CHƯƠNG IV NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI. NGUYÊN HÀM

I. LÝ THUYẾT.

1. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT HÀM SỐ: Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên một khoảng K (hoặc một đoạn hoặc một nửa khoảng). Hàm số $F\left(x\right)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ trên K nếu $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$ với mọi x thuộc K.

Chú ý. Trường hợp $K=\left[a;b\right]$ thì các đẳng thức $F'\left(a\right)=f\left(a\right)$ và $F'\left(b\right)=f\left(b\right)$ được hiểu là đạo hàm bên phải tại điểm $x=a$ và đạo hàm bên trái tại điểm $x=b$ của hàm số $F(x)$, tức là

$$\lim_{x\to a^+}\frac{F\left(x\right)-F\left(a\right)}{x-a}=f\left(a\right) \text{ và } \lim_{x\to b^-}\frac{F\left(x\right)-F\left(b\right)}{x-b}=f\left(b\right).$$

Giả sử hàm số $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên K. Khi đó:

a) Với mỗi hằng số C, hàm số $F\left(x\right)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên K;

b) Nếu hàm số $G\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $G\left(x\right)=F\left(x\right)+C$ với mọi $x\in K$.

Như vậy, nếu $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên K thì mọi nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ trên K đều có dạng $F\left(x\right)+C$. Ta gọi $F\left(x\right)+C$ là họ các nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên K ký hiệu bởi $\int f\left(x\right)dx=F\left(x\right)+C$.

Chú ý:

a) Để tìm họ các nguyên hàm (gọi tắt là tìm nguyên hàm) của hàm số $f\left(x\right)$ trên K, ta chỉ cần tìm một nguyên hàm $F\left(x\right)$ của $f\left(x\right)$ trên K và khi đó $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left(x\right)+C$, C là hằng số.

b) Người ta chứng minh được rằng, nếu hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên khoảng K thì $f\left(x\right)$ có nguyên hàm trên khoảng đó.

c) Biểu thức $f\left(x\right)\mathrm{d}x$ gọi là vi phân của nguyên hàm $F\left(x\right)$, kí hiệu là $\mathrm{d}F\left(x\right)$. Vậy $\mathrm{d}F\left(x\right)=F'\left(x\right)\mathrm{d}x=f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

d) Khi tìm nguyên hàm của một hàm số mà không chỉ rõ tập K, ta hiểu là tìm nguyên hàm của hàm số đó trên tập xác định của nó.

2. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA NGUYÊN HÀM.

Cho $f\left(x\right),g\left(x\right)$ là hai hàm số liên tục trên K. Khi đó:

a) $\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$ với mọi số thực k khác 0.

Suy ra $\int\left[k.f(x)+l.g(x)\right]\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x+l\int g(x)\mathrm{d}x$

b) $\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$.

3. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

a) Nguyên hàm của hàm số lũy thừa

Hàm số $y = x^\alpha$, với $\alpha \in \mathbb{R}$, được gọi là hàm số lũy thừa.

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ tùy thuộc vào giá trị của α. Cụ thể:

+) Với α nguyên dương, tập xác định là $\mathbb{R}$.

+) Với α nguyên âm hoặc $\alpha = 0$, tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$.

+) Với α không nguyên, tập xác định là $(0; +\infty)$.

+) Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ (với $\alpha \in \mathbb{R}$) có đạo hàm tại mọi điểm $x > 0$ và $(x^\alpha)' = \alpha . x^{\alpha - 1}$.

Từ đó ta có: $\int x^\alpha \mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$; $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C \ (x \neq 0)$

b) Nguyên hàm của hàm số lượng giác

$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$

$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$

$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$ Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C$ Với $x \neq k\pi$

c) Nguyên hàm của hàm số mũ:

$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$

$\int a^x \mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \ (0 < a \neq 1)$

HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1: Một ô tô đang chạy với vận tốc $70\,km/h$ thì hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t) = -10t + 30\ (m/s)$. Tính quãng đường ô tô đi được sau 3 giây kể từ khi hãm phanh?

Câu 2: Bạn Huyền chạy thể dục buổi sáng với $a(t) = -\dfrac{1}{24}t^3 + \dfrac{5}{16}t^2\ (m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc xuất phát. Vào thời điểm $t = 5(s)$ sau khi xuất phát thì vận tốc của bạn Huyền đạt được bằng bao nhiêu?

Câu 3: Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t) = 24{,}5 - 9{,}8t\ (m/s)$. Tính quãng đường (mét) viên đạn đi sau 2 giây đầu.

Câu 4: Bạn An ngồi trên máy bay đi du lịch thế giới vận tốc chuyển động của máy bay là $v(t) = 3t^2 + 5\ (m/s)$. Quãng đường máy bay đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là

Câu 5: Một ô tô đang chạy với vận tốc $36km/h$ thì tăng tốc chuyển động nhanh dần với gia tốc $a(t) = 1 + \dfrac{t}{3}\ (m/s^2)$. Tính vận tốc của ô tô sau 6 giây kể từ khi ô tô bắt đầu tăng tốc.

Câu 6: Theo nghiên cứu thị trường, sau t năm từ năm đầu tiên vốn đầu tư của một doanh nghiệp phát sinh lợi nhuận với tốc độ được tính xấp xỉ bởi công thức $P'(t)=125+t^2$ (triệu đồng/ năm). Lợi nhuận của doanh nghiệp được tính theo công thức nào dưới đây?

Câu 7: Trong một đợt xả lũ, nhà máy thủy điện A đã xả lũ trong khoảng 35 phút với tốc độ lưu lượng nước tại thời điểm t giây là $f(t)=20t+450\left(m^3/s\right)$. Sau thời gian xả lũ trên thì hồ nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là:

Câu 8: Một chiếc ô tô chuyển động với vận tốc $v(t)$ (m/s), có gia tốc $a(t)=v'(t)=\dfrac{3}{t+1}$ $\left(\text{m/s}^2\right)$. Biết vận tốc của ô tô tại giây thứ 6 bằng 6 (m/s). Tính vận tốc của ô tô tại giây thứ 20.

Câu 9: Một ô tô đang chạy với tốc độ 62 km/h thì người lái xe bất ngờ phát hiện chướng ngại vật trên đường. Người lái xe phản ứng một giây sau đó bằng cách đạp phanh khẩn cấp. Kể từ thời điểm này, ô tô chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t)=-8t+20$ (m/s), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong t (s) kể từ lúc đạp phanh. Tính quảng đường ô tô đi được trong 2 giây đầu kể từ lúc đạp phanh.

Câu 10: Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ độ cao 1m. Giả sử tại thời điểm t giây (coi $t=0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t)=25-9,8t$ (m/s). Độ cao của viên đạn (tính từ mặt đất) đạt giá trị lớn nhất là

Câu 11: Tại một khu di tích vào ngày lễ hội, người ta tính được tốc độ thay đổi lượng khách tham quan được biểu diễn bằng hàm số $Q'(t)=4t^3-72t^2+288t$, trong đó t tính bằng giờ $(0\le t\le 13)$, $Q'(t)$ tính bằng khách/giờ. Sau 2 giờ đã có 500 người có mặt.

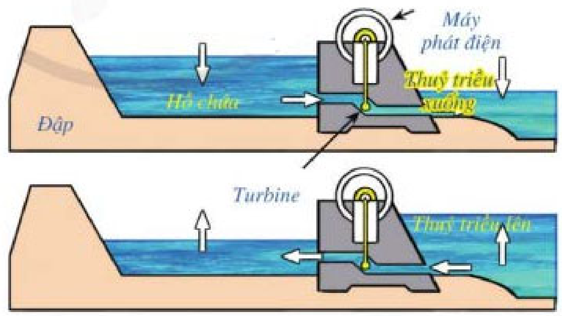
a) Xác định hàm số $Q(t)$ biểu diễn lượng khách tham quan di tích.

b) Xác định thời điểm mà lượng khách tham quan lớn nhất.

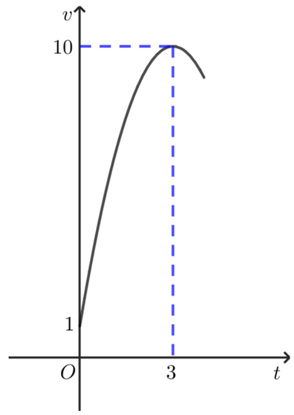
c) Tìm thời điểm mà tốc độ thay đổi lượng khách tham quan là lớn nhất?

Câu 12: Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 (m/s) thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian được tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quảng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

Câu 13: Mực nước trong hồ chứa của nhà máy điện thủy triều thay đổi trong suốt một ngày do nước chảy ra khi thủy triều xuống và nước chảy vào khi thủy triều lên (như hình vẽ). Tốc độ thay đổi của mực nước được xác định bởi hàm số $h'(t)=\dfrac{1}{90}\left(t^2-17t+60\right)$, trong đó t tính bằng giờ $(0\le t\le 24)$, $h'(t)$ tính bằng mét/giờ. Tại thời điểm $t=0$, mực nước trong hồ chứa cao $8m$. Mực nước trong hồ cao nhất là M và thấp nhất là m. Tổng $M+m$ bằng:



Câu 14: Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc vào thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị vận tốc là một đường parabol có đỉnh $I(3;10)$ và trục đối xứng vuông góc với trục hoành như hình vẽ. Tính quãng đường vật di chuyển được trong nửa thời gian sau của chuyển động đó (kết quả làm tròn đến hàng phần chục và tính theo đơn vị km)



Câu 15: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt \ (m^3/s)$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là bao nhiêu.

Câu 16: Một ô tô đang chạy với tốc độ $62\ km/h$ thì người lái xe bất ngờ phát hiện chướng ngại vật trên đường. Người lái xe phản ứng một giây sau đó bằng cách đạp phanh khẩn cấp. Kể từ thời điểm này, ô tô chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t) = -8t + 20\ (m/s)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong $t\ (s)$ kể từ lúc đạp phanh. Tính quảng đường ô tô đi được trong 2 giây đầu kể từ lúc đạp phanh.

Câu 17: Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ độ cao 1m. Giả sử tại thời điểm t giây (coi $t = 0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t) = 25 - 9{,}8t\ (m/s)$. Độ cao của viên đạn (tính từ mặt đất) đạt giá trị lớn nhất là

Câu 18: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1990 được ước tính theo một hàm số theo thời gian $f(t)$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Biết rằng $f'(t) = \dfrac{34}{t^2 + 4t + 4}$ (nghìn người/năm) biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn. Số dân của thị trấn đó vào năm 2035 là bao nhiêu? (kết quả lấy chính xác đến hàng phần trăm) biết dân số của thị trấn đó năm 1990 là 3 nghìn người.

Câu 19: Gọi $h(t)\ (m)$ là mực nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được t giây. Biết rằng $h'(t) = \dfrac{1}{5}\sqrt[3]{t}\ \ (m/s)$ và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 20: Gọi $h(t)$ là chiều cao của cây keo (tính theo mét) sau khi trồng t năm. Biết rằng năm đầu tiên cây cao 1,5m, trong những năm tiếp theo, cây phát triển với tốc độ $h'(t) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{t}}$ (mét /năm). Sau bao nhiêu năm cây cao được 3m.

Câu 21: Một quần thể vi khuẩn ban đầu gồm 500 vi khuẩn, sau đó bắt đầu tăng trưởng. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t, trong đó t tính theo ngày ($0 \le t \le 10$). Tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn đó cho bởi hàm số $P'(t) = k\sqrt{t}$, trong đó k là hằng số. Sau 1 ngày, số lượng vi khuẩn của quần thể đó đã tăng lên thành 600 vi khuẩn. Tính số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 9 ngày.

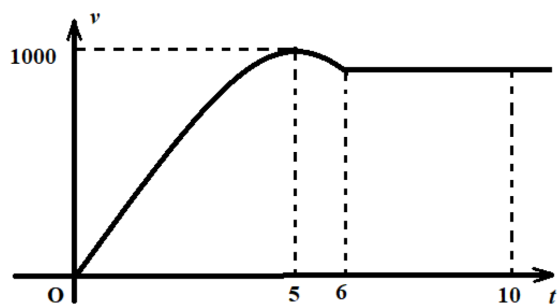
(Nguồn: R. Larson and BEdwards, Calculus 10e, Cengage 2014).

Câu 22: Một đàn con trùng, ở ngày thứ t có số lượng là $K(t)$. Biết $K'(t) = \dfrac{4000}{1+\dfrac{t}{2}}$ và ban đầu đàn côn trùng có 50.000 con. Hỏi sau 10 ngày thì đàn có khoảng bao nhiêu con? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 23: Một vật chuyển động với vận tốc ban đầu là $5(m/s)$ và có gia tốc được xác định bởi công thức $a(t) = \dfrac{2}{t+1}(m/s^2)$. Tính vận tốc của vật tại giây thứ 20(là tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 24: Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 15m/s thì người lái xe hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -3t + 15(\text{m/s})$, trong đó t (giây). Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét?

Câu 25: Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol như hình bên dưới. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1000 m/phút và bắt đầu giảm vận tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động đều.



Hỏi quãng đường xe đã đi được trong khoảng 10 phút đầu tiên là bao nhiêu?

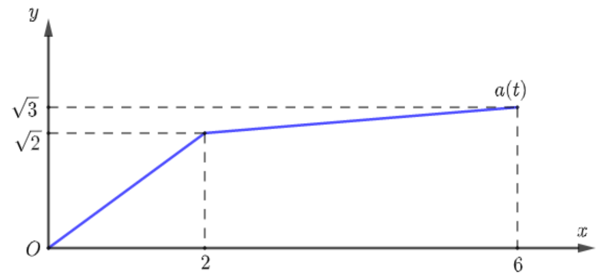
Câu 26: Một vật chuyển động với gia tốc được cho bởi hàm số $a(t) = -t^2 + 2t(\text{m/s}^2)$. Tại thời điểm $t = 0$ vật có vận tốc $36\ \text{m/s}$. Tính gia tốc của vật tại thời điểm vật dừng lại.

Câu 27: Tại một lễ hội dân gian hàng năm, tốc độ thay đổi lượng khách tham dự được biểu diễn bằng hàm số $Q'(t) = 8t^3 - 144t^2 + 576t$, trong đó t tính bằng giờ $(0 \le t \le 20)$, $Q'(t)$ tính bằng khách/giờ. Sau 1 giờ đã có 300 người có mặt. Hỏi số lượng khách tham dự đông nhất trong vòng 20 giờ là bao nhiêu?

Câu 28: Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số $v(t) = -0{,}1t^3 + t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng centimét/tuần. Gọi $h(t)$ là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t. Vào thời điểm cây cà chua đó phát triển nhanh nhất thì cây cà chua cao bao nhiêu centimét?(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 29: Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15(\text{m/s})$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t(\text{m/s}^2)$. Tính vận tốc chất điểm đó tại giây thứ 3 kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

Câu 30: Một vật chuyển động với hàm số gia tốc là $a(t)$. Biết rằng đồ thị hàm số $a(t)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho như hình dưới đây và vận tốc tại thời điểm $t=0$ là $v(0)=1(m/s)$.



Tại thời điểm $t=6$ giây, vận tốc của vật là bao nhiêu?(làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Câu 31: Doanh thu bán hàng của một doanh nghiệp khi bán một loại sản phẩm là số tiền $R(x)$ (triệu đồng) thu được khi x đơn vị sản phẩm được bán ra. Tốc độ biến động (thay đổi) của doanh thu khi x đơn vị sản phẩm đã được bán là hàm số $M_R(x)=R'(x)$. Đại diện của doanh nghiệp cho biết tốc độ biến đổi của doanh thu khi bán một loại sản phẩm được cho bởi $M_R(x)=500-0,1x$, ở đó x là số lượng sản phẩm đã bán. Tìm doanh thu của doanh nghiệp khi đã bán 2000 sản phẩm.

Câu 32: Một viên đạn được bắn lên trời với vận tốc là $72m/s$ bắt đầu từ độ cao $2m$. Hãy xác định chiều cao của viên đạn sau thời gian $5s$ kể từ lúc bắn biết gia tốc trọng trường là $9.8m/s^2$

Câu 33: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=3at^2+bt$ (m^3/s) và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây.

Câu 34: Vào năm 2014, dân số nước ta khoảng 90,7 triệu người. Giả sử, dân số nước ta sau t năm được xác định bởi hàm số $S(t)$ (đơn vị: triệu người), trong đó tốc độ gia tăng dân số được cho bởi $S'(t)=1,2698.e^{0,014t}$, với t là số năm kể từ năm 2014, $S'(t)$ tính bằng triệu người/ năm.

a) $S(t)$ là một nguyên hàm của $S'(t)$.

b) $S(t)=90,7.e^{0,014t}+90,7$.

c) Theo công thức trên, tốc độ tăng dân số nước ta năm 2034 (làm tròn đến hàng phần mười của triệu người/ năm) khoảng 1,7 triệu người/ năm.

d) Theo công thức trên, dân số nước ta năm 2034 (làm tròn đến hàng đơn vị của triệu người) là khoảng 120 triệu người/ năm.

Câu 35: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)=4\cos t$ (m/s^2). Tại thời điểm bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc bằng 0.

a) Vận tốc của vật được biểu diễn bởi hàm số $v(t)=4\cos t$ (m/s).

b) Vận tốc của vật tại thời điểm $t=\frac{\pi}{6}$ là 2 m/s.

c) Tại thời điểm $t=\frac{\pi}{4}$ (s) sau khi xuất phát thì vận tốc của vật là $\sqrt{2}$m/s

d) Gia tốc của vật tại thời điểm $t=\frac{\pi}{4}$ (s) là $2\sqrt{2}$ (m/s^2)

Câu 36: Một chiếc xe đang chuyển động đều với tốc độ $v_0 = 15m/s$ thì gặp chướng ngại vật rồi phanh gấp với gia tốc không đổi là $a = -3\ m/s^2$. Kí hiệu $v(t)$ là tốc độ của xe, $a(t)$ là gia tốc xe, $s(t)$ là quãng đường xe đi được cho đến thời điểm t giây kể từ lúc phanh xe. Xét tính đúng – sai của các mệnh đề sau.

a) $v(t) = a'(t)$.

b) $a(t) = s''(t)$.

c) Tính từ lúc phanh xe, sau 4 giây thì xe dừng hẳn.

d) Quãng đường xe đi được tính từ lúc phanh xe đến khi dừng hẳn nằm trong khoảng từ 35 mét đến 40 mét.

Câu 37: Trong thí nghiệm nuôi cấy một loại vi sinh vật, kí hiệu $f(t)$ là tổng số lượng vi sinh vật sau t giờ. Biết rằng sau 3 giờ đầu tiên thì tổng số lượng vi sinh vật là 50 con. Trong 7 giờ tiếp theo, số lượng vi sinh vật thay đổi với tốc độ $f'(t) = t^2 - 8t$ (con/giờ).

a) Họ nguyên hàm của $f'(t)$ là $\frac{t^3}{3} - 8t^2 + C\ \ (C \in \mathbb{R})$.

b) Số lượng vi khuẩn tăng liên tục trong khoảng từ 3 giờ đến 10 giờ sau thời điểm làm thí nghiệm.

c) Số lượng vi khuẩn là nhỏ nhất sau 8 giờ tính từ lúc bắt đầu làm thí nghiệm.

d) Sau 6 giờ thì số lượng vi khuẩn là 5 con.

Câu 38: Một quả cầu lông được đánh lên từ độ cao $2,2m$ với vận tốc được tính bởi công thức $v(t) = -0,8t + 4,16\ (m/s)$.

a) Công thức tính độ cao của quả cầu theo t là $h(t) = -0,4t^2 + 4,16t + 2,2(m)$.

b) Quả cầu đạt độ cao cao nhất tại thời điểm $t = 5,2(s)$.

c) Độ cao cao nhất của quả cầu bằng $13,016\ (m)$.

d) Thời điểm quả cầu chạm đất là $t = 10,5\ (s)$.

Câu 39: Cây KEO LAI là một trong các loài cây không chỉ là nguyên liệu giấy quan trọng mà còn là loài cây cung cấp gỗ nguyên liệu cho các ngành khác như chế biến ván nhân tạo, chế biến đồ mộc xuất khẩu, gỗ bao bì, gỗ xây dựng. Cây phát triển với tốc độ nhanh. Kí hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao $8m$.Trong 10 năm tiếp theo cây phát triển với tốc độ $h'(x) = \frac{9}{x}$ (m/năm).

a) Biểu thức của $h(x)$ là: $h(x) = 9\ln(x) + C$.

b) Sau 3 năm cây cao $20m$.

c) Tốc độ phát triển của cây trong 10 năm đầu sẽ giảm dần.

d). Người ta thường thu hoạch cây KEO LAI khi nó có độ cao trong khoảng từ 26 đến 28 mét. Vậy đó là 8 hoặc 9 năm sau khi trồng.

Câu 40: Một em bé ném một viên bi lăn trên sàn nhà. Viên bi chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t)=9-2t\ (m/s)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc thả bi. Gọi $s(t)$ là quãng đường viên bi lăn được trong t (giây) kể từ lúc ném bi.

a) $s(t)=9t-t^2$.

b) Vật chuyển động với gia tốc là $a(t)=2\ (m/s^2)$.

c) Quãng đường viên bi lăn được trong 3 giây đầu tiên là $18m$.

d) Quãng đường viên bi lăn được từ lúc em bé ném bi đến khi dừng hẳn là $36m$.

Câu 41. Một vận động viên điền kinh chạy với gia tốc $a(t)=-\frac{1}{24}t^3+\frac{5}{16}t^2\ (m/s^2)$,trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc xuất phát.

a) Phương trình vận tốc của vận động viên điền kinh là: $v(t)=-\frac{1}{96}t^4+\frac{5}{48}t^3\ (m/s)$

b) Phương trình quãng đường của vận động viên điền kinh là: $S(t)=-\frac{1}{480}t^5+\frac{5}{192}t^4\ (m)$

c) Quãng đường vận động viên chạy được trong 5 giây đầu tiên là $9,57(m)$

d) Quãng đường vận động viên chạy được cho đến lúc dừng chuyển động là $52,08(m)$ (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

CHƯƠNG IV

NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI. NGUYÊN HÀM

I LÝ THUYẾT.

1. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT HÀM SỐ: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên một khoảng K (hoặc một đoạn hoặc một nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi x thuộc K.

Chú ý. Trường hợp $K=[a;b]$ thì các đẳng thức $F'(a)=f(a)$ và $F'(b)=f(b)$ được hiểu là đạo hàm bên phải tại điểm $x=a$ và đạo hàm bên trái tại điểm $x=b$ của hàm số $F(x)$, tức là

$$\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=f(a) \text{ và } \lim_{x\to b^-}\frac{F(x)-F(b)}{x-b}=f(b).$$

Giả sử hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Khi đó:

a) Với mỗi hằng số C, hàm số $F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K;

b) Nếu hàm số $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $G(x)=F(x)+C$ với mọi $x\in K$.

Như vậy, nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x)+C$. Ta gọi $F(x)+C$ là họ các nguyên hàm của $f(x)$ trên K ký hiệu bởi $\int f(x)dx=F(x)+C$.

Chú ý:

a) Để tìm họ các nguyên hàm (gọi tắt là tìm nguyên hàm) của hàm số $f(x)$ trên K, ta chỉ cần tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ trên K và khi đó $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$, C là hằng số.

b) Người ta chứng minh được rằng, nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng K thì $f(x)$ có nguyên hàm trên khoảng đó.

c) Biểu thức $f(x)\mathrm{d}x$ gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$, kí hiệu là $\mathrm{d}F(x)$. Vậy $\mathrm{d}F(x)=F'(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$.

d) Khi tìm nguyên hàm của một hàm số mà không chỉ rõ tập K, ta hiểu là tìm nguyên hàm của hàm số đó trên tập xác định của nó.

2. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA NGUYÊN HÀM.

Cho $f(x),g(x)$ là hai hàm số liên tục trên K. Khi đó:

a) $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$ với mọi số thực k khác 0.

Suy ra $\int [k.f(x)+l.g(x)]\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x + l\int g(x)\mathrm{d}x$

b) $\int [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$.

3. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

a) Nguyên hàm của hàm số lũy thừa

Hàm số $y=x^\alpha$, với $\alpha\in\mathbb{R}$, được gọi là hàm số lũy thừa.

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y=x^\alpha$ tùy thuộc vào giá trị của α. Cụ thể:

+) Với α nguyên dương, tập xác định là $\mathbb{R}$.

+) Với α nguyên âm hoặc $\alpha=0$, tập xác định là $\mathbb{R}\backslash\{0\}=\mathbb{R}^*$.

+) Với α không nguyên, tập xác định là $(0;+\infty)$.

+) Hàm số lũy thừa $y=x^\alpha$ (với $\alpha\in\mathbb{R}$) có đạo hàm tại mọi điểm $x>0$ và $\left(x^\alpha\right)'=\alpha.x^{\alpha-1}$.

Từ đó ta có: $\int x^\alpha \mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ \ (\alpha\neq -1)$; $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|+C\ \ (x\neq 0)$

b) Nguyên hàm của hàm số lượng giác

$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$

$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$

$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$ Với $x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$

$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C$ Với $x\neq k\pi$

c) Nguyên hàm của hàm số mũ:

$\int e^x\mathrm{d}x = e^x + C$

$\int a^x\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C\ \ (0<a\neq 1)$

HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1: Một ô tô đang chạy với vận tốc $70\,km/h$ thì hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t)=-10t+30\ (m/s)$. Tính quãng đường ô tô đi được sau 3 giây kể từ khi hãm phanh?

Lời giải

Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong t giây kể từ khi hãm phanh.

Ta có: $s(t)=\int(-10t+30)=-5t^2+30t+C$. Do $s(0)=0\Rightarrow C=0$.

Khi đó: $s(t)=-5t^2+30t\Rightarrow s(3)=-5.9+30.3=45(m)$.

Câu 2: Bạn Huyền chạy thể dục buổi sáng với $a(t)=-\frac{1}{24}t^3+\frac{5}{16}t^2\,(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc xuất phát. Vào thời điểm $t=5(s)$ sau khi xuất phát thì vận tốc của bạn Huyền đạt được bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $v(t)=\int a(t)dt=\int\left(-\frac{1}{24}t^3+\frac{5}{16}t^2\right)dt=-\frac{1}{96}t^4+\frac{5}{48}t^3+C$.

Tại thời điểm ban đầu $(t=0)$ thì vận tốc bằng 0 nên $v(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow v(t)=-\frac{1}{96}t^4+\frac{5}{48}t^3$.

Tại thời điểm $t=5(s)$ thì vận tốc bạn Huyền đạt được là $v(5)=-\frac{1}{96}.5^4+\frac{5}{48}.5^3=6,51(m/s)$.

Câu 3: Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t)=24,5-9,8t\,(m/s)$. Tính quãng đường (mét) viên đạn đi sau 2 giây đầu.

Lời giải

Quãng đường viên đạn đi được là: $s(t)=\int(24,5-9,8t)\mathrm{d}t=24,5t-4,9t^2+C$

$\Rightarrow s(t)=24,5t-4,9t^2+C$

Chọn $t=0\Rightarrow s(0)=0$

$\Rightarrow C=0$

$\Rightarrow s(t)=24,5t-4,9t^2$

sau 2 giây đầu quãng đường viên đạn đi là $s(2)=24,5.2-4,9.2^2=29,4m$

Câu 4: Bạn An ngồi trên máy bay đi du lịch thế giới vận tốc chuyển động của máy bay là $v(t)=3t^2+5\,(m/s)$. Quãng đường máy bay đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là

Lời giải

Quãng đường máy bay đi được sau khoảng thời gian t giây là

$S(t)=\int(3t^2+5)\mathrm{d}x=t^3+5t+C\Rightarrow S=S(10)-S(4)=966.$

Câu 5: Một ô tô đang chạy với vận tốc $36km/h$ thì tăng tốc chuyển động nhanh dần với gia tốc $a(t)=1+\frac{t}{3}\,(m/s^2)$. Tính vận tốc của ô tô sau 6 giây kể từ khi ô tô bắt đầu tăng tốc.

Lời giải

Đổi $36\,km/h=10\,m/s$.

Khi ô tô chuyển động nhanh dần đều với gia tốc $a(t)=1+\frac{t}{3}\,(m/s^2)$

$\Rightarrow$ Vận tốc của ô tô khi đó là $v=\int a(t)\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{t}{3}\right)\mathrm{d}x=t+\frac{t^2}{6}+C\,(m/s)$

Khi ô tô bắt đầu tăng tốc thì $v(0)=10 \Leftrightarrow 0+\frac{0^2}{6}+C=10 \Leftrightarrow C=10$.

$\Rightarrow v=t+\frac{t^2}{6}+10(m/s) \Rightarrow v(6)=6+\frac{6^2}{6}+10=22(m/s)$

Câu 6: Theo nghiên cứu thị trường, sau t năm từ năm đầu tiên vốn đầu tư của một doanh nghiệp phát sinh lợi nhuận với tốc độ được tính xấp xỉ bởi công thức $P'(t)=125+t^2$ (triệu đồng/ năm). Lợi nhuận của doanh nghiệp được tính theo công thức nào dưới đây?

Lời giải

Lợi nhuận phát sinh của vốn sau t năm từ năm đầu tiên là $P(t)=\int P'(t)dt=125t+\frac{t^3}{3}+C$.

Tại thời điểm ban đầu $t=0$ thì $P(t)=0 \Rightarrow C=0$.

Vậy $P(t)=125t+\frac{t^3}{3}$.

Câu 7: Trong một đợt xả lũ, nhà máy thủy điện A đã xả lũ trong khoảng 35 phút với tốc độ lưu lượng nước tại thời điểm t giây là $f(t)=20t+450(m^3/s)$. Sau thời gian xả lũ trên thì hồ nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là:

Lời giải

Lượng nước của hồ chứa đã thoát đi sau thời gian t giây là: $F(t)=\int f(t)dt=10t^2+450t+C$.

Tại thời điểm ban đầu $t=0$ thì $F(t)=0 \Rightarrow C=0$.

Suy ra $F(t)=10t^2+450t(m^3)$.

Lại có 35 phút tương đương 2100 giây, do đó sau thời gian xả lũ trên thì hồ nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là:

$F(2100)=10.2100^2+450.2100=45045000(m^3)$

Câu 8: Một chiếc ô tô chuyển động với vận tốc $v(t)$ (m/s), có gia tốc $a(t)=v'(t)=\frac{3}{t+1}$ (m/s^2). Biết vận tốc của ô tô tại giây thứ 6 bằng 6 (m/s). Tính vận tốc của ô tô tại giây thứ 20.

Lời giải

Ta có: $v(t)=\int a(t)\text{dt}=\int\frac{3}{t+1}=3\ln|t+1|+C$

Lại có: $v(6)=6 \Leftrightarrow 3\ln 7+C=6 \Leftrightarrow C=6-3\ln 7$

Suy ra $v(20)=3\ln 21+6-3\ln 7=3\ln 3+6$

Vậy vận tốc của ô tô tại giây thứ 20 bằng $3\ln 3+6$.

Câu 9: Một ô tô đang chạy với tốc độ $62\ km/h$ thì người lái xe bất ngờ phát hiện chướng ngại vật trên đường. Người lái xe phản ứng một giây sau đó bằng cách đạp phanh khẩn cấp. Kể từ thời điểm này, ô tô chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t)=-8t+20\ (m/s)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong $t\ (s)$ kể từ lúc đạp phanh. Tính quảng đường ô tô đi được trong 2 giây đầu kể từ lúc đạp phanh.

Lời giải

Ta có $s(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int(-8t+20)\mathrm{d}t=-4t^2+20t+C$.

Do $s(0)=0$ nên $C=0$.

Vậy $s(t)=-4t^2+20t\ (m)$. Suy ra $s(2)=-4.2^2+20.2=24\ (m)$.

Câu 10: Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ độ cao 1m. Giả sử tại thời điểm t giây (coi $t=0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t)=25-9,8t\ (m/s)$. Độ cao của viên đạn (tính từ mặt đất) đạt giá trị lớn nhất là

Lời giải

Gọi $h(t)$ là độ cao của viên đạn bắn lên từ mặt đất sau t giây kể từ thời điểm đạn được bắn lên.

Khi đó $h(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int(25-9,8t)\mathrm{d}t=25t-4,9t^2+C\ (m)$.

Do $h(0)=1$ nên $C=1 \Rightarrow h(t)=-4,9t^2+25t+1\ (m)$.

Vậy viên đạn đạt độ cao lớn nhất là $h=-\frac{\Delta}{4a}=\frac{3223}{98}\ (m)$ khi $t=-\frac{b}{2a}=\frac{125}{49}$ giây.

Câu 11: Tại một khu di tích vào ngày lễ hội, người ta tính được tốc độ thay đổi lượng khách tham quan được biểu diễn bằng hàm số $Q'(t)=4t^3-72t^2+288t$, trong đó t tính bằng giờ $(0\le t\le 13)$, $Q'(t)$ tính bằng khách/giờ. Sau 2 giờ đã có 500 người có mặt.

a) Xác định hàm số $Q(t)$ biểu diễn lượng khách tham quan di tích.

b) Xác định thời điểm mà lượng khách tham quan lớn nhất.

c) Tìm thời điểm mà tốc độ thay đổi lượng khách tham quan là lớn nhất?

Lời giải

a) Ta có: $Q(t)=\int Q'(t)\mathrm{d}t=\int\left(4t^3-72t^2+288t\right)\mathrm{d}t=t^4-24t^3+144t^2+C$.

Mà sau 2 giờ đã có 500 người nên ta có $Q(2)=500$ suy ra $C=100$.

Vậy $Q(t)=t^4-24t^3+144t^2+100$.

b) Ta tìm GTLN của hàm số $Q(t)$ trên đoạn $[0;13]$.

Ta có $Q'(t)=0$ khi $t=0, t=6$ và $t=12$.

Mà $Q(0)=100, Q(6)=1396$, $Q(12)=100, Q(13)=269$.

Nên lượng khách tham quan lớn nhất là sau 6 giờ, có 1396 người.

c) Khảo sát hàm số $Q'(t) = 4t^3 - 72t^2 + 288t$ trên đoạn $[0;13]$.

Ta có $Q''(t) = 12t^2 - 144t + 288$.

$Q''(t) = 0 \Leftrightarrow 12t^2 - 144t + 288 = 0 \Leftrightarrow t = 6 - 2\sqrt{3}$ hoặc $t = 6 + 2\sqrt{3}$.

Bảng biến thiên của hàm số $Q'(t)$ như sau:

t	0		$6-2\sqrt{3}$		$6+2\sqrt{3}$		13
$Q''(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$Q'(t)$	0	$\nearrow$	$Q'(6-2\sqrt{3})$	$\searrow$	$Q'(6+2\sqrt{3})$	$\nearrow$	364

Với $Q'\left(6-2\sqrt{3}\right) \approx 332,6$ và $Q'\left(6+2\sqrt{3}\right) \approx -332,6$.

Vậy tốc độ thay đổi lượng khách tham quan lớn nhất tại thời điểm $t = 13$.

Câu 12: Một ô tô đang chạy với vận tốc $10\ (\text{m/s})$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10\ (\text{m/s})$, trong đó t là khoảng thời gian được tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quảng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

Lời giải

Ta có $v(t) = -2t + 10\ (\text{m/s})$, $s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int (-2t+10)\,\mathrm{d}t = -t^2 + 10t + C$.

Cho $t = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow s(t) = -t^2 + 10t$.

Ô tô dừng hẳn thì $v(t) = -2t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 5$.

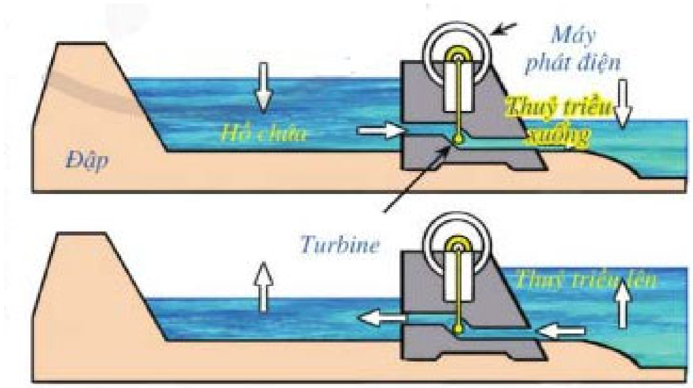
Vậy trong 8s cuối thì có 3s ô tô chạy với vận tốc $10\ (\text{m/s})$ và 5s cuối ô tô chạy với vận tốc chậm dần đều $v(t) = -2t + 10\ (\text{m/s})$.

Quãng đường ô tô đi được trong 3s chạy với vận tốc $10\ (\text{m/s})$ là $3.10 = 30\ (\text{m})$

Quãng đường ô tô đi được trong 5s kể từ khi đạp phanh đến khi dừng hẳn là:
$s(5) = -5^2 + 10.5 = 25(m)$

Vậy trong 8s cuối ô tô đi được quãng đường $30 + 25 = 55(m)$.

