PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **HUYỆN KIM THÀNH**	**ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI** **MÔN: TOÁN 8** **NĂM HỌC 2024-2025** **Thời gian làm bài: 120 phút** *(Không tính thời gian phát đề)* **(Đề khảo sát gồm có 05 câu, 01 trang)**

Câu 1 (2,0 điểm)

1) Cho biểu thức: $A=\left[\frac{2}{3x}-\frac{2}{x+1}.\left(\frac{x+1}{3x}-x-1\right)\right]:\frac{x-1}{x}$ (với $x\neq 0; x\neq -1; x\neq 1$)

Rút gọn A và tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

2) Tìm đa thức $f(x)$ biết: $f(x)$ chia cho x - 3 dư 2, $f(x)$ chia cho x + 4 dư 9, và $f(x):x^2+x-12$ được thương là x^2+3 và còn dư

Câu 2 (2,0 điểm).

1) Giải phương trình : $\frac{1}{x^2+9x+20}+\frac{1}{x^2+11x+30}+\frac{1}{x^2+13x+42}=\frac{1}{18}$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+xy+1=0 \\ 3x-2y=22 \end{cases}$

Câu 3 (2,0 điểm)

1) Tìm các cặp số (x; y) thỏa mãn x, y$\in\mathbb{Z}$ và $6x^2+y^2+5xy-8x-3y+7=0$

2) Cho $x;y;z$ là các số nguyên và $\begin{cases} P=(x+2023)^5+(2y-2024)^5+(3z+2025)^5 \\ S=x+2y+3z+2024 \end{cases}$

Chứng minh rằng P chia hết cho 30 khi và chỉ khi S chia hết cho 30.

Câu 4 (3,0 điểm).

1) Cho tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh rằng: $\tan\frac{\widehat{ABC}}{2}=\frac{AC}{AB+BC}$

2) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC.

b) Gọi O là trung điểm của BC, I là trung điểm của AH. Giao điểm EF và OI cắt nhau tại K. Chứng minh rằng : $AH^2=4IK.IO$

Câu 5 (1,0 điểm)

Xét hai số thực $a,\ b$ sao cho $1\le a\le 2;\ 1\le b\le 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\left(a+b^2+\frac{4}{a^2}+\frac{2}{b}\right)\left(b+a^2+\frac{4}{b^2}+\frac{2}{a}\right)$.

-------------HẾT------------

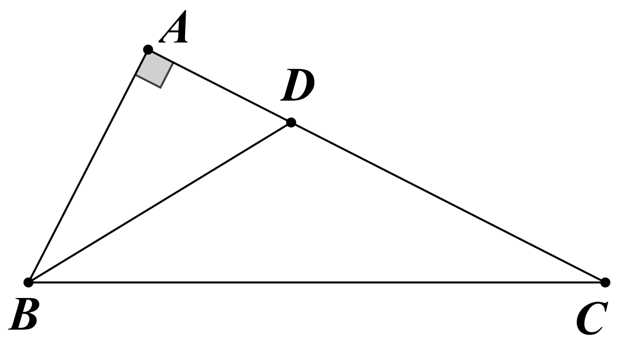
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HUYỆN KIM THÀNH	HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI MÔN: TOÁN 8 NĂM HỌC 2024-2025 (Hướng dẫn chấm gồm có 05 trang)

