SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT**
TỈNH NINH BÌNH	**NĂM HỌC 2025 - 2026**
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	**Bài thi chuyên: TOÁN**
(Đề thi gồm 05 câu, trong 01 trang)	**Ngày thi: 04/6/2025**
	Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1 (*2,0 điểm*).

a) Cho a, b, c là các số thực khác 0 thoả mãn $ab^2+bc^2+ca^2=abc$. Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{a}{b}(c+a)+\frac{b}{c}(a+b)+\frac{c}{a}(b+c)$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(3xy-2)^2+4x^2=5y^2\\ 2x^2-3xy^2=y(y-2)\end{cases}$.

Câu 2 (*2,0 điểm*).

a) Cho phương trình $x^2-6mx+18m-9=0$ (1) (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn:

$$(x_1^2-4mx_1+18m-6)(2mx_2+3)=2m+9.$$

b) Cho các số thực a, b, c thoả mãn $a+b+c=4$ và $0\le a,b,c\le 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2a^2+b^2+3c^2-2b-13c$.

Câu 3 (*1.5 điểm*).

a) Tìm tất cả các số nguyên m để $A=m^3+6m^2+11m+6$ là một số chính phương.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thoả mãn $x+y^2+1$ chia hết cho xy.

Câu 4 (*3,0 điểm*). Cho tam giác ABC ($AB<AC$) nhọn, không cân và có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại trực tâm H. Gọi M, N, I tương ứng là trung điểm của các đoạn thẳng BC, EF, AH. Các đường thẳng AH, BC theo thứ tự cắt đường thẳng EF tại J, S.

a) Chứng minh rằng $SB.SC=SE.SF=SJ.SN$.

b) Chứng minh rằng J là trực tâm của tam giác IBC.

c) Gọi P là điểm đối xứng của N qua BC. Chứng minh rằng $\widehat{BIP}=\widehat{CIM}$.

Câu 5 (*1,5 điểm*). Cho đa giác đều (H) có 2026 đỉnh.

a) Có bao nhiêu tam giác vuông mà các đỉnh là đỉnh của đa giác (H)?

b) Tại mỗi đỉnh của đa giác (H), người ta viết một số nguyên dương không vượt quá 1012. Chứng minh rằng tồn tại bốn đỉnh A,B,C,D của đa giác (H), sao cho $ABCD$ là một hình chữ nhật và $a+b=c+d$ trong đó a,b,c,d tương ứng là các số được viết tại các đỉnh A,B,C,D.

———— **HẾT** ————

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHUYÊN TOÁN TỈNH NINH BÌNH 2025

Câu 1.

a) Từ giả thiết ta có: $1=\dfrac{ab^2+bc^2+ca^2}{abc}=\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{b}$. Khi đó

$$\begin{aligned}P&=\frac{a}{b}(c+a+b)+\frac{b}{c}(a+b+c)+\frac{c}{a}(b+c+a)-a-b-c\\&=(a+b+c)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)-(a+b+c)=0.\end{aligned}$$

b) Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}(3xy-2)^2+4x^2=5y^2 & (1)\\ 2x^2-3xy^2=y(y-2) & (2)\end{cases}$.

Ta thấy khi $y=0$ thì từ (2) có $x=0$, thao lại vào (1) thì không thoả mãn.

Xét y khác 0, từ (2) ta có $y(3xy-2)=2x^2-y^2 \Leftrightarrow 3xy-2=\dfrac{2x^2-y^2}{y}=\dfrac{2x^2}{y}-y.$

Thay vào (1) thì

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2x^2}{y}-y\right)^2+4x^2=5y^2 \Leftrightarrow \frac{4x^4}{y^2}-4x^2+y^2+4x^2=5y^2\\&\Leftrightarrow \frac{4x^4}{y^2}=4y^2 \Rightarrow x^4=y^4 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)(x^2+y^2)=0.\end{aligned}$$

Trường hợp 1: Nếu $x^2=-y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$, không thoả mãn.

Trường hợp 2: Nếu $x=y$ thì từ (2)

$$2x^2-3x^3=x(x-2) \Leftrightarrow 3x^3-x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=y=0(L)\\x=y=1\\x=y=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$$

Trường hợp 3: Nếu $x=-y$ thì từ (2)

$$2x^2-3x^3=-x(-x-2) \Leftrightarrow 3x^3-x^2+2x=0 \Leftrightarrow x(3x^2-x+2)=0.$$

Mà $3x^2-x+2>0$ nên $x=0$ kéo theo $y=0$, không thoả mãn.

Vậy hệ phương trình có các nghiệm (x, y) là $(1,1), \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Câu 2.

a) Xét $\Delta' = (3m)^2 - (18m-9) = (3m-3)^2 \geq 0, \forall m.$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì m khác 1.

Do x_1 là nghiệm của phương trình (1) nên

$$x_1^2 - 6mx_1 + 18m - 9 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 4mx_1 + 18m - 6 = 2mx_1 + 3.$$

Giả sử tồn tại m thoả mãn yêu cầu bài toán, khi đó đẳng thức trở thành:

$$2m + 9 = (2mx_1 + 3)(2mx_2 + 3) = 4m^2 x_1 x_2 + 6m(x_1 + x_2) + 9$$
$$\Leftrightarrow 2m + 9 = 4m^2(18m - 9) + 6m.6m + 9$$
$$\Leftrightarrow 2m = 72m^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \pm\frac{1}{6} \end{array}\right..$$

Thử lại với $m = 0, m = \frac{1}{6}, m = -\frac{1}{6}$ đều thoả mãn.

Vậy các giá trị m cần tìm là $m = 0, m = \frac{1}{6}, m = -\frac{1}{6}$.

b) Ta có: $3c^2 - 13c \leq c^2 - 2c$. Thật vậy $3c^2 - 13c \leq c^2 - 2c \Leftrightarrow c(2c - 11) \leq 0$ với $0 \leq c \leq 3$.

Khi đó $P \leq 2a^2 + b^2 + c^2 - 2b - 2c \leq 2a^2 + (b+c)^2 - 2(b+c)$

Hay $P \leq 2a^2 + (4-a)^2 - 2(4-a) = 3a^2 - 6a + 8.$ (*)

Mặt khác $(a+1)(a-3) \leq 0 \Leftrightarrow 3(a^2 - 2a - 3) \leq 0 \Leftrightarrow 3a^2 - 6a + 8 \leq 17.$

Như vậy từ (*) thì $P \leq 17$.

Vậy $\max P = 17$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = 3$, $b = 1$, $c = 0$.

Câu 3.

a) Giả sử tồn tại m để A là một số chính phương. Ta có $A = (m+2)(m^2 + 4m + 3)$.

Đặt $d = \gcd(m+2, m^2 + 4m + 3)$. Khi đó $\begin{cases} d \mid m + 2 \\ d \mid m^2 + 4m + 3 = (m+2)^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow d \mid 1 \Leftrightarrow d = 1.$

Do đó $m+2, m^2+4m+3$ đều là số chính phương.

Giả sử $m^2+4m+3=a^2$, với a nguyên dương. Ta có

$$(m+2)^2-a^2=1 \Leftrightarrow (m+2-a)(m+2+a)=1.$$

Trường hợp 1: $\begin{cases} m+2-a=1 \\ m+2+a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ a=0 \end{cases}$. Thử lại $m=-1$ thoả mãn.

Trường hợp 2: $\begin{cases} m+2-a=-1 \\ m+2+a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-3 \\ a=0 \end{cases}$. Thử lại $m=-3$ thoả mãn.

Vậy các giá trị m cần tìm để A là số chính phương là $m=-3, m=-1$.

b) Giả sử tồn tại cặp số nguyên dương (x,y) sao cho $xy \mid x+y^2+1$.

Đặt $x+y^2+1=kxy \Leftrightarrow y^2+1=x(ky-1)$. Trong đó k nguyên dương, hiển nhiên $ky \neq 1$.

Khi đó $ky-1 \mid y^2+1 \Rightarrow ky-1 \mid k(y^2+1)=y(ky-1)+y+k \Rightarrow ky-1 \mid y+k$.

Suy ra $ky-1 \leq y+k \Rightarrow y(k-1) \leq k+1$. (*)

Trường hợp 1: Nếu $k = 1$ thì $xy=x+y^2+1 \Leftrightarrow x(y-1)=y^2+1$. (1)

Do đó $y-1 \mid y^2+1=(y-1)(y+1)+2 \Rightarrow y-1 \mid 2$. Hay $y \in \{2;3\}$.

Với $y = 2$ thay vào (1) thì $x = 5$, còn $y = 3$ thì $x = 5$.

Trường hợp 2: Nếu $k = 2$ thì $2xy=x+y^2+1 \Leftrightarrow x(2y-1)=y^2+1$. (2)

Do đó $2y-1 \mid 4(y^2+1)=(2y-1)(2y+1)+5 \Rightarrow 2y-1 \mid 5$. Hay $y \in \{1;3\}$.