Câu 13: Mực nước trong hồ chứa của nhà máy điện thủy triều thay đổi trong suốt một ngày do nước chảy ra khi thủy triều xuống và nước chảy vào khi thủy triều lên (như hình vẽ). Tốc độ thay đổi của mực nước được xác định bởi hàm số $h'(t)=\frac{1}{90}\left(t^2-17t+60\right)$, trong đó t tính bằng giờ $\left(0\le t\le 24\right)$, $h'(t)$ tính bằng mét/giờ. Tại thời điểm $t=0$, mực nước trong hồ chứa cao $8m$. Mực nước trong hồ cao nhất là M và thấp nhất là m. Tổng $M+m$ bằng:



Lời giải

Ta có: $h'(t)=\frac{1}{90}\left(t^2-17t+60\right)$

$\Rightarrow h(t)=\frac{1}{90}\int\left(t^2-17t+60\right)dt=\frac{1}{90}\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{17}{2}t^2+60t\right)+C=\frac{1}{90}\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{17}{2}t^2+60t\right)+C$

Tại thời điểm $t=0$, mực nước trong hồ chứa cao $8m$ nên $h(0)=8\Rightarrow C=8$

$\Rightarrow h(t)=\frac{1}{270}t^3-\frac{17}{180}t^2+\frac{2}{3}t+8\ \left(0\le t\le 24\right)$

Ta có: $h'(t)=\frac{1}{90}t^2-\frac{17}{90}t+\frac{2}{3}$. $h'(t)=0\Leftrightarrow\frac{1}{90}t^2-\frac{17}{90}t+\frac{2}{3}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=5\\t=12\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên:

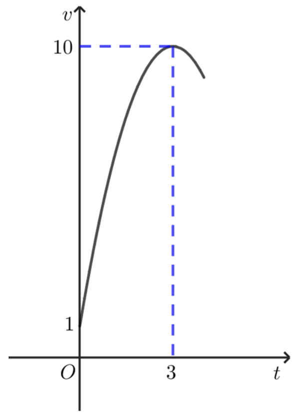
t	0		5		12		24
$h'(t)$		+	0	−	0	+	
$h(t)$	8	↗	$\frac{1019}{108}$	↘	$\frac{44}{5}$	↗	$\frac{104}{5}$

Mực nước trong hồ cao nhất: $M=\frac{104}{5}=20,8\left(m\right)$

Mực nước trong hồ thấp nhất $m=8\left(m\right)$.

$M+m=20,8+8=28,8m$.

Câu 14: Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc $v\left(\text{km/h}\right)$ phụ thuộc vào thời gian $t\left(\text{h}\right)$ có đồ thị vận tốc là một đường parabol có đỉnh $I(3;10)$ và trục đối xứng vuông góc với trục hoành như hình vẽ. Tính quãng đường vật di chuyển được trong nửa thời gian sau của chuyển động đó (kết quả làm tròn đến hàng phần chục và tính theo đơn vị km)



Lời giải

Dựa vào đồ thị ta tìm được vận tốc $v\left(t\right)=-t^2+6t+1, t\in\left[0;4\right]$.

Quãng đường $s\left(t\right)$ vật di chuyển được trong thời gian 4h là một nguyên hàm của $v\left(t\right), t\in\left[0;4\right]$

Ta có $s\left(t\right)=\int\left(-t^2+6t+1\right)\text{d}t=-\dfrac{t^3}{3}+3t^2+t+C$.

Quãng đường vật di chuyển được trong 2h đầu là $s\left(2\right)=\dfrac{34}{3}+C\left(\text{km}\right)$.

Quãng đường vật di chuyển được trong 4h là $s\left(4\right)=\dfrac{92}{3}+C\left(\text{km}\right)$.

Quãng đường vật di chuyển được trong nửa thời gian sau của chuyển động là:

$s\left(4\right)-s\left(2\right)=\dfrac{58}{3}\left(\text{km}\right)\approx 19,3\left(\text{km}\right)$.

Câu 15: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h\left(t\right)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'\left(t\right)=3at^2+bt \ \left(m^3/s\right)$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là bao nhiêu.

Lời giải

Ta có: $h'\left(t\right)=3at^2+bt\Rightarrow h\left(t\right)=\int\left(3at^2+bt\right)dt=at^3+\dfrac{1}{2}bt^2+C$

$\Rightarrow h\left(t\right)=at^3+\dfrac{1}{2}bt^2+C$

Chọn $t=0\Rightarrow h\left(0\right)=0\Rightarrow C=0$

$\Rightarrow h\left(t\right)=at^3+\dfrac{1}{2}bt^2$

Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$: $h(5)=150 \Leftrightarrow 125a+\frac{25}{2}b=150$

Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$: $h(10)=1100 \Leftrightarrow 1000a+50b=1100$

Ta có hệ: $\begin{cases}125a+\frac{25}{2}b=150\\1000a+50b=1100\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$

$\Rightarrow h(t)=t^3+t^2$

Do đó thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là $h(20)=20^3+20^2=8400m^3$.

Câu 16: Một ô tô đang chạy với tốc độ $62\ km/h$ thì người lái xe bất ngờ phát hiện chướng ngại vật trên đường. Người lái xe phản ứng một giây sau đó bằng cách đạp phanh khẩn cấp. Kể từ thời điểm này, ô tô chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t)=-8t+20\ (m/s)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong $t\ (s)$ kể từ lúc đạp phanh. Tính quảng đường ô tô đi được trong 2 giây đầu kể từ lúc đạp phanh.

Lời giải

Ta có $s(t)=\int v(t)\,\mathrm{d}t=\int(-8t+20)\,\mathrm{d}t=-4t^2+20t+C$.

Do $s(0)=0$ nên $C=0$.

Vậy $s(t)=-4t^2+20t\ (m)$. Suy ra $s(2)=-4.2^2+20.2=24\ (m)$.

Câu 17: Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ độ cao 1m. Giả sử tại thời điểm t giây (coi $t=0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t)=25-9,8t\ (m/s)$. Độ cao của viên đạn (tính từ mặt đất) đạt giá trị lớn nhất là

Lời giải

Gọi $h(t)$ là độ cao của viên đạn bắn lên từ mặt đất sau t giây kể từ thời điểm đạn được bắn lên.

Khi đó $h(t)=\int v(t)\,\mathrm{dt}=\int(25-9,8t)\,\mathrm{dt}=25t-4,9t^2+C\ (m)$.

Do $h(0)=1$ nên $C=1 \Rightarrow h(t)=-4,9t^2+25t+1\ (m)$.

Vậy viên đạn đạt độ cao lớn nhất là $h=-\frac{\Delta}{4a}=\frac{3223}{98}\ (m)$ khi $t=-\frac{b}{2a}=\frac{125}{49}$ giây.

Câu 18: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1990 được ước tính theo một hàm số theo thời gian $f(t)$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Biết rằng $f'(t)=\frac{34}{t^2+4t+4}$ (nghìn người/năm) biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn. Số dân của thị trấn đó vào năm 2035 là bao nhiêu? (kết quả lấy chính xác đến hàng phần trăm) biết dân số của thị trấn đó năm 1990 là 3 nghìn người.

Lời giải

$$f'(t)=\frac{34}{t^2+4t+4}=\frac{34}{(t+2)^2}$$

$$\Rightarrow f(t)=-\frac{34}{t+2}+C$$

Chọn mốc thời gian là năm 1990. Dân số của thị trấn đó năm 1990 là 3 nghìn người nên ta có $f\left(0\right)=3$

$$-\frac{34}{2}+C=3\Leftrightarrow C=20$$

Do đó $f\left(t\right)=-\frac{34}{t+2}+20$

Từ năm 1990 đến năm 2035 là 45 năm nên dân số của thị trấn năm 2035 là

$f\left(45\right)=-\frac{34}{47}+20=\frac{906}{47}\approx 19,28$ (nghìn người).

Câu 19: Gọi $h\left(t\right)\ \left(m\right)$ là mực nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được t giây. Biết rằng $h'\left(t\right)=\frac{1}{5}\sqrt[3]{t}\ \ \left(m/s\right)$ và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Ta có:

$$h'\left(t\right)=\frac{1}{5}\sqrt[3]{t}$$

$$\Rightarrow h\left(t\right)=\int\frac{1}{5}\sqrt[3]{t}dx=\frac{1}{5}\int t^{\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{5}\frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+C=\frac{3}{20}t\sqrt[3]{t}+C$$

$$\Rightarrow h\left(t\right)=\frac{3}{20}t\sqrt[3]{t}+C$$

Chọn $t=0\Rightarrow h\left(0\right)=0\Rightarrow C=0$

$$\Rightarrow h\left(t\right)=\frac{3}{20}t\sqrt[3]{t}$$

Mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây: $h\left(6\right)=\frac{3}{20}.6\sqrt[3]{6}\approx 1,64m$

Câu 20: Gọi $h(t)$ là chiều cao của cây keo (tính theo mét) sau khi trồng t năm. Biết rằng năm đầu tiên cây cao 1,5m, trong những năm tiếp theo, cây phát triển với tốc độ $h'(t)=\frac{1}{\sqrt[4]{t}}$ (mét /năm). Sau bao nhiêu năm cây cao được 3m.

Lời giải

Ta có

$$h'(t)=\frac{1}{\sqrt[4]{t}}$$

$\Rightarrow h(t)=\int \frac{1}{\sqrt[4]{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{4}}dt=\frac{t^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1}+C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{t^3}+C$

$\Rightarrow h(t)=\frac{4}{3}\sqrt[4]{t^3}+C$

Năm đầu tiên cây cao \$1,5m\$ nên $h(1)=1,5\Leftrightarrow 1,5=\frac{4}{3}\sqrt[4]{1}+C\Rightarrow C=\frac{1}{6}$

$\Rightarrow h(t)=\frac{4}{3}\sqrt[4]{t^3}+\frac{1}{6}$

Cây cao được 3m nên $h(t)=3\Leftrightarrow \frac{4}{3}\sqrt[4]{t^3}+\frac{1}{6}=3\Leftrightarrow \sqrt[4]{t^3}=\frac{17}{8}\Rightarrow t\approx 2,73$

Câu 21: Một quần thể vi khuẩn ban đầu gồm 500 vi khuẩn, sau đó bắt đầu tăng trưởng. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t, trong đó t tính theo ngày ($0\le t\le 10$). Tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn đó cho bởi hàm số $P'(t)=k\sqrt{t}$, trong đó k là hằng số. Sau 1 ngày, số lượng vi khuẩn của quần thể đó đã tăng lên thành 600 vi khuẩn. Tính số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 9 ngày.

(Nguồn: R. Larson and BEdwards, Calculus 10e, Cengage 2014).

Lời giải

Ta có: $P(t)=\int P'(t)dt=\int k\sqrt{t}dt=\int kt^{\frac{1}{2}}dt=k.\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$.

Từ giả thiết suy ra: $\begin{cases}P(0)=500\\P(1)=600\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k.\frac{2}{3}.0\sqrt{0}+C=500\\k.\frac{2}{3}.1\sqrt{1}+C=600\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=500\\\frac{2}{3}k=100\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=500\\k=150\end{cases}$

$\Rightarrow P(t)=100t\sqrt{t}+500$.

Do đó, số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 9 ngày là: $P(9)=100.9\sqrt{9}+500=3200$.

Câu 22: Một đàn con trùng, ở ngày thứ t có số lượng là $K(t)$. Biết $K'(t)=\frac{4000}{1+\frac{t}{2}}$ và ban đầu đàn côn trùng có 50.000 con. Hỏi sau 10 ngày thì đàn có khoảng bao nhiêu con? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Số lượng côn trùng ngày thứ t là $K(t)=\int\frac{4000}{1+\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=8000\ln\left|1+\frac{t}{2}\right|+C$.

Vì ban đầu đàn côn trùng có 50.000 con nên

$$K(0)=50.000 \Leftrightarrow 8000\ln\left|1+\frac{0}{2}\right|+C=50.000 \Leftrightarrow C=50.000$$

Số lượng côn trùng ngày thứ 10 là $K(10)=8000\ln\left|1+\frac{10}{2}\right|+50.000 \approx 64.334$ con.

Câu 23: Một vật chuyển động với vận tốc ban đầu là $5(m/s)$ và có gia tốc được xác định bởi công thức $a(t)=\frac{2}{t+1}(m/s^2)$. Tính vận tốc của vật tại giây thứ 20(là tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Ta có vận tốc của vật tại thời điểm t là $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int\frac{2}{t+1}\mathrm{d}t=2\ln|t+1|+C$.

Vì vận tốc ban đầu là $5(m/s)$ nên $v(0)=5 \Leftrightarrow 2\ln|0+1|+C=5 \Leftrightarrow C=5$.

Nên $v(t)=2\ln|t+1|+5$. Vậy vận tốc của vật tại giây thứ 20 là

$v(20)=2\ln|20+1|+5\approx 11(m/s)$.

Câu 24: Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 15m/s thì người lái xe hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-3t+15(\text{m/s})$, trong đó t (giây). Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét?

Lời giải

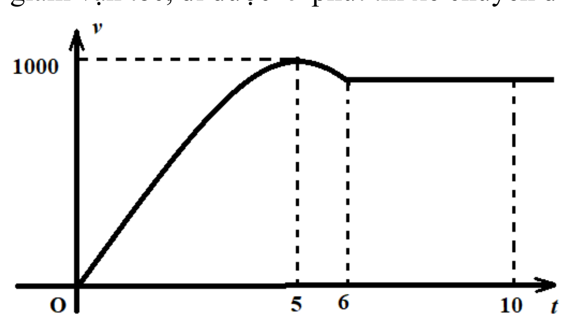
Ta có quãng đường xe đi được là $s(t)=\int v(t)dt=\int(-3t+15)\mathrm{d}t=-\frac{3}{2}t^2+15t+C$.

Do $s(0)=0$ nên $C=0$.

Khi xe dừng hẳn thì $v(t)=0 \Rightarrow t=5$.

Suy ra quãng đường đi được là $s(5)=37,5(m)$.

Câu 25: Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol như hình bên dưới. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1000 m/phút và bắt đầu giảm vận tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động đều.



Hỏi quãng đường xe đã đi được trong khoảng 10 phút đầu tiên là bao nhiêu?

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có phương trình vận tốc của ô tô là $v(t)=-40t^2+400t$ với $t\in[0;6]$ và $v=960$ với $t>6$. Trong khoảng 6 phút đầu phương trình quãng đường là $S(t)=\int\left(-40t^2+400t\right)dt=-\frac{40}{3}t^3+200t^2+C$.

Tại thời điểm xe ô tô xuất phát ta có $t_0=0$ và $S\left(t_0\right)=0$ suy ra $C=0$ nên phương trình quãng đường là $S(t)=-\frac{40}{3}t^3+200t^2$.

Trong khoảng 6 phút đầu ô tô đi được quãng đường là $S(6)=4320m$ và 4 phút tiếp theo ô tô đi được quãng đường là $960\text{x}4=3840m$

Vậy quãng đường ô tô đi được trong 10 phút đầu là $4320+3840=8160$ m.

Câu 26: Một vật chuyển động với gia tốc được cho bởi hàm số $a\left(t\right)=-t^2+2t\left(\text{m}/\text{s}^2\right)$. Tại thời điểm $t=0$ vật có vận tốc $36\text{ m}/\text{s}$. Tính gia tốc của vật tại thời điểm vật dừng lại.

Lời giải

Ta có: $\int a\left(t\right)\text{d}x=\int\left(-t^2+2t\right)\text{d}x=-\frac{t^3}{3}+t^2+C$. Do đó $v\left(t\right)=-\frac{t^3}{3}+t^2+C$.

Tại thời điểm $t=0$ vật có vận tốc $36\text{ m}/\text{s}$ nên: $v\left(0\right)=C=36$, suy ra $v\left(t\right)=-\frac{t^3}{3}+t^2+36$

Thời điểm vật dừng lại: $v\left(t\right)=-\frac{t^3}{3}+t^2+36=0\Leftrightarrow t=6$.

Khi đó gia tốc của vật là: $a\left(6\right)=-24\ \left(\text{m}/\text{s}^2\right)$.

Câu 27: Tại một lễ hội dân gian hàng năm, tốc độ thay đổi lượng khách tham dự được biểu diễn bằng hàm số $Q'\left(t\right)=8t^3-144t^2+576t$, trong đó t tính bằng giờ $\left(0\le t\le 20\right)$, $Q'\left(t\right)$ tính bằng khách/giờ. Sau 1 giờ đã có 300 người có mặt. Hỏi số lượng khách tham dự đông nhất trong vòng 20 giờ là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $\int Q'\left(x\right)\text{d}x=\int\left(8t^3-144t^2+576t\right)\text{d}x=2t^4-48t^3+288t^2+C$.

Vậy số lượng khách tham quan được biểu diễn bằng hàm số $Q\left(t\right)=2t^4-48t^3+288t^2+C$ $\left(0\le t\le 20\right)$.

Có $Q\left(1\right)=300\Rightarrow C=58$, suy ra $Q\left(t\right)=2t^4-48t^3+288t^2+58$.

Ta có: $Q'\left(t\right)=8t^3-144t^2+576t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=6\\t=12\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		6		12		20
$Q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$Q(x)$	58	$\nearrow$	2650	$\searrow$	58	$\nearrow$	51258

Vậy số lượng khách tham dự đông nhất trong vòng 20 giờ là 51258 khách.

Câu 28: Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số $v(t)=-0,1t^3+t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng centimét/tuần. Gọi $h(t)$ là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t. Vào thời điểm cây cà chua đó phát triển nhanh nhất thì cây cà chua cao bao nhiêu centimét?(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Ta có: $h(t)\int\left(-0,1t^3+t^2\right)\mathrm{d}t=\int -0,1t^3\ \mathrm{d}t+\int t^2\ \mathrm{d}t=\dfrac{-t^4}{40}+\dfrac{t^3}{3}+C$.

Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm nên $h(0)=5$, suy ra $C=5$.

Do đó $h(t)=\dfrac{-t^4}{40}+\dfrac{t^3}{3}+5$.

Ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của $h(t)=\dfrac{-t^4}{40}+\dfrac{t^3}{3}+5$ với $t\in[0;10]$.

Ta có: $h'(t)=\dfrac{-t^3}{10}+t^2=\dfrac{t^2}{10}(-t+10)$, suy ra $h'(t)=0$ khi t bằng 0 hoặc 10.

Ta thấy $h(0)=5, h(10)=\dfrac{265}{3}$. Khi đó, $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{265}{3}$ trên đoạn $[0;10]$.

Vậy chiều cao tối đa của cây cà chua đó là $\dfrac{265}{3}\approx 88,33(\ \mathrm{cm})$.

Câu 29: Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0=15(\mathrm{m/s})$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+4t\left(\mathrm{m/s^2}\right)$. Tính vận tốc chất điểm đó tại giây thứ 3 kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

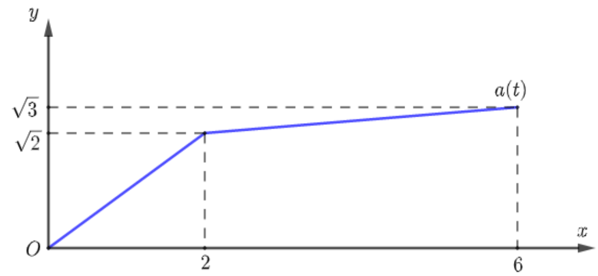
Lời giải

Ta có $a(t)=t^2+4t\Rightarrow v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\dfrac{t^3}{3}+2t^2+C\,(C\in\mathbb{R})$.

Theo giả thiết $v(0)=15\Rightarrow C=15\Rightarrow v(t)=\dfrac{t^3}{3}+2t^2+15$.

Vậy $v(3)=\dfrac{3^3}{3}+2.3^2+15=41(\mathrm{m/s})$.

Câu 30: Một vật chuyển động với hàm số gia tốc là $a(t)$. Biết rằng đồ thị hàm số $a(t)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho như hình dưới đây và vận tốc tại thời điểm $t=0$ là $v(0)=1(m/s)$.



Tại thời điểm $t=6$ giây, vận tốc của vật là bao nhiêu?(làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Lời giải

Từ đồ thị ta có $a(t)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}t & ,0\le t\le 2\\ \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}t+\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} & ,2\le t\le 6\end{cases}$.

Mà $v(0)=1(m/s)$ nên $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{4}t^2+1 & ,0\le t\le 2\\ \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{8}t^2+\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}t+C & ,2\le t\le 6\end{cases}$.

Vì vận tốc là hàm số liên tục nên

$$\lim_{t\to 2^-}v(t)=\lim_{x\to 2^+}v(t)\Leftrightarrow \sqrt{2}+1=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}+3\sqrt{2}-\sqrt{3}+C\Leftrightarrow C=\frac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}+2}{2}.$$

Do đó $v(6)=1+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\approx 8,707\ (m/s)$.

Câu 31: Doanh thu bán hàng của một doanh nghiệp khi bán một loại sản phẩm là số tiền $R(x)$ (triệu đồng) thu được khi x đơn vị sản phẩm được bán ra. Tốc độ biến động (thay đổi) của doanh thu khi x đơn vị sản phẩm đã được bán là hàm số $M_R(x)=R'(x)$. Đại diện của doanh nghiệp cho biết tốc độ biến đổi của doanh thu khi bán một loại sản phẩm được cho bởi $M_R(x)=500-0,1x$, ở đó x là số lượng sản phẩm đã bán. Tìm doanh thu của doanh nghiệp khi đã bán 2000 sản phẩm.

Lời giải

Doanh thu của doanh nghiệp là $R(x)=\int M_R(x)\mathrm{d}x=\int(500-0,1x)\mathrm{d}x=500x-\dfrac{1}{20}x^2+C$.

Vì $R(0)=0$ nên $C=0$. Vậy $R(x)=500x-\dfrac{1}{20}x^2$.

Doanh thu của doanh nghiệp khi bán 2000 sản phẩm là:

$R(2000)=500.2000-\frac{1}{20}.2000^2=800\,000$ triệu đồng.

Câu 32: Một viên đạn được bắn lên trời với vận tốc là $72m/s$ bắt đầu từ độ cao $2m$. Hãy xác định chiều cao của viên đạn sau thời gian $5s$ kể từ lúc bắn biết gia tốc trọng trường là $9.8m/s^2$

Lời giải

Ta có vận tốc của viên đạn tại thời điểm t là:

$$v(t)=\int -9,8dt=-9,8t+C_1$$

Do $v(0)=72$ nên $v(0)=-9,8.0+C_1=72 \Leftrightarrow C_1=72 \Rightarrow v(t)=-9,8t+72$.

Độ cao của viên đạn tại thời điểm t là:

$$s(t)=\int v(t)dt=\int(-9,8t+72)dt=-4,9t^2+72t+C_2$$

Vì $s(0)=2$ nên $s(0)=-4,9.0^2+72.0+C_2=2 \Leftrightarrow C_2=2 \Rightarrow s(t)=-4,9t^2+72t+2$.

Vậy sau khoảng thời gian 5s kể từ lúc bắn, viên đạn ở độ cao

$$s(5)=-4,9.5^2+72.5+2=239,5m.$$

Câu 33: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=3at^2+bt$ (m^3/s) và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây.

Lời giải

Ta có: $h'(t)=3at^2+bt$

$\Rightarrow h(t)=\int(3at^2+bt)dt=at^3+\frac{1}{2}bt^2+C \Rightarrow h(t)=at^3+\frac{1}{2}bt^2+C$

Chọn $t=0 \Rightarrow h(0)=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow h(t)=at^3+\frac{1}{2}bt^2$

Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$: $h(5)=150 \Leftrightarrow 125a+\frac{25}{2}b=150$

Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$: $h(10)=1100 \Leftrightarrow 1000a+50b=1100$

Ta có hệ: $\begin{cases}125a+\frac{25}{2}b=150\\1000a+50b=1100\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$

$\Rightarrow h(t)=t^3+t^2$

Nên thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là $h(20)=20^3+20^2=8400m^3$

Câu 34: Vào năm 2014, dân số nước ta khoảng $90,7$ triệu người. Giả sử, dân số nước ta sau t năm được xác định bởi hàm số $S(t)$ (đơn vị: triệu người), trong đó tốc độ gia tăng dân số được cho bởi $S'(t)=1,2698.e^{0,014t}$, với t là số năm kể từ năm 2014, $S'(t)$ tính bằng triệu người/ năm.

a) $S(t)$ là một nguyên hàm của $S'(t)$.

b) $S(t)=90,7.\mathrm{e}^{0,014t}+90,7$.

c) Theo công thức trên, tốc độ tăng dân số nước ta năm 2034 (làm tròn đến hàng phần mười của triệu người/ năm) khoảng $1,7$ triệu người/ năm.

d) Theo công thức trên, dân số nước ta năm 2034 (làm tròn đến hàng đơn vị của triệu người) là khoảng 120 triệu người/ năm.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Ta có $S(t)$ là một nguyên hàm của $S'(t)$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}\int S'(t)\mathrm{d}t&=\int 1,2698.\mathrm{e}^{0,014t}\mathrm{d}t\\&=1,2698\int\left(\mathrm{e}^{0,014}\right)^{t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1,2698.\mathrm{e}^{0,014t}}{0,014}+C\\&=90,7.\mathrm{e}^{0,014t}+C\end{aligned}$$

Vì $S(0)=90,7$ nên $C=0$. Suy ra $S(t)=90,7.\mathrm{e}^{0,014t}$.

c) Tốc độ tăng dân số nước ta năm 2034 là $S'(20)=1,2698.\mathrm{e}^{0,014.20}\approx 1,7$ (triệu người/ năm).

d) Dân số nước ta năm 2034 là $S(20)=90,7.\mathrm{e}^{0,014.20}\approx 120$ (triệu người).

Câu 35: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)=4\cos t$ (m/s^2). Tại thời điểm bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc bằng 0.

a) Vận tốc của vật được biểu diễn bởi hàm số $v(t)=4\cos t$ (m/s).

b) Vận tốc của vật tại thời điểm $t=\dfrac{\pi}{6}$ là $2\,\mathrm{m/s}$.

c) Tại thời điểm $t=\dfrac{\pi}{4}$ (s) sau khi xuất phát thì vận tốc của vật là $\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$

d) Gia tốc của vật tại thời điểm $t=\dfrac{\pi}{4}$ (s) là $2\sqrt{2}\ (m/s^2)$

Lời giải

a) Sai: Ta có $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int 4\cos \mathrm{d}t=4\sin t+C$. Mà tại thời điểm bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc bằng 0 nên ta có $v(0)=0$ hay $C=0$. Vậy $v(t)=4\sin t$.

b) Đúng: Vận tốc của vật tại thời điểm $t=\dfrac{\pi}{6}$ là $v\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=4\sin\dfrac{\pi}{6}=2$ (m/s).

c) Sai: Vận tốc của vật tại thời điểm $t=\dfrac{\pi}{4}$ là $v\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=4\sin\dfrac{\pi}{4}=2\sqrt{2}$ (m/s).

d) Đúng: Gia tốc của vật tại thời điểm $t=\dfrac{\pi}{4}$ (s) là: $a(\dfrac{\pi}{4})=4\cos\dfrac{\pi}{4}=2\sqrt{2}(\mathrm{m/s^2})$.

Câu 36: Một chiếc xe đang chuyển động đều với tốc độ $v_0=15m/s$ thì gặp chướng ngại vật rồi phanh gấp với gia tốc không đổi là $a=-3\ m/s^2$. Kí hiệu $v(t)$ là tốc độ của xe, $a(t)$ là gia tốc xe, $s(t)$ là quãng đường xe đi được cho đến thời điểm t giây kể từ lúc phanh xe. Xét tính đúng – sai của các mệnh đề sau.

a) $v(t)=a'(t)$.

b) $a(t)=s''(t)$.

c) Tính từ lúc phanh xe, sau 4 giây thì xe dừng hẳn.

d) Quãng đường xe đi được tính từ lúc phanh xe đến khi dừng hẳn nằm trong khoảng từ 35 mét đến 40 mét.

Lời giải

a) Sai.

$v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t$

b) Đúng.

$a(t)=v'(t)=s''(t)$.

c) Sai.

$v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int -3\mathrm{d}t=-3t+C$.

$v(0)=-3.0+C=15\Rightarrow C=15$. Suy ra $v(t)=-3t+15$.

Xe dừng hẳn khi $v(t)=0\Rightarrow -3t+15=0\Rightarrow t=5$ giây.

d) Đúng.

$s(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int -3t+15\mathrm{d}t=\dfrac{-3}{2}t^2+15t+C$.

$s(0)=\dfrac{-3}{2}0^2+15.0+C=0\Rightarrow C=0$.

$s(5)=37,5$ mét.

Câu 37: Trong thí nghiệm nuôi cấy một loại vi sinh vật, kí hiệu $f(t)$ là tổng số lượng vi sinh vật sau t giờ. Biết rằng sau 3 giờ đầu tiên thì tổng số lượng vi sinh vật là 50 con. Trong 7 giờ tiếp theo, số lượng vi sinh vật thay đổi với tốc độ $f'(t)=t^2-8t$ (con/giờ).

a) Họ nguyên hàm của $f'(t)$ là $\dfrac{t^3}{3}-8t^2+C\ \left(C\in\mathbb{R}\right)$.

b) Số lượng vi khuẩn tăng liên tục trong khoảng từ 3 giờ đến 10 giờ sau thời điểm làm thí nghiệm.

c) Số lượng vi khuẩn là nhỏ nhất sau 8 giờ tính từ lúc bắt đầu làm thí nghiệm.

d) Sau 6 giờ thì số lượng vi khuẩn là 5 con.

Lời giải

a) Sai.

Ta có: $\int\left(t^2-8t\right)\mathrm{d}t=\dfrac{t^3}{3}-4t^2+C$.

b) Sai.

Ta có: $f'(t)>0$ khi $8<t<10$ và $f'(t)<0$ khi $3<t<8$.

Nên số lượng vi sinh vật giảm trong khoảng từ 3 giờ đến 8 giờ, sau đó tăng dần trong khoảng 8 giờ đến 10 giờ.

c) Đúng.

Bảng biến thiên của $f(t)$:

t	3		8		10
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$f(8)$	$\nearrow$	

d) Đúng.

$f(t)=\dfrac{t^3}{3}-4t^2+C$. Do $f(3)=50\Rightarrow\dfrac{3^3}{3}-4.3^2+C=50\Rightarrow C=77$.

Suy ra $f(t)=\dfrac{1}{3}t^3-4t^2+77\Rightarrow f(6)=5$.

Câu 38: Một quả cầu lông được đánh lên từ độ cao $2,2\,m$ với vận tốc được tính bởi công thức $v(t)=-0,8t+4,16\ (m/s)$.

a) Công thức tính độ cao của quả cầu theo t là $h(t)=-0,4t^2+4,16t+2,2\,(m)$.

b) Quả cầu đạt độ cao cao nhất tại thời điểm $t=5,2\,(s)$.

c) Độ cao cao nhất của quả cầu bằng $13,016\ (m)$.

d) Thời điểm quả cầu chạm đất là $t = 10,5\left(s\right)$.

Lời giải

a) Đúng.

$h\left(t\right) = \int v\left(t\right)dt = \int\left(-0,8t + 4,16\right)dt = -0,4t^2 + 4,16t + C$.

Mà $h\left(0\right) = 2,2$ nên $C = 2,2$. Do đó $h\left(t\right) = -0,4t^2 + 4,16t + 2,2\left(m\right)$.

b) Đúng.

Quả cầu đạt độ cao cao nhất tại thời điểm $t = -\dfrac{4,16}{2.\left(-0,4\right)} = 5,2\left(s\right)$.

c) Đúng.

Độ cao cao nhất của quả cầu bằng $h\left(5,2\right) = 13,016\left(m\right)$.

d) Sai.

Quả cầu chạm đất khi $h\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow -0,4t^2 + 4,16t + 2,2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \approx 10,9 \\ t \approx -0,5 \end{array}\right.$.

Vì $t > 0$ nên chọn $t \approx 10,9\left(s\right)$.

Câu 39: Cây KEO LAI là một trong các loài cây không chỉ là nguyên liệu giấy quan trọng mà còn là loài cây cung cấp gỗ nguyên liệu cho các ngành khác như chế biến ván nhân tạo, chế biến đồ mộc xuất khẩu, gỗ bao bì, gỗ xây dựng. Cây phát triển với tốc độ nhanh. Kí hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao $8m$.Trong 10 năm tiếp theo cây phát triển với tốc độ $h'\left(x\right) = \dfrac{9}{x}$ (m/năm).

a) Biểu thức của $h\left(x\right)$ là: $h\left(x\right) = 9\ln\left(x\right) + C$.

b) Sau 3 năm cây cao $20m$.

c) Tốc độ phát triển của cây trong 10 năm đầu sẽ giảm dần.

d). Người ta thường thu hoạch cây KEO LAI khi nó có độ cao trong khoảng từ 26 đến 28 mét. Vậy đó là 8 hoặc 9 năm sau khi trồng.

Lời giải

a) Đúng

$h'\left(x\right) = \dfrac{9}{x} \Rightarrow h\left(x\right) = \int\dfrac{9}{x}\mathrm{dx} = 9\ln\left|x\right| + C = 9\ln\left(x\right) + C$ (vì $x > 0$)

b) Sai

Vì sau năm đầu tiên cây cao $8m$ nên $h\left(1\right) = 8 \Rightarrow 9\ln(1) + C = 8 \Rightarrow C = 8$

$\Rightarrow h\left(x\right) = 9\ln\left(x\right) + 8 \Rightarrow h\left(3\right) = 9\ln\left(3\right) + 8 \approx 17,89\left(m\right)$. Vậy sau 3 năm cây cao khoảng $17,89m$.

c) Đúng

Ta có tốc độ phát triển của cây là hàm số $h'(x)=\frac{9}{x}\Rightarrow h''(x)=\frac{-9}{x^2}<0$ nên $h'(x)$ là hàm nghịch biến. Do đó tốc độ phát triển của cây sẽ giảm dần trong 10 năm đầu.

d) Đúng

Ta có $26\le h(x)\le 28\Rightarrow 26\le 9\ln(x)+8\le 28\Rightarrow 7,39\le x\le 9,23$

Vậy sau 8 hoặc 9 năm sau khi trồng.

Câu 40: Một em bé ném một viên bi lăn trên sàn nhà. Viên bi chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t)=9-2t\ (m/s)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc thả bi. Gọi $s(t)$ là quãng đường viên bi lăn được trong t (giây) kể từ lúc ném bi.

a) $s(t)=9t-t^2$.

b) Vật chuyển động với gia tốc là $a(t)=2\ (m/s^2)$.

c) Quãng đường viên bi lăn được trong 3 giây đầu tiên là $18m$.

d) Quãng đường viên bi lăn được từ lúc em bé ném bi đến khi dừng hẳn là $36m$.

Lời giải

a) Đúng.

Ta có: $s(t)=\int v(t)dt=\int(9-2t)dt=9t-t^2+C$.

Do $s(0)=0$ nên $C=0$.

Suy ra $s(t)=9t-t^2$.

b) Sai.

Ta có: $a(t)=v'(t)=(9-2t)'=-2\ (m/s^2)$.

c) Sai.

Ta có: $s(t)=9t-t^2$.

Quãng đường viên bi lăn được trong 3 giây đầu tiên là $s(3)-s(0)=18m$.

d) Sai.

Thời điểm viên bi dừng hẳn là $9-2t=0 \Leftrightarrow t=\frac{9}{2}$.

Quãng đường viên bi lăn được từ lúc em bé thả bi đến khi dừng hẳn là $s\left(\frac{9}{2}\right)-s(0)=20,25m$.

Câu 41. Một vận động viên điền kinh chạy với gia tốc $a(t)=-\frac{1}{24}t^3+\frac{5}{16}t^2\left(m/s^2\right)$,trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc xuất phát.

a) Phương trình vận tốc của vận động viên điền kinh là: $v(t)=-\frac{1}{96}t^4+\frac{5}{48}t^3\left(m/s\right)$

b) Phương trình quãng đường của vận động viên điền kinh là: $S(t)=-\frac{1}{480}t^5+\frac{5}{192}t^4\left(m\right)$

c) Quãng đường vận động viên chạy được trong 5 giây đầu tiên là $9,57(m)$

d) Quãng đường vận động viên chạy được cho đến lúc dừng chuyển động là $52,08(m)$ (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

a) Đúng.

Vì Vận tốc $v(t)$ chính là nguyên hàm của gia tốc $a(t)$ nên ta có:

$$v(t)=\int a(t)dt=\int\left(-\frac{1}{24}t^3+\frac{5}{16}t^2\right)dt=-\frac{1}{96}t^4+\frac{5}{48}t^3+C$$

Tại thời điêm ban đầu $(t=0)$ thì vận động viên ở vị trí xuất phát nên

$v(0)=-\frac{1}{96}0^4+\frac{5}{48}0^3+C=0 \Leftrightarrow C=0$ nên $v(t)=-\frac{1}{96}t^4+\frac{5}{48}t^3\left(m/s\right)$

b) Đúng.

Vì Quãng đường $S(t)$ chính là nguyên hàm của vận tốc $v(t)$ nên ta có:

$$S(t)=\int v(t)dt=\int -\frac{1}{96}t^4+\frac{5}{48}t^3=-\frac{1}{480}t^5+\frac{5}{192}t^4+C$$

Tại thời điêm ban đầu $(t=0)$ thì vận động viên ở vị trí xuất phát nên

$S(0)=-\frac{1}{480}0^5+\frac{5}{192}0^4+C=0 \Leftrightarrow C=0$ nên $S(t)=-\frac{1}{480}t^5+\frac{5}{192}t^4\left(m\right)$.

c) Sai.

Vì Tại thời điêm ban đầu $(t=10)$ thì vận động viên chạy được:

$$S(10)=-\frac{1}{480}.5^5+\frac{5}{192}.5^4\approx 9,77(m)$$

d) Đúng.

Vì Vận tốc $v(t)=-\frac{1}{96}t^4+\frac{5}{48}t^3\,(m/s)$, khi vận động viên dừng chuyển động thì

$v(t)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{96}t^4+\frac{5}{48}t^3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=10 \end{array}\right.$

$S(10)=-\frac{1}{480}.10^5+\frac{5}{192}.10^4 \approx 52,08(m)$

CHƯƠNG III

NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI. TÍCH PHÂN

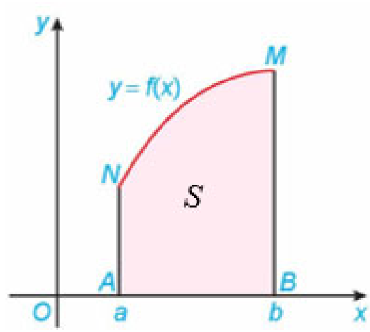
I LÝ THUYẾT.

1) KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN

a) Diện tích hình thang cong:

Định lý 1:

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$, thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ là $S=F(b)-F(a)$, trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.



b) Định nghĩa tích phân: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thì hiệu số $F(b)-F(a)$ được gọi là tích phân của hàm số $f(x)$ từ a đến b và kí hiệu là $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Ta gọi: a là cận dưới, b là cận trên, f là hàm số dưới dấu tích phân, $f(x)\mathrm{d}x$ là biểu thức dưới dấu tích phân, x biến số lấy tích phân.

Chú ý:

a) Hiệu số $F(b)-F(a)$ còn được kí hiệu là $F(x)\Big|_a^b$. Khi đó:

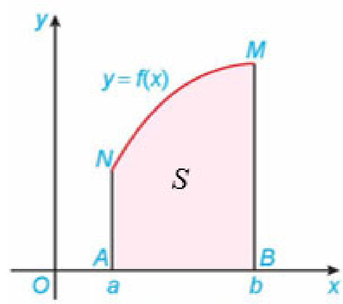
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

b) Nếu $a<b$ thì ta gọi $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ là tích phân của f trên đoạn $[a;b]$.

c) Trong trường hợp $a=b$ hoặc $a>b$ ta quy ước: $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0;\quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$

d) Tích phân ***không phụ thuộc và cách kí hiệu biến*** (điều này sẽ mang lại lợi ích cho ta để tính một số tích phân đặc biệt), tức là $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = ... = F(b) - F(a)$.

Ý nghĩa hình học của tích phân:



Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Vậy $S = \int_a^b f(x)dx$

2. TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên $[a;b]$. Khi đó ta có:

1) $\int_a^b k.f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

2) $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

3) $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (a < c < b)$ (*chèn cận* c)

Giá trị trung bình của hàm số liên tục *f(x)* trên đoạn [*a*; *b*] được định nghĩa là

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1: Một chiếc xe đang chuyển động thẳng đều với vận tốc 30 m/s thì người lái đạp phanh khiến vận tốc của xe thay đổi theo thời gian t (giây) được tính theo công thức $v(t) = 30 - 5t \quad (0 \le t \le 6)$. Tính quãng đường di chuyển của xe trong khoảng thời gian tính từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn.

Câu 2: Một ô tô đang chạy với vận tốc $15(\mathrm{m/s})$ thì người lái hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 15(\mathrm{m/s})$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

Câu 3: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)=3t^2+t\ (\mathrm{m/s^2})$. Vận tốc ban đầu của vật là $2\,(\mathrm{m/s})$. Hỏi vận tốc của vật là bao nhiêu sau khi chuyển động với gia tốc đó được $2\ \mathrm{s}$.

Câu 4: Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

Câu 5: Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động với vận tốc $v(t)=-3t^2+12t+1\ (m/s)$, Giả sử $\mathrm{S}(t)$ là quãng đường chuyển động của chất điểm theo thời gian t(giây). Tính quãng đường mà vật di chuyển trong 5 giây đầu tiên,

Câu 6: Một vật di chuyển với gia tốc $a(t)=-\dfrac{20}{(1+2t)^2}\ (m/s^2)$ Khi $t=0$thì vận tốc của vật là $v(t)=30\ (m/s)$. Tính quãng đường vật đó đi được sau 3 giây đầu tiên?

Câu 7: Kì nghỉ hè lớp 11 bạn Mai ngồi trên máy bay đi du lich từ Hà Nội vào Nha trang với vận tốc chuyển động của máy báy là$v(t)=3t^2+4\ (m/s)$. Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 4 đến giây thứ 10?

Câu 8: Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất lên theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu $25\ (m/s)$. Gia tốc trọng trường là $9{,}8\ (m/s^2)$

a) Sau bao lâu thì viên đạn đạt tới độ cao lớn nhất?

b) Tính quãng đường viên đạn đi được từ lúc bắn lên cho đến khi chạm đất (tính chính xác đến hàng phần trăm)

Câu 9: Tại một nhà máy sản xuất gọi $C(x)$là tổng chi phí tính theo triệu đồng để sản xuất x(tấn) sản phẩm A trong một tháng. Khi đó đạo hàm $C'(x)$gọi là chi phí cận biên, cho biết tốc độ tăng tổng chi phí theo lượng sản phẩm được sản xuất. Giả sử chi phí cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy ước lượng bởi công thức $C'(x)=5-0{,}06x+0{,}00072x^2$ với $0\le x\le 150$. Biết rằng $C(0)=30$triệu đồng gọi là chi phí cố định. Tính tổng chi phí khi nhà máy sản xuất 100tấn sản phẩm A trong một tháng.

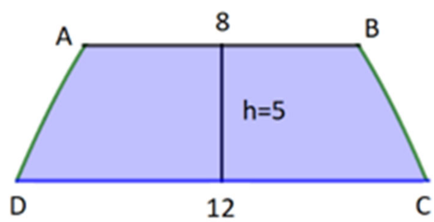
Câu 10: Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t), \mathrm{t}\ge 0$trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)=\dfrac{25000e^{-t}}{\left(1+5e^{-t}\right)^2}$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Biết rằng sau 2 năm đạt doanh số 2148 sản phẩm. Tính doanh số trong vòng 5 năm của sản phẩm?

Câu 11: Một ô tô đang chạy với tốc độ $20(m/s)$ thì gặp chướng ngại vật, người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+20(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét (m)?

Câu 12: Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì gặp chướng ngại vật, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

Câu 13: Biết rằng nhiệt độ tại thời điểm t giờ trong khoảng thời gian từ 5 giờ sáng đến 12 giờ trưa ở thành phố A vào một ngày mùa hạ được xác định bởi hàm số $N(t)=20+1,7(t-5), 5\le t\le 12$. Tính nhiệt độ trung bình vào ngày đó trong khoảng thời gian từ 5 giờ sáng đến 12 giờ trưa (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 14: Một mảnh đất có hình dạng là hình thang cong có các thông số như hình vẽ, biết phần đường cong là phần đồ thị của hàm số $y=a\sqrt{x}$. Diện tích của mảnh đất đó là bao nhiêu?



Câu 15: Một ca nô cao tốc có tốc độ v (km/phút) thay đổi theo thời gian t (phút) như sau:

$$v(t)=\begin{cases} a.t, & 0\le t<2,\\ 2 & 2\le t<15, \text{ với } a\in\mathbb{R}.\\ 4-a.t, & 15\le t\le 20.\end{cases}$$

Biết quãng đường ca nô di chuyển được trong thời gian 20 phút bằng 28,9 km. Giá trị của a bằng bao nhiêu?

Câu 16: Một vật được ném lên từ độ cao $300m$ với vận tốc được cho bởi công thức $v(t)=-9,81t+29,43(m/s)$. Gọi $h(t)$ (m) là độ cao của vật tại thời điểm $t(s)$. Hỏi khoảng thời gian kể từ khi bắt đầu vật được ném đến lúc chạm đất xấp xỉ bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Câu 17: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các phương tiện giao thông (trừ xe hai bánh) khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu $1m$. Một ô tô đang chạy với vận tốc $20m/s$ bỗng gặp một xe bán tải đang dừng đèn đỏ nên ô tô hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu diễn bởi công thức $v(t)=20-5t$ (m/s). Hỏi rằng để hai xe đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại, ô tô cần phải hãm phanh khi cách xe bán tải một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

Câu 18: Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái xe phát hiện có hàng rào chắn ngang đường ở
phía trước cách xe 45 m (tính từ đầu xe tới hàng rào) nên người lái đạp phanh. Từ thời điểm đó, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+20\ (\text{m/s})$, trong đó t là thời gian được tính từ lúc người lái đạp phanh. Khi xe dừng hẳn, khoảng cách từ xe đến hàng rào là bao nhiêu?

Câu 19: Giả sử nhiệt độ (tính bằng $°\text{C}$) tại thời điểm t giờ trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa ở một địa phương vào một ngày nào đó được mô hình hoá bởi hàm số $T(t)=20+1,5(t-6)$, $6\le t\le 12$. Tìm nhiệt độ trung bình vào ngày đó trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa.

Câu 20: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tíc1458h nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=6at^2+2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90m^3$, sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504m^3$. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây (đơn vị m^3).

Câu 21: Một quần thể vi khuẩn ban đầu gồm 500 vi khuẩn, sau đó bắt đầu tăng trưởng. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t, trong đó t tính theo ngày $(0\le t\le 10)$. Tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn đó cho bởi hàm số $P'(t)=k\sqrt{t},$ trong đó k là hằng số. Sau một ngày, số lượng vi khuẩn của quần thể đó đã tăng lên thành 600 vi khuẩn. Tính số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 7 ngày (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

(*Nguồn: R. Larson and* ***B.*** *Edwards, Calcucus 10e, Cengage 2014*).

Câu 22: Người ta truyền nhiệt cho một bình nuôi cấy vi sinh vật từ $1^\circ C$. Tốc độ tăng nhiệt độ của bình tại thời điểm *t* phút $(0\le t\le 5)$ được cho bởi hàm số $f(t)=3t^2$ ($^\circ C$/phút). Biết rằng nhiệt độ của bình đó tại thời điểm *t* là một nguyên hàm của hàm số $f(t)$, tìm nhiệt độ của bình tại thời điểm 3 phút kể từ khi truyền nhiệt.

Câu 23: Tốc độ tăng trưởng của một đàn gấu mèo tại thời điểm *t* tháng kể từ khi người ta thả 100 cá thể đầu tiên vào một khu rừng được ước lượng bởi công thức $P'(t)=8t+30$ (con/tháng), với $P(t)$ là số lượng cá thể trong đàn tại thời điểm t tháng tương ứng (nguồn: Chris Kirkpatrick, Barbara Alldred, Crystal Chilvers, Beverly Farahani, Kristina Farentino, Angelo Lillo, Ian Macpherson, John Rodger, Susanne Trew, Advanced Function, Nelson 2012). Dựa vào tốc độ tăng trưởng đã cho, hãy ước tính số cá thể của đàn gấu mèo này tại thời điểm 3 tháng kể từ khi chúng được thả vào rừng.

Câu 24: Nhằm tri ân người dân Bình Thuận đã luôn tin tưởng, đồng hành với doanh nghiệp, Tập đoàn Nova đã tổ chức ngày hội "Cảm ơn Bình Thuận" vào ngày 10/07/2024. Trong chuỗi sự kiện đặc biệt này, tất cả người dân địa phương đều được miễn phí vé vào cổng, thỏa thích tận hưởng các trò chơi, tham quan các công trình kỳ thú, ấn tượng tại 05 công viên chủ đề được đầu tư, xây dựng hoành tráng với hàng trăm tiện ích.

Gọi $B(t)$ là hàm số biểu thị số lượng khách tham quan sau t giờ mở cửa. Khi đó tốc độ thay đổi lượng khách tham quan trong ngày được biểu diễn bằng hàm số $B'(t)=4t^3-3t^2+200$, trong đó *t* tính bằng giờ ($0\le t\le 8$), $B'(t)$ tính bằng khách/giờ. Sau 2 giờ đã có 1200 người có mặt. Hỏi sau 6 giờ lượng khách tham quan là bao nhiêu người?

Câu 25: Chủ một trung tâm thương mại muốn cho thuê một số gian hàng như nhau. Người đó muốn cho thuê mỗi gian hàng với giá là x triệu đồng $(x>0)$. Khi đó doanh thu của cửa hàng được biểu diễn theo hàm số $T(x)$. Tốc độ thay đổi doanh thu từ các gian hàng đó được biểu diễn bởi hàm số $T'(x)=-10x+200$, trong đó $T'(x)$ tính bằng triệu đồng. Biết rằng nếu giá thuê cho mỗi gian hàng là 10 triệu đồng thì doanh thu là 1800 triệu đồng. Tìm giá trị của x để người đó có doanh thu là cao nhất?

Câu 26: Tốc độ $v(m/s)$ của một thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức:

$$v(t)=\begin{cases} t, & 0\le t\le 2 \\ 2, & 2<t\le 20 \\ 12-0,5t, & 20<t\le 24 \end{cases}$$

Tính quãng đường chuyển động và tốc độ trung bình của thang máy.

Câu 27: Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t)=160-10t\,(m/s)$. Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=0$ đến thời điểm mà vật dừng lại.

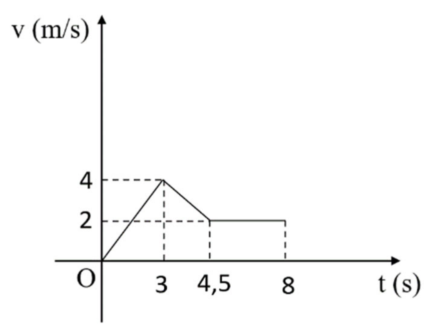
Câu 28: a) Cường độ dòng điện chạy trong cuộn dây là $y=I(t)$ (A). Cho $0<a<b$ và $I(t)>0$ với mọi $t\in[a;b]$. Hãy giải thích vì sao $\int_a^b I(t)\mathrm{d}t$ biểu thị điện lượng (*C*) đã phóng qua cuộn dây trong khoảng thời gian từ a đến b (a,b tính theo giây).

b) Áp dụng công thức ở câu a) để giải bài toán sau: Cường độ dòng điện chạy trong cuộn dây là $I=2\sin(t)(A)$. Tính điện lượng (*C*) phóng ra trong cuộn dây khoảng thời gian từ thời điểm $t=0(s)$ đến thời điểm $t=\frac{\pi}{2}(s)$.

Câu 29: Một vật chuyển động với vận tốc được cho bởi đồ thị ở hình vẽ

a) Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giây đầu tiên.

b) Tính quãng đườngvà vật di chuyển được trong 8 giây đầu tiên.

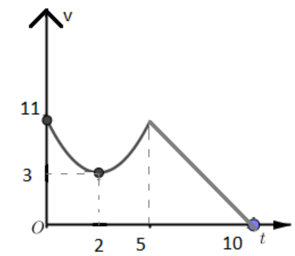


Câu 30: Ở nhiệt độ $37^{\circ}C$, một phản ứng hóa học từ chất A, chuyển hóa thành sản phẩm chất B theo phương trình: A→**B.** Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị mol L^{-1}) tại thời gian x (giây), $y(x)>0$ với $x>0$ thỏa mãn hệ thức $y'(x)=8\ln 3.10^{-3}x$ với $x>0$.

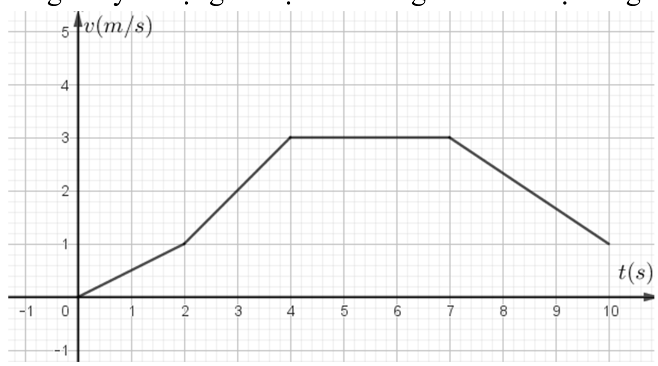
a) Xét hàm số $f(x)=\log_3 y(x)$ với $x>0$. Hãy tính $f'(x)$ từ đó tìm hàm số $f(x)$.

b) Giả sử ta tính nồng độ trung bình chất A (đơn vị mol L^{-1}) từ thời điểm a (giây) đến thời điểm b (giây) với $0<a<b$ theo công thức $\frac{1}{b-a}\int_a^b y(x)\mathrm{d}x$. Xác định nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 10 giây đến thời điểm 20 giây.

Câu 31: Một chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường Parabol khi $0 \le t \le 5(s)$ và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5 \le t \le 10(s)$. Biết đỉnh Parabol là $I(2,3)$. Hỏi quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0 \le t \le 10(s)$ là bao nhiêu mét?



Câu 32: Cho hình vẽ dưới đây là đồ thị vận tốc $v(t)$ của một vật ($t = 0$ là thời điểm vật bắt đầu chuyển động). Tính quãng đường chuyển động và vận tốc trung bình của vật 10 giây đầu tiên.

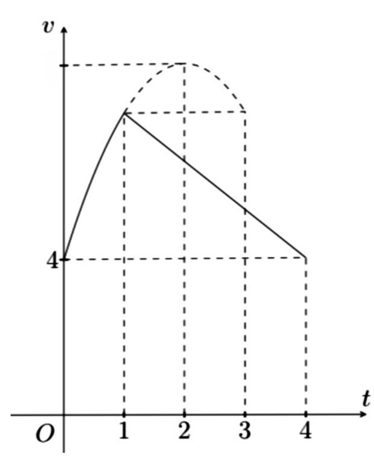


Câu 33: Khảo sát chuyển động của xe khách A trong 30 phút trên một quãng đường ta thu được kết quả: vận tốc $v(\text{m/phut})$ của xe khách theo thời gian t (phút) được biểu diễn bởi hàm số

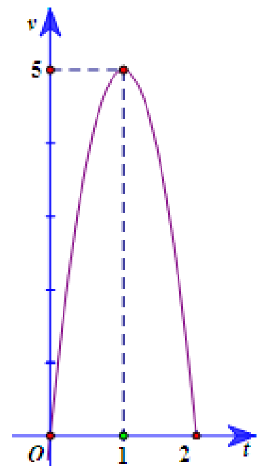
$$v(t) = \begin{cases} 100t, & 0 \le t \le 10 \\ 20t + 800, & 10 < t \le 20 \\ -10\text{t} + 1400, & 20 < t \le 30 \end{cases}$$

Tính quãng đường chuyển động và vận tốc trung bình của xe khách trong 30 phút đã khảo sát.

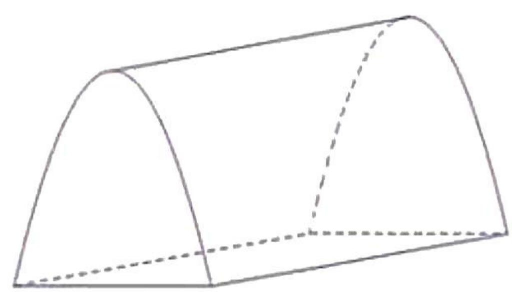
Câu 34: Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc. . phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc như hình vẽ bên.Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;10)$ và trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại vật chuyển động chậm dần đều. Tính quãng đường S mà vật đi được trong 4 giờ đó.



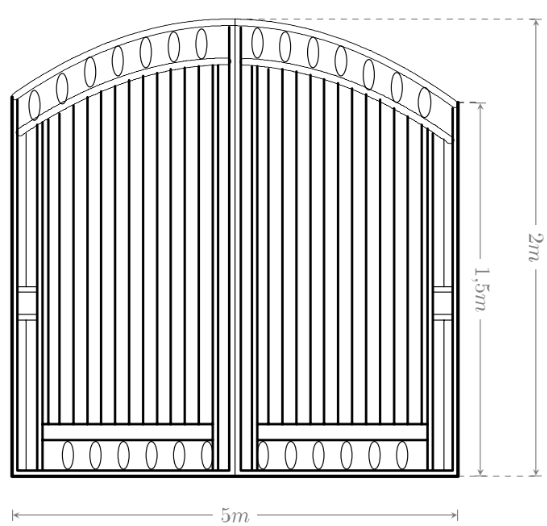
Câu 35: Một người chạy trong 2 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là 1 phần của đường Parabol với đỉnh $I\left(1;5\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung Ov như hình vẽ. Tính quãng đường S người đó chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân).



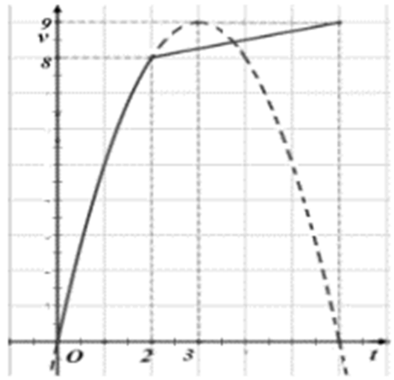
Câu 36: Để chuẩn bị cho buổi dã ngoại, nhóm du lịch dự định dựng một cái lều trại có dạng như hình vẽ. Biết rằng mặt trước và mặt sau của trại là hai parabol bằng nhau, nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau và cùng vuông góc với mặt nền. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước chiều rộng là $4m$ (lối vào lều), chiều dài là $6m$, đỉnh parabol cách nền $3m$. Tính thể tích phần không gian bên trong lều trại.



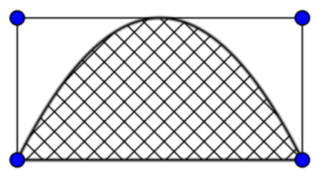
Câu 37: Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá 1m^2 cửa rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng nghìn).



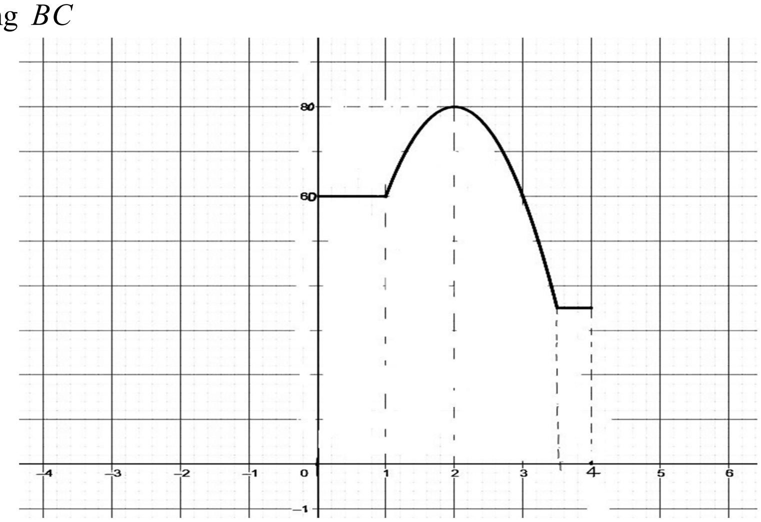
Câu 38: Một vật chuyển động trong 6 giờ với vận tốc $v\left(km/h\right)$ phụ thuộc vào thời gian $t\left(h\right)$ có đồ thị như hình bên dưới. Trong khoảng thời gian 2 giờ từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị là một phần đường Parabol có đỉnh $I\left(3;9\right)$ và có trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại, đồ thị vận tốc là một đường thẳng có hệ số góc bằng $\frac{1}{4}$. Quảng đường s mà vật di chuyển được trong 6 giờ là $\frac{a}{b}$ $,\left(a,b\right)=1$ .Khi đó $a-b$ bằng bao nhiêu?



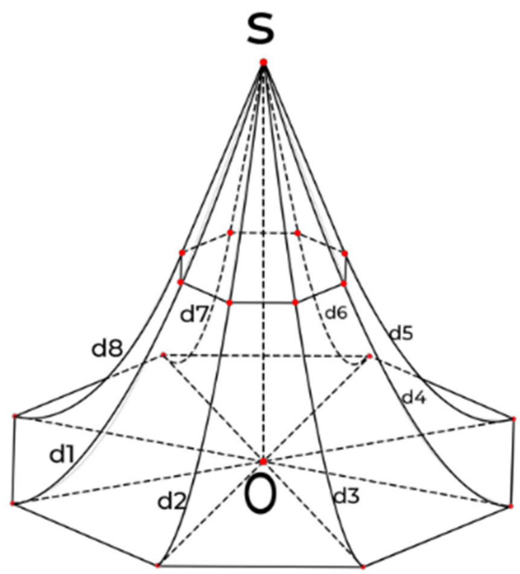
Câu 39: Bạn An có các tấm thẻ hình chữ nhật có kích thước khác nhau nhưng có cùng chu vi là $6cm$. Trên mỗi tấm thẻ An vẽ một hình parabol sao cho đỉnh của parabol trùng với trung điểm một cạnh của tấm thẻ như hình vẽ. Hỏi diện tích của hình parabol lớn nhất mà An vẽ được bằng bao nhiêu xăng ti mét vuông?



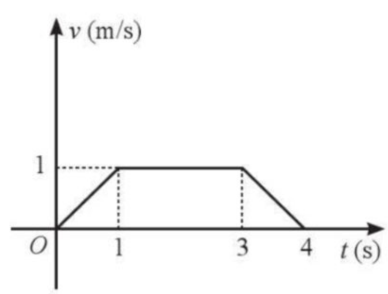
Câu 40: Một ô tô đi từ tỉnh A đến D thì phải đi qua đoạn đường BC hết $4,5$ giờ. Ô tô đó đi với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc như hình vẽ bên. Trong khoảng thời gian $1h$, ô tô đi từ tỉnh B có đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục Ox và trong $2,5h$ tiếp theo đồ thị ô tô đó chuyển động là một phần của Parabol có đỉnh $I(2;80)$ và trục đối xứng song song với trục Oy. Khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục Ox. Tính đoạn đường BC



Câu 41: Gia đình ông Bình xây một cái chòi hình bát giác, trong đó mái chòi (H) có dạng hình "chóp bát giác cong đều" có trần bằng gỗ như hình vẽ bên. Đáy của (H) là một hình bát giác đều có cạnh là $a = \frac{3\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{\sqrt{2}+2}(m)$ Chiều cao $SO = 6m$ (SO vuông góc với mặt phẳng đáy). Các cạnh bên của (H) là các sợi dây thép $d_1;d_2;d_3;d_4;d_5;d_6;d_7;d_8$ nằm trên các đường parabol có trục đối xứng song song với SO. Giả sử giao tuyến (nếu có) của (H) với mặt phẳng (α) vuông góc với SO là một bát giác đều và khi (α) khi qua trung điểm của SO thì bát giác đều có cạnh $b = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{\sqrt{2}+2}(m)$. Tính thể tích phần không gian nằm bên trong mái chòi (H) đó.



Câu 42: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)$ được cho bởi đồ thị như hình vẽ



Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 1\ (s)$ là $3(m/s)$.		
b)	Hàm số $v(t)$ được cho bởi công thức $v(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 1, & 1 \le t < 3 \\ -t+4, & 3 \le t \le 4 \end{cases}$.		
c)	Quãng đường vật đi được từ lúc $t = 1(s)$ đến lúc $t = 3(s)$ là $2m$.		
d)	Quãng đường vật đi được trong 4 giây đầu tiên là $3m$.		

Câu 43: Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 16\ (m/s)$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 3t\ (m/s^2)$.

	Khẳng định	Đúng	Sai
a)	Gọi $v(t)$ là vận tốc của chất điểm ở thời điểm t thì $v(t)$ là một nguyên hàm của $a(t) = t^2 + 3t$.		
b)	$v(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{3}{2}t^2 + 10$.		
c)	Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 2(s)$ là $70(m/s)$.		
d)	Quãng đường vật đi được trong 4 giây đầu tiên kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là $\frac{352}{3}\ (m)$.		

Câu 44: Một công trình xây dựng dự kiến hoàn thành trong 50 ngày. Gọi $M(t)$ là số ngày công được tính đến hết ngày thứ t (kể từ khi khởi công công trình). Trong kinh tế xây dựng, người ta đã biết rằng $M'(t) = m(t)$ với $m(t)$ là số lượng công nhân được sử dụng tại thời điểm t. Biết rằng

$$m(t) = 100 + 8\sqrt{t} - 2t \text{ (với } 0 \le t \le 50\text{)}.$$

	Khẳng định	Đúng	Sai
a)	Có 72 công nhân được sử dụng vào ngày thứ 49.		
b)	Số công nhân được sử dụng nhiều nhất vào ngày thứ 4.		
c)	Trong 10 ngày đầu tiên, công trình đã cần hơn 1000 ngày công.		
d)	Tổng cộng cần 4000 ngày công để hoàn thành công trình xây dựng đó theo dự kiến.		

Câu 45: Sau khi xuất phát, một ô tô di chuyển với tốc độ $v(t) = 2t - 0,03t^2\ \ (0 \le t \le 10)$, trong đó $v(t)$ tính bằng m/s; thời gian t tính bằng giây với $t = 0$ là thời điểm xe xuất phát.
Các mệnh đề sau đúng hai sai?

	Khẳng định	Đúng	Sai
a)	Vận tốc của xe tại thời điểm $t = 1(s)$ là $1,97 m/s$		
b)	Giả sử $s(t)$ là quãng đường ô tô di chuyển được theo thời gian t. Khi đó $s(t) = v'(t)$		
c)	Quãng đường vật đi được từ thời điểm $t = 0(s)$ đến thời điểm $t = 10(s)$ là $90(m)$		
d)	Tốc độ trung bình của xe trong khoảng thời gian $0 \le t \le 10$ bằng $9(m/s)$		

Câu 46: Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động với vận tốc $v(t) = -3t^2 + 12t + 1\ (m/s)$, $s(t)$ là quãng đường chuyển động của chất điểm theo thời gian t(giây) Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng hay sai?

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ là $v(2) = 1$(m/s)		
b)	Trong 5 giây đầu tiên, vận tốc lớn nhất của chất điểm là 3 (m/s)		
c)	Trong khoảng thời gian từ $t = 2$ đến $t = 5$ vận tốc của chất điểm giảm dần		
d)	Quãng đường chuyển động của chất điểm trong 5 giấy đầu tiên là $30(m)$		

Câu 47: Để tham dự hội chợ xuân người ta dự định dựng một lều trại có dạng parabol, với kích thước: nền trại là một hình chữ nhật ABCD có chiều rộng là 3 mét, chiều sâu là 6 mét và trải thảm, đỉnh I của parabol cách mặt đất là 3 mét. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng hay sai?

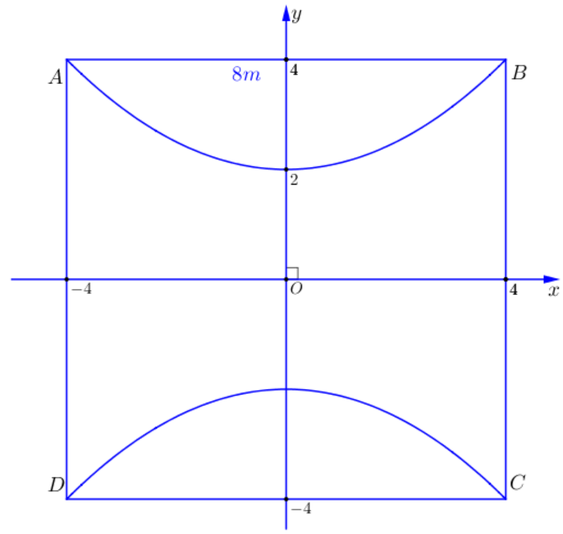
Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Diện tích thảm làm nền là $18m^2$		
b)	Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho: O là trung điểm của cạnh AB, A, B thuộc trục hoành và I thuộc trục tung, Tọa độ các điểm $A\left(\frac{-3}{2};0\right), B\left(\frac{3}{2};0\right), I(0;3)$		
c)	Phương trình của parabol là : $y = -\frac{4}{3}x^2 + 6$		
d)	Vậy thể tích phần không gian phía trong trại là $V = 36$		

Câu 48: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t phút. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 phút thì thể tích nước trong bể là $90m^3$, sau 6 phút thì thể tích nước trong bể là $504m^3$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng hay sai?

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	$h(t) = \int (6at^2 + 2bt)\,dt$		
b)	$h(3) = \int_0^3 (6at^2 + 2bt)\,dt = 90$		
c)	a, b là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 54a + 9b = 90 \\ 432a + 36b = 504 \end{cases}$		
d)	Sau 9 phút thể tích nước trong bể là: $V = 1460m^3$		

Câu 49: Một người nông dân có một mảnh đất hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $8m$. Ông ta định chia mảnh đất thành ba phần, bởi các parabol đi qua các đỉnh của hình vuông như hình vẽ, biết rằng đỉnh của parabol cách cạnh hình vuông $2m$. Ông dự định trồng hoa trên phần diện tích giới hạn bởi các parabol và cạnh hình vuông, trồng cỏ trên phần diện tích còn lại.

Chọn hệ trục Oxy sao cho $A(-4;4)$, $B(4;4)$, $C(4;-4)$, $D(-4;-4)$.



a) Phương trình của hai parabol là $y=\frac{x^2}{8}+2$ và $y=-\frac{x^2}{8}-2$.

b) Diện tích trồng hoa bằng $\frac{44}{3}m^2$.

c) Tỉ số diện tích đất trồng hoa và trồng cỏ bằng $\frac{11}{37}$.

d) Nếu chi phí mua cây giống hoa là 100.000 đồng/m^2, cỏ là 70.000 đồng/m^2 thì chi phí mua cây giống cho cả khu vườn là 4900000 đồng.

Câu 50: Tại một nhà máy, gọi $C(x)$ là tổng chi phí (tính theo triệu đồng) để sản xuất x tấn sản phẩm A trong một tháng. Khi đó, đạo hàm $C'(x)$, gọi là chi phí cận biên, cho biết tốc độ gia tăng tổng chi phí theo lượng gia tăng sản phẩm được sản xuất. Giả sử chi phí cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức $C'(x)=5-0,06x+0,00072x^2$ với $0\le x\le 150$. Biết rằng $C(0)=30$ triệu đồng, gọi là chi phí cố định.

a) $C(100)-C(0)=\int_0^{100}C'(x)\mathrm{d}x$.

b) $\int_0^{100}C'(x)\mathrm{d}x=5\int_0^{100}\mathrm{d}x-0,06\int_0^{100}x\,\mathrm{d}x+0,00072\int_0^{100}x^2\,\mathrm{d}x$.

c) $5\int_0^{100}\mathrm{d}x-0,06\int_0^{100}x\,\mathrm{d}x+0,00072\int_0^{100}x^2\,\mathrm{d}x=5\Big|_0^{100}-0,03x\Big|_0^{100}+0,00024x\Big|_0^{100}$.

d) $C(100)=440$.

Câu 51: Một chất điểm bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0, sau 4 giây chuyển động thì gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t) = -\dfrac{5}{2}t + a\ (m/s),\ (t \geq 4)$ cho đến khi dừng hẳn. Quãng đường chất điểm đi được kể từ lúc chuyển động đến khi dừng hẳn là. $80m$. Các khẳng định sau đúng hay sai ?

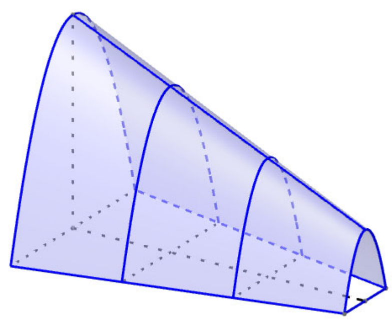
a) Quãng đường chất điểm di chuyển được sau 4(giây) bằng : $S(4) = 4v_o\ (m)$.

b) Quãng đường chất điểm di chuyển được sau 5(giây) bằng : $S(5) = \int_0^5 v(t)dt\ (m)$

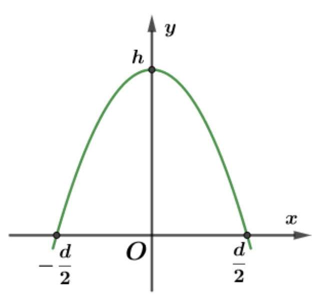
c) $v_o < 8(m/s)$.

d) Vận tốc trung bình v_{tb} của chất điểm trong khoảng thời gian từ 3giây đến 7 giây kể từ lúc bắt đầu thỏa mãn $v_{tb} < 8(m/s)$

Câu 52: Một đường hầm có mô hình như bên dưới. Biết rằng đường hầm mô hình có chiều dài 5 (cm). Khi cắt mô hình này bởi các mặt phẳng vuông góc với đáy của nó, ta được thiết diện là một hình parabol có độ dài đáy gấp đôi chiều cao của parabol. Chiều cao của mỗi thiết diện parabol cho bởi công thức $y = 3 - \dfrac{2}{5}x$ (cm), với x (cm) là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình đến mặt phẳng chứa thiết diện. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?



a)Nếu một hình parabol có đáy là d và chiều cao h như hình vẽ thì phương trình của parabol là $y = -\dfrac{4h}{d^2}x^2 + h$.

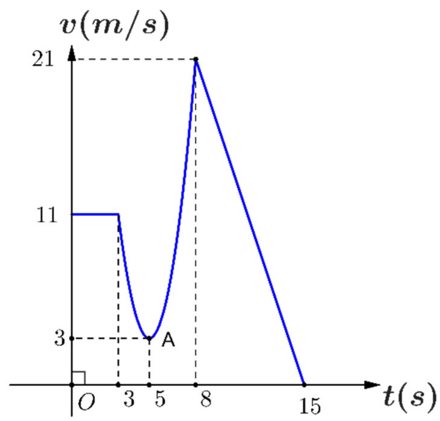


b) Diện tích của hình parabol có đáy là d và chiều cao h là $S = \dfrac{2}{3}dh$.

c) Thể tích của hầm là $29,889m^3$

d) Để hoàn thành đường hầm từ lúc đào núi đến lúc hoàn thiện đưa vào sử dụng thì giá mỗi mét khối là 990 triệu đồng. Khi đó chi phí làm hầm là khoảng 29 tỷ năm trăm chín mươi ba triệu đồng.