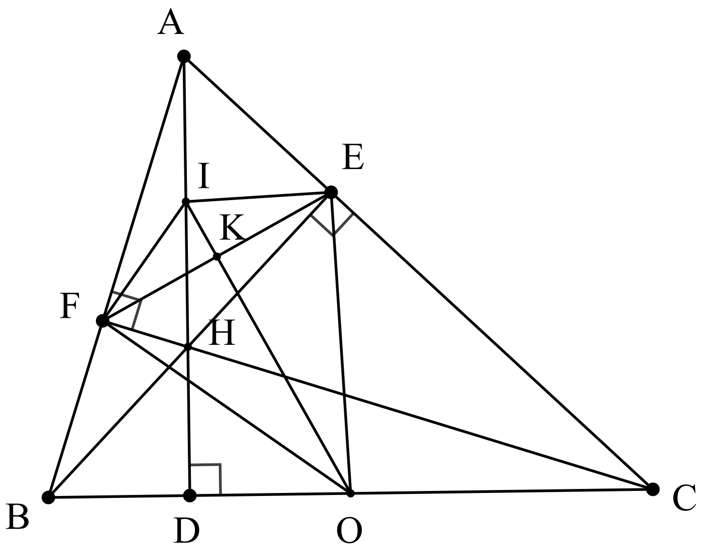
Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1	1	$A=\left[\frac{2}{3x}-\frac{2}{x+1}.\left(\frac{x+1}{3x}-x-1\right)\right]:\frac{x-1}{x}$ $A=\left[\frac{2}{3x}-\frac{2}{x+1}.\frac{(x+1)-3x(x+1)}{3x}\right]:\frac{x-1}{x}$ $A=\left[\frac{2}{3x}-\frac{2(1-3x)}{3x}\right].\frac{x}{x-1}$	0,25
		$A=2.\frac{x}{x-1}=\frac{2x}{x-1}$	0,25
		+ Với $x\neq 0; x\neq \pm 1$. Ta có $A=\frac{2x}{x-1}=2+\frac{2}{x-1}$ + Để $A\in Z$ thì (x - 1) phải là ước của 2 suy ra $x-1\in\{\pm 1;\ \pm 2\}$	0,25
		+ Xét từng trường hợp tìm x + Đối chiếu điều kiện tìm được x = 2 hoặc x = 3 thỏa mãn và kết luận	0,25
	2	Do $f(x)$ chia cho $x^2+x-12=(x-3)(x+4)$ được thương là x^2+3 còn dư nên ta có : $f(x)=(x+4)(x-3)(x^2+3)+a.x+b$	0,25
		Cho $x=-4\Rightarrow f(x)=-4a+b=9$ Cho $x=3\Rightarrow f(x)=3a+b=2$	0,25
		Khi đó ta có hệ: $\begin{cases}-4a+b=9\\3a+b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-7a=7\\3a+b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\3.(-1)+b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=5\end{cases}$	0,25
		$f(x)=(x+4)(x-3)(x^2+3)-x+5$ $=(x^2+x-12)(x^2+3)-x+5$ $=x^4+x^3-9x^2+2x-31$	0,25
Câu 2	1	1) $\frac{1}{x^2+9x+20}+\frac{1}{x^2+11x+30}+\frac{1}{x^2+13x+42}=\frac{1}{18}$ $\frac{1}{(x+4)(x+5)}+\frac{1}{(x+5)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+7)}=\frac{1}{18}$ ĐK : x$\neq$ -4 ;x$\neq$ -5 ;x$\neq$ -6 ;x$\neq$ -7	0,25

(2 điểm)		$\frac{1}{(x+4)}-\frac{1}{(x+5)}+\frac{1}{(x+5)}-\frac{1}{(x+6)}+\frac{1}{(x+6)}-\frac{1}{(x+7)}=\frac{1}{18}$ $\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$	0,25
		$x^2+11x-26=0$ $(x+13)(x-2)=0$	0,25
		x = -13 (t/m) ; x = 2 (t/m) Vậy phương trình có các nghiệm $x_1=-13; x_2=2$.	0.25
	2	$\begin{cases} x+y+xy+1=0 \\ 3x-2y=22 \end{cases}$ Viết được thành $\begin{cases} (x+1)(y+1)=0 \\ 3x-2y=22 \end{cases}$	0.25
		$\begin{cases} x+1=0 \\ 3x-2y=22 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y+1=0 \\ 3x-2y=22 \end{cases}$	0.25
		1/ $\begin{cases} x+1=0 \\ 3x-2y=22 \end{cases}$ giải được $\begin{cases} x=-1 \\ y=-12,5 \end{cases}$	0.25
		2/ $\begin{cases} y+1=0 \\ 3x-2y=22 \end{cases}$ giải được $\begin{cases} y=-1 \\ x=\frac{20}{3} \end{cases}$	0.25

