CHƯƠNG 2
TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1
VECTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

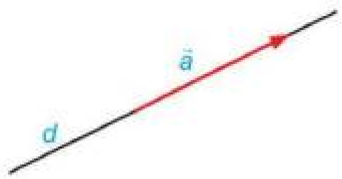
1. Khái niệm vectơ trong không gian

Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Độ dài của vectơ trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Chú ý: Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau:

- Cho đoạn thẳng AB trong không gian. Nếu ta chọn điểm đầu là A , điểm cuối là B thì ta có một vectơ, kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là "vectơ AB".
- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ, vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a},\vec{b},\vec{u},\vec{v},...$
- Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.
- Đường thẳng đi qua điểm đầu và cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ.



Đường thẳng d là giá của vectơ $\vec{a}$

Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, ta có các khái niệm sau đối với vectơ trong không gian:

- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a}=\vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Chú ý: Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các tính chất và quy ước sau:

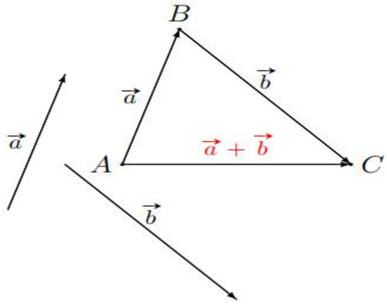
- Trong không gian, với mỗi điểm O và vectơ $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm sao cho $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$.
- Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như $\overrightarrow{AA},\overrightarrow{BB},...$ được gọi là vectơ-không.
- Ta quy ước vectơ-không có độ dài là 0, cùng hướng với mọi vectơ. Do đó, các vectơ-không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.

2. Các phép toán vectơ trong không gian

a. Tổng của hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là **tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$,** kí hiệu $\vec{a} + \vec{b}$. Vậy $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Phép lấy tổng hai vectơ còn được gọi là **phép cộng vectơ.**

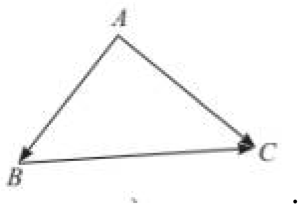


Chú ý: Tương tự như phép cộng vectơ trong mặt phẳng, phép cộng vectơ trong không gian có các tình chất sau:

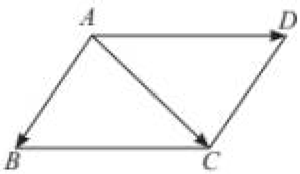
- Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- Tính chất kết hợp: $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$.
- Tính chất của vectơ-không: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Đối với vectơ trong không gian, ta có các quy tắc sau:

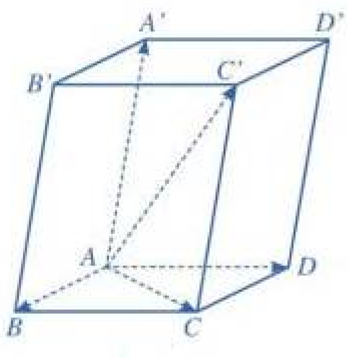
- ***Quy tắc ba điểm*:** Với ba điểm A, B, C ta luôn có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



- ***Quy tắc hình bình hành*:** Nếu $ABCD$ là hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



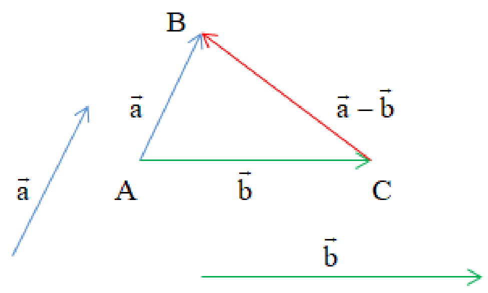
- ***Quy tắc hình hộp:*** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$



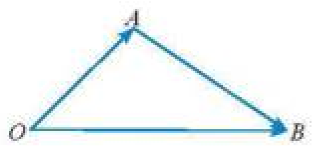
b. Hiệu của hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Hiệu của vectơ $\vec{a}$ và vectơ $\vec{b}$ là tổng vectơ $\vec{a}$ và vectơ đối của vectơ $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}-\vec{b}$.

Phép lấy hiệu hai vectơ còn được gọi là **phép trừ vectơ.**



Chú ý: Trong không gian, với ba điểm O, A, B tùy ý, ta luôn có: $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$.



3. Tích của một số với một vectơ trong không gian

a. Định nghĩa:

Cho số $k \neq 0$ và một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của vectơ $\vec{a}$ với số k là một vectơ, kí hiệu $k\vec{a}$.

Vectơ $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k>0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k<0$ và có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$.

Phép lấy tích của một số với một vectơ gọi là **phép nhân một số với một vectơ.**

Quy ước: $0.\vec{a}=\vec{0}$ và $k.\vec{a}=\vec{0}$.

b.Tính chất:

Với hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bất kỳ, với mọi số thực h và k, ta có:

- $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}; k\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=k\vec{a}-k\vec{b}$
- $(h+k)\vec{a}=h\vec{a}+k\vec{a}$
- $h(k\vec{a})=(hk)\vec{a}$
- $1\vec{a}=\vec{a}$, $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$.

Chú ý:

- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a}=k\vec{b}$.
- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 sao cho $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.
- **Hệ thức trung điểm đoạn thẳng:** Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB, M tuỳ ý, ta có:

$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0};\quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}.$$

- **Hệ thức trọng tâm tam giác:** Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC, M tuỳ ý, ta có:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0};\quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$$

- **Hệ thức trọng tâm tứ diện:** Cho G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, M tuỳ ý. Ta có:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0};\qquad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$$

c. Sự đồng phẳng của ba vectơ (tham khảo thêm)

- Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.
- **Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:** Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, trong đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.

Khi đó: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi tồn tại cặp số duy nhất $m,n\in\mathbb{R}$ sao cho $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$

- Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng, $\vec{x}$ tuỳ ý.

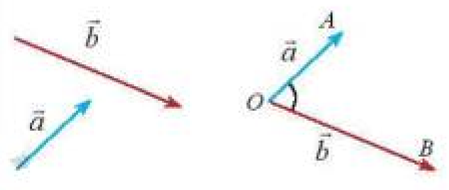
Khi đó: $\exists m,n,p\in\mathbb{R}:\ \vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$

4. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

a. Góc giữa hai vectơ

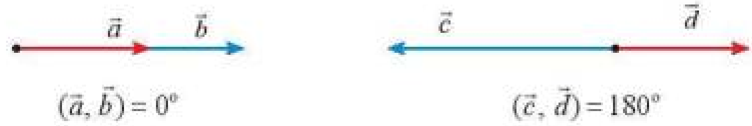
Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ và $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

Góc cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong không gian, kí hiệu $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$.



Chú ý:

- $0^\circ\le\left(\vec{a},\vec{b}\right)\le180^\circ$
- Nếu $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=90^0$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a}\perp\vec{b}$.
- Góc giữa hai vectơ cùng hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 0°.
- Góc giữa hai vectơ ngược hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 180°.



b. Tích vô hướng của hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. **Tích vô hướng** của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực, kí hiệu $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức sau: $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

Chú ý:

- Trường hợp có ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$, ta quy ước $\vec{a}.\vec{b}=0$.
- Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$, ta có $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$.
- Khi $\vec{a}=\vec{b}$ thì tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

Ta có $\vec{a}^2=|\vec{a}|.|\vec{a}|\cos 0^{o}=|\vec{a}|^2$. Vậy bình phương vô hướng của một vectơ luôn bằng bình phương độ dài của vectơ đó.

- Tính chất của tích vô hướng: Với ba vectơ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ bất kì và mọi số k, ta có:

+ $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ (tính chất giao hoán)

+ $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối)

+ $\left(k\vec{a}\right).\vec{b}=k\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=\vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$

Nhận xét: Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra:

- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$
- $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2-2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$
- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{b}^2$

PHẦN A
TỰ LUẬN

CHỦ ĐỀ 1
CÁC PHÉP VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

DẠNG 1
KHÁI NIỆM VECTƠ

- Đường thẳng đi qua điểm đầu và cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ.

Đường thẳng d *là giá của vectơ* $\vec{a}$

- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau. Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vectơ được gọi là bằng nhau, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.
- Hai vectơ được gọi là đối nhau, nếu chúng có cùng độ dài và ngược hướng.

Bài 1. Cho hình tứ diện $ABCD$. Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu là B và điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện.

Bài 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$.

b) Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho các vectơ đó cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$.

c) Giá của ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ có cùng nằm trong một mặt phẳng không?

d) Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho các vectơ đó bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$.

e) Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho các vectơ đó là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{BD}$.

Bài 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a.

a) Tìm độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC}$.

b) Tìm độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC'}$.

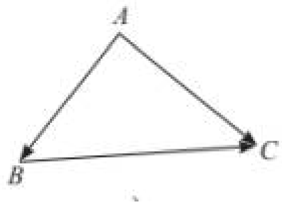
Bài 4. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

a) Trong ba vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ thì vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$? Giải thích vì sao.

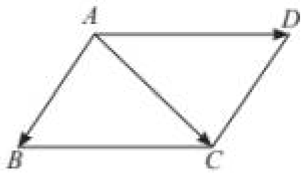
b) Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$.

DẠNG 2
CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VECTƠ

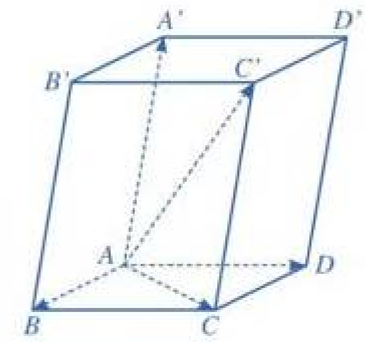
• ***Quy tắc ba điểm*:** Với ba điểm A, B, C ta luôn có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



• ***Quy tắc hình bình hành*:** Nếu $ABCD$ là hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.



• ***Quy tắc hình hộp:*** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$



• **Hệ thức trung điểm đoạn thẳng:** Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB, M tuỳ ý, ta có:

$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0};\quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}.$$

• **Hệ thức trọng tâm tam giác:** Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC, M tuỳ ý, ta có:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0};\quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$$

• **Hệ thức trọng tâm tứ diện:** Cho G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, M tuỳ ý. Ta có:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0};\qquad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$$

• Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 sao cho $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

Bài 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{B'B}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{B'D}$.

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AC'}$.

c) $\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{CA'}$.

Bài 2. Trong không gian, cho các điểm A,B,C,D,E,F .Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}$.

Bài 3. Cho hình tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$.

Bài 4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD,BC và G là trọng tâm của tam giác BCD.

a) Chứng minh $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$

b) Chứng minh $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$

Bài 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

a) Tính vectơ tổng $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A'C'}$.

b) Tính vectơ tổng $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AA'}$.

DẠNG 3
PHÂN TÍCH MỘT VECTƠ THEO CÁC VECTƠ

Bài 1. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

a) Phân tích các vectơ $\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{BC'}$ theo các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

b) Gọi G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AG'}$ theo ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

a) Phân tích vectơ $\overrightarrow{SG}$ theo các vectơ $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$.

b) Gọi D là trọng tâm của của hình chóp $S.ABC$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{SD}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$.

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O.

a) Phân tích vectơ $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SO}$.

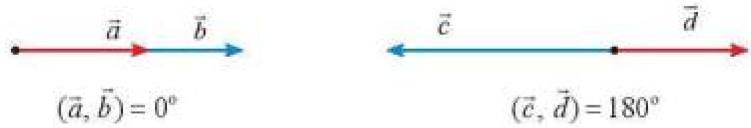
b) Phân tích vectơ $\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SD}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SO}$.

CHỦ ĐỀ 2
TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

DẠNG 1
TÍNH CHẤT TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

1. Dựa vào định nghĩa $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

- $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$
- $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$.
- Góc giữa hai vectơ cùng hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 0°.
- Góc giữa hai vectơ ngược hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 180°.



2. Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ

- $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$
- $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$
- $\left(k\vec{a}\right).\vec{b}=k\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=\vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$
- $\vec{a}^2\geq 0,\ \vec{a}^2=0\Leftrightarrow\vec{a}=0$
- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$
- $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2-2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$
- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{b}^2$

Bài 1. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau góc $120°$ và $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=5$. Tính $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|$.

Bài 2. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ có $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$ và $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=60^0$. Xác định x sao cho thỏa mãn $\left|x\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{3}$.

Bài 3. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$ và $\vec{a}.\vec{b}=3$. Tính độ dài vectơ $3\vec{a}+5\vec{b}$.

Bài 4. Trong không gian, cho $\vec{u}=\vec{a}+3\vec{b}$ vuông góc với $\vec{v}=7\vec{a}-5\vec{b}$ và $\vec{x}=\vec{a}-4\vec{b}$ vuông góc với $\vec{y}=7\vec{a}-2\vec{b}$. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Bài 5. Trong không gian, cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn các điều kiện $\left|\vec{a}\right|=\frac{1}{2}\left|\vec{b}\right|=1, \left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{15}$. Đặt $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{v}=2k\vec{a}-\vec{b}$, $k\in\mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị của k sao cho $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=60°$

DẠNG 2
TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Bài 1. Cho hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$.

a) Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'D'}$.

b) Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'C'}$.

c) Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{B'C}$.

Bài 2. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh đáy bằng 1 và độ dài mỗi cạnh bên bằng 2. Hãy tính góc giữa các cặp vectơ sau đây và tính tích vô hướng của mỗi cặp vectơ đó:

a) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{C'C}$ b) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'A'}$

Bài 3. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD.

a) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}$.

c) Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$.

Bài 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a.

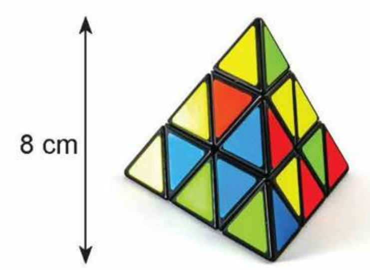
a) Tính các tích vô hướng sau $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{BC}$.

b) Tính các tích vô hướng sau $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AC}$.

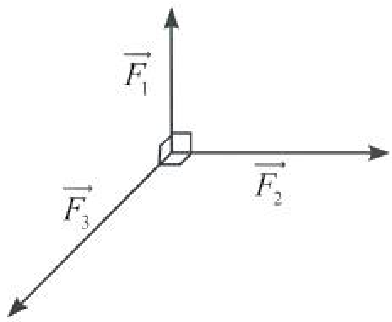
CHỦ ĐỀ 3

BÀI TOÁN THỰC TIỄN ỨNG DỤNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

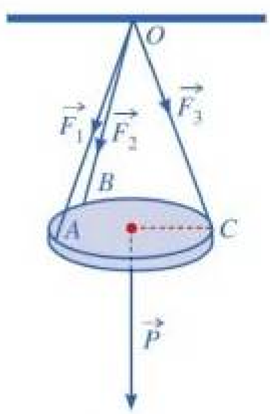
Bài 1. Ta đã biết trọng tâm của tứ diện $ABCD$ là một điểm I thoả mãn $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{IG}$, ở đó G là trọng tâm của tam giác BCD. Áp dụng tính chất trên để tính khoảng cách từ trọng tâm của một khối rubik (đồng chất) hình tứ diện đều đến một mặt của nó, biết rằng chiều cao của khối rubik là $8cm$.



Bài 2. Ba lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc và có độ lớn lần lượt là $2N; 3N; 4N$. Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho.

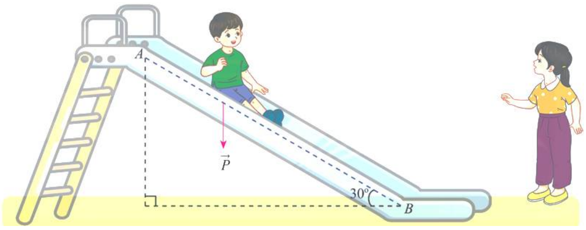


Bài 3. Một tấm sắt tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên tấm sắt tròn sao cho các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn bằng nhau $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right|$. Biết trọng lượng P của tấm sắt tròn đó bằng $2024\sqrt{3}(N)$ (xem hình vẽ).



Tính lực căng của dây treo tấm sắt tròn đó.

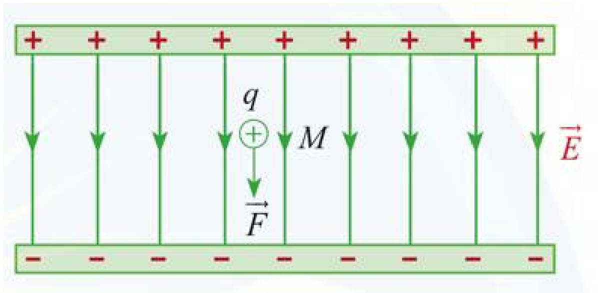
Bài 4. Một em nhỏ cân nặng $m = 25\,kg$ trượt trên cầu trượt dài $3{,}5\,m$. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 30° (như hình vẽ).



a) Tính độ lớn của trọng lực $\vec{P} = m\vec{g}$ tác dụng lên em nhỏ, cho biết vectơ gia tốc rơi tự do $\vec{g}$ có độ lớn là $g = 9{,}8\,m/s^2$.

b) Cho biết công $A(J)$ sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển $\vec{d}$ được tính bởi công thức $A = \vec{F}\cdot\vec{d}$. Hãy tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt.

Bài 5. Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F} = q\cdot\vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q = 10^{-9}\,C$ và độ lớn điện trường $E = 10^5\,N/C$ (hình vẽ).



PHẦN B

TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$. Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu là S và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của hình chóp.

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho các vectơ đó bằng vectơ $\overrightarrow{CD}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn đẳng thức vectơ đúng:

A. $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD}$. **B.** $\overrightarrow{DB'}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{DC}$.

C. $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. **D.** $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{DC}$.

Câu 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biểu thức nào sau đây đúng:

A. $\overrightarrow{A'D}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C}$. **B.** $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}$. **D.** $\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC'}$.

Câu 5. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{A_1C}=2\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{CA_1}+2\overrightarrow{C_1C}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AA_1}$. **D.** $\overrightarrow{CA_1}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CC_1}$.

Câu 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với tâm O. Hãy chỉ ra đẳng thức **sai** trong các đẳng thức sau đây:

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}$ **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}$

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$ **D.** $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

Câu 7. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn đẳng thức **sai?**

A. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1A_1}$. **B.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{DC}$.

C. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BD_1}$. **D.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BC}$.

Câu 8. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Đặt $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c},\overrightarrow{BC}=\vec{d}$, trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$. **B.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$. **C.** $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$. **D.** $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$.

Câu 9. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm đoạn MN và P là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{IA}+(2k-1)\overrightarrow{IB}+k\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

A. $k=2$. **B.** $k=4$. **C.** $k=1$. **D.** $k=0$.

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=k\overrightarrow{DG}$

A. $k=\frac{1}{3}$. **B.** $k=2$. **C.** $k=3$. **D.** $k=\frac{1}{2}$.

Câu 11. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+k\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}\right)=\vec{0}$.

A. $k=0$. **B.** $k=1$. **C.** $k=4$. **D.** $k=2$.

Câu 12. Cho hình tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Mệnh đề nào sau đây **sai**.

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

B. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

C. $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.

D. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi P, Q là trung điểm của AB và CD. Chọn khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

B. $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

C. $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}\right)$.

D. $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$.

Câu 14. Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là:

A. $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.

B. $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.

C. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

D. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

Câu 15. Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

B. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

C. $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.

D. $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của MN. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai?**

A. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$

B. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}$

C. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

D. $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}$.

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, G là trung điểm của IJ. Cho các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

B. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{IJ}$

C. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{JI}$

D. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=-2\overrightarrow{JI}$

Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b},\overrightarrow{AD}=\vec{c},$ gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$. **C.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$. **D.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ \overrightarrow{AC}=\vec{b},\ \overrightarrow{AD}=\vec{c},$ gọi M là trung điểm của BC. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)$ **B.** $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$

C. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}\right)$. **D.** $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}\right)$

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c},\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng.

A. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}+\vec{b})$. **B.** $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{d}+\vec{b}-\vec{c})$.

C. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{b}-\vec{d})$. **D.** $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b})$.

Câu 21. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Chọn đẳng thức đúng?

A. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$ **B.** $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$

C. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$ **D.** $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$.

Câu 22. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\ \overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Hãy phân tích (biểu thị) vectơ $\overrightarrow{BC'}$ qua các vectơ $\vec{a},\vec{b},\ \vec{c}$.

A. $\overrightarrow{BC'}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ **B.** $\overrightarrow{BC'}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ **C.** $\overrightarrow{BC'}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ **D.** $\overrightarrow{BC'}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Câu 23. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\ \overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Hãy phân tích (biểu thị) vectơ $\overrightarrow{B'C}$ qua các vectơ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$.

A. $\overrightarrow{B'C}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}.$ **B.** $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$ **C.** $\overrightarrow{B'C}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$ **D.** $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}.$

Câu 24. Cho hình lăng trụ $ABCA'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a},\overrightarrow{CB}=\vec{b},\ \overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}$ **B.** $\overrightarrow{AM}=\vec{b}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$. **C.** $\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{AM}=\vec{a}-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}$.

Câu 25. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'}=\vec{u},\overrightarrow{CA'}=\vec{v},\ \overrightarrow{BD'}=\vec{x},\ \overrightarrow{DB'}=\vec{y}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$. **B.** $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.

C. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.   **D.** $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.

Câu 26. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm AD. Chọn đẳng thức đúng.

A. $\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}$.   **B.** $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

C. $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.   **D.** $\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=2\overrightarrow{B_1D}$.

Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_O là giao điểm của GA và mp (BCD). Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{G_0G}$.   **B.** $\overrightarrow{GA}=4\overrightarrow{G_0G}$.   **C.** $\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{G_0G}$.   **D.** $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{G_0G}$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi G là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $G,\ S,\ O$ không thẳng hàng.   **B.** $\overrightarrow{GS}=4\overrightarrow{OG}$

C. $\overrightarrow{GS}=5\overrightarrow{OG}$ **D.** $\overrightarrow{GS}=3\overrightarrow{OG}$.

Câu 29. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{O}$.

B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

C. Cho hình chóp $S.ABCD$. Nếu có $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

D. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$; $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$; $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$; $\overrightarrow{SD}=\vec{d}$. Nhận xét nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}+\vec{c}=\vec{d}+\vec{b}$.   **B.** $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$.

C. $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$.   **D.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Nhận xét nào sau đây sai?

A. Nếu $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{SC}+2\overrightarrow{SD}=6\overrightarrow{SO}$ thì $ABCD$ là hình thang.

B. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$.

C. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{SC}+2\overrightarrow{SD}=6\overrightarrow{SO}$.

D. Nếu $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$. Nhận xét nào sau đây sai?

A. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$.

B. Nếu $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

C. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SC}$.

D. Nếu $\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SC}$ thì $ABCD$ là hình thang.

Câu 33. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$; $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. M là điểm xác định bởi $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$. Nhận xét nào sau đây đúng?

A. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.

B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.

C. M là trung điểm BB'.

D. M là trung điểm CC'.

Câu 34. Cho $\vec{x}=2\vec{a}+\vec{b};\vec{y}=-6\vec{a}-3\vec{b}$. Chọn mệnh đề đúng nhất?

A. Hai vecto $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là cùng phương

B. Hai vecto $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là cùng phương và cùng hướng

C. Hai vecto $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là cùng phương và ngược hướng

D. Hai vecto $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là không cùng phương

Câu 35. Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x}=2\vec{a}-\vec{b};\vec{y}=-4\vec{a}+2\vec{b};\vec{z}=-3\vec{b}-2\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng?