Câu 53: Chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường thẳng khi $0 \le t \le 3(s)$ và $8 \le t \le 15(s)$ và $v(t)$ có dạng đường Parabol khi $3 \le t \le 8(s)$ (như hình vẽ)



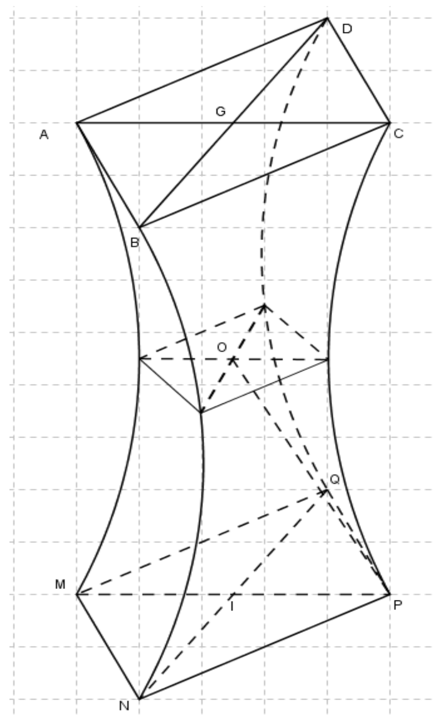
a) Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3$ là $v(3) = 11(m/s)$.

b) Quãng đường chất điểm di chuyển được trong 3 giây đầu tiên là: $S_1 = \int_0^3 11dt\ (m)$

c) Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian từ 8 giây đến 15 giây bằng $73,5(m)$
.

d) Vận tốc trung bình v_{tb} của chất điểm trong khoảng thời gian từ 3 đến 8 giây thỏa mãn $v_{tb} < 7\ (m/s)$

Câu 54: Một tòa nhà có kiến cấu như hình bên dưới. Biết rằng chiều cao tòa nhà là $48\ (\text{m})$. Cắt ngôi nhà bởi một mặt phẳng song song với mặt đất thì được thiết diện là các hình vuông. Khi cắt mô hình này bởi các mặt phẳng vuông góc với đáy của nó và đi qua đường chéo hình vuông hai đáy ta được thiết diện là một hình đối xứng $ACPM$ (AM, CP là hai cung tròn). Gọi O là tâm thiết diện hình vuông chính giữa tòa nhà như hình vẽ, OP là tiếp tuyến của cung tròn CP. Biết $OP = 30(m)$. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?



a)Diện tích đáy tòa nhà $S_{ABCD} = 1000(m^2)$.

b)Diện tích thiết diện hình vuông chính giữa (nhận O là tâm) bằng $200(m^2)$.

c)Diện tích thiết diện $ACPM$ bằng $1200(m^2)$.

d)Thể tích tòa nhà là $31295\ (m^3)$.

CHƯƠNG III

NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI. TÍCH PHÂN

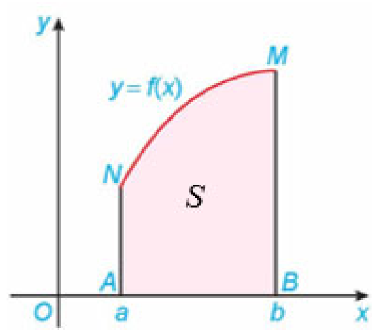
I. LÝ THUYẾT.

1) KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN

a) Diện tích hình thang cong:

Định lý 1:

Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và không âm trên đoạn $\left[a;b\right]$, thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ là $S=F(b)-F(a)$, trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$.



b) Định nghĩa tích phân: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$. Nếu $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì hiệu số $F\left(b\right)-F\left(a\right)$ được gọi là tích phân của hàm số $f\left(x\right)$ từ a đến b và kí hiệu là $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Ta gọi: a là cận dưới, b là cận trên, f là hàm số dưới dấu tích phân, $f\left(x\right)\mathrm{d}x$ là biểu thức dưới dấu tích phân, x biến số lấy tích phân.

Chú ý:

a) Hiệu số $F\left(b\right)-F\left(a\right)$ còn được kí hiệu là $F\left(x\right)\Big|_a^b$. Khi đó:

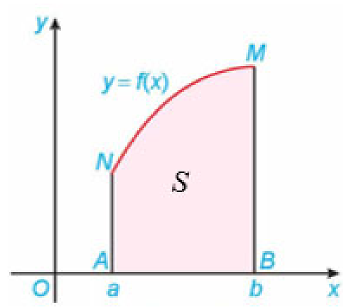
$$\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left(x\right)\Big|_a^b=F\left(b\right)-F\left(a\right).$$

b) Nếu $a<b$ thì ta gọi $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$ là tích phân của f trên đoạn $\left[a;b\right]$.

c) Trong trường hợp $a=b$ hoặc $a>b$ ta quy ước: $\int\limits_a^a f\left(x\right)\mathrm{d}x=0;\quad \int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f\left(x\right)\mathrm{d}x$

d) Tích phân ***không phụ thuộc và cách kí hiệu biến*** (điều này sẽ mang lại lợi ích cho ta để tính một số tích phân đặc biệt), tức là $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = ... = F(b) - F(a)$.

Ý nghĩa hình học của tích phân:



Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Vậy $S = \int_a^b f(x)dx$

2. TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên $[a;b]$. Khi đó ta có:

1) $\int_a^b k.f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

2) $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

3) $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (a < c < b)$ (*chèn cận* c)

Giá trị trung bình của hàm số liên tục *f(x)* trên đoạn [*a*; *b*] được định nghĩa là

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1: Một chiếc xe đang chuyển động thẳng đều với vận tốc 30 m/s thì người lái đạp phanh khiến vận tốc của xe thay đổi theo thời gian t (giây) được tính theo công thức $v(t) = 30 - 5t \quad (0 \le t \le 6)$. Tính quãng đường di chuyển của xe trong khoảng thời gian tính từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn.

Lời giải

Quãng đường di chuyển của xe là: $s = \int_0^6 v(t)\mathrm{d}t = \int_0^6 (30 - 5t)\mathrm{d}t = \left(30t - \frac{5t^2}{2}\right)\Bigg|_0^6 = 90\,(\mathrm{m})$

Câu 2: Một ô tô đang chạy với vận tốc $15(\text{m/s})$ thì người lái hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+15(\text{m/s})$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

Lời giải

Khi dừng hẳn thì $v(t)=-5t+15=0 \Leftrightarrow t=3$.

Từ lúc hãm phanh đến khi dừng lại, xe di chuyển được:

$$s=\int_0^3 v(t)\mathrm{d}t=\int_0^3(-5t+15)\mathrm{d}t=\left.(-\frac{5}{2}t^2+15t)\right|_0^3=22,5\,\text{m}.$$

Câu 3: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)=3t^2+t\ (\text{m/s}^2)$. Vận tốc ban đầu của vật là $2\,(\text{m/s})$. Hỏi vận tốc của vật là bao nhiêu sau khi chuyển động với gia tốc đó được 2 s.

Lời giải

Vận tốc chuyển động $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int(3t^2+t)\mathrm{d}t=t^3+\frac{1}{2}t^2+C$.

Chọn gốc thời gian lúc bắt đầu tăng tốc thì $v(0)=2 \Rightarrow C=2 \Rightarrow v(t)=t^3+\frac{1}{2}t^2+2$.

Khi đó tại thời điểm 2s thì $v(2)=12\text{ m/s}$.

Câu 4: Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

Lời giải

Ta có $-2t+10=0 \Leftrightarrow t=5 \Rightarrow$ Thời gian tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi dừng hẳn là 5 giây. Vậy trong 8 giây cuối cùng thì có 3 giây ô tô chuyển động với vận tốc $10m/s$ và 5 giây chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10(m/s)$.

Khi đó quãng đường ô tô di chuyển là $S=3.10+\int_0^5(-2t+10)dt=30+25=55m$.

Câu 5: Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động với vận tốc $v(t)=-3t^2+12t+1\ (m/s)$, Giả sử $\mathrm{S}(t)$ là quãng đường chuyển động của chất điểm theo thời gian t(giây). Tính quãng đường mà vật di chuyển trong 5 giây đầu tiên,

Lời giải

Ta có $\mathrm{S}'(t)=v(t)$ Quãng đường mà vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $t=0(\mathrm{s})$ đến $t=5\,(\mathrm{s})$ là

$$S=\int_0^5(-3\mathrm{t}^2+12\mathrm{t}+1)dt=40(m).$$

Câu 6: Một vật di chuyển với gia tốc $a(t)=-\frac{20}{(1+2t)^2}\ (m/s^2)$ Khi $t=0$thì vận tốc của vật là $v(t)=30\ (m/s)$. Tính quãng đường vật đó đi được sau 3 giây đầu tiên?

Lời giải

Ta có $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=-\int\frac{20}{(1+2t)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{10}{1+2t}+C$.

Mà tại thời điểm $t=0$ vật có vận tốc bằng $v(t)=30\ (m/s)$ nên ta có $v(0)=30$ hay $C=20$.

Vậy $v(t)=\dfrac{10}{1+2t}+20$.

Quãng đường vật đi được từ thời điểm $t=0$ (s) đến thời điểm $t=3$(s) là

$\int_0^3 v(t)\mathrm{d}t=\int_0^3(\dfrac{10}{1+2t}+20)\,\mathrm{d}t\approx 70\,(\mathrm{m})$.

Câu 7: Kì nghỉ hè lớp 11 bạn Mai ngồi trên máy bay đi du lich từ Hà Nội vào Nha trang với vận tốc chuyển động của máy báy là $v(t)=3t^2+4\ (m/s)$. Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 4 đến giây thứ 10?

Lời giải

Quãng đường mà vật di chuyển trong khoảng thời gian từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là

$S=\int_4^{10}(3t^2+4)\mathrm{d}t=960(m)$.

Câu 8: Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất lên theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu $25\ (m/s)$. Gia tốc trọng trường là $9{,}8\ (m/s^2)$

a) Sau bao lâu thì viên đạn đạt tới độ cao lớn nhất?

b) Tính quãng đường viên đạn đi được từ lúc bắn lên cho đến khi chạm đất (tính chính xác đến hàng phần trăm)

Lời giải

a) Chọn chiều dương hướng từ mặt đất lên. Gọi v (t) là vận tốc của viên đạn. Ta có

$v'(\mathrm{t})=a(\mathrm{t})=-9{,}8$

Suy ra $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int -9{,}8\ \mathrm{d}t=-9{,}8t+C$. Vì $v(0)=25$ hay $C=25$.

Vậy $v(t)=-9{,}8t+25$

Gọi T là thời điểm viên đạn đạt độ cao lớn nhất. Tại đó viên đạn có vận tốc bằng 0.

$v(\mathrm{T})=-9{,}8T+25=0\Rightarrow T=\dfrac{25}{9{,}8}\approx 2{,}55\,(\mathrm{s})$

b) Gọi S là quãng đường viên đạn đi được từ lúc bắn lên tới vị trí cao nhất. khi đó

$S=\int_0^{2{,}55}(-9{,}8t+25)\mathrm{d}t\approx 31{,}79(m)$

Quãng đường viên đạn đi được từ lúc bắn lên cho đến khi rơi xuống đất là $2S\approx 63{,}58(m)$

Câu 9: Tại một nhà máy sản xuất gọi $C(x)$ là tổng chi phí tính theo triệu đồng để sản xuất x(tấn) sản phẩm A trong một tháng. Khi đó đạo hàm $C'(x)$ gọi là chi phí cận biên, cho biết tốc độ tăng tổng chi phí theo lượng sản phẩm được sản xuất. Giả sử chi phí cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy ước lượng bởi công thức $C'(x)=5-0{,}06x+0{,}00072x^2$ với $0\le x\le 150$. Biết rằng $C(0)=30$ triệu đồng gọi là chi phí cố định. Tính tổng chi phí khi nhà máy sản xuất 100 tấn sản phẩm A trong một tháng.

Lời giải

$$C(100)-C(0)=\int_0^{100} C'(x)dx=\int_0^{100}(5-0{,}06x+0{,}00072x^2)dx=440$$

$C(100)=440+30=470$ (triệu đồng)

Tổng chi phí khi nhà máy sản xuất 100 tấn sản phẩm A trong một tháng là 470 (triệu đồng).

Câu 10: Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t),\mathrm{t}\ge 0$ trong đó thời gian t

được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)=\dfrac{25000e^{-t}}{\left(1+5e^{-t}\right)^2}$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Biết rằng sau 2 năm đạt doanh số 2148 sản phẩm. Tính doanh số trong vòng 5 năm của sản phẩm?

Lời giải

$$f(5)-f(2)=\int_2^5 f'(t)dt=\int_2^5 \frac{25000e^{-t}}{\left(1+5e^{-t}\right)^2}dt\approx 1855 \Rightarrow f(5)=1855+2148\approx 4003$$

Vậy doanh số trong vòng 5 năm của sản phẩm là 4003

Câu 11: Một ô tô đang chạy với tốc độ $20(m/s)$ thì gặp chướng ngại vật, người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+20(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét (m)?

Lời giải

Khi ô tô dừng hẳn thì: $v(t)=0 \Leftrightarrow -5t+20=0 \Leftrightarrow t=4(s)$.

Vậy từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được: $s=\int_0^4(-5t+20)dt=40(m)$.

Câu 12: Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì gặp chướng ngại vật, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

Lời giải

Khi ô tô dừng hẳn thì vận tốc bằng 0, nên ta có $-2t+10=0 \Leftrightarrow t=5 \Rightarrow$ Thời gian tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi dừng hẳn là 5 giây.

Vậy trong 8 giây cuối cùng thì có 3 giây ô tô chuyển động với vận tốc $10m/s$ và 5 giây chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10(m/s)$.

Khi đó quãng đường ô tô di chuyển trong 8 giây cuối là

$$S = 3.10 + \int_0^5 (-2t+10)dt = 30 + 25 = 55m.$$

Câu 13: Biết rằng nhiệt độ tại thời điểm t giờ trong khoảng thời gian từ 5 giờ sáng đến 12 giờ trưa ở thành phố A vào một ngày mùa hạ được xác định bởi hàm số $N(t) = 20 + 1,7(t-5), 5 \le t \le 12$. Tính nhiệt độ trung bình vào ngày đó trong khoảng thời gian từ 5 giờ sáng đến 12 giờ trưa (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

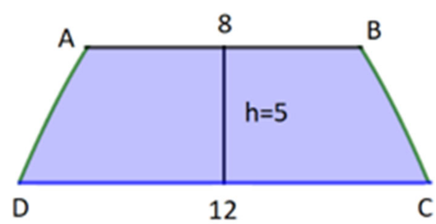
Lời giải

Nhiệt độ trung bình cần tìm là giá trị trung bình của hàm số $N(t)$ trên đoạn [5;12].

Vậy ta có nhiệt độ trung bình cần tìm là:

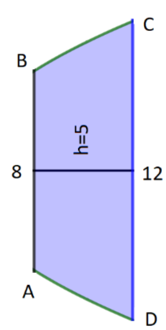
$$\frac{1}{12-5}\int_5^{12}\left[20+1,7(t-5)\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{7}\int_5^{12}(11,5+1,7t)\mathrm{d}t = \frac{1}{7}\left(11,5t + \frac{1,7t^2}{2}\right)\Bigg|_5^{12} \approx 26^\circ$$

Câu 14: Một mảnh đất có hình dạng là hình thang cong có các thông số như hình vẽ, biết phần đường cong là phần đồ thị của hàm số $y = a\sqrt{x}$. Diện tích của mảnh đất đó là bao nhiêu?



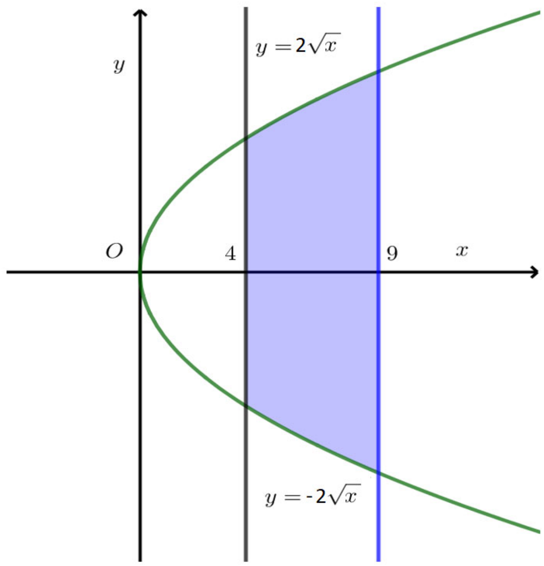
Lời giải

Đưa hình vẽ về dạng của hàm số $y = a\sqrt{x}$:



Chọn hệ trục Oxy với Ox đi qua chính giữa trục của mảnh đất (theo chiều của chiều cao), gốc tọa độ O cách điểm chính giữa của đoạn AB là 4, khi đó ta có: $y_B = 4, y_C = 6$ nên $B(4;4)$, $C(9;6)$.

Do đó, dễ được: $a = 2$



Nên: $S = 2\int\limits_4^9 2\sqrt{x}\mathrm{d}x = \dfrac{152}{3}$.

Câu 15: Một ca nô cao tốc có tốc độ v (km/phút) thay đổi theo thời gian t (phút) như sau:

$$v(t) = \begin{cases} a.t, & 0 \le t < 2, \\ 2 & 2 \le t < 15, \text{ với } a \in \mathbb{R}. \\ 4 - a.t, & 15 \le t \le 20. \end{cases}$$

Biết quãng đường ca nô di chuyển được trong thời gian 20 phút bằng 28,9 km. Giá trị của a bằng bao nhiêu?

Lời giải

Quãng đường ca nô di chuyển trong thời gian 20 phút bằng:

$$S = \int\limits_0^2 atdt + \int\limits_2^{15} 2dt + \int\limits_{15}^{20} (4 - at)\,dt = \left(\frac{at^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 + 2t\Bigg|_2^{15} + \left(4t - \frac{at^2}{2}\right)\Bigg|_{15}^{20}$$

$$= 2a + 26 + (20 - 87,5a) = 46 - 85,5a$$

Vậy $S = 28,9 \Leftrightarrow a = 0,2$

Câu 16: Một vật được ném lên từ độ cao $300m$ với vận tốc được cho bởi công thức $v(t) = -9,81t + 29,43\,(m/s)$. Gọi $h(t)$ (m) là độ cao của vật tại thời điểm $t(s)$. Hỏi khoảng thời gian kể từ khi bắt đầu vật được ném đến lúc chạm đất xấp xỉ bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Lời giải

Ta có $h(t) = \int v(t)\,dt = \int(-9,81t + 29,43)\,dt = \dfrac{-9,81t^2}{2} + 29,43t + C$

Theo giả thiết $h(0) = 300 \Rightarrow c = 300$

Vật chạm đất khi $h(t) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-9,81t^2}{2} + 29,43t + 300 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \approx -5,4 \\ t \approx 11,4 \end{array}\right.$

Do $t > 0$ nên $t \approx 11,4(s)$

Câu 17: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các phương tiện giao thông (trừ xe hai bánh) khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu $1m$. Một ô tô đang chạy với vận tốc $20m/s$ bỗng gặp một xe bán tải đang dừng đèn đỏ nên ô tô hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu diễn bởi công thức $v(t)=20-5t\ (m/s)$. Hỏi rằng để hai xe đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại, ô tô cần phải hãm phanh khi cách xe bán tải một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $v(0)=20\,\text{m/s}$.

Khi xe ô tô dừng hẳn: $v(t)=0 \Leftrightarrow t=4\text{s}$.

Quãng đường từ lúc xe ô tô hãm phanh đến lúc dừng hẳn là $s=\int_0^4(20-5t)\,\mathrm{d}t=\left.\left(20t-\frac{5t^2}{2}\right)\right|_0^4=40(m)$

Do các xe phải cách nhau tối thiểu 1m để đảm bảo an toàn nên khi dừng lại ô tô phải hãm phanh khi cách xe bán tải một khoảng ít nhất là $41m$.

Câu 18: Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái xe phát hiện có hàng rào chắn ngang đường ở
phía trước cách xe 45 m (tính từ đầu xe tới hàng rào) nên người lái đạp phanh. Từ thời điểm đó, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+20\ (\text{m/s})$, trong đó t là thời gian được tính từ lúc người lái đạp phanh. Khi xe dừng hẳn, khoảng cách từ xe đến hàng rào là bao nhiêu?

Lời giải

Xe dừng lại khi $v(t)=0 \Leftrightarrow -5t+20=0 \Leftrightarrow t=4\ (\text{s})$.

Quãng đường xe đi được kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng lại là

$$\int_0^4 v(t)\,dt=\int_0^4(-5t+20)\,dt=\left.\left(20t-\frac{5t^2}{2}\right)\right|_0^4=40\text{ m}$$

Khi xe dừng hẳn, khoảng cách từ xe đến hàng rào là: $45-40=5\text{ m}$.

Câu 19: Giả sử nhiệt độ (tính bằng $°\text{C}$) tại thời điểm t giờ trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa ở một địa phương vào một ngày nào đó được mô hình hoá bởi hàm số $T(t)=20+1,5(t-6),\ 6\le t\le 12$. Tìm nhiệt độ trung bình vào ngày đó trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa.

Lời giải

Ta có: Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ được định nghĩa là $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Do đó, nhiệt độ trung bình vào ngày đó trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa là $\frac{1}{12-6}\int_6^{12}(20+1,5(t-6))\,\mathrm{d}t=24,5\ °\text{C}$.

Câu 20: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tíc1458h nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=6at^2+2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90m^3$, sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504m^3$. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây (đơn vị m^3).

Lời giải

$\int_0^3 \left(6at^2+2bt\right)\mathrm{d}t=90 \Leftrightarrow \left(2at^3+bt^2\right)\Big|_0^3=90 \Leftrightarrow 54a+9b=90$ (1)

$\int_0^6 \left(6at^2+2bt\right)\mathrm{d}t=504 \Leftrightarrow \left(2at^3+bt^2\right)\Big|_0^6=504 \Leftrightarrow 432a+36b=504$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2}{3} \\ b=6 \end{cases}$. Sau khi bơm 9 giây thì thể tích nước trong bể là:

$V=\int_0^9 \left(4t^2+12t\right)\mathrm{d}t=\left(\dfrac{4}{3}t^3+6t^2\right)\Big|_0^9=1458\left(m^3\right)$.

Câu 21: Một quần thể vi khuẩn ban đầu gồm 500 vi khuẩn, sau đó bắt đầu tăng trưởng. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t, trong đó t tính theo ngày $\left(0\le t\le 10\right)$. Tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn đó cho bởi hàm số $P'(t)=k\sqrt{t}$, trong đó k là hằng số. Sau một ngày, số lượng vi khuẩn của quần thể đó đã tăng lên thành 600 vi khuẩn. Tính số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 7 ngày (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).
(*Nguồn: R. Larson and* ***B.*** *Edwards, Calcucus 10e, Cengage 2014*).

Lời giải

Ta có: $P(t)=\int P'(t)dt=\int k\sqrt{t}dt=k.\dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$

Số lượng vi khuẩn của ban đầu của quần thể đó là 500 vi khuẩn hay $P(0)=500 \Leftrightarrow C=500$.

Từ đó suy ra: $P(t)=k.\dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+500.$

Sau một ngày số lượng vi khuẩn của quần thể đó tăng lên thành 600 vi khuẩn hay

$P(1)=600 \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}.k+500=600 \Leftrightarrow k=150.$

Vậy số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t là $P(t)=100.t^{\frac{3}{2}}+500$

Số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 7 ngày là: $P(7)=100.7^{\frac{3}{2}}+500\approx 2352.$

Câu 22: Người ta truyền nhiệt cho một bình nuôi cấy vi sinh vật từ $1^\circ C$. Tốc độ tăng nhiệt độ của bình tại thời điểm *t* phút $\left(0\le t\le 5\right)$ được cho bởi hàm số $f(t)=3t^2$ ($^\circ C$/phút). Biết rằng nhiệt độ của bình đó tại thời điểm *t* là một nguyên hàm của hàm số $f(t)$, tìm nhiệt độ của bình tại thời điểm 3 phút kể từ khi truyền nhiệt.

Lời giải

Gọi $T(t)$ là nhiệt độ của bình tại thời điểm t phút.

Ta có $T(t)=\int f(t)\mathrm{d}t=\int 3t^2\mathrm{d}t=t^3+C$.

Vì người ta truyền nhiệt cho một bình nuôi cấy vi sinh vật từ $1^\circ C$ nên

$$T(0)=1^\circ \Rightarrow C=1 \Rightarrow T(t)=t^3+1.$$

Vậy nhiệt độ của bình tại thời điểm 3 phút kể từ khi truyền nhiệt là $T(3)=3^3+1=28\left(^\circ C\right)$.

Câu 23: Tốc độ tăng trưởng của một đàn gấu mèo tại thời điểm t tháng kể từ khi người ta thả 100 cá thể đầu tiên vào một khu rừng được ước lượng bởi công thức $P'(t)=8t+30$ (con/tháng), với $P(t)$ là số lượng cá thể trong đàn tại thời điểm t tháng tương ứng (nguồn: Chris Kirkpatrick, Barbara Alldred, Crystal Chilvers, Beverly Farahani, Kristina Farentino, Angelo Lillo, Ian Macpherson, John Rodger, Susanne Trew, Advanced Function, Nelson 2012). Dựa vào tốc độ tăng trưởng đã cho, hãy ước tính số cá thể của đàn gấu mèo này tại thời điểm 3 tháng kể từ khi chúng được thả vào rừng.

Lời giải

Ta có $P(t)=\int P'(t)\,\mathrm{d}t=\int(8t+30)\,\mathrm{d}t=4t^2+30t+C.$

Lại có ban đầu người ta thả 100 cá thể gấu mèo:

$$P(0)=100\Rightarrow C=100\Rightarrow P(t)=4t^2+30t+100.$$

Vậy số cá thể của đàn gấu mèo này tại thời điểm 3 tháng kể từ khi chúng được thả vào rừng là

$$P(3)=4.3^2+30.3+100=226 \text{ cá thể.}$$

Câu 24: Nhằm tri ân người dân Bình Thuận đã luôn tin tưởng, đồng hành với doanh nghiệp, Tập đoàn Nova đã tổ chức ngày hội "Cảm ơn Bình Thuận" vào ngày 10/07/2024. Trong chuỗi sự kiện đặc biệt này, tất cả người dân địa phương đều được miễn phí vé vào cổng, thỏa thích tận hưởng các trò chơi, tham quan các công trình kỳ thú, ấn tượng tại 05 công viên chủ đề được đầu tư, xây dựng hoành tráng với hàng trăm tiện ích.

Gọi $B(t)$ là hàm số biểu thị số lượng khách tham quan sau t giờ mở cửa. Khi đó tốc độ thay đổi lượng khách tham quan trong ngày được biểu diễn bằng hàm số $B'(t)=4t^3-3t^2+200$, trong đó t tính bằng giờ ($0\le t\le 8$), $B'(t)$ tính bằng khách/giờ. Sau 2 giờ đã có 1200 người có mặt. Hỏi sau 6 giờ lượng khách tham quan là bao nhiêu người?

Lời giải

Ta có $B(t)=\int B'(t)\,dt=t^4-t^3+200t+C, C\in\mathbb{R}\Rightarrow B(2)=1200\Rightarrow C=792$.

Suy ra $B(t)=t^4-t^3+200t+792$

Sau 6 giờ lượng khách tham quan là $B(6)=3072$ (người).

Câu 25: Chủ một trung tâm thương mại muốn cho thuê một số gian hàng như nhau. Người đó muốn cho thuê mỗi gian hàng với giá là x triệu đồng $(x>0)$. Khi đó doanh thu của cửa hàng được biểu diễn theo hàm số $T(x)$. Tốc độ thay đổi doanh thu từ các gian hàng đó được biểu diễn bởi hàm số $T'(x)=-10x+200$, trong đó $T'(x)$ tính bằng triệu đồng. Biết rằng nếu giá thuê cho mỗi gian hàng là 10 triệu đồng thì doanh thu là 1800 triệu đồng. Tìm giá trị của x để người đó có doanh thu là cao nhất?

Lời giải

Ta có: $T(x)=\int T'(x)\,\mathrm{d}x=\int(-10x+200)\,\mathrm{d}x=-5x^2+200x+C, C\in\mathbb{R}$.

Khi giá cho thuê mỗi gian hàng là 10 triệu đồng thì doanh thu là 1800 triệu đồng nên ta có $T(10)=1800\Rightarrow C=300$.

Vậy $T(x)=-5x^2+200x+300=-5(x-20)^2+2300\le 2300$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=20$.

Suy ra doanh thu cao nhất mà chủ trung tâm thương mại có thể thu về là 2300 triệu đồng và khi đó mỗi gian hàng có giá cho thuê là 20 triệu đồng.

Vậy $x=20$ (triệu đồng).

Câu 26: Tốc độ $v\left(m/s\right)$ của một thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức:

$$v\left(t\right)=\begin{cases} t,\ 0\le t\le 2\\ 2,\ 2<t\le 20\\ 12-0,5t,\ \ 20<t\le 24\end{cases}$$

Tính quãng đường chuyển động và tốc độ trung bình của thang máy.

Lời giải

Quãng đường chuyển động của thang máy là:

$$S=\int\limits_0^{24}v\left(t\right)dt=\int\limits_0^{2}tdt+\int\limits_2^{20}2dt+\int\limits_{20}^{24}\left(12-0,5t\right)dt$$

$$=\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^2+\left.\left(2t\right)\right|_2^{20}+\left.\left(12t-\frac{1}{4}t^2\right)\right|_{20}^{24}=2+40-4+144-140=42\left(m\right)$$

Tốc độ trung bình của thang máy là: $v_{tb}=\frac{S}{t}=\frac{42}{24}=1,75\left(m/s\right)$

Câu 27: Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v\left(t\right)=160-10t\left(m/s\right)$. Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=0$ đến thời điểm mà vật dừng lại.

Lời giải

Vật dừng lại khi $v\left(t\right)=0\Leftrightarrow 160-10t=0\Leftrightarrow t=16$.

Như vậy Quãng đường mà vật di chuyển được trong khoảng thời gian tương ứng là:

$$S=\int\limits_0^{16}v\left(t\right)dt=\int\limits_0^{16}\left(160-10t\right)dt=\left.\left(160t-5t^2\right)\right|_0^{16}=1280\left(m\right)$$

Câu 28: a) Cường độ dòng điện chạy trong cuộn dây là $y=I\left(t\right)$ (A). Cho $0<a<b$ và $I\left(t\right)>0$ với mọi $t\in\left[a;b\right]$. Hãy giải thích vì sao $\int\limits_a^b I\left(t\right)\mathrm{d}t$ biểu thị điện lượng (C) đã phóng qua cuộn dây trong khoảng thời gian từ a đến b (a,b tính theo giây).

b) Áp dụng công thức ở câu a) để giải bài toán sau: Cường độ dòng điện chạy trong cuộn dây là $I=2\sin\left(t\right)\left(A\right)$. Tính điện lượng ($C$) phóng ra trong cuộn dây khoảng thời gian từ thời điểm $t=0\left(s\right)$ đến thời điểm $t=\frac{\pi}{2}\left(s\right)$.

Lời giải

a) Ta đã biết $I\left(t\right)=Q'\left(t\right)$ nên $Q\left(t\right)=\int\limits_a^b I\left(t\right)\mathrm{d}t$ biểu thị điện lượng đã phóng qua cuộn dây trong khoảng thời gian từ a đến b (a,b tính theo giây).

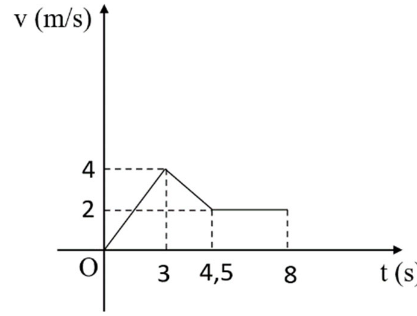
b) Quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=0\left(s\right)$ đến thời điểm

$t=\frac{\pi}{2}\left(s\right)$ là $Q\left(t\right)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}I\left(t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin\left(t\right)\mathrm{d}t=-\frac{2}{1}\left.\cos t\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=-2\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=-2\left(0-1\right)=2\left(C\right)$.

Câu 29: Một vật chuyển động với vận tốc được cho bởi đồ thị ở hình vẽ

a) Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giây đầu tiên.

b) Tính quãng đườngvà vật di chuyển được trong 8 giây đầu tiên.



Lời giải

a) Dựa vào đồ thị trong khoảng thời gian 3 giây vận tốc của chuyển động được xác định là $v(t)=\frac{4}{3}t\,(\text{m/s})$

Ta có quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giây đầu tiên là $s=\int_0^3 \frac{4}{3}t\,dt=\frac{4}{3}t^2\Big|_0^3=12(m)$

b) Dựa vào đồ thị trong khoảng thời gian 1 giây vận tốc của chuyển động được xác định là $v(t)=\frac{4}{3}t\,(\text{m/s})$, khoảng thời gian từ 3 giây đến 4,5 giây vận tốc của chuyển động được xác định là $v(t)=\frac{-4}{3}t+8\,(\text{m/s})$, khoảng thời gian từ 4,5 giây đến 8 giây vận tốc của chuyển động là $v(t)=8\,(\text{m/s})$

Ta có quãng đường mà vật di chuyển được trong 8 giây đầu tiên là

$$s=\int_0^3 \frac{4}{3}t\,dt+\int_3^{4,5}\left(-\frac{4}{3}t+8\right)dt+\int_{4,5}^{8} 8\,dt=38,5(m).$$

Câu 30: Ở nhiệt độ $37^{\circ}C$, một phản ứng hóa học từ chất A, chuyển hóa thành sản phẩm chất B theo phương trình: A$\rightarrow$**B.** Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị mol L^{-1}) tại thời gian x(giây), $y(x)>0$ với $x>0$ thỏa mãn hệ thức $y'(x)=8\ln 3.10^{-3}x$ với $x>0$.

a) Xét hàm số $f(x)=\log_3 y(x)$ với $x>0$. Hãy tính $f'(x)$ từ đó tìm hàm số $f(x)$.

b) Giả sử ta tính nồng độ trung bình chất A (đơn vị mol L^{-1}) từ thời điểm a(giây) đến thời điểm b (giây) với $0<a<b$ theo công thức $\frac{1}{b-a}\int_a^b y(x)\,dx$. Xác định nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 10 giây đến thời điểm 20 giây.

Lời giải

a) Ta có

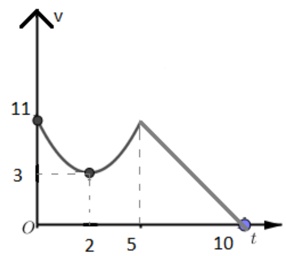
$$f(x)=\log_3 y(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x\ln 3}.y'(x)=\frac{1}{x.\ln 3}.8\ln 3.10^{-3}x=8.10^{-3}\Rightarrow f(x)=8.10^{-3}x.$$

b) $f(x)=8.10^{-3}x \Rightarrow \log_3 y(x)=8.10^{-3}x \Leftrightarrow y(x)=3^{8.10^{-3}x}$.

Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây là

$$\frac{1}{20-10}\int_{10}^{20} y(x)\,dx=\frac{1}{10}\int_{10}^{20} 3^{8.10^{-3}x}\,dx\approx 1,1412\left(L^{-1}\right)$$

Câu 31: Một chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường Parabol khi $0\le t\le 5(s)$ và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5\le t\le 10(s)$. Biết đỉnh Parabol là $I(2,3)$. Hỏi quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0\le t\le 10(s)$ là bao nhiêu mét?



Lời giải

Gọi Parabol $(P): y = at^2 + bt + c$ là phương trình thể hiện vận tốc của chất điểm khi $0 \le t \le 5(s)$

Do (P) có đỉnh $I(2;3)$ và đi qua $A(0;11)$ nên

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 2 \\ y(0) = 11 \\ y(2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 3 \\ c = 11 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \\ c = 11 \end{cases} \Rightarrow y = 2t^2 - 8t + 11$$

Gọi $d: y = at + b$ là phương trình đường thẳng thể hiện vận tốc của chất điểm khi $5 \le t \le 10(s)$ do d đi qua điểm $B(5;21)$ và $C(10;0)$ nên:

$$\begin{cases} 5a + b = 11 \\ 10a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{11}{5} \\ b = 22 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{-11}{5}t + 22$$

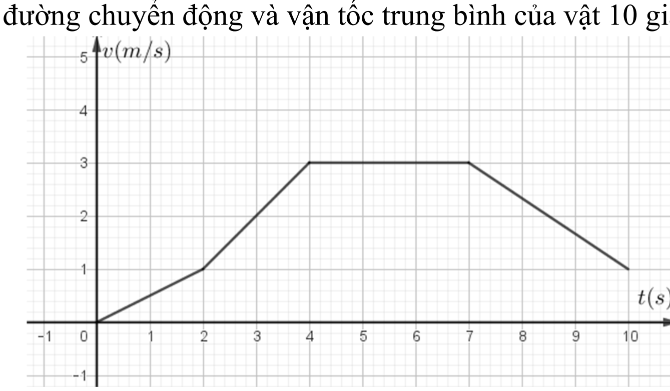
Như vậy phương trình biểu thị vận tốc của chất điểm là $v(t) = \begin{cases} 2t^2 - 8t + 11, & 0 \le t \le 5 \\ \frac{-11}{5}t + 22, & 5 < t \le 10 \end{cases}$

Khi đó quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $0 \le t \le 10(s)$ là

$$S = \int_0^{10} v(t)dt = \int_0^5 (2t^2 - 8t + 11)dt + \int_5^{10} \left(\frac{-11}{5}t + 22\right)dt$$

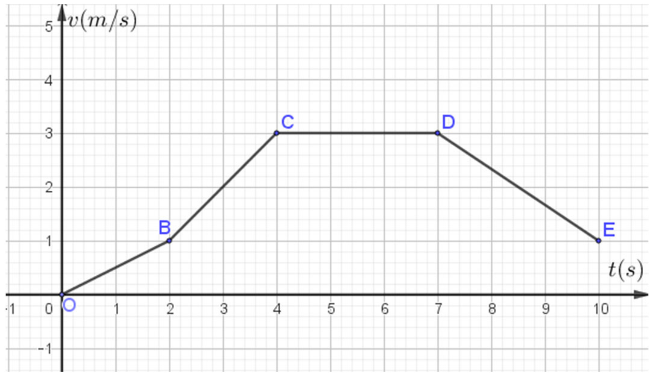
$$= \left(\frac{2t^3}{3} - 4t^2 + 11t\right)\Bigg|_0^5 + \left(\frac{-11t^2}{10} + 22t\right)\Bigg|_5^{10} = \frac{115}{3} + \frac{55}{2} = \frac{395}{6}(m)$$

Câu 32: Cho hình vẽ dưới đây là đồ thị vận tốc $v(t)$ của một vật ($t = 0$ là thời điểm vật bắt đầu chuyển động). Tính quãng đường chuyển động và vận tốc trung bình của vật 10 giây đầu tiên.



Lời giải

Theo đồ thị ta có:



PT đường thẳng $OB: v=\frac{1}{2}t$

PT đường thẳng $BC: v=t-1$

PT đường thẳng $CD: v=3$

PT đường thẳng $DE: v=-\frac{2}{3}t+\frac{23}{3}$

Suy ra: $v(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t, & 0\le t\le 2\\ t-1, & 2<t\le 4\\ 3, & 4<t\le 7\\ -\frac{2}{3}t+\frac{23}{3}, & 7<t\le 10\end{cases}$.

Quãng đường chuyển động của vật trong 10 giây là:

$$S=\int_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{2} v(t)\,\mathrm{d}t+\int_2^{4} v(t)\,\mathrm{d}t+\int_4^{7} v(t)\,\mathrm{d}t+\int_7^{10} v(t)\,\mathrm{d}t$$

$$S=\int_0^{2}\frac{1}{2}t\,\mathrm{d}t+\int_2^{4}(t-1)\,\mathrm{d}t+\int_4^{7}3\,\mathrm{d}t+\int_7^{10}\left(-\frac{2}{3}t+\frac{23}{3}\right)\mathrm{d}t=20\ (m)$$

Vận tốc trung bình của chuyển động là: $v_{tb}=\frac{S}{10}=2(m/s)$

Câu 33: Khảo sát chuyển động của xe khách A trong 30 phút trên một quãng đường ta thu được kết quả: vận tốc $v(\text{m/phut})$ của xe khách theo thời gian t (phút) được biểu diễn bởi hàm số

$$v(t)=\begin{cases}100t, & 0\le t\le 10\\ 20t+800, & 10<t\le 20\\ -10\text{t}+1400, & 20<t\le 30\end{cases}$$

Tính quãng đường chuyển động và vận tốc trung bình của xe khách trong 30 phút đã khảo sát.

Lời giải

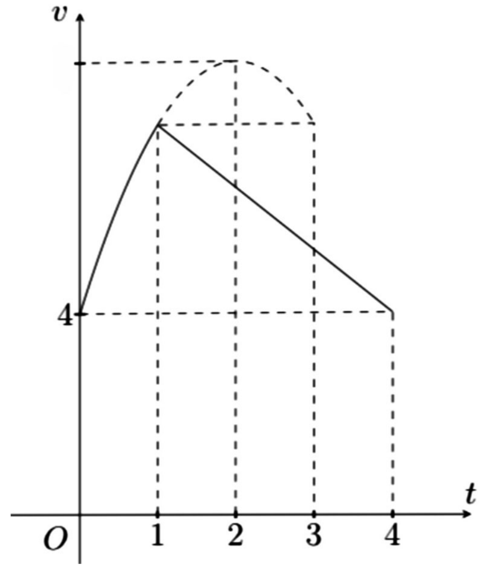
Quãng đường chuyển động của xe khách trong 30 phút khảo sát là:

$$S=\int_0^{30} v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}t+\int_{10}^{20} v(t)\,\mathrm{d}t+\int_{20}^{30} v(t)\,\mathrm{d}t$$

$$S=\int_0^{10}100t\,\mathrm{d}t+\int_{10}^{20}(20t+800)\,\mathrm{d}t+\int_{20}^{30}(-10t+1400)\,\mathrm{d}t=27500(m)$$

Vận tốc trung bình của xe khách trong 30 phút khảo sát là: $v_{tb}=\frac{S}{30}=\frac{2750}{3}\approx 917$ (m/phút).

Câu 34: Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc. . phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc như hình vẽ bên.Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;10)$ và trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại vật chuyển động chậm dần đều. Tính quãng đường S mà vật đi được trong 4 giờ đó.



Lời giải

Trong khoảng 1 giờ đầu, ta gọi phương trình vận tốc của vật là $v(t)=at^2+bt+c(a\neq 0)$

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} v(0)=4 \\ v(2)=10 \\ x_I=-\dfrac{b}{2a}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=4 \\ 4a+2b+c=10 \\ 4a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{3}{2} \\ b=6 \\ c=4 \end{cases}$$

Khi đó: $v(t)=-\dfrac{3}{2}x^2+6x+4$.

$=> v(1)=\dfrac{17}{2}; v(4)=4$.

Trong 3 giờ sau, gọi phương trình vận tốc $v(t)=mx+n$.

Theo giả thiết ta có hệ phương trình:

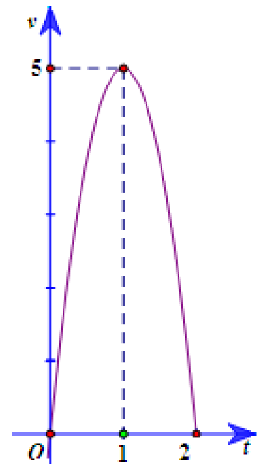
$$\begin{cases} v(1)=m+n=\dfrac{17}{2} \\ v(4)=4m+n=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-\dfrac{3}{2} \\ n=10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v(t)=-\dfrac{3}{2}x+10.$$

Quãng đường vật đi trong 4 giờ:

$$S=\int_0^1(-\frac{3}{2}t^2+6x+4)dt+\int_1^4(-\frac{3}{2}t+10)dt=25,3km.$$

Câu 35: Một người chạy trong 2 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là 1 phần của đường Parabol với đỉnh $I(1;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung Ov như hình vẽ. Tính quãng đường S người đó chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân).



Lời giải

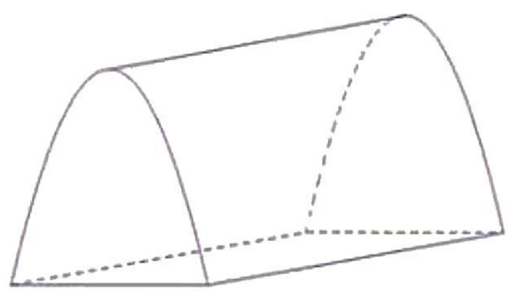
Ta có 1 giờ 30 phút = 1,5 giờ $\Rightarrow S=\int\limits_0^{1,5} v(t)\mathrm{d}t$.

Đồ thị $v=v(t)$ đi qua gốc tọa độ nên $v(t)$ có dạng $v(t)=at^2+bt$.

Đồ thị $v=v(t)$ có đỉnh là $I(1;5)$ nên $\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=1\\a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-2a\\a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-5\\b=10\end{cases}\Rightarrow v(t)=-5t^2+10t$

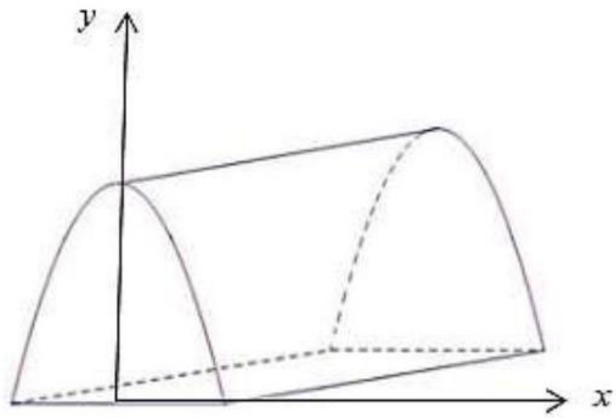
$S=\int\limits_0^{1,5}\left(-5t^2+10t\right)\mathrm{d}t=\dfrac{45}{8}\approx 5,63$.

Câu 36: Để chuẩn bị cho buổi dã ngoại, nhóm du lịch dự định dựng một cái lều trại có dạng như hình vẽ. Biết rằng mặt trước và mặt sau của trại là hai parabol bằng nhau, nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau và cùng vuông góc với mặt nền. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước chiều rộng là $4m$ (lối vào lều), chiều dài là $6m$, đỉnh parabol cách nền $3m$. Tính thể tích phần không gian bên trong lều trại.



Lời giải

Xét hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ



Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ có đỉnh $C(0;3)$, đi qua hai điểm $A(-2;0)$ và $B(2;0)$ nên

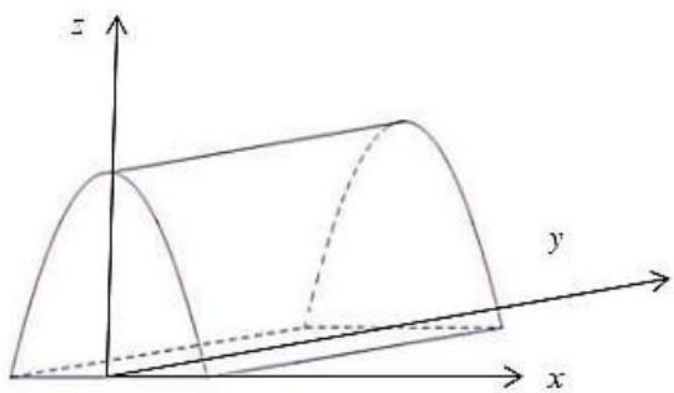
có hệ phương trình $\begin{cases} 0.a + 0.b + c = 3 \\ 4a - 2b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{3}{4} \\ b = 0 \\ c = 3 \end{cases}$.

Suy ra $(P): y = -\dfrac{3}{4}x^2 + 3$.

Diện tích mặt trước của lều trại là

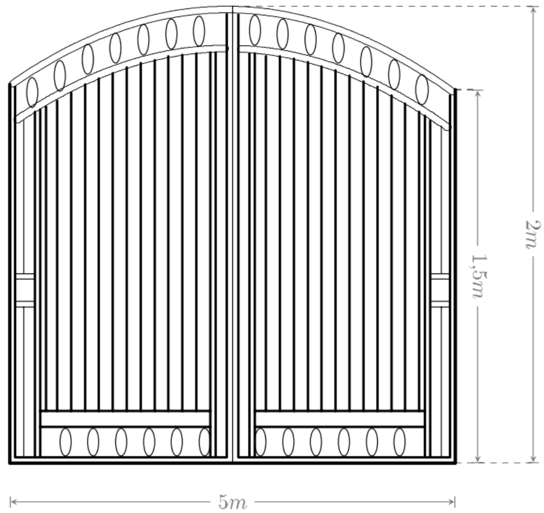
$$S = \int_{-2}^{2}\left(3 - \frac{3}{4}x^2\right)\mathrm{d}x = 8\left(m^2\right)$$

+) Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ

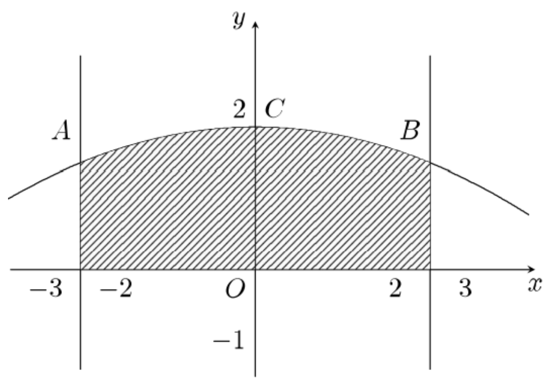


Khi đó thể tích phần không gian bên trong lều trại là $V = \int_0^6 8\mathrm{d}x = 48\left(m^3\right)$.

Câu 37: Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá $1\mathrm{m}^2$ cửa rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng nghìn).



Lời giải



Trong đó $A(-2,5;1,5), B(2,5;1,5), C(0;2)$

Giả sử đường cong phía trên là một Parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$, với $a;b;c \in \mathbb{R}$

Do Parabol đi qua các điểm $A(-2,5;1,5), B(2,5;1,5), C(0;2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a(-2,5)^2 + b(-2,5) + c = 1,5 \\ a(2,5)^2 + b(2,5) + c = 1,5 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{2}{25} \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases}$$

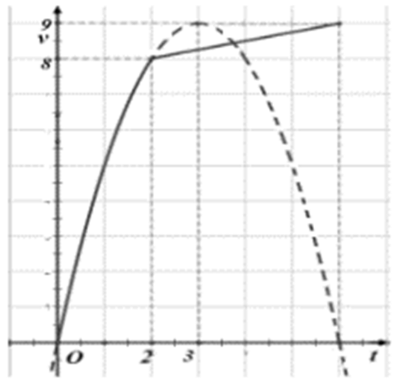
Khi đó phương trình Parabol là $y = -\dfrac{2}{25}x^2 + 2$

Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -\dfrac{2}{25}x^2 + 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2,5; x = 2,5$. Ta có

$$S = \int_{-2,5}^{2,5}\left(-\frac{2}{25}x^2 + 2\right)\mathrm{d}x = \left(-\frac{2}{25}\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_{-2,5}^{2,5} = \frac{55}{6}$$

Vậy ông An phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là $S \times 700000 = \dfrac{55}{6} \times 700000 \approx 6.417.000$ (đồng).

Câu 38: Một vật chuyển động trong 6 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị như hình bên dưới. Trong khoảng thời gian 2 giờ từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị là một phần đường Parabol có đỉnh $I(3;9)$ và có trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại, đồ thị vận tốc là một đường thẳng có hệ số góc bằng $\frac{1}{4}$. Quảng đường s mà vật di chuyển được trong 6 giờ là $\frac{a}{b}$,$(a,b)=1$ .Khi đó $a-b$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Gọi $(P): y=at^2+bt+c\,(a\neq 0)$.

+ Vì Parabol đi qua O(0; 0) và có tọa độ đỉnh $I(3;9)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} c=0 \\ \dfrac{-b}{2a}=3 \\ 3^2.a+b.3+c=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 6a+b=0 \\ 9a+3b+c=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ a=-1 \\ b=6 \end{cases}$$

Ta có phương trình Parabol là $(P): y=v(t)=-t^2+6t;\forall t\in[0;2]$

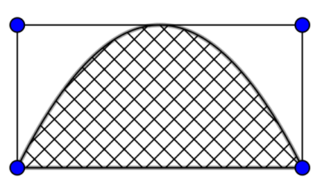
+ Sau 2 giờ đầu thì hàm vận tốc có dạng là hàm bậc nhất $y=\frac{1}{4}t+m$, dựa trên đồ thị ta thấy đi qua điểm có tọa độ $(6;9)$ nên thế vào hàm số và tìm được $m=\frac{15}{2}$.

Nên hàm vận tốc từ giờ thứ 2 đến giờ thứ 6 là $y=\frac{1}{4}t+\frac{15}{2};\forall t\in[2;6]$

+ Quảng đường vật đi được bằng tổng đoạn đường 2 giờ đầu và đoạn đường 4 giờ sau.

$$S=\int_0^6 v(t)\mathrm{dt}=\int_0^2\left(-t^2+6t\right)dt+\int_2^6\left(\frac{1}{4}t+\frac{15}{2}\right)dt=\frac{130}{3}(km)$$

Câu 39: Bạn An có các tấm thẻ hình chữ nhật có kích thước khác nhau nhưng có cùng chu vi là $6cm$. Trên mỗi tấm thẻ An vẽ một hình parabol sao cho đỉnh của parabol trùng với trung điểm một cạnh của tấm thẻ như hình vẽ. Hỏi diện tích của hình parabol lớn nhất mà An vẽ được bằng bao nhiêu xăng ti mét vuông?

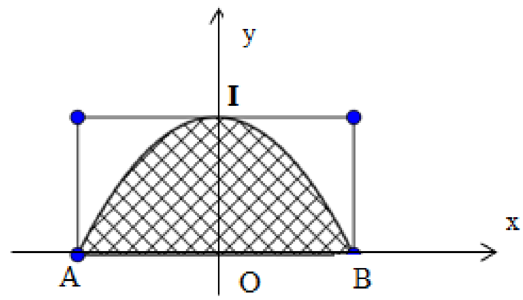


Lời giải

Gọi chiều dài của tấm thẻ là m, chiều rộng là n ($m > n > 0$).

Ta có chu vi của tấm thẻ là $2.(m+n)=6 \Rightarrow m+n=3$.

Chọn hệ trục tọa độ Đề các vuông góc Oxy sao cho đỉnh của parabol là $I(0;n)$ và Parabol đi qua 2 điểm $A\left(\frac{-m}{2};0\right)$ và $B\left(\frac{m}{2};0\right)$.



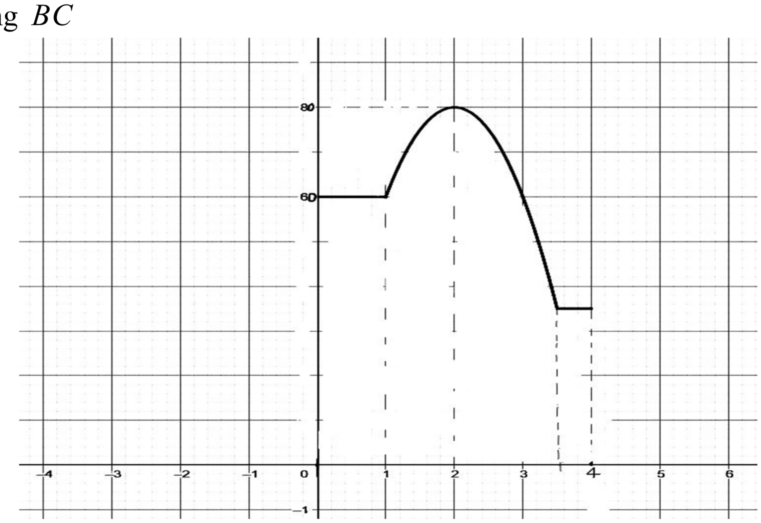
Do đó phương trình parabol có dạng $y=\frac{-4n}{m^2}x^2+n$.

Vậy phần diện tích hình parabol là $S=2\int_0^{\frac{m}{2}}\left(\frac{-4n}{m^2}x^2+n\right)\mathrm{d}x=\frac{2mn}{3}$.

Ta có $\frac{2}{3}mn \le \frac{2}{3}.\left(\frac{m+n}{2}\right)^2=\frac{2}{3}.\left(\frac{3}{2}\right)^2=1,5$.

Vậy diện tích của hình parabol lớn nhất mà An vẽ được bằng $1,5cm^2$.

Câu 40: Một ô tô đi từ tỉnh A đến D thì phải đi qua đoạn đường BC hết $4,5$ giờ. Ô tô đó đi với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc như hình vẽ bên. Trong khoảng thời gian $1h$, ô tô đi từ tỉnh B có đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục Ox và trong $2,5h$ tiếp theo đồ thị ô tô đó chuyển động là một phần của Parabol có đỉnh $I(2;80)$ và trục đối xứng song song với trục Oy. Khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục Ox. Tính đoạn đường BC



Lời giải

Theo bài ra trong khoảng thời gian từ $1 \to 3,5h$ vận tốc ô tô là:

$v(t)=at^2+bt+c(a\neq 0)$

Dựa vào đồ thị ta có:

$$\begin{cases} v(1)=60 \\ \dfrac{-b}{2a}=2 \\ v(2)=80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=60 \\ 4a+b=0 \\ 4a+2b+c=80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-20 \\ b=80 \\ c=0 \end{cases}$$

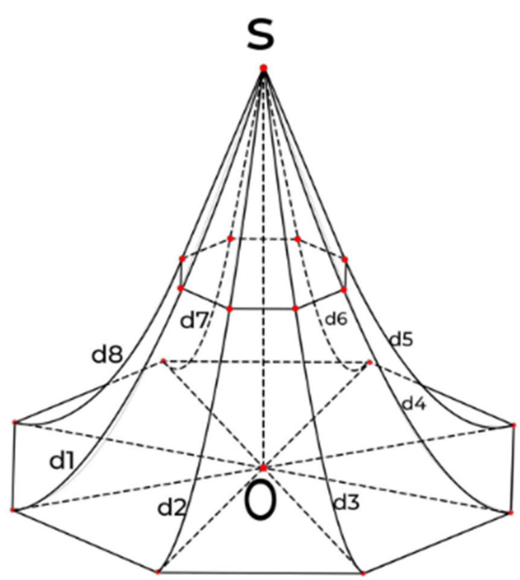
$$\Rightarrow v(t)=-20t^2+80t$$

$$v(1)=-20.(1)^2+80.1=60$$

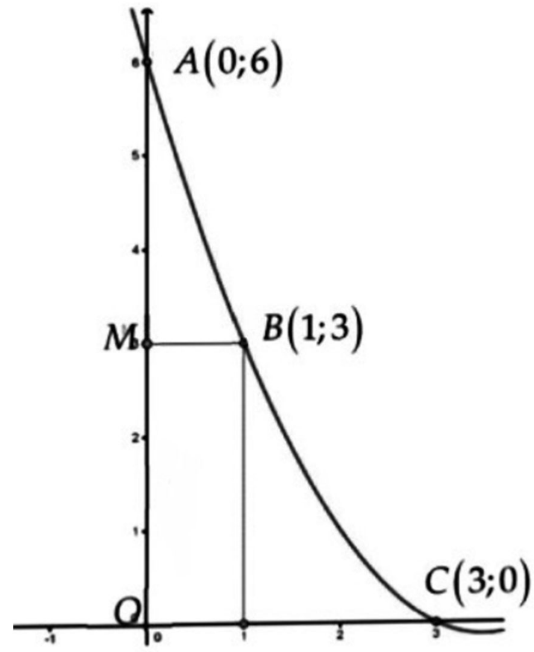
$$v(3,5)=-20.(3,5)^2+80.3,5=35$$

$$\Rightarrow S=\int_0^1 60dt+\int_1^{3,5}\left(-20t^2+80t\right)dt+\int_{3,5}^4 35dt=248,3(km).$$

Câu 41: Gia đình ông Bình xây một cái chòi hình bát giác, trong đó mái chòi (H) có dạng hình “chóp bát giác cong đều” có trần bằng gỗ như hình vẽ bên. Đáy của (H) là một hình bát giác đều có cạnh là $a=\dfrac{3\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{\sqrt{2}+2}(m)$ Chiều cao $SO=6m$ (SO vuông góc với mặt phẳng đáy). Các cạnh bên của (H) là các sợi dây thép $d_1;d_2;d_3;d_4;d_5;d_6;d_7;d_8$ nằm trên các đường parabol có trục đối xứng song song với SO . Giả sử giao tuyến (nếu có) của (H) với mặt phẳng (α) vuông góc với SO là một bát giác đều và khi (α) khi qua trung điểm của SO thì bát giác đều có cạnh $b=\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{\sqrt{2}+2}(m)$. Tính thể tích phần không gian nằm bên trong mái chòi (H) đó.



Lời giải



Đặt tọa độ như hình vẽ, khi đó ta có $OC = a.\frac{\sin 67,5}{\sin 45} = 3$; $MB = b.\frac{\sin 67,5}{\sin 45} = 1$. Khi đó ta có parabol cần tìm đi qua 3 điểm có toạn độ lần lượt là $A(0;6), B(1;3), C(3;0)$ nên có phương trình là $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 6$

Theo hình vẽ ta có bán kính của bát giác là BM.

Suy ra: $2y = x^2 - 7x + 12 \Rightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = 2y + \frac{1}{4} \Rightarrow |x - \frac{7}{2}| = \sqrt{2y + \frac{1}{4}}$

Mà $x \in [0;3] \Rightarrow \frac{7}{2} - x = \sqrt{2y + \frac{1}{4}}$

Nếu ta đặt $t = OM$ thì $BM = \frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}}$

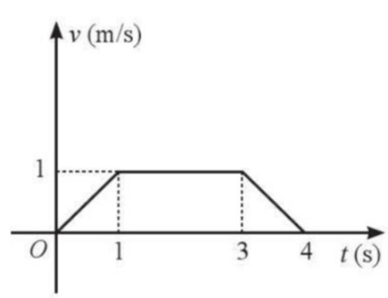
Khi đó diện tích của thiết diện thiết diện bát giác:

$S(t) = 2\sqrt{2}R^2 = 2\sqrt{2}BM^2 = 2\sqrt{2}(\frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}})^2$ với $t \in [0;6]$

Vậy thể tích của mái chòi theo đề bài là:

$V = \int_0^6 S(t)dt = \int_0^6 2\sqrt{2}(\frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}})^2 dt = 31,8m^3$

Câu 42: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)$ được cho bởi đồ thị như hình vẽ



	Khẳng định	Đúng	Sai
a)	Vận tốc của vật tại thời điểm $t=1\ (s)$ là $3(m/s)$.		
b)	Hàm số $v(t)$ được cho bởi công thức $v(t)=\begin{cases} t, & 0\le t<1 \\ 1, & 1\le t<3 \\ -t+4, & 3\le t\le 4 \end{cases}$.		
c)	Quãng đường vật đi được từ lúc $t=1(s)$ đến lúc $t=3(s)$ là $2m$.		
d)	Quãng đường vật đi được trong 4 giây đầu tiên là $3m$.		

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy

a) **(Sai)** Vận tốc của vật tại thời điểm $t=1\ (s)$ là $1(m/s)$.

b) **(Đúng)** Hàm số $v(t)$ được cho bởi công thức $v(t)=\begin{cases} t, & 0\le t<1 \\ 1, & 1\le t<3 \\ -t+4, & 3\le t\le 4 \end{cases}$.

c) **(Đúng)** Quãng đường vật đi được từ lúc $t=1(s)$ đến lúc $t=3(s)$ là

$$s=\int_1^3 v(t).dt=\int_1^3 1.dt=2\,(m).$$

d) **(Đúng)** Quãng đường vật đi được trong 4 giây đầu tiên là

$$s=\int_0^4 v(t).dt=\int_0^1 t.dt+\int_1^3 1.dt+\int_3^4 (4-t)dt$$

$$=\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1+\left.t\right|_1^3+\left.\left(4t-\frac{t^2}{2}\right)\right|_3^4=\frac{1}{2}+2+\frac{1}{2}=3\,(m).$$

Câu 43: Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0=16\ (m/s)$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+3t\ (m/s^2)$.

	Khẳng định	Đúng	Sai
a)	Gọi $v(t)$ là vận tốc của chất điểm ở thời điểm t thì $v(t)$ là một nguyên hàm của $a(t)=t^2+3t$.		
b)	$v(t)=\frac{t^3}{3}+\frac{3}{2}t^2+10$.		
c)	Vận tốc của vật tại thời điểm $t=2(s)$ là $70(m/s)$.		
d)	Quãng đường vật đi được trong 4 giây đầu tiên kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là $\frac{352}{3}\ (m)$.		

Lời giải

a) Đúng

b) Sai, vì $v(t)=\int\left(t^2+3t\right)dt=\frac{t^3}{3}+\frac{3}{2}t^2+C$ khi $t=0$ thì $C=16$ nên $v(t)=\frac{t^3}{3}+\frac{3}{2}t^2+16$.

c) Sai, vận tốc của vật tại thời điểm $t=2(s)$ là $v(2)=\frac{2^3}{3}+\frac{3}{2}.4+16=\frac{74}{3}\approx 24,7\ \ (m/s)$.

d) Đúng, Quãng đường vật đi được trong 4 giây đầu tiên kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là

$$S=\int_0^4 v(t)dt=\int_0^4\left(\frac{t^3}{3}+\frac{3}{2}t^2+16\right)dt=\left.\left(\frac{t^4}{12}+\frac{t^3}{2}+16t\right)\right|_0^4=\frac{352}{3}(m).$$

Câu 44: Một công trình xây dựng dự kiến hoàn thành trong 50 ngày. Gọi $M(t)$ là số ngày công được tính đến hết ngày thứ t (kể từ khi khởi công công trình). Trong kinh tế xây dựng, người ta đã biết rằng $M'(t)=m(t)$ với $m(t)$ là số lượng công nhân được sử dụng tại thời điểm t. Biết rằng

$$m(t)=100+8\sqrt{t}-2t \text{ (với } 0\le t\le 50\text{)}.$$

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Có 72 công nhân được sử dụng vào ngày thứ 49.		
b)	Số công nhân được sử dụng nhiều nhất vào ngày thứ 4.		
c)	Trong 10 ngày đầu tiên, công trình đã cần hơn 1000 ngày công.		
d)	Tổng cộng cần 4000 ngày công để hoàn thành công trình xây dựng đó theo dự kiến.		

Lời giải

a) **Sai**

Vào ngày thứ 49 có $m(49)=100+8\sqrt{49}-2.49=58$ công nhân được sử dụng.

b) **Đúng**

Xét hàm số $m(t)=100+8\sqrt{t}-2t$ trên $[0;50]$, ta có

$m(t)=100+8\sqrt{t}-2t\Rightarrow m'(t)=\dfrac{4}{\sqrt{t}}-2=0\Leftrightarrow\sqrt{t}=2\Leftrightarrow t=4$

$m(0)=100, m(4)=108, m(50)=8\sqrt{50}$.

Do đó số công nhân được sử dụng nhiều nhất vào ngày thứ 4.

c) **Đúng**

Trong 10 ngày đầu tiên, công trình đã cần số ngày công là

$$\int_0^{10}(100+8\sqrt{t}-2t)dt\approx 1068,65>1000 \text{ ngày công.}$$

d) **Sai**

Để hoàn thành công trình cần tổng cộng số ngày công theo dự kiến là

$$\int_0^{50}(100+8\sqrt{t}-2t)dt=4385,618092>4\,000 \text{ ngày công.}$$

Câu 45: Sau khi xuất phát, một ô tô di chuyển với tốc độ $v(t)=2t-0,03t^2$ $(0\le t\le 10)$, trong đó $v(t)$ tính bằng m/s; thời gian t tính bằng giây với $t=0$ là thời điểm xe xuất phát.
Các mệnh đề sau đúng hai sai?

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Vận tốc của xe tại thời điểm $t=1(s)$ là $1,97m/s$		
b)	Giả sử $s(t)$ là quãng đường ô tô di chuyển được theo thời gian t. Khi đó $s(t)=v'(t)$		
c)	Quãng đường vật đi được từ thời điểm $t=0(s)$ đến thời điểm $t=10(s)$ là $90(m)$		
d)	Tốc độ trung bình của xe trong khoảng thời gian $0\le t\le 10$ bằng $9(m/s)$		

Lời giải

a) Đúng

b) Sai. $v(t)=s'(t)$

c) Đúng.

Quãng đường vật đi được từ thời điểm $t=0(s)$ đến thời điểm $t=10(s)$ là:

$$s=\int_0^{10}\left(2t-0,03t^2\right)dt=90(m)$$

d) Đúng

Tốc độ trung bình của xe trong khoảng thời gian $0\le t\le 10$ bằng:

$$v_{tb}=\frac{s}{10}=9(m/s)$$

Câu 46: Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động với vận tốc $v(t)=-3t^2+12t+1\ (m/s)$, $s(t)$ là quãng đường chuyển động của chất điểm theo thời gian t(giây) Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng hay sai?

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Vận tốc của vật tại thời điểm $t=2$ là $v(2)=1$(m/s)		
b)	Trong 5 giây đầu tiên, vận tốc lớn nhất của chất điểm là 3 (m/s)		
c)	Trong khoảng thời gian từ $t=2$ đến $t=5$ vận tốc của chất điểm giảm dần		
d)	Quãng đường chuyển động của chất điểm trong 5 giấy đầu tiên là $30(m)$		

Lời giải

a)sai

Vận tốc của vật tại thời điểm $t=2$ là $v(2)=13$(m/s)

b) sai

$v'(t)=-6t+12,\ v'(t)=0\Leftrightarrow t=2$

$v(0)=1, v(5)=-14, v(2)=13$

Trong 5 giây đầu tiên, vận tốc lớn nhất của chất điểm là 13 (m/s)

c) đúng

Dựa Vào bảng biến thiên ta có trong khoảng thời gian từ $t=2$ đến $t=5$ vận tốc của chất điểm giảm dần

d) đúng

Quãng đường mà vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $t=0$(giây) đến $t=5$ (giây).

Mà $s'(t)=v(t)$ nên ta có $s=\int_0^5(-3t^2+12t+1)dt=40(m)$.

Câu 47: Để tham dự hội chợ xuân người ta dự định dựng một lều trại có dạng parabol, với kích thước: nền trại là một hình chữ nhật ABCD có chiều rộng là 3 mét, chiều sâu là 6 mét và trải thảm, đỉnh I của parabol cách mặt đất là 3 mét. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng hay sai?

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Diện tích thảm làm nền là $18m^2$		

b)	Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho: O là trung điểm của cạnh AB, A, B thuộc trục hoành và I thuộc trục tung, Tọa độ các điểm $A\left(\frac{-3}{2};0\right),B\left(\frac{3}{2};0\right),I\left(0;3\right)$		
c)	Phương trình của parabol là : $y=-\frac{4}{3}x^2+6$		
d)	Vậy thể tích phần không gian phía trong trại là $V=36$		

Lời giải

a)đúng

Nền trại là hình chữ nhật ABCD có $AB=3$ mét, $BD=6$ mét. Diện tích nền trại là $S=3.6=18\left(m^2\right)$

b)đúng

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho: O là trung điểm của cạnh AB, A, B thuộc trục hoành và I thuộc trục tung, Tọa độ các điểm $A\left(\frac{-3}{2};0\right),B\left(\frac{3}{2};0\right),I\left(0;3\right)$

c)sai

phương trình của parabol có dạng $y=ax^2+bx+c, a\neq 0$. Do I, A, B thuộc nên ta có

$$\begin{cases}\frac{9}{4}a+\frac{3}{2}b+c=0\\ \frac{9}{4}a-\frac{3}{2}b+c=0\\ c=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{4}{3}\\ b=0\\ c=3\end{cases}\Rightarrow y=-\frac{4}{3}x^2+3$$

d) đúng

Thể tích phần không gian phía trong trại là $V=6.2\int_0^{\frac{3}{2}}(-\frac{4}{3}x^2+3)dx=36$

Câu 48: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h\left(t\right)$ là thể tích nước bơm được sau t phút. Cho $h'\left(t\right)=6at^2+2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 phút thì thể tích nước trong bể là $90m^3$, sau 6 phút thì thể tích nước trong bể là $504m^3$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng hay sai?

	Khẳng định	Đúng	Sai
a)	$h\left(t\right)=\int\left(6at^2+2bt\right)\mathrm{d}t$		
b)	$h\left(3\right)=\int_0^3\left(6at^2+2bt\right)\mathrm{d}t=90$		
c)	a,b là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}54a+9b=90\\ 432a+36b=504\end{cases}$		
d)	Sau 9 phút thể tích nước trong bể là: $V=1460m^3$		

Lời giải

a)đúng

b)đúng $\int_0^3\left(6at^2+2bt\right)\mathrm{d}t=90\Leftrightarrow\left(2at^3+bt^2\right)\Big|_0^3=90\Leftrightarrow 54a+9b=90$ (1)

$\int_0^6 \left(6at^2+2bt\right)dt=504 \Leftrightarrow \left(2at^3+bt^2\right)\Big|_0^6=504 \Leftrightarrow 432a+36b=504$ (2)

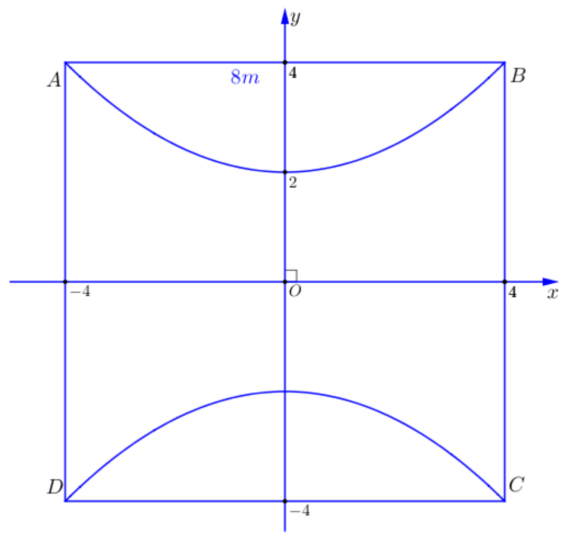
c)đúng Từ (1), (2) $\Rightarrow \begin{cases}54a+9b=90\\432a+36b=504\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{2}{3}\\b=6\end{cases}$.

d) sai Sau khi bơm 9 phút thì thể tích nước trong bể là:

$V=\int_0^9 \left(4t^2+12t\right)dt=\left(\dfrac{4}{3}t^3+6t^2\right)\Big|_0^9=1458\left(m^3\right)$.

Câu 49: Một người nông dân có một mảnh đất hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $8m$. Ông ta định chia mảnh đất thành ba phần, bởi các parabol đi qua các đỉnh của hình vuông như hình vẽ, biết rằng đỉnh của parabol cách cạnh hình vuông $2m$. Ông dự định trồng hoa trên phần diện tích giới hạn bởi các parabol và cạnh hình vuông, trồng cỏ trên phần diện tích còn lại.

Chọn hệ trục Oxy sao cho $A(-4;4)$, $B(4;4)$, $C(4;-4)$, $D(-4;-4)$.



a) Phương trình của hai parabol là $y=\dfrac{x^2}{8}+2$ và $y=-\dfrac{x^2}{8}-2$.

b) Diện tích trồng hoa bằng $\dfrac{44}{3}m^2$.

c) Tỉ số diện tích đất trồng hoa và trồng cỏ bằng $\dfrac{11}{37}$.

d) Nếu chi phí mua cây giống hoa là 100.000 đồng/m^2, cỏ là 70.000 đồng/m^2 thì chi phí mua cây giống cho cả khu vườn là 4900000 đồng.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) Đúng

Phương trình parabol có dạng: $y=f(x)=ax^2+bx+c$ (P)

Ta có: $A(-4;4)$, $B(4;4)$, $E(0;2)\in(P)\Rightarrow y=\dfrac{x^2}{8}+2$.

Tương tự, phương trình parabol thứ hai là $y=-\dfrac{x^2}{8}-2$.

b) Đúng

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\frac{x^2}{8}+2$, đường thẳng $y=4$ và hai đường thẳng $x=0,\ x=4$.

Diện tích đất trồng hoa là $S=4S_1=4\int_0^2\left[4-\left(\frac{x^2}{8}+2\right)\right]dx=4\left(-\frac{x^3}{24}+2x\right)\Bigg|_0^2=\frac{44}{3}m^2$.

c) Đúng

Diện tích đất trồng cỏ: $S'=64-S=64-\frac{44}{3}=\frac{148}{3}m^2$.