Câu 3 (2 điểm)	**1**	Ta có: $6x^2+y^2+5xy-8x-3y+7=0$ $4x^2+4xy+y^2+2x^2+xy-8x-3y+7=0$ $(2x+y)^2+x(2x+y)-3(2x+y)-2(x-3)+1=0$ $(2x+y)^2+(2x+y)(x-3)-2(x-3)+1=0$	0,25
		$(2x+y)^2+(x-3)(2x+y-2)+1=0$ $(2x+y-2)(2x+y+2+x-3)+5=0$ $(2x+y-2)(3x+y-1)=-5$	0,25
		TH1: $\begin{cases} 2x+y-2=-5 \\ 3x+y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-13 \end{cases} (TM)$ TH2: $\begin{cases} 2x+y-2=1 \\ 3x+y-1=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-7 \\ y=17 \end{cases} (TM)$	0,25
		TH3: $\begin{cases} 2x+y-2=5 \\ 3x+y-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-7 \\ y=21 \end{cases} (TM)$ TH4: $\begin{cases} 2x+y-2=-1 \\ 3x+y-1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-9 \end{cases} (TM)$	0,25

		Vậy (x;y) là $(5;-13);(5;-9);(-7;17);(-7;21)$	
		Đặt $a=x+2023; b=2y-2024; c=3z+2025$ với $a;b;c$ là các số nguyên. Khi đó ta có: $\begin{cases} P=a^5+b^5+c^5 \\ S=a+b+c \end{cases}$ Xét $P-S=\left(a^5-a\right)+\left(b^5-b\right)+\left(c^5-c\right)$	0,25
	2	Ta có chứng minh với mọi số nguyên m thì m^5-m chia hết cho 30 Thật vậy: $m^5-m=m(m^4-1)=m(m^2-1)(m^2+1)$ $=m(m^2-1)(m^2-4)+5m(m^2-1)$ $=m(m-1)(m+1)(m-2)(m+2)+5m(m-1)(m+1)$ Với mọi số nguyên m thì $m;(m-1);(m+1);(m-2);(m+2)$ là 5 số nguyên liên tiếp nên trong đó có một thừa số chia hết cho 2; một thừa số chia hết cho 3; một thừa số chia hết cho 5 mà $2;3;5$ nguyên tố cùng nhau từng đôi một nên tích của chúng chia hết cho $2.3.5$.	0,25
		Do đó $m(m-1)(m+1)(m-2)(m+2)$ chia hết cho 30. Tương tự $m(m-1)(m+1)$ chia hết cho 6, mà $\left(5,6\right)=1$ nên $5m(m-1)(m+1)$ chia hết cho 30. Vậy với mọi số nguyên m thì m^5-m chia hết cho 30.	0,25
		Do đó $P-S=\left(a^5-a\right)+\left(b^5-b\right)+\left(c^5-c\right)$ chia hết cho 30 với $a;b;c$ là các số nguyên. Suy ra $P-S \vdots 30$ do đó P chia hết cho 30 khi và chỉ khi S chia hết cho 30.	0,25

Câu 4.1 **(1 điểm)**		Cho tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh rằng: $\tan\frac{\widehat{ABC}}{2}=\frac{AC}{AB+BC}$ 	
		Vẽ phân giác AD của tam giác ABC, $\tan\frac{\widehat{ABC}}{2}=\tan\widehat{ABD}=\frac{AD}{AB}$ (1)	

