc của ô tô tăng dần từ giây thứ 3 đến giây thứ 5.

b) Vận tốc của ô tô tại thời điểm $t = 4$ giây là $11(m/s)$.

c) Gia tốc của ô tô tại thời điểm $t = 6$ giây là $-35,2(m/s^2)$.

d) Quãng đường ô tô đi được trong thời gian $0 \leq t \leq 10(s)$ là $60(m)$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét).

Câu 40. Tốc độ $v(km/phút)$ của một ca nô cao tốc thay đổi theo thời gian $t(phút)$ ($t = 0$ là thời điểm ca nô bắt đầu chuyển động) như đồ thị ở hình vẽ sau:



- a) Tốc độ của ca nô tăng dần trong 2 phút đầu tiên kể từ khi nó bắt đầu chuyển động.
- b) Tốc độ của ca nô ở phút thứ 17 là $0,9(\text{km} / \text{phút})$.
- c) Quãng đường ca nô di chuyển được trong 20 phút đầu tiên là $19,4(\text{km})$.
- d) Tốc độ trung bình của ca nô trong khoảng thời gian 20 phút đầu tiên là $1,02(\text{km} / \text{phút})$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 41. Một ô tô đang chạy với vận tốc là 12 (m/s) thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -6t + 12 \text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?



Trả lời:

Câu 42. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10 \text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?



Trả lời:

Câu 43. Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t \text{ (m/s)}$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng $a \text{ (m/s}^2\text{)}$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng bao nhiêu mét/giây?

Trả lời:

Câu 44. Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 7t \text{ (m/s)}$. Đi được $5(s)$ người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -35 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng đường (đơn vị mét) của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn?



Trả lời:

Câu 45. Một chiếc ca nô đang chuyển động trên sông với vận tốc $v(t) = 4t + 3$ (m/s), với t là thời gian tính bằng giây. Quãng đường chiếc ca nô đi được trong khoảng từ 3 đến 5 giây là bao nhiêu mét?



Trả lời:

Câu 46. Một người đang lái xe chiếc ca nô với vận tốc 24 (m/s) thì người lái phát hiện phía trước có chướng ngại vật nên cần giảm tốc độ của ca nô. Sau khi giảm tốc độ, ca nô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -8t + 24$ (m/s), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc giảm tốc độ. Hỏi từ lúc giảm tốc độ đến khi ca nô dừng hẳn, ca nô đi chuyển quãng đường bao nhiêu mét?



Trả lời:

Câu 47. Một chiếc mô tô đang chuyển động trên đường với vận tốc $v(t) = t^2 - 4t + 1$ (m/s), với t là thời gian tính bằng giây. Quãng đường xe mô tô đi được trong khoảng từ 2 đến 8 giây là bao nhiêu?



Trả lời:

Câu 48. Bạn Minh Hiền đang lái xe với vận tốc $5(m/s)$ thì nhận thấy phía trước đèn giao thông đang chuẩn bị chuyển sang đèn đỏ nên cần giảm tốc độ của xe để đợi đèn đỏ. Sau khi đạp phanh, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -0,5t + 5 (m/s)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi xe dừng hẳn, xe di chuyển quãng đường bao nhiêu mét?



Trả lời:

Câu 49. Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ được định nghĩa là

$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. Giả sử nhiệt độ (tính bằng $^{\circ}C$) tại thời điểm t giờ trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng

đến 12 giờ trưa ở Thành phố Nha Trang vào ngày 24/12/2024 được mô hình hóa bởi hàm số

$$T(t) = 2t + 11, \text{ với } 6 \leq t \leq 12.$$

Nhiệt độ trung bình từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa ngày 24/12/2024 của Thành phố Nha Trang là bao nhiêu $^{\circ}C$?

Trả lời:

Câu 50. Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ được định nghĩa là

$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. Giả sử lượng mưa trung bình (tính bằng mm) tại thời điểm t ngày trong khoảng thời

gian từ ngày 01/12/2024 đến ngày 31/12/2024 ở Thành phố Nha Trang được mô hình hóa bởi hàm số:

$$M(x) = 80 + 10(t - 8) \text{ với } 1 \leq t \leq 31.$$

Lượng mưa trung bình tháng 12/2024 của Thành phố Nha Trang là bao nhiêu mm?

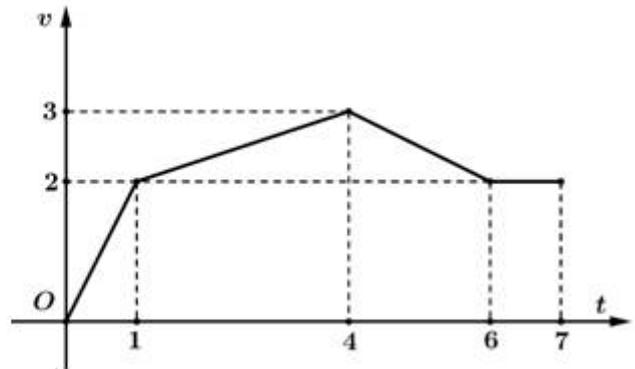
Trả lời:

Câu 51. Cửa hàng điện thoại di động của chị Minh Nhân có lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x) = -0,01x + 2$. Lợi nhuận của sản phẩm trên khi doanh số là 200 với sản phẩm lớn hơn doanh số 150 sản phẩm là bao nhiêu triệu đồng, biết $P(x)$ là lợi nhuận tính bằng triệu đồng?



Trả lời:

Câu 52. Một chiếc xe ô tô chuyển động với đồ thị vận tốc được biểu diễn theo đường gấp khúc được minh họa trên hệ trục Otv như hình vẽ (mỗi đơn vị trên Ot ứng với 1 phút và mỗi đơn vị trên Ov ứng với $0,4(km / phút)$).



Quãng đường mà xe di chuyển trong 7 phút là bao nhiêu km?

Trả lời:

Câu 53. Biết rằng tốc độ v (km / phút) của một canô cao tốc thay đổi theo thời gian t (phút) được cho

bởi công thức sau:
$$v(t) = \begin{cases} \frac{t}{3} & \text{khi } 0 \leq t < 3 \\ 1 & \text{khi } 3 \leq t < 10 \\ 5 - 0,4t & \text{khi } 10 \leq t \leq 18 \end{cases}$$

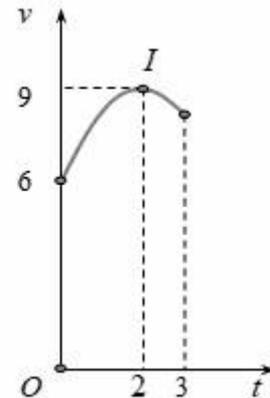


Quãng đường canô di chuyển được trong khoảng từ 0 đến 18 phút là bao nhiêu km?

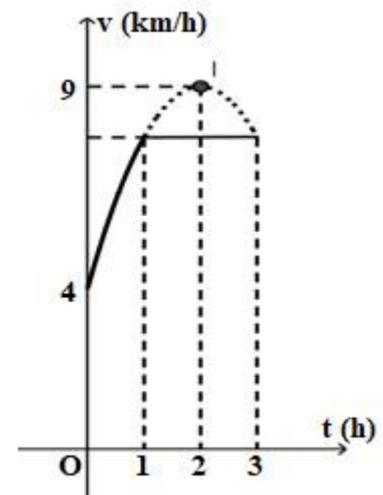
Trả lời:

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

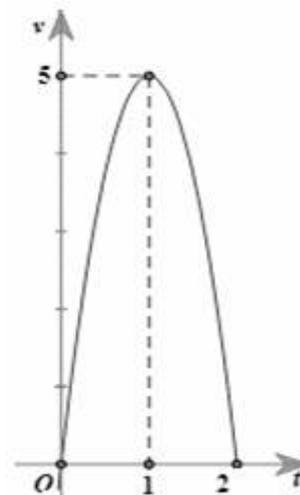
Câu 54. Bạn Minh Hiền chạy bộ trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc thời gian $t(h)$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên dưới. Tính quãng đường mà bạn Minh Hiền chạy được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến phần chục của kilômét).



Câu 55. Một vận động viên chạy bộ trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc như hình bên dưới. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến phần chục của kilômét).

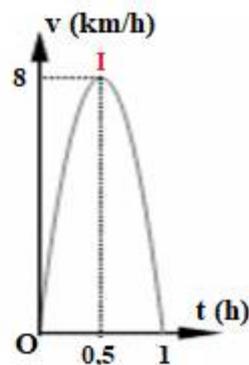


Câu 56. Một người chạy trong 2 giờ, vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị là 1 phần của đường Parabol với đỉnh $I(1;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung Ov như hình vẽ bên dưới. Tính quãng đường người đó chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân của kilômét).

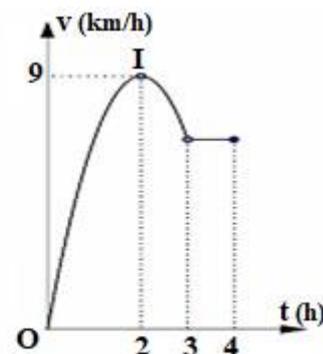


Câu 57. Một người chạy bộ trong thời gian 1 giờ, vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên dưới.

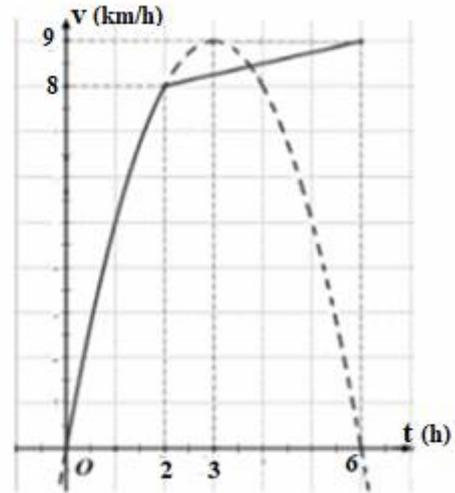
Tính quãng đường (đơn vị km) người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy.



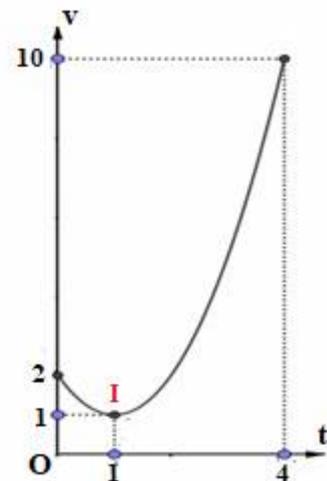
Câu 58. Một vận động viên leo núi đi bộ trong 4 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc thời gian $t(h)$ có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ, kể từ khi bắt đầu vận động viên đó đi, đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường (đơn vị km) mà vận động viên leo núi đi bộ được trong 4 giờ đó.



Câu 59. Một chiếc xuồng đi trên sông trong 6 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị như hình bên dưới. Trong khoảng thời gian 2 giờ từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị là một phần đường Parabol có đỉnh $I(3;9)$ và có trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại, đồ thị vận tốc là một đường thẳng có hệ số góc bằng $\frac{1}{4}$. Tính quãng đường (đơn vị km) mà chiếc xuồng đi được trong 6 giờ (kết quả làm tròn đến 1 chữ số thập phân của kilômét).



Câu 60. Một chiếc xuồng đi trên sông trong 4 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc thời gian $t(h)$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên dưới. Tính quãng đường (đơn vị km) mà chiếc xuồng đi được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát (kết quả làm tròn đến 1 chữ số thập phân của kilômét).



CHỦ ĐỀ 2**ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG THỰC TIỄN****PHẦN A****TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN****DẠNG 1****ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG**

• Giả sử $v(t)$ là vận tốc của vật M tại thời điểm t và $s(t)$ là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian t tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Ta có mối liên hệ giữa $s(t)$ và $v(t)$ như sau:

+ Đạo hàm của quãng đường là vận tốc: $s'(t) = v(t)$

+ Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường: $s(t) = \int v(t) dt$

Nếu gọi $a(t)$ là gia tốc của vật M thì ta có mối liên hệ giữa $v(t)$ và $a(t)$ như sau:

+ Đạo hàm của vận tốc là gia tốc: $v'(t) = a(t)$.

+ Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc: $v(t) = \int a(t) dt$

• Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

• Đạo hàm của quãng đường di chuyển của vật theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mọi thời điểm: $v(t) = s'(t)$. Do đó, nếu biết tốc độ $v(t)$ tại mọi thời điểm $t \in [a; b]$ thì tính được quãng đường

di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b theo công thức: $s = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t) dt$

Một vật chuyển động có phương trình gia tốc $a(t)$ thì vận tốc của vật đó sau khoảng thời gian

$$\Delta t = t_2 - t_1 \text{ là: } v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dx .$$

Bài 1. Một ô tô chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 160 - 10t$ (m/s).



- a) Ô tô chuyển động chậm dần cho đến khi dừng hẳn mất hết bao nhiêu giây?
 b) Hỏi rằng trong 3s trước khi dừng hẳn vật di chuyển được bao nhiêu mét ?

Lời giải

a) Ô tô chuyển động chậm dần cho đến khi dừng hẳn thì: $v(t) = 0 \Leftrightarrow 160 - 10t = 0 \Leftrightarrow t = 16(s)$.

b) Do ô tô chuyển động chậm dần cho đến khi dừng hẳn mất hết 16 giây nên quãng đường ô tô đi trong 3s trước khi dừng hẳn là quãng đường đi được từ giây thứ 13 đến giây thứ 16 :

$$s = \int_{13}^{16} v(t) dt = \int_{13}^{16} (160 - 10t) dt = (160t - 5t^2) \Big|_{13}^{16} = 45(m)$$

Bài 2. Một xe mô tô phân khối lớn đang chạy với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc được biểu diễn bởi phương $a(t) = t^2 + 3t$ (m/s^2).



- a) Vận tốc của xe mô tô ở giây thứ 3 bằng bao nhiêu kể từ khi tăng tốc?
 b) Hỏi quãng đường của xe mô tô đi được trong quãng thời gian 10s đầu tiên sau khi tăng tốc ?
 c) Tính vận tốc trung bình của xe mô tô đi trong quãng thời gian 10s đầu tiên sau khi tăng tốc.

Lời giải

a) Xe mô tô tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 3t$ (m/s^2). Vận tốc $v(t)$ chính là nguyên hàm của hàm số $a(t)$.

$$v(t) = \int a(t) dt = \int (t^2 + 3t) dt = \frac{t^3}{3} + 3\frac{t^2}{2} + C.$$

Vận tốc ban đầu của xe mô tô là $v_0 = 10m/s$ nên

$$v(0) = 10 \Leftrightarrow \frac{0^3}{3} + 3\frac{0^2}{2} + C = 10 \Leftrightarrow C = 10 \Rightarrow v(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + 10.$$

Vận tốc của xe mô tô ở giây thứ 3 bằng bao nhiêu kể từ khi tăng tốc là:

$$v(3) = \frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2} + 10 = 32,5 (m/s)$$

b) Mặt khác, đạo hàm của quãng đường s chính là vận tốc v của xe chuyển động tại thời điểm t .

Suy ra, quãng đường đi được của xe mô tô sau 10s đầu tiên bằng tích phân của hàm $v(t)$ khi biến t từ 0s đến 10s.

$$s = \int_0^{10} v(t) dt = \int_0^{10} \left(\frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + 10 \right) dt = \left(\frac{t^4}{12} + \frac{t^3}{2} + 10t \right) \Big|_0^{10} = \frac{4300}{3} (m).$$

c) Vận tốc trung bình của xe mô tô đi trong quãng thời gian 10s đầu tiên sau khi tăng tốc.

$$v_{tb} = \frac{s}{t} = \frac{4300}{3 \cdot 10} = \frac{430}{3} \approx 143,3 (m/s)$$

Bài 3. Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t) = t^2 - t - 6$ (mét/giây). Quãng đường (mét) vật đi được trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 4$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi s là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 4$.

$$\text{Ta có } s = \int_1^4 |v(t)| dt = \int_1^4 |t^2 - t - 6| dt = \int_1^3 |t^2 - t - 6| dt + \int_3^4 |t^2 - t - 6| dt = \left| -\frac{22}{3} \right| + \left| \frac{17}{6} \right| = \frac{61}{6} \approx 10,17 (m)$$

Bài 4. Một chiếc xe ô tô đang chạy trên đường cao tốc với vận tốc $72 (km/h)$ thì tài xế bất ngờ đạp phanh làm cho chiếc ô tô chuyển động chậm với gia tốc $a(t) = -\frac{8}{5}t$ (m/s^2), trong đó t là thời gian tính bằng giây.



a) Kể từ khi đạp phanh, sau 3 giây thì vận tốc của ô tô bằng bao nhiêu?

b) Hỏi kể từ khi đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn thì ô tô di chuyển bao nhiêu mét (m)?

Lời giải

$$a) \text{ Vận tốc của ô tô là } v(t) = \int a(t) dt = \int \left(-\frac{8}{5}t\right) dt = -\frac{4}{5}t^2 + C.$$

$$\text{Ta có } 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}. \text{ Vì } v(0) = 20 \text{ nên } C = 20 \Rightarrow v(t) = -\frac{4}{5}t^2 + 20.$$

$$\text{Kể từ khi đạp phanh, sau 3 giây thì vận tốc là: } v(3) = -\frac{4}{5} \cdot 3^2 + 20 = 12,8 \text{ (m/s)}$$

$$b) \text{ Ta có: } v(t) = -\frac{4}{5}t^2 + 20$$

$$\text{Khi xe dừng hẳn thì vận tốc bằng 0 nên } -\frac{4}{5}t^2 + 20 = 0 \Rightarrow t = 5.$$

$$\text{Quãng đường cần tìm là } s = \int_0^5 \left(-\frac{4}{5}t^2 + 20\right) dt = \left(-\frac{4}{15}t^3 + 20t\right) \Big|_0^5 = \frac{200}{3} \text{ (m)}.$$

Bài 5.

a) Cho một vật chuyển động với vận tốc $y = v(t)$ (m/s). Cho $0 < a < b$ và hàm vận tốc $v(t) > 0$ với mọi $t \in [a; b]$. Hãy giải thích vì sao $\int_a^b v(t) dt$ biểu thị quãng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian từ a đến b (tính theo giây).

b) Một vật chuyển động với vận tốc được biểu thị bởi phương trình $v(t) = 2 - \sin t$ (m/s). Tính quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}$ (s).