Tỉ số diện tích đất trồng hoa và trồng cỏ: $\frac{S}{S'}=\frac{11}{37}$.

d) Sai

Chi phí mua cây giống là: $\frac{44}{3}.100000+\frac{148}{3}.70000=4920000$ đồng

Câu 50: Tại một nhà máy, gọi $C(x)$ là tổng chi phí (tính theo triệu đồng) để sản xuất x tấn sản phẩm A trong một tháng. Khi đó, đạo hàm $C'(x)$, gọi là chi phí cận biên, cho biết tốc độ gia tăng tổng chi phí theo lượng gia tăng sản phẩm được sản xuất. Giả sử chi phí cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức $C'(x)=5-0,06x+0,00072x^2$ với $0\le x\le 150$. Biết rằng $C(0)=30$ triệu đồng, gọi là chi phí cố định.

a) $C(100)-C(0)=\int_0^{100}C'(x)\mathrm{d}x$.

b) $\int_0^{100}C'(x)\mathrm{d}x=5\int_0^{100}\mathrm{d}x-0,06\int_0^{100}x\,\mathrm{d}x+0,00072\int_0^{100}x^2\,\mathrm{d}x$.

c) $5\int_0^{100}\mathrm{d}x-0,06\int_0^{100}x\,\mathrm{d}x+0,00072\int_0^{100}x^2\,\mathrm{d}x=5\Big|_0^{100}-0,03x\Big|_0^{100}+0,00024x\Big|_0^{100}$.

d) $C(100)=440$.

Lời giải

a) Đúng.
b) Đúng.
c) sai.
d) sai.
Ta có:

$$C(100)-C(0)=\int_0^{100}C'(x)\mathrm{d}x=\int_0^{100}\left(5-0,06x+0,00072x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$=5\int_0^{100}\mathrm{d}x-0,06\int_0^{100}x\,\mathrm{d}x+0,00072\int_0^{100}x^2\,\mathrm{d}x$$

$$=5x\Big|_0^{100}-0,03x^2\Big|_0^{100}+0,00024x^3\Big|_0^{100}=440.$$

Suy ra $C(100)=C(0)+440=30+440=470$ (triệu đồng).

Vậy khi nhà máy sản xuất 100 tấn sản phẩm A trong tháng thì tổng chi phí là 470 triệu đồng

Câu 51: Một chất điểm bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0, sau 4 giây chuyển động thì gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t)=-\frac{5}{2}t+a\ (m/s),\ (t\ge 4)$ cho đến khi dừng hẳn. Quãng đường chất điểm đi được kể từ lúc chuyển động đến khi dừng hẳn là. $80m$. Các khẳng định sau đúng hay sai ?

a) Quãng đường chất điểm di chuyển được sau 4(giây) bằng : $S(4)=4v_o\ (m)$.

b) Quãng đường chất điểm di chuyển được sau 5(giây) bằng : $S(5)=\int_0^5 v(t)\,dt\ (m)$

c) $v_o<8(m/s)$.

d) Vận tốc trung bình v_{tb} của chất điểm trong khoảng thời gian từ 3giây đến 7 giây kể từ lúc bắt đầu thỏa mãn $v_{tb}<8(m/s)$

Lời giải

a) Đúng

Trong 4giây đầu chất điểm chuyển động đều với vận tốc v_o nên quãng đường di chuyển được trong 4 giây đầu là : $S(4)=4v_o\ (m)$.

b) Sai

Trong 4 giây đầu chất điểm chuyển động với vận tốc v_o, giây tiếp theo chất điểm chuyển động với vận tốc $v(t)$, do đó quãng đường đi được sau 5giây : $S(5)=4v_o+\int_4^5 v(t)\,dt$.

c) Sai

Tại thời điểm $t=4$ vật đang chuyển động với vận tốc v_0 nên có $v(4)=v_0$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{2}.4+a=v_0 \Leftrightarrow a=v_0+10$, suy ra $v(t)=-\frac{5}{2}t+v_0+10$.

Gọi k là thời điểm vật dừng hẳn, ta có:

$v(k)=0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}k+v_o+10=0 \Leftrightarrow k=\frac{2}{5}.(v_0+15) \Leftrightarrow k=\frac{2v_0}{5}+4$.

$v(t)=-\frac{5}{2}t+v_o+10$

Tổng quãng đường vật đi được là $80=4.v_0+\int_4^k\left(-\frac{5}{2}t+v_0+10\right)dt$

$\Leftrightarrow 80=4.v_0+\left.\left(-\frac{5}{4}t^2+v_0.t+10t\right)\right|_4^k \Leftrightarrow 80=4.v_0-\frac{5}{4}(k^2-4^2)+v_0.(k-4)+10(k-4)$

$\Leftrightarrow 80=4.v_0-\frac{5}{4}\left(\frac{2}{5}v_o\right)\left(\frac{2}{5}v_o+8\right)+v_0.\frac{2v_0}{5}+10.\frac{2v_0}{5}$

$\Leftrightarrow 80=4v_0-\frac{v_o^2}{5}-4v_0+\frac{2}{5}v_o^2+4v_0$

$\Leftrightarrow \frac{2}{5}v_0^2+4v_0-80=0$

$\Leftrightarrow v_o^2+10v_0-200=0 \Leftrightarrow v_o=10$. Vậy $v_o>8$.

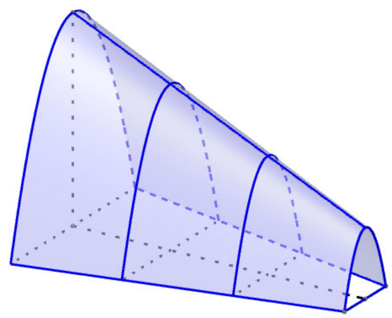
d) Đúng

Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian từ 3 đến 7 giây : $S = 1.10 + \int_4^7 \left(-\frac{5}{2}t + 20\right)dt = \frac{115}{4}\ (m)$.

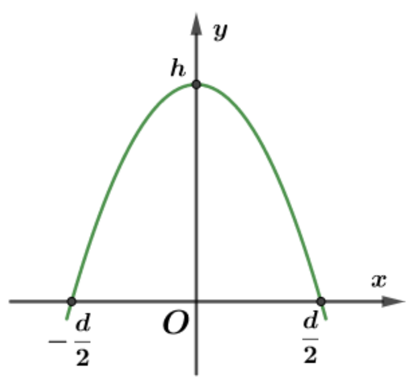
Vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian từ 3 đến 7 giây :

$v_{tb} = \frac{S}{4} = 7,1875 \Rightarrow v_{tb} < 8$.

Câu 52: Một đường hầm có mô hình như bên dưới. Biết rằng đường hầm mô hình có chiều dài $5\ (\text{cm})$. Khi cắt mô hình này bởi các mặt phẳng vuông góc với đáy của nó, ta được thiết diện là một hình parabol có độ dài đáy gấp đôi chiều cao của parabol. Chiều cao của mỗi thiết diện parabol cho bởi công thức $y = 3 - \frac{2}{5}x\ \ (\text{cm})$, với $x\ (\text{cm})$ là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình đến mặt phẳng chứa thiết diện. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?



a) Nếu một hình parabol có đáy là d và chiều cao h như hình vẽ thì phương trình của parabol là $y = -\frac{4h}{d^2}x^2 + h.$



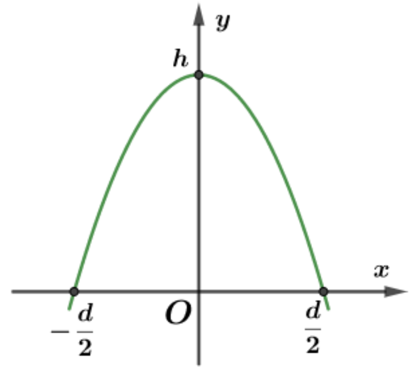
b) Diện tích của hình parabol có đáy là d và chiều cao h là $S = \frac{2}{3}dh.$

c) Thể tích của hầm là $29,889m^3$

d) Để hoàn thành đường hầm từ lúc đào núi đến lúc hoàn thiện đưa vào sử dụng thì giá mỗi mét khối là 990 triệu đồng. Khi đó chi phí làm hầm là khoảng 29 tỷ năm trăm chín mươi ba triệu đồng.

Lời giải

a) **ĐÚNG**



+)Phương trình parabol có dạng $y=ax^2+h, a<0 (P)$

+)(P) qua $\left(\frac{d}{2};0\right)$nên $a=-\frac{4h}{d^2}$. Khi đó parabol có phương trình là $y=-\frac{4h}{d^2}x^2+h$.

b) **ĐÚNG** Diện tích của parabol là

$$S=\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}\left(-\frac{4h}{d^2}x^2+h\right)dx=-\frac{4h}{d^2}\frac{x^3}{3}+hx\Big|_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}=-\frac{4h}{3d^2}\left(\frac{d}{2}\right)^3+h\frac{d}{2}-\left(-\frac{4h}{3d^2}\left(-\frac{d}{2}\right)^3-h\frac{d}{2}\right)=\frac{2}{3}dh$$

c) SAI. Giả sử vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$ và $x=5$. Thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\ (0\le x\le 5)$ là một hình parabol có chiều cao là $h=y=3-\frac{2}{5}x$ và độ dài đáy là $d=2h=2\left(3-\frac{2}{5}x\right)$. Diện tích thiết diện là $S(x)=\frac{2}{3}dh=\frac{4}{3}\left(3-\frac{2}{5}x\right)^2$.

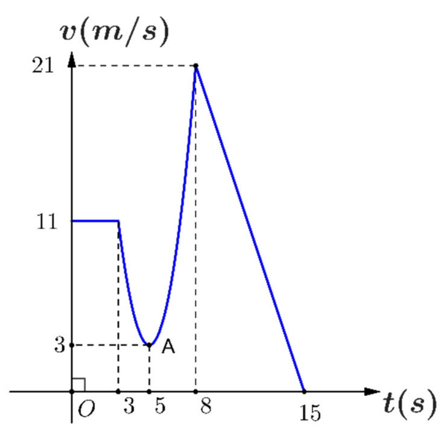
Thể tích không gian bên trong đường hầm mô hình là

$$V=\int_0^5 S(x)\,dx=\int_0^5\frac{4}{3}\left(3-\frac{2}{5}x\right)^2 dx=\frac{260}{9}m^3\approx 28,889m^3.$$

d) SAI.

Số tiền dùng để hoàn thành hầm là $28,889.950\approx 27,4445$ tỉ.

Câu 53: Chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường thẳng khi $0\le t\le 3(s)$ và $8\le t\le 15(s)$ và $v(t)$ có dạng đường Parabol khi $3\le t\le 8(s)$ (như hình vẽ)



a) Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t=3$ là $v(3)=11(m/s)$.

b) Quãng đường chất điểm di chuyển được trong 3 giây đầu tiên là: $S_1 = \int_0^3 11dt \ (m)$

c) Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian từ 8 giây đến 15 giây bằng $73,5(m)$

.

d) Vận tốc trung bình v_{tb} của chất điểm trong khoảng thời gian từ 3 đến 8 giây thỏa mãn $v_{tb} < 7 \ (m/s)$

Lời giải

a) Đúng (Dựa vào đồ thị $v(t)$).

b) Đúng

Trong 3 giây đầu tiên, vận tốc của chuyển động là $v(t) = 11(m/s)$.

Do đó quãng đường chất điểm chuyển động trong 3 giây đầu tiên là: $S_1 = \int_0^3 11dt \ (m)$

c) Đúng

Trong khoảng thời gian từ 8 đến 15 giây, đồ thị $v(t)$ là một đường thẳng đi qua hai điểm $(8;21)$ và $(15;0)$. Ta có: $v(t) = at + b$.

Từ giả thiết ta có hệ: $\begin{cases} 8a + b = 21 \\ 15a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 45 \end{cases}$.

Do đó $v(t) = -3t + 45 \ (8 \le t \le 15)$.

Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian này là:

$$S_2 = \int_8^{15} (-3t + 45) dt = -\frac{3t^2}{2}\Big|_8^{15} + 45t\Big|_8^{15} = \frac{147}{2} = 73,5(m).$$

c) Sai

Trong khoảng thời gian từ 3 đến 8 giây đồ thị $v(t)$ là một Parabol đi qua $(3;11),(5;3),(8;21)$ có phương trình dạng: $v(t) = at^2 + bt + c$.

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} 9a + 3b + c = 11 \\ 25a + 5b + c = 3 \\ 64a + 8b + c = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -20 \\ c = 53 \end{cases}$

Do đó: $v(t) = 2t^2 - 20t + 53 \ (3 \le t \le 8)$.

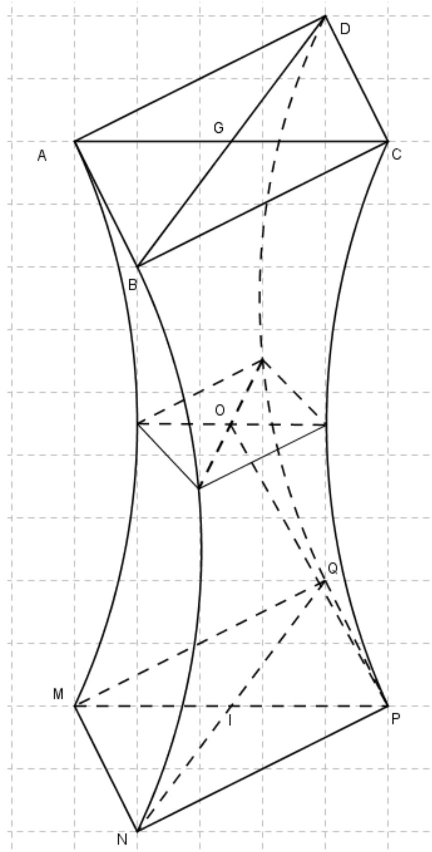
Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian này là:

$$S_3 = \int_3^8 v(t) dt = \int_3^8 (2t^2 - 20t + 53) dt = \left(\frac{2t^3}{3} - 10t^2 + 53t\right)\Big|_3^8 = \frac{115}{3} \ (m)$$

Vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian này là:

$$v_{tb} = \frac{S_3}{5} = \frac{23}{3} \approx 7,67(m/s).$$

Câu 54: Một tòa nhà có kiến cấu như hình bên dưới. Biết rằng chiều cao tòa nhà là $48 \ (\text{m})$. Cắt ngôi nhà bởi một mặt phẳng song song với mặt đất thì được thiết diện là các hình vuông. Khi cắt mô hình này bởi các mặt phẳng vuông góc với đáy của nó và đi qua đường chéo hình vuông hai đáy ta được thiết diện là một hình đối xứng $ACPM$ (AM, CP là hai cung tròn). Gọi O là tâm thiết diện hình vuông chính giữa tòa nhà như hình vẽ, OP là tiếp tuyến của cung tròn CP. Biết $OP = 30(m)$. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?



a)Diện tích đáy tòa nhà $S_{ABCD} = 1000\left(m^2\right)$.

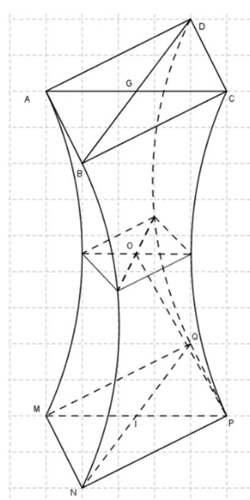
b)Diện tích thiết diện hình vuông chính giữa (nhận O là tâm) bằng $200\left(m^2\right)$.

c)Diện tích thiết diện $ACPM$ bằng $1200\left(m^2\right)$.

d)Thể tích tòa nhà là $31295\ \left(m^3\right)$.

Lời giải

a) **SAI**

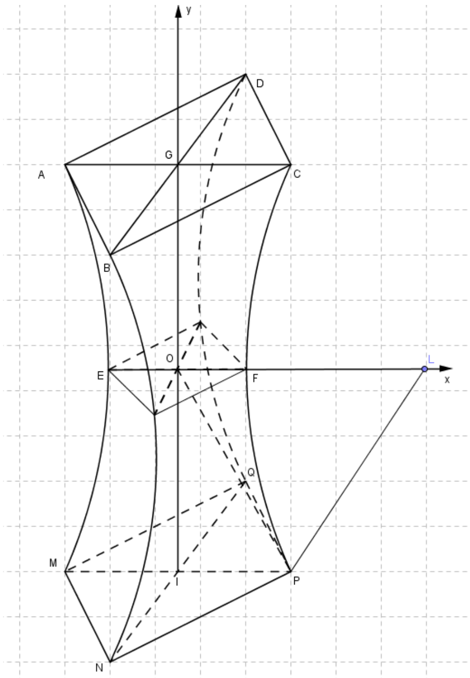


+)Chiều cao tòa nhà là $48m \Rightarrow OI = 24m \Rightarrow IP = \sqrt{OP^2 - OI^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18$

+) $PQ = 18\sqrt{2} = AB \Rightarrow S_{ABCD} = 648m^2$

b) **ĐÚNG**

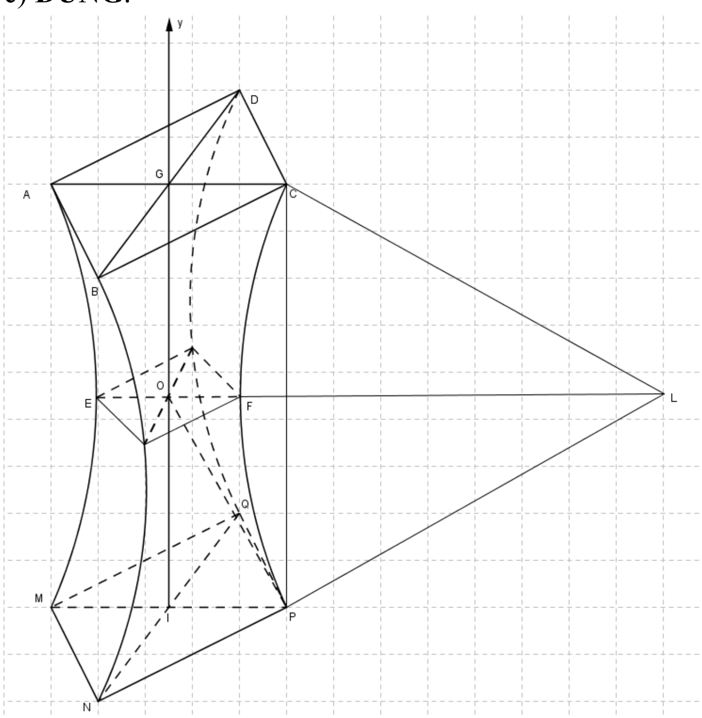
Gọi L là tâm cung tròn như hình vẽ.



+)Ta tính được

$LP = 40 \Rightarrow LO = 50 \Rightarrow \text{OF} = 10 \Rightarrow S_{td} = 200\left(m^2\right)$

c) **ĐÚNG**.



Ta có $S_{LCP} = 768$ và $\cos\widehat{CLP} = \dfrac{40^2 + 40^2 - 48^2}{2.40.40} = \dfrac{7}{25} \Rightarrow \widehat{CLP} \approx 1,29(rad)$.

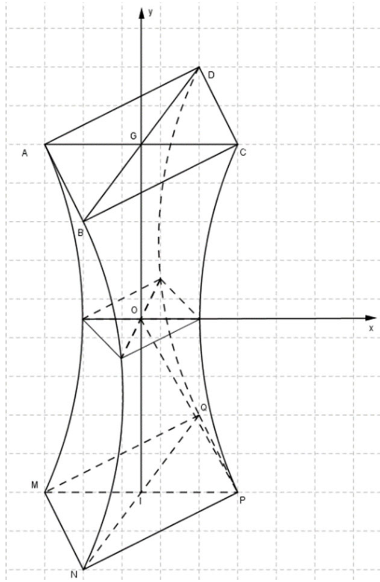
+)Diện tích quạt tròn $LCFP$ là $S_{LCFP} = \dfrac{1,29.40^2}{2} = 1032\left(m^2\right)$

+) Diện tích tam giác cong CFP là $S_{CFP} = 1032 - 768 = 264\left(m^2\right)$

$\Rightarrow S_{ACPM} = 2\left(S_{GCPI} - S_{CFP}\right) = 2\left(48.18 - 264\right) = 1200\left(m^2\right)$

d) **ĐÚNG**.

Chọn hệ trục như hình vẽ.



+)Phương trình đường tròn $(L;40)$ là $(x-50)^2 + y^2 = 1600 \Rightarrow x = 50 - \sqrt{1600 - y^2}$.

+)Độ dài đường chéo thiết diện phẳng cắt bởi mặt phẳng vuông góc với Oy là $2\left(50 - \sqrt{1600 - y^2}\right)$

Suy ra $\Rightarrow S(y) = \left(2\left(50 - \sqrt{1600 - y^2}\right)\right)^2$

+)Vậy thể tích ngôi nhà là $V = 2\int_0^{24} S(y)\,\mathrm{d}y = 2\int_0^{24}\left(2\left(50 - \sqrt{1600 - y^2}\right)\right)^2 .\mathrm{d}y = 31295\ \left(m^3\right)$.

CHƯƠNG III NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

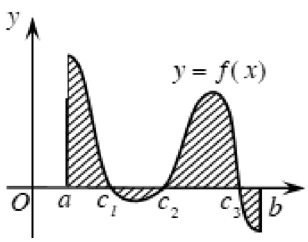
BÀI. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

I LÝ THUYẾT.

1. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

a) Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của một hàm số, trục hoành, hai đường thẳng $x = a$, $x = b$

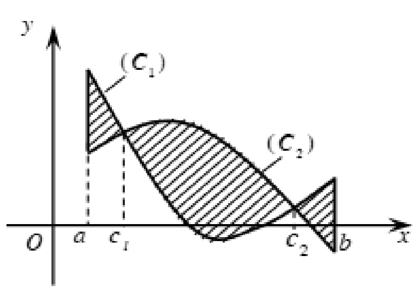
Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục, trục hoành và 2 đường thẳng $x = a, x = b$ $\left(a < b\right)$ được tính bởi công thức $S = \int_a^b \left|f(x)\right| dx$



$$(H)\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{S = \int_a^b \left|f(x)\right| dx}$$

b) Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính bởi công thức: $S = \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| dx$



$$(H)\begin{cases} (C_1): y = f_1(x) \\ (C_2): y = f_2(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$\boxed{S = \int_a^b \left|f_1(x) - f_2(x)\right| dx}$$

Chú ý: Nếu hiệu $f(x) - g(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a;b]$ thì:

$$\int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| dx = \left|\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx\right|$$

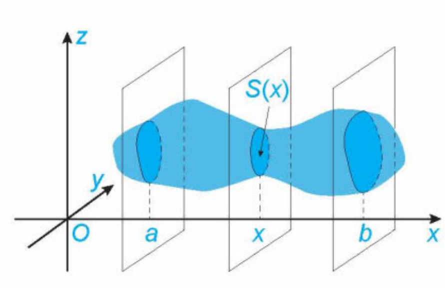
2. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ

a) Tính thể tích vật thể

Cho một vật thể trong không gian $Oxyz$. Gọi $\mathcal{B}$ là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm có hoành độ $x = a$, $x = b$. Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích là $S(x)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Khi đó thể tích V của phần vật thể $\mathcal{B}$ được tính bởi công thức

$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$



Hình 4.21

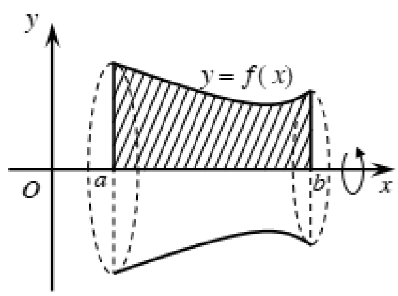
b) Thể tích khối tròn xoay

Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục, không âm trên $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$

Quay D quanh trục Ox ta được một hình khối gọi là *khối tròn xoay.*

Cắt khối tròn xoay trên bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x với $x \in [a;b]$ ta được mặt cắt là một hình tròn có bán kính $f(x)$ và diện tích $S(x) = \pi f^2(x)$

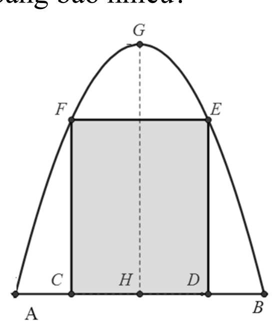
Vậy khối tròn có thể tích là: $V_N = \pi\int_a^b f^2(x)dx$



$$\begin{cases}(C): y = f(x)\\(Ox): y = 0\\x = a\\x = b\end{cases}\qquad \boxed{V_x = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx}$$

HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1: Cho Một cái cổng hình Parabol như hình vẽ sau. Chiều cao $GH = 4m$, chiều rộng $AB = 4m$, $AC = BD = 0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1200000 đồng$/m^2$, còn các phần để trắng thì trang trí hoa có giá là 900000 đồng$/m^2$. Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên bằng bao nhiêu?



Câu 2: Một khinh khí cầu bay với độ cao (so với mực nước biển) tại thời điểm t là $h(t)$, trong đó t tính bằng phút, $h(t)$ tính bằng mét. Tốc độ bay của khinh khí cầu được cho bởi hàm số $v(t)=-0{,}12t^2+1{,}2t$, với t tính bằng phút, $v(t)$ tính bằng mét/phút. Tại thời điểm xuất phát $(t=0)$, khinh khí cầu ở độ cao $520\,\text{m}$ và 5 phút sau khi xuất phát, khinh khí cầu đã ở độ cao $530\,\text{m}$.

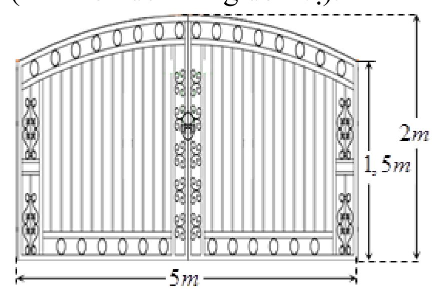
(Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma – 1, Cornelsen 2016).

a) Viết công thức xác định hàm số $h(t)\left(0\le t\le 29\right)$.

b) Độ cao tối đa của khinh khí cầu khi bay là bao nhiêu?

c) Khi nào khinh khí cầu sẽ trở lại độ cao khi xuất phát?

Câu 3: Bác Bình muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá $1m^2$ của rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi bác Bình phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng đơn vị).



Câu 4: Một công trình xây dựng dự kiến hoàn thành trong 100 ngày. Số lượng công nhân được sử dụng tại thời điểm t cho bởi hàm số $m(t)=500+50\sqrt{t}-10t$, trong đó t tính theo ngày $\left(0\le t\le 100\right)$, $m(t)$ tính theo người.

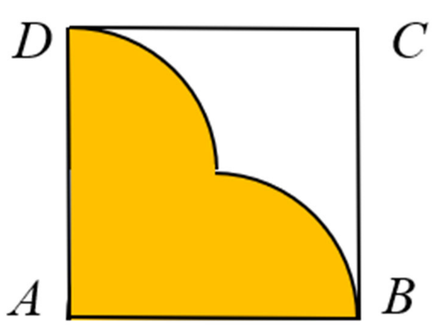
(Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma – 1, Cornelsen 2016)

a) Khi nào có 360 công nhân được sử dụng?

b) Khi nào số công nhân được sử dụng lớn nhất?

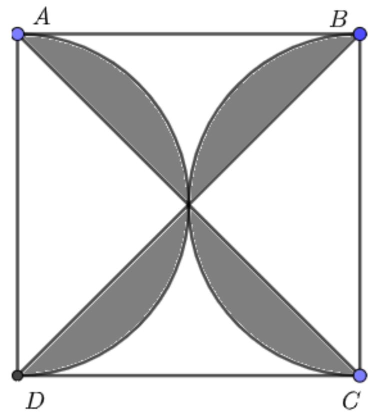
c) Gọi $M(t)$ là số ngày công được tính đến hết ngày thứ t (kể từ khi khởi công công trình). Trong kinh tế xây dựng, người ta đã biết rằng $M'(t)=m(t)$. Tổng cộng cần bao nhiêu ngày công để hoàn thành công trình xây dựng đó?

Câu 5: Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) (phần được tô màu trong hình vẽ bên) quanh trục AB. Miền (R) được giới hạn bởi các cạnh AB, AD của hình vuông $ABCD$ và các cung phần tư của các đường tròn bán kính bằng 1 cm với tâm lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, AB.

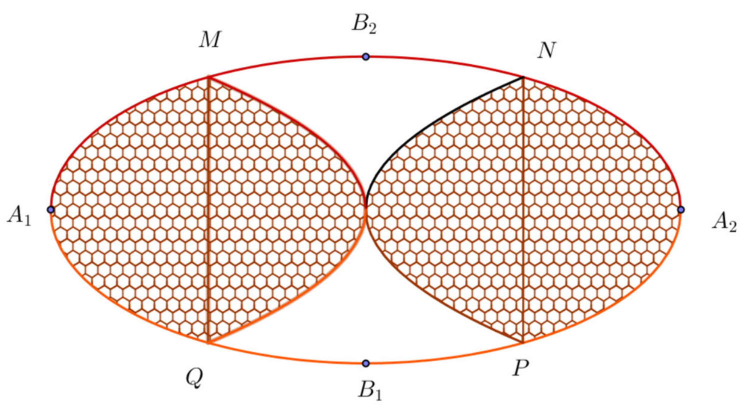


Tính thể tích của vật trang trí đó, làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

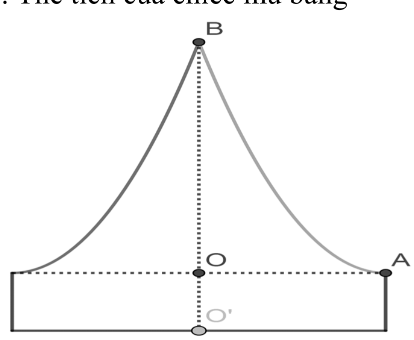
Câu 6: Từ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ cạnh $4cm$ vẽ hai đường chéo và hai nửa đường tròn đường kính là hai cạnh AD, BC cắt nhau tạo thành 4 hình cánh quạt như hình vẽ. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay 4 cánh quạt này quanh cạnh CD (kết quả làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).



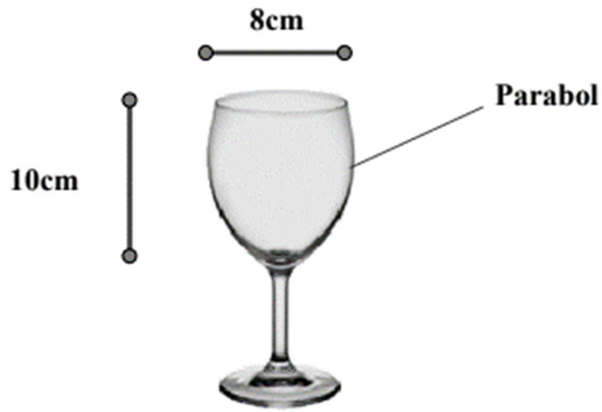
Câu 7: Mảnh vườn nhà ông An có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Ông dùng 2 đường Parabol có đỉnh là tâm đối xứng của elip cắt elip tại 4 điểm M, N, P, Q như hình vẽ sao cho tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MN = 4$ để chia vườn. Phần tô đậm dùng để trồng hoa và phần còn lại để trồng rau. Biết chi phí trồng hoa là 600.000 đồng/m^2 và trồng rau là 50.000 đồng/m^2. Hỏi số tiền phải chi gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8\text{ m}$, $B_1B_2 = 4\text{ m}$?



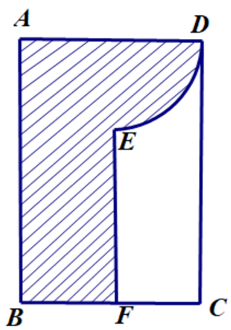
Câu 8: Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO' = 5$ cm, $OA = 10$ cm, $OB = 20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A. Thể tích của chiếc mũ bằng



Câu 9: Một cốc rượu có hình dạng tròn xoay và kích thước như hình vẽ, thiết diện dọc của cốc (bổ dọc cốc thành 2 phần bằng nhau) là một đường Parabol. Tính thể tích tối đa mà cốc có thể chứa được (làm tròn 2 chữ số thập phân).

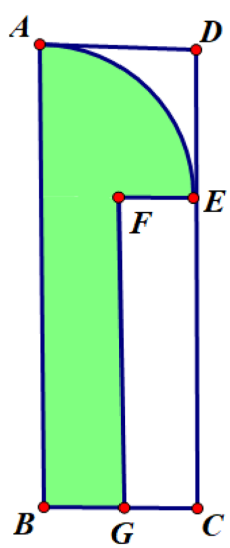


Câu 10: Một vật trang trí có dạng khối tròn xoay tạo thành khi quay miền (R) (phần gạch chéo trong hình vẽ) quay xung quanh trục AB. Biết $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = 3cm$, $AD = 2cm$; F là trung điểm của BC; điểm E cách AD một đoạn bằng $1cm$.



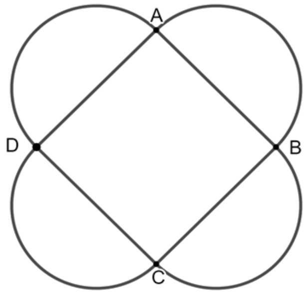
Thể tích của vật thể trang trí trên là (quy tròn đến hàng phần mười)

Câu 11: Một chiếc đinh tán có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi cho phần tô đậm quay xung quanh cạnh AB. Biết $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 20mm$, $AD = 6mm$, cung AE là cung một phần tư của đường tròn có bán kính bằng $6mm$, điểm F cách AB một đoạn bằng $3mm$



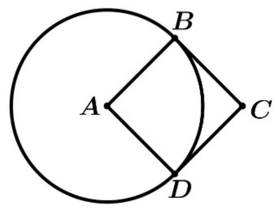
Thể tích của đinh tán là (quy tròn đến hàng phần mười)

Câu 12: Trong mặt phẳng cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2\sqrt{2}$, phía ngoài hình vuông vẽ thêm bốn nửa đường tròn nhận các cạnh của hình vuông làm đường kính (tham khảo hình vẽ).

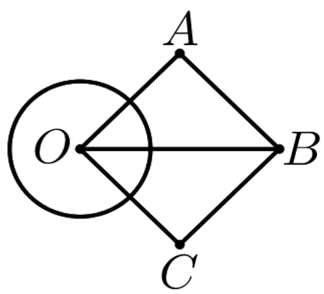


Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình trên quanh đường thẳng AC gần nhất với kết quả nào sau đây?

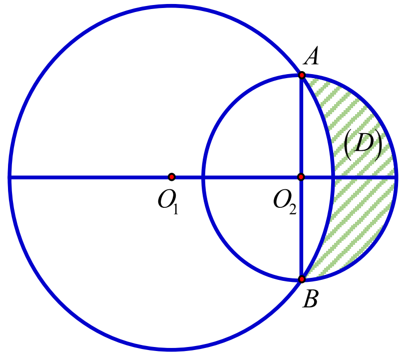
Câu 13: Trên một mảnh giấy vẽ hình tròn có bán kính bằng 2, vẽ chồng lên trên đó một hình vuông có 1 đỉnh là tâm của hình tròn và 2 đỉnh khác nằm trên đường tròn (*hình vẽ bên dưới*). Tính thể tích khối tròn xoay tạo ra khi quay hình đó quanh trục đối xứng của nó.



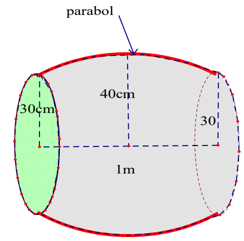
Câu 14: Cho hình tròn tâm O có bán kính $R=2$ và hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 (như hình vẽ bên). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình bên xung quanh trục là đường thẳng OB.



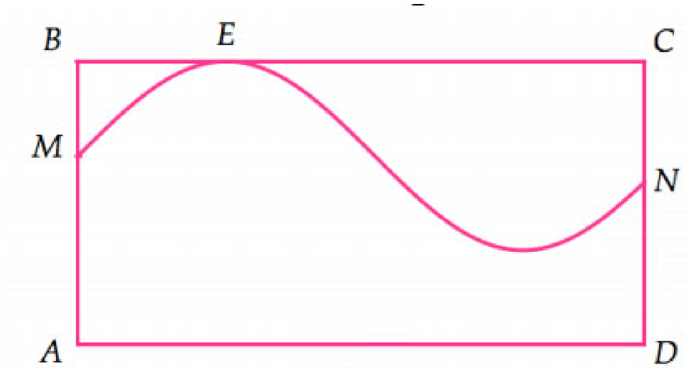
Câu 15: Cho hai đường tròn $(O_1;5)$ và $(O_2;3)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn (O_2). Gọi (D) là hình thẳng được giới hạn bởi hai đường tròn **(ở ngoài đường tròn lớn, phần được gạch chéo như hình vẽ)**. Quay (D) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.



Câu 16: Một cái trống trường có bán kính các đáy là $30\,\text{cm}$, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có diện tích là $1600\pi\left(cm^2\right)$, chiều dài của trống là $1m$. Biết rằng mặt phẳng chứa trục cắt mặt xung quanh của trống là các đường Parabol. Hỏi thể tích của cái trống là bao nhiêu?