		Mà BD là phân giác góc ABC nên $\frac{AD}{AB}=\frac{DC}{BC}$	
		Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau , $\frac{AD}{AB}=\frac{DC}{BC}=\frac{AD+DC}{AB+BC}=\frac{AC}{AB+BC}$ (2)	
		Từ (1) và (2) suy ra $\tan\frac{\widehat{ABC}}{2}=\frac{AC}{AB+BC}$	
Câu 4.2 (2 điểm)			
	2a	Xét ΔAEB và ΔAFC có: $\widehat{BAC}$ *chung* $\widehat{AEB}=\widehat{AFC}=90^0$ Do đó: $\Delta AEB \backsim \Delta AFC\,(g.g)$ suy ra: $\frac{AE}{AF}=\frac{AB}{AC}$	0,5
		Xét ΔAEF và ΔABC có: $\widehat{BAC}$ *chung* $\frac{AE}{AF}=\frac{AB}{AC}(cmt)$ Nên $\Delta AEF \backsim \Delta ABC\,(c.g.c)$	0,5
		Các ΔAEH và ΔAFH vuông tại E và F có EI và FI là trung tuyến thuộc cạnh huyền AH nên $IE=IF=\frac{1}{2}AH \Rightarrow I\in$ đường trung trực của EF (1) Chứng minh tương tự: $OE=OF=\frac{1}{2}BC \Rightarrow O\in$ đường trung trực EF (2) Từ (1) và (2) suy ra: OI là đường trung trực của EF nên $OI\perp EF$ tại K	0,25
	2b	Mặt khác: $IA=IF\left(=\frac{1}{2}AH\right)\Rightarrow \Delta AIF$ cân tại I nên $\widehat{FAI}=\widehat{AFI}$ Tương tự: $\widehat{OFB}=\widehat{OBF}$	0,25

		$\widehat{OBF}+\widehat{FAI}=90^0$ (*do* ΔADB vuông tại D) Do đó: $\widehat{AFI}+\widehat{BFO}=90^0 \Rightarrow \widehat{IFO}=90^0$ Tương tự: $\widehat{IEO}=90^0$	
		Ta có: $\Delta IKF \backsim \Delta IFO\left(\widehat{FIO}\ chung, \widehat{IKF}=\widehat{IFO}=90^0\right)$ Nên $\dfrac{IF}{IO}=\dfrac{IK}{IF} \Rightarrow IF^2=IK.IO$	0,25
		Mà $IF=\dfrac{1}{2}AH \Rightarrow IF^2=\dfrac{1}{4}AH^2$ Vậy $AH^2=4IK.IO$	0,25

Câu 5 (1 điểm)		Áp dụng BĐT $xy \le \dfrac{(x+y)^2}{4}$ ta có $A=\left(a+b^2+\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{2}{b}\right)\left(b+a^2+\dfrac{4}{b^2}+\dfrac{2}{a}\right) \le \dfrac{\left(a+\dfrac{2}{a}+b+\dfrac{2}{b}+a^2+\dfrac{4}{a^2}+b^2+\dfrac{4}{b^2}\right)^2}{4}$	0,25
		Đặt $a+\dfrac{2}{a}=x;\ b+\dfrac{2}{b}=y$ $\Rightarrow a^2+\dfrac{4}{a^2}=x^2-4;\ \ b^2+\dfrac{4}{b}=y^2-4$ Lại có $1\le a\le 2$;$1\le b\le 2$ suy ra $(a-1)(a-2)\le 0 \Rightarrow a^2\le 3a-2$ $a+\dfrac{2}{a}=\dfrac{a^2+2}{a}\le\dfrac{3a-2+2}{a}=3$ nên $0<x\le 3$	0,25
		$(b-1)(b-2)\le 0 \Rightarrow b^2\le 3b-2$ $b+\dfrac{2}{b}=\dfrac{b^2+2}{b}\le\dfrac{3b-2+2}{b}=3$ nên $0<y\le 3$ Nên $A\le\dfrac{\left(x+y+x^2+y^2-8\right)^2}{4}\le\dfrac{(3+3+9+9-8)^2}{4}=64$	0,25
		Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a+b^2+\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{2}{b}=b+a^2+\dfrac{4}{b^2}+\dfrac{2}{a} \\ (a-1)(a-2)=0 \\ (b-1)(b-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=1 \\ a=b=2 \end{array}\right.$ Vậy $Max\,A=64 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=1 \\ a=b=2 \end{array}\right.$.	0,25