A. Haivectơ $\vec{y};\vec{z}$ cùng phương.

B. Haivectơ $\vec{x};\vec{y}$ cùng phương.

C. Haivectơ $\vec{x};\vec{z}$ cùng phương.

D. Đáp án A, B, C, đều sai.

Câu 36. Trong không gian, cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$.

B. $\vec{a}.\vec{b}=0$.

C. $\vec{a}.\vec{b}=-1$.

D. $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$.

Câu 37. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$.

A. $\alpha=180^\circ$.

B. $\alpha=0^\circ$.

C. $\alpha=90^\circ$.

D. $\alpha=45^\circ$.

Câu 38. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $\left|\vec{a}\right|=3,\ \left|\vec{b}\right|=2$ và $\vec{a}.\vec{b}=-3.$ Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\alpha=30^\circ$.

B. $\alpha=45^\circ$.

C. $\alpha=60^\circ$.

D. $\alpha=120^\circ$.

Câu 39. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$ và hai vectơ $\vec{u}=\frac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=90^\circ$.

B. $\alpha=180^\circ$.

C. $\alpha=60^\circ$.

D. $\alpha=45^\circ$.

Câu 40. Trong không gian, cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ có $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$ vuông góc với vectơ $\left(5\vec{a}-4\vec{b}\right)$ và $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$. Khi đó:

A. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=90^\circ$.

C. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{1}{2}$.

Câu 41. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $\left|\vec{a}\right|=4;\left|\vec{b}\right|=3;\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos\alpha=\frac{3}{8}$. **B.** $\alpha=30^0$. **C.** $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. **D.** $\alpha=60^0$.

Câu 42. Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là 2 vectơ đều khác $\vec{0}$. Khi đó $\left|\vec{u}+2\vec{v}\right|^2$ bằng

A. $\vec{u}^2+2\vec{v}^2-4\vec{u}.\vec{v}$. **B.** $\vec{u}^2+4\vec{v}^2+4\vec{u}.\vec{v}$. **C.** $\vec{u}^2+4\vec{v}^2$. **D.** $4\vec{u}\cdot\vec{v}\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$.

Câu 43. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $\left|\vec{a}\right|=4;\left|\vec{b}\right|=3;\vec{a}.\vec{b}=10$. Xét hai vectơ $\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}$ $\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b},$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{x},\vec{y}$. Chọn khẳng định đúng.

A. $\cos\alpha=\frac{-2}{\sqrt{15}}$. **B.** $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{15}}$. **C.** $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{15}}$. **D.** $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{15}}$.

Câu 44. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $\left|\vec{a}\right|=26;\left|\vec{b}\right|=28;\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=48$. Độ dài vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ bằng?

A. 25. **B.** $\sqrt{616}$. **C.** 9. **D.** $\sqrt{618}$.

Câu 45. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC=AD$ và $\widehat{BAC}=\widehat{BAD}=60^0$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

A. 60^0. **B.** 45^0. **C.** 120^0. **D.** 90^0.

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC$ và $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$?

A. 120^0. **B.** 90^0. **C.** 60^0. **D.** 45^0.

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD60°$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc $\left(MN,SC\right)$ bằng:

A. $45°$ **B.** $30°$ **C.** $90°$ **D.** $60°$

Câu 48. Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu ?

A. 0^0. **B.** 30^0. **C.** 90^0. **D.** 60^0.

Câu 49. Cho tứ diện $ABCD$ với $AB\perp AC,\ AB\perp BD$. Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Góc giữa PQ và AB là?

A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 45^0.

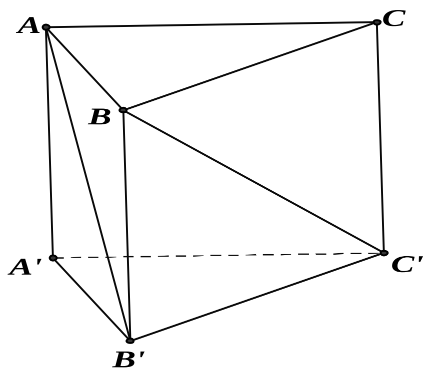
Câu 50. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC=AD$ và $\widehat{BAC}=\widehat{BAD}=60^0,\widehat{CAD}=90^0$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

A. $120°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Câu 51. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. AB và CD chéo nhau
B. AB và CD vuông góc với nhau
C. AB và CD đồng phẳng
D. AB và CD cắt nhau

Câu 52. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng



A. $60°$.
B. $45°$.
C. $90°$.
D. $30°$.

Câu 53. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a. Gọi M là trung điểm AD. Giá trị $\overrightarrow{B_1M}.\overrightarrow{BD_1}$ là:

A. $\frac{1}{2}a^2$.
B. a^2.
C. $\frac{3}{4}a^2$.
D. $\frac{3}{2}a^2$.

Câu 54. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

A. $90°$
B. $60°$
C. $45°$
D. $120°$

Câu 55. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BB'. Cosin của góc hợp bởi MN và AC' bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.
C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$.
D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 56. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác $A'BC$ đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). M là trung điểm cạnh CC'. Tính cosin góc α giữa hai đường thẳng AA' và BM.

A. $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{22}}{11}$.
B. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{33}}{11}$.
C. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{11}}{11}$.
D. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{22}}{11}$.

Câu 57. Trong không gian cho ba điểm $A,\ B,\ C$ bất kỳ, chọn đẳng thức đúng?

A. $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$
B. $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2BC^2$
C. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2BC^2$
D. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$

Câu 58. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a. Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$ bằng?

A. $a^2\sqrt{2}$.
B. a^2.
C. $a^2\sqrt{3}$.
D. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Câu 59. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Hãy tìm mệnh đề **sai** trong những mệnh đề sau đây:

A. $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A'}=\vec{0}$ **B.** $\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{AB'}=a^2$

C. $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{CD'}=0$ **D.** $\left|\overrightarrow{AC'}\right|=a\sqrt{3}$.

Câu 60. Cho tứ diện $ABCD$ với $AC=\frac{3}{2}AD,\widehat{CAB}=\widehat{DAB}=60^0,CD=AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD. Chọn khẳng định **đúng** ?

A. $\cos\varphi=\frac{3}{4}$. **B.** $\varphi=60^0$. **C.** $\varphi=30^0$. **D.** $\cos\varphi=\frac{1}{4}$.

Câu 61. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos\left(AB,DM\right)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 62. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ thì $AB\perp CD$, $AC\perp BD$, $AD\perp BC$. Điều ngược lại đúng không?

Sau đây là lời giải:

***Bước 1*:** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=0\Leftrightarrow AC\perp BD$

***Bước 2*:** Chứng minh tương tự, từ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ ta được $AD\perp BC$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ ta được $AB\perp CD$.

***Bước 3*:** Ngược lại đúng, vì quá trình chứng minh ở bước 1 và 2 là quá trình biến đổi tương đương.

Bài giải trên đúng hay **sai**? Nếu sai thì sai ở đâu?

A. Sai ở bước 3. **B.** Đúng ba bước **C.** Sai ở bước 2. **D.** Sai ở bước 1.

Câu 63. Trong không gian cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chọn hệ thức đúng?

A. $AB^2+AC^2+BC^2=2\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)$. **B.** $AB^2+AC^2+BC^2=GA^2+GB^2+GC^2$.

C. $AB^2+AC^2+BC^2=4\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)$. **D.** $AB^2+AC^2+BC^2=3\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)$.

Câu 64. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Chọn khẳng định đúng?

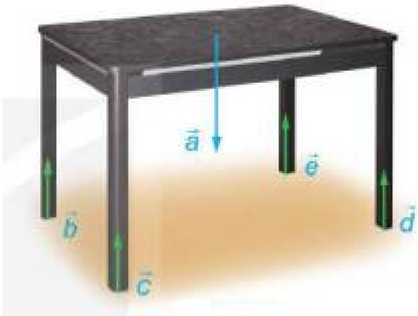
A. $AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2=3\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)$.

B. $AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2=4\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)$.

C. $AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2=6\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)$.

D. $AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2=2\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)$.

Câu 65. Một chiếc bàn học sinh cân đối hình chữ nhật được đặt trên mặt sàn nằm ngang, mặt bàn song song với mặt sàn và bốn chân bàn vuông góc với mặt sàn như hình vẽ. Trọng lực tác dụng lên bàn được biểu thị bởi vectơ $\vec{a}$ phân tán đều qua bốn chân bàn và gây nên các phản lực từ mặt sàn lên các chân bàn được biểu thị bởi các vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e}$.



Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Vectơ $\vec{d}$ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$.

B. Các vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e}$ cùng phương và ngược chiều với vectơ $\vec{a}$.

C. Vectơ $\vec{b}$ với vectơ $\vec{a}$ đối nhau.

D. Các vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e}$ đôi một cùng chiều và cùng độ lớn.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 66. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{D'C'}$

b) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}$

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{AD'}$

Câu 67. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AC'}$

b) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{DD'}-\overrightarrow{B'D'}=\overrightarrow{BB'}$

c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}=\vec{0}$

d) $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{C'D}$

Câu 68. Trong không gian cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O.

a) $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$.

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}$.

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}$.

Câu 69. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm hình hộp

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

b) $\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{D'D}=\overrightarrow{A'C}$.

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}=\vec{0}$

d) Với mọi điểm M ta đều có $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{8}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{MD'}\right)$.

Câu 70. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

b) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

c) $\left|\overrightarrow{BD}\right|=\left|\overrightarrow{A'C'}\right|$

d) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

Câu 71. Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'C$.

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

b) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$.

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A'C'}$.

d) $\overrightarrow{BD'}=2\overrightarrow{BG}$.

Câu 72. Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a

a) $\overrightarrow{B'B}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{B'D}$

b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD}$

c) $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}\right|=a\sqrt{2}$

d) $\left|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}\right|=a$

Câu 73. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a.

a) $\left(\overrightarrow{AB_1};\overrightarrow{C_1D}\right)=90^0$

b) $\overrightarrow{A_1B}.\overrightarrow{CC_1}=-a^2$

c) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{A_1D_1}$.

d) $\overrightarrow{A_1D}.\overrightarrow{C_1B}=0$

Câu 74. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

a) $\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{A_1A}$

b) $\left(\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{AD}\right)=60^0$

c) $\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{B_1D_1}=0$

d) $\overrightarrow{A_1C}.\overrightarrow{AC}=a^2$

Câu 75. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $AB=a, BC=2a, AA_1=3a$.

a) $\left(\overrightarrow{AB_1};\overrightarrow{C_1D}\right)=0^0$

b) $\overrightarrow{A_1B}.\overrightarrow{D_1D}=9a^2$

c) $\overrightarrow{A_1D_1}.\overrightarrow{C_1C}=0$

d) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{C_1A_1}.\overrightarrow{C_1B_1}$.

Câu 76. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB=a;\ AD=a\sqrt{3};\ AA'=2a$.

a) $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{CD'}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{A'D}+\overrightarrow{CB'}=\vec{0}$

c) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=a\sqrt{5}$

d) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{CC'}\right|=2\sqrt{2}a$

Câu 77. Trong không gian, cho $\vec{a}=3,\ \vec{b}=5$ góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $120°$.

a) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{19}$

b) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=8$

c) $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{139}$

d) $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=9$

Câu 78. Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G.

a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$

c) $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$

d) $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$

Câu 79. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB,CD và G là trung điểm MN

a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MG}$

c) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)$

d) $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

Câu 80. Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm M,N sao cho $AM=3MD$ và $BN=3NC$. Gọi P,Q lần lượt là trung điểm AD và BC.

a) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$

b) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}$

c) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BN}$

d) $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

Câu 81. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đều bằng a.

a) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2}{2}$

c) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}.$

d) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$.

Câu 82. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a.

a) Gọi G là trọng tâm của tứ diện đều $ABCD$, M là điểm tuỳ ý. Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\frac{a^2}{2}$

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-a^2$

d) Gọi I là trung điểm của AB. Ta có: $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AC} = \frac{3a^2}{4}$

Câu 83. Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{SO}$

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

c) $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$.

d) $\overrightarrow{GS} = 3\overrightarrow{OG}$.

Câu 84. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt bên ASB là tam giác vuông cân tại S và có cạnh $AB = a$. Gọi M là trung điểm của AB.

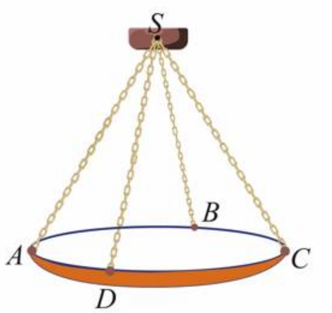
a) $2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BS} = \frac{a^2}{2}$

c) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AS} = -\frac{a^2}{2}$

d) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{MS} = 0$

Câu 85. Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 5kg$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 60^\circ$. Biết $\vec{P} = m.\vec{g}$ trong đó $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn $10\,\text{m/s}^2$, $\vec{P}$ là trọng lực tác động vật có đơn bị là N, m là khối lượng của vật có đơn vị kg.



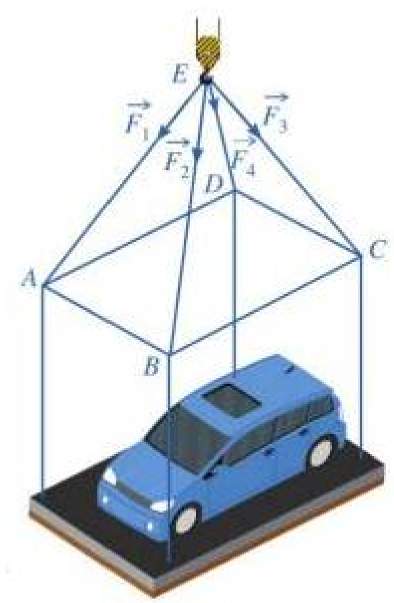
a) $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}$ là 4 vectơ đồng phẳng

b) $|\overrightarrow{SA}| = |\overrightarrow{SB}| = |\overrightarrow{SC}| = |\overrightarrow{SD}|$

c) Độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm bằng $40\,N$.

d) Độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích bằng $\frac{25\sqrt{3}}{3}N$

Câu 86. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60°. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là $4700\,\text{N}$ và trọng lượng của khung sắt là $3000\,\text{N}$



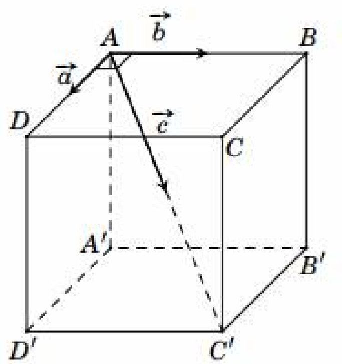
a) $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4}$

b) $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_4}$

c) $\left|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3}\right| = 8141\,\text{N}$ (làm tròn đến hàng đơn vị)

d) Trọng lượng của chiếc xe ô tô là $16282(\text{N})$ (làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 87. Một chất điểm ở vị trí đỉnh A của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chất điểm chịu tác động bởi ba lực $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC'}$ như hình vẽ. Độ lớn của các lực $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ tương ứng là $10\,\text{N}$, $10\,\text{N}$ và $20\,\text{N}$.



a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

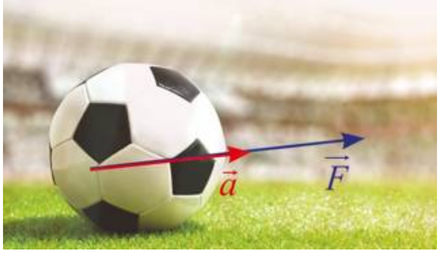
b) $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 20\,\text{N}$.

c) $\left|\vec{a} + \vec{c}\right| = \left|\vec{b} + \vec{c}\right|$.

d) $\left|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right| = 30,6\,\text{N}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 88. Theo định luật II Newton. Gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật: $\vec{F} = m\vec{a}$ trong đó $\vec{a}$ là vectơ gia tốc $\left(m/s^2\right), \vec{F}$ là vectơ lực (N) tác dụng lên vật, $m(kg)$ là khối lượng của vật. Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng $0,5kg$ một gia tốc $50m/s^2$ thì cần một lực đá có độ lớn (đơn vị: N) là bao nhiêu?



Trả lời: ………………..

Câu 89. Trọng lực $\vec{P}$ là lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một vật, được tính theo công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, trong đó m là khối lượng của vật (đơn vị: kg), còn $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do, có hướng đi xuống và có độ lớn $g = 9,8m/s^2$. Xác độ lớn của trọng lực (đơn vị: N) tác dụng lên quả dừa có khối lượng $2,5$kg.

Trả lời: ………………..

Câu 90. Trọng lực $\vec{P}$ là lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một vật được tính bởi công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, trong đó m là khối lượng của vật (đơn vị: kg), $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do, có hướng đi xuống và có độ lớn $g = 9,8m/s^2$. Xác định độ lớn của trọng lực (đơn vị: N) tác dụng lên quả bóng có khối lượng 500 gam.

Trả lời: ………………..

Câu 91. Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc 100° và có độ lớn lần lượt là $25N$ và $12N$. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn $4N$. Tính độ lớn của hợp lực (đơn vị: N) của ba lực trên (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Trả lời: ………………..

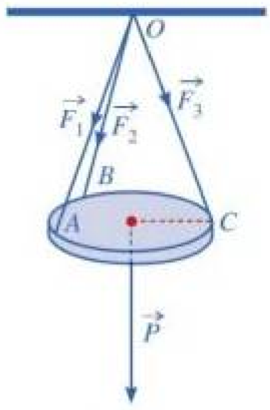
Câu 92. Cho biết công A (đơn vị: J) sinh bởi lực $\vec{F}$ tác dụng lên một vật được tính bằng công thức $A=\vec{F}\cdot\vec{d}$, trong đó $\vec{d}$ là vectơ biểu thị độ dịch chuyển của vật (đơn vị của $|\vec{d}|$ là m) khi chịu tác dụng của lực $\vec{F}$. Một chiếc xe có khối lượng $0,15$ tấn đang đi xuống trên một đoạn đường dốc có góc nghiêng 5° so với phương ngang. Tính công (đơn vị: J) sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài $30m$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị), biết rằng trọng lực $\vec{P}$ được xác định bởi công thức $\vec{P}=m\vec{g}$, với m (đơn vị: kg) là khối lượng của vật và $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g=9,8\,m/s^2$.

Trả lời: ………………..

Câu 93. Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của bốn lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học. Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900 km/h lên 920 km/h, trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc $900\,km/h$ và $920\,km/h$ lần lượt được biểu diễn bởi hai vectơ $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$. Tính giá trị của k (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Trả lời: ………………..

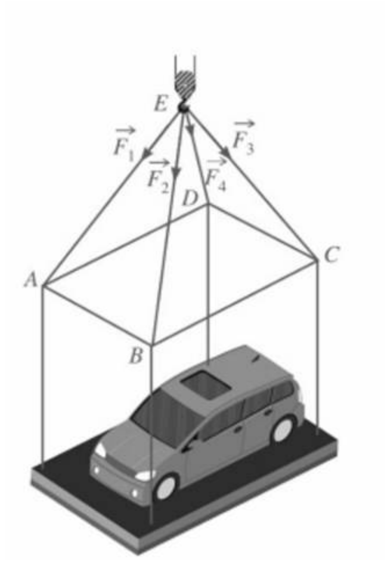
Câu 94. Một tấm gỗ tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A,B,C trên tấm gỗ tròn sao cho các lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ lần lượt trên mỗi dây OA,OB,OC đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\left|\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{F_3}\right|=10\left(N\right)$ (xem hình vẽ).



Tính trọng lượng P của tấm gỗ tròn đó (đơn vị N và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

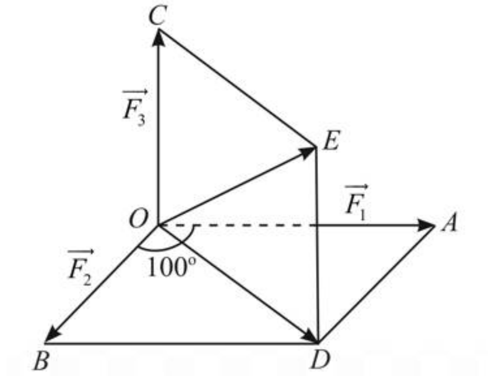
Trả lời: ………………..

Câu 95. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiến cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60^0 như hình vẽ. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ $5000(N)$ và trọng lượng khung sắt là $8000(N)$. Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (đơn vị N và làm tròn kết quả đến chữ số hàng đơn vị).



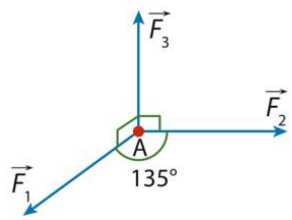
Trả lời: ………………..

Câu 96. Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc $100°$ và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4 N. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên (đơn vị N và làm tròn kết quả đến chữ số hàng đơn vị).



Trả lời: ………………..

Câu 97. Một chất điểm A nằm trên mặt phẳng nằm ngang (α), chịu tác động bởi ba lực $\vec{F_1},\vec{F_2},\vec{F_3}$. Các lực $\vec{F_1},\vec{F_2}$ có giá nằm trong (α) và $\left(\vec{F_1},\vec{F_2}\right)=135^\circ$, còn lực $\vec{F_3}$ có giá vuông góc với (α) và hướng lên trên.



Xác định hợp lực của các lực $\vec{F_1},\vec{F_2},\vec{F_3}$, biết rằng độ lớn của ba lực đó lần lượt là $20N$, $15N$ và $10N$ (đơn vị N và làm tròn kết quả đến chữ số hàng thập phân thứ nhất).

Trả lời: ………………..

Câu 98. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{MN}=k\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$

Trả lời: ………………..

Câu 99. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm đoạn MN và P là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{PI}=k\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)$.

Trả lời: ………………..

Câu 100. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{MN}=k\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$

Trả lời: ………………..

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 101. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{D'D}-\overrightarrow{B'D'}=k\overrightarrow{BB'}$

Câu 102. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=k\overrightarrow{AC_1}$

Câu 103. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD. Đặt $\vec{x}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{y}=\overrightarrow{AC}$; $\vec{z}=\overrightarrow{AD}$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AG}$ theo ba vectơ $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ ta được $\overrightarrow{AG}=a.\vec{x}+b.\vec{y}+c.\vec{z}$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$.

Câu 104. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{MP}$ theo ba vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ ta được $\overrightarrow{MP}=x.\vec{b}+y.\vec{c}+z.\vec{d}$ với $x,y,z\in\mathbb{R}$. Tính giá trị biểu thức $T=x+y+z$.

Câu 105. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AA'}$ ta được $\overrightarrow{AM}=a.\overrightarrow{CA}+b.\overrightarrow{CB}+c.\overrightarrow{AA'}$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$.

Câu 106. Cho tứ diện $ABCD$. Tìm giá trị của k thích hợp thỏa mãn: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=k$

Câu 107. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh $\sqrt{2025}$. Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$ bằng bao nhiêu?

Câu 108. Trong không gian, cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=4,|\vec{b}|=3$ và $|\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{7}$. Tính $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Câu 109. Trong không gian, cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a}-\vec{b}|=3$. Tính $\left(\vec{a}-2\vec{b}\right).\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)$.

Câu 110. Trong không gian, cho ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ thỏa mãn: $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=5$ và $5\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+3\vec{c}=\vec{0}$. Khi đó biểu thức $M=\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$ có giá trị bao nhiêu?

