

Thời gian làm bài: 120 phút, không kể thời gian giao đề
(Đề thi gồm 02 trang)

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (2,0 điểm)

Từ câu 1 đến câu 8, em hãy viết vào tờ giấy thi chữ cái (A, B, C hoặc D) trước đáp án mà em cho là đúng.

Câu 1. Điều kiện xác định của biểu thức $P(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2025}}$ là

- A. $x \geq 2025$. B. $x \leq 2025$. C. $x > 2025$. D. $x < 2025$.

Câu 2. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số $y = -3x^2$?

- A. $(1; -3)$. B. $(1; 3)$. C. $(0; -3)$. D. $(-1; 3)$.

Câu 3. Tổng các nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + 1 = 0$ bằng

- A. -4 . B. 1 . C. -1 . D. 4 .

Câu 4. Cho hai đường tròn $(O; 3cm)$, $(O'; 6cm)$ tiếp xúc ngoài nhau. Độ dài đoạn OO' bằng

- A. $18cm$. B. $9cm$. C. $3cm$. D. $2cm$.

Câu 5. Đồ thị hàm số $y = ax^2$ đi qua điểm $A\left(2; \frac{4}{3}\right)$. Giá trị của a bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $-\frac{1}{3}$. C. 1 . D. 4 .

Câu 6. Cho phương trình $x^2 - ax - 6 = 0$. Tìm a để phương trình có một nghiệm là $x = 3$.

- A. $a = -3$. B. $a = 1$. C. $a = -1$. D. $a = -2$.

Câu 7. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\sin ABC = \frac{2}{3}$, $BC = 9cm$. Độ dài cạnh AC bằng

- A. $3cm$. B. $4cm$. C. $6cm$. D. $9cm$.

Câu 8. Biết rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có một nghiệm $x = -1$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $-a - b + c = 0$. B. $a - b - c = 0$. C. $a + b + c = 0$. D. $a - b + c = 0$.

II. PHẦN TỰ LUẬN (8,0 điểm)

Câu 1 (1,0 điểm). Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $x_1^2 + x_2^2$.

Câu 2 (1,0 điểm). Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x}$ ($x > 0, x \neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất $P = A - 4\sqrt{x}$.

Câu 3 (1,0 điểm). Một vật rơi tự do ở độ cao $500m$ xuống mặt đất. Mối quan hệ giữa quãng đường y (tính bằng mét) (tính từ vị trí vật bắt đầu rơi) và thời gian x (tính bằng giây) được mô tả bởi công thức $y = ax^2$ (với a là hằng số) . Biết rằng tại thời điểm giây thứ 5, vật đi được quãng đường là $125m$. Hỏi sau bao nhiêu giây, vật sẽ rơi xuống mặt đất?

Câu 4 (1,0 điểm). Bạn Bình và mẹ dự định đi du lịch Huế và Đà Nẵng trong vòng 6 ngày. Biết rằng chi phí trung bình mỗi ngày tại Huế là 3 500 000 đồng, còn tại Đà Nẵng là 3 000 000 đồng. Tìm số ngày nghỉ lại tại mỗi địa điểm, biết số tiền mà họ phải chi cho toàn bộ thời gian ở hai địa điểm trên là 20 000 000 đồng.

Câu 5 (3,0 điểm). Cho đường tròn $(O; R)$ và dây $BC < 2R$. Trên cung lớn BC lấy điểm A sao cho $AB < AC$. Các đường cao AD và BF của tam giác ABC cắt nhau tại I . Gọi E là trung điểm của AB .

a) Chứng minh tứ giác $ABDF$ nội tiếp đường tròn và xác định tâm của đường tròn đó.

b) Chứng minh $CD.CB = CF.CA$.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDF cắt $(O; R)$ tại điểm H (H khác C). Vẽ đường kính CK của đường tròn $(O; R)$. Chứng minh tứ giác $AKBI$ là hình bình hành và 3 điểm K, E, H thẳng hàng.