Lời giải

a) Ta đã biết $v(t) = s'(t)$ nên $s(t) = \int_a^b v(t) dt$ biểu thị quãng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian từ a đến b .

b) Quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}$ (s) là:

$$s(t) = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} v(t) dt = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (2 - \sin t) dt = (2t + \cos t) \Big|_0^{\frac{3\pi}{4}} = 6\pi - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \approx 3,005 \text{ (m)}.$$

Bài 6. Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t) = t^2 - t - 6$ (m/s).

a) Tìm độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 4$, tức là tính $\int_1^4 v(t) dt$.

b) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này, tức là tính $\int_1^4 |v(t)| dt$.

Lời giải

a) Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 4$ là:

$$\int_1^4 v(t) dt = \int_1^4 (t^2 - t - 6) dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t \right) \Big|_1^4 = \left(\frac{4^3}{3} - \frac{4^2}{2} - 6 \cdot 4 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 6 \right) = -\frac{9}{2}.$$

b) Tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 4$ là:

$$\int_1^4 |v(t)| dt = \int_1^3 |t^2 - t - 6| dt + \int_3^4 (t^2 - t - 6) dt = \int_1^3 (-t^2 + t + 6) dt + \int_3^4 (t^2 - t - 6) dt = \frac{22}{3} + \frac{17}{6} = \frac{61}{6}.$$

Bài 7. Một người đi xe mô tô với độ tăng vận tốc tại một thời điểm t (tính theo giây, $t \geq 0$) được cho bởi hàm số $f(t) = \frac{1}{300}t^2 + \frac{1}{1350}t$ (km/s^2). Nếu bắt đầu tăng tốc tính từ lúc khởi động máy (vận tốc bằng $0km/h$), hỏi mất bao lâu thì người đó đạt đến tốc độ $120 km/h$?

Lời giải

Gọi x là thời gian cần thiết để người đó đạt đến tốc độ 120 (km/h).

Ta nhận xét độ tăng vận tốc trong thời gian này cũng chính là tích phân của hàm $f(t)$ với $t=0$ đến $t=x$.

Như vậy ta xét phương trình sau :

$$\int_0^x \left(\frac{1}{300}t^2 + \frac{1}{1350}t \right) dt = \frac{120}{3600} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{900}t^3 + \frac{1}{2700}t^2 \right) \Big|_0^x = \frac{1}{30} \Leftrightarrow \frac{1}{900}x^3 + \frac{1}{2700}x^2 = \frac{1}{30} \Leftrightarrow x = 3(s)$$

Vậy sau $3s$ thì người đó đạt đến tốc độ $120 km/h$.

Bài 8. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trong thành phố thì các xe khi dừng lại phải cách nhau một khoảng tối thiểu là $1m$. Một xe máy di chuyển trên đường thì gặp đèn đỏ từ xa, người điều khiển xe máy đạp phanh và xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 10 - 5t$ (m/s). Hỏi để giữ khoảng cách an toàn, người điều khiển xe máy phải bắt đầu đạp phanh khi cách xe đang dừng phía trước tối thiểu một khoảng bao xa, biết rằng ngay lúc đạp phanh thì xe phía trước đang đứng yên?

Lời giải

Kể từ lúc đạp phanh ($t = 0$) đến lúc xe dừng lại thì xe đi được một quãng đường là s . Vì khoảng cách an toàn giữa 2 xe khi dừng lại tối thiểu là $1m$ nên người điều khiển xe máy phải bắt đầu đạp phanh khi cách xe đang dừng phía trước tối thiểu một khoảng $s + 1$ (m).

Tại thời điểm $t = 0$ thì xe bắt đầu phanh, và xe dừng lại khi vận tốc bằng 0 , khi đó:

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow 10 - 5t = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Trong khoảng thời gian từ $t = 0s$ đến $t = 2s$ thì xe chạy thêm được quãng đường

$$s = \int_0^2 (10 - 5t) dt = 10 (m)$$

Vậy xe nên bắt đầu đạp phanh khi cách xe đang dừng phía trước tối thiểu một khoảng $11m$ để giữ khoảng cách an toàn.

Bài 9. Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc a bắt đầu chuyển

động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a(m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

Lời giải

Quãng đường chất điểm A đi từ đầu đến khi B đuổi kịp là $S = \int_0^{15} \left(\frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t \right) dt = 96(m)$.

Vận tốc của chất điểm B là $v_B(t) = \int a dt = at + C$.

Tại thời điểm $t=3$ vật B bắt đầu từ trạng thái nghỉ nên $v_B(3) = 0 \Leftrightarrow C = -3a$.

Lại có quãng đường chất điểm B đi được đến khi gặp A là $S_2 = \int_3^{15} (at - 3a) dt = \left(\frac{at^2}{2} - 3at \right) \Big|_3^{15} = 72a(m)$.

Vậy $72a = 96 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3} (m/s^2)$.

Tại thời điểm đuổi kịp A thì vận tốc của B là $v_B(15) = 16(m/s)$.

Bài 10. Biết rằng tốc độ v (km/phút) của một ca nô cao tốc thay đổi theo thời gian t (phút) như sau:

$$v(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & \text{khi } 0 \leq t < 2 \\ 1 & \text{khi } 2 \leq t < 15 \\ 4 - \frac{1}{5}t & \text{khi } 15 \leq t \leq 20 \end{cases}$$

Tính quãng đường ca nô di chuyển được trong khoảng thời gian từ 0 tới 20 phút.



Lời giải

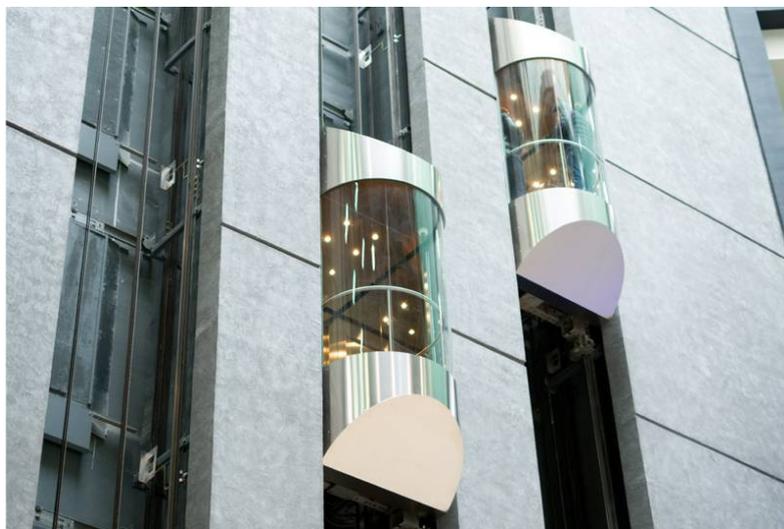
Quãng đường chuyển động của ca nô là: $S = \int_0^{20} v(t) dt = \int_0^2 (0,5t) dt + \int_2^{15} 1 dt + \int_{15}^{20} (4 - 0,2t) dt$

$$= \frac{t^2}{4} \Big|_0^2 + (t) \Big|_2^{15} + \left(4t - \frac{1}{10}t^2 \right) \Big|_{15}^{20} = 1 + 15 - 2 + 40 - 37,5 = 16,5(km)$$

Bài 11. Giả sử tốc độ $v(m/s)$ của một thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất theo thời gian

$$t \text{ (giây) được cho bởi công thức: } v(t) = \begin{cases} t & \text{khi } 0 \leq t \leq 2 \\ 2 & \text{khi } 2 < t \leq 20 \\ 12 - \frac{1}{5}t & \text{khi } 20 < t \leq 24 \end{cases} . \text{ Tính quãng đường chuyển động và}$$

tốc độ trung bình của thang máy.



Lời giải

Gọi $s(t)$ là quãng đường thang máy di chuyển được đến thời gian t (giây). Quãng đường thang máy di

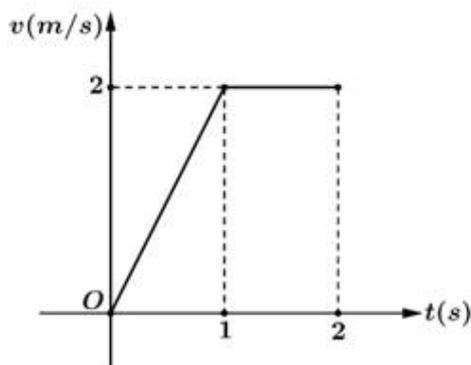
chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất là $s = s(20) - s(0) = \int_0^{20} v(t) dt$

$$= \int_0^2 v(t) dt + \int_2^{20} v(t) dt + \int_{20}^{24} v(t) dt = \int_0^2 t dt + \int_2^{20} 2 dt + \int_{20}^{24} (12 - 0,5t) dt$$

$$= \left(\frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^2 + 2(t) \Big|_2^{20} + \left(12t - \frac{0,5t^2}{2} \right) \Big|_{20}^{24} = 42(m)$$

Vận tốc trung bình của thang máy là $v_{tb} = \frac{s}{t} = \frac{42}{24} = 1,75(m/s)$.

Bài 12. Cho hình vẽ dưới đây là đồ thị vận tốc $v(t)$ (m/s) của một chiếc xuồng đi trên sông trong 2 giây đầu tiên ($t = 0$ là thời điểm chiếc xuồng bắt đầu chuyển động).



- a) Tính quãng đường mà chiếc xuồng đi được trong 1 giây đầu tiên.
 b) Tính vận tốc trung bình của chiếc xuồng đi trong 2 giây đầu tiên.

Lời giải

a) Dựa vào đồ thị trong khoảng thời gian 1 giây vận tốc của chiếc xuồng được xác định là $v(t) = 2t$ (m/s)

Ta có quãng đường mà chiếc xuồng di chuyển được trong 1 giây đầu tiên là $s = \int_0^1 2t dt = t^2 \Big|_0^1 = 1$ (m)

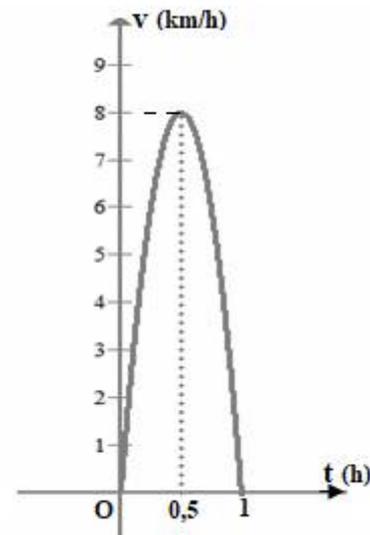
b) Dựa vào đồ thị ta thấy: Trong khoảng thời gian 1 giây vận tốc của chiếc xuồng được xác định là $v(t) = 2t$ (m/s), khoảng thời gian từ 1 giây đến 2 giây vận tốc của chiếc xuồng được xác định là $v(t) = 2$ (m/s),

Ta có quãng đường mà chiếc xuồng di chuyển được trong 2 giây đầu tiên là:

$$s = \int_0^1 2t dt + \int_1^2 2 dt = t^2 \Big|_0^1 + 2t \Big|_1^2 = 3$$
 (m).

Vận tốc trung bình của chiếc xuồng là: $v_{tb} = \frac{s}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$ (m/s).

Bài 13. Bạn Trúc Linh chạy bộ trong thời gian 1 giờ, với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là một phần của parabol có đỉnh $I(0,5;8)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình vẽ.



- a) Tính quãng đường bạn Trúc Linh chạy được trong thời gian 45 phút, kể từ khi bắt đầu chạy.
 b) Tính gia tốc của bạn Trúc Linh tại thời điểm 1 giờ 30 phút, kể từ khi bắt đầu chạy.

Lời giải

a) Trước hết ta tìm công thức biểu thị vận tốc theo thời gian, giả sử $v(t) = at^2 + bt + c$.

Khi đó dựa vào hình vẽ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} c = 0 \\ a(0,5)^2 + b(0,5) + c = 8 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -32 \\ b = 32 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow v(t) = -32t^2 + 32t.$$

$$45 \text{ phút} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4} \text{ giờ}$$

$$\text{Do đó quãng đường người đó đi được sau 45 phút là: } s = \int_0^{\frac{3}{4}} (32t - 32t^2) dt = \left(16t^2 - \frac{32}{3}t^3 \right) \Big|_0^{\frac{3}{4}} = 4,5 \text{ (km)}$$

$$\text{b) 1 giờ 30 phút} = \frac{3}{2} \text{ giờ}$$

$$\text{Hàm gia tốc: } a(t) = v'(t) = -64t + 32$$

Gia tốc của bạn Trúc Linh tại thời điểm 1 giờ 30 phút, kể từ khi bắt đầu chạy là:

$$a\left(\frac{3}{2}\right) = v'\left(\frac{3}{2}\right) = -64 \cdot \frac{3}{2} + 32 = -64 \text{ (km/h}^2\text{)}$$

DẠNG 2**ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG BÀI TOÁN LIÊN QUAN VẬT LÝ VÀ THỰC TIỄN**

• Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

• Điện lượng chuyển qua tiết diện của dây dẫn của đoạn mạch trong thời gian từ t_1 đến t_2 là:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$$

• Theo định luật Hooke thì lực cần dùng để giữ lò xo giãn thêm x mét từ độ dài tự nhiên là $f(x) = kx$, với k (N/m) là độ cứng của lò xo.

Công cần để kéo dẫn lò xo từ độ dài l_1 đến độ dài l_2 là: $A = \int_{l_1}^{l_2} f(x) dx$.

Bài 1.

a) Cường độ dòng điện chạy trong cuộn dây là $y = I(t)$ (A). Cho $0 < a < b$ và $I(t) > 0$ với mọi $t \in [a; b]$. Hãy giải thích vì sao $\int_a^b I(t) dt$ biểu thị điện lượng (C) đã phóng qua cuộn dây trong khoảng thời gian từ a đến b (tính theo giây).

b) Cường độ dòng điện chạy trong cuộn dây là $I = 2 \sin(t)$ (A). Tính điện lượng (C) phóng ra trong cuộn dây khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm $t = \frac{\pi}{2}$ (s).

Lời giải

a) Ta đã biết $I(t) = Q'(t)$ nên $Q(t) = \int_a^b I(t) dt$ biểu thị điện lượng đã phóng qua cuộn dây trong khoảng thời gian từ a đến b (a, b tính theo giây).

b) Quỹ đạo vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm:

$$t = \frac{\pi}{2} \text{ (s) là } Q(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin(t) dt = -\frac{2}{1} \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -2 \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = -2(0 - 1) = 2 \text{ (C).}$$

Bài 2. Một mạch kín gồm một nguồn điện có suất điện động biến thiên theo thời gian được biểu diễn bởi $e = 10\cos(100\pi t)(V)$ và điện trở trong không đáng kể, nối với mạch ngoài có một điện trở $R = 50\Omega$.

Tính điện lượng chuyển qua điện trở trong thời gian từ $t = 0$ đến $t = \frac{1}{600}s$?

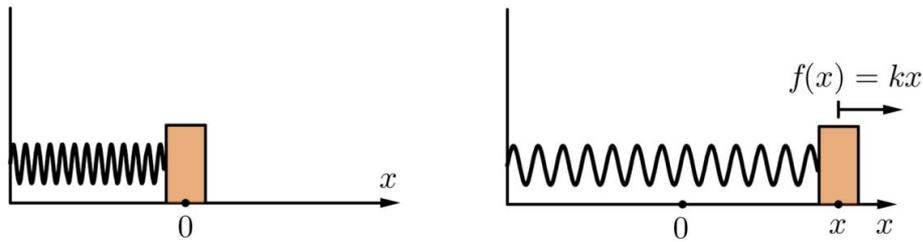
Lời giải

Ta có $i = \frac{u}{R} = 0,02 \cos(100\pi t)$ (Ampe) và $i(t) = q'(t)$

Do đó $q = \int_{t_1}^{t_2} i(t)dt$ nên ta điện lượng từ $t = 0$ đến $t = \frac{1}{600}s$

Khi đó $q = 0,02 \int_0^{\frac{1}{600}} \cos(100\pi t)dt = 3,18 \cdot 10^{-5} C$.

Bài 3. Một lực có độ lớn 40 N cần thiết để kéo căng một chiếc lò xo có độ dài tự nhiên 10 cm lên 15 cm. Biết rằng theo định luật Hooke trong Vật lý, khi một chiếc lò xo bị kéo căng thêm x so với độ dài tự nhiên của lò xo thì lò xo trở lại với một lực cho bởi công thức $f(x) = kx$ (N), trong đó k là hệ số đàn hồi của lò xo. Hãy tìm công sinh ra khi kéo lò xo có độ dài từ 15 cm đến 20 cm?