CHƯƠNG 2
TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1
VECTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

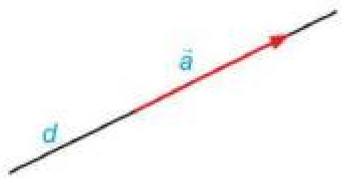
1. Khái niệm vectơ trong không gian

Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Độ dài của vectơ trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Chú ý: Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau:

- Cho đoạn thẳng AB trong không gian. Nếu ta chọn điểm đầu là A, điểm cuối là B thì ta có một vectơ, kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là “vectơ AB”.
- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ, vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a},\vec{b},\vec{u},\vec{v},...$
- Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $\left|\vec{a}\right|$.
- Đường thẳng đi qua điểm đầu và cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ.



Đường thẳng d là giá của vectơ $\vec{a}$

Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, ta có các khái niệm sau đối với vectơ trong không gian:

- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a}=\vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Chú ý: Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các tính chất và quy ước sau:

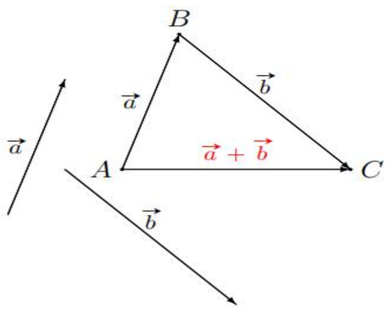
- Trong không gian, với mỗi điểm O và vectơ $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm sao cho $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$.
- Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như $\overrightarrow{AA},\overrightarrow{BB},...$ được gọi là vectơ-không.
- Ta quy ước vectơ-không có độ dài là 0, cùng hướng với mọi vectơ. Do đó, các vectơ-không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.

2. Các phép toán vectơ trong không gian

a. Tổng của hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là **tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$,** kí hiệu $\vec{a}+\vec{b}$. Vậy $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Phép lấy tổng hai vectơ còn được gọi là **phép cộng vectơ.**

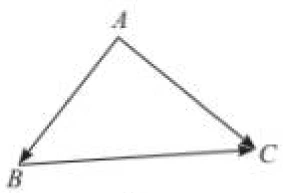


Chú ý: Tương tự như phép cộng vectơ trong mặt phẳng, phép cộng vectơ trong không gian có các tình chất sau:

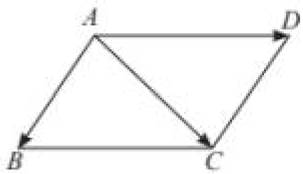
- Tính chất giao hoán: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
- Tính chất kết hợp: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.
- Tính chất của vectơ-không: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

Đối với vectơ trong không gian, ta có các quy tắc sau:

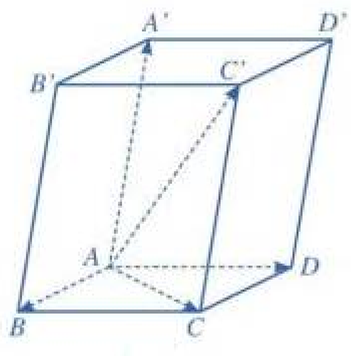
- ***Quy tắc ba điểm*:** Với ba điểm A,B,C ta luôn có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



- ***Quy tắc hình bình hành*:** Nếu $ABCD$ là hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.



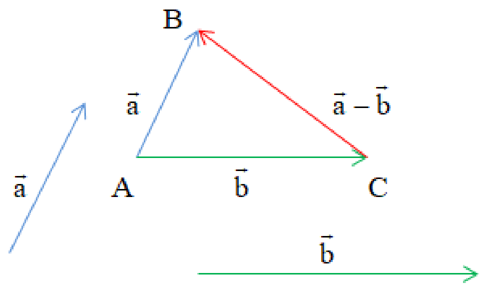
- ***Quy tắc hình hộp:*** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$



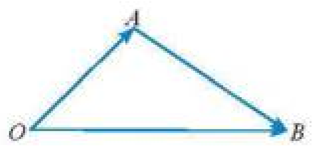
b. Hiệu của hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Hiệu của vectơ $\vec{a}$ và vectơ $\vec{b}$ là tổng vectơ $\vec{a}$ và vectơ đối của vectơ $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}-\vec{b}$.

Phép lấy hiệu hai vectơ còn được gọi là **phép trừ vectơ.**



Chú ý: Trong không gian, với ba điểm O, A, B tùy ý, ta luôn có: $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$.



3. Tích của một số với một vectơ trong không gian

a. Định nghĩa:

Cho số $k \neq 0$ và một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của vectơ $\vec{a}$ với số k là một vectơ, kí hiệu $k\vec{a}$.

Vectơ $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k>0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k<0$ và có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$.

Phép lấy tích của một số với một vectơ gọi là **phép nhân một số với một vectơ.**

Quy ước: $0.\vec{a}=\vec{0}$ và $k.\vec{a}=\vec{0}$.

b.Tính chất:

Với hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bất kỳ, với mọi số thực h và k, ta có:

- $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}; k\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=k\vec{a}-k\vec{b}$
- $(h+k)\vec{a}=h\vec{a}+k\vec{a}$
- $h(k\vec{a})=(hk)\vec{a}$
- $1\vec{a}=\vec{a}$, $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$.

Chú ý:

- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a}=k\vec{b}$.
- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 sao cho $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.
- **Hệ thức trung điểm đoạn thẳng:** Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB, M tuỳ ý, ta có:

$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0};\quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}.$$

- **Hệ thức trọng tâm tam giác:** Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC, M tuỳ ý, ta có:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0};\quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$$

- **Hệ thức trọng tâm tứ diện:** Cho G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, M tuỳ ý. Ta có:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0};\qquad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$$

c. Sự đồng phẳng của ba vectơ (tham khảo thêm)

- Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.
- **Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:** Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, trong đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.

Khi đó: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi tồn tại cặp số duy nhất $m,n\in\mathbb{R}$ sao cho $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$

- Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng, $\vec{x}$ tuỳ ý.

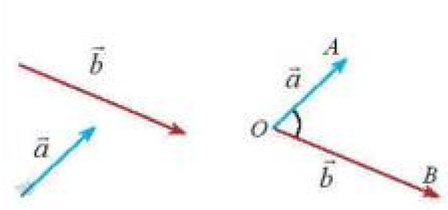
Khi đó: $\exists m,n,p\in\mathbb{R}:\ \vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$

4. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

a. Góc giữa hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ và $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

Góc cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong không gian, kí hiệu $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$.



Chú ý:

- $0^\circ\le\left(\vec{a},\vec{b}\right)\le180^\circ$
- Nếu $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=90^0$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a}\perp\vec{b}$.
- Góc giữa hai vectơ cùng hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 0°.
- Góc giữa hai vectơ ngược hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 180°.

b. Tích vô hướng của hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. **Tích vô hướng** của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực, kí hiệu $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức sau: $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

Chú ý:

- Trường hợp có ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$, ta quy ước $\vec{a}.\vec{b}=0$.

• Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$, ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$.

• Khi $\vec{a} = \vec{b}$ thì tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

Ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}|.|\vec{a}|\cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$. Vậy bình phương vô hướng của một vectơ luôn bằng bình phương độ dài của vectơ đó.

• Tính chất của tích vô hướng: Với ba vectơ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ bất kì và mọi số k, ta có:

+ $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ (tính chất giao hoán)

+ $\vec{a}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối)

+ $\left(k\vec{a}\right).\vec{b} = k\left(\vec{a}.\vec{b}\right) = \vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$

Nhận xét: Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra:

- $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$
- $\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$
- $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

CHỦ ĐỀ 1
CÁC PHÉP VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

DẠNG 1
KHÁI NIỆM VECTƠ

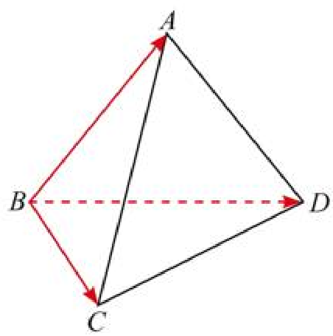
- Đường thẳng đi qua điểm đầu và cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ.

Đường thẳng d là giá của vectơ $\vec{a}$

- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau. Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vectơ được gọi là bằng nhau, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.
- Hai vectơ được gọi là đối nhau, nếu chúng có cùng độ dài và ngược hướng.

Bài 1. Cho hình tứ diện $ABCD$. Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu là B và điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện.

Lời giải



Ba vectơ $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ có điểm đầu là B và điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện.

Bài 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$.

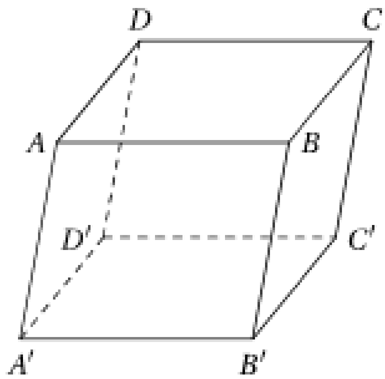
b) Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho các vectơ đó cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$.

c) Giá của ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ có cùng nằm trong một mặt phẳng không?

d) Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho các vectơ đó bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$.

e) Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho các vectơ đó là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{BD}$.

Lời giải



a) Các vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của hình hộp là:

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AD'}$

b) Do $AB \,//\, DC \,//\, D'C' \,//\, A'B'$ (tính chất hình hộp) nên các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho các vectơ đó cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$ là: $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{D'C'}, \overrightarrow{C'D'}, \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{B'A'}$

c) Giá của ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ lần lượt là ba đường thẳng AB, AD, AA'. Chúng không cùng nằm trong một mặt phẳng vì bốn điểm A, B, D, A' không đồng phẳng.

d) Do các vectơ $\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{DD'}$ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $AA' = BB' = CC' = DD'$ (tính chất hình hộp) nên $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$.

Vậy ba vectơ $\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{DD'}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$.

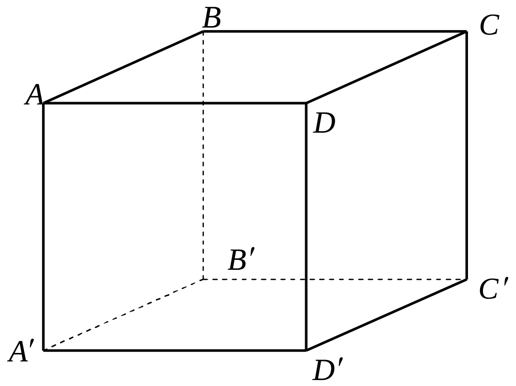
e) Do vectơ $\overrightarrow{D'B'}$ ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{BD}$ và $BD = D'B'$ (tính chất hình hộp) nên vectơ $\overrightarrow{D'B'}$ là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{BD}$.

Bài 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a.

a) Tìm độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC}$.

b) Tìm độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC'}$.

Lời giải



a) Tam giác ABC vuông tại A nên theo Pythagone: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=a\sqrt{2}$

Vậy độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC}$ là: $\left|\overrightarrow{AC}\right|=a\sqrt{2}$

b) Tam giác $ABC^{'}$ vuông tại C nên theo Pythagone: $AC^{'}=\sqrt{AC^2+C^{'}C^2}=\sqrt{2a^2+a^2}=a\sqrt{3}$

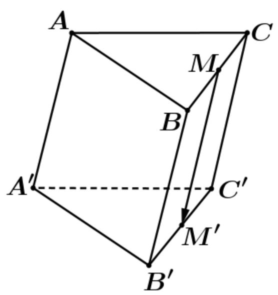
Vậy độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC^{'}}$ là: $\left|\overrightarrow{AC^{'}}\right|=a\sqrt{3}$

Bài 4. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

a) Trong ba vectơ $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ thì vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$? Giải thích vì sao.

b) Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AA'}$.

Lời giải



a) Hai đường thẳng AA' và BC chéo nhau nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương.

Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$ không bằng nhau.

Tứ giác $ACC'A'$ là hình bình hành nên $AA'//CC'$ và $AA'=CC'$.

Hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{CC'}$ có cùng độ dài và cùng hướng nên hai vectơ đó bằng nhau.

Tương tự, hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ không bằng nhau.

b) Gọi M' là trung điểm của cạnh $B'C'$. Vì tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành nên $MM'//BB'$ và $MM'=BB'$.

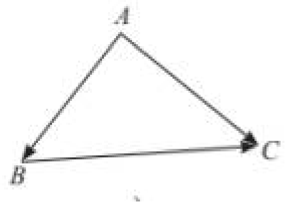
Hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA'//BB'$ và $AA'=BB'$, suy ra $MM'//AA'$ và $MM'=AA'$.

Hai vectơ $\overrightarrow{MM'}$ và $\overrightarrow{AA'}$ có cùng độ dài và cùng hướng nên $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AA'}$.

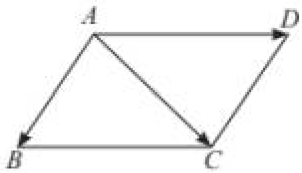
Vậy trung điểm của cạnh $B'C'$ là điểm M' cần tìm.

DẠNG 2
CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VECTƠ

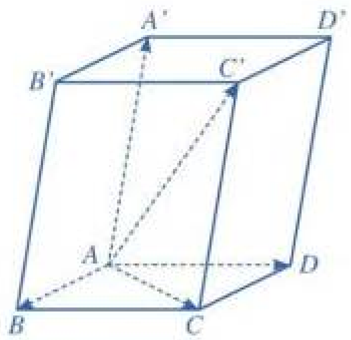
- ***Quy tắc ba điểm*:** Với ba điểm A, B, C ta luôn có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



- ***Quy tắc hình bình hành*:** Nếu $ABCD$ là hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.



- ***Quy tắc hình hộp:*** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$



- **Hệ thức trung điểm đoạn thẳng:** Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB, M tuỳ ý, ta có:

$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0};\quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}.$$

- **Hệ thức trọng tâm tam giác:** Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC, M tuỳ ý, ta có:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0};\quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$$

- **Hệ thức trọng tâm tứ diện:** Cho G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, M tuỳ ý. Ta có:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0};\qquad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$$

- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 sao cho $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

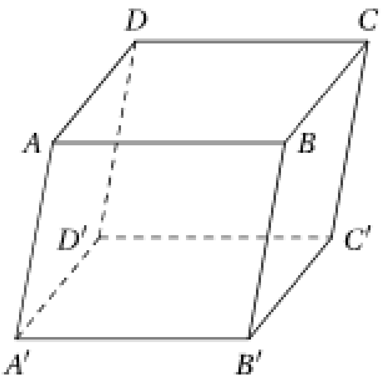
Bài 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{B'B}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{B'D}$.

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AC'}$.

c) $\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{CA'}$.

Lời giải



a) Ta có: $\overrightarrow{B'B}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{B'B}+\left(-\overrightarrow{DB}\right)=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{B'D}$

b) Ta có: $\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AA'}$.

Do đó: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

c) Vì $ABCD\cdot A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{CB}$.

Suy ra $\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA'}$.

Bài 2. Trong không gian, cho các điểm A,B,C,D,E,F .Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}$.

Lời giải

a) Ta có:$VT=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=VP$ suy ra điều phải chứng minh.

b) Ta có:

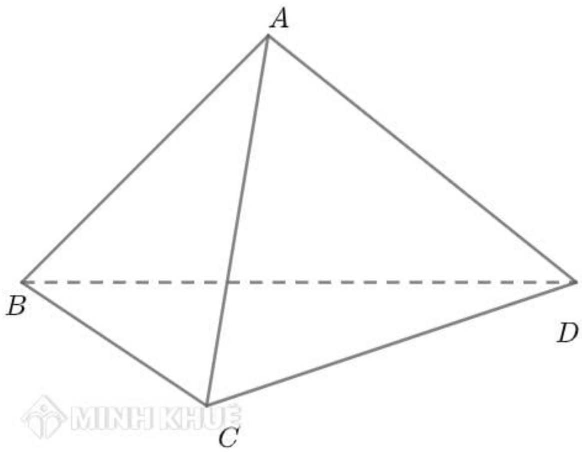
$VT=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF}=\left(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF}\right)=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}=VP$ suy ra điều phải chứng minh.

Bài 3. Cho hình tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$.

Lời giải



a) Ta có: $VT=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{AD}+\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}\right)=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=VP$

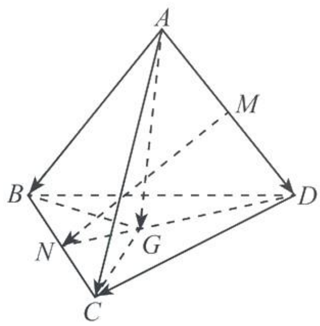
b) Ta có: $VT=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=VP$

Bài 4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD,BC và G là trọng tâm của tam giác BCD.

a) Chứng minh $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$

b) Chứng minh $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$

Lời giải



a) Ta có:

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}$.

Vì M là trung điểm của đoạn thẳng AD nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.

Vì N là trung điểm của đoạn thẳng BC nên $\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.

Do đó $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$.

b) Ta có:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$.

Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

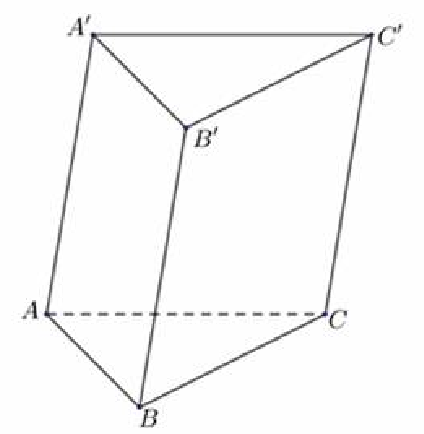
Do đó $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.

Bài 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

a) Tính vectơ tổng $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A'C'}$.

b) Tính vectơ tổng $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AA'}$.

Lời giải



a) Ta có $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ nên $AA'C'C$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{AC}$.

Do đó $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$.

a) Ta có $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ nên $AA'B'B$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$.

Do đó $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BC'}$.

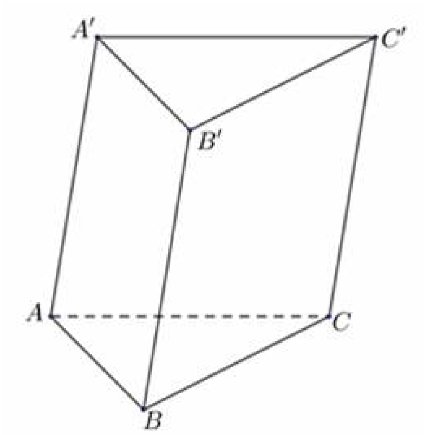
DẠNG 3
PHÂN TÍCH MỘT VECTƠ THEO CÁC VECTƠ

Bài 1. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$.

a) Phân tích các vectơ $\overrightarrow{B'C},\overrightarrow{BC'}$ theo các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

b) Gọi G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AG'}$ theo ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Lời giải



a)

Ta có: $\overrightarrow{B'C}=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{A'C'}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Ta có: $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{A'C'}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

b) Vì G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$ nên:

$3\overrightarrow{AG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AG'}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

a) Phân tích vectơ $\overrightarrow{SG}$ theo các vectơ $\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}$.

b) Gọi D là trọng tâm của của hình chóp $S.ABC$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{SD}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}$.

Lời giải

a) Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên:

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SA}\right)+\left(\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SB}\right)+\left(\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SC}\right)=\vec{0}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{SG}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{SG}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)$

b) Vì D là trọng tâm của của hình chóp $S.ABC$ nên:

$\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{DS}+\left(\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SA}\right)+\left(\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SB}\right)+\left(\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SC}\right)=\vec{0}$

$\Rightarrow 4\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$

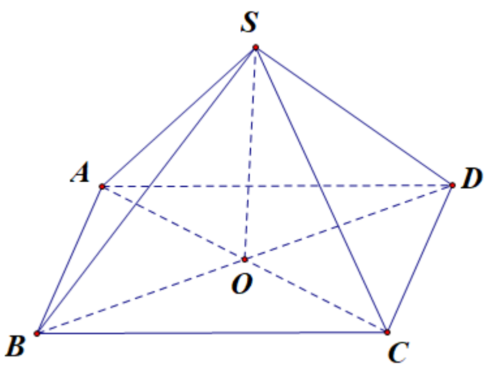
$\Rightarrow \overrightarrow{SD}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)$.

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O.

a) Phân tích vectơ $\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SC}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SO}$.

b) Phân tích vectơ $\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SD}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SO}$.

Lời giải



a)

• Ta có $\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{SO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{SO}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Do đó: $\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{SO}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

• Ta có $\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{SO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Do đó: $\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

b)

• Ta có $\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{SO}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$

Do đó: $\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SO}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$

• Ta có $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$

$\Rightarrow \overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}-\overrightarrow{SB}=2\overrightarrow{SO}-\left(\overrightarrow{SO}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{SO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

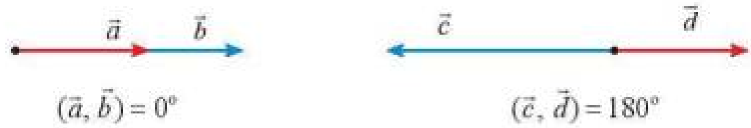
Do đó: $\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

CHỦ ĐỀ 2
TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

DẠNG 1
TÍNH CHẤT TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

1. Dựa vào định nghĩa $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

- $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$
- $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$.
- Góc giữa hai vectơ cùng hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 0°.
- Góc giữa hai vectơ ngược hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 180°.



2. Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ

- $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$
- $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$
- $\left(k\vec{a}\right).\vec{b}=k\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=\vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$
- $\vec{a}^2\geq 0,\ \vec{a}^2=0\Leftrightarrow\vec{a}=0$
- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$
- $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2-2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$
- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{b}^2$

Bài 1. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau góc $120°$ và $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$. Tính $|\vec{a}+2\vec{b}|$.

Lời giải

Cách 1 :

$$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=(\vec{a}+2\vec{b})^2=|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+4\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+4|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a}.\vec{b})=9+4.25+4.3.5\left(-\frac{1}{2}\right)=79$$

$$\Rightarrow |\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{79}$$

Cách 2 :

Vẽ hình bình hành $ABCD$ sao cho: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=2\vec{b}$.

Theo quy tắc hình bình hành ta có: $|\vec{a}+2\vec{b}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AC}|=AC$.

Áp dụng định lí hàm côsin trong tam giác ACD:

$$AC=\sqrt{CD^2+AD^2-2CD.AD.\cos 60°}=\sqrt{79}.$$

Bài 2. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ có $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và $(\vec{a},\vec{b})=60^0$. Xác định x sao cho thỏa mãn $|x\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có:

$$|x\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (x\vec{a}+\vec{b})^2=3$$

$$\Leftrightarrow x^2\vec{a}^2+2x\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2=3$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x\cos 60^0+1=3$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$$

Bài 3. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và $\vec{a}.\vec{b}=3$. Tính độ dài vectơ $3\vec{a}+5\vec{b}$.

Lời giải

$$(3\vec{a}+5\vec{b})^2=9\vec{a}^2+30\vec{a}\vec{b}+25\vec{b}^2=9+90+25=124.$$

$$\Rightarrow |3\vec{a}+5\vec{b}|=\sqrt{124}$$

Bài 4. Trong không gian, cho $\vec{u}=\vec{a}+3\vec{b}$ vuông góc với $\vec{v}=7\vec{a}-5\vec{b}$ và $\vec{x}=\vec{a}-4\vec{b}$ vuông góc với $\vec{y}=7\vec{a}-2\vec{b}$. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có:

$$\begin{cases}\vec{u}.\vec{v}=0\\\vec{x}.\vec{y}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\vec{a}+3\vec{b}\right).\left(7\vec{a}-5\vec{b}\right)=0\\\left(\vec{a}-4\vec{b}\right).\left(7\vec{a}-2\vec{b}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7\left|\vec{a}\right|^2-15\left|\vec{b}\right|^2=-16\vec{a}.\vec{b}\\7\left|\vec{a}\right|^2+8\left|\vec{b}\right|^2=30\vec{a}.\vec{b}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|\vec{b}\right|^2=2\vec{a}.\vec{b}\\\left|\vec{a}\right|^2=2\vec{a}.\vec{b}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|\vec{b}\right|^2=2\vec{a}.\vec{b}\\\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|\end{cases}.$$

Từ đó, ta có: $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=60°$

Bài 5. Trong không gian, cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn các điều kiện $\left|\vec{a}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\vec{b}\right|=1,\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{15}$.