Câu 6 (1,0 điểm). Cho a, b là các số thực không âm thỏa mãn $a^2 \leq 3, b^2 \leq 3$ và $a^2 + b^2 = 4$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{3-a^2} + \sqrt{3-b^2}$.

----- **Hết** -----

(Thí sinh không sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm).

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:.....

Lưu ý:

- Hướng dẫn chỉ trình bày các bước cơ bản của 1 cách giải, nếu HS có cách giải khác và đúng vẫn cho điểm theo thang điểm của hướng dẫn chấm.
- Trong một bài, thí sinh giải đúng đến đâu cho điểm đến đó.
- Bài hình học nếu không vẽ hình thì không cho điểm, nếu vẽ hình sai thì không cho điểm ứng với phần vẽ hình sai.
- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.

I. TRẮC NGHIỆM (2,0 điểm): Mỗi câu đúng được **0,25 điểm**.

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
Đáp án	C	A	D	B	A	B	C	D

II. TỰ LUẬN (8,0 điểm).

Câu 1 (1,0 điểm). Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $x_1^2 + x_2^2$.

Nội dung	Điểm
Vì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 1 = 0$, theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \end{cases}$	0.5
Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 =$ $= 2^2 - 2 \cdot (-1) = 6.$	0.25
Vậy $x_1^2 + x_2^2 = 6.$ <i>(Học sinh có thể tính trực tiếp các nghiệm, từ đó tính $x_1^2 + x_2^2$, vẫn cho điểm tối đa)</i>	0.25

Câu 2 (1,0 điểm). Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x} (x > 0, x \neq 1).$

a) Rút gọn biểu thức A.

Nội dung	Điểm
$A = \left(\frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x} = \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) \cdot \frac{x}{\sqrt{x}+1}$ $= \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{x}{\sqrt{x}+1} = \frac{x-1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x}+1}$	0.25
$= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x}+1} = (\sqrt{x}-1)\sqrt{x} = x - \sqrt{x}.$	0.25

b) Tìm giá trị nhỏ nhất $P = A - 4\sqrt{x}$.

Nội dung	Điểm
Ta có: $P = A - 4\sqrt{x} = x - 5\sqrt{x} = x - 2 \cdot \frac{5}{2}\sqrt{x} + \frac{25}{4} - \frac{25}{4}$	0.25
$= \left(\sqrt{x} - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \geq -\frac{25}{4} \left(\text{do} \left(\sqrt{x} - \frac{5}{2}\right)^2 \geq 0, \forall x \geq 0, x \neq 1 \right)$.	
Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{25}{4}$.	0.25
Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{25}{4}$ khi $x = \frac{25}{4}$.	

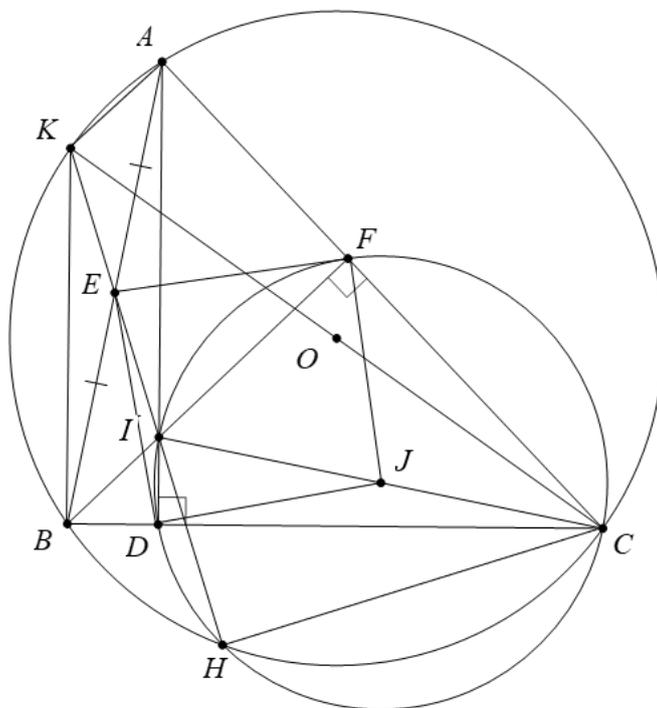
Câu 3 (1,0 điểm). Một vật rơi tự do ở độ cao $500m$ xuống mặt đất. Mối quan hệ giữa quãng đường y (tính bằng mét) (tính từ vị trí vật bắt đầu rơi) và thời gian x (tính bằng giây) được mô tả bởi công thức $y = ax^2$ (với a là hằng số) . Biết rằng tại thời điểm giây thứ 5, vật đi được quãng đường là $125m$. Hỏi sau bao nhiêu giây, vật sẽ rơi xuống mặt đất.