Lời giải

Khi kéo lò xo từ 10 cm đến 15 cm nó bị kéo căng thêm $5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$.

$$\Rightarrow f(0,05) = 40 \Leftrightarrow 0,05k = 40 \Rightarrow k = 800 \text{ do đó } f(x) = 800x$$

Công được sinh ra khi kéo căng lò xo từ 15 cm đến 20 cm là $W = \int_{0,05}^{0,1} f(x)dx$

$$\Rightarrow W = \int_{0,05}^{0,1} f(x)dx = \int_{0,05}^{0,1} (800x)dx = 800 \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{0,05}^{0,1} = 3 (J).$$

Bài 4. Ở nhiệt độ $37^\circ C$, một phản ứng hóa học từ chất A, chuyển hóa thành sản phẩm chất B theo phương trình: $A \rightarrow B$. Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị $\text{mol } L^{-1}$) tại thời gian x (giây), $y(x) > 0$ với $x \geq 0$ thỏa mãn hệ thức $y'(x) = -7 \cdot 10^{-4} y(x)$ với $x \geq 0$. Biết rằng $x = 0$ thì nồng độ (đầu) của chất A là $0,05 \text{ mol } L^{-1}$

a) Xét hàm số $f(x) = \ln y(x)$ với $x \geq 0$. Hãy tính $f'(x)$ từ đó tìm hàm số $f(x)$.

b) Giả sử ta tính nồng độ trung bình chất A (đơn vị mol L^{-1}) từ thời điểm a (giây) đến thời điểm b (giây) với $0 < a < b$ theo công thức $\frac{1}{b-a} \int_a^b y(x) dx$. Xác định nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây.

Lời giải

a) Ta có $f(x) = \ln y(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{y'(x)}{y(x)} = -7 \cdot 10^{-4} \Rightarrow f(x) = -7 \cdot 10^{-4} x$.

b) $f(x) = -7 \cdot 10^{-4} x \Rightarrow \ln y(x) = -7 \cdot 10^{-4} x \Leftrightarrow y(x) = e^{-7 \cdot 10^{-4} x}$

Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây là:

$$\frac{1}{30-15} \int_{15}^{30} y(x) dx = \frac{1}{15} \int_{15}^{30} e^{-7 \cdot 10^{-4} x} dx = \frac{1}{15} \frac{e^{-7 \cdot 10^{-4} x}}{-7 \cdot 10^{-4}} \Big|_{15}^{30} = 0,98 (L^{-1}).$$

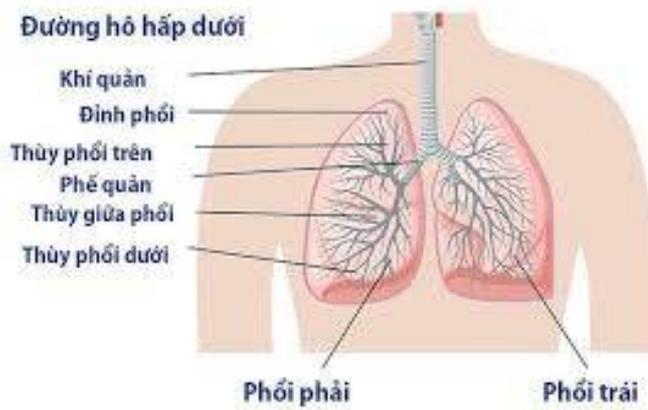
Bài 5. Giả sử rằng sau t năm, vốn đầu tư của một công ty bất động sản phát sinh lợi nhuận với tốc độ $P'(t) = 126 + t^2$ (triệu đồng/năm). Hỏi sau 10 năm đầu tiên thì công ty bất động thu được lợi nhuận là bao nhiêu (đơn vị triệu đồng)?

Lời giải

Gọi $P(t)$ là lợi nhuận phát sinh của vốn sau t năm đầu tư. Ta có $P(t)$ là nguyên hàm của hàm tốc độ $P'(t)$.

Lợi nhuận phát sinh sau 10 năm đầu tiên là: $\int_0^{10} P'(t) dt = \int_0^{10} (126 + t^2) dt = \frac{4780}{3}$ (triệu đồng).

Bài 6. Việc thở là những vòng tuần hoàn, mỗi vòng tính từ lúc bắt đầu hít vào đến lúc kết thúc thở ra, thường kéo dài trong 5s. Vận tốc cực đại của khí là V (l/s) nên vì thế nó được mô hình hoá bởi công thức $v(t) = V \sin \frac{3\pi t}{5}$. Tính thể tích khí hít vào phổi sau thời gian 2s.



Lời giải

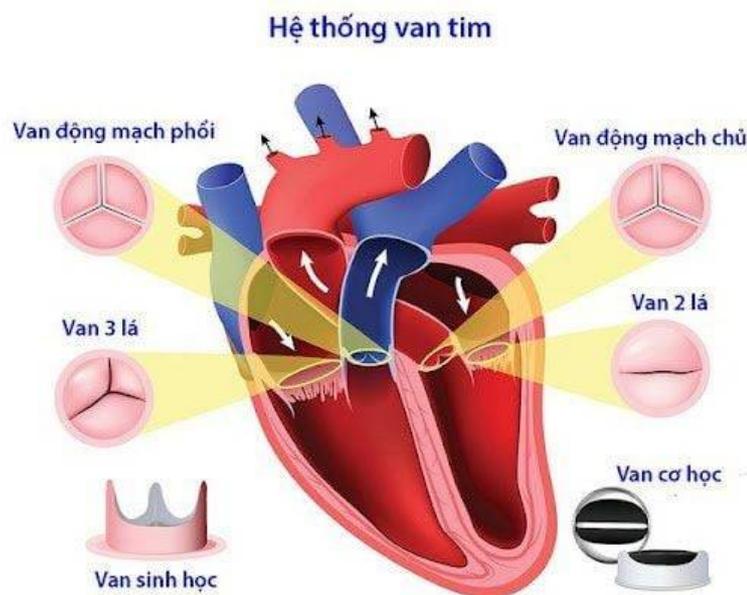
Vận tốc của khí hít vào được mô hình bởi công thức $v(t) = V \sin \frac{3\pi t}{5}$.

Suy ra lượng khí hít vào sau 2 giây là:

$$N(2) = \int_0^2 v(x) dx = \int_0^2 V \sin \frac{3\pi t}{5} dt = \frac{5V}{3\pi} \left(1 - \cos \frac{3\pi \cdot 2}{5} \right) = 1,06V \text{ (lít)}$$

Bài 7. Hiệu suất của tim là lưu lượng máu được bơm bởi tim trên một đơn vị thời gian (lưu lượng máu chảy vào động mạch chủ). Để đo hiệu suất của tim, người ta bơm A (mg) chất chỉ thị màu vào tâm nhĩ phải, chảy qua tim rồi vào động mạch chủ và đo nồng độ chất chỉ thị màu còn lại ở tim đến thời điểm T (s) khi chất chỉ thị màu tan sạch. Gọi $c(t)$ là nồng độ (mg/l) chất chỉ thị màu tại thời điểm t (s) thì hiệu suất của tim được xác định bởi $F = \frac{A}{\int_0^T c(t) dt}$ (1/s). Tính hiệu suất của tim khi bơm 8 mg chất chỉ thị

màu vào tâm nhĩ phải, biết $c(t) = \frac{1}{4}t(12-t)$ với $0 \leq t \leq 12$.



Lời giải

Để tính hiệu suất của tim, chúng ta cần sử dụng công thức đã cho: $F = \frac{A}{\int_0^T c(t) dt}$ (1/s)

Trong đó: $A = 8$ mg (lượng chất chỉ thị bơm vào); $c(t) = \frac{1}{4}t(12-t)$ nồng độ chất chỉ thị màu tại thời điểm t ; $T = 12$ giây là thời gian khi chất chỉ thị màu tan sạch.

Đầu tiên, ta thay thế $c(t)$ vào tích phân: $\int_0^{12} c(t) dt = \int_0^{12} \frac{1}{4}t(12-t) dt$

Ta có thể tính tích phân này bằng cách phân tích: $\int_0^{12} \frac{1}{4}t(12-t) dt = \frac{1}{4} \int_0^{12} (12t - t^2) dt$

Khi đó: $\int_0^{12} 12t dt = 12 \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^{12} = 12 \cdot \frac{12^2}{2} = 12 \cdot 72 = 864$ và $\int_0^{12} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^{12} = \frac{12^3}{3} = 576$.

$$\text{Kết hợp lại ta có: } \int_0^{12} (12t - t^2) dt = 864 - 576 = 288 \text{ nên } \int_0^{12} c(t) dt = \frac{1}{2} \cdot 288 = 72$$

$$\text{Khi đó hiệu suất của tim là: } F = \frac{A}{\int_0^{12} c(t) dt} = \frac{8}{72} = \frac{1}{9} \approx 0,11(1/s).$$

Bài 8. Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động mạch bán kính R không đổi, có thể được mô hình hóa bởi công thức

$$\frac{1}{R-0} \int_0^R k(R^2 - r^2) dr = \frac{1}{R} \left(kR^2 r - k \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^R = \frac{1}{R} \left(kR^3 - k \frac{R^3}{3} \right) = kR^2 - \frac{kR^2}{3} = \frac{2}{3} kR^2.$$

Trong đó k là một hằng số. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0 \leq r \leq R$. Vận tốc lớn nhất của dòng máu lớn hơn vận tốc trung bình bao nhiêu lần?

Lời giải

Vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0 \leq r \leq R$ là

$$\frac{1}{R-0} \int_0^R k(R^2 - r^2) dr = \frac{1}{R} \left(kR^2 r - k \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^R = \frac{1}{R} \left(kR^3 - k \frac{R^3}{3} \right) = kR^2 - \frac{kR^2}{3} = \frac{2}{3} kR^2.$$

Xét hàm số $v(r) = k(R^2 - r^2)$, $0 \leq r \leq R$. Ta có $v'(r) = -2kr$; $v'(r) = 0 \Leftrightarrow r = 0$.

Suy ra vận tốc lớn nhất của dòng máu là $v_{CD} = kR^2$.

Vậy vận tốc lớn nhất của dòng máu lớn hơn vận tốc trung bình là: $\frac{kR^2}{\frac{2}{3}kR^2} = 1,5$ lần.

Bài 9. Tại một nhà máy ta gọi $C(x)$ là tổng chi phí (tính theo triệu đồng) để sản xuất x tấn sản phẩm A trong một tháng. Khi đó đạo hàm $C'(x)$ gọi là chi phí cận biên, cho biết tốc độ tăng tổng chi phí theo lượng sản phẩm được sản xuất. Giả sử chi phí cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức: $C'(x) = 5 - 0,06x + 0,00072x^2$ với $0 \leq x \leq 150$.

Biết rằng $C(0) = 30$ triệu đồng, gọi là chi phí cố định. Tính tổng chi phí khi nhà máy sản xuất 100 tấn sản phẩm A trong tháng.

Lời giải

$$\text{Ta có: } C(100) - C(0) = \int_0^{100} C'(x) dx = \int_0^{100} (5 - 0,06x + 0,00072x^2) dx$$

$$= 5 \int_0^{100} dx - 0,06 \int_0^{100} x dx + 0,00072 \int_0^{100} x^2 dx = 5x \Big|_0^{100} - 0,03x^2 \Big|_0^{100} + 0,00024x^3 \Big|_0^{100} = 440.$$

Suy ra $C(100) = C(0) + 440 = 30 + 440 = 470$ (triệu đồng).

Vậy khi nhà máy sản xuất 100 tấn sản phẩm loại A trong tháng thì tổng chi phí là 470 triệu đồng.

Bài 10. Một doanh nghiệp sản xuất mặt hàng với chi phí cận biên được mô tả bởi hàm số:

$$f(x) = \frac{1}{10}(x^2 - 16x + 93), x \text{ là số sản phẩm sản xuất}$$

Giả sử rằng doanh nghiệp bán được hết số lượng sản phẩm sản xuất được. Biết rằng doanh thu cận biên được mô tả bởi hàm số $g(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{x-8} + 5$, với x là số lượng sản phẩm được bán ra. Giả sử rằng tổng chi phí khi chưa sản xuất sản phẩm nào là 0 đồng và tổng doanh thu khi chưa bán được sản phẩm nào là 0 đồng. Hỏi khi sản xuất 8 sản phẩm và bán hết thì doanh nghiệp thu được lợi nhuận là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai sau dấu phẩy)

Lời giải

Hàm tổng chi phí $F(x)$ là nguyên hàm của hàm chi phí cận biên $f(x)$.

$$\text{Ta có: } F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{1}{10}(x^2 - 16x + 93) dx \text{ và } F(x) = \frac{1}{10} \left(\frac{x^3}{3} - 8x^2 + 93x \right) + C$$

$$\text{Với điều kiện ban đầu } F(0) = 0 \text{ ta có: } \frac{1}{10} \left(\frac{0^3}{3} - 8 \cdot 0^2 + 93 \cdot 0 \right) + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\text{Do đó: } F(x) = \frac{1}{10} \left(\frac{x^3}{3} - 8x^2 + 93x \right)$$

Hàm tổng doanh thu $G(x)$ là nguyên hàm của hàm doanh thu cận biên $g(x)$.

$$\text{Ta có: } G(x) = \int g(x) dx = \int \left(\left(\frac{4}{5}\right)^{x-8} + 5 \right) dx \text{ và } G(x) = \frac{1}{\ln \frac{4}{5}} \left(\frac{4}{5}\right)^{x-8} + 5x + C$$

$$\text{Với điều kiện ban đầu } G(0) = 0 \text{ ta có: } \frac{1}{\ln \frac{4}{5}} \left(\frac{4}{5}\right)^{-8} + 5 \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{\ln \frac{4}{5}} \left(\frac{4}{5}\right)^{-8}$$

$$\text{Do đó: } G(x) = \frac{1}{\ln \frac{4}{5}} \left(\frac{4}{5}\right)^{x-8} + 5x - \frac{1}{\ln \frac{4}{5}} \left(\frac{4}{5}\right)^{-8}$$

$$\text{Khi đó } F(8) = \frac{1}{10} \left(\frac{8^3}{3} - 8 \cdot 8^2 + 93 \cdot 8 \right) \text{ và } G(8) = \frac{1}{\ln \frac{4}{5}} \left(\frac{4}{5}\right)^{8-8} + 5 \cdot 8 - \frac{1}{\ln \frac{4}{5}} \left(\frac{4}{5}\right)^{-8}$$

Lợi nhuận khi sản xuất và bán hết 8 sản phẩm là: Lợi nhuận = $G(8) - F(8) \approx 21,96$ đồng

PHẦN B

TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì gặp chướng ngại vật, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

A. $55m$.B. $25m$.C. $50m$.D. $16m$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $-2t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 5 \Rightarrow$ Thời gian tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi dừng hẳn là 5 giây. Vậy trong 8 giây cuối cùng thì có 3 giây ô tô chuyển động với vận tốc $10m/s$ và 5 giây chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10(m/s)$.

Khi đó quãng đường ô tô di chuyển là $S = 3 \cdot 10 + \int_0^5 (-2t + 10) dt = 30 + 25 = 55m$.

Câu 2. Một ô tô đang chạy với tốc độ $20(m/s)$ thì gặp chướng ngại vật, người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét (m)?

A. $20m$.B. $30m$.C. $10m$.D. $40m$.

Lời giải

Chọn D

Khi ô tô dừng hẳn thì: $v(t) = 0 \Leftrightarrow -5t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 4(s)$.

Vậy từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được: $s = \int_0^4 (-5t + 20) dt = 40(m)$.

Câu 3. Một ô tô bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0 , sau 6 giây chuyển động thì gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t) = -\frac{5}{2}t + a$ (m/s), ($t \geq 6$) cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng thì ô tô đi được quãng đường là 80m. Tìm v_0 .



A. $v_0 = 35 m/s$.

B. $v_0 = 25 m/s$.

C. $v_0 = 10 m/s$.

D. $v_0 = 20 m/s$.

Lời giải

Chọn C

- Tại thời điểm $t = 6$ vật đang chuyển động với vận tốc v_0 nên có

$$v(6) = v_0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \cdot 6 + a = v_0 \Leftrightarrow a = v_0 + 15, \text{ suy ra } v(t) = -\frac{5}{2}t + v_0 + 15.$$

- Gọi k là thời điểm vật dừng hẳn, vậy ta có $v(k) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{5} \cdot (v_0 + 15) \Leftrightarrow k = \frac{2v_0}{5} + 6$.

$$\text{- Tổng quãng đường vật đi được là } 80 = 6 \cdot v_0 + \int_6^k \left(-\frac{5}{2}t + v_0 + 15 \right) dt$$

$$\Leftrightarrow 80 = 6 \cdot v_0 + \left(-\frac{5}{4}t^2 + v_0 \cdot t + 15t \right) \Big|_6^k$$

$$\Leftrightarrow 80 = 6 \cdot v_0 - \frac{5}{4}(k^2 - 6^2) + v_0 \cdot (k - 6) + 15(k - 6)$$

$$\Leftrightarrow 80 = 6 \cdot v_0 - \frac{5}{4} \left(\frac{4(v_0)^2}{25} + \frac{24v_0}{5} \right) + v_0 \cdot \frac{2v_0}{5} + 15 \cdot \frac{2v_0}{5}$$

$$\Leftrightarrow (v_0)^2 + 36 \cdot v_0 - 400 = 0$$

$$\Leftrightarrow v_0 = 10$$

Câu 4. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 16m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm

phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t) = 16 - 4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để có 2 ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?



A. 31.

B. 12.

C. 33.

D. 32.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $v_A(0) = 16 \text{ m/s}$.

Khi xe A dừng hẳn: $v_A(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4 \text{ s}$.

Quãng đường từ lúc xe A hãm phanh đến lúc dừng hẳn là $s = \int_0^4 (16 - 4t) dt = 32 \text{ m}$

Do các xe phải cách nhau tối thiểu 1m để đảm bảo an toàn nên khi dừng lại ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là 33m.

Câu 5. Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t) = t^2 + 10t$ (m/s) với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc 200 (m/s) thì rời đường băng.



Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là:

A. $\frac{2500}{3} \text{ (m)}$.

B. 2000 (m) .

C. 500 (m) .

D. $\frac{4000}{3} \text{ (m)}$.

Lời giải

Chọn A

Thời điểm máy bay đạt vận tốc 200 (m/s) là $v(t) = 200 \Leftrightarrow t^2 + 10t = 200 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 \\ t = -20 \end{cases} \Leftrightarrow t = 10$

Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

$$s = \int_0^{10} (t^2 + 10t) dt = \left(\frac{t^3}{3} + 5t \right) \Big|_0^{10} = \frac{2500}{3} (m).$$

Câu 6. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5s, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70$ (m/s²). Tính quãng đường S đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.