Đặt $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{v}=2k\vec{a}-\vec{b}$, $k\in\mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị của k sao cho $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=60°$

Lời giải

$\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{15}\Leftrightarrow\left|\vec{a}\right|^2+4\left|\vec{b}\right|^2-4\vec{a}\vec{b}=15\Leftrightarrow 2\vec{a}\vec{b}=1$.

$\vec{u}\vec{v}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(2k\vec{a}-\vec{b}\right)=2k\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2+\left(2k-1\right)\vec{a}\vec{b}=2k-4+\dfrac{2k-1}{2}$.

$\left(\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\right)^2=\left(\left|\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right|\left|\left(2k\vec{a}-\vec{b}\right)\right|\right)^2=\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\vec{a}\vec{b}\right)\left(4k^2\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-4k\vec{a}\vec{b}\right)=\left(5+2\vec{a}\vec{b}\right)\left(4k^2+4-4k\vec{a}\vec{b}\right)$

$=6\left(4k^2+4-2k\right)\Rightarrow\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|=\sqrt{6\left(4k^2+4-2k\right)}$.

$$\left(\vec{u},\vec{v}\right)=60°\Rightarrow\cos\left(60°\right)=\frac{\vec{u}\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{2k-4+\dfrac{2k-1}{2}}{\sqrt{6\left(4k^2+4-2k\right)}}\Leftrightarrow\sqrt{6\left(4k^2+4-2k\right)}=6k-9$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{6\left(4k^2+4-2k\right)}=6k-9\Leftrightarrow\begin{cases}k\ge\dfrac{3}{2}\\\sqrt{6\left(4k^2+2-k\right)}=6k-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\ge\dfrac{3}{2}\\12k^2-96k+57=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\ge\dfrac{3}{2}\\k=4\pm\dfrac{3\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow k=4+\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.

DẠNG 2
TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

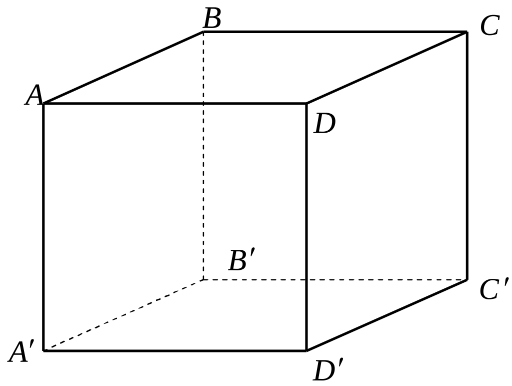
Bài 1. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$.

a) Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'}$.

b) Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}$.

c) Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{B'C}$.

Lời giải



a) Ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'}$, suy ra $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \widehat{DAB} = 90^\circ$.

b) Ta có $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$, suy ra $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{CAB} = 45^\circ$.

c) Ta có: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B'D'}$. Do đó,

$\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{B'C}\right) = \left(\overrightarrow{B'D'}, \overrightarrow{B'C}\right) = \widehat{D'B'C}$.

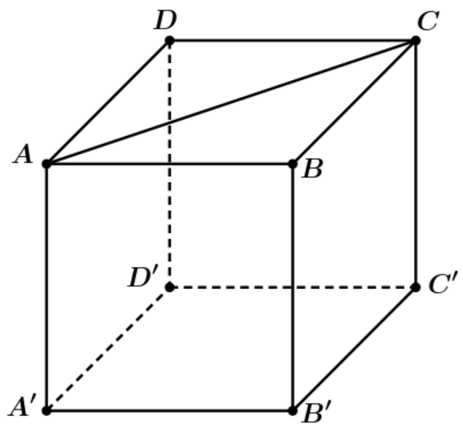
Vì $B'C = CD' = D'B'$ nên tam giác $B'CD'$ là tam giác đều. Suy ra $\widehat{D'B'C} = 60^\circ$.

Vậy $\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{B'C}\right) = 60^\circ$.

Bài 2. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh đáy bằng 1 và độ dài mỗi cạnh bên bằng 2 . Hãy tính góc giữa các cặp vectơ sau đây và tính tích vô hướng của mỗi cặp vectơ đó:

a) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{C'C}$ b) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'A'}$

Lời giải



a) Vì $AA'//CC'$ nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{C'C}$ ngược hướng nhau.

Suy ra $\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{C'C}\right)=180^\circ$. Do đó: $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{C'C}=\left|\overrightarrow{AA'}\right|.\left|\overrightarrow{C'C}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{C'C}\right)=2.2.\cos180^\circ=-4$

b) Vì $A'ADD'$ là hình chữ nhật nên $\widehat{A'AD}=90^\circ$

vì $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$. Do đó $\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AD}\right)=\overline{A'AD}=90^\circ$

Ta có: $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AD}=\left|\overrightarrow{AA'}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AD}\right)=2.1.\cos90^\circ=0$

c) Vì $A'ABB'$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{B'A'}=\overrightarrow{BA}$.

Mặt khác $ABCD$ là hình vuông nên $\widehat{CAB}=45^\circ$ và $AC=\sqrt{2}$

Ta có: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{B'A'}=-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=-\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=-\sqrt{2}.1.\cos45^\circ=-1$.

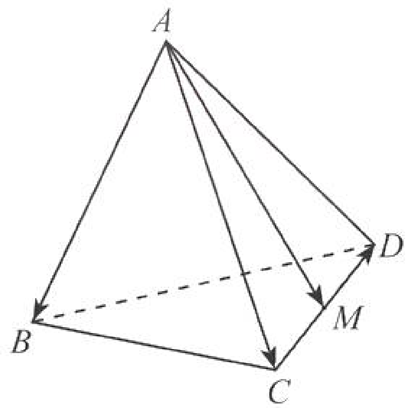
Bài 3. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD.

a) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}$.

c) Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$.

Lời giải



a) Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=AB.AC.\cos\widehat{BAC}=a.a.\cos60^\circ=\dfrac{a^2}{2}$

b) Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|.\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=AB.AD.\cos\widehat{BAD}=a.a.\cos60^\circ=\dfrac{a^2}{2}$

mà $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$

nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}.\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}\right)=\frac{a^2}{2}$

c) Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}).\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CD}$.

AM là trung tuyến của các tam giác đều ACD nên $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{CD}\Rightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CD}=0$.

BM là trung tuyến của các tam giác đều BCD nên $\overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{CD}\Rightarrow\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CD}=0$.

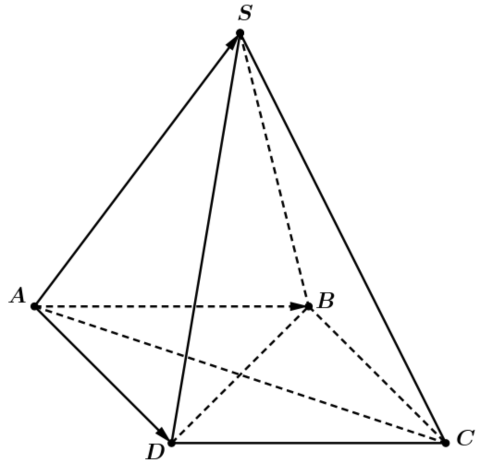
Do đó: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}\Rightarrow(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=90^\circ$

Bài 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a.

a) Tính các tích vô hướng sau $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{BC}$.

b) Tính các tích vô hướng sau $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AC}$.

Lời giải



a) Tam giác SAD có ba cạnh bằng nhau nên là tam giác đều suy ra $\widehat{SAD}=60^\circ$.

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ suy ra $\left(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AD}\right)=\widehat{SAD}=60^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{AS}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|.\cos 60^\circ=a.a.\frac{1}{2}=\frac{a^2}{2}$.

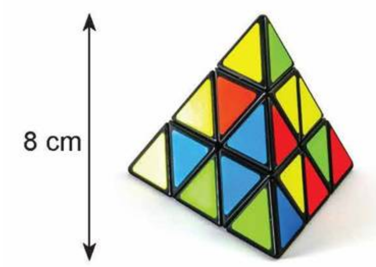
b) Tứ giác $ABCD$ là hình vuông có độ dài mỗi cạnh là a nên độ dài đường chéo AC là $\sqrt{2}a$. Tam giác SAC có $SA=SC=a$ và $AC=\sqrt{2}a$ nên tam giác SAC vuông cân tại S

Suy ra $\widehat{SAC}=45^\circ$, do đó $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AS}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos\widehat{SAC}=a.\sqrt{2}a.\frac{\sqrt{2}}{2}=a^2$.

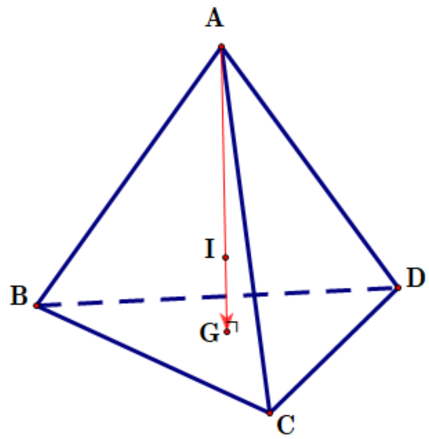
CHỦ ĐỀ 3

BÀI TOÁN THỰC TIỄN ỨNG DỤNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1. Ta đã biết trọng tâm của tứ diện $ABCD$ là một điểm I thoả mãn $\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{IG}$, ở đó G là trọng tâm của tam giác BCD. Áp dụng tính chất trên để tính khoảng cách từ trọng tâm của một khối rubik (đồng chất) hình tứ diện đều đến một mặt của nó, biết rằng chiều cao của khối rubik là $8cm$.



Lời giải

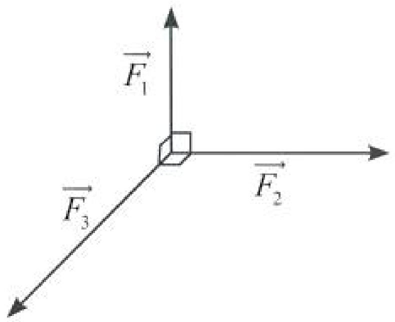


Đặt tên khối rubik là tứ diện đều $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD, I là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Ta có: $\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{IG}\Rightarrow IG=\frac{1}{4}AG$

Vì chiều cao của rubik bằng $8cm$ nên $AG=8cm\Rightarrow IG=\frac{1}{4}.8=2(cm)$

Vậy khoảng cách từ trọng tâm của một khối rubik (đồng chất) hình tứ diện đều đến một mặt của nó bằng $2cm$.

Bài 2. Ba lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc và có độ lớn lần lượt là $2N;3N;4N$. Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho.

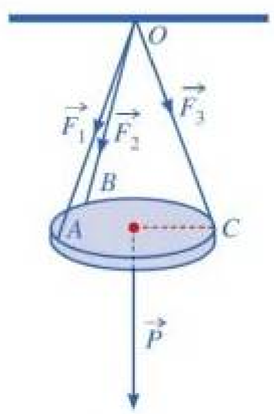


Lời giải

Ta có: $\left|\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}\right|=\sqrt{F_2{}^2+F_3{}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

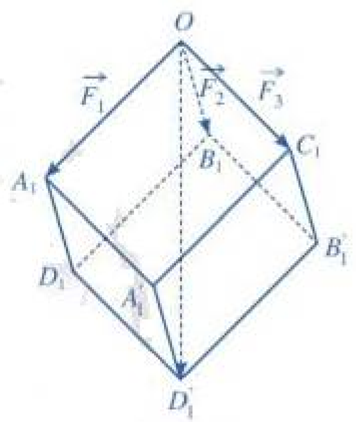
Độ lớn hợp lực của ba lực là: $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}\right|=\sqrt{F_1^2+5^2}=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}N$

Bài 3. Một tấm sắt tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A,B,C trên tấm sắt tròn sao cho các lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ lần lượt trên mỗi dây OA,OB,OC đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn bằng nhau $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\left|\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{F_3}\right|$. Biết trọng lượng P của tấm sắt tròn đó bằng $2024\sqrt{3}\,(N)$ (xem hình vẽ).



Tính lực căng của dây treo tấm sắt tròn đó.

Lời giải



Gọi A_1,B_1,C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{F_1},\ \overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{F_2},\ \overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{F_3}$

Lấy các điểm D_1,A_1',B_1',D_1' sao cho $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ là hình hộp .

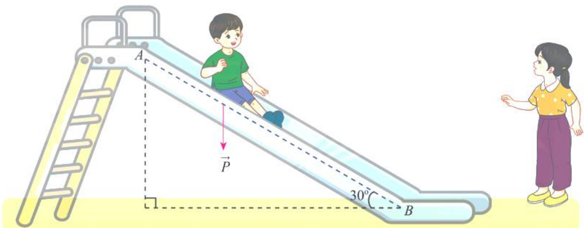
Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OD_1'}$

Do các lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn: $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\left|\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{F_3}\right|$ nên hình hộp $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ có ba cạnh OA,OB,OC đôi một vuông góc và bằng nhau. Vì thế $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ là hình lập phương có độ dài cạnh bằng $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\left|\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{F_3}\right|=x$, suy ra độ dài đường chéo bằng $\sqrt{3}x$

Vì tấm gỗ tròn ở vị trí cân bằng nên: $\vec{P}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}$

Ta có: $\left|\vec{P}\right|=\left|\overrightarrow{OD_1'}\right|\Leftrightarrow 2024\sqrt{3}=\sqrt{3}x\Leftrightarrow x=2024(N)$

Bài 4. Một em nhỏ cân nặng $m=25kg$ trượt trên cầu trượt dài $3,5m$. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 30° (như hình vẽ).



a) Tính độ lớn của trọng lực $\vec{P}=m\vec{g}$ tác dụng lên em nhỏ, cho biết vectơ gia tốc rơi tự do $\vec{g}$ có độ lớn là $g=9,8m/s^2$.

b) Cho biết công $A(J)$ sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển $\vec{d}$ được tính bởi công thức $A=\vec{F}\cdot\vec{d}$. Hãy tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt.

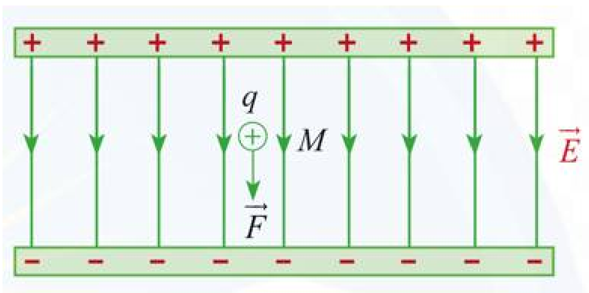
Lời giải

a) Độ lớn trọng lực tác dụng lên em nhỏ là: $P=mg\cos 60^\circ=25.9,8\cdot\frac{1}{2}=122,5N$

b) Công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt là:

$A=\vec{F}\cdot\vec{d}=Pd\cos 60^\circ=122,5\cdot 3,5\cdot\frac{1}{2}=214,375J$

Bài 5. Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F}=q\cdot\vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q=10^{-9}C$ và độ lớn điện trường $E=10^5N/C$ (hình vẽ).



Lời giải

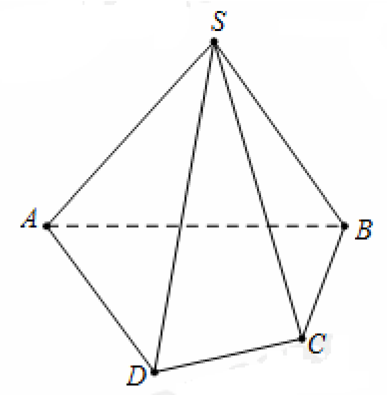
Độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm là: $F = qE = 2 \cdot 10^{-12} \cdot 1,8 \cdot 10^{5} = 3,6 \cdot 10^{-7}\, N$

PHẦN B

TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$.



Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu là S và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của hình chóp.

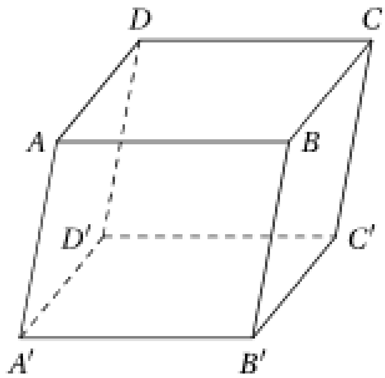
A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A.

Ngoài đỉnh S, hình chóp còn có 4 đỉnh A, B, C, D nên ta có 4 vectơ $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}$.

Câu 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.



Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho các vectơ đó bằng vectơ $\overrightarrow{CD}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

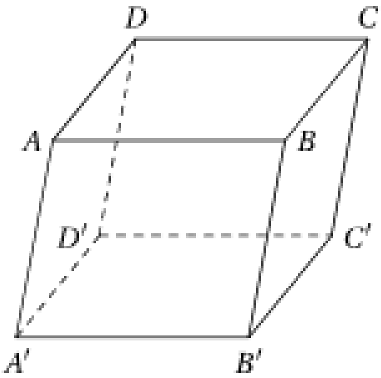
Lời giải

Chọn C.

d) Do các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}$ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{CD}$ và $CD = AB = A'B' = C'D'$ (tính chất hình hộp) nên $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.

Vậy ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng vectơ $\overrightarrow{CD}$.

Câu 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.



Chọn đẳng thức vectơ đúng:

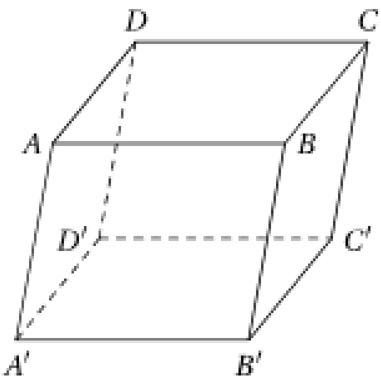
A. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD}$.
B. $\overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{DC}$.
C. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
D. $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{DC}$.

Lời giải

Chọn B.

Theo quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{DC}$

Câu 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.



Biểu thức nào sau đây đúng:

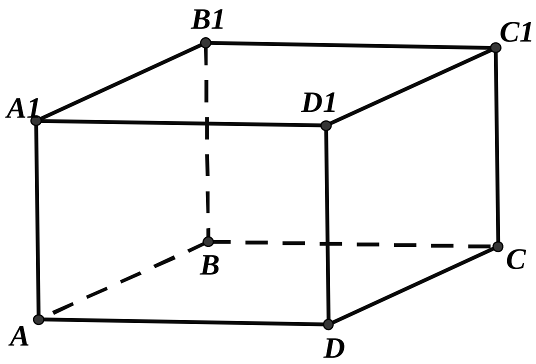
A. $\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C}$.
B. $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}$.
C. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}$.
D. $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC'}$.

Lời giải

Chọn C.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'}$.

Câu 5. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.



Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{A_1C}=2\overrightarrow{AC}$.

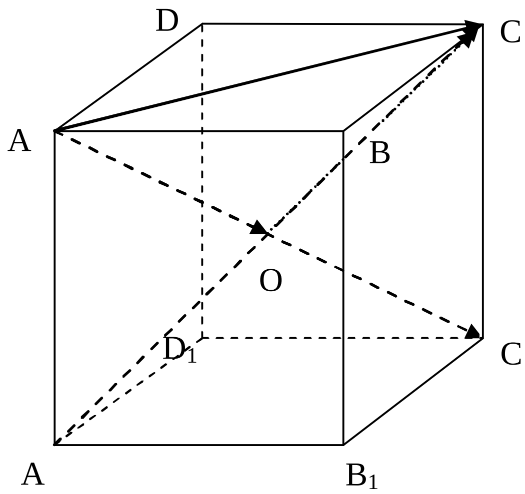
B. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{CA_1}+2\overrightarrow{C_1C}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AA_1}$.

D. $\overrightarrow{CA_1}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CC_1}$.

Lời giải

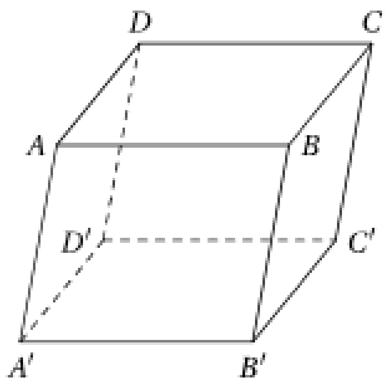
Chọn C.



+ Gọi O là tâm của hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

+ Vận dụng công thức trung điểm để kiểm tra.

Câu 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với tâm O.



Hãy chỉ ra đẳng thức **sai** trong các đẳng thức sau đây:

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}$

B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}$

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$

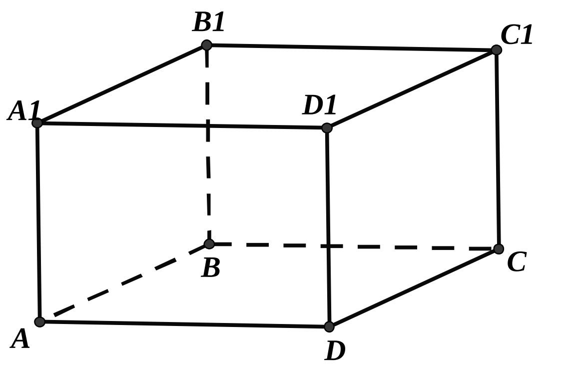
D. $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$ (vô lí)

Câu 7. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.



Chọn đẳng thức **sai?**

A. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1A_1}$.

B. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{DC}$.

C. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BD_1}$.

D. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có : $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BD_1}\neq\overrightarrow{BC}$ nên D sai.

Do $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}$ và $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B_1A_1}$ nên $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1A_1}$. A đúng

Do $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1B_1}=\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1B_1}=\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{DC}$ nên

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{DC}$ nên B đúng.

Do $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{BD_1}$ nên C đúng.

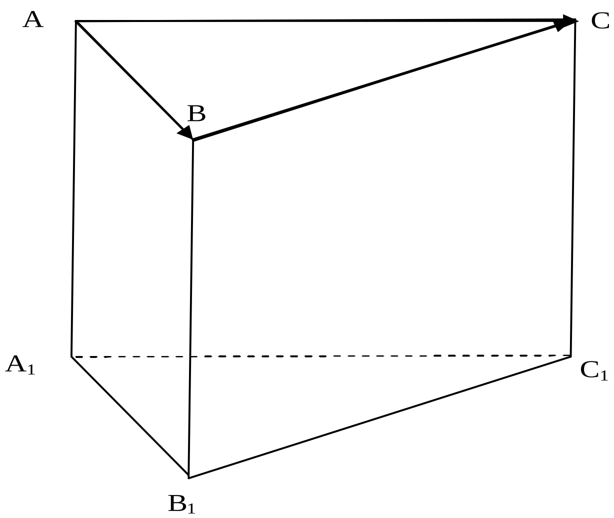
Câu 8. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Đặt $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c},\overrightarrow{BC}=\vec{d}$, trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.

B. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$.

C. $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.

D. $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$.



Lời giải

Chọn C.

+ Dễ thấy: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}\Rightarrow\vec{b}+\vec{d}-\vec{c}=\vec{0}$.

Câu 9. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm đoạn MN và P là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{IA}+(2k-1)\overrightarrow{IB}+k\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

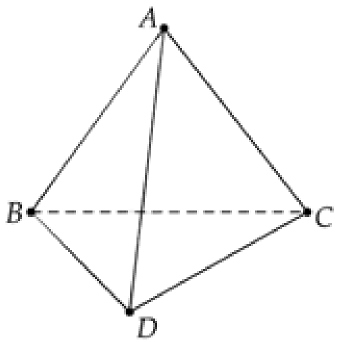
A. $k=2$. **B.** $k=4$. **C.** $k=1$. **D.** $k=0$.

Lời giải

Chọn C.

Ta chứng minh được $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$ nên $k=1$

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.



Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=k\overrightarrow{DG}$

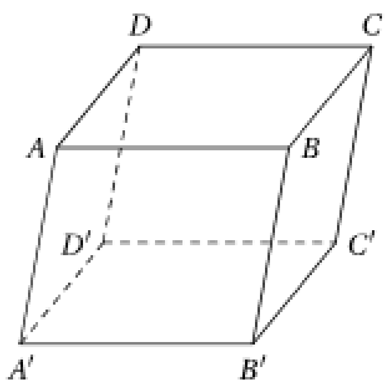
A. $k=\frac{1}{3}$. **B.** $k=2$. **C.** $k=3$. **D.** $k=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

ta có $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{DG}$.

Câu 11. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.



Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+k\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}\right)=\vec{0}$.

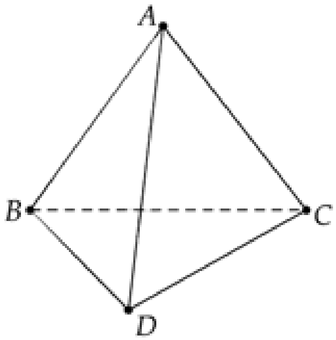
A. $k=0$. **B.** $k=1$. **C.** $k=4$. **D.** $k=2$.

Lời giải

Chọn B.

Với $k=1$ ta có: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+1.\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}\right)=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{C'B}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C'A'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

Câu 12. Cho hình tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G.



Mệnh đề nào sau đây **sai**.

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

B. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

C. $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.

D. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn A.

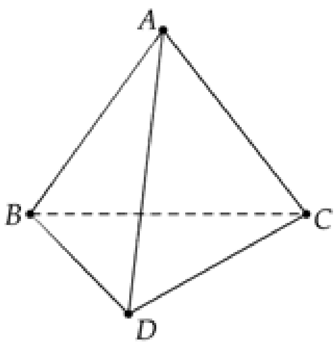
Theo giả thuyết trên thì với O là một điểm bất kỳ ta luôn có: $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.

Ta thay điểm O bởi điểm A thì ta có:

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$

Do vậy $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$ là sai.

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $P,\ Q$ là trung điểm của AB và CD.



Chọn khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

B. $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

C. $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}\right)$.

D. $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có : $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CQ}$ và $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DQ}$

nên $2\overrightarrow{PQ}=\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right)+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}+\left(\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{DQ}\right)=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$. Vậy $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$

Câu 14. Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A,B,C,D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A,B,C,D tạo thành hình bình hành là:

A. $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.

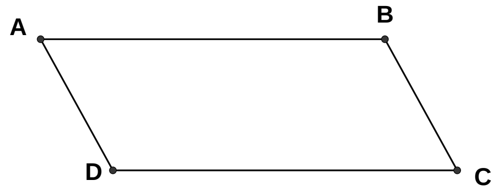
B. $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.

C. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

D. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn C.



$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

Câu 15. Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

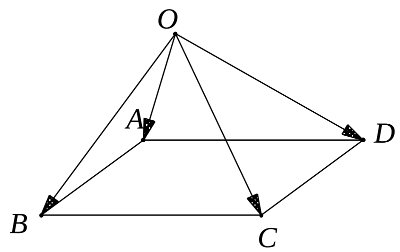
B. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

C. $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.

D. $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.

Lời giải

Chọn B.



Trước hết, điều kiện cần và đủ để $ABCD$ là hình bình hành là:

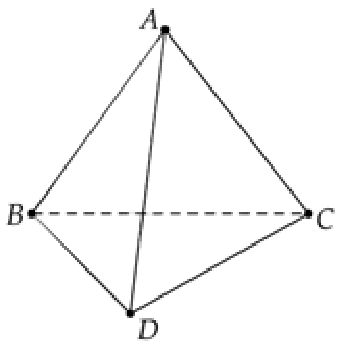
$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$.

Với mọi điểm O bất kì khác A, B, C, D, ta có:

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của MN.



Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai?**

A. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$ **B.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}$

C. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ **D.** $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}$.

Lời giải

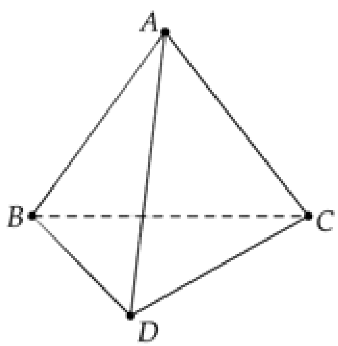
Chọn B.

M, N, G lần lượt là trung điểm của AB, CD, MN theo quy tắc trung điểm :

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM};\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN};\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}$

Suy ra: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ hay $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GD}$.

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, G là trung điểm của IJ.



Cho các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ **B.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{IJ}$

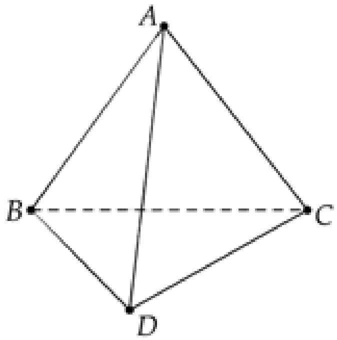
C. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{JI}$ **D.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=-2\overrightarrow{JI}$

Lời giải

Chọn A.

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)=2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GJ}=2\left(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}\right)=\vec{0}$.

Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AC}=\vec{b}, \overrightarrow{AD}=\vec{c}$, gọi G là trọng tâm của tam giác BCD.

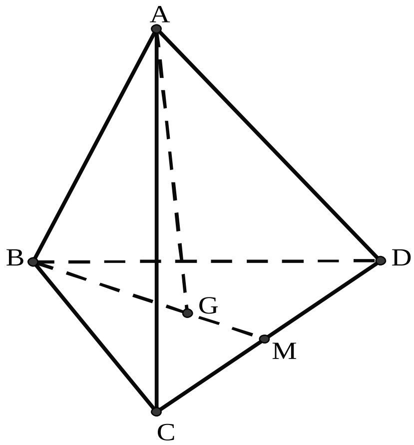


Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$. **C.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$. **D.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Lời giải

Chọn C.



Gọi M là trung điểm BC.

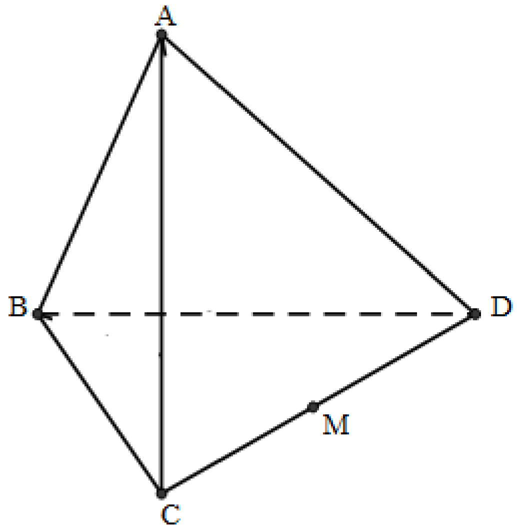
$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\vec{a}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}=\vec{a}+\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)$$

$$=\vec{a}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=\vec{a}+\frac{1}{3}\left(-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right).$$

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ \overrightarrow{AC}=\vec{b},\ \overrightarrow{AD}=\vec{c},$ gọi M là trung điểm của BC. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)$ **B.** $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$

C. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}\right)$. **D.** $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}\right)$



Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}\right)$.

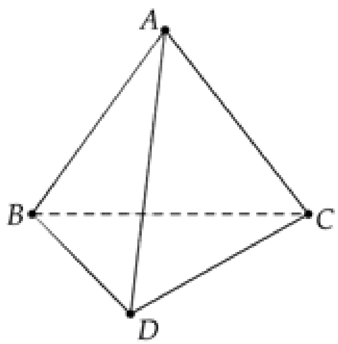
Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng.

A. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b})$.

B. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{b} - \vec{c})$.

C. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d})$.

D. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$.

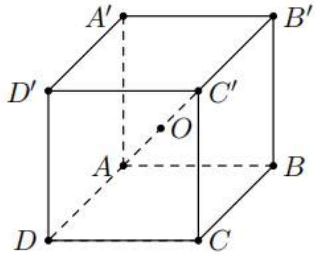


Lời giải

Chọn D.

Ta có $\vec{c} + \vec{d} - \vec{b} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{AM} = 2\left(\overrightarrow{MP}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$.

Câu 21. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi O là tâm của hình lập phương.



Chọn đẳng thức đúng?

A. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$

B. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$

C. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$

D. $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$.

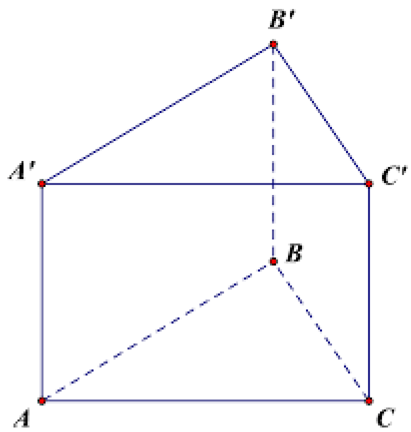
Lời giải

Chọn B.

Theo quy tắc hình hộp: $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$

Mà $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC_1}$ nên $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$.

Câu 22. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\ \overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$.



Hãy phân tích (biểu thị) vectơ $\overrightarrow{BC'}$ qua các vectơ $\vec{a},\vec{b},\ \vec{c}$.

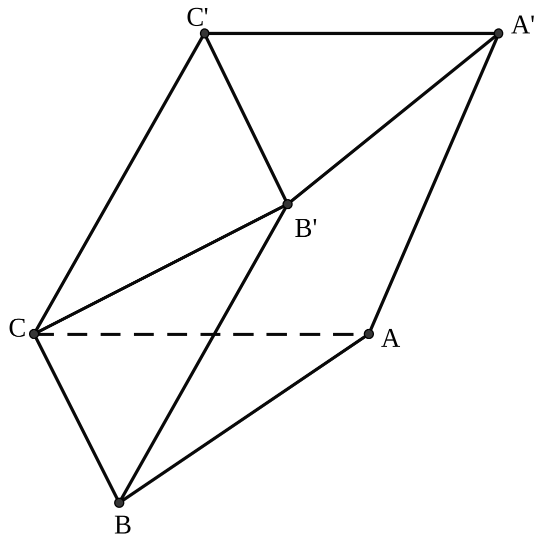
A. $\overrightarrow{BC'}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ **B.** $\overrightarrow{BC'}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ **C.** $\overrightarrow{BC'}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ **D.** $\overrightarrow{BC'}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC'}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=-\vec{b}+\vec{c}+\vec{a}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Câu 23. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\ \overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$.



Hãy phân tích (biểu thị) vectơ $\overrightarrow{B'C}$ qua các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

A. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}.$ **B.** $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$ **C.** $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$ **D.** $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$

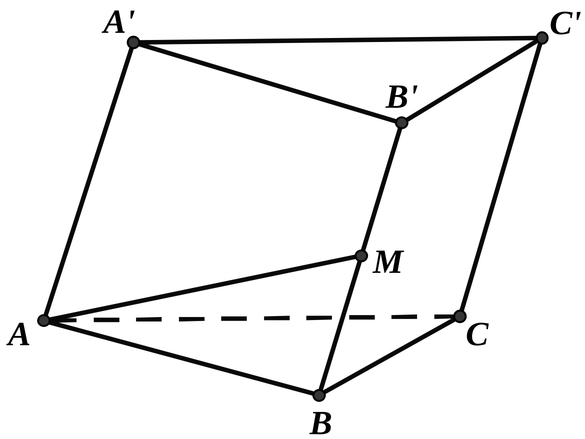
Lời giải

Chọn D.

Theo quy tắc hình bình hành ta có:

$\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{B'C'} = -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BC} = -\vec{a} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$

Câu 24. Cho hình lăng trụ $ABCA'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$.



Khẳng định nào sau đây đúng?

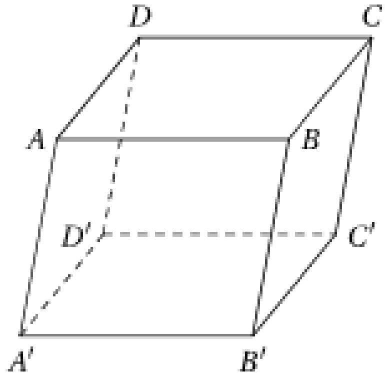
A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$ **B.** $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$. **C.** $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$

Câu 25. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CA'} = \vec{v}$, $\overrightarrow{BD'} = \vec{x}$, $\overrightarrow{DB'} = \vec{y}$.



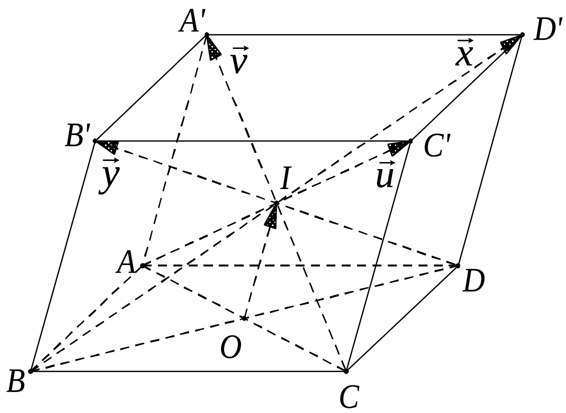
Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$. **B.** $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.

C. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$. **D.** $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.

Lời giải

Chọn D.



Ta phân tích:

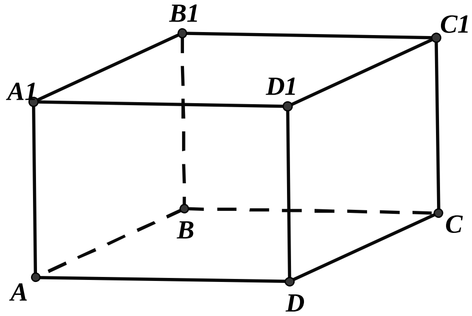
$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{CA'}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}\right)+\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AA'}\right)=2\overrightarrow{AA'}$.

$\vec{x}+\vec{y}=\overrightarrow{BD'}+\overrightarrow{DB'}=\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD'}\right)+\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BB'}\right)=2\overrightarrow{BB'}=2\overrightarrow{AA'}$.

$\Rightarrow \vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}=4\overrightarrow{AA'}=-4\overrightarrow{A'A}=-4.2\overrightarrow{OI}$.

$\Rightarrow 2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.

Câu 26. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm AD.



Chọn đẳng thức đúng.

A. $\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}$.

B. $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

C. $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

D. $\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=2\overrightarrow{B_1D}$.

Lời giải

Chọn B.

A. Sai vì $\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}\right)=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1D_1}\right)$

$=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}\right)=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1}$.

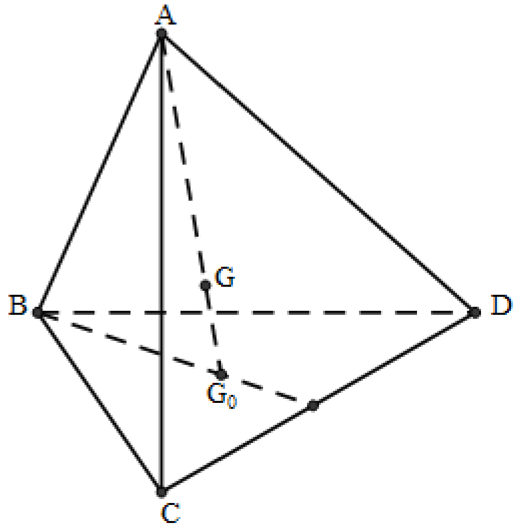
B. Đúng vì $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1A_1}+\overrightarrow{C_1D_1}\right)$

$=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{C_1D_1}\right)=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

C. Sai. theo câu B suy ra

D. Đúng vì $\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD_1}$.

Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_O là giao điểm của GA và mp (BCD).



Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{G_0G}$. **B.** $\overrightarrow{GA}=4\overrightarrow{G_0G}$. **C.** $\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{G_0G}$. **D.** $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{G_0G}$.

Lời giải

Chọn C.

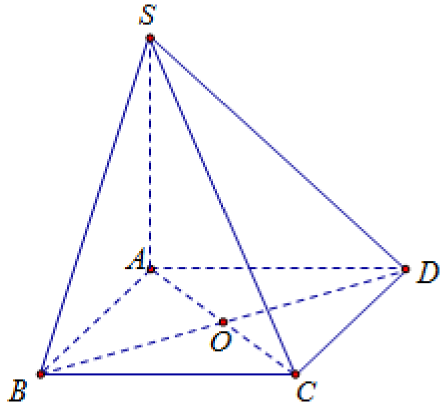
Theo đề: G_O là giao điểm của GA và mp $(BCD)\Rightarrow G_0$ là trọng tâm tam giác BCD.

$\Rightarrow\overrightarrow{G_0A}+\overrightarrow{G_0B}+\overrightarrow{G_0C}=\vec{0}$

Ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GA} = -\left(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}\right) = -\left(3\overrightarrow{GG_0} + \overrightarrow{G_0A} + \overrightarrow{G_0B} + \overrightarrow{G_0C}\right) = -3\overrightarrow{GG_0} = 3\overrightarrow{G_0G}$

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi G là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.



Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $G,\ S,\ O$ không thẳng hàng.
B. $\overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}$
C. $\overrightarrow{GS} = 5\overrightarrow{OG}$
D. $\overrightarrow{GS} = 3\overrightarrow{OG}$.

Lời giải

Chọn B.

$\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS} + 4\overrightarrow{GO} + \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS} + 4\overrightarrow{GO} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}$

Câu 29. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{O}$.

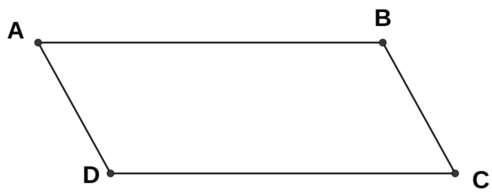
B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

C. Cho hình chóp $S.ABCD$. Nếu có $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

D. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Chọn C.



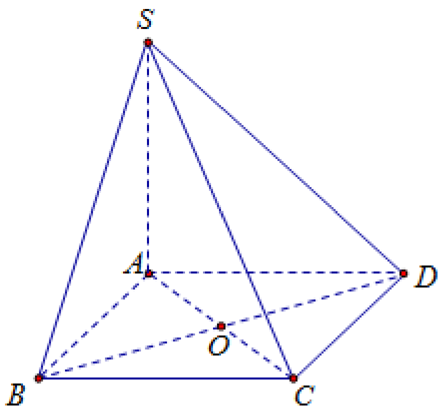
$\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}.$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow$ $ABCD$ là hình bình hành

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$; $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$; $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$; $\overrightarrow{SD}=\vec{d}$.



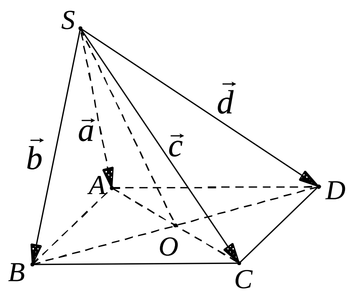
Nhận xét nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}+\vec{c}=\vec{d}+\vec{b}$. **B.** $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$.

C. $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$. **D.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn A.

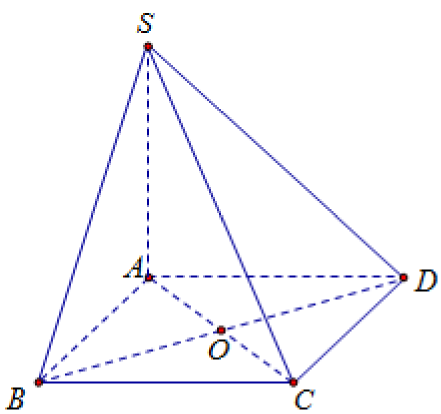


Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$. Ta phân tích như sau:

$\begin{cases}\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}\\ \overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}\end{cases}$ (do tính chất của đường trung tuyến)

$\Rightarrow \overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD} \Leftrightarrow \vec{a}+\vec{c}=\vec{d}+\vec{b}$.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD.



Nhận xét nào sau đây sai?

A. Nếu $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{SC}+2\overrightarrow{SD}=6\overrightarrow{SO}$ thì $ABCD$ là hình thang.

B. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$.

C. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{SC}+2\overrightarrow{SD}=6\overrightarrow{SO}$.

D. Nếu $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

Chọn C.

A. Đúng vì $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{SC}+2\overrightarrow{SD}=6\overrightarrow{SO} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

Vì O,A,C và O,B,D thẳng hàng nên đặt $\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{OC}; OB=m\overrightarrow{OD}$

$\Rightarrow (k+1)\overrightarrow{OC}+(m+1)\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

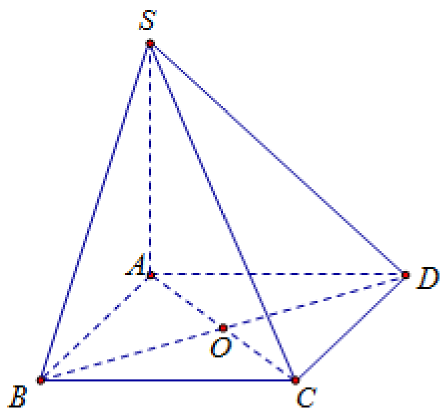
Mà $\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}$ không cùng phương nên $k=-2$ và $m=-2 \Rightarrow \dfrac{OA}{OC}=\dfrac{OB}{OD}=2 \Rightarrow AB//CD.$

B. Đúng. Hs tự biến đổi bằng cách chiêm điểm O vào vế trái.

C. Sai. Vì nếu $ABCD$ là hình thang cân có 2 đáy là AD, BC thì sẽ sai.

D. Đúng. Tương tự đáp án A với $k=-1, m=-1 \Rightarrow O$ là trung điểm 2 đường chéo.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$.



Nhận xét nào sau đây sai?

A. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$.

B. Nếu $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

C. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SC}$.

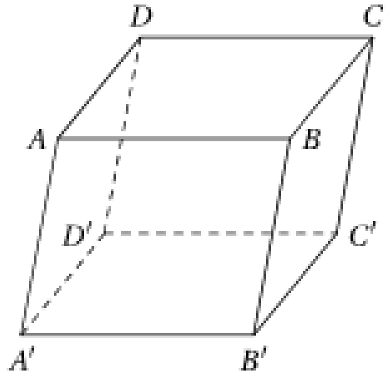
D. Nếu $\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SC}$ thì $ABCD$ là hình thang.

Lời giải

Chọn C.

Đáp án **C** sai do nếu $ABCD$ là hình thang có 2 đáy lần lượt là AD và BC thì ta có $\overrightarrow{SD}+2\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SC}+2\overrightarrow{SA}.$

Câu 33. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$; $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. M là điểm xác định bởi $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$.



Nhận xét nào sau đây đúng?

A. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.

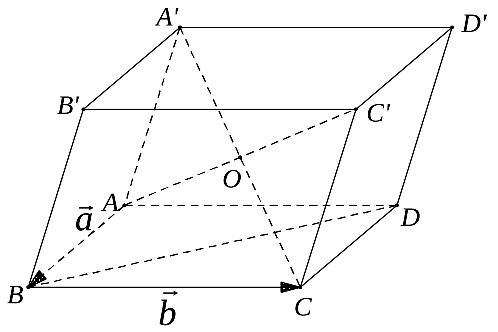
B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.

C. M là trung điểm BB'.

D. M là trung điểm CC'.

Lời giải

Chọn C.



Ta phân tích:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}.$$

$\Rightarrow M$ là trung điểm của BB'.

Câu 34. Cho $\vec{x}=2\vec{a}+\vec{b};\vec{y}=-6\vec{a}-3\vec{b}$. Chọn mệnh đề đúng nhất?

A. Hai vecto $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là cùng phương

B. Hai vecto $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là cùng phương và cùng hướng

C. Hai vecto $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là cùng phương và ngược hướng

D. Hai vecto $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là không cùng phương

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\vec{y}=-6\vec{a}-3\vec{b}=-3\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\Rightarrow\vec{y}=-3\vec{x}$

$\Rightarrow$ $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là cùng phương và ngược hướng.

Câu 35. Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x}=2\vec{a}-\vec{b};\vec{y}=-4\vec{a}+2\vec{b};\vec{z}=-3\vec{b}-2\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng?

A. Haivectơ $\vec{y};\vec{z}$ cùng phương.

B. Haivectơ $\vec{x};\vec{y}$ cùng phương.

C. Haivectơ $\vec{x};\vec{z}$ cùng phương.

D. Đáp án A, B, C, đều sai.

Lời giải

Chọn B.

Nhận thấy: $\vec{y}=-2\vec{x}$ nên hai vectơ $\vec{x};\vec{y}$ cùng phương.

Câu 36. Trong không gian, cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$.

B. $\vec{a}.\vec{b}=0$.

C. $\vec{a}.\vec{b}=-1$.

D. $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$.

Lời giải

Chọn A

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng nên $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0^0\Rightarrow\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=1$.

Vậy $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$.

Câu 37. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$.

A. $\alpha=180^{\circ}$.

B. $\alpha=0^{\circ}$.

C. $\alpha=90^{\circ}$.

D. $\alpha=45^{\circ}$.

Lời giải

Chọn A

Mà theo giả thiết $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$, suy ra $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-1\Rightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=180^0$

Câu 38. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=2$ và $\vec{a}.\vec{b}=-3$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\alpha=30^{\circ}$.

B. $\alpha=45^{\circ}$.

C. $\alpha=60^{\circ}$.

D. $\alpha=120^{\circ}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)\Rightarrow\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-3}{3.2}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=120^0$

Câu 39. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$ và hai vectơ $\vec{u}=\dfrac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=90^{\circ}$.

B. $\alpha=180^{\circ}$.

C. $\alpha=60^{\circ}$.

D. $\alpha=45^{\circ}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{u}\perp\vec{v}\Rightarrow\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow\left(\frac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}\right)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow\frac{2}{5}\vec{a}^2-\frac{13}{5}\vec{a}\vec{b}-3\vec{b}^2=0\xrightarrow{|\vec{a}|=|\vec{b}|=1}\vec{a}\vec{b}=-1$

Suy ra $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=-1\Rightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=180^0$

Câu 40. Trong không gian, cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ có $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$ vuông góc với vectơ $\left(5\vec{a}-4\vec{b}\right)$ và $|\vec{a}|=|\vec{b}|$. Khi đó:

A. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=90°$. **C.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

+Vì $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$ vuông góc với vectơ $\left(5\vec{a}-4\vec{b}\right)$ nên:

$\left(\vec{a}+2\vec{b}\right).\left(5\vec{a}-4\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow5\vec{a}^2-8\vec{b}^2+6\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=\frac{-5\vec{a}^2+8\vec{b}^2}{6}$.

Ta có $|\vec{a}|=|\vec{b}|\Leftrightarrow|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2$. Suy ra $\vec{a}.\vec{b}=\frac{3\vec{a}^2}{6}$

$+\ \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\frac{3\vec{a}^2}{6}}{\vec{a}^2}=\frac{1}{2}$.

Câu 41. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}|=4;|\vec{b}|=3;|\vec{a}-\vec{b}|=4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos\alpha=\frac{3}{8}$. **B.** $\alpha=30^0$. **C.** $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. **D.** $\alpha=60^0$.

Lời giải

Chọn A.

$(\vec{a}-\vec{b})^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}.\vec{b}\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=\frac{9}{2}$.

Do đó: $\cos\alpha=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{3}{8}$.

Câu 42. Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là 2 vectơ đều khác $\vec{0}$. Khi đó $\left|\vec{u}+2\vec{v}\right|^2$ bằng

A. $\vec{u}^2+2\vec{v}^2-4\vec{u}.\vec{v}$. **B.** $\vec{u}^2+4\vec{v}^2+4\vec{u}.\vec{v}$. **C.** $\vec{u}^2+4\vec{v}^2$. **D.** $4\vec{u}\cdot\vec{v}\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\left|\vec{u}+2\vec{v}\right|^2=\left(\vec{u}+2\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+4\vec{v}^2+4\vec{u}.\vec{v}$.

Câu 43. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}|=4;|\vec{b}|=3;\vec{a}.\vec{b}=10$. Xét hai vectơ $\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}$ $\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b},$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{x},\vec{y}$. Chọn khẳng định đúng.

A. $\cos\alpha=\dfrac{-2}{\sqrt{15}}$. **B.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{15}}$. **C.** $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{15}}$. **D.** $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{15}}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\vec{x}.\vec{y}=\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\left(\vec{a}\right)^2+2\left(\vec{b}\right)^2-3\vec{a}.\vec{b}=4$.

$|\vec{x}|=\sqrt{\left(\vec{x}\right)^2}=\sqrt{\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\left(\vec{a}\right)^2+4\left(\vec{b}\right)^2-4\vec{a}.\vec{b}}=2\sqrt{3}$.

$|\vec{y}|=\sqrt{\left(\vec{y}\right)^2}=\sqrt{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\left(\vec{a}\right)^2+\left(\vec{b}\right)^2-2\vec{a}.\vec{b}}=\sqrt{5}$.

$$\cos\alpha=\frac{\vec{x}.\vec{y}}{|\vec{x}|.|\vec{y}|}=\frac{4}{2\sqrt{3}.\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{15}}$$

Câu 44. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}|=26;|\vec{b}|=28;|\vec{a}+\vec{b}|=48$. Độ dài vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ bằng?

A. 25. **B.** $\sqrt{616}$. **C.** 9. **D.** $\sqrt{618}$.

Lời giải

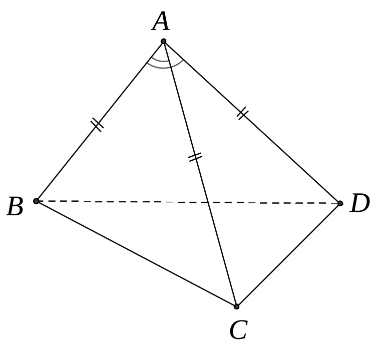
Chọn B.

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}.\vec{b}=2\left(\vec{a}^2+\vec{b}^2\right)-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$

$=2\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2\right)-|\vec{a}+\vec{b}|^2=2\left(26^2+28^2\right)-48^2=616$

$\Rightarrow|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{616}.$

Câu 45. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC=AD$ và $\widehat{BAC}=\widehat{BAD}=60^0$.



Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

A. 60^0. **B.** 45^0. **C.** 120^0. **D.** 90^0.

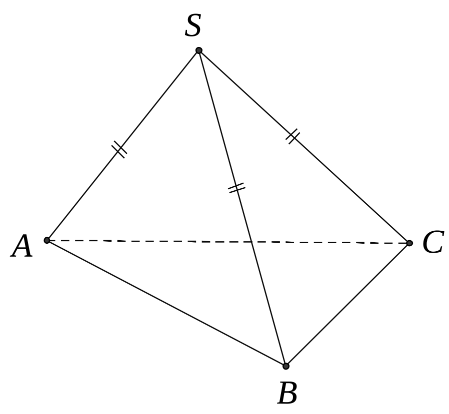
Lời giải

Chọn D.

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AD.\cos 60^0-AB.AC.\cos 60^0=0$

$\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=90^0$

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC$ và $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}$.



Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$?

A. 120^0. **B.** 90^0. **C.** 60^0. **D.** 45^0.

Lời giải

Chọn B.

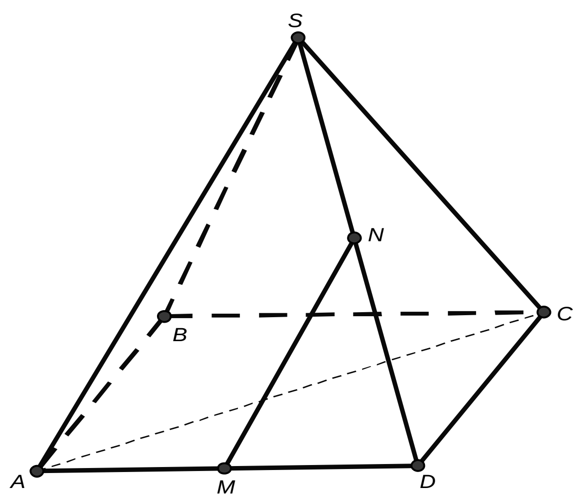
Ta có

$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{SA}.\left(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB}\right)=\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$

$=SA.SC.\cos\widehat{ASC}-SA.SB.\cos\widehat{ASB}=0$

$\Rightarrow\left(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right)=90^0$

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD.



Số đo của góc (MN,SC) bằng:

A. $45°$ **B.** $30°$ **C.** $90°$ **D.** $60°$

Lời giải

Chọn C.

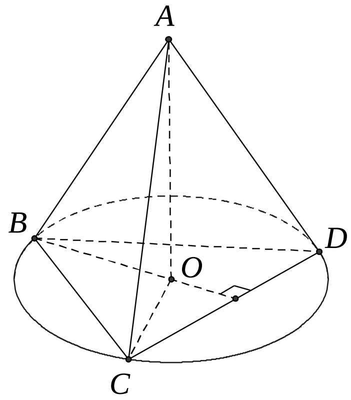
Ta có: $AC = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow AC^2 = 2a^2 = SA^2 + SC^2$

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S.

Khi đó: $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{SC}\right) = 90° \Rightarrow (MN, SC) = 90°$

Câu 48. Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.



Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu ?

A. 0^0. **B.** 30^0. **C.** 90^0. **D.** 60^0.

Lời giải

Chọn C.

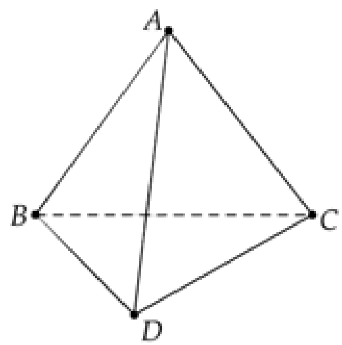
Ta có $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CA}\right)\overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{CO}.\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD} = CO.CD.\cos 30^0 - CA.CD.\cos 60^0$

$= \frac{a\sqrt{3}}{3}.a.\frac{\sqrt{3}}{2} - a.a.\frac{1}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0.$

Suy ra $AO \perp CD$.

Câu 49. Cho tứ diện $ABCD$ với $AB \perp AC$, $AB \perp BD$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD.



Góc giữa PQ và AB là?

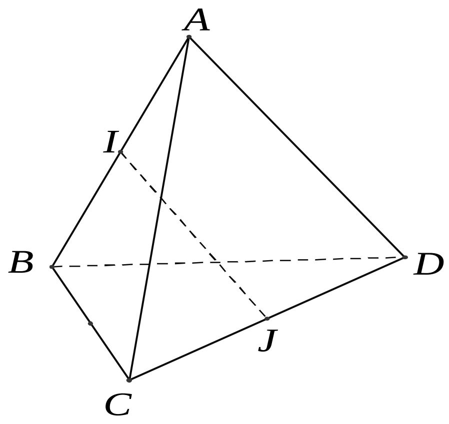
A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 45^0.

Lời giải

Chọn A.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PQ} \Rightarrow AB \perp PQ$

Câu 50. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^0, \widehat{CAD} = 90^0$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD.



Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

A. $120°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn B.

Xét tam giác ICD có J là trung điểm đoạn CD.

Ta có: $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\right)$

Vì tam giác ABC có $AB = AC$ và $\widehat{BAC} = 60°$

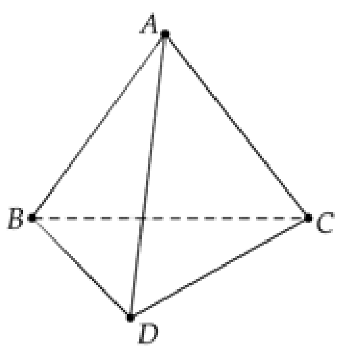
Nên tam giác ABC đều. Suy ra: $CI \perp AB$

Tương tự ta có tam giác ABD đều nên $DI \perp AB$.

Xét $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\right).\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{AB}$. Hay góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$ bằng 90^0.

Câu 51. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều.



Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. AB và CD chéo nhau

B. AB và CD vuông góc với nhau

C. AB và CD đồng phẳng

D. AB và CD cắt nhau

Lời giải

Chọn B.

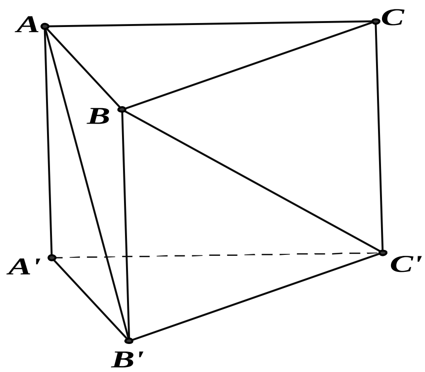
Đặt $AB = AD = AC = a$

Ta có $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AB}$

$= \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos 60^0 - \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos 60^0 = a.a.\frac{1}{2} - a.a.\frac{1}{2} = 0$

Vậy $AB \perp CD$.

Câu 52. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}\,a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng



A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Lời giải

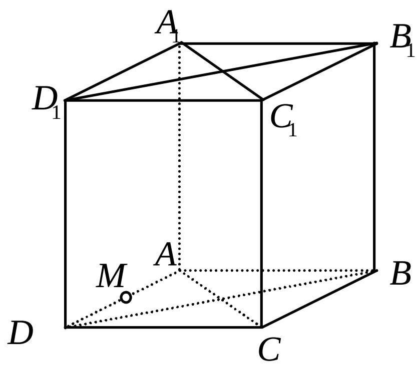
Chọn A.

Ta có $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}\right)\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{CC'}$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{CC'} = -\frac{a^2}{2} + 0 + 0 + 2a^2 = \frac{3a^2}{2}$.

Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}\right) = \frac{\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'}}{\left|\overrightarrow{AB'}\right|.\left|\overrightarrow{BC'}\right|} = \frac{\frac{3a^2}{2}}{a\sqrt{3}.a\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(AB', BC'\right) = 60°$.

Câu 53. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a. Gọi M là trung điểm AD.



Giá trị $\overrightarrow{B_1M}.\overrightarrow{BD_1}$ là:

A. $\frac{1}{2}a^2$. **B.** a^2. **C.** $\frac{3}{4}a^2$. **D.** $\frac{3}{2}a^2$.

Lời giải

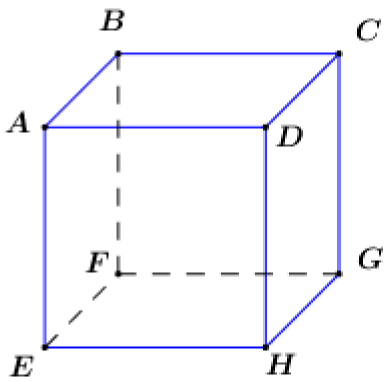
Chọn A.

Ta có: $\overrightarrow{B_1M}.\overrightarrow{BD_1}=\left(\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\right)\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}\right)$

$=\overrightarrow{B_1B}.\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}=-a^2+a^2+\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^2}{2}$

Câu 54. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

A. $90°$ **B.** $60°$ **C.** $45°$ **D.** $120°$



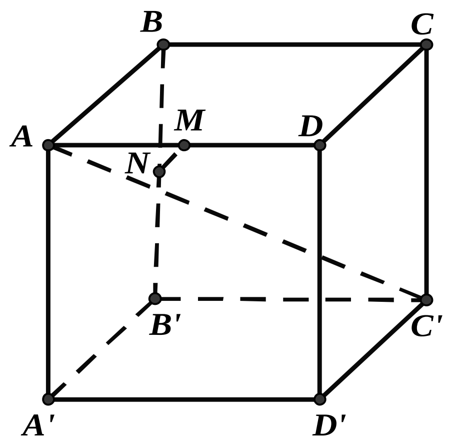
Lời giải

Chọn C.

Ta có: $EG//AC$ (do $ACGE$ là hình chữ nhật)

$\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EG}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\widehat{BAC}=45°$

Câu 55. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BB'.



Cosin của góc hợp bởi MN và AC' bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn B

* Xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.

* Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=\overrightarrow{AD},\ \vec{c}=\overrightarrow{AA'}\Rightarrow\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=a,\ \vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{c}=\vec{a}.\vec{c}=0$.

* Ta có:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{AM}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\Rightarrow\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{a^2+\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2}=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\Rightarrow\left|\overrightarrow{AC'}\right|=\sqrt{a^2+a^2+a^2}=a\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN}=a^2-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2=a^2$$

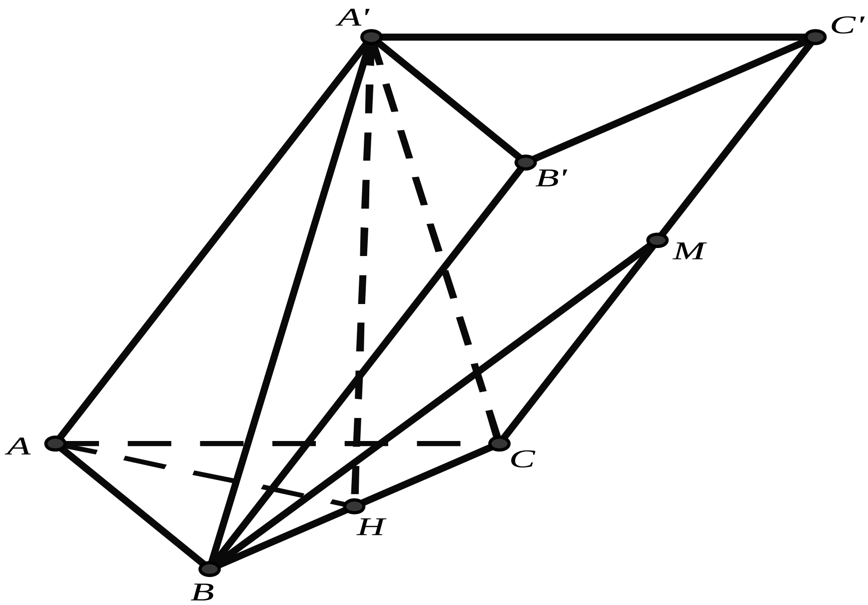
$$\cos\left(MN;AC'\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{AC'}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC'}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\overrightarrow{AC'}\right|}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 56. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác $A'BC$ đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). M là trung điểm cạnh CC'. Tính cosin góc α giữa hai đường thẳng AA' và BM.

A. $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{22}}{11}$. **B.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{33}}{11}$. **C.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{11}}{11}$. **D.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{22}}{11}$.

Lời giải

Chọn B.



Ta có: $AH=A'H=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AH\perp BC, A'H\perp BC\Rightarrow BC\perp\left(AA'H\right)\Rightarrow BC\perp AA'$ hay $BC\perp BB'$. Do đó: $BCC'B'$ là hình chữ nhật.

Khi đó: $CC'=AA'=\frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}\Rightarrow BM=\sqrt{a^2+\frac{a^2.6}{16}}=a\frac{\sqrt{22}}{4}$.

Xét: $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AA'}.\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}\right)=0+AA'.CM=\frac{3a^2}{4}$.

Suy ra $\cos\left(AA', BM\right) = \dfrac{\left|\dfrac{3a^2}{4}\right|}{\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{a\sqrt{22}}{4}} = \dfrac{\sqrt{33}}{11}$.

Câu 57. Trong không gian cho ba điểm $A,\ B,\ C$ bất kỳ, chọn đẳng thức đúng?

A. $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$ **B.** $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2BC^2$

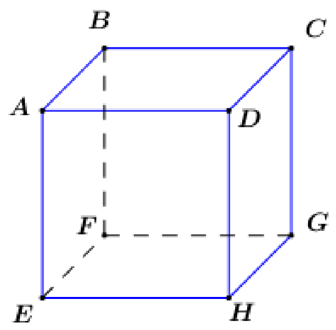
C. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2BC^2$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$

Lời giải

Chọn A.

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\left(AB, AC\right) = AB^2 + AC^2 - 2.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Câu 58. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a.



Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$ bằng?

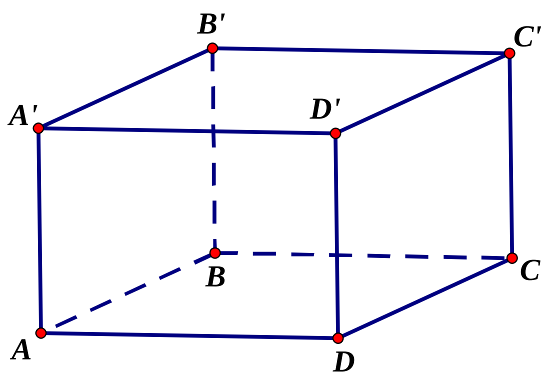
A. $a^2\sqrt{2}$. **B.** a^2. **C.** $a^2\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ $(\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}) = a^2$ (Vì $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$)

Câu 59. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.



Hãy tìm mệnh đề **sai** trong những mệnh đề sau đây:

A. $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A'} = \vec{0}$ **B.** $\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{AB'} = a^2$

C. $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{CD'} = 0$ **D.** $\left|\overrightarrow{AC'}\right| = a\sqrt{3}$.

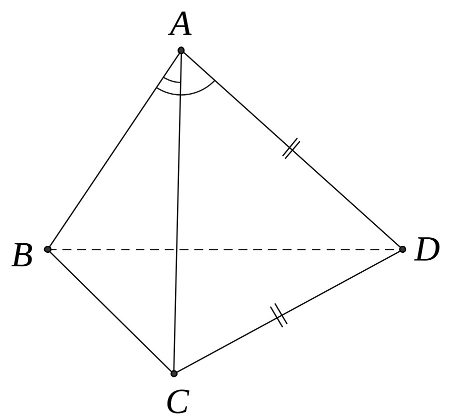
Lời giải

Chọn A.

Ta có : $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A'}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)+\left(\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{D'A'}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\vec{0}+\vec{0}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\vec{0}$ (vô lí)

Câu 60. Cho tứ diện $ABCD$ với $AC=\frac{3}{2}AD, \widehat{CAB}=\widehat{DAB}=60^0, CD=AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD.



Chọn khẳng định **đúng** ?

A. $\cos\varphi=\frac{3}{4}$. **B.** $\varphi=60^0$. **C.** $\varphi=30^0$. **D.** $\cos\varphi=\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{AB.CD}$

Mặt khác

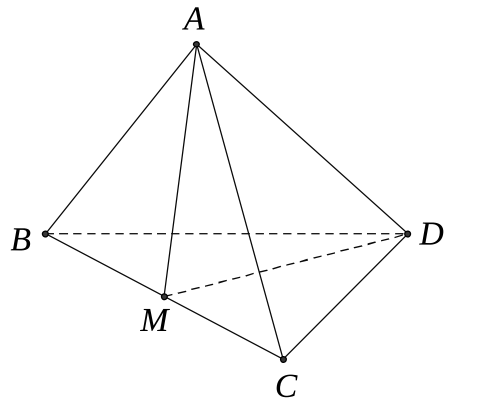
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$=AB.AD.\cos 60^0-AB.AC.\cos 60^0$

$=AB.AD.\frac{1}{2}-AB.\frac{3}{2}AD.\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}AB.AD=-\frac{1}{4}AB.CD.$

Do có $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\frac{-\frac{1}{4}AB.CD}{AB.CD}=-\frac{1}{4}$. Suy ra $\cos\varphi=\frac{1}{4}$.

Câu 61. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC.



Khi đó $\cos\left(AB, DM\right)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Giả sử cạnh của tứ diện là a.

Ta có $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{DM}\right|} = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}}{a.\frac{a\sqrt{3}}{2}}$

Mặt khác

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = AB.AM.\cos 30^0 - AB.AD.\cos 60^0$

$= a.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - a.a.\frac{1}{2} = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}$.

Do có $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Suy ra $\cos\left(AB, DM\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 62. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = .\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ thì $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$. Điều ngược lại đúng không?

Sau đây là lời giải:

***Bước 1*:** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = .\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow AC \perp BD$

***Bước 2*:** Chứng minh tương tự, từ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ ta được $AD \perp BC$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ ta được $AB \perp CD$.

***Bước 3*:** Ngược lại đúng, vì quá trình chứng minh ở bước 1 và 2 là quá trình biến đổi tương đương.

Bài giải trên đúng hay **sai**? Nếu sai thì sai ở đâu?

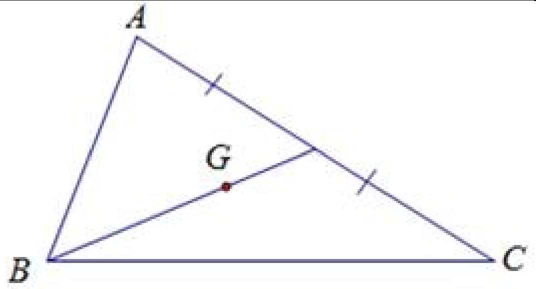
A. Sai ở bước 3. **B.** Đúng ba bước **C.** Sai ở bước 2. **D.** Sai ở bước 1.

Lời giải

Chọn B.

Bài giải đúng.

Câu 63. Trong không gian cho tam giác ABC có trọng tâm G.



Chọn hệ thức đúng?

A. $AB^2+AC^2+BC^2=2\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)$. **B.** $AB^2+AC^2+BC^2=GA^2+GB^2+GC^2$.

C. $AB^2+AC^2+BC^2=4\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)$. **D.** $AB^2+AC^2+BC^2=3\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)$.

Lời giải

Chọn D.

Cách 1

Ta có

$\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow GA^2+GB^2+GC^2+2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GC}+2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}=0$

$\Leftrightarrow GA^2+GB^2+GC^2+\left(GA^2+GB^2-AB^2\right)+\left(GA^2+GC^2-AC^2\right)+\left(GB^2+GC^2-BC^2\right)=0$

$\Leftrightarrow AB^2+AC^2+BC^2=3\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)$

Cách 2: Ta có:

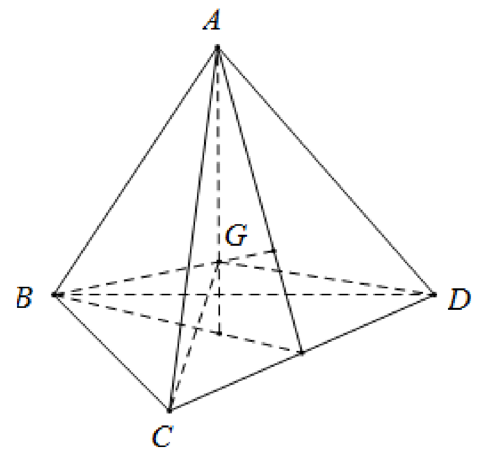
$$\begin{cases} MA^2=\dfrac{AB^2+AC^2}{2}-\dfrac{BC^2}{4} \\ GA=\dfrac{2}{3}MA \end{cases} \Rightarrow GA^2=\frac{4}{9}\left(\frac{AB^2+AC^2}{2}-\frac{BC^2}{4}\right).$$

Tương tự ta suy ra được

Cách 3: Chuẩn hóa giả sử tam giác ABC đều có cạnh là 1. Khi đó

$$\begin{cases} AB^2+BC^2+CA^2=3 \\ GA^2+GB^2+GC^2=1 \end{cases} \Rightarrow 3\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)=AB^2+BC^2+CA^2.$$

Câu 64. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G.



Chọn khẳng định đúng?

A. $AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2=3\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)$.

B. $AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2=4\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)$.

C. $AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2=6\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)$.

D. $AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2=2\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)$.

Lời giải

Chọn B.

$AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2$

$=\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}\right)^2+\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GD}\right)^2+\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC}\right)^2+\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GD}\right)^2+\left(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GD}\right)^2$

$=3AG^2+3BG^2+3CG^2+3DG^2+2\left(\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{GD}\right)(1)$

Lại có:

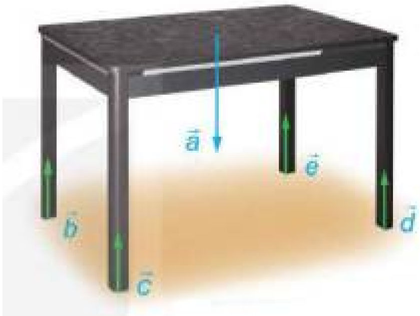
$\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow GA^2+GB^2+GC^2+GD^2$

$=2\left(\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{GD}\right)(2)$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Câu 65. Một chiếc bàn học sinh cân đối hình chữ nhật được đặt trên mặt sàn nằm ngang, mặt bàn song song với mặt sàn và bốn chân bàn vuông góc với mặt sàn như hình vẽ. Trọng lực tác dụng lên bàn được biểu thị bởi vectơ $\vec{a}$ phân tán đều qua bốn chân bàn và gây nên các phản lực từ mặt sàn lên các chân bàn được biểu thị bởi các vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e}$.



Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Vectơ $\vec{d}$ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$.

B. Các vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e}$ cùng phương và ngược chiều với vectơ $\vec{a}$.

C. Vectơ $\vec{b}$ với vectơ $\vec{a}$ đối nhau.

D. Các vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e}$ đôi một cùng chiều và cùng độ lớn.

Lời giải

Chọn C

Do bốn chân bàn vuông góc với mặt sàn và với mặt bàn nên các vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e}$ cùng phương và ngược chiều với vectơ $\vec{a}$.

Trọng lực tác dụng lên bàn được biểu thị bởi vectơ $\vec{a}$ phân tán đều qua bốn chân bàn nên các vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e}$ đôi một cùng chiều và cùng độ lớn.

Vectơ $\vec{b}$ với vectơ $\vec{a}$ ngược hướng chứ không phải đối nhau vì hai vectơ đối nhgau là hai vectơ cùng ngược hướng, cùng độ dài. Đáp án C sai

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 66. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{D'C'}$

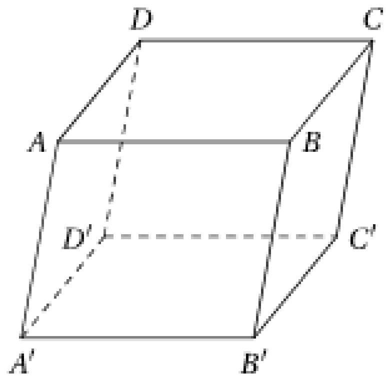
b) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}$

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{AD'}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**



a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{D'C'}$ Do các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{D'C'}$ cùng hướng và $AB=A'B'=DC=D'C'$ (tính chất hình hộp) .

b) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}$ Do các vectơ $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{A'C'}$ cùng hướng và $AC=A'C'$ (tính chất hình hộp) .

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC}$

Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC}++\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}\neq\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{AD'}$

$VT=\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}}_{\overrightarrow{AC}}+\underbrace{\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'D'}}_{\overrightarrow{CD'}}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD'}=\overrightarrow{AD'}=VP$

Câu 67. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AC'}$

b) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{DD'}-\overrightarrow{B'D'}=\overrightarrow{BB'}$

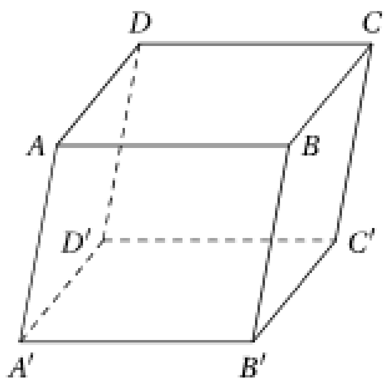
c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}=\vec{0}$

d) $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{C'D}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)

ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**



a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

b) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{DD'}-\overrightarrow{B'D'}=-\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{BB'}$

c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{C'B}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C'A'}=\vec{0}$

d) $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{DC'}$ Do hai vectơ $\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{DC'}$ ngược hướng

Câu 68. Trong không gian cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O.

a) $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

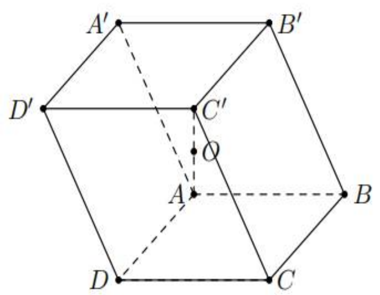
b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$.

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}$.

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**



a) Theo quy tắc hình hộp thì $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$

b) Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$. Do đó: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$.

c) Vì $\begin{cases}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB'}\\ \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AD'}\end{cases}$ mà $\overrightarrow{AB'}\neq\overrightarrow{AD'}$ $\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}\neq\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}$.

d) Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}$; $\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{AC'}$

Vậy $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}$

Câu 69. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm hình hộp

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

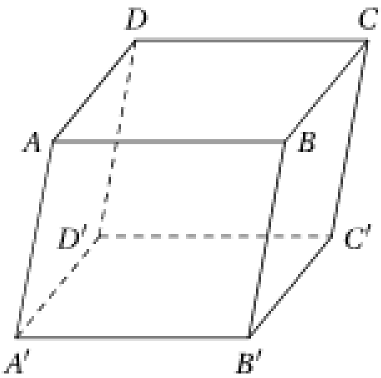
b) $\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{D'D}=\overrightarrow{A'C}$.

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}=\vec{0}$

d) Với mọi điểm M ta đều có $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{8}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{MD'}\right)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**



a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

Lại có $AA'C'C$ là hình chữ nhật nên: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

b) $\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{D'D}=\overrightarrow{A'C}$

Ta có: $VT=\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{D'D}=\left(\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{D'D}\right)=\overrightarrow{A'C}=VP$.

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}=\vec{0}$

Gọi I và I' lần lượt là tâm của hình chữ nhật $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Ta có: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)=4\overrightarrow{OI}$.

$$\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}=\left(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OC'}\right)+\left(\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OD'}\right)=4\overrightarrow{OI'}$$

Mặt khác: $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OI'}=\vec{0}$ nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}=\vec{0}$

d) $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{8}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{MD'}\right)$

$$=\frac{1}{8}\Big[\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}\right)$$
$$+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA'}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB'}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC'}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD'}\right)\Big]$$

$$=\frac{1}{8}\left[8\overrightarrow{MO}+\underbrace{\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}\right)}_{\vec{0}}\right]=\overrightarrow{MO}$$

Câu 70. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

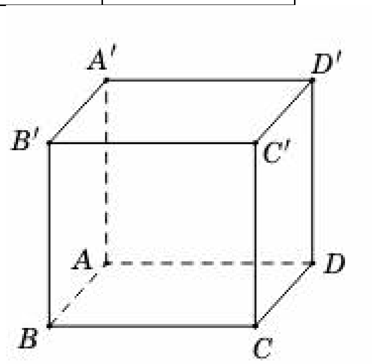
b) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

c) $\left|\overrightarrow{BD}\right|=\left|\overrightarrow{A'C'}\right|$

d) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**



a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$ đúng vì theo quy tắc hình hộp

b) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ đúng vì theo quy tắc hình bình hành

c) $\left|\overrightarrow{BD}\right|=\left|\overrightarrow{A'C'}\right|$ đúng vì đường chéo hai hình vuông bằng nhau

d) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ sai vì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ đối nhau.

Câu 71. Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'C$.

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

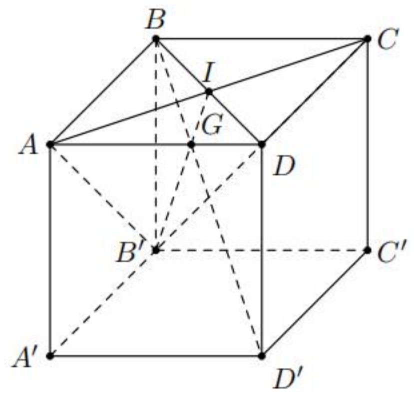
b) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$.

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A'C'}$.

d) $\overrightarrow{BD'}=2\overrightarrow{BG}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**



a) Theo quy tắc hình hộp thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

b) G là trọng tâm của tam giác $AB'C$ nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

c) Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}$

d) Ta có $\Delta BIG \sim \Delta D'B'G \Rightarrow \dfrac{BG}{D'G}=\dfrac{BI}{D'B'}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \dfrac{BG}{BD'}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow \overrightarrow{BD'}=3\overrightarrow{BG}$

Câu 72. Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a

a) $\overrightarrow{B'B}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{B'D}$

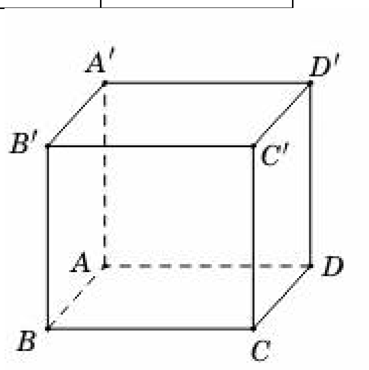
b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD}$

c) $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}\right|=a\sqrt{2}$

d) $\left|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}\right|=a$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**



a) Ta có $\overrightarrow{B'B}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{B'B}+\left(-\overrightarrow{DB}\right)=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{B'D}.$

b) Áp dụng quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD'}$

c) $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}\right|=\left|\overrightarrow{BD'}\right|=BD'=a\sqrt{3}$

d) Ta có $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C'A}=\overrightarrow{C'C}$. Do đó $\left|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}\right|=C'C=a$

Câu 73. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a.

a) $\left(\overrightarrow{AB_1};\overrightarrow{C_1D}\right)=90^0$

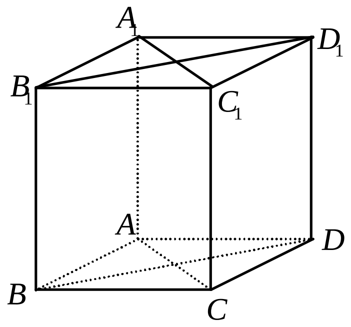
b) $\overrightarrow{A_1B}.\overrightarrow{CC_1} = -a^2$

c) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{A_1D_1}$.

d) $\overrightarrow{A_1D}.\overrightarrow{C_1B} = 0$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**



a) Ta có: $\left(\overrightarrow{AB_1};\overrightarrow{C_1D}\right) = \left(\overrightarrow{AB_1};\overrightarrow{B_1A}\right) = 180^0$

b) Ta có: $\overrightarrow{A_1B}.\overrightarrow{CC_1} = \left|\overrightarrow{A_1B}\right|.\left|\overrightarrow{CC_1}\right|.\cos\left(\overrightarrow{A_1B}.\overrightarrow{CC_1}\right) = a\sqrt{2}.a.\cos 135^0 = -a^2$

c) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{A_1D_1}$.

Do $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A_1D_1}$ (tính chất hình lập phương) nên $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{A_1D_1}$.

Cách 2:

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}\right) = a\sqrt{2}.a.\cos 45^0 = a^2$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{A_1D_1} = \left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{A_1D_1}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{A_1D_1}\right) = a\sqrt{2}.a.\cos 45^0 = a^2$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{A_1D_1}$.

d) $\overrightarrow{A_1D}.\overrightarrow{C_1B} = 0$

Ta có: $\overrightarrow{A_1D} \perp \overrightarrow{C_1B} \Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{A_1D},\overrightarrow{C_1B}\right) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{A_1D}.\overrightarrow{C_1B} = 0$

Câu 74. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

a) $\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{A_1A}$

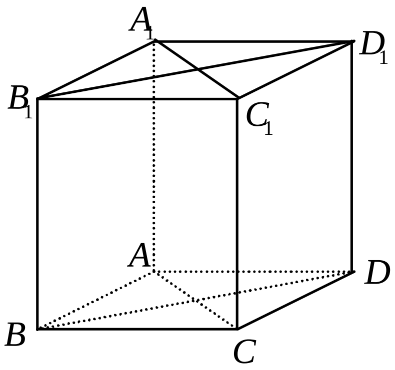
b) $\left(\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{AD}\right) = 60^0$

c) $\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{B_1D_1} = 0$

d) $\overrightarrow{A_1C}.\overrightarrow{AC} = a^2$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**



a) $VP = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{A_1C} = VT$

b) $\left(\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{AD}\right) = \left(\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{BC}\right) = 90^0$

c) Ta có:

$\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{BB_1}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BB_1}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{BB_1}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1}.\overrightarrow{BC} = 0$ (vì $\left(\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{BA}\right) = 90^0$ và $\left(\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{BC}\right) = 90^0$)

d) $\overrightarrow{A_1C}.\overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1A}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = 2a^2$

Câu 75. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $AB = a, BC = 2a, AA_1 = 3a$.

a) $\left(\overrightarrow{AB_1}; \overrightarrow{C_1D}\right) = 0^0$

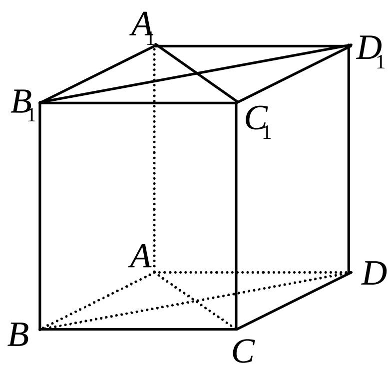
b) $\overrightarrow{A_1B}.\overrightarrow{D_1D} = 9a^2$

c) $\overrightarrow{A_1D_1}.\overrightarrow{C_1C} = 0$

d) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{C_1A_1}.\overrightarrow{C_1B_1}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**



a) Ta có: $\left(\overrightarrow{AB_1}; \overrightarrow{C_1D}\right) = \left(\overrightarrow{AB_1}; \overrightarrow{B_1A}\right) = 180^0$

b) Ta có: $\overrightarrow{A_1B}.\overrightarrow{D_1D} = \overrightarrow{A_1B}.\overrightarrow{A_1A} = \left(\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{A_1A}^2 + \overrightarrow{A_1A}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1A}^2 = 9a^2$

Cách 2:

Ta có: $\overrightarrow{A_1B}.\overrightarrow{D_1D} = \left|\overrightarrow{A_1B}\right|.\left|\overrightarrow{D_1D}\right|.\cos\left(\overrightarrow{A_1B}.\overrightarrow{D_1D}\right)$

$A_1B=\sqrt{A_1B^2+AB^2}=a\sqrt{10}$

$\cos\left(\overrightarrow{A_1B}.\overrightarrow{D_1D}\right)=\cos\left(\overrightarrow{A_1B}.\overrightarrow{A_1A}\right)=\dfrac{A_1A}{A_1B}=\dfrac{3a}{a\sqrt{10}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow \overrightarrow{A_1B}.\overrightarrow{D_1D}=a\sqrt{10}.3a.\dfrac{3}{\sqrt{10}}=9a^2$

c) $\overrightarrow{A_1D_1}.\overrightarrow{C_1C}=0$

Ta có: $\overrightarrow{A_1D_1}\perp\overrightarrow{C_1C}\Rightarrow\overrightarrow{A_1D_1}.\overrightarrow{C_1C}=0$

d) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{C_1A_1}.\overrightarrow{C_1B_1}$.

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}^2+\underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC}}_{0}=4a^2$

$\overrightarrow{C_1A_1}.\overrightarrow{C_1B_1}=\left(\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{B_1A_1}\right).\overrightarrow{C_1B_1}=\overrightarrow{C_1B_1}^2+\underbrace{\overrightarrow{B_1A_1}.\overrightarrow{C_1B_1}}_{0}=\overrightarrow{C_1B_1}^2=4a^2$

$\Rightarrow\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{C_1A_1}.\overrightarrow{C_1B_1}$.

Câu 76. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB=a;\ AD=a\sqrt{3};\ AA'=2a$.

a) $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{CD'}=\vec{0}$

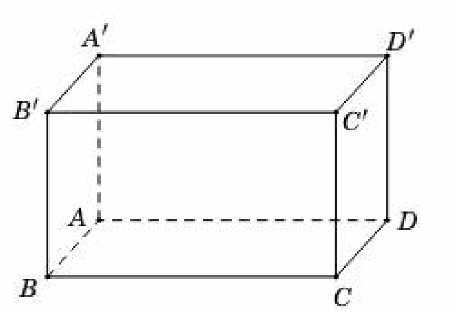
b) $\overrightarrow{A'D}+\overrightarrow{CB'}=\vec{0}$

c) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=a\sqrt{5}$

d) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{CC'}\right|=2\sqrt{2}a$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**



a) $\overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{CD'}$ không đối nhau nên $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{CD'}\neq\vec{0}$

b) $\overrightarrow{A'D}$ và $\overrightarrow{CB'}$ đối nhau nên $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{CD'}=\vec{0}$

c) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=\sqrt{AB^2+AD^2}=2a$

d) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{CC'}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right|=AC'=\sqrt{AB^2+AD^2+AA^2}=2\sqrt{2}a$

Câu 77. Trong không gian, cho $\vec{a}=3,\ \vec{b}=5$ góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $120°$.

a) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{19}$

b) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=8$

c) $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{139}$

d) $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=9$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

Ta có:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=9+25+2.3.5\left(-\frac{1}{2}\right)=19$$

$$\Rightarrow\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{19}$$

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=9+25-2.3.5\left(-\frac{1}{2}\right)=49$$

$$\Rightarrow\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{49}=7$$

$$\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)^2=\left|\vec{a}\right|^2+4\left|\vec{b}\right|^2-4\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2+4\left|\vec{b}\right|^2-4\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=9+4.25-4.3.5\left(-\frac{1}{2}\right)=139$$

$$\Rightarrow\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{139}$$

$$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)^2=\left|\vec{a}\right|^2+4\left|\vec{b}\right|^2+4\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2+4\left|\vec{b}\right|^2+4\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=9+4.25+4.3.5\left(-\frac{1}{2}\right)=79$$

$$\Rightarrow\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{79}$$

Câu 78. Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G.

a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$

c) $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$

d) $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Theo công thức vì G là trọng tâm tứ diện $ABCD\Rightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

b) Ta có: $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OG}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DG}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$

c) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=-\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{BG}$

d) $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{AO}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=\overrightarrow{AO}+\frac{1}{4}\left(4\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

$=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$

Câu 79. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm MN

a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

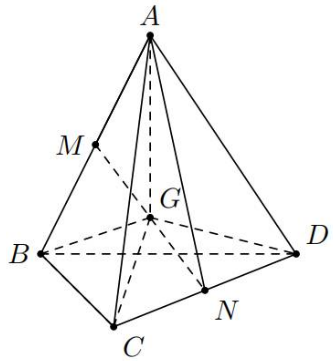
b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MG}$

c) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)$

d) $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**



a) Vì M, N lần lượt là trung điểm $AB, CD \rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}\\ \overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN}\end{cases}$

Mặt khác G là trung điểm $MN \rightarrow \overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0} \leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

b) Khi đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)=4\overrightarrow{MG}$

c) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$

d) Ta có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}$; $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN}$. Do đó: $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

Câu 80. Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM=3MD$ và $BN=3NC$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm AD và BC.

a) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$

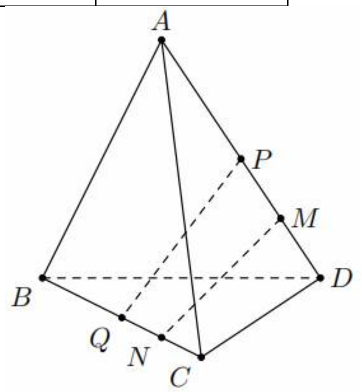
b) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}$

c) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BN}$

d) $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**



a) Sai: Dễ chứng minh được $2\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$ nên A sai

b) Đúng: Theo giả thuyết ta có M,N là trung điểm của PD,QC

c) Đúng: $\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BN}\end{cases}$.

d) Đúng: Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\\ 3\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{MD}+3\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{BN}\end{cases}$

$\Rightarrow 4\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\Rightarrow \overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

Câu 81. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đều bằng a.

a) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$

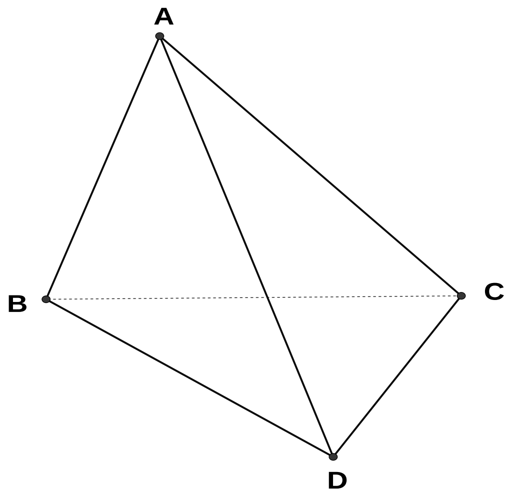
b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2}{2}$

c) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}$.

d) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**



Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên các tam giác ABC, BCD, CDA, ABD là các tam giác đều.

a) Đúng vì $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$.

b) Đúng vì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=-a.a.\cos 60^0=\dfrac{-a^2}{2}$.

c) Sai vì $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=a.a.\cos 60^0=\dfrac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}=-a.a.\cos 60^0=-\dfrac{a^2}{2}$.

d) Đúng vì $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$.

Câu 82. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a.

a) Gọi G là trọng tâm của tứ diện đều $ABCD$, M là điểm tuỳ ý. Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$

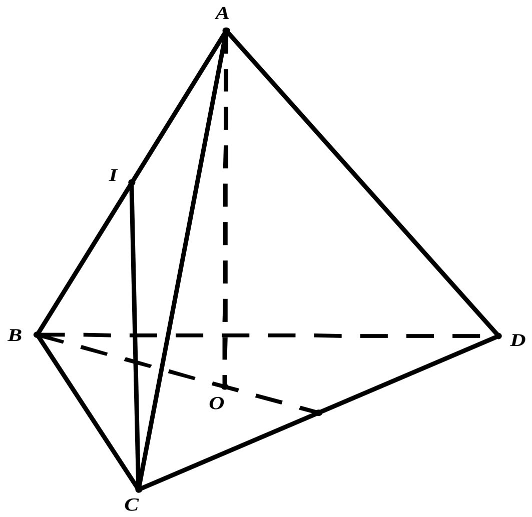
b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\dfrac{a^2}{2}$

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-a^2$

d) Gọi I là trung điểm của AB. Ta có: $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AC}=\dfrac{3a^2}{4}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**



a) vì G là trọng tâm của tứ diện đều $ABCD$ và M là điểm tuỳ ý nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=a.a.\cos 60^\circ=\frac{a^2}{2}$

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-a^2+\frac{a^2}{2}=-\frac{a^2}{2}$

d) Tứ diện $ABCD$ đều cạnh a. CI là trung tuyến của tam giác đều ABC nên $CI=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CI}.\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right)=\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{IC}$

Do ΔABC đều nên $\overrightarrow{CI}\perp\overrightarrow{AI}\Leftrightarrow\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AI}=0$

Đồng thời $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{IC}=CI.IC.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CI};\overrightarrow{IC}}\right)=\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\cos 180^\circ=-\frac{3a^2}{4}$

Suy ra $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AC}=0-\frac{3a^2}{4}=-\frac{3a^2}{4}$.

Câu 83. Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{SO}$

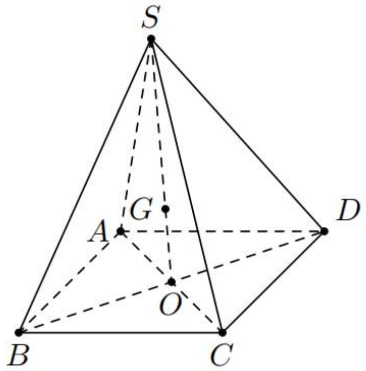
b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$.

d) $\overrightarrow{GS}=3\overrightarrow{OG}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**



a) Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

b) Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD \Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

c) Ta có $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$; $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}$ nên $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$

d) Ta có

$\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GS}=4\overrightarrow{OG}$

Câu 84. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt bên ASB là tam giác vuông cân tại S và có cạnh $AB=a$. Gọi M là trung điểm của AB.

a) $2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

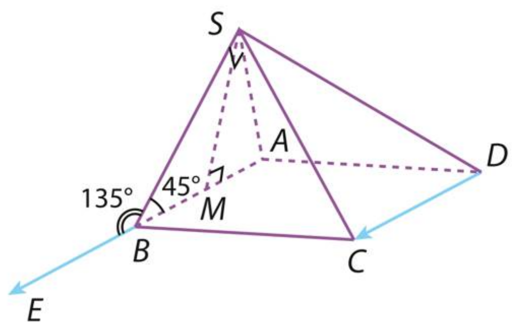
b) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BS}=\dfrac{a^2}{2}$

c) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AS}=-\dfrac{a^2}{2}$

d) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{MS}=0$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**



a) $2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

$2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (quy tắc hình bình hành)

b) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB//CD$.

Gọi E là điểm thuộc tia AB sao cho $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{DC}$.

Ta có: $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BS})=(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BS})=\widehat{EBS}$

ΔASB vuông cân (tại S) nên $\widehat{SBA}=45^{\circ}$.

Suy ra $\widehat{EBS}=180^{\circ}-45^{\circ}=135^{\circ}$, hay $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BS})=135^{\circ}$.

Mặt khác, do $AB=a$ nên $AS=BS=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Từ đó ta có:

$$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BS}=|\overrightarrow{DC}|.|\overrightarrow{BS}|.\cos(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BS})=a.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\cos135^{\circ}=a^2\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{a^2}{2}$$

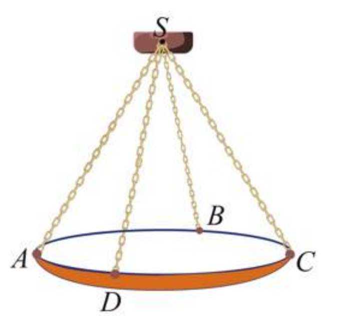
Vậy $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BS}=-\dfrac{a^2}{2}$.

b) $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AS}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AS}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AS})=a\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\cos45^{\circ}=\dfrac{a^2}{2}$.

c) Tam giác ASB cân tại S và M là trung điểm của cạnh AB nên $SM\perp AB$, hay $\overrightarrow{MS}\perp\overrightarrow{AB}$.

Suy ra $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MS}=0$.

Câu 85. Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m=5kg$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA,SB,SC,SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC}=60^{\circ}$. Biết $\vec{P}=m.\vec{g}$ trong đó $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn $10\,\text{m/s}^2$, $\vec{P}$ là trọng lực tác động vật có đơn bị là N, m là khối lượng của vật có đơn vị kg.



a) $\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}$ là 4 vectơ đồng phẳng

b) $\left|\overrightarrow{SA}\right|=\left|\overrightarrow{SB}\right|=\left|\overrightarrow{SC}\right|=\left|\overrightarrow{SD}\right|$

c) Độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm bằng $40\,N$.

d) Độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích bằng $\dfrac{25\sqrt{3}}{3}N$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) $\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}$ là 4 vectơ đồng phẳng

b) $\left|\overrightarrow{SA}\right|=\left|\overrightarrow{SB}\right|=\left|\overrightarrow{SC}\right|=\left|\overrightarrow{SD}\right|$

c) Độ lớn trọng lực tác động lên đèn chùm là: $P = mg = 5.10 = 50\,N$

d) Ta có $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều $\Rightarrow SA = SB = SC = SD$ mà $\widehat{ASC} = 60^\circ$

Vậy tam giác SAC đều. Gọi O là trung điểm AC.

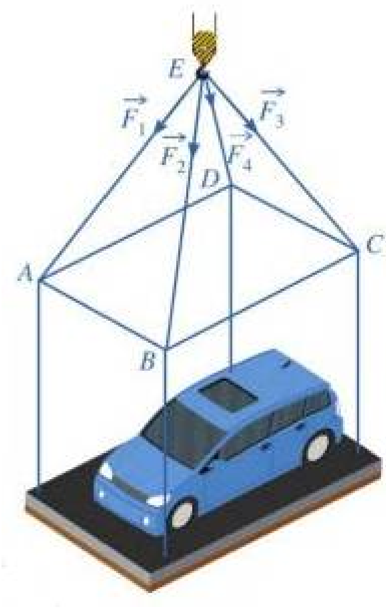
Hợp lực của 4 sợi xích là: $\vec{F} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO} + 2\overrightarrow{SO} = 4\overrightarrow{SO}$

Để đèn chùm đứng yên thì hợp lực của các sợi xích phải cân bằng với trọng lực hay $4\overrightarrow{SO} = \vec{P}$ hay $4SO = P \Leftrightarrow SO = 12,5$

Xét tam giác đều SAC có $SA = \dfrac{\sqrt{3}}{2}SO = \dfrac{25\sqrt{3}}{4}$

Vậy độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích là $\dfrac{25\sqrt{3}}{4}N$

Câu 86. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60°. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, \vec{F_4}$ đều có cường độ là $4700\,\text{N}$ và trọng lượng của khung sắt là $3000\,\text{N}$



a) $\vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{F_3} + \vec{F_4}$

b) $\vec{F_1} + \vec{F_3} = \vec{F_2} + \vec{F_4}$

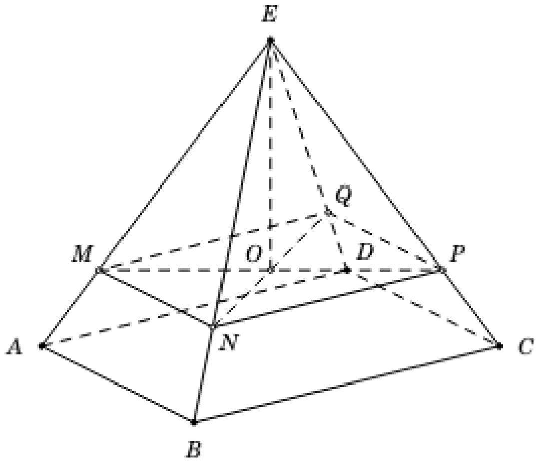
c) $\left|\vec{F_1} + \vec{F_3}\right| = 8141\,\text{N}$ (làm tròn đến hàng đơn vị)

d) Trọng lượng của chiếc xe ô tô là $16282(\text{N})$ (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

a)	b)	c)	d)

SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI



Lấy các điểm M,N,P,Q lần lượt trên các tia EA,EB,EC,ED sao cho

$\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{EN}=\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{F_3},\overrightarrow{EQ}=\overrightarrow{F_4}.$

Do các lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3},\overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là $4700\,\text{N}$ nên $EM=EN=EP=EQ=4700$.

a) Ta có: $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{EN}=2\overrightarrow{EH}$, với H là trung điểm của MN

$\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}=\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{EQ}=2\overrightarrow{EK}$, với K là trung điểm của PQ suy ra $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\neq\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}$

b) Ta có $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{EP}=2\overrightarrow{EO}$, với O là trung điểm của MP

$\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_4}=\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{EQ}=2\overrightarrow{EO}$, với O là trung điểm của MP suy ra $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_4}$.

c) $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}\right|=|2\overrightarrow{EO}|=2EO$. Theo giả thiết, góc giữa EA với $(ABCD)$ bằng 60° nên góc giữa EM với $(MNPQ)$ cũng bằng 60° hay $\widehat{SMO}=60^\circ$.

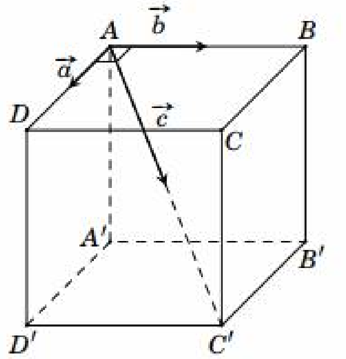
Xét ΔEMO có $EM=4700,\ \widehat{SMO}=60^\circ$ suy ra $EO=EM\sin 60^\circ=2350\sqrt{3}$.

Từ đây ta tính được $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}\right|=2EO=2.2350\sqrt{3}\approx 8141(\text{N})$.

d) ta có: $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}\right|=4EO=4.2350\sqrt{3}$

Trọng lượng của chiếc xe ô tô là: $P=\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}\right|-3000=4.2350\sqrt{3}-3000\approx 13281(\text{N})$

Câu 87. Một chất điểm ở vị trí đỉnh A của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chất điểm chịu tác động bởi ba lực $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC'}$ như hình vẽ. Độ lớn của các lực $\vec{a},\vec{b}$ và $\vec{c}$ tương ứng là $10\,\text{N}$, $10\,\text{N}$ và $20\,\text{N}$.



a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$.

b) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=20\,\text{N}$.

c) $\left|\vec{a}+\vec{c}\right|=\left|\vec{b}+\vec{c}\right|$.

d) $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=30,6\,\text{N}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

Từ giả thiết ta có $\vec{a}\perp\vec{b}$; $\cos\left(\vec{a},\vec{c}\right)=\cos\widehat{DAC'}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos\left(\vec{b},\vec{c}\right)=\cos\widehat{BAC'}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

a) Giả sử $\vec{a}+\vec{b}=\vec{d}$. Theo quy tắc hình bình hành thì $\vec{d}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AC}$ suy ra $\vec{a}+\vec{b}\neq\vec{c}$

b) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=10\sqrt{2}$ (đường chéo hình vuông cạnh bằng 10).

c) Ta có $\vec{a}+\vec{c}^{\,2}=\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}.\vec{c}+\left|\vec{c}\right|^2=10^2+2.10.20.\dfrac{1}{\sqrt{3}}+20^2=500+\dfrac{400\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $\left|\vec{a}+\vec{c}\right|=\sqrt{500+\dfrac{400\sqrt{3}}{3}}$.

Mặt khác $\left(\vec{b}+\vec{c}\right)^2=\left|\vec{b}\right|^2+2\vec{b}.\vec{c}+\left|\vec{c}\right|^2=10^2+2.10.20\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}+20^2=500+\dfrac{400\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $\left|\vec{b}+\vec{c}\right|=\sqrt{500+\dfrac{400\sqrt{3}}{3}}$. Vậy $\left|\vec{a}+\vec{c}\right|=\left|\vec{b}+\vec{c}\right|$.

d) Giả sử lực tổng hợp là $\vec{m}$, tức là $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

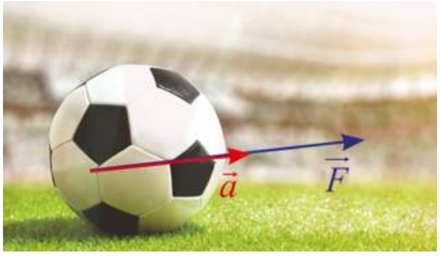
Do đó: $\vec{n}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\Leftrightarrow\left|\vec{m}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2\Leftrightarrow\left|\vec{m}\right|^2=\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+\vec{c}^{\,2}+2\vec{a}.\vec{b}+2\vec{b}.\vec{c}+2\vec{c}.\vec{a}$

$\Leftrightarrow\left|\vec{m}\right|^2=10^2+10^2+20^2+0+2.10.20.\dfrac{1}{\sqrt{3}}+2.10.20.\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow\left|\vec{m}\right|^2=10^2+10^2+20^2+0+2.10.20.\dfrac{1}{\sqrt{3}}+2.10.20.\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\left|\vec{m}\right|\approx32,6.$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 88. Theo định luật II Newton. Gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật: $\vec{F} = m\vec{a}$ trong đó $\vec{a}$ là vectơ gia tốc $\left(m/s^2\right), \vec{F}$ là vectơ lực (N) tác dụng lên vật, $m(kg)$ là khối lượng của vật. Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng $0,5kg$ một gia tốc $50m/s^2$ thì cần một lực đá có độ lớn (đơn vị: N) là bao nhiêu?



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 25

Ta có $\vec{F} = m\vec{a}$, suy ra $|\vec{F}| = m|\vec{a}| = 0,5.50 = 25(N)$.

Vậy muốn truyền cho quả bóng khối lượng $0,5kg$ một gia tốc $50m/s^2$ thì cần một lực đá có độ lớn là $25N$.

Câu 89. Trọng lực $\vec{P}$ là lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một vật, được tính theo công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, trong đó m là khối lượng của vật (đơn vị: kg), còn $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do, có hướng đi xuống và có độ lớn $g = 9,8m/s^2$. Xác độ lớn của trọng lực (đơn vị: N) tác dụng lên quả dừa có khối lượng $2,5$kg.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $24,5$

Độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên quả dừa: $P = mg = 2,5.9,8 = 24,5N$

Câu 90. Trọng lực $\vec{P}$ là lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một vật được tính bởi công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, trong đó m là khối lượng của vật (đơn vị: kg), $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do, có hướng đi xuống và có độ lớn $g = 9,8\,m/s^2$. Xác định độ lớn của trọng lực (đơn vị: N) tác dụng lên quả bóng có khối lượng 500 gam.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 4,9

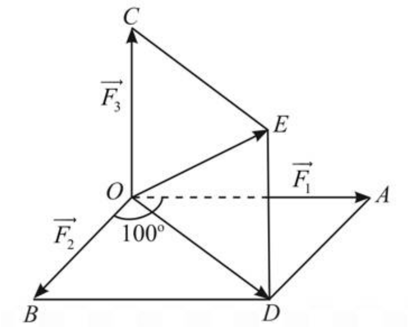
Độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên quả bưởi: $P = mg = 0,5.9,8 = 4,9N$

Câu 91. Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc 100° và có độ lớn lần lượt là $25\,N$ và $12\,N$. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn $4\,N$. Tính độ lớn của hợp lực (đơn vị: N) của ba lực trên (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 26



Gọi $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ là ba lực tác động vào vật đặt tại điểm O lần lượt có độ lớn là $25\,N, 12\,N, 4\,N$.

Vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{F_1}, \overrightarrow{OB} = \vec{F_2}, \overrightarrow{OC} = \vec{F_3}$.

Dựng hình bình hành $OADB$ và hình bình hành $ODEC$.

Hợp lực tác động vào vật là $\vec{F} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE}$

Áp dụng định lí côsin trong tam giác OBD, ta có

$OD^2 = BD^2 + OB^2 - 2 \cdot BD \cdot OB \cdot \cos\widehat{OBD} = OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100^\circ$.

Vì $OC \perp (OADB)$ nên $OC \perp OD$, suy ra $ODEC$ là hình chữ nhật.

Do đó tam giác ODE vuông tại D.

Ta có $OE^2 = OC^2 + OD^2 = OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100^\circ$.

Suy ra $OE = \sqrt{OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100^\circ} = \sqrt{4^2 + 25^2 + 12^2 + 2 \cdot 25 \cdot 12 \cdot \cos 100^\circ} \approx 26,092.$

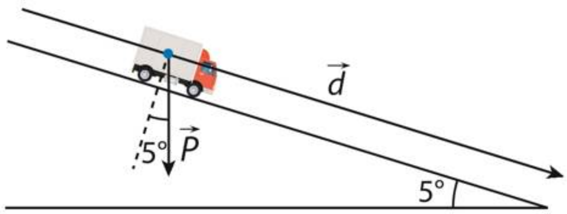
Vậy độ lớn của hợp lực là $F = OE \approx 26\,N$.

Câu 92. Cho biết công A (đơn vị: J) sinh bởi lực $\vec{F}$ tác dụng lên một vật được tính bằng công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$, trong đó $\vec{d}$ là vectơ biểu thị độ dịch chuyển của vật (đơn vị của $|\vec{d}|$ là m) khi chịu tác dụng của lực $\vec{F}$. Một chiếc xe có khối lượng $0,15$ tấn đang đi xuống trên một đoạn đường dốc có góc nghiêng 5° so với phương ngang. Tính công (đơn vị: J) sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài $30\,m$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị), biết rằng trọng lực $\vec{P}$ được xác định bởi công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, với m (đơn vị: kg) là khối lượng của vật và $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9,8\,m/s^2$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3844



Ta có $0,15$ tấn $= 150kg$.

Độ lớn của trọng lực tác dụng lên chiếc xe là: $|\vec{P}| = m|\vec{g}| = 150.9,8 = 1470$ (N).

Vectơ $\vec{d}$ biểu thị độ dịch chuyển của xe có độ dài là $|\vec{d}| = 30(m)$ và $(\vec{P}, \vec{d}) = 90^\circ - 5^\circ = 85^\circ$.

Công sinh ra bởi trọng lực $\vec{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài $30\,m$ là:

$A = \vec{P} \cdot \vec{d} = |\vec{P}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos(\vec{P}, \vec{d}) = 1470.30 \cdot \cos 85^\circ \approx 3844(J)$

Câu 93. Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của bốn lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học. Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900 km/h lên 920 km/h, trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc $900\,km/h$ và $920\,km/h$ lần lượt được biểu diễn bởi hai vectơ $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$. Tính giá trị của k (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 0,96

Vì trong quá trình máy bay tăng vận tốc từ $900\,km/h$ lên $920\,km/h$ máy bay giữ nguyên hướng bay nên vectơ $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ có cùng hướng. Do đó, $\overrightarrow{F_1}=k\overrightarrow{F_2}$ với k là một số thực dương nào đó (1).

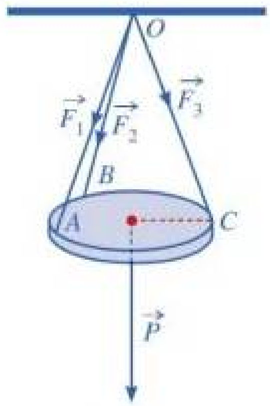
Gọi v_1,v_2 lần lượt là vận tốc của của chiếