

Câu 1: (4,0 điểm)

1) Tính giá trị của các biểu thức sau bằng cách hợp lý:

a) $A = \left(\frac{-2}{3} + \frac{3}{7} \right) : \frac{4}{5} + \left(\frac{-1}{3} + \frac{11}{7} \right) : \frac{4}{5}.$

b) $B = \sqrt{\frac{64}{25}} - \frac{\frac{7}{6} - 0,875 + 0,7}{0,(3) - 0,25 + 0,2}$

2) Cho $C = \frac{1}{11} + \frac{1}{11^2} + \dots + \frac{1}{11^{100}}.$ So sánh C với $\frac{1}{10}.$

Câu 2: (5,0 điểm)

1) Tìm x biết:

a) $3\frac{1}{2} : |2x - 1| = \frac{21}{22}$

b) $\frac{x-4}{2022} + \frac{x-3}{2023} = \frac{x-2}{2024} + \frac{x-1}{2025}$

2) Một trường THCS có ba lớp 7, tổng số học sinh hai lớp 7A, 7B là 85 em. Nếu chuyển 10 học sinh từ lớp 7A sang lớp 7C thì số học sinh ba lớp 7A, 7B, 7C tỉ lệ thuận với 7; 8; 9. Hỏi lúc đầu mỗi lớp có bao nhiêu học sinh?

Câu 3: (3,0 điểm)

1) Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 24.

2) Cho n là số tự nhiên có hai chữ số, Tìm n biết $n+4$ và $2n$ đều là các số chính phương.

Câu 4: (6,0 điểm)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$). M là trung điểm của BC , Lấy D thuộc tia đối của tia MA sao cho $MD = MA$. Kẻ BI vuông góc với AD tại I , CK vuông góc với AD tại K .

a) Chứng minh $BI = CK$.

b) Kẻ AH vuông góc với BC tại H , MN vuông góc với BD tại N . Chứng minh các đường thẳng CK, AH, MN đồng quy.

c) Chứng minh $BC - AB > AC - AH$.

Câu 5: (2,0 điểm)

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn

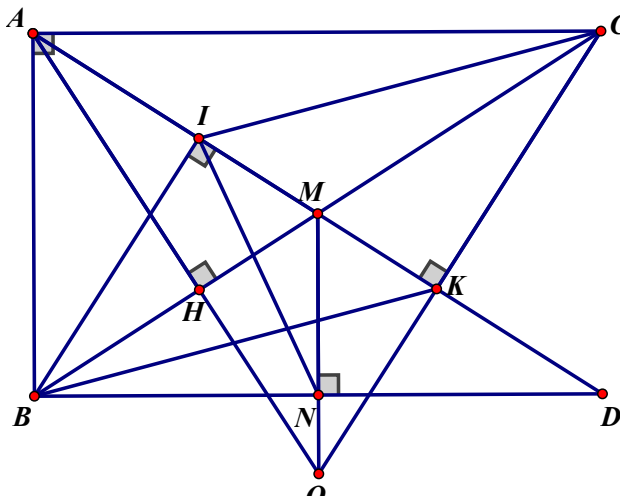
$$\left| x - 2024 \right| + \left| x - 2025 \right| + 3(x - y)^2 = 2(x - y)^2 + 1.$$

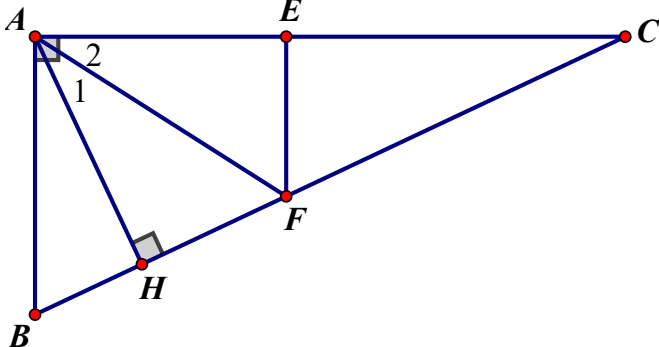
b) Một bà mẹ chiều con nên ngày nào cũng cho con ăn ít nhất một chiếc kẹo. Để hạn chế, mỗi tuần bà cho con ăn không quá 10 chiếc kẹo. Chứng minh rằng trong một số ngày liên tiếp nào đó bà mẹ đã cho con tổng số 13 chiếc kẹo.