- A. $S = 96,25$ (m). B. $S = 87,5$ (m). C. $S = 94$ (m). D. $S = 95,7$ (m).

Lời giải

Chọn A

Chọn gốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu đi. Sau 5s ô tô đạt vận tốc là $v(5) = 35$ (m/s).

Sau khi phanh vận tốc ô tô là $v(t) = 35 - 70(t - 5)$.

Ô tô dừng tại thời điểm $t = 5,5$ s.

Quãng đường ô tô đi được là $S = \int_0^5 7t dt + \int_5^{5.5} [35 - 70(t - 5)] dt = 96,25$ (m).

Câu 7. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 2t$ (m/s). Đi được 12 giây, người lái xe gặp chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -12$ (m/s²). Tính quãng đường s (m) đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn?



- A. $s = 168$ (m). B. $s = 166$ (m). C. $s = 144$ (m). D. $s = 152$ (m).

Lời giải

Chọn A

Giai đoạn 1: Xe bắt đầu chuyển động đến khi gặp chướng ngại vật.

$$\text{Quãng đường xe đi được là: } S_1 = \int_0^{12} v_1(t) dt = \int_0^{12} 2t dt = t^2 \Big|_0^{12} = 144(\text{m}).$$

Giai đoạn 2: Xe gặp chướng ngại vật đến khi dừng hẳn.

$$\text{Ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc } v_2(t) = \int a dt = -12t + c.$$

$$\text{Vận tốc của xe khi gặp chướng ngại vật là: } v_2(0) = v_1(12) = 2 \cdot 12 = 24(\text{m/s}).$$

$$\Rightarrow -12 \cdot 0 + c = 24 \Rightarrow c = 24 \Rightarrow v_2(t) = -12t + 24.$$

Thời gian khi xe gặp chướng ngại vật đến khi xe dừng hẳn là nghiệm phương trình:

$$-12t + 24 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Khi đó, quãng đường xe đi được là:

$$S_2 = \int_0^2 v_2(t) dt = \int_0^2 (-12t + 24) dt = (-6t^2 + 24t) \Big|_0^2 = 24(\text{m}).$$

$$\text{Vậy tổng quãng đường xe đi được là: } S = S_1 + S_2 = 168(\text{m}).$$

Câu 8. Một ô tô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a(t) = 6 - 2t$ (m/s^2), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ô tô bắt đầu chuyển động. Hỏi quãng đường ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ô tô đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét?

A. 18m.

B. 36m.

C. 22,5m.

D. 6,75m.



Lời giải

Chọn A

$$a(t) = 6 - 2t \left(\text{m/s}^2 \right) \Rightarrow v(t) = \int (6 - 2t) dt = 6t - t^2 + C$$

$$\text{Xe dừng và bắt đầu chuyển động nên khi } t = 0 \text{ thì } v = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow v(t) = 6t - t^2.$$

$$v(t) = 6t - t^2 \text{ là hàm số bậc 2 nên đạt GTLN khi } t = -\frac{b}{2a} = 3 \text{ (s)}$$

Quãng đường xe đi trong 3 giây đầu là: $S = \int_0^3 (6t - t^2) dt = 18m$.

Câu 9. Một xe gắn máy đang chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t) = t^2 + 3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi xe gắn máy bắt đầu tăng tốc.



A. 136m.

B. 126m.

C. 276m.

D. 216m.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } v(0) = 10 \text{ m/s và } v(t) = \int_0^t a(t) dt = \int_0^t (t^2 + 3t) dt = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} \right) \Big|_0^t = \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2.$$

$$\text{Quãng đường xe gắn máy đi được là } S = \int_0^6 v(t) dt = \int_0^6 \left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 \right) dt = \left(\frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^3 \right) \Big|_0^6 = 216 \text{ m}$$

Câu 10. Một xe mô tô đi đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15 \text{ m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng đường xe mô tô đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.



A. 70,25 m.

B. 68,25 m.

C. 67,25 m.

D. 69,75 m.

Lời giải

Chọn D

$$a(t) = t^2 + 4t \Rightarrow v(t) = \int a(t) dt = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Mà } v(0) = C = 15 \Rightarrow v(t) = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + 15.$$

$$\text{Vậy } S = \int_0^3 \left(\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 15 \right) dt = 69,75 \text{ m.}$$

Câu 11. Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s²) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

- A. 21 (m/s) B. 25 (m/s) C. 36 (m/s) D. 30 (m/s)

Lời giải

Chọn D.

Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây, chất điểm A đi được 18 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t) = \int a dt = at + C$ mà $v_B(0) = 0$ nên $v_B(t) = at$.

Do từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi chất điểm B đuổi kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được bằng nhau. Do đó

$$\int_0^{18} \left(\frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45} \right) dt = \int_0^{15} at dt \Leftrightarrow 225 = a \cdot \frac{225}{2} \Leftrightarrow a = 2$$

Vậy, vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(t) = 2 \cdot 15 = 30$ (m/s).

Câu 12. Một chiếc xuồng chuyển động với gia tốc $a(t) = \frac{1}{t^2 + 3t + 2}$ (m/s²), trong đó t là khoảng thời gian tính từ thời điểm ban đầu. Vận tốc chuyển động của chiếc xuồng là $v(t)$. Vào thời điểm $t = 11$ (s) thì vận tốc của chiếc xuồng là v (m/s), biết vận tốc ban đầu của chiếc xuồng là $v_0 = 3 \ln 2$ (m/s).



Giá trị của v gần giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

- A. 2,35. B. 2,69. C. 2,29. D. 2,16.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có: } v(t) = \int a(t) dt = \int \frac{1}{t^2 + 3t + 2} dt = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right) dt = \ln \left| \frac{t+1}{t+2} \right| + C$$

$$v(0) = \ln \left(\frac{1}{2} \right) + C = 3 \ln 2 \Rightarrow C = 4 \ln 2 \Rightarrow v(t) = \ln \left| \frac{t+1}{t+2} \right| + 4 \ln 2.$$

$$\text{Tính } v(11) = \ln \left(\frac{12}{13} \right) + 4 \ln 2 \approx 2,69.$$

Vậy $v \approx 2,69$.

Câu 13. Một chiếc ca nô chạy trên sông có vận tốc theo hàm $v(t) = 3t^2 + 5$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc Ca nô bắt đầu chuyển động. Quãng đường Ca nô đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là:



A. 669 m.

B. 966 m.

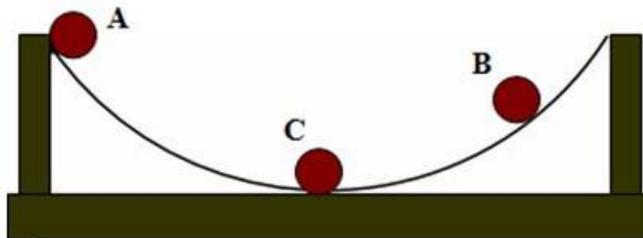
C. 699 m.

D. 696 m.

Lời giải**Chọn B.**

$$\text{Quãng đường vật đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là } S = \int_4^{10} (3t^2 + 5) dt = 966 \text{ m.}$$

Câu 14. Một viên bi chuyển động từ vị trí A đến vị trí B với gia tốc là hàm $a(t) = 2 \cos t$ (m/s²), biết rằng tại thời điểm $t = 0$ (s) viên bi bắt đầu chuyển động (vị trí A) có vận tốc bằng 0 và đến vị trí B tại thời điểm $t = \pi$ (s). Tính quãng đường viên bi đi được từ vị trí A đến vị trí B.



A. 5(m).

B. 3(m).

C. 2(m).

D. 4(m).**Lời giải****Chọn D.**

$$\text{Ta có } v(t) = \int a(t) dt = \int 2 \cos t dt = 2 \sin t + C.$$

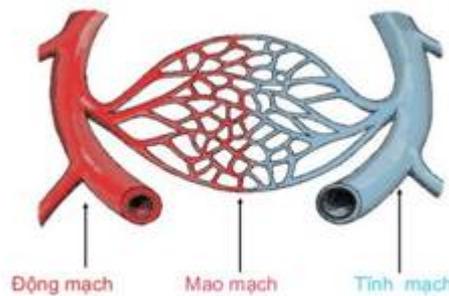
Mà tại thời điểm bắt đầu chuyển động thì viên bi có vận tốc bằng 0 nên ta có $v(0) = 0$ hay $C = 0$.

Vậy $v(t) = 2 \sin t$.

Quãng đường viên bi đi được từ thời điểm $t = 0(s)$ đến thời điểm $t = \pi(s)$ là

$$\int_0^{\pi} v(t) dt = \int_0^{\pi} 2 \sin t dt = -2 \cos t \Big|_0^{\pi} = -2 \cos \pi - (-2 \cos 0) = 4(m).$$

Câu 15. Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động mạch bán kính $R = 9$, có thể được mô hình hóa bởi công thức $v = k(R^2 - r^2)$, trong đó k là một hằng số. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0 \leq r \leq R$.



A. $9k$.

B. $45k$.

C. $54k$.

D. $27k$.

Lời giải

Chọn C.

Vận tốc trung bình của động mạch là:

$$\begin{aligned} v_{tb} &= \frac{1}{R-0} \int_0^R v(r) dr = \frac{1}{R} \int_0^R k(R^2 - r^2) dr = \frac{1}{R} \int_0^R (kR^2 - kr^2) dr = \frac{1}{R} \left(kR^2 r - \frac{1}{3} kr^3 \right) \Big|_0^R \\ &= \frac{1}{R} \left(kR^3 - \frac{1}{3} kR^3 \right) = \frac{2kR^2}{3} = \frac{2k \cdot 9^2}{3} = 54k. \end{aligned}$$

Câu 16. Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x) = -0,0004x + 9,3$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm. Khi đó sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 125 đơn vị sản phẩm là

A. 232,325 triệu đồng.

B. 230,315 triệu đồng.

C. 321,385 triệu đồng

D. 231,375 triệu đồng.

Lời giải

Chọn D.

Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 125 đơn vị sản phẩm là

$$\begin{aligned} P(125) - P(100) &= \int_{100}^{125} P'(x) dx = \int_{100}^{125} (-0,0004x + 9,3) dx = - \int_{100}^{125} 0,0004x dx + \int_{100}^{125} 9,3 dx \\ &= -0,0002x^2 \Big|_{100}^{125} + 9,3x \Big|_{100}^{125} = -0,0002(125^2 - 100^2) + 9,3(125 - 100) = 231,375 \text{ (triệu đồng)}. \end{aligned}$$

Câu 17. Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ được định nghĩa là

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Giả sử lượng khách tham quan (đơn vị nghìn người) tháp Bà Ponaga Nha Trang trung bình tại thời điểm t ngày trong khoảng thời gian từ ngày 01/05/2024 đến ngày 31/05/2024 được mô hình hóa bởi hàm số: $Q(x) = 100 + 10(t - 60)$ với $1 \leq t \leq 31$.



Lượng khách tham quan trung bình tháng 05/2024 ở tháp Bà Ponaga Nha Trang là bao nhiêu người?

- A. 220 nghìn người. B. 180 nghìn người. C. 240 nghìn người. **D. 200 nghìn người.**

Lời giải

Chọn D.

Lượng khách tham quan trung bình tháng 05/2024 ở tháp Bà Ponaga Nha Trang là

$$Q_0 = \frac{1}{31-1} \int_1^{31} [100 + 10(t - 60)] dt = \frac{1}{30} \int_1^{31} (10t + 40) dt = \frac{1}{30} (5t^2 + 40t) \Big|_1^{31} = 200 \text{ nghìn người.}$$

Câu 18. Công ty vừa đưa vào một dây chuyền sản xuất để chế tạo máy tính mới. Sau vài tuần, sản lượng

đạt được $q(t) = 4000 \left(1 - \frac{10}{(10-t)^2} \right)$ máy/tuần. Số máy sản xuất được từ tuần thứ ba đến hết tuần thứ tư

gần với số nào dưới đây nhất.

- A. 5000 máy tính. **B. 6333 máy tính.** C. 6244 máy tính. D. 5860 máy tính.

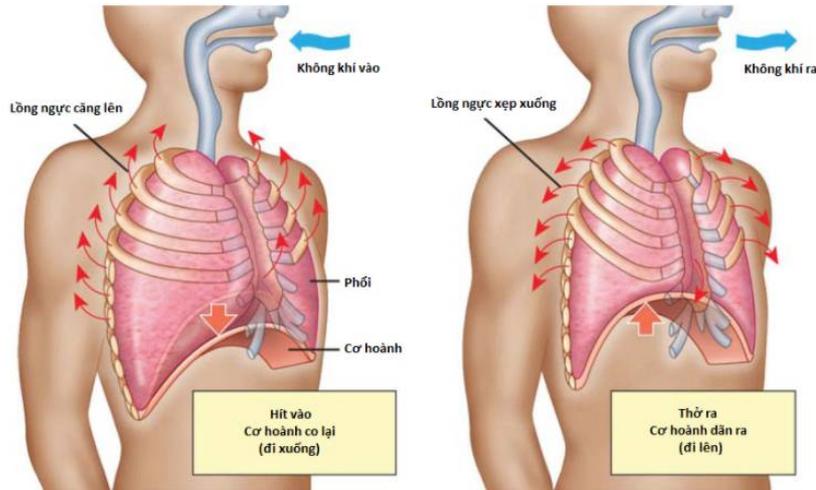
Lời giải

Chọn B.

Số lượng máy tính từ đầu tuần thứ 3 đến hết tuần thứ 4 là:

$$\int_2^4 4000 \left(1 - \frac{10}{10-t^2} \right) dt = 4000t \Big|_2^4 + \frac{40000}{t-10} \Big|_2^4 \approx 6333$$

Câu 19. Việc thở là những vòng tuần hoàn, mỗi vòng tính từ lúc bắt đầu hít vào đến lúc kết thúc thở ra, thường kéo dài trong 5s. Vận tốc cực đại của khí là V (lít/giây), vì thế nó được mô hình hoá bởi $v(t) = V \sin \frac{2\pi t}{5}$. Tính thể tích khí hít vào phổi sau thời gian 2 giây.



A. 1,44V lít khí..

B. 1,22V lít khí..

C. 2,14V lít khí..

D. 1,64V lít khí..

Lời giải

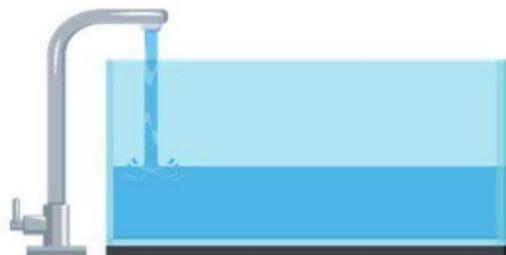
Chọn A.

Vận tốc của khí hít vào được mô hình bởi công thức $v(t) = V \sin \frac{2\pi t}{5}$.

Suy ra lượng khí hít vào sau 2 giây là: $N(2) = \int_0^2 v(x) dx = \int_0^2 V \sin \frac{2\pi t}{5} dt = \frac{5V}{2\pi} \left(1 - \cos \frac{2\pi \cdot 2}{5} \right) = 1,44V$ lít

khí.

Câu 20. Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là 90 m^3 và sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là 504 m^3 . Tính thể tích của lượng nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.



A. $1600(m^3)$.

B. $1548(m^3)$.

C. $1540(m^3)$.

D. $1458(m^3)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\int_0^3 (6at^2 + 2bt) dt = 90 \Leftrightarrow (2at^3 + bt^2) \Big|_0^3 = 90 \Leftrightarrow 54a + 9b = 90 \quad (1)$

Mặt khác: $\int_0^6 (6at^2 + 2bt) dt = 504 \Leftrightarrow (2at^3 + bt^2) \Big|_0^6 = 504 \Leftrightarrow 432a + 36b = 504 \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = 6 \end{cases}$ nên sau khi bơm 9 giây thì thể tích nước trong bể là:

$$V = \int_0^9 (4t^2 + 12t) dt = \left(\frac{4}{3}t^3 + 6t^2 \right) \Big|_0^9 = 1458 (m^3).$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 21. Một chiếc mô tô đang chạy với vận tốc 18 (m/s) thì người lái hãm phanh. Sau khi hãm phanh, mô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 18 - 36t$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian được tính bằng giây kể từ lúc mô tô bắt đầu hãm phanh.



- a) Thời gian kể từ lúc hãm phanh đến lúc xe mô tô dừng hẳn là 0,5 giây.
- b) Quãng đường xe mô tô đi được sau 0,3 giây kể từ lúc hãm phanh là 3,78 mét.
- c) Quãng đường kể từ lúc hãm phanh đến lúc xe mô tô dừng hẳn là 5,5 mét.
- d) Gia tốc tức thời của chuyển động xe mô tô là -36 (m/s²).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

a) Lúc hãm phanh đến lúc xe dừng hẳn thì $v(t) = 0 \Rightarrow 18 - 36t = 0 \Rightarrow t = 0,5$ giây.

b) Quãng đường xe đi được sau 0,3 giây kể từ lúc hãm phanh là

$$s = \int_0^{0,3} (18 - 36t) dt = (18t - 18t^2) \Big|_0^{0,3} = 3,78(m).$$

c) Với $t = 0,5$ giây thì quãng đường kể từ lúc hãm phanh đến lúc xe dừng hẳn là

$$s_1 = \int_0^{0,5} (18 - 36t) dt = (18t - 18t^2) \Big|_0^{0,5} = 4,5(m)$$

d) Gia tốc tức thời của chuyển động xe mô tô là $a = v'(t) = -36$ (m/s²).