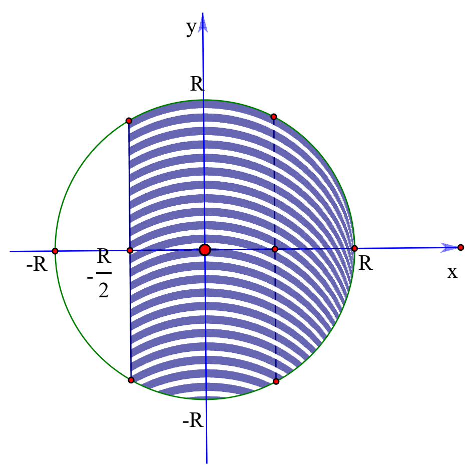


Câu 17: Từ một tấm tôn hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 30\,cm, AD = \dfrac{55\pi}{3}cm$. Người ta cắt miếng tôn theo đường hình $\sin$ như hình vẽ bên để được hai miếng tôn nhỏ. Biết $AM = 20\,cm$, $CN = 15\,cm$, $BE = 5\pi\,cm$ .Tính thể tích của lọ hoa được tạo thành bằng cách quay miếng tôn lớn quanh trục AD

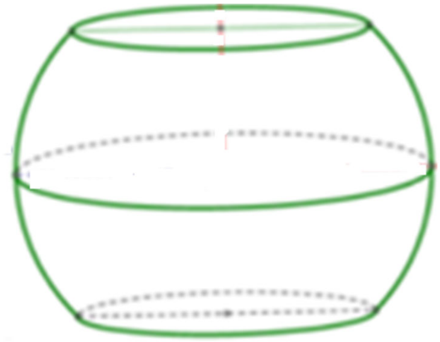


(kết quả làm tròn đến hàng trăm).

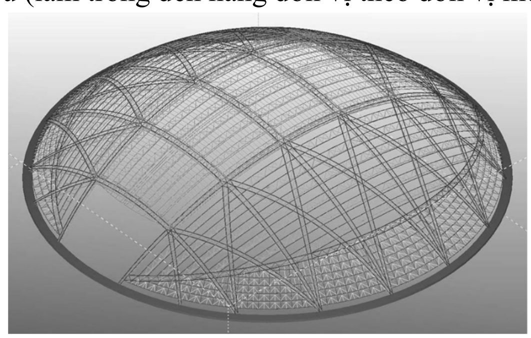
Câu 18: Cho khối trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O;R)$ và $(O';R)$, $OO' = 4R$. Trên đường tròn $(O;R)$ lấy hai điểm A, B sao cho $AB = R\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua A, B cắt đoạn OO' và tạo với đáy một góc bằng 60^0. (P) cắt khối trụ theo thiết diện là một phần của hình elip. Diện tích thiết diện đó bằng.

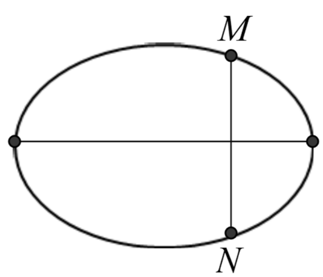


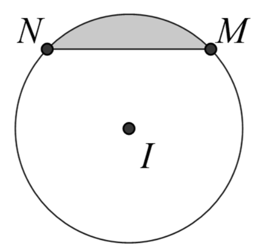
Câu 19: Một khối cầu có bán kính là $5\left(\text{dm}\right)$, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng $3\left(\text{dm}\right)$ để làm một chiếc lu đựng nước. Tính thể tích nước mà chiếc lu chứa được (quy tròn đến hàng đơn vị của decimét khối).



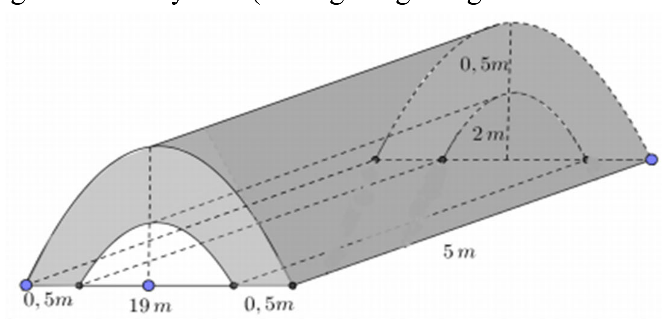
Câu 20: Sân vận động Sport Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015 . Nền sân là một elip $\left(E\right)$ có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$ (hình vẽ). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của $\left(E\right)$và cắt elip ở M,N (hình vẽ) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình 4) với MN là một dây cung và góc $\widehat{MIN}=90^0$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Hỏi thể tích xấp xỉ bao nhiêu (làm trong đến hàng đơn vị theo đơn vị mét khối)?



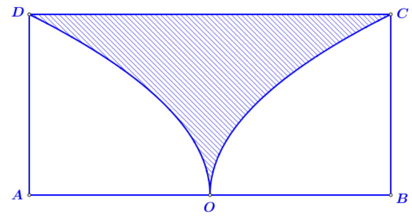




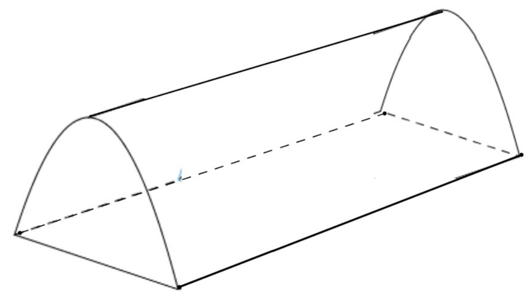
Câu 21: Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã Y có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol).



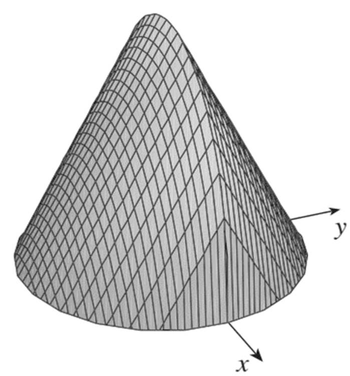
Câu 22: Từ hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB=10$ cm và chiều rộng $BC=5$ cm; Người ta cắt bỏ miền (R) được giới hạn bởi cạnh CD của hình chữ nhật và hai nửa đường parabol có chung đỉnh là trung điểm của cạnh AB, chúng lần lượt đi qua hai đầu mút C,D của hình chữ nhật đó (phần tô đậm như hình vẽ). Phần còn lại cho quay quanh trục AB để tạo nên một đồ vật làm trang trí, thể tích của vật trang trí đó bằng bao nhiêu?



Câu 23: Nhân dịp đi dã ngoại, lớp 12a dự kiến dựng một cái trại có dạng hình parabol như hình vẽ. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước bề ngang 3 mét, chiều dài 5 mét, đỉnh trại cách nền 3 mét. Thể tích phần không gian bên trong lều trại bằng bao nhiêu mét khối?



Câu 24: Cho vật thể đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (tham khảo hình vẽ). Khi cắt vật thể bằng mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\left(-1\le x\le 1\right)$ thì được thiết diện là một tam giác đều. Tính thể tích V của vật thể đó. (làm tròn đến hàng phần trăm)



Câu 25: Một ô tô đang chạy với vận tốc $16\,m/s$ thì người lái xe bất ngờ phát hiện chướng ngại vật trên đường cách đó $50m$. Người lái xe phản ứng một giây sau đó đạp phanh khẩn cấp. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v\left(t\right)=-5t+15$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Gọi $s\left(t\right)$ là quãng đường ô tô đi được trong t giây kể từ lúc đạp phanh.

Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai?

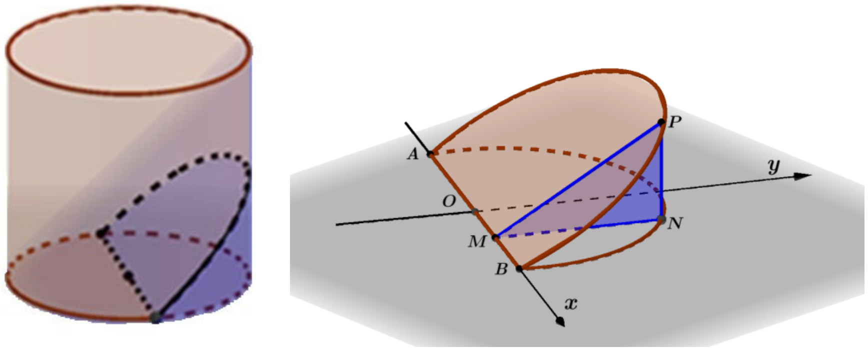
a) Công thức biểu diễn hàm số $s\left(t\right)$ là $s\left(t\right)=-\dfrac{5t^2}{2}+15t+16$

b) Thời gian kể từ khi ô tô đạp phanh đến khi dừng hẳn bằng 3 giây.

c) Kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được quãng đường là $38,5\,m$.

d) Xe ô tô không va chạm với chướng ngại.

Câu 26: Cho một vật thể bằng gỗ có dạng hình trụ với chiều cao và bán kính đáy cùng bằng 1. Cắt khối gỗ đó bởi một mặt phẳng đi qua đường kính của một mặt đáy của khối gỗ và tạo với mặt phẳng đáy của khối gỗ một góc $30°$ ta thu được khối gỗ hình nêm (H) và đặt khối (H) vào hệ trục tọa độ như hình vẽ. Phát biểu sau đây đúng hay sai?



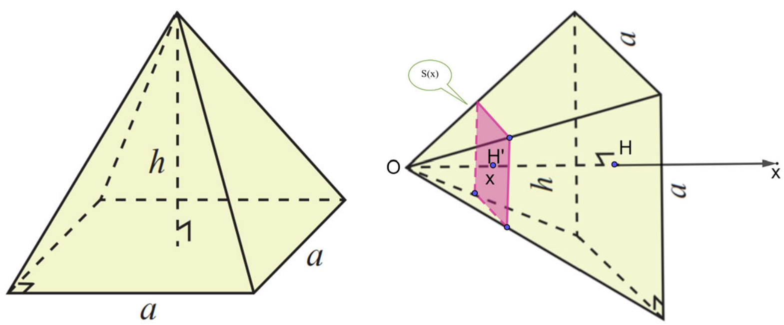
a) Nửa đường tròn đáy khối gỗ hình trụ có phương trình là $y=\sqrt{1+x^2}$,$(-1\le x\le 1)$.

b) Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm M có hoành độ x, cắt hình nêm theo thiết diện là ΔMNP vuông tại N và có góc $\widehat{PMN}=30°$. Lúc đó đoạn MN bằng $\sqrt{1-x^2}$.

c) Diện tích tam giác MNP bằng $1-x^2$.

d) Thể tích hình nêm (H) bằng $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

Câu 27: Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h (Hình bên dưới).



Chọn trục Ox như hình vẽ (gốc trùng với đỉnh của khối chóp, trục đi qua tâm của đáy).
Phát biểu sau đây đúng hay sai?

a) Đáy của khối chóp nằm trên mặt phẳng vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ h.

b) Mỗi mặt phẳng vuông góc Ox tại điểm có hoành độ $x, 0\le x\le h$ cắt khối chót theo mặt cắt là hình chữ nhật.

c) Diện tích mặt cắt là $S(x)=a^2\dfrac{h^2}{x^2}$

d) Thể tích của khối chóp là : $V=\int_0^h S(x)dx=\int_0^h a^2\dfrac{x^2}{h^2}dx=a^2\dfrac{x^3}{3h^2}\Bigg|_0^h=\dfrac{a^2h}{3}$.

CHƯƠNG III

NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

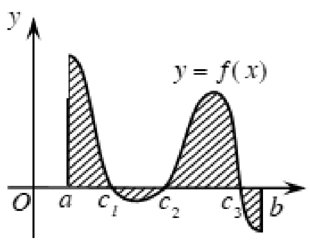
BÀI. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

I LÝ THUYẾT.

1. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

a) Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của một hàm số, trục hoành, hai đường thẳng $x = a$, $x = b$

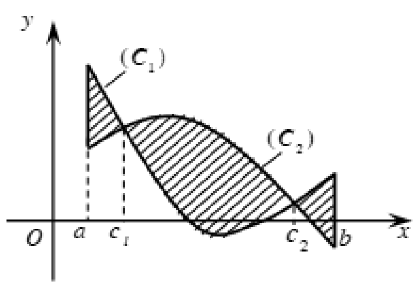
Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục, trục hoành và 2 đường thẳng $x = a, x = b$ $(a < b)$ được tính bởi công thức $S = \int_a^b |f(x)| dx$



$$(H)\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{S = \int_a^b |f(x)| dx}$$

b) Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính bởi công thức: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$



$$(H)\begin{cases} (C_1): y = f_1(x) \\ (C_2): y = f_2(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$\boxed{S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx}$$

Chú ý: Nếu hiệu $f(x) - g(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a;b]$ thì:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

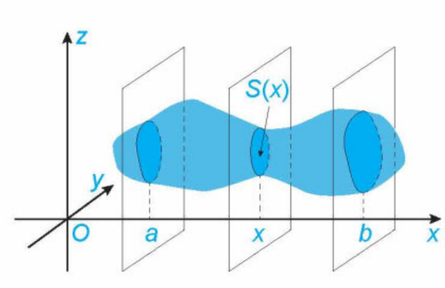
2. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ

a) Tính thể tích vật thể

Cho một vật thể trong không gian $Oxyz$. Gọi $\mathcal{B}$ là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm có hoành độ $x = a$, $x = b$. Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích là $S(x)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Khi đó thể tích V của phần vật thể $\mathcal{B}$ được tính bởi công thức

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$



Hình 4.21

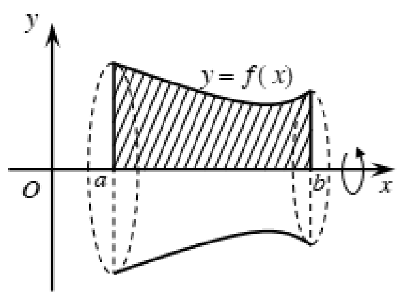
b) Thể tích khối tròn xoay

Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục, không âm trên $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$

Quay D quanh trục Ox ta được một hình khối gọi là *khối tròn xoay.*

Cắt khối tròn xoay trên bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x với $x \in [a;b]$ ta được mặt cắt là một hình tròn có bán kính $f(x)$ và diện tích $S(x) = \pi f^2(x)$

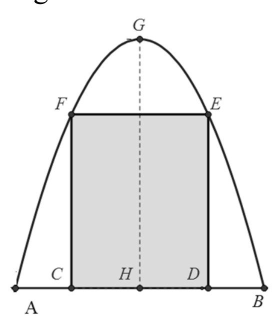
Vậy khối tròn có thể tích là: $V_N = \pi\int_a^b f^2(x)dx$



$$\begin{cases}(C): y = f(x)\\ (Ox): y = 0\\ x = a\\ x = b\end{cases} \qquad \boxed{V_x = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx}$$

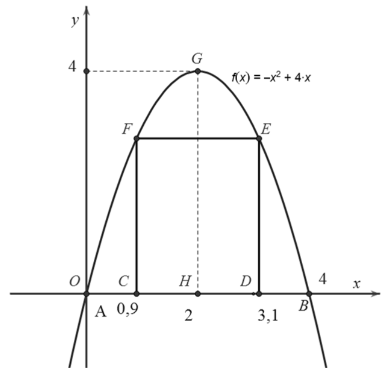
HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1: Cho Một cái cổng hình Parabol như hình vẽ sau. Chiều cao $GH = 4m$, chiều rộng $AB = 4m$, $AC = BD = 0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1200000 đồng$/m^2$, còn các phần để trắng thì trang trí hoa có giá là 900000 đồng$/m^2$. Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên bằng bao nhiêu?



Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho AB trùng Ox, A trùng với gốc O. Khi đó parabol có đỉnh $G(2;4)$ và đi qua gốc tọa độ.



Giả sử phương trình của parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$.

Vì parabol có đỉnh là $G(2;4)$ và đi qua điểm $O(0;0)$ nên ta có $\begin{cases} c = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ a.2^2 + b.2 + c = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0 \end{cases}$.

Suy ra phương trình parabol là $y = f(x) = -x^2 + 4x$.

Diện tích của cả cổng là $S = \int\limits_0^4 \left(-x^2 + 4x\right)\mathrm{d}x = \left(-\dfrac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Bigg|_0^4 = \dfrac{32}{3}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Mặt khác chiều cao $CF = DE = f(0,9) = 2,79(\mathrm{m})$; $CD = 4 - 2.0,9 = 2,2\ (\mathrm{m})$.

Diện tích hai cánh cổng là $S_{CDEF} = CD.CF = 6,138\ \left(\mathrm{m}^2\right)$.

Diện tích phần để trắng là $S_1 = S - S_{CDEF} = \dfrac{32}{3} - 6,138 = \dfrac{6793}{1500}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Vậy tổng số tiền để làm cổng là $6,138.1200000 + \dfrac{6793}{1500}.900000 = 11441400$ đồng.

Câu 2: Một khinh khí cầu bay với độ cao (so với mực nước biển) tại thời điểm t là $h(t)$, trong đó t tính bằng phút, $h(t)$ tính bằng mét. Tốc độ bay của khinh khí cầu được cho bởi hàm số $v(t) = -0,12t^2 + 1,2t$, với t tính bằng phút, $v(t)$ tính bằng mét/phút. Tại thời điểm xuất phát $(t = 0)$, khinh khí cầu ở độ cao $520\,\mathrm{m}$ và 5 phút sau khi xuất phát, khinh khí cầu đã ở độ cao $530\,\mathrm{m}$.

*(Nguồn: **A.** Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma – 1, Cornelsen 2016).*

a) Viết công thức xác định hàm số $h(t)\ (0 \le t \le 29)$.

b) Độ cao tối đa của khinh khí cầu khi bay là bao nhiêu?

c) Khi nào khinh khí cầu sẽ trở lại độ cao khi xuất phát?

Lời giải

a) Ta có $h(t) = \int v(t)\,dt = \int\left(-0,12t^2 + 1,2t\right)dt = -0,04t^3 + 0,6t^2 + C$.

Khi $t=0$ thì $h(0)=520$ suy ra $C=520$.

Vậy $h(t)=-0,04t^3+0,6t^2+520\ (0\le t\le 29)$

b) Độ cao tối đa của khinh khí cầu khi bay chính là giá trị lớn nhất của hàm số $h(t)$ trên đoạn $[0;29]$.

Ta có $h'(t)=v(t)=-0,12t^2+1,2t.$

$h'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=10\\t=0\end{array}\right.$

Có $h(0)=520,h(10)=540,h(29)=49,04$ nên $\underset{[0;29]}{Max}\,h(t)=540$ khi $t=10$.

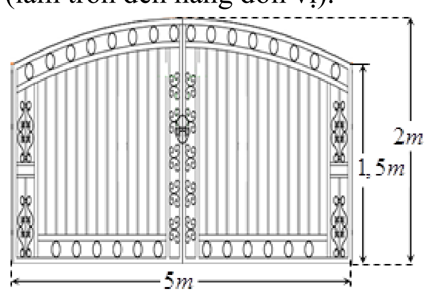
Độ cao tối đa của khinh khí cầu khi bay là $540\,\text{m}$.

c) Khinh khí cầu trở lại độ cao khi xuất phát tức có $h(t)=520$ với $t\ne 0$.

Ta có phương trình $-0,04t^3+0,6t^2+520=520\Leftrightarrow -0,04t^3+0,6t^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0(l)\\t=15(t/m)\end{array}\right.$

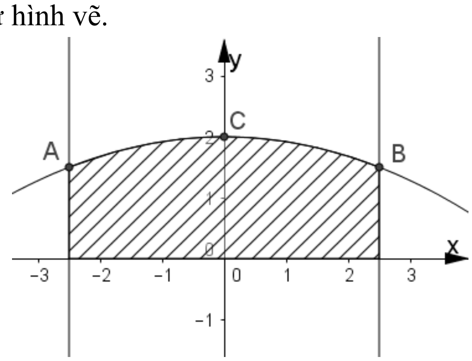
Vậy sau 15 phút từ khi xuất phát thì khinh khí cầu trở lại độ cao khi bắt đầu xuất phát.

Câu 3: Bác Bình muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá $1m^2$ của rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi bác Bình phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Trong đó $A(-2,5;1,5)$, $B(2,5;1,5)$, $C(0;2)$.

Giả sử đường cong phía trên là một Parabol có dạng $y=ax^2+bx+c$, với $a;b;c\in\mathbb{R}$.

Do Parabol đi qua các điểm $A(-2,5;1,5)$, $B(2,5;1,5)$, $C(0;2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a(-2,5)^2 + b(-2,5) + c = 1,5 \\ a(2,5)^2 + b(2,5) + c = 1,5 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{2}{25} \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases}.$$

Khi đó phương trình Parabol là $y = -\frac{2}{25}x^2 + 2$.

Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -\frac{2}{25}x^2 + 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2,5$; $x = 2,5$.

Ta có $S = \int\limits_{-2,5}^{2,5} \left(-\frac{2}{25}x^2 + 2\right) \mathrm{d}x = \left(-\frac{2}{25}\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_{-2,5}^{2,5} = \frac{55}{6}$.

Vậy bác Bình phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là

$S \times 700000 = \frac{55}{6} \times 700000 \approx 6.416.667$ (đồng).

Câu 4: Một công trình xây dựng dự kiến hoàn thành trong 100 ngày. Số lượng công nhân được sử dụng tại thời điểm t cho bởi hàm số $m(t) = 500 + 50\sqrt{t} - 10t$, trong đó t tính theo ngày $(0 \le t \le 100)$, $m(t)$ tính theo người.

(Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma – 1, Cornelsen 2016)

a) Khi nào có 360 công nhân được sử dụng?

b) Khi nào số công nhân được sử dụng lớn nhất?

c) Gọi $M(t)$ là số ngày công được tính đến hết ngày thứ t (kể từ khi khởi công công trình). Trong kinh tế xây dựng, người ta đã biết rằng $M'(t) = m(t)$. Tổng cộng cần bao nhiêu ngày công để hoàn thành công trình xây dựng đó?

Lời giải

a) Có 360 công nhân được sử dụng khi đó $m(t) = 360 \Leftrightarrow 500 + 50\sqrt{t} - 10t = 360$

$\Leftrightarrow -10\left(\sqrt{t}\right)^2 + 50\sqrt{t} + 140 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{t} = 7 \Leftrightarrow t = 49 \in [0;100]$

Vậy đến ngày thứ 49 thì có 360 công nhân được sử dụng.

b) Số công nhân được sử dụng lớn nhất là giá trị lớn nhất của hàm số $m(t)$ trên đoạn $[0;100]$.

Ta có $m'(t) = \frac{25}{\sqrt{t}} - 10$, trên đoạn $[0;100]$ thì $m'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6,25$.

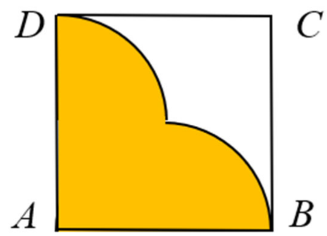
Có $m(0) = 500; m(6,25) = 562,5; m(100) = 0$

Vậy $\underset{[0;100]}{Max}\, m(t) = 562,5$ khi $t = 6,25$.

c) Ta có $\int\limits_0^{100} m(t)dt = \int\limits_0^{100} \left(500 + 50\sqrt{t} - 10t\right)dt \approx 33333,33$

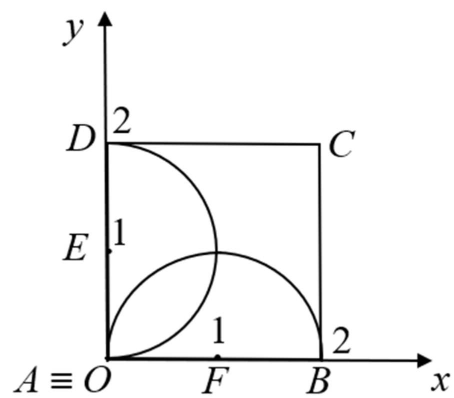
nên số ngày công để hoàn thành công trình xây dựng đó là 33334 ngày công.

Câu 5: Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) (phần được tô màu trong hình vẽ bên) quanh trục AB. Miền (R) được giới hạn bởi các cạnh AB, AD của hình vuông $ABCD$ và các cung phần tư của các đường tròn bán kính bằng 1 cm với tâm lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, AB.



Tính thể tích của vật trang trí đó, làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải



Chọn trục Ox chứa điểm B, trục Oy chứa điểm D, và gốc tọa độ O trùng điểm A (như hình vẽ).

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, AB. Khi đó $E(0;1)$, $F(1;0)$.

*Phương trình đường tròn có tâm $E(0;1)$ và đường kính $AD=2$ là: $x^2+(y-1)^2=1$.

Suy ra phương trình cung trên của đường tròn tâm E là: $y=1+\sqrt{1-x^2}$

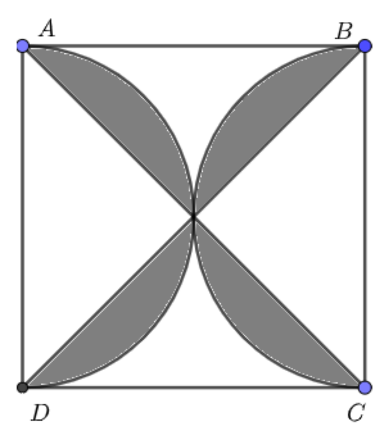
*Phương trình đường tròn có tâm $F(1;0)$ và đường kính $AB=2$ là: $(x-1)^2+y^2=1$.

Suy ra phương trình cung trên của đường tròn tâm F là: $y=\sqrt{1-(x-1)^2}$

Vậy, thể tích vật trang trí là:

$$V=\pi\int_0^1\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2.\mathrm{d}x+\pi\int_1^2\left(1-(x-1)^2\right).\mathrm{d}x\approx 12,3\left(\mathrm{cm}^3\right)$$

Câu 6: Từ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ cạnh $4cm$ vẽ hai đường chéo và hai nửa đường tròn đường kính là hai cạnh AD, BC cắt nhau tạo thành 4 hình cánh quạt như hình vẽ. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay 4 cánh quạt này quanh cạnh CD (kết quả làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).



Lời giải

Đặt hệ trục toạ độ Oxy với gốc O là đỉnh D, hai tia Ox, Oy tương ứng là là các tia DC, DA.

Phương trình đường tròn đường kính AD là $x^2+(y-2)^2=4$.

Phương trình đường tròn đường kính BC là $(x-4)^2+(y-2)^2=4$.

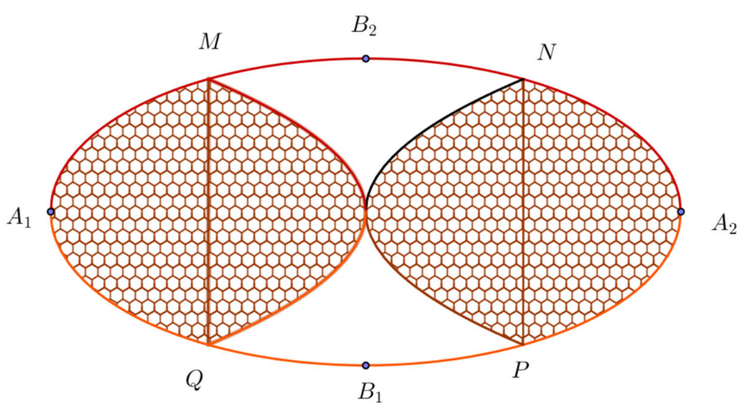
Phương trình $AC: x+y-4=0$, $BD: x-y=0$.

Thể tích cánh quạt đỉnh D quay quanh DC là $V_1=\pi\int_0^2 x^2dx-\pi\int_0^2\left(2-\sqrt{4-x^2}\right)^2dx$.

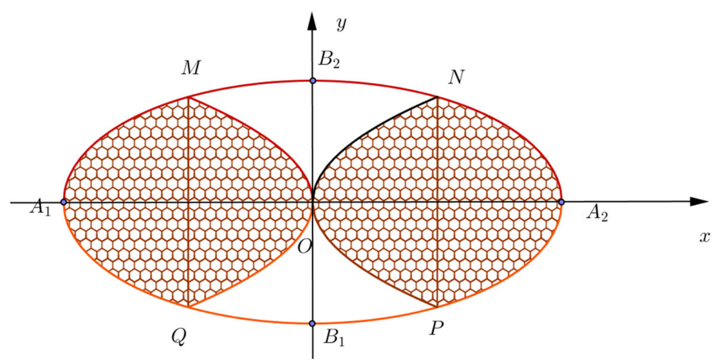
Thể tích cánh quạt đỉnh A quay quanh DC là $V_2=\pi\int_0^2\left(2+\sqrt{4-x^2}\right)^2dx-\pi\int_0^2(4-x)^2dx$.

Thể tích cần tìm là $V=2(V_1+V_2)=28,69\ cm^2$.

Câu 7: Mảnh vườn nhà ông An có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Ông dùng 2 đường Parabol có đỉnh là tâm đối xứng của elip cắt elip tại 4 điểm M,N,P,Q như hình vẽ sao cho tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MN=4$ để chia vườn. Phần tô đậm dùng để trồng hoa và phần còn lại để trồng rau. Biết chi phí trồng hoa là 600.000 đồng/m^2 và trồng rau là 50.000 đồng/m^2. Hỏi số tiền phải chi gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2=8$ m, $B_1B_2=4$ m?



Lời giải



Giả sử phương trình elip $(E): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases}A_1A_2=8\\B_1B_2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=8\\2b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\a=2\end{cases}\Rightarrow(E): \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1\Rightarrow y=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{16-x^2}$.

Diện tích của elip (E) là $S_{(E)}=\pi ab=8\pi\ \left(m^2\right)$.

Ta có: $MN=4 \Rightarrow \begin{cases} M=(P)\cap(E) \\ N=(P)\cap(E) \end{cases} \Rightarrow N\left(2;y_0\right)$. Do $N\in(E)\Rightarrow N\left(2;\sqrt{3}\right)$.

(P) đỉnh O và đi qua $N \Rightarrow (P): x=\frac{2}{3}y^2 \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{x}$

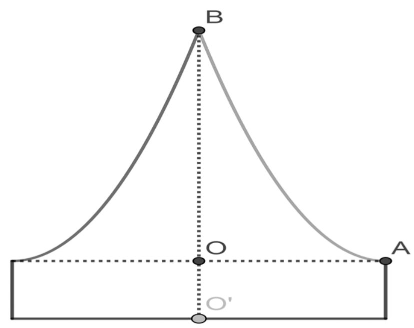
Khi đó, diện tích phần không tô màu là $S=4\int_0^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=4\frac{2\pi-\sqrt{3}}{3}\left(m^2\right)$.

Diện tích phần tô màu là $S'=S_{(E)}-S=8\pi-4\frac{2\pi-\sqrt{3}}{3}=\frac{16\pi+4\sqrt{3}}{3}$.

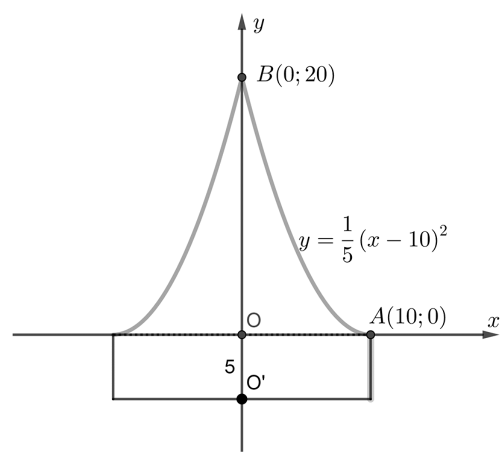
Số tiền phải chi theo yêu cầu bài toán là

$T=600.000\times\frac{16\pi+4\sqrt{3}}{3}+50.000\times4\frac{2\pi-\sqrt{3}}{3}\approx 4.889.000$ đồng.

Câu 8: Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO'=5$ cm, $OA=10$ cm, $OB=20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A. Thể tích của chiếc mũ bằng



Lời giải



Ta gọi thể tích của chiếc mũ là V.

Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng $OA=10$ cm và đường cao $OO'=5$ cm là V_1.

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong AB và hai trục tọa độ quanh trục Oy là V_2.

Ta có $V=V_1+V_2$

$V_1=5.10^2\pi=500\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Do parabol có đỉnh A nên nó có phương trình dạng $(P): y = a(x-10)^2$.

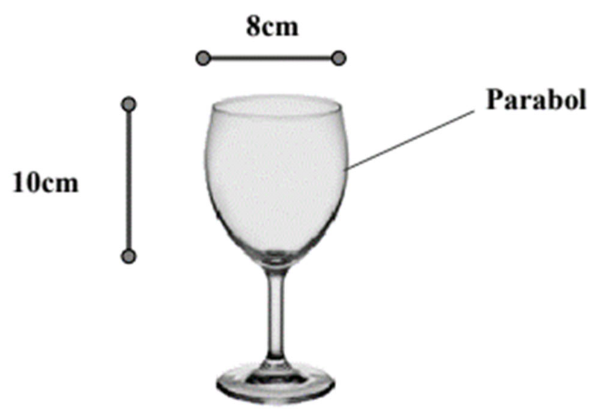
Vì (P) qua điểm $B(0;20)$ nên $a = \frac{1}{5}$.

Do đó, $(P): y = \frac{1}{5}(x-10)^2$. Từ đó suy ra $x = 10 - \sqrt{5y}$ (do $x < 10$).

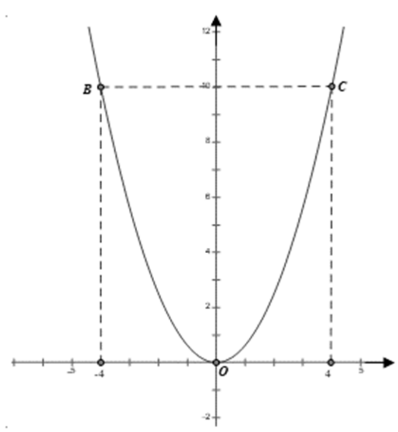
Suy ra $V_2 = \pi \int_0^{20} \left(10 - \sqrt{5y}\right)^2 \mathrm{dy} = \pi\left(3000 - \frac{8000}{3}\right) = \frac{1000}{3}\pi \ \left(\mathrm{cm}^3\right)$.

Do đó $V = V_1 + V_2 = \frac{1000}{3}\pi + 500\pi = \frac{2500}{3}\pi \ \left(\mathrm{cm}^3\right)$.

Câu 9: Một cốc rượu có hình dạng tròn xoay và kích thước như hình vẽ, thiết diện dọc của cốc (bổ dọc cốc thành 2 phần bằng nhau) là một đường Parabol. Tính thể tích tối đa mà cốc có thể chứa được (làm tròn 2 chữ số thập phân).



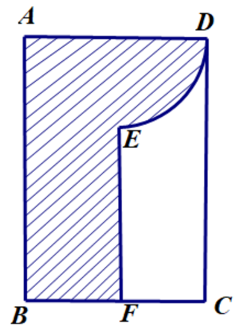
Lời giải



Parabol có phương trình $y = \frac{5}{8}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{5}y$

Thể tích tối đa cốc $V = \pi \int_0^{10} \left(\frac{8}{5}y\right).dy \approx 251,33$.

Câu 10: Một vật trang trí có dạng khối tròn xoay tạo thành khi quay miền (R) (phần gạch chéo trong hình vẽ) quay xung quanh trục AB. Biết $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = 3cm$, $AD = 2cm$; F là trung điểm của BC; điểm E cách AD một đoạn bằng $1cm$.

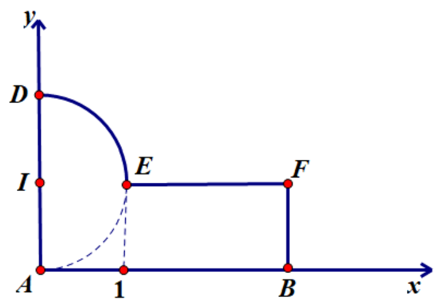


Thể tích của vật thể trang trí trên là (quy tròn đến hàng phần mười)

Lời giải

Chọn hệ trục Oxy có $O \equiv A$; $B \in Ox; D \in Oy$.

Ta có: $A(0;0)$; $D(0;2)$; $B(3;0)$; $E(1;1)$



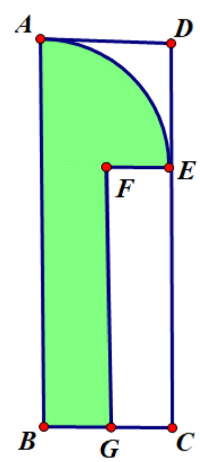
Đường tròn tâm $I(0;1)$ chứa cung ED có phương trình là: $x^2+(y-1)^2=1$.

Nên cung trên của đường tròn tâm I là: $y=1+\sqrt{1-x^2}$.

Thể tích của vật thể trang trí là:

$V=\pi\int_0^1\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2dx+\pi\int_1^3 1^2dx\approx 16,5(cm^3)$.

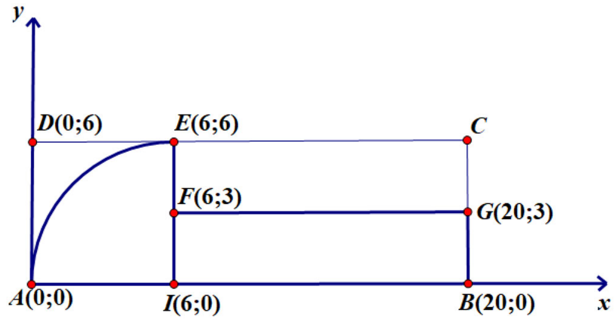
Câu 11: Một chiếc đinh tán có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi cho phần tô đậm quay xung quanh cạnh AB. Biết $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=20mm$, $AD=6mm$, cung AE là cung một phần tư của đường tròn có bán kính bằng $6mm$, điểm F cách AB một đoạn bằng $3mm$



Thể tích của đinh tán là (quy tròn đến hàng phần mười)

Lời giải

Chọn hệ trục Oxy có $A \equiv O$; $B(20;0); D(0;6)$.



Khi đó: F là trung điểm của EI và $I(6;0); E(6;6); F(6;3); G(20;3)$.

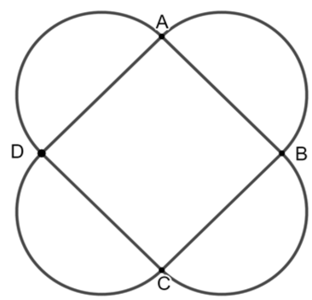
+ Đường tròn tâm $I(6;0)$ bán kính bằng 6 có phương trình là: $(x-6)^2+y^2=36$.

Nên nửa cung phía trên của trục Ox có phương trình là: $y=\sqrt{36-(x-6)^2}$.

+ Phương trình đường thẳng FG là: $y=3$.