Nội dung	Điểm
Mối quan hệ giữa quãng đường và thời gian là $y = ax^2$.	
Tại thời điểm giây thứ 5, vật đi được quãng đường là $125m$, nên ta có: $125 = a \cdot 5^2$	0.25
Suy ra $a = 5$.	
Khi đó: $y = 5x^2$	0.25
Khi vật rơi xuống đất là khi vật đã đi chuyển được quãng đường là $500m$, nên ta có: $500 = 5x^2$	0,25
Suy ra $x = 10$ (do $x > 0$).	
Vậy sau 10 giây vật sẽ rơi xuống mặt đất.	0.25

Câu 4 (1,0 điểm). Bạn Bình và mẹ dự định đi du lịch Huế và Đà Nẵng trong vòng 6 ngày. Biết rằng chi phí trung bình mỗi ngày tại Huế là 3 500 000 đồng, còn tại Đà Nẵng là 3 000 000 đồng. Tìm số ngày nghỉ lại tại mỗi địa điểm, biết số tiền mà họ phải chi cho toàn bộ toàn bộ thời gian ở hai địa điểm trên là 20 000 000 đồng.

Nội dung	Điểm
Gọi số ngày mà Bình và mẹ dự định đi du lịch tại Huế và tại Đà Nẵng lần lượt là x, y (ngày) ($0 \leq x, y \leq 6$).	0.25
Vì hai mẹ con dự định đi du lịch Huế và Đà Nẵng trong 6 ngày nên ta có : $x + y = 6$ Vì số tiền mà họ phải chi cho toàn bộ chuyến đi là 20 000 000 đồng nên $3500000x + 3000000y = 20000000$	0.25
Theo đề bài ta có hệ pt: $\begin{cases} x + y = 6 \\ 3500000x + 3000000y = 20000000 \end{cases}$	
Giải hệ phương trình ta được: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$	0,25
Vậy số ngày mà Bình và mẹ ở lại Huế là 4 (ngày), số ngày Bình và mẹ ở lại Đà Nẵng là 2 (ngày).	0.25

Câu 5 (3,0 điểm). Cho đường tròn $(O; R)$ và dây $BC < 2R$. Trên cung lớn BC lấy điểm A sao cho $AB < AC$. Các đường cao AD và BF của tam giác ABC cắt nhau tại I . Gọi E là trung điểm của AB .



a) Chứng minh tứ giác $ABDF$ nội tiếp đường tròn và xác định tâm của đường tròn đó.

Nội dung	Điểm
Tam giác AFB vuông tại F . Suy ra $EF = \frac{1}{2} AB = EA = EB$.	0,25
Tam giác ADB vuông tại D . Suy ra $ED = \frac{1}{2} AB = EA = EB$.	0,25
Từ đó suy ra: $EF = ED = EA = EB$.	0,25
Vậy tứ giác $ABDF$ nội tiếp đường tròn đường kính AB có tâm là trung điểm E của AB . Lưu ý: Nếu học sinh làm theo cách sau mà đúng vẫn chọn điểm tối đa. Vì $ADB = 90^\circ$ (do AD là đường cao) nên D thuộc đường tròn đường kính AB . Vì $AFB = 90^\circ$ (do BF là đường cao) nên F thuộc đường tròn đường kính AB . Do vậy tứ giác $ABDF$ nội tiếp đường tròn đường kính AB có tâm là trung điểm E của AB .	0,25

b) Chứng minh $CD.CB = CF.CA$.