Câu 22. Một ô tô đang di chuyển với tốc độ 20(m/s) thì hãm phanh nên tốc độ (m/s) theo thời gian t được tính theo công thức $v(t) = 20 - 5t$, với $0 \leq t \leq 4$.



- a) Sau khi hãm phanh, tốc độ của xe tăng.
- b) Tốc độ của xe tại thời điểm 3 (giây) sau hãm phanh là $5(m/s)$
- c) Sau khi hãm phanh 4 (giây) thì xe dừng hẳn.
- d) Kể từ khi hãm phanh đến khi dừng hẳn, xe đi được quãng đường $40(m)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG

a) $v(t) = 20 - 5t \Rightarrow v'(t) = -5 < 0$

Do $v'(t) = -5 < 0$ nên sau khi hãm phanh tốc độ của xe giảm.

b) Ta có : $v(3) = 20 - 5.3 = 5(m/s)$

c) Sau khi hãm phanh đến khi xe dừng hẳn nên $v(t) = 0 \Leftrightarrow 20 - 5t = 0 \Leftrightarrow t = 4$.

d) Kể từ khi hãm phanh đến dừng xe đi được quãng đường là :

$$s = \int_0^4 (20 - 5t) dt = \left(20t - \frac{5}{2}t^2 \right) \Big|_0^4 = 40(m)$$

Câu 23. Sau khi xuất phát, xe đạp di chuyển với tốc độ $v(t) = 2,01t - 0,025t^2$, với $0 \leq t \leq 10$. Trong đó $v(t)$ tính theo (m/s), thời gian t tính theo s với $t = 0$ là thời điểm xe đạp xuất phát.



a) Quãng đường xe đạp di chuyển được tính theo công thức là $s(t) = 2,01t - 0,05t^2 (0 \leq t \leq 10)$

b) Quãng đường xe đạp di chuyển được trong 3 giây là $8,82(m)$.

c) Quãng đường xe đạp di chuyển được trong giây thứ 9 xấp xỉ $15,28(m)$ (kết quả làm tròn đến phần trăm của mét).

d) Trong khoảng thời gian không quá 10s đầu, khi vận tốc đạt giá trị lớn nhất thì gia tốc của xe đạp là $2,51(m/s^2)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

a) Quãng đường xe đạp di chuyển được phải là nguyên hàm của $v(t)$

Khi đó $v'(t) = 2,01 - 0,05t (0 \leq t \leq 10)$ là công thức tính gia tốc của vật.

b) Quãng đường xe đạp di chuyển được trong 3s là:

$$\int_0^3 (2,01t - 0,025t^2) dt = \left(\frac{2,01t^2}{2} - \frac{0,025t^3}{3} \right) \Big|_0^3 = 8,82(m).$$

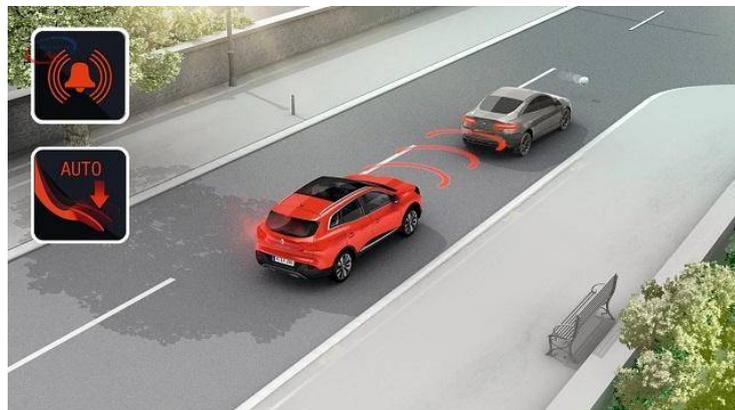
c) Quãng đường xe đạp di chuyển được trong giây thứ 9

$$s(9) - s(8) = \int_8^9 (2,01t - 0,025t^2) dt = \left(\frac{2,01t^2}{2} - \frac{0,025t^3}{3} \right) \Big|_8^9 \approx 15,28(m)$$

d) Ta có: $v(t) = 2,01t - 0,025t^2 (0 \leq t \leq 10) \Rightarrow \max_{[0;10]} v(t) = 17,6m/s$ khi $t = 10(s)$

Gia tốc xe đạp khi đó là $a(10) = v'(10) = 2,01 - 0,05 \cdot 10 = 1,51(m/s^2)$

Câu 24. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu $1(m)$. Một ô tô A đang chạy với vận tốc $15(m/s)$ bỗng gặp ô tô B đang đứng chờ đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều bởi vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t) = 15 - 5t (m/s)$. Gọi $s(t)$ là quãng đường ô tô A di chuyển ở thời điểm t giây.



a) Quãng đường ô tô A di chuyển được tính theo công thức là $s(t) = 15t - \frac{5}{2}t^2 + 15$.

b) Thời gian ô tô A từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn hết 3 giây.

c) Quãng đường ô tô A đi được từ lúc ô tô A đạp phanh đến khi dừng hẳn là $22,5(m)$.

d) Để hai ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là $23,5(m)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG

a) Quãng đường ô tô A di chuyển được tính theo công thức là

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (15 - 5t) dt = 15t - \frac{5}{2}t^2 + C$$

$$15(m/s) \Rightarrow 15 = 15 - 5t \Leftrightarrow t = 0$$

$$\text{Khi } t = 0 \Rightarrow s(0) = 0 \Leftrightarrow 15 \cdot 0 - \frac{5}{2} \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow s(t) = 15t - \frac{5}{2}t^2$$

b) Khi ô tô dừng lại $v_A(t) = 0 \Leftrightarrow 15 - 5t = 0 \Leftrightarrow t = 3$ giây.

c) Quãng đường ô tô A đi được từ lúc ô tô A đạp phanh đến khi dừng hẳn là:

$$\int_0^3 (15 - 5t) dt = \left(15t - \frac{5t^2}{2} \right) \Big|_0^3 = 22,5(m).$$

d) Để đảm bảo an toàn thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là $1 + 22,5 = 23,5(m)$

Câu 25. Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang (chiều dương hướng sang phải) với gia tốc phụ thuộc vào thời gian $t(s)$ là $a(t) = 2t - 7$ (m/s^2). Biết vận tốc đầu bằng 6 (m/s).

a) Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(s)$ xác định bởi $v(t) = t^2 - 7t + 6$.

b) Tại thời điểm $t = 7$ (s), vận tốc của chất điểm là $5(m/s)$

c) Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 7$ là $18(m)$.

d) Trong 8 giây đầu tiên, thời điểm chất điểm xa nhất về phía bên phải là $t = 6$ (s).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

a) Ta có $v(t) = \int a(t) dt = \int (2t - 7) dt = t^2 - 7t + C$.

$$v(0) = 6 \Rightarrow C = 6.$$

Vậy $v(t) = t^2 - 7t + 6$ (m/s).

b) Tại thời điểm $t = 5$ (s), vận tốc của chất điểm là: $v(5) = 5^2 - 7 \cdot 5 + 6 = 6$ (m/s)

c) Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 7$ là

$$S = \int_1^7 |v(t)| dt = \int_1^7 |(t^2 - 7t + 6)| dt = -\int_1^7 (t^2 - 7t + 6) dt = -\left(\frac{t^3}{3} - \frac{7t^2}{2} + 6t\right) \Big|_1^7 = 18(m).$$

d) Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t là $x(t) = \int v(t) dt = \int (t^2 - 7t + 6) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{7t^2}{2} + 6t + C$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $x(t)$ với $t \in [0;8]$.

Ta có $x'(t) = v(t) = 0$ khi $t = 1$ hoặc $t = 6$.

Lại có $x(0) = C$, $x(1) = \frac{17}{6} + C$, $x(6) = -18 + C$, $x(8) = -\frac{16}{3} + C$.

Vậy giá trị lớn nhất của $x(t)$ với $t \in [0;8]$ đạt được khi $t = 1$.

Câu 26. Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s²) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A .

a) Quãng đường chuyển động của chất điểm A tại thời điểm t theo hàm $s(t) = \frac{1}{540}t^3 + \frac{11}{36}t^2 + C$ (m),

với C là hằng số.

b) Quãng đường chất điểm B đi được từ lúc xuất phát đến khi gặp chất điểm B là 70(m).

c) Vận tốc của chất điểm B là $v_B(t) = a.t$ (m/s).

d) Vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng 10(m/s).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

a) Ta có: $s(t) = \int v(t) dt = \int \left(\frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t\right) dt = \frac{1}{540}t^3 + \frac{11}{36}t^2 + C$

Quãng đường chuyển động của chất điểm A tại thời điểm t theo hàm :

$$s(t) = \frac{1}{540}t^3 + \frac{11}{36}t^2 + C \text{ (m), với } C \text{ là hằng số.}$$

b) Thời gian tính từ khi A xuất phát đến khi bị B đuổi kịp là 15 giây, suy ra quãng đường chất điểm B đi được từ lúc xuất phát đến khi gặp chất điểm B là:

$$s = \int_0^{15} v(t) dt = \int_0^{15} \left(\frac{1}{180} t^2 + \frac{11}{18} t \right) dt = \left(\frac{1}{540} t^3 + \frac{11}{36} t^2 \right) \Big|_0^{15} = 75 (m).$$

c) Vận tốc của chất điểm B là $v_B(t) = \int a dt = at + C_1$ (C_1 là hằng số); do B xuất phát từ trạng thái nghỉ nên có $v_B(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0$

Do đó: $v_B(t) = at$ (m/s)

d) Quãng đường của B từ khi xuất phát đến khi đuổi kịp A là

$$\int_0^{10} y(t) dt = 75 \Leftrightarrow \int_0^{10} at dt = 75 \Leftrightarrow \frac{at^2}{2} \Big|_0^{10} = 75 \Leftrightarrow 50a = 75 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

Vậy có $v_B(t) = \frac{3}{2}t$

Suy ra vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(10) = 15 (m/s)$.

Câu 27. Lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của sản phẩm **iPhone 16 Pro** được mô hình hóa bằng công thức $P'(x) = -0,0008x + 10,4$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x sản phẩm.



a) Lợi nhuận khi bán được x sản phẩm **iPhone 16 Pro** được tính bằng $P(x) = -0,0004x^2 + 10,4x$.

b) Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm **iPhone 16 Pro** đầu tiên là 525 triệu đồng.

c) Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 sản phẩm **iPhone 16 Pro** là 50,1 triệu đồng.

d) Biết sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a sản phẩm **iPhone 16 Pro** lớn hơn 517 triệu đồng, khi đó giá trị nhỏ nhất của a là 101.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	SAI	SAI	ĐÚNG

a) Ta có: $P(x) = \int P'(x) dx = \int (-0,0008x + 10,4) dx = -0,0004x^2 + 10,4x + C$, với C là hằng số.

Khi $x = 0$ thì không có lợi nhuận nên $P(0) = 0$:

$$P(0) = -0,0004 \cdot 0^2 + 10,4 \cdot 0 + C \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow P(x) = -0,0004x^2 + 10,4x$$

b) Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm **iPhone 16 Pro** đầu tiên là:

$$P(50) = -0,0004 \cdot 50^2 + 10,4 \cdot 50 = 519 \text{ (triệu đồng)}.$$

c) Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 sản phẩm **iPhone 16 Pro** là:

$$\begin{aligned} P(55) - P(50) &= \int_{50}^{55} P'(x) dx = \int_{50}^{55} (-0,0008x + 10,4) dx = -\int_{50}^{55} 0,0008x dx + \int_{50}^{55} 10,4 dx \\ &= -0,0004x^2 \Big|_{50}^{55} + 10,4x \Big|_{50}^{55} = -0,0004(55^2 - 50^2) + 10,4(55 - 50) = 51,79 \text{ (triệu đồng)}. \end{aligned}$$

d) Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a sản phẩm **iPhone 16 Pro** là

$$\begin{aligned} P(a) - P(50) &= \int_{50}^a P'(x) dx = \int_{50}^a (-0,0008x + 10,4) dx = -\int_{50}^a 0,0008x dx + \int_{50}^a 10,4 dx \\ &= -0,0004x^2 \Big|_{50}^a + 10,4x \Big|_{50}^a = -0,0004(a^2 - 50^2) + 10,4(a - 50) = -0,0004a^2 + 10,4a - 519. \end{aligned}$$

Theo bài ra ta có:

$$-0,0004a^2 + 10,4a - 519 > 517 \Leftrightarrow 0,0004a^2 - 10,4a + 1036 < 0 \Leftrightarrow 100 < a < 25900.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của a là 101.

Câu 28. Giả sử chi phí mua và bảo trì một thiết bị trong x năm có thể được mô hình hóa theo công thức

$$C = 5000 \left(25 + 3 \int_0^x t^{\frac{1}{4}} dt \right).$$

a) Chi phí mua 1 sản phẩm là 125000 đồng.

b) Chi phí bảo trì năm đầu tiên của 1 sản phẩm là 10000 đồng.

c) Sau 6 năm thì số tiền mua một sản phẩm bằng số tiền bảo trì sản phẩm đó.

d) Nếu một nhà đầu tư có 10 triệu, thì họ có thể mua và bảo trì tối đa 29 sản phẩm trong 10 năm.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	SAI	SAI	ĐÚNG

a) Chi phí mua 1 sản phẩm ứng với $x = 0$, sau ra $C = 5000 \cdot 25 = 125000$

b) Với $x = 1$ ta có: $C = 5000 \left(25 + 3 \int_0^1 t^{\frac{1}{4}} dt \right) = 137000$.

Suy ra chi phí bảo trì năm đầu tiên của sản phẩm là $137000 - 125000 = 12000$ đồng.

c) Gọi x là số năm mà số tiền bảo trì bằng số tiền mua sản phẩm. Khi đó tổng số tiền mua và số tiền bảo trì là $2 \cdot 125000 = 250000$.

$$5000 \left(25 + 3 \int_0^x t^{\frac{1}{4}} dt \right) = 250000$$

$$\Leftrightarrow 25 + 3 \left(\frac{4}{5} t^{\frac{5}{4}} \Big|_0^x \right) = 50$$

$$\Leftrightarrow \frac{12}{5} x^{\frac{5}{4}} = 25$$

$$\Leftrightarrow x = \left(\frac{75}{2} \right)^{\frac{4}{5}} \approx 6,52$$

d) Số tiền mua và bảo trì 1 sản phẩm trong 10 năm là:

$$C = 5000 \left(25 + 3 \int_0^{10} t^{\frac{1}{4}} dt \right) = 5000 (25 + 24\sqrt[4]{10}).$$

$$\text{Ta có: } \frac{10000000}{5000(25 + 24\sqrt[4]{10})} \approx 29,55$$

Vậy với 10 triệu thì họ có thể mua và bảo trì tối đa 29 sản phẩm.

Câu 29. Tại một nhà máy sản xuất một loại phân bón. Gọi $P(x)$ là lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán x (tấn) sản phẩm trong một tuần. Khi đó đạo hàm $P'(x)$ gọi là lợi nhuận cận biên, cho biết tốc độ tăng lợi nhuận theo lượng sản phẩm bán được. Giả sử lợi nhuận cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức: $P'(x) = 17 - 0,025x$ với $0 \leq x \leq 1000$. Biết nhà máy lỗ 24 triệu đồng nếu không bán được lượng sản phẩm nào trong tuần.



a) Công thức lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán x (tấn) sản phẩm trong một tuần là $P(x) = 17x - 0,0125x^2$.

b) Lợi nhuận nhà máy thu được khi bán 80 tấn sản phẩm trong tuần là 1 tỉ 256 triệu đồng.

c) Nếu nhà máy bán được từ 1,2 tấn sản phẩm trên tuần trở lên thì nhà máy luôn có lãi.

b) Lợi nhuận nhà máy thu được lớn nhất khi bán 680 tấn sản phẩm trong tuần.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

a) Ta có:

$$P(x) = \int P'(x)dx = \int (17 - 0,025x)dx = 17x - 0,0125x^2 + C \text{ với } 0 \leq x \leq 1000$$

Vì nhà máy lỗ 24 triệu đồng nếu không bán được lượng sản phẩm nào trong tuần nên

Với $x = 0$ thì $P(x) = -24$ suy ra $P(0) = -24 \Leftrightarrow C = -24 \Rightarrow P(x) = 17x - 0,0125x^2 - 24$

b) Khi bán 80 tấn sản phẩm trong tuần thì $x = 80$:

$$P(80) = 17.80 - 0,0125.80^2 - 24 = 1256 \text{ triệu đồng hay 1 tỉ 256 triệu đồng.}$$

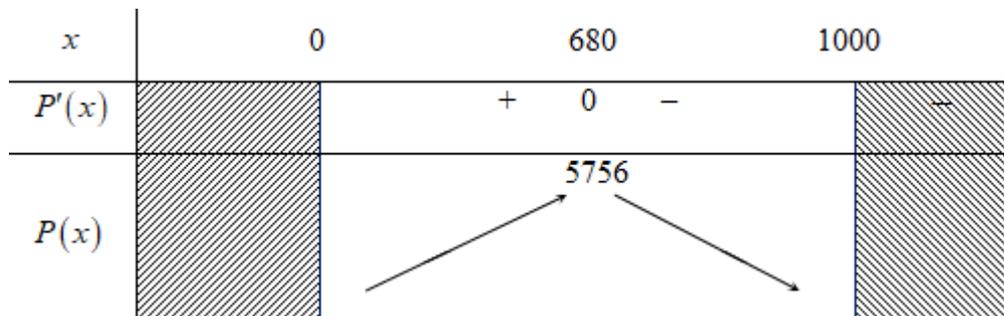
c) Nhà máy chỉ bắt đầu có lãi khi $P(x) > 0 \Rightarrow 17x - 0,0125x^2 - 24 > 0 \Rightarrow 1,41 < x < 1358,5$

Vậy nếu $1,2 \leq x \leq 1,41$ nhà máy vẫn có thể bị lỗ.

d) $P(x) = 17x - 0,0125x^2 - 24$

Ta có: $P'(x) = 17 - 0,025x \Rightarrow P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 680$

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên, ta có: $Max_{(0;1000)} P(680) = 5756$

Vậy lợi nhuận nhà máy thu được lớn nhất khi bán 680 tấn sản phẩm trong tuần là 5 tỉ 756 triệu đồng.