Với $y = 1$ thay vào (2) thì $x = 2$, còn $y = 3$ thì $x = 2$.

Trường hợp 3: Nếu $k = 3$ thì $3xy=x+y^2+1$ và từ (*) có $y \leq 2 \Rightarrow y \in \{1;2\}$.

Với $y = 1$ thay vào (3) thì $x = 1$, còn $y = 2$ thì $x = 1$.

Trường hợp 4: Nếu $k > 3$ thì từ (*) có $y \leq \dfrac{k+1}{k-1} < 2$. Nên $y=1$.

Ta có: $x \mid x+2 \Rightarrow x \mid 2$. Như vậy có hai bộ (2,1), (1,1).

Tuy nhiên với $x = 2$, $y = 1$ thì $k = 2$, và với $x = y = 1$ thì $k = 3$ (vô lý).

Thử lại với các cặp (x,y) sau (5,2) (5,3) (2,1) (2,3) (1,1) (1,2) đều thoả mãn.

Vậy các cặp số nguyên dương (x, y) thoả mãn là (5,2) (5,3) (2,1) (2,3) (1,1) (1,2) .

Câu 4.

a) Ta có tam giác *BFC* vuông tại *F* và tam giác *BEC* vuông tại *E*. Mà *M* là trung điểm của *BC*.

Suy ra *MB* = *MC* = *ME* = *MF* nên tứ giác *BFEC* nội tiếp đường tròn (*M, MB*).

Ta có: $\angle SFB = 180^\circ - \angle BFE = \angle BCE$, và góc *FSB* chung thì $\Delta SBF \sim \Delta SEC(g.g)$.

Khi đó $\dfrac{SF}{SB} = \dfrac{SC}{SE} \Leftrightarrow SF.SE = SB.SC.(1)$

Vì tam giác *AEH* vuông tại *H* có *I* là trung điểm *AH* nên $IA = IE = IH$.

Ta có: $\angle IEM = 180^\circ - \angle IEA - \angle MEC = 180^\circ - \angle IAE - \angle MCE = 90^\circ$.

Tương tự thì $\angle IFM = 90^\circ$. Như vậy $\angle IDM = \angle IEM = \angle IFM = 90^\circ$.

Ta chứng minh được 5 điểm *I, F, E, M, D* thuộc một đường tròn.

Do đó tứ giác *DFEM* nội tiếp suy ra $\angle FDS = 180^\circ - \angle FDM = \angle FEM$, và góc *FSB* chung.

Dẫn đến $\Delta SDF \sim \Delta SEM(g.g) \Rightarrow \dfrac{SD}{SE} = \dfrac{SF}{SM} \Leftrightarrow SM.SD = SE.SF.(2)$

Mặt khác *IE* = *IF, NE* = *NF, ME* = *MF* nên *I, M, N* thẳng hàng và *IM* vuông góc *EF* tại *N*.

Ta chứng minh được $\Delta SDJ \sim \Delta SNM(g.g) \Rightarrow \dfrac{SD}{SN} = \dfrac{SJ}{SM} \Leftrightarrow SM.SD = SN.SJ$ (3)

Từ (1)(2)(3) thì $SB.SC = SE.SF = SN.SJ$.

b) Ta có $\angle BFE = 180^\circ - \angle BCA = \angle DHE = \angle AHB$.

Dẫn đến $\Delta ABH \sim \Delta EBF(g.g) \Rightarrow \dfrac{BH}{BF} = \dfrac{AH}{EF} = \dfrac{IH}{NF}$, $\angle BFE = \angle AHB$ thì