----- HẾT -----

Câu/ ý	Nội dung	Điểm
1.1.a	$A = \left(\frac{-2}{3} + \frac{3}{7} \right) : \frac{4}{5} + \left(\frac{-1}{3} + \frac{11}{7} \right) : \frac{4}{5}$ $A = \left(\frac{-2}{3} + \frac{3}{7} \right) \cdot \frac{5}{4} + \left(\frac{-1}{3} + \frac{11}{7} \right) \cdot \frac{5}{4}$	0,5
	$A = \left(\frac{-2}{3} + \frac{3}{7} + \frac{-1}{3} + \frac{11}{7} \right) \cdot \frac{5}{4}$	0,5
	$A = \left[\left(\frac{-2}{3} + \frac{-1}{3} \right) + \left(\frac{11}{7} + \frac{3}{7} \right) \right] \cdot \frac{5}{4} = (-1 + 2) \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$	0,5
1.1.b	$B = \frac{8}{5} - \frac{\frac{7}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}$	0,5
	$B = \frac{8}{5} - \frac{\frac{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right)}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}$	0,5
	$B = \frac{8}{5} - \frac{7}{2} = -\frac{19}{10}$	0,5
1.2	$C = \frac{1}{11} + \frac{1}{11^2} + \dots + \frac{1}{11^{100}}$ $11C = 1 + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{11^{99}}$ $11C - C = 1 - \frac{1}{11^{100}}$	0,5
	$10C = 1 - \frac{1}{11^{100}} < 1.$ Vậy $C < \frac{1}{10}$	0,5
2.1.a	$3\frac{1}{2} : 2x - 1 = \frac{21}{22}$	0,5

	$ 2x - 1 = \frac{11}{3}$	
	$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = \frac{11}{3} \\ 2x - 1 = \frac{-11}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{14}{3} \\ 2x = \frac{-8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ x = \frac{-4}{3} \end{cases}$	0,5
	Vậy $x \in \left\{ \frac{-4}{3}; \frac{7}{3} \right\}$	0,5
2.1.b	$\frac{x-4}{2022} + \frac{x-3}{2023} = \frac{x-2}{2024} + \frac{x-1}{2025}$ $\frac{x-4}{2022} - 1 + \frac{x-3}{2023} - 1 = \frac{x-2}{2024} - 1 + \frac{x-1}{2025} - 1$	0,5
	$\frac{x-2026}{2022} + \frac{x-2026}{2023} = \frac{x-2026}{2024} + \frac{x-2026}{2025}$ $(x-2026) \left(\frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024} - \frac{1}{2025} \right) = 0$	0,5
	Vì $\left(\frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024} - \frac{1}{2025} \right) \neq 0$ $\Rightarrow x - 2026 = 0$ $\Rightarrow x = 2026$ Vậy $x = 2026$	0,5
2.2	Gọi số học sinh của lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là x, y, z (học sinh), $(x, y, z \in \mathbb{N}^*)$ Theo bài ra ta có $x + y = 85$ (1)	0,5
	Nếu chuyển 10 học sinh từ lớp 7A sang lớp 7C thì số học sinh lớp 7A, 7B, 7C tỉ lệ thuận với 7; 8; 9 nên ta có: $\frac{x-10}{7} = \frac{y}{8} = \frac{z+10}{9}$ (2)	0,5
	Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{x-10}{7} = \frac{y}{8} = \frac{z+10}{9} = \frac{(x-10)+y}{7+8} = \frac{85-10}{15} = 5$	0,5
	Suy ra $x = 45, y = 40, z = 35$ (thỏa mãn điều kiện) Vậy số học sinh của lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là 45, 40, 35 học sinh.	0,5
3.1	Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3 Xét 3 số nguyên liên tiếp $p-1, p, p+1$ luôn tồn tại số chia hết cho 3 mà p không chia hết cho 3 nên $p-1$ hoặc $p+1$ chia hết cho 3 Suy ra $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 3 (1)	0,5
	Do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ Do đó $p+1$ và $p-1$ là hai số chẵn liên tiếp Đặt $p-1 = 2k; p+1 = 2k+2$ ($k \in \mathbb{N}^*$)	0,5

	Khi đó $(p+1)(p-1) = 4k(k+1)$. Vì $k(k+1)$ chia hết cho 2 nên $4k(k+1)$ chia hết cho 8 Suy ra $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 8 (2) (Không chứng minh chi tiết – 0,25)	
	Ta có 3 và 8 là hai số nguyên tố cùng nhau (3) Từ (1), (2) và (3) suy ra $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 24.	0,5
3.2	Vì n là số tự nhiên có 2 chữ số nên $10 \leq n \leq 99 \Rightarrow 20 \leq 2n \leq 198$ Mà $2n$ là số chính phương chẵn nên $2n \in \{36, 64, 100, 144, 196\}$	0,5
	$\Rightarrow n \in \{18, 32, 50, 72, 98\}$ $\Rightarrow n+4 \in \{22, 36, 54, 76, 102\}$	0,5
	Vì $n+4$ là số chính phương nên $n+4 = 36$ suy ra $n = 32$ Vậy $n = 32$	0,5
4	 Vẽ hình, ghi GT, KL	0,5
4.a	Xét hai tam giác vuông IBM và KCM có : $BM = MC$ (Vì M là trung điểm của BC) $\widehat{BMI} = \widehat{CMK}$ (2 góc đối đỉnh) $\Rightarrow \triangle IBM = \triangle KCM$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow BI = CK$ (2 cạnh tương ứng)	1,0
		0,5
4.b	Xét $\triangle AMC$ và $\triangle DMB$ có $BM = MC$ (cmt) $\widehat{AMC} = \widehat{DMB}$ (2 góc đối đỉnh) $MA = MD$ (gt) $\Rightarrow \triangle AMC = \triangle DMB$ (c-g-c)	0,5
	$\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MDB}$ (2 góc tương ứng) Mà 2 góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow AC \parallel BD$	0,5
	Gọi giao điểm của AH và CK là O. Xét $\triangle ACO$ có: AK và CH là các đường cao, mà chúng cắt nhau ở M $\Rightarrow M$ là trực tâm của $\triangle ACO$ $\Rightarrow OM \perp AC$ (1).	0,5