Câu 30. Ở nhiệt độ $36^\circ C$, một phản ứng hóa học từ chất đầu A , chuyển hóa thành chất sản phẩm B theo phương trình: $A \rightarrow B$. Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị $mol L^{-1}$) tại thời điểm x (giây), $y(x) > 0$ với $x \geq 0$, thỏa mãn hệ thức: $y'(x) = -7.10^{-4}y(x)$ với $x \geq 0$. Biết rằng tại $x = 0$, nồng độ (đầu) của A là $0,05 mol L^{-1}$. Xét hàm số $f(x) = \ln y(x)$ với $x \geq 0$.

a) $f'(x) = -7.10^{-4}$

b) $f(x) = -7.10^{-4}x + \ln(0,05)$

c) $y(30) - y(15) = -6.10^{-4}$

d) Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây gần bằng $0,05$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

a) Ta có $f'(x) = (\ln y(x))' = \frac{y'(x)}{y(x)} = -7 \cdot 10^{-4}$.

b) $f(x) = -7 \cdot 10^{-4}x + \ln(0,05)$.

Ta có $f(x) = \int f'(x) dx = \int (-7 \cdot 10^{-4}) dx = -7 \cdot 10^{-4}x + C$.

Theo giả thiết $y(0) = 0,05$ nên $f(0) = \ln y(0) = \ln(0,05)$. Khi đó $C = \ln(0,05)$.

Vậy $f(x) = -7 \cdot 10^{-4}x + \ln(0,05)$.

c) $y(30) - y(15) = -6 \cdot 10^{-4}$.

Từ $f(x) = \ln y(x) \Rightarrow y(x) = e^{f(x)} = e^{-7 \cdot 10^{-4}x + \ln(0,05)} = \frac{1}{20} e^{-7 \cdot 10^{-4}x}$.

Do đó $y(30) - y(15) = \frac{1}{20} (e^{-7 \cdot 10^{-4} \cdot 30} - e^{-7 \cdot 10^{-4} \cdot 15}) \approx -5,2 \cdot 10^{-4}$.

d) Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây là:

$$\frac{1}{30-15} \int_{15}^{30} y(x) dx = \frac{1}{15} \int_{15}^{30} \left(-\frac{1}{7 \cdot 10^{-4}} \right) y'(x) dx = -\frac{10^4}{105} y(x) \Big|_{15}^{30} = -\frac{10^4}{105} [y(30) - y(15)] \approx 0,05.$$

Câu 31. Giả sử tốc độ $v(m/s)$ của một thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất theo thời gian

$$t \text{ (giây)} \text{ được cho bởi công thức: } v(t) = \begin{cases} t & \text{khi } 0 \leq t \leq 2 \\ 2 & \text{khi } 2 < t \leq 20 \\ 12 - 0,5t & \text{khi } 20 < t \leq 24 \end{cases}.$$



a) Tốc độ tại thời điểm giây thứ 2 của thang máy là $2(m/s)$.

b) Gia tốc chuyển động của thang máy tại thời điểm giây thứ 10 là $2(m/s^2)$.

c) Quãng đường chuyển động của thang máy từ tầng 1 lên tầng cao nhất là $40(m)$.

d) Tốc độ trung bình của thang máy từ tầng 1 lên tầng cao nhất là $1,5(m/s)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
----	----	----	----

ĐÚNG	SAI	SAI	SAI
------	-----	-----	-----

a) Ta có $v(2) = 2(m/s)$.

b) Tại $t = 10(s)$ thì $v(t) = 2$ nên gia tốc $a(t) = v'(t) = 0$.

Do đó, gia tốc của thang máy tại thời điểm $t = 10(s)$ là $0(m/s^2)$.

c) Quãng đường chuyển động của thang máy từ tầng 1 lên tầng cao nhất là

$$S = \int_0^2 t dt + \int_2^{20} 2 dt + \int_{20}^{24} (12 - 0,5t) dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^2 + 2t \Big|_2^{20} + \left(12t - \frac{0,5t^2}{2} \right) \Big|_{20}^{24} = 42(m).$$

d) Tốc độ trung bình của thang máy từ tầng 1 lên tầng cao nhất là

$$v_{tb} = \frac{s}{t} = \frac{42}{24} = 1,75(m/s).$$

Câu 32. Khảo sát chuyển động của xe khách trong 30 phút trên một quãng đường ta thu được kết quả: vận tốc v (mét/phút) của xe khách theo thời gian t (phút) được biểu diễn bởi hàm số:

$$v(t) = \begin{cases} 100t & \text{khi } 0 \leq t \leq 10 \\ 20t + 800 & \text{khi } 10 < t \leq 20 \\ -10t + 1400 & \text{khi } 20 < t \leq 30 \end{cases}$$



a) Vận tốc của xe khách ở phút thứ 8 là 800 (mét/phút)

b) Vận tốc của xe khách ở phút thứ 20 là 1000 (mét/phút)

c) Quãng đường chuyển động của xe khách trong 30 phút khảo sát là 2750(m).

d) Vận tốc trung bình của xe khách trong 30 phút khảo sát là 910(mét/phút) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét/phút)

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	SAI	SAI	SAI

a) Vận tốc của xe khách ở phút thứ 8 là: $v(8) = 100 \cdot 8 = 800$ (mét/phút)

b) Vận tốc của xe khách ở phút thứ 20 là $v(20) = 20 \cdot 20 + 800 = 1200$ (mét/phút)

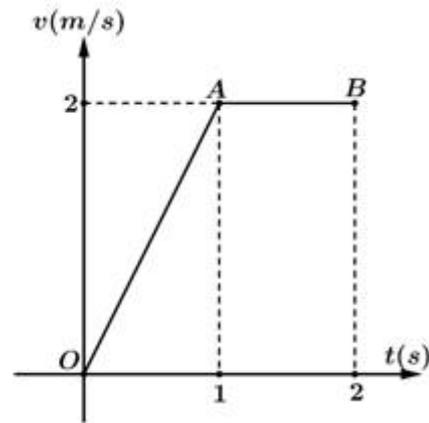
c) Quãng đường chuyển động của xe khách trong 30 phút khảo sát là:

$$s = \int_0^{30} v(t) dt = \int_0^{10} v(t) dt + \int_{10}^{20} v(t) dt + \int_{20}^{30} v(t) dt = \int_0^{10} 100t dt + \int_{10}^{20} (20t + 800) dt + \int_{20}^{30} (-10t + 1400) dt$$

$$= 50t^2 \Big|_0^{10} + (10t^2 + 800t) \Big|_{10}^{20} + (-5t^2 + 1400t) \Big|_{20}^{30} = 27500 (m)$$

d) Vận tốc trung bình của xe khách trong 30 phút khảo sát là: $v_{tb} = \frac{s}{30} = \frac{27500}{30} \approx 917$ (mét /phút).

Câu 33. Một chiếc xe đạp chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)$ (m/s) có dạng đường thẳng tại thời điểm $0 \leq t \leq 1$ (s) và $1 < t \leq 2$ (s) với vận tốc được cho bởi đồ thị trong hệ trục tOv như hình sau:



Gọi quãng đường của chiếc xe đạp tại thời điểm t là $s(t)$.

a) Vận tốc của chiếc xe đạp tại thời điểm t được xác định bởi $v(t) = \begin{cases} 2t & \text{khi } 0 \leq t \leq 1 \\ 2 & \text{khi } 1 < t \leq 2 \end{cases}$.

b) Quãng đường chiếc xe đạp đi được trong 1 giây đầu tiên được xác định bởi công thức $s(t) = \int_0^1 v(t) dt$

c) Quãng đường chiếc xe đạp đi được trong khoảng thời gian từ 1 giây đến 2 giây được xác định bởi công

thức $s(t) = \int_0^2 v(t) dt$

d) Quãng đường mà chiếc xe đạp đi được trong 2 giây đầu tiên là $4(m)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

a) Theo đồ thị:

Trong 1 giây đầu đồ thị là một đường thẳng đi qua hai điểm O, A nên có dạng: $v(t) = 2t$

Trong giây thứ 2 đồ thị là một đường thẳng đi qua hai điểm A, B nên có dạng: $v(t) = 2$

Vậy, vận tốc của chiếc xe đạp tại thời điểm t được xác định bởi $v(t) = \begin{cases} 2t & \text{khi } 0 \leq t \leq 1 \\ 2 & \text{khi } 1 < t \leq 2 \end{cases}$.

b) Quãng đường chiếc xe đạp đi được trong khoảng thời gian từ a giây đến b giây được xác định bởi công thức $s(t) = \int_a^b v(t) dt$.

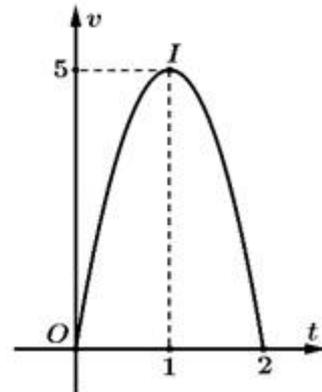
Do đó quãng đường chiếc xe đạp đi được trong khoảng thời gian từ 0 giây đến 1 giây được xác định bởi công thức $s(t) = \int_0^1 v(t) dt$.

c) Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ 1 giây đến 2 giây được xác định bởi công thức $s(t) = \int_1^2 v(t) dt$.

d) Quãng đường mà chiếc xe đạp đi được trong 2 giây đầu tiên là:

$$s(t) = \int_0^2 v(t) dt = \int_0^1 2t dt + \int_1^2 2 dt = t^2 \Big|_0^1 + 2t \Big|_1^2 = 1 + 2 = 3(m).$$

Câu 34. Bạn Nam chạy bộ trong 2 giờ, vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị là một phần của đường Parabol với đỉnh $I(1;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung Ov như hình vẽ.



a) Vận tốc chạy bộ của bạn Nam trong giờ thứ 2 tăng dần.

b) Vận tốc lớn nhất trong 2 giờ chạy của bạn Nam là $5(km/h)$.

c) Gia tốc chạy bộ của bạn Nam tại thời điểm 1,5 giờ là $5(km/h)$.

d) Quãng đường bạn Nam chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy là $6,63(km)$ (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	ĐÚNG	SAI	SAI

a) Từ đồ thị ta thấy: Vận tốc chạy bộ của bạn Nam trong khoảng 1 giờ đầu tăng dần và 1 giờ sau giảm dần.

Vậy vận tốc chạy bộ của bạn Nam trong trong giờ thứ 2 giảm dần.

c) Đồ thị $v = v(t)$ đi qua gốc tọa độ nên $v(t)$ có dạng $v(t) = at^2 + bt$.

$$\text{Đồ thị } v = v(t) \text{ có đỉnh là } I(1;5) \text{ nên } \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 10 \end{cases} \Rightarrow v(t) = -5t^2 + 10t$$

Gia tốc chạy bộ của bạn Nam tại thời điểm t là : $a(t) = v'(t) = -10t + 10$

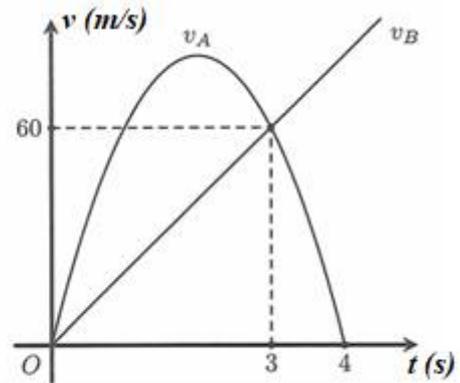
$$\Rightarrow a(1,5) = v'(1,5) = -10 \cdot 1,5 + 10 = -5 \text{ (km/h)}$$

$$\text{d) Ta có 1 giờ 30 phút} = 1,5 \text{ giờ} \Rightarrow s = \int_0^{1,5} v(t) dt.$$

Do đó, quãng đường bạn Nam chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy là

$$s = \int_0^{1,5} (-5t^2 + 10t) dt = \frac{45}{8} \approx 5,63 \text{ (km)}.$$

Câu 35. Cho đồ thị biểu diễn vận tốc của hai xe A và B khởi hành cùng một lúc và cùng vạch xuất phát, đi cùng chiều trên một con đường. Biết đồ thị biểu diễn vận tốc $v_A(t)$ (m/s) của xe A là một đường Parabol và đồ thị biểu diễn vận tốc $v_B(t)$ (m/s) của xe B là một đường thẳng như hình vẽ bên. Biết rằng xe A sẽ dừng lại khi vận tốc bằng 0.



a) Vận tốc của xe B tại thời điểm t giây là $v_B(t) = 20t$ (m/s).

b) Vận tốc của xe A tại thời điểm t giây là $v_A(t) = 20t^2 - 80t$ (m/s).

c) Quãng đường xe A đi được sau 4 giây là 213,3(m) (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của mét).

d) Sau 5 giây kể từ lúc xuất phát thì khoảng cách giữa hai xe là 38,7(m) (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của mét).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

a) Đồ thị biểu diễn vận tốc của xe B là đường thẳng có phương trình: $v_B = mt + n$ ($m \neq 0$) đi qua điểm $(0;0);(3;60) \Rightarrow v_B(t) = 20t$.

b) Đồ thị biểu diễn vận tốc của xe A là Parabol có phương trình: $v_A = at^2 + bt + c$ ($a \neq 0$) đi qua điểm $(0;0);(3;60);(4;0) \Rightarrow v_A(t) = -20t^2 + 80t$.

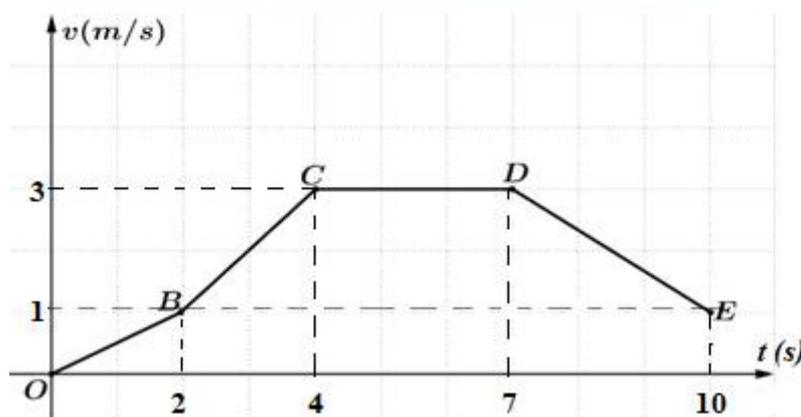
c) Ta có $v_A = -20t^2 + 80t = 0 \Rightarrow t = 4$ nên xe A dừng lại sau giây thứ 4.

Do đó quãng đường xe A đi được sau 4 giây là $S_A = \int_0^4 (-20t^2 + 80t) dt = \frac{640}{3} (m) \approx 213,3(m)$.

d) Quãng đường xe B đi được sau 5 giây đầu là $S_B = \int_0^5 (20t) dt = 250(m)$

Khoảng cách giữa hai xe sau 5 giây kể từ lúc xuất phát là $\Delta S = |S_A - S_B| = \frac{110}{3} \approx 36,7(m)$.

Câu 36. Cho hình vẽ dưới đây là đồ thị vận tốc $v(t)$ (m/s) của một ca nô chạy trên sông trong 10 giây đầu tiên ($t = 0$ là thời điểm ca nô bắt đầu chuyển động).



a) Vận tốc chạy của ca nô chạy trong khoảng thời gian từ 4 giây đầu tiên tăng dần.

b) Trong 10 giây đầu tiên, vận tốc ca nô chạy lớn nhất trong 4 giây.

c) Trong 10 giây đầu tiên, ca nô chạy với vận tốc $v(t)$ theo hàm $v(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & \text{khi } 0 \leq t \leq 2 \\ t-1 & \text{khi } 2 < t \leq 4 \\ 3 & \text{khi } 4 < t \leq 7 \\ -\frac{2}{3}t + \frac{23}{3} & \text{khi } 7 < t \leq 10 \end{cases}$

d) Vận tốc chạy trung bình của ca nô 10 giây đầu tiên là $2,5(m/s)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

a) Từ đồ thị, ta thấy: Vận tốc chạy của ca nô chạy trong khoảng thời gian từ 4 giây đầu tiên tăng dần.

b) Từ đồ thị, ta thấy: Trong 10 giây đầu tiên, vận tốc ca nô chạy lớn nhất trong giây thứ 5, thứ 6 và thứ 7 là $3(m/s)$.

Vậy trong 10 giây đầu tiên, vận tốc ca nô chạy lớn nhất trong 3 giây.

c) Phương trình đường thẳng $OB: v = \frac{1}{2}t$

Phương trình đường thẳng $BC: v = t - 1$

Phương trình đường thẳng $CD: v = 3$

Phương trình đường thẳng $DE: v = -\frac{2}{3}t + \frac{23}{3}$

Suy ra: Trong 10 giây đầu tiên, ca nô chạy với vận tốc $v(t)$ theo hàm $v(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & \text{khi } 0 \leq t \leq 2 \\ t-1 & \text{khi } 2 < t \leq 4 \\ 3 & \text{khi } 4 < t \leq 7 \\ -\frac{2}{3}t + \frac{23}{3} & \text{khi } 7 < t \leq 10 \end{cases}$.