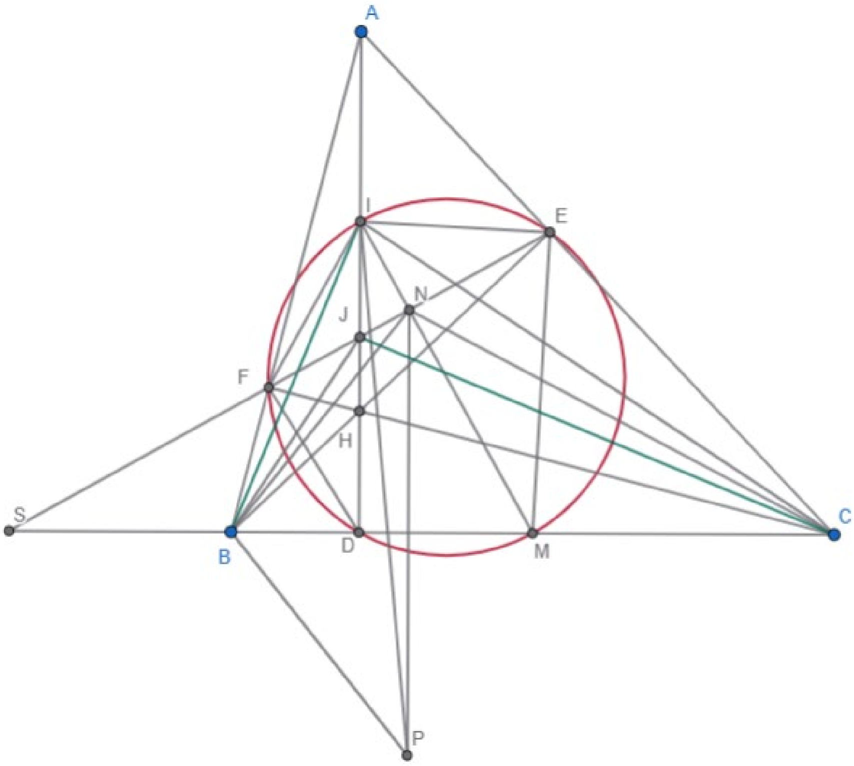
$$\Delta IBH \sim \Delta NBF(c.g.c) \Rightarrow \angle BIH = \angle BNJ.(4)$$

Từ câu a $\dfrac{SB}{SN} = \dfrac{SJ}{SC} \Rightarrow \Delta SBN \sim \Delta SJC(c.g.c) \Rightarrow \angle SNB = \angle SCJ.(5)$

Từ (4) (5) thì

$$90 = \angle IBD + \angle BID = \angle IBD + \angle BNJ = \angle IBD + \angle SCJ.$$

Suy ra JC vuông góc IB. Kết hợp với IJ vuông góc BC. Như vậy J là trực tâm của tam giác IBC.



c) Ta có tam giác IEM vuông tại E và IN là đường cao nên

$$MN.MI = ME^2 = MB^2 \Rightarrow \frac{MN}{MB} = \frac{MB}{MI} \Rightarrow \Delta MBN \sim \Delta MIB(c.g.c).$$

Suy ra $\frac{MB}{BN} = \frac{MI}{IB} \Rightarrow \frac{MI}{MC} = \frac{BI}{BP}, (BP = BN, MB = MC).$

Và $\angle IBP = \angle IBM + \angle MBP = \angle IBM + \angle MBN = \angle IBM + \angle BIM = \angle IMC$

Do đó $\Delta PBI \sim \Delta CMI(c.g.c)$.

Vậy $\angle BIP = \angle MIC$.

Câu 6.

a. Ta có đa giác đều (H) 2026 đỉnh và có 2026 cạnh, nội tiếp đường tròn (O) nên số đường đường kính của đường tròn ngoại tiếp đa giác đều là 1013.

Ta chọn 1 đường đính và chọn 1 đỉnh trong 2024 đỉnh còn lại. Suy ra số tam giác vuông được tạo thành là 2024.

Như vậy có tất cả 1013.2024 tam giác vuông mà các đỉnh là đỉnh của đa giác

b. Giả sử XY là một đường kính bất kì của (O),và viết đỉnh X tương ứng với số x, Y tương ứng với số y. Đồng thời, gắn đường kính XY số $|x-y|$.

Do $x, y \in \{1,2,...,1012\}$ nên dễ thấy $0 \le |x-y| \le 1011$. Như vậy 1013 đường kính của đường tròn sẽ được gắn các số từ 1, 2, ..., 1011. Theo **nguyên lí Dirichlet** có ít nhất hai đường kính được gắn chung một giá trị. Không giảm tính tổng quát, giả sử là hai đường kính AC, BD, trong đó A,B,C,D tương ứng với các số a, b, c, d và $a \ge c, b \le d$ (nếu không thì đổi tên các đầu mút của đường kính với nhau).

Theo giả thiết thì đường kính AC gắn với số a - c, còn đường kính BD gắn với số d - b.

Từ $a-c=d-b \Leftrightarrow a+b=c+d$. Và rõ ràng $ABCD$ là hình chữ nhật.

Như vậy ta có được điều phải chứng minh.