	Mặt khác có $MN \perp BD$ (gt), mà $BD \parallel AC$ (cmt) $\Rightarrow MN \perp AC$ (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow O, M, N$ thẳng hàng. Suy ra ba đường CK, AH, MN, đồng quy tại O	0,5
4.c	Chứng minh $BC - AB > AC - AH$.  Trên BC lấy điểm F sao cho $BF = AB$. Trên AC lấy điểm E sao cho $AE = AH$	0,5
	Ta có $\widehat{BAF} + \widehat{A_2} = 90^\circ$ (tam giác ABC vuông tại A) $\widehat{AFB} + \widehat{A_1} = 90^\circ$ (tam giác AHF vuông tại H) Xét $\triangle ABF$ có $AB = BF$ nên $\triangle ABF$ cân tại B $\Rightarrow \widehat{BAF} = \widehat{BFA}$. Nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$	0,5
	Chứng minh được $\triangle AHF = \triangle AEF$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{AHF} = \widehat{AEF}$ (2 góc tương ứng) mà $\widehat{AHF} = 90^\circ$ nên $\widehat{AEF} = 90^\circ$	0,5
	Suy ra tam giác EFC vuông tại E nên $FC > EC$. $\Rightarrow FC + BF + AH > EC + BF + AE$ (vì $AH = AE$) $\Rightarrow BC + AH > AC + AB$ (vì $BF = AB$) $\Rightarrow BC - AB > AC - AH$ (đpcm).	0,5
5.a	Ta có: $2(x - y)^2 + 1 \geq 1$ với mọi x, y Có $\begin{cases} x - 2024 \geq 0 \\ x - 2025 \geq 0 \\ 3(x - y)^2 \geq 0 \end{cases}$ Suy ra: $x - 2024 + x - 2025 + 3(x - y)^2 \geq 0$ với mọi x, y Nên ta có $\left x - 2024 + x - 2025 + 3(x - y)^2 \right = x - 2024 + x - 2025 + 3(x - y)^2$ Kết hợp với bài ra ta có $x - 2024 + x - 2025 + 3(x - y)^2 = 2(x - y)^2 + 1$ $\Rightarrow x - 2024 + x - 2025 + (x - y)^2 = 1$	0,5

	Sử dụng bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối ta có: $ x - 2024 + x - 2025 = x - 2024 + 2025 - x $ $\geq x - 2024 + 2025 - x = 1; (x - y)^2 \geq 0$ với mọi $x; y$ $\Rightarrow x - 2024 + x - 2025 + (x - y)^2 \geq 1$ Dấu “=” xảy ra khi: $x = y$ và $2024 \leq x \leq 2025$. Vì $x; y$ nguyên nên ta tìm được các cặp giá trị $(x; y)$ là $(2024; 2024); (2025; 2025)$	0,5
	Xét 2 tuần liên tiếp kể từ một ngày thứ 2 đầu tuần Gọi $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ với a_n là số kẹo ăn trong ngày thứ n. Ta xét đến $n = 14$. Ta có $14 \leq S_{14} \leq 2.10 = 20$	0,5
5.b	Theo nguyên tắc Dirichle thì phải tồn tại 2 tổng S_i, S_j cùng số dư khi chia cho 13 Giả sử $S_j = a_1 + a_2 + \dots + a_j; S_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$ (trong đó $1 \leq i < j \leq 14$) Khi đó $S_j - S_i = a_{i+1} + \dots + a_j$ chia hết cho 13 mà dễ nhất $0 < S_j - S_i < S_j \leq S_{14} \leq 2.10 = 20 \Rightarrow a_{i+1} + \dots + a_j = 13.$ Vậy trong một số ngày liên tiếp nào đó bà mẹ đã cho con tổng số 13 chiếc kẹo.	0,5

Chú ý:

1. Học sinh làm đúng đến đâu giám khảo cho điểm đến đó, tương ứng với thang điểm.
2. HS trình bày theo cách khác mà đúng thì giám khảo cho điểm tương ứng với thang điểm. Trong trường hợp mà hướng làm của HS ra kết quả nhưng đến cuối còn sai sót thì giám khảo trao đổi với tổ chấm để giải quyết.
3. Tổng điểm của bài thi không làm tròn.

-----Hết-----

Xem thêm: **ĐỀ THI HSG TOÁN 7**
<https://thcs.toanmath.com/de-thi-hsg-toan-7>