Nội dung	Điểm
Xét $\triangle ADC$ và $\triangle BFC$ có: $ADC = BFC = 90^\circ$; ACB là góc chung;	0,25
Do đó: $\triangle ADC \sim \triangle BFC$ (g.g)	0,25
Suy ra: $\frac{CD}{CF} = \frac{CA}{CB}$	0,25
Suy ra: $CD.CB = CF.CA$ Vậy $CD.CB = CF.CA$	0,25

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDF cắt $(O;R)$ tại điểm H (H khác C). Vẽ đường kính CK của đường tròn $(O;R)$. Chứng minh tứ giác $AKBI$ là hình bình hành và 3 điểm K, E, H thẳng hàng.

Nội dung	Điểm
+) Ta có: $BF \perp AC$ (gt), $KA \perp AC$ (do KAC nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) Suy ra: $AK \parallel BF$, hay $AK \parallel BI$. Tương tự ta có: $AD \perp BC$ (gt), $KB \perp BC$ (do KBC nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) Suy ra: $AD \parallel KB$, hay $AI \parallel KB$ Từ đó ta có: $AKBI$ là hình bình hành.	0,25
+) Vì $AKBI$ là hình bình hành, suy ra AB cắt KI tại trung điểm mỗi đường. Mà E là trung điểm của AB , suy ra E là trung điểm của KI . Từ đó suy ra: K, I, E thẳng hàng (*)	0,25
+) Xét (O) có $KHC = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), suy ra: $KH \perp CH$. Gọi J là trung điểm của IC . Tam giác IDC vuông tại D và tam giác IFC vuông tại F , suy ra $JI = JD = JF = JC = \frac{1}{2} IC$. Suy ra, tứ giác $FIDC$ nội tiếp đường tròn đường kính IC , có tâm là điểm J .	0,25
Ta lại có H cùng thuộc đường tròn này. Suy ra: $IH \perp CH$ mà $KH \perp CH$ (cmt) Từ đó suy ra: K, I, H thẳng hàng (**) Từ đó suy ra K, I, E, H thẳng hàng. Vậy ba điểm K, E, H thẳng hàng.	0,25

Câu 6 (1,0 điểm). Cho a, b là các số thực không âm thỏa mãn $a^2 \leq 3, b^2 \leq 3$ và $a^2 + b^2 = 4$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{3-a^2} + \sqrt{3-b^2}$.

Nội dung	Điểm
Theo bất đẳng thức Cô si, ta có: $\sqrt{1 \cdot (3-a^2)} \leq \frac{1+3-a^2}{2} = \frac{4-a^2}{2}$ $\sqrt{1 \cdot (3-b^2)} \leq \frac{1+3-b^2}{2} = \frac{4-b^2}{2}$	0,25
Suy ra: $P = \sqrt{3-a^2} + \sqrt{3-b^2} \leq \frac{4-a^2}{2} + \frac{4-b^2}{2} = \frac{8-(a^2+b^2)}{2} = 2$. Đẳng thức xảy ra khi $3-a^2 = 3-b^2 = 1$, suy ra $a = b = \sqrt{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của P là 2 khi $a = b = \sqrt{2}$	0,25
Ta có: $\sqrt{(3-a^2)(3-b^2)} \geq 0$, suy ra $(3-a^2) + (3-b^2) + 2\sqrt{(3-a^2)(3-b^2)} \geq (3-a^2) + (3-b^2)$ Hay $(\sqrt{3-a^2} + \sqrt{3-b^2})^2 \geq 3-a^2 + 3-b^2 = 2$	0,25
Suy ra: $P = \sqrt{3-a^2} + \sqrt{3-b^2} \geq \sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $3-a^2 = 0$ hoặc $3-b^2 = 0$, khi đó $(a;b) = (\sqrt{3}; 1)$ hoặc $(a;b) = (1; \sqrt{3})$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\sqrt{2}$ khi $(a;b) = (\sqrt{3}; 1)$ hoặc $(a;b) = (1; \sqrt{3})$.	0,25

---HẾT---