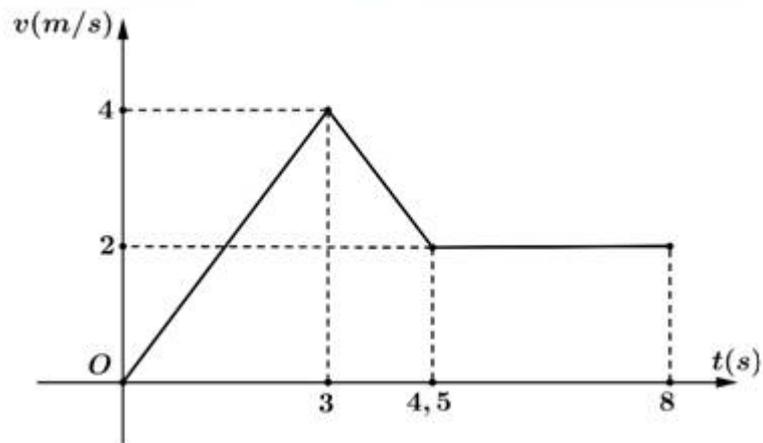
d) Quãng đường chuyển động của ca nô trong 10 giây là:

$$s = \int_0^{10} v(t) dt = \int_0^2 v(t) dt + \int_2^4 v(t) dt + \int_4^7 v(t) dt + \int_7^{10} v(t) dt$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{2}t dt + \int_2^4 (t-1) dt + \int_4^7 3 dt + \int_7^{10} \left(-\frac{2}{3}t + \frac{23}{3}\right) dt = 20 (m)$$

Vận tốc trung bình của ca nô là: $v_{tb} = \frac{s}{10} = 2(m/s)$.

Câu 37. Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t)$ (m/s) trong 8 giây đầu tiên ($t = 0$ là thời điểm máy bay bắt đầu chuyển động) được cho bởi đồ thị ở hình vẽ dưới đây.



- a) Trong 8 giây đầu tiên, vận tốc của máy bay lớn nhất là $4(m/s)$.
- b) Trong 8 giây đầu tiên, vận tốc của máy bay không đổi trong thời gian 3 giây.
- c) Quãng đường mà máy bay di chuyển được trong 3 giây đầu tiên là $11(m)$.
- d) Vận tốc chạy trung bình của máy bay 8 giây đầu tiên là $4,521(m/s)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	SAI	SAI	SAI

a) Dựa vào đồ thị ta thấy: Trong 8 giây đầu tiên, vận tốc của máy bay lớn nhất là $4(m/s)$ tại thời điểm $t = 3(s)$

b) Dựa vào đồ thị ta thấy: vận tốc của máy bay không đổi $v = 2(m/s)$ từ 4,5 giây đến 8 giây.

Vậy trong 8 giây đầu tiên, vận tốc của máy bay không đổi trong thời gian 3,5 giây.

c) Dựa vào đồ thị trong khoảng thời gian 3 giây vận tốc của chuyển động được xác định là

$$v(t) = \frac{4}{3}t (m/s)$$

Ta có quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giây đầu tiên là $s = \int_0^3 \frac{4}{3}t dt = \frac{4}{3}t^2 \Big|_0^3 = 12(m)$

d) Dựa vào đồ thị ta thấy:

Trong khoảng thời gian 1 giây vận tốc của chuyển động được xác định là $v(t) = \frac{4}{3}t$ (m/s)

Trong khoảng thời gian từ 3 giây đến 4,5 giây vận tốc của chuyển động được xác định là $v(t) = -\frac{4}{3}t + 8$ (m/s),

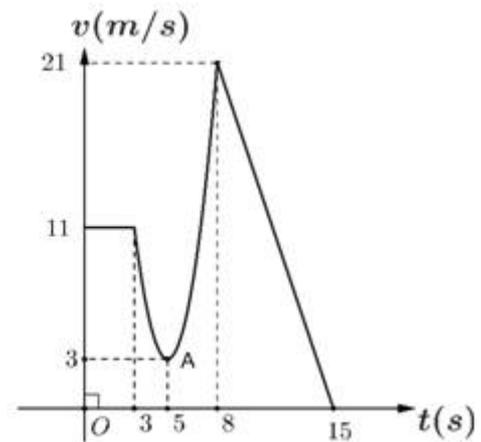
Trong khoảng thời gian từ 4,5 giây đến 8 giây vận tốc của chuyển động là $v(t) = 8$ (m/s)

Ta có quãng đường mà vật di chuyển được trong 8 giây đầu tiên là:

$$s = \int_0^3 \frac{4}{3}t dt + \int_3^{4,5} \left(-\frac{4}{3}t + 8\right) dt + \int_{4,5}^8 8 dt = 38,5(m).$$

Vận tốc chạy trung bình của ca nô 8 giây đầu tiên là: $v_{tb} = \frac{s}{t} = \frac{38,5}{8} = 4,8125(m/s)$.

Câu 38. Chát chiếc ca nô chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)$ (m/s) có dạng đường thẳng tại thời điểm $0 \leq t \leq 3(s)$ và $8 \leq t \leq 15(s)$ và $v(t)$ có dạng đường Parabol khi $3 \leq t \leq 8(s)$ như đồ thị bên dưới.



a) Vận tốc của ca nô tại thời điểm $t = 5(s)$ là $3(m/s)$.

b) Quãng đường ca nô di chuyển được trong 3 giây đầu tiên là: $\int_0^3 11 dt$ (m)

c) Quãng đường ca nô đi được trong khoảng thời gian từ 8 giây đến 15 giây bằng $70,5(m)$

d) Vận tốc trung bình v_{tb} của ca nô trong khoảng thời gian từ 3 đến 8 giây bằng $7,67(m/s)$ (kết quả làm tròn đến phần trăm của mét/giây).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

a) Dựa vào đồ thị $v(t)$, ta có: $t = 5(s) \Rightarrow v(5) = 3(m/s)$.

b) Trong 3 giây đầu tiên, vận tốc của ca nô chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường thẳng và có $v(t) = 11(m/s)$.

Do đó quãng đường ca nô chuyển động trong 3 giây đầu tiên là: $\int_0^3 11 dt (m)$

c) Trong khoảng thời gian từ 8 đến 15 giây, đồ thị $v(t)$ là một đường thẳng đi qua hai điểm $(8;21)$ và $(15;0)$. Ta có: $v(t) = at + b$.

Từ giả thiết ta có hệ:
$$\begin{cases} 8a + b = 21 \\ 15a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 45 \end{cases}$$

Do đó $v(t) = -3t + 45 (8 \leq t \leq 15)$.

Quãng đường ca nô đi được trong khoảng thời gian này là:

$$S = \int_8^{15} (-3t + 45) dt = -\frac{3t^2}{2} \Big|_8^{15} + 45t \Big|_8^{15} = \frac{147}{2} = 73,5(m).$$

d) Trong khoảng thời gian từ 3 đến 8 giây đồ thị $v(t)$ là một Parabol đi qua các điểm có tọa độ lần lượt là $(3;11), (5;3), (8;21)$ có phương trình dạng: $v(t) = at^2 + bt + c$.

Từ giả thiết ta có:
$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 11 \\ 25a + 5b + c = 3 \\ 64a + 8b + c = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -20 \\ c = 53 \end{cases}$$

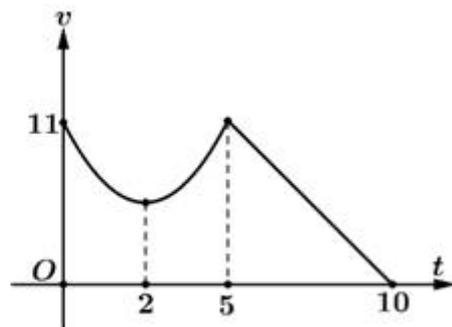
Do đó: $v(t) = 2t^2 - 20t + 53 (3 \leq t \leq 8)$.

Quãng đường ca nô đi được trong khoảng thời gian này là:

$$S_3 = \int_3^8 v(t) dt = \int_3^8 (2t^2 - 20t + 53) dt = \left(\frac{2t^3}{3} - 10t^2 + 53t \right) \Big|_3^8 = \frac{115}{3} (m)$$

Vận tốc trung bình của ca nô trong khoảng thời gian này là: $v_{tb} = \frac{S_3}{5} = \frac{23}{3} \approx 7,67(m/s)$.

Câu 39. Một ô tô chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường Parabol khi $0 \leq t \leq 5(s)$ và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5 \leq t \leq 10(s)$. Biết đỉnh Parabol là $I(2,3)$ như đồ thị bên dưới.



a) Vận tốc của ô tô tăng dần từ giây thứ 3 đến giây thứ 5.

b) Vận tốc của ô tô tại thời điểm $t = 4$ giây là $11(m/s)$.

c) Gia tốc của ô tô tại thời điểm $t = 6$ giây là $-35,2(m/s^2)$.

d) Quãng đường ô tô đi được trong thời gian $0 \leq t \leq 10(s)$ là $60(m)$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

a) Dựa vào đồ thị, ta có:

Vận tốc của ô tô giảm dần trong 2 giây đầu tiên và từ giây thứ 5 đến giây thứ 10.

Vận tốc của ô tô tăng dần từ giây thứ 3 đến giây thứ 4.

b) Gọi Parabol $(P): v(t) = at^2 + bt + c$ là phương trình thể hiện vận tốc của ô tô khi $0 \leq t \leq 5(s)$

Do (P) có đỉnh $I(2;3)$ và đi qua điểm $(0;11)$ nên:

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 2 \\ y(0) = 11 \\ y(2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 3 \\ c = 11 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \\ c = 11 \end{cases} \Rightarrow v(t) = 2t^2 - 8t + 11$$

$$\Rightarrow v(4) = 2 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 + 11 = 11(m/s)$$

$$c) \text{ Với } t = 5 \Rightarrow v(5) = 2 \cdot 5^2 - 8 \cdot 5 + 11 = 21$$

Gọi $d: v(t) = at + b$ là phương trình đường thẳng thể hiện vận tốc của ô tô khi $5 \leq t \leq 10(s)$ do d đi qua

$$\text{điểm } (5;21) \text{ và } (10;0) \text{ nên: } \begin{cases} 5a + b = 11 \\ 10a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{11}{5} \\ b = 22 \end{cases} \Rightarrow v(t) = -\frac{11}{5}t + 22$$

Gia tốc của ô tô tại thời điểm t giây là: $a(t) = v'(t) = -\frac{11}{5} = 2,2(m/s^2)$, do đó gia tốc của ô tô tại thời điểm giây thứ 5 đến giây thứ 10 không đổi là $2,2(m/s^2)$

Vậy gia tốc của ô tô tại thời điểm $t = 6$ giây là $2,2(m/s^2)$.

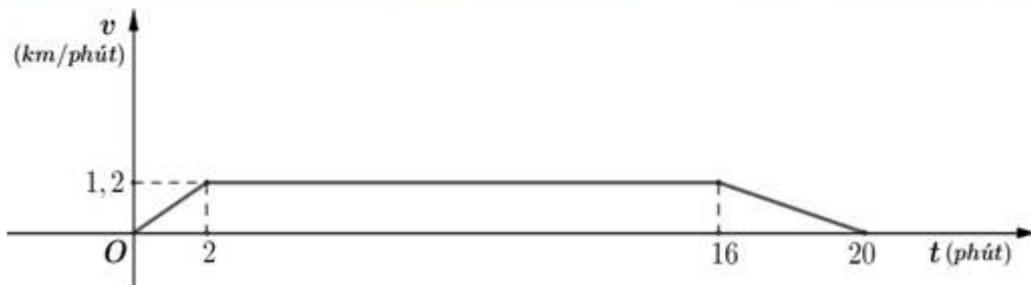
$$d) \text{ Ta có: phương trình biểu thị vận tốc của ô tô là } v(t) = \begin{cases} 2t^2 - 8t + 11, & 0 \leq t \leq 5 \\ -\frac{11}{5}t + 22, & 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

Khi đó quãng đường ô tô di chuyển trong khoảng thời gian từ $0 \leq t \leq 10(s)$ là

$$S = \int_0^{10} v(t) dt = \int_0^5 (2t^2 - 8t + 11) dt + \int_5^{10} \left(\frac{-11}{5}t + 22 \right) dt$$

$$= \left(\frac{2t^3}{3} - 4t^2 + 11t \right) \Big|_0^5 + \left(\frac{-11t^2}{10} + 22t \right) \Big|_5^{10} = \frac{115}{3} + \frac{55}{2} = \frac{395}{6} (m) \approx 60 (m)$$

Câu 40. Tốc độ v (km / phút) của một ca nô cao tốc thay đổi theo thời gian t (phút) ($t = 0$ là thời điểm ca nô bắt đầu chuyển động) như đồ thị ở hình vẽ sau:



- a) Tốc độ của ca nô tăng dần trong 2 phút đầu tiên kể từ khi nó bắt đầu chuyển động.
- b) Tốc độ của ca nô ở phút thứ 17 là $0,9$ (km / phút).
- c) Quãng đường ca nô di chuyển được trong 20 phút đầu tiên là $19,4$ (km).
- d) Tốc độ trung bình của ca nô trong khoảng thời gian 20 phút đầu tiên là $1,02$ (km / phút).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

- a) Từ đồ thị, ta có: Tốc độ của ca nô tăng dần trong 2 giây đầu tiên kể từ khi nó bắt đầu chuyển động.
- b) Từ đồ thị, ta có tốc độ của ca nô được tính theo công thức:

$$v(t) = \begin{cases} 0,6t & \text{khi } 0 \leq t \leq 2 \\ 1,2 & \text{khi } 2 < t \leq 16 \\ 6 - 0,3t & \text{khi } 16 < t \leq 20 \end{cases}$$

Tốc độ của ca nô ở giây thứ 17 là : $v(17) = 6 - 0,3 \cdot 17 = 0,9$ (km / phút)

c) Ta có tốc độ của ca nô được tính theo công thức: $v(t) = \begin{cases} 0,6t & \text{khi } 0 \leq t \leq 2 \\ 1,2 & \text{khi } 2 < t \leq 16 \\ 6 - 0,3t & \text{khi } 16 < t \leq 20 \end{cases}$

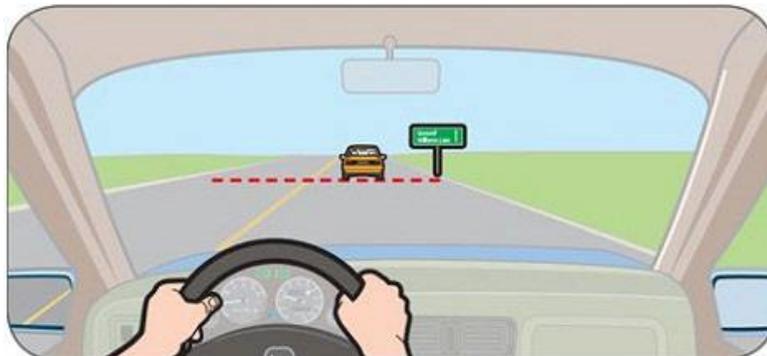
Do đó, quãng đường ca nô di chuyển được trong 20 phút đầu tiên là

$$s = \int_0^2 0,6t dt + \int_2^{16} 1,2 dt + \int_{16}^{20} (6 - 0,3t) dt = \frac{6}{5} + \frac{84}{5} + \frac{12}{5} = 20,4 \text{ (km)}$$

d) Tốc độ trung bình của ca nô trong 20 phút đầu tiên là $v_{tb} = \frac{s}{20} = \frac{102}{100} = 1,02$ (km / phút)

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 41. Một ô tô đang chạy với vận tốc là 12 (m/s) thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -6t + 12 \text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $12m$

Lấy mốc thời gian ($t = 0$) là lúc đạp phanh.

Khi ô tô dừng hẳn thì vận tốc $v(t) = 0$, tức là $v(t) = -6t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Vậy từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được quãng đường là

$$\int_0^2 (-6t + 12) dt = (-3t^2 + 12t) \Big|_0^2 = 12 \text{ (m)}.$$

Câu 42. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10 \text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $10m$

Xét phương trình $-5t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Do vậy, kể từ lúc người lái đạp phanh thì sau 2s ô tô dừng hẳn.

Quãng đường ô tô đi được kể từ lúc người lái đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn là

$$s = \int_0^2 (-5t + 10) dt = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 10t \right) \Big|_0^2 = 10m.$$

Câu 43. Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s²) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng bao nhiêu mét/giây?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 25 (m/s)

Ta có $v_B(t) = \int a dt = at + C$, $v_B(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow v_B(t) = at$.

Quãng đường chất điểm A đi được trong 25 giây là

$$S_A = \int_0^{25} \left(\frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t \right) dt = \left(\frac{1}{300}t^3 + \frac{13}{60}t^2 \right) \Big|_0^{25} = \frac{375}{2}.$$

Quãng đường chất điểm B đi được trong 15 giây là

$$S_B = \int_0^{15} at dt = \frac{at^2}{2} \Big|_0^{15} = \frac{225a}{2}.$$

$$\text{Ta có } \frac{375}{2} = \frac{225a}{2} \Leftrightarrow a = \frac{5}{3}.$$

Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A là $v_B(15) = \frac{5}{3} \cdot 15 = 25$ (m/s).

Câu 44. Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5(s) người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -35$ (m/s²). Tính quãng đường (đơn vị mét) của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn?



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 105.

Quãng đường ô tô đi được trong 5(s) đầu là $s_1 = \int_0^5 7t dt = 7 \frac{t^2}{2} \Big|_0^5 = 87,5$ (mét).

Phương trình vận tốc của ô tô khi người lái xe phát hiện chướng ngại vật là $v_{(2)}(t) = 35 - 35t$ (m/s).

Khi xe dừng lại hẳn thì $v_{(2)}(t) = 0 \Leftrightarrow 35 - 35t = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Quãng đường ô tô đi được từ khi phanh gấp đến khi dừng lại hẳn là

$$s_2 = \int_0^1 (35 - 35t) dt = \left(35t - 35 \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 17,5 \text{ (mét)}.$$

Vậy quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn là

$$s = s_1 + s_2 = 87,5 + 17,5 = 105 \text{ (mét)}.$$

Câu 45. Một chiếc ca nô đang chuyển động trên sông với vận tốc $v(t) = 4t + 3$ (m/s), với t là thời gian tính bằng giây. Quãng đường chiếc ca nô đi được trong khoảng từ 3 đến 5 giây là bao nhiêu mét?