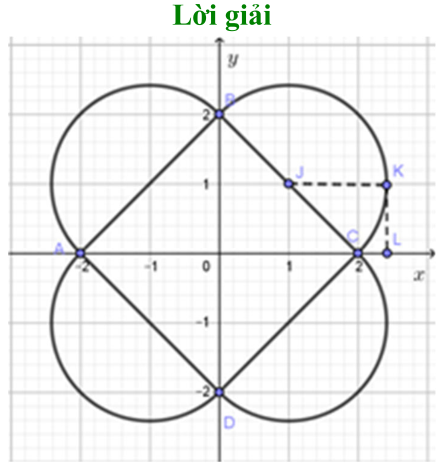
Vậy thể tích của đinh tán là: $V=\pi\int_0^6\left[36-(x-6)^2\right]dx+\pi\int_6^{20}3^2dx\approx 848,2\left(mm^3\right)$

Câu 12: Trong mặt phẳng cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2\sqrt{2}$, phía ngoài hình vuông vẽ thêm bốn nửa đường tròn nhận các cạnh của hình vuông làm đường kính (tham khảo hình vẽ).



Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình trên quanh đường thẳng AC gần nhất với kết quả nào sau đây?

Lời giải



• Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Ta có: $J(1;1), K\left(\sqrt{2}+1;1\right), L\left(\sqrt{2}+1;0\right), C(2;0)$.

Phương trình đường tròn tâm $J(1;1)$ bán kính $JB=\sqrt{2}$ là

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\sqrt{2-(x-1)^2}+1=1+\sqrt{1+2x-x^2}, \quad \text{khi } y\ge 1 \\ y=-\sqrt{2-(x-1)^2}+1=1-\sqrt{1+2x-x^2}, \text{ khi } y<1 \end{array}\right.$$

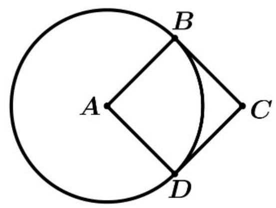
• Gọi (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=1+\sqrt{1+2x-x^2}$, trục hoành, hai đường thẳng $x=0$, $x=1+\sqrt{2}$.

Gọi (H_2) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=1-\sqrt{1+2x-x^2}$, trục hoành, hai đường thẳng $x=2$, $x=1+\sqrt{2}$.

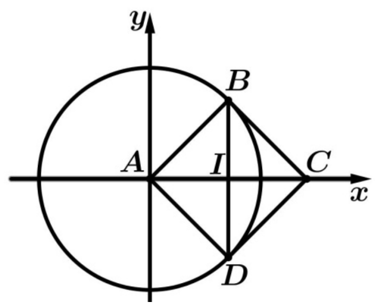
• Thể tích khối tròn xoay cần tính là:

$$V=2\left[V_{(H_1)}-V_{(H_2)}\right]=2\left[\pi\int_0^{1+\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{1+2x-x^2}\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int_2^{1+\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{1+2x-x^2}\right)^2\mathrm{d}x\right]\approx 72,989 \text{ (đvtt)}.$$

Câu 13: Trên một mảnh giấy vẽ hình tròn có bán kính bằng 2, vẽ chồng lên trên đó một hình vuông có 1 đỉnh là tâm của hình tròn và 2 đỉnh khác nằm trên đường tròn (*hình vẽ bên dưới*). Tính thể tích khối tròn xoay tạo ra khi quay hình đó quanh trục đối xứng của nó.



Lời giải



Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Phương trình đường tròn là $x^2+y^2=4$.

Thể tích khối tròn xoay khi quay phần hình bên trái BD quanh trục đối xứng của nó là

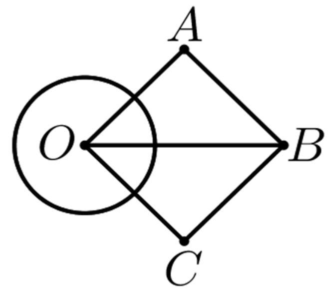
$$V_1=\pi\int_{-2}^{\sqrt{2}}\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{\left(16+10\sqrt{2}\right)\pi}{3}$$

Thể tích khối tròn xoay khi quay phần hình bên phải BD quanh trục đối xứng của nó là

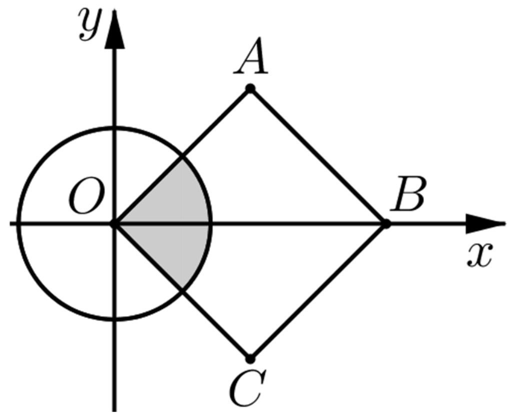
$$V_2=\frac{1}{3}\pi.\left(\sqrt{2}\right)^2.\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$$

Thể tích cần tìm là $V=V_1+V_2=\dfrac{\left(16+12\sqrt{2}\right)\pi}{3}$.

Câu 14: Cho hình tròn tâm O có bán kính $R=2$ và hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 (như hình vẽ bên). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình bên xung quanh trục là đường thẳng OB.



Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxy có gốc tọa độ trùng O, tia Ox có giá là OB và tia Oy song song AC (như hình vẽ).

Khi đó đường tròn (O) có phương trình $x^2+y^2=4$ và đường thẳng OA có phương trình $y=x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng OA và đường tròn (C) là: $\sqrt{4-x^2}=x \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$.

Thể tích vật thể tròn xoay khi quay phần tô đen quanh Ox là:

$$V_1=\pi\int_0^{\sqrt{2}}x^2dx+\pi.\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(4-x^2\right)=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}+\frac{\left(16-10\sqrt{2}\right)\pi}{3}=\frac{\left(16-8\sqrt{2}\right)\pi}{3}.$$

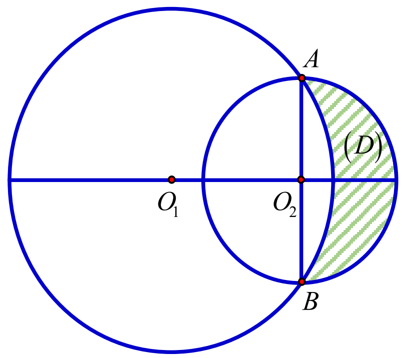
Thể tích khối tròn xoay khi quay (O) quanh Ox là khối cầu có $V_2=\frac{4}{3}\pi.2^3=\frac{32}{3}\pi$.

Thể tích khối tròn xoay khi quay $OABC$ quanh Ox là (tổng của hai khối nón)

$$V_3=2\times\left[\frac{1}{3}\pi.\left(2\sqrt{2}\right)^2.2\sqrt{2}\right]=\frac{32\sqrt{2}\pi}{3}.$$

Vậy thể tích cần tính: $V=V_2+V_3-V_1=\frac{16+40\sqrt{2}}{3}\pi=\frac{8\pi\left(2+5\sqrt{2}\right)}{3}$.

Câu 15: Cho hai đường tròn $(O_1;5)$ và $(O_2;3)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn (O_2). Gọi (D) là hình thẳng được giới hạn bởi hai đường tròn **(ở ngoài đường tròn lớn, phần được gạch chéo như hình vẽ)**. Quay (D) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.



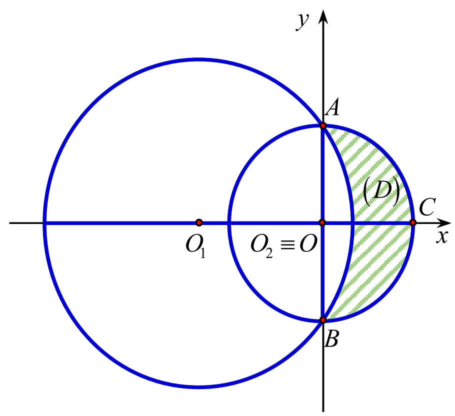
Lời giải

Chọn hệ tọa độ Oxy với $O_2 \equiv O,\ O_2C \equiv Ox,\ O_2A \equiv Oy.$

Đoạn $O_1O_2 = \sqrt{O_1A^2 - O_2A^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow (O_1): (x+4)^2 + y^2 = 25.$

Kí hiệu (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $(O_1): (x+4)^2 + y^2 = 25,\ Oy: x = 0,\ x \ge 0.$

Kí hiệu (H_2) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $(O_2): x^2 + y^2 = 9,\ Oy: x = 0,\ x \ge 0.$



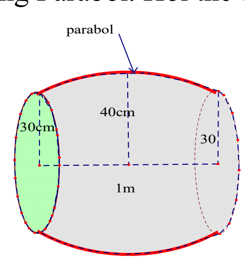
Khi đó thể tích V cần tìm chính bằng thể tích V_2 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_2) xung quanh trục Ox trừ đi thể tích V_1 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_1) xung quanh trục Ox.

Ta có $V_2 = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi.3^3 = 18\pi.$

Lại có $V_1 = \pi\int_0^1 y^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^1 \left[25 - (x+4)^2\right]\mathrm{d}x = \pi\left[25x - \frac{(x+4)^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{14\pi}{3}.$

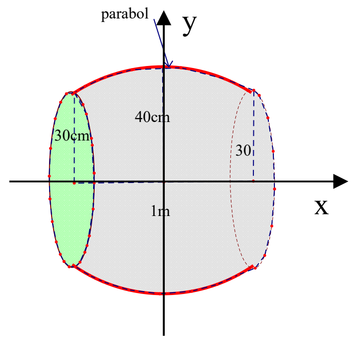
Do đó $V = V_2 - V_1 = 18\pi - \frac{14\pi}{3} = \frac{40\pi}{3}.$

Câu 16: Một cái trống trường có bán kính các đáy là $30\,\text{cm}$, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có diện tích là $1600\pi\left(cm^2\right)$, chiều dài của trống là $1m$. Biết rằng mặt phẳng chứa trục cắt mặt xung quanh của trống là các đường Parabol. Hỏi thể tích của cái trống là bao nhiêu?



Lời giải

Ta có chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy là hình tròn.

có bán kính r có diện tích là $1600\pi\left(cm^2\right)$, nên.

$r^2\pi = 1600\pi \Rightarrow r = 40cm$.

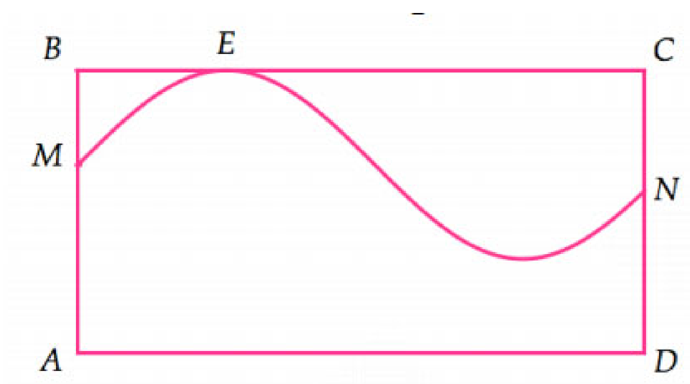
Ta có: Parabol có đỉnh $I(0;40)$ và qua $A(50;30)$.

Nên có phương trình $y = -\dfrac{1}{250}x^2 + 40$.

Thể tích của trống là.

$V = \pi\int\limits_{-50}^{50}\left(-\dfrac{1}{250}x^2+40\right)^2 dx = \pi.\dfrac{406000}{3}cm^3 \approx 425,2dm^3 = 425,2$ (lít).

Câu 17: Từ một tấm tôn hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 30\,cm, AD = \dfrac{55\pi}{3}cm$. Người ta cắt miếng tôn theo đường hình sin như hình vẽ bên để được hai miếng tôn nhỏ. Biết $AM = 20\,cm$, $CN = 15\,cm$, $BE = 5\pi\,cm$ .Tính thể tích của lọ hoa được tạo thành bằng cách quay miếng tôn lớn quanh trục AD



(kết quả làm tròn đến hàng trăm).

Lời giải

Chọn hệ trục Oxy sao cho $A \equiv O$, $D \in Ox$, $B \in Oy$.

Ta có $BE = 5\pi$ suy ra hàm số tuần hoàn với chu kì $T = 20\pi$.

Suy ra phương trình đồ thị hình *sin* cần tìm có dạng: $y = a\sin\left(\dfrac{x}{10}\right) + b$.

Do đồ thị hình sin đi qua $M(0;20)$, $N\left(\frac{55\pi}{3};15\right)$ nên ta có:

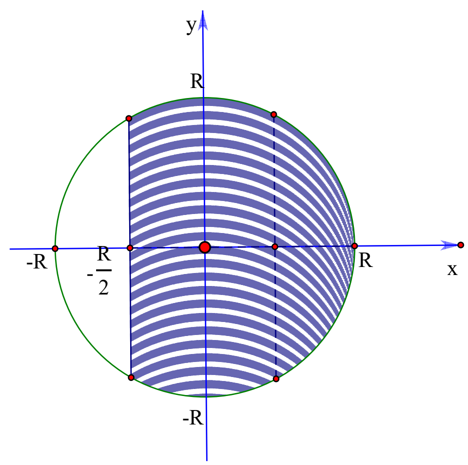
$$\begin{cases} a\sin\left(\frac{1}{10}.0\right)+b=20 \\ a\sin\left(\frac{1}{10}.\frac{55\pi}{3}\right)+b=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=10 \\ b=20 \end{cases}.$$

Ta có phương trình đồ thị hình sin cần tìm là $y=10\sin\left(\frac{x}{10}\right)+20$.

Thể tích cần tìm là: $\pi\int_0^{\frac{55\pi}{3}}\left(10\sin\left(\frac{x}{10}\right)+20\right)^2 \mathrm{d}x \simeq 83788\,cm^3$.

Câu 18: Cho khối trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O;R)$ và $(O';R)$, $OO'=4R$. Trên đường tròn $(O;R)$ lấy hai điểm A, B sao cho $AB=R\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua A, B cắt đoạn OO' và tạo với đáy một góc bằng 60^0. (P) cắt khối trụ theo thiết diện là một phần của hình elip. Diện tích thiết diện đó bằng.

Lời giải



$$\cos\widehat{AOB}=\frac{OA^2+OB^2-AB^2}{2.OA.OB}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{AOB}=120^0\Rightarrow OH=\frac{R}{2}.$$

Chọn hệ trục như hình vẽ bên $\Rightarrow$ Phương trình đường tròn đáy là

$x^2+y^2=R^2\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$.

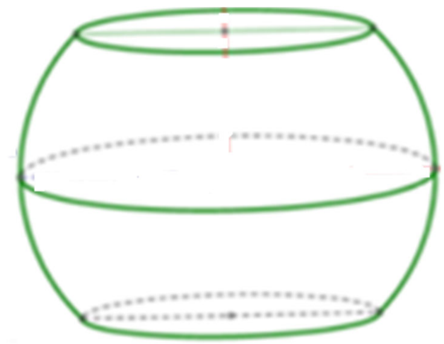
Hình chiếu của phần elip xuống đáy là miền sọc xanh như hình vẽ.

Ta có $S=2\int\limits_{-\frac{R}{2}}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$. Đặt $x=R.\sin t\Rightarrow S=\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$.

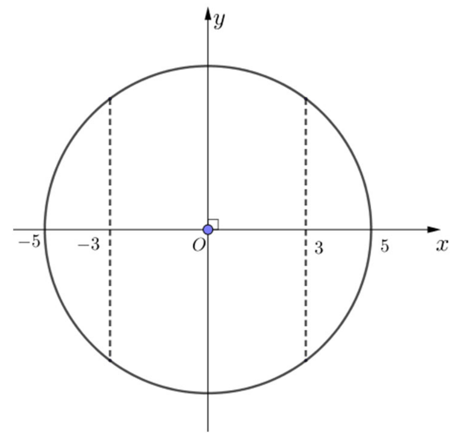
Gọi diện tích phần elip cần tính là S'.

Theo công thức hình chiếu, ta có $S'=\frac{S}{\cos 60^0}=2S=\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

Câu 19: Một khối cầu có bán kính là $5(\mathrm{dm})$, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng $3(\mathrm{dm})$ để làm một chiếc lu đựng nước. Tính thể tích nước mà chiếc lu chứa được (quy tròn đến hàng đơn vị của decimét khối).



Lời giải



Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 25$.

Ta thấy nếu cho nửa trên trục Ox của (C) quay quanh trục Ox ta được mặt cầu bán kính bằng 5.

Nếu cho hình phẳng (H) giới hạn bởi nửa trên trục Ox của (C), trục Ox, hai đường thẳng $x = 0,\ x = 3$ quay xung quanh trục Ox ta sẽ được khối tròn xoay chính là một nửa của cái lu.

Ta có $x^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{25 - x^2}$.

$\Rightarrow$ Nửa trên trục Ox của (C) có phương trình $y = \sqrt{25 - x^2}$.

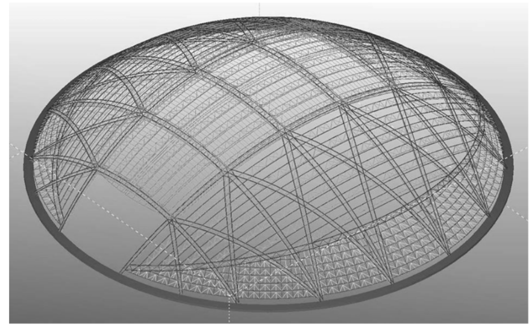
Do đó, thể tích vật thể tròn xoay khi cho (H) quay quanh Ox là:

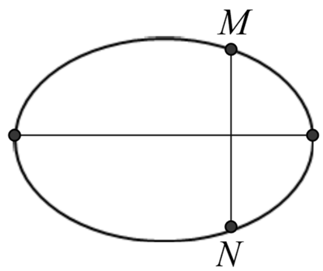
$$V_1 = \pi\int_0^3 \left(25 - x^2\right)\mathrm{d}x = \pi\left(25x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 = 66\pi.$$

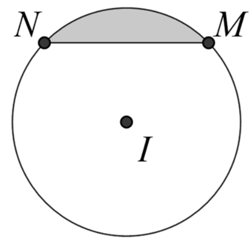
$$V = 2V_1 = 132\pi\left(\mathrm{dm}^3\right) \approx 415\left(\mathrm{dm}^3\right).$$

Vậy thể tích nước mà chiếc lu chứa được khoảng $415\mathrm{dm}^3$.

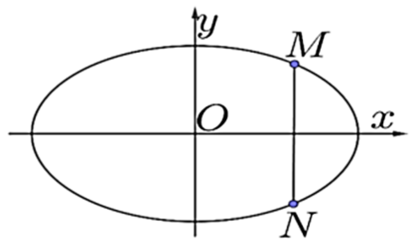
Câu 20: Sân vận động Sport Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip (E) có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$ (hình vẽ). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt elip ở M, N (hình vẽ) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình 4) với MN là một dây cung và góc $\widehat{MIN} = 90^0$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Hỏi thể tích xấp xỉ bao nhiêu (làm trong đến hàng đơn vị theo đơn vị mét khối)?







Lời giải



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.

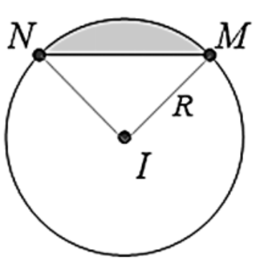
Phương trình chính tắc của E-líp đáy:

$(E): \dfrac{x^2}{75^2}+\dfrac{y^2}{45^2}=1.$

Gọi $M(x;y) \Rightarrow MN = 2y = 2\sqrt{45^2\left(1-\dfrac{x^2}{75^2}\right)} = 90\sqrt{1-\dfrac{x^2}{75^2}}$

$\Rightarrow R = \dfrac{MN}{\sqrt{2}} = \dfrac{90}{\sqrt{2}}.\sqrt{1-\dfrac{x^2}{75^2}} \Rightarrow R^2 = \dfrac{90^2}{2}.\left(1-\dfrac{x^2}{75^2}\right).$

Ta có công thức diện tích hình quạt: $S_{quat} = \dfrac{\pi R^2.\alpha}{360°}$ với α (theo đơn vị độ) là số đo góc ở tâm chắn cung tương ứng.



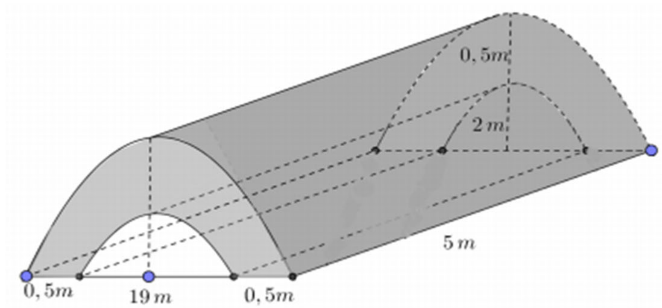
Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện, ta có:

$S(x) = S_{quat} - S_{\Delta IMN} = \dfrac{1}{4}\pi R^2 - \dfrac{1}{2}R^2 = \left(\dfrac{1}{4}\pi - \dfrac{1}{2}\right)R^2 = (\pi-2)\dfrac{2025}{2}.\left(1-\dfrac{x^2}{75^2}\right).$

Thể tích khoảng không gian sân vận động là

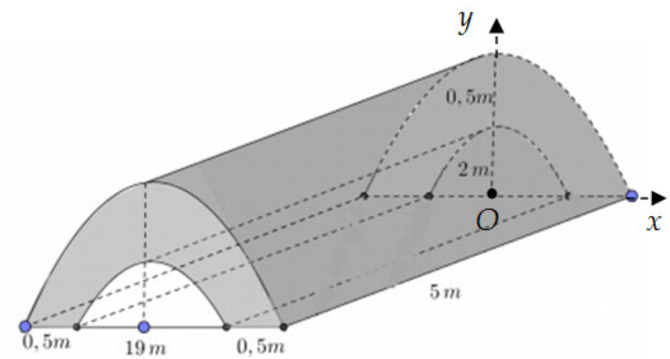
$$V=\int_{-75}^{75}(\pi-2)\frac{2025}{2}.\left(1-\frac{x^2}{75^2}\right)\approx 115586m^3.$$

Câu 21: Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã Y có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol).



Lời giải

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Gọi $(P_1): y=a_1x^2+b_1$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2};0\right), B(0;2)$

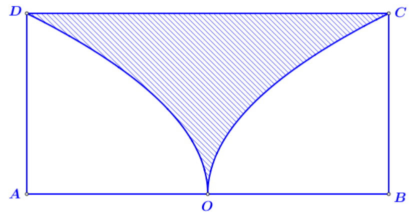
Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases}0=a.\left(\frac{19}{2}\right)^2+2\\2=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=-\frac{8}{361}\\b_1=2\end{cases}\Rightarrow(P_1): y=-\frac{8}{361}x^2+2$.

Gọi $(P_2): y=a_2x^2+b_2$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10;0), D\left(0;\frac{5}{2}\right)$

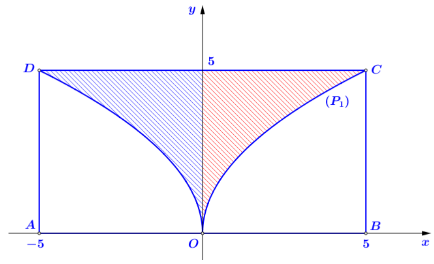
Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases}0=a_2.(10)^2+\frac{5}{2}\\\frac{5}{2}=b_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_2=-\frac{1}{40}\\b_2=\frac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow(P_2): y=-\frac{1}{40}x^2+\frac{5}{2}$.

Ta có thể tích của bê tông là: $V=5.2\left[\int_0^{10}\left(-\frac{1}{40}x^2+\frac{5}{2}\right)dx-\int_0^{\frac{19}{2}}\left(-\frac{8}{361}x^2+2\right)dx\right]=40(\mathrm{m}^3)$.

Câu 22: Từ hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB=10$ cm và chiều rộng $BC=5$ cm; Người ta cắt bỏ miền (R) được giới hạn bởi cạnh CD của hình chữ nhật và hai nửa đường parabol có chung đỉnh là trung điểm của cạnh AB, chúng lần lượt đi qua hai đầu mút C,D của hình chữ nhật đó (phần tô đậm như hình vẽ). Phần còn lại cho quay quanh trục AB để tạo nên một đồ vật làm trang trí, thể tích của vật trang trí đó bằng bao nhiêu?



Lời giải



Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục AB ta được khối trụ có

● Bán kính đáy $r = BC = 5$ cm.

● Chiều cao $h = AB = 10$ cm.

Do đó thể tích khối trụ này có thể tích $V_1 = \pi.5^2.10 = 250\pi\left(\text{cm}^3\right)$

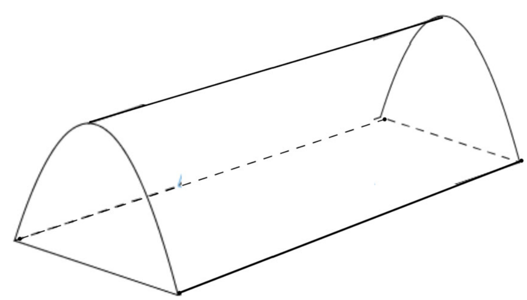
Mặt khác, chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ thì $C(5;5)$ và parabol bên phải trục Ox có dạng $(P_1): y^2 = 2px$.

Ta có $C \in (P_1) \Leftrightarrow p = \dfrac{5}{2} \Rightarrow (P_1): y^2 = 5x$ hay $y = \sqrt{5x}$.

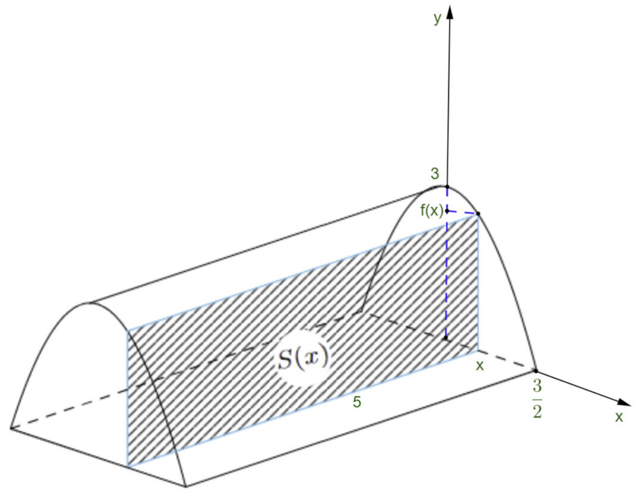
Khi đó miền (R) khi quay quanh trục Ox có thể tích $V_2 = 2\pi\int\limits_0^5\left[5^2 - 5x\right]\text{d}x = 2\pi\left(25x - \dfrac{5}{2}x^2\right)\Bigg|_0^5 = 125\pi$

Vậy thể tích phần còn lại là $V = V_1 - V_2 = 125\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 23: Nhân dịp đi dã ngoại, lớp 12a dự kiến dựng một cái trại có dạng hình parabol như hình vẽ. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước bề ngang 3 mét, chiều dài 5 mét, đỉnh trại cách nền 3 mét. Thể tích phần không gian bên trong lều trại bằng bao nhiêu mét khối?



Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, hình dạng khung trại là parabol có phương trình $y=f\left(x\right)=\text{ax}^2+bx+c$, vì đỉnh trại cao 3m và bề ngang rộng 3m nên parabol đi qua điểm $\left(0;3\right)$ và $\left(\frac{3}{2};0\right)$.

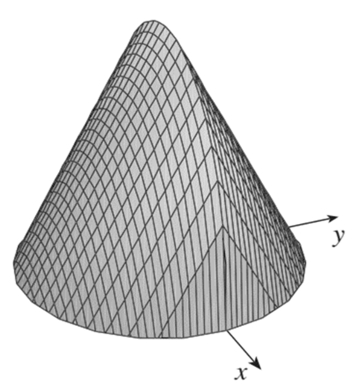
Ta có : $\begin{cases} b=0 \\ 3=c \\ 0=a.\left(\frac{3}{2}\right)^2+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=-\frac{4}{3} \\ c=3 \end{cases}$

Suy ra parabol có phương trình $y=f\left(x\right)=-\frac{4}{3}x^2+3$.

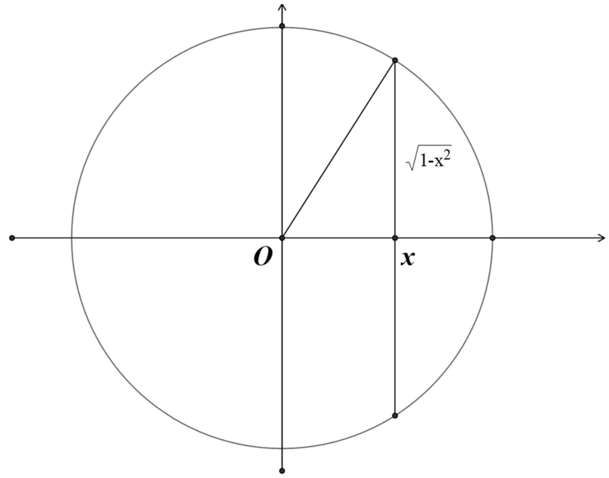
Mỗi mặt phẳng vuông góc Ox tại điểm có hoành độ $x, 0\le x\le h$ cắt khối chót theo mặt cắt là hình chữ nhật có độ dài các cạnh lần lượt là 5 và $\left|f\left(x\right)\right|$, có diện tích $S\left(x\right)=5.\left|f\left(x\right)\right|$, với $-\frac{3}{2}\le x\le\frac{3}{2}$.

Vậy thể tích phần không gian trong trại là $V=\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}5.\left|f\left(x\right)\right|dx=5.\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}\left|-\frac{4}{3}x^2+3\right|dx=30\ m^3$.

Câu 24: Cho vật thể đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (tham khảo hình vẽ). Khi cắt vật thể bằng mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\left(-1\le x\le 1\right)$ thì được thiết diện là một tam giác đều. Tính thể tích V của vật thể đó. (làm tròn đến hàng phần trăm)



Lời giải



Do vật thể có đáy là đường tròn và khi cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox được thiết diện là tam giác đều do đó vật thể đối xứng qua mặt phẳng vuông góc với trục Oy tại điểm O.

Cạnh của tam giác đều thiết diện là: $a = 2\sqrt{1-x^2}$.

Diện tích tam giác thiết diện là: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \left(1-x^2\right)\sqrt{3}$.

Thể tích khối cần tìm là:

$$V = 2\int_0^1 Sdx = 2\int_0^1 \sqrt{3}\left(1-x^2\right) = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2,31.$$

Câu 25: Một ô tô đang chạy với vận tốc $16\,m/s$ thì người lái xe bất ngờ phát hiện chướng ngại vật trên đường cách đó $50m$. Người lái xe phản ứng một giây sau đó đạp phanh khẩn cấp. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 15$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường ô tô đi được trong t giây kể từ lúc đạp phanh.

Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai?

a) Công thức biểu diễn hàm số $s(t)$ là $s(t) = -\dfrac{5t^2}{2} + 15t + 16$

b) Thời gian kể từ khi ô tô đạp phanh đến khi dừng hẳn bằng 3 giây.

c) Kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được quãng đường là $38,5\,m$.

d) Xe ô tô không va chạm với chướng ngại.

Lời giải

a) Ta có $s(t) = \int(-5t+15)dt = -\dfrac{5t^2}{2} + 15t + C$

Do $s(0) = 0$ nên $C = 0$. Vậy $s(t) = -\dfrac{5t^2}{2} + 15t$

Mệnh đề sai.

b) Ô tô dừng hẳn khi $v(t) = 0 \Leftrightarrow -5t + 15 = 0 \Leftrightarrow t = 3$.

Mệnh đề đúng.

c) Quãng đường ô tô di chuyển được từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là:

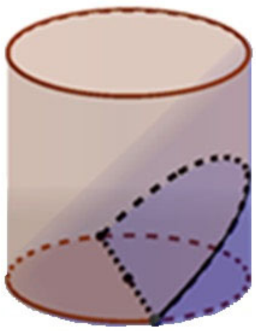
$s(3) = \dfrac{-5.9}{2} + 15.3 = 22,5(m)$.

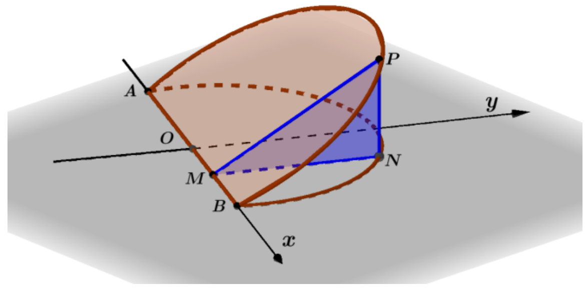
Mệnh đề sai.

d) Do trước khi đạp phanh tài xế còn phản ứng một giây nên kể từ lúc phát hiện chướng ngại đến khi dừng hẳn ô tô đi được quãng đường là: $16+22,5=38,5(m)$. Do đó ô tô không va chạm với chướng ngại vật.

Mệnh đề đúng.

Câu 26: Cho một vật thể bằng gỗ có dạng hình trụ với chiều cao và bán kính đáy cùng bằng 1. Cắt khối gỗ đó bởi một mặt phẳng đi qua đường kính của một mặt đáy của khối gỗ và tạo với mặt phẳng đáy của khối gỗ một góc $30°$ ta thu được khối gỗ hình nêm (H) và đặt khối (H) vào hệ trục tọa độ như hình vẽ. Phát biểu sau đây đúng hay sai?





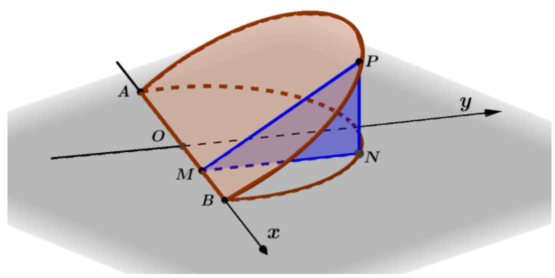
a) Nửa đường tròn đáy khối gỗ hình trụ có phương trình là $y=\sqrt{1+x^2}$, $(-1\le x\le 1)$.

b) Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm M có hoành độ x, cắt hình nêm theo thiết diện là ΔMNP vuông tại N và có góc $\widehat{PMN}=30°$. Lúc đó đoạn MN bằng $\sqrt{1-x^2}$.

c) Diện tích tam giác MNP bằng $1-x^2$.

d) Thể tích hình nêm (H) bằng $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải



a) Sai.

Đường tròn tâm O bán kính bằng 1 có phương trình $x^2+y^2=1$

Suy ra nửa đường tròn có phương trình $y=\sqrt{1-x^2}$, $(-1\le x\le 1)$.

b) Đúng

Trong tam giác OMN vuông tại M có $OM=x$

Ta có $MN^2+OM^2=ON^2 \Rightarrow MN=\sqrt{ON^2-OM^2}=\sqrt{1-x^2}$.

c) Sai

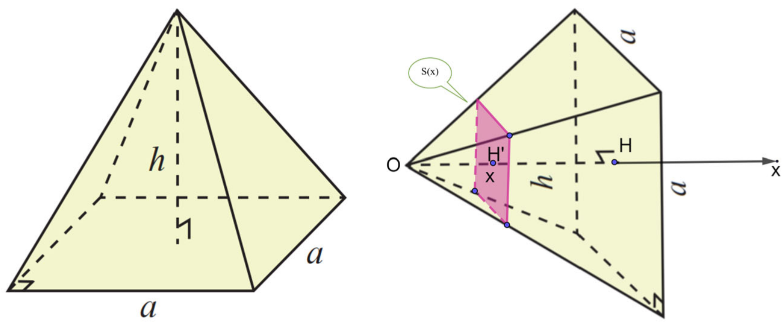
Ta có $MN=\sqrt{1-x^2}$, $NP=MN\tan 30°=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{3}}$

Diện tích tam giác MNP là $S(x) = S_{\Delta MNP} = \frac{1}{2}MN.NP = \frac{1-x^2}{2\sqrt{3}}$.

d) Đúng

Với $S(x) = \frac{1-x^2}{2\sqrt{3}}$, thể tích hình nêm (H) bằng $V = \int_{-1}^{1} S(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{2\sqrt{3}}dx = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Câu 27: Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h (Hình bên dưới).



Chọn trục Ox như hình vẽ (gốc trùng với đỉnh của khối chóp, trục đi qua tâm của đáy).
Phát biểu sau đây đúng hay sai?

a) Đáy của khối chóp nằm trên mặt phẳng vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ h.

b) Mỗi mặt phẳng vuông góc Ox tại điểm có hoành độ $x, 0 \le x \le h$ cắt khối chót theo mặt cắt là hình chữ nhật.

c) Diện tích mặt cắt là $S(x) = a^2\frac{h^2}{x^2}$

d) Thể tích của khối chóp là

$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h a^2\frac{x^2}{h^2}dx = a^2\left.\frac{x^3}{3h^2}\right|_0^h = \frac{a^2h}{3}$.

Lời giải

a) Đúng.

Vì OH là đường cao của khối chóp tứ giác đều và độ dài $OH = h$ nên đáy của khối chóp nằm trên mặt phẳng vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ h.

b) Sai.

Mỗi mặt phẳng vuông góc Ox tại điểm có hoành độ $x, 0 \le x \le h$ cắt khối chót theo mặt cắt là hình vuông có cạnh là b.

c) Sai.

Theo định lý Thales, ta có $\frac{x}{h} = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{a}{2}} \Leftrightarrow b = \frac{a}{h}x$

Do đó, diện tích mặt cắt là $S(x) = a^2\frac{x^2}{h^2}$

d) Đúng.

Với $S(x) = a^2\frac{x^2}{h^2}$, nên thể tích của khối chóp là $V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h a^2\frac{x^2}{h^2}dx = a^2\left.\frac{x^3}{3h^2}\right|_0^h = \frac{a^2h}{3}$.