**Trả lời:**

Lời giải

Đáp án: 38

Quãng đường chiếc ca nô đi được trong khoảng từ 3 đến 5 giây là: $s = \int_3^5 (4t + 3) dt = (2t^2 + 3t) \Big|_3^5 = 38(m)$.

Câu 46. Một người đang lái xe chiếc ca nô với vận tốc $24(m/s)$ thì người lái phát hiện phía trước có chướng ngại vật nên cần giảm tốc độ của ca nô. Sau khi giảm tốc độ, ca nô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -8t + 24$ (m/s), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc giảm tốc độ. Hỏi từ lúc giảm tốc độ đến khi ca nô dừng hẳn, ca nô di chuyển quãng đường bao nhiêu mét?



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 36

Vật dừng lại tại thời điểm $v = 0 \Rightarrow -8t + 24 = 0 \Leftrightarrow t = 3(s)$

Ô tô di chuyển quãng đường là: $s = \int_0^3 v(t) dt = \int_0^3 (-8t + 24) dt = (-4t^2 + 24t) \Big|_0^3 = 36(m)$.

Câu 47. Một chiếc mô tô đang chuyển động trên đường với vận tốc $v(t) = t^2 - 4t + 1$ (m / s), với t là thời gian tính bằng giây. Quãng đường xe mô tô đi được trong khoảng từ 2 đến 8 giây là bao nhiêu?



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 54

Quãng đường xe mô tô đi được trong khoảng từ 2 đến 8 giây là:

$$s = \int_2^8 v(t) dt = \int_2^8 (t^2 - 4t + 1) dt = \left(\frac{1}{3} t^3 - 2t^2 + t \right) \Big|_2^8 = 54(m)$$

Câu 48. Bạn Minh Hiền đang lái xe với vận tốc $5(m/s)$ thì nhận thấy phía trước đèn giao thông đang chuẩn bị chuyển sang đèn đỏ nên cần giảm tốc độ của xe để đợi đèn đỏ. Sau khi đạp phanh, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -0,5t + 5$ (m / s), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi xe dừng hẳn, xe di chuyển quãng đường bao nhiêu mét?



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 25

Lúc đạp phanh tại thời điểm: $v = 5 \Rightarrow -0,5t_1 + 5 = 5 \Leftrightarrow t_1 = 0$ giây

Xe dừng ở thời điểm $v = 0 \Leftrightarrow -0,5t_2 + 5 = 0 \Leftrightarrow t_2 = 10$ giây

Khi đó quãng đường xe di chuyển là: $S = \int_0^{10} (-0,5t + 5) dt = \left(\frac{-0,5}{2} t^2 + 5t \right) \Big|_0^{10} = 25$ mét.

Câu 49. Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ được định nghĩa là

$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. Giả sử nhiệt độ (tính bằng °C) tại thời điểm t giờ trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng

đến 12 giờ trưa ở Thành phố Nha Trang vào ngày 24/12/2024 được mô hình hóa bởi hàm số

$$T(t) = 2t + 11, \text{ với } 6 \leq t \leq 12.$$

Nhiệt độ trung bình từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa ngày 24/12/2024 của Thành phố Nha Trang là bao nhiêu °C ?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 29

Nhiệt độ trung bình từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa ngày 24/12/2024 của Thành phố Nha Trang là:

$$t_0 = \frac{1}{12-6} \cdot \int_6^{12} (2t + 11) dt = \frac{1}{6} (t^2 + 11t) \Big|_6^{12} = 29^\circ\text{C}$$

Câu 50. Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ được định nghĩa là

$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. Giả sử lượng mưa trung bình (tính bằng mm) tại thời điểm t ngày trong khoảng thời

gian từ ngày 01/12/2024 đến ngày 31/12/2024 ở Thành phố Nha Trang được mô hình hóa bởi hàm số:

$$M(x) = 80 + 10(t - 8) \text{ với } 1 \leq t \leq 31.$$

Lượng mưa trung bình tháng 12/2024 của Thành phố Nha Trang là bao nhiêu mm?

Trả lời:

Lời giải**Đáp án:** 160

Lượng mưa trung bình tháng 12/2024 của Thành phố Nha Trang là

$$M_0 = \frac{1}{31-1} \int_1^{31} [80 + 10(t-8)] dt = \frac{1}{30} \int_1^{31} 10t dt = \frac{1}{30} \cdot 5t^2 \Big|_1^{31} = 160 \text{ mm.}$$

Câu 51. Cửa hàng điện thoại di động của chị Minh Nhân có lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x) = -0,01x + 2$. Lợi nhuận của sản phẩm trên khi doanh số là 200 với sản phẩm lớn hơn doanh số 150 sản phẩm là bao nhiêu triệu đồng, biết $P(x)$ là lợi nhuận tính bằng triệu đồng?



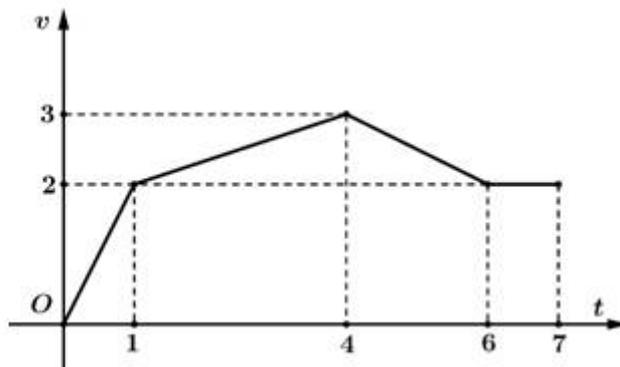
Trả lời:

Lời giải**Đáp án:** 12,5

$$\text{Lợi nhuận của cửa hàng khi đó là: } P(200) - P(150) = \int_{150}^{200} P'(x) dx = \int_{150}^{200} (-0,01x + 1) dx = 12,5$$

Vậy lợi nhuận của sản phẩm hơn nhau 12,5 triệu đồng.

Câu 52. Một chiếc xe ô tô chuyển động với đồ thị vận tốc được biểu diễn theo đường gấp khúc được minh họa trên hệ trục Otv như hình vẽ (mỗi đơn vị trên Ot ứng với 1 phút và mỗi đơn vị trên Ov ứng với $0,4(km / phút)$).



Quãng đường mà xe di chuyển trong 7 phút là bao nhiêu km?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 6,2

Hàm vận tốc 1 giây đầu tiên: $v(t) = 2t$

Hàm vận tốc giây thứ 2 đến giây thứ 4: $v(t) = \frac{1}{3}t + \frac{5}{3}$

Hàm vận tốc giây thứ 2 đến giây thứ 4: $v(t) = -\frac{1}{2}t + 5$

Hàm vận tốc giây thứ 7 : $v(t) = 2$

Quãng đường mà xe đã di chuyển trong 7 phút là:

$$s = \left[\int_0^1 2t dt + \int_1^4 \left(\frac{1}{3}t + \frac{5}{3} \right) dt + \int_4^6 \left(-\frac{1}{2}t + 5 \right) dt + \int_6^7 2 dt \right] \cdot 0,4 = 15,5 \cdot 0,4 = 6,2 (km)$$

Câu 53. Biết rằng tốc độ v (km / phút) của một canô cao tốc thay đổi theo thời gian t (phút) được cho

$$\text{bởi công thức sau: } v(t) = \begin{cases} \frac{t}{3} & \text{khi } 0 \leq t < 3 \\ 1 & \text{khi } 3 \leq t < 10 \\ 5 - 0,4t & \text{khi } 10 \leq t \leq 18 \end{cases} .$$



Quãng đường canô di chuyển được trong khoảng từ 0 đến 18 phút là bao nhiêu km?

Trả lời:

Lời giải

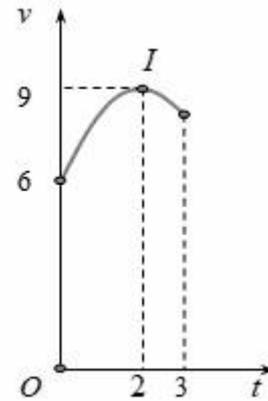
Đáp án:

Quãng đường canô di chuyển được trong khoảng từ 0 đến 18 phút là:

$$s = \int_0^{18} v(t) dt = \int_0^3 v(t) dt + \int_3^{10} v(t) dt + \int_{10}^{18} v(t) dt = \int_0^3 \frac{t}{3} dt + \int_3^{10} 1 dt + \int_{10}^{18} (5 - 0,4t) dt = 3,7 (km)$$

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 54. Bạn Minh Hiền chạy bộ trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc thời gian $t(h)$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên dưới. Tính quãng đường mà bạn Minh Hiền chạy được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến phần chục của kilômét).

**Lời giải**

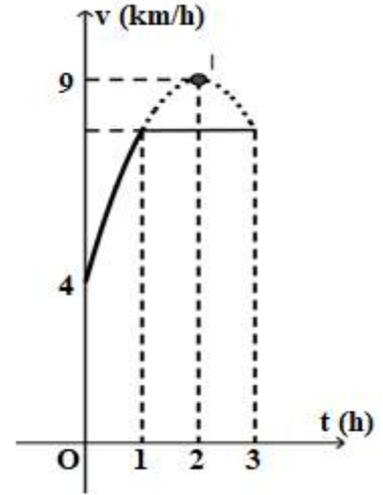
Gọi $v(t) = at^2 + bt + c$.

Đồ thị $v(t)$ là một phần parabol có đỉnh $I(2;9)$ và đi qua điểm $A(0;6)$ nên

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 2 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 9 \\ a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-3}{4} \\ b = 3 \\ c = 6 \end{cases} . \text{ Tìm được } v(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 3t + 6$$

$$\text{Vậy } s = \int_0^3 \left(-\frac{3}{4}t^2 + 3t + 6 \right) dt = 24,75(km) \approx 24,8(km)$$

Câu 55. Một vận động viên chạy bộ trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc như hình bên dưới. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến phần chục của kilômét).



Lời giải

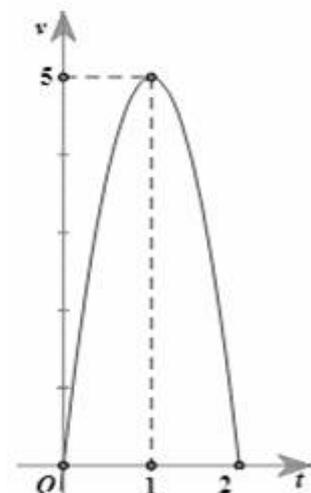
Gọi phương trình của parabol $v(t) = at^2 + bt + c$

ta có hệ như sau:
$$\begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + c = 9 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ c = 4 \\ a = -\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow v(t) = -\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4$$

Với $t = 1$ ta có $v = \frac{31}{4} \Rightarrow v(t) = \frac{31}{4}$.

Vậy quãng đường vật chuyển động được là $s = \int_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4\right) dt + \int_1^3 \frac{31}{4} dt = \frac{259}{12} \approx 21,6(km)$

Câu 56. Một người chạy trong 2 giờ, vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị là 1 phần của đường Parabol với đỉnh $I(1;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung Ov như hình vẽ bên dưới. Tính quãng đường người đó chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân của kilômét).



Lời giải

Ta có 1 giờ 30 phút = 1,5 giờ $\Rightarrow s = \int_0^{1,5} v(t)dt$.

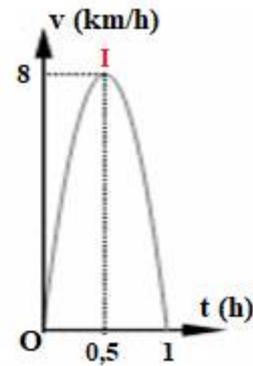
Đồ thị $v = v(t)$ đi qua gốc tọa độ nên $v(t)$ có dạng $v(t) = at^2 + bt$.

Đồ thị $v = v(t)$ có đỉnh là $I(1;5)$ nên $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ a+b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a+b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 10 \end{cases} \Rightarrow v(t) = -5t^2 + 10t$

$$\Rightarrow s = \int_0^{1,5} (-5t^2 + 10t) dt = \frac{45}{8} \approx 5,63(km).$$

Câu 57. Một người chạy bộ trong thời gian 1 giờ, vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên dưới.

Tính quãng đường (đơn vị km) người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy.



Lời giải

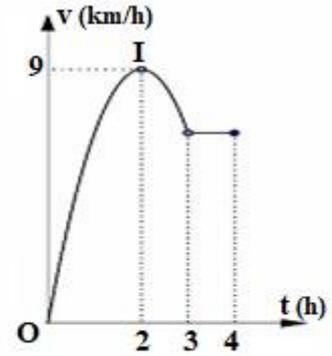
Gọi parabol là $(P): v(t) = at^2 + bt + c$. Từ hình vẽ ta có (P) đi qua $O(0; 0)$, $A(1; 0)$ và điểm $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$.

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -32 \\ b = 32 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Suy ra $(P): v(t) = -32t^2 + 32t$.

Vậy quãng đường người đó đi được là $s = \int_0^{\frac{3}{4}} (-32t^2 + 32t) dt = 4,5(km)$

Câu 58. Một vận động viên leo núi đi bộ trong 4 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc thời gian $t(h)$ có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ, kể từ khi bắt đầu vận động viên đó đi, đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường (đơn vị km) mà vận động viên leo núi đi bộ được trong 4 giờ đó.



Lời giải

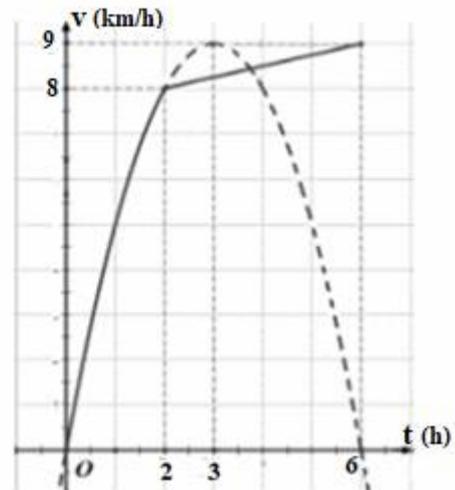
Gọi (P): $v(t) = at^2 + bt + c$.

Vì (P) qua $O(0;0)$ và có đỉnh $I(2;9)$ nên dễ tìm được phương trình là $v(t) = \frac{-9}{4}t^2 + 9t$.

Ngoài ra tại $t = 3$ ta có $v(3) = \frac{-9}{4}.3^2 + 9.3 = \frac{27}{4}$

Vậy quãng đường cần tìm là: $s = \int_0^3 \left(\frac{-9}{4}t^2 + 9t \right) dt + \int_3^4 \frac{27}{4} dt = 27 (km)$.

Câu 59. Một chiếc xuồng đi trên sông trong 6 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị như hình bên dưới. Trong khoảng thời gian 2 giờ từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị là một phần đường Parabol có đỉnh $I(3;9)$ và có trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại, đồ thị vận tốc là một đường thẳng có hệ số góc bằng $\frac{1}{4}$. Tính quãng đường (đơn vị km) mà chiếc xuồng đi được trong 6 giờ (kết quả làm tròn đến 1 chữ số thập phân của kilômét).



Lời giải

+ Vì Parabol đi qua $O(0; 0)$ và có tọa độ đỉnh $I(3;9)$ nên thiết lập được phương trình Parabol là

$(P): v(t) = -t^2 + 6t; \forall t \in [0; 2]$

+ Sau 2 giờ đầu thì hàm vận tốc có dạng là hàm bậc nhất $y = \frac{1}{4}t + m$, dựa trên đồ thị ta thấy đi qua điểm

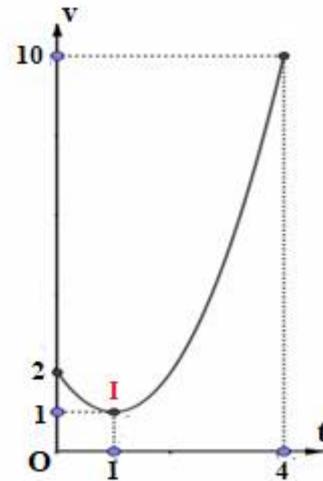
có tọa độ $(6;9)$ nên thế vào hàm số và tìm được $m = \frac{15}{4}$.

Nên hàm vận tốc từ giờ thứ 2 đến giờ thứ 6 là $v(t) = \frac{1}{4}t + \frac{15}{4}; \forall t \in [2;6]$

+ Quãng đường vật đi được bằng tổng đoạn đường 2 giờ đầu và đoạn đường 4 giờ sau.

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^2 (-t^2 + 6t) dt + \int_2^6 \left(\frac{1}{4}t + \frac{15}{4} \right) dt = \frac{130}{3} (km) \approx 43,3 (km)$$

Câu 60. Một chiếc xuồng đi trên sông trong 4 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc thời gian $t(h)$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên dưới. Tính quãng đường (đơn vị km) mà chiếc xuồng đi được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát (kết quả làm tròn đến 1 chữ số thập phân của kilômét).



Lời giải

Hàm biểu diễn vận tốc có dạng $v(t) = at^2 + bt + c$.

$$\text{Dựa vào đồ thị ta có: } \begin{cases} c = 2 \\ \frac{-b}{2a} = 1 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow v(t) = t^2 - 2t + 2.$$

Với $t = 4 \Rightarrow v(4) = 10$ (thỏa mãn).

Quãng đường mà chiếc xuồng đi được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát là:

$$s = \int_0^4 (t^2 - 2t + 2) dt = \frac{40}{3} (km) \approx 13,3 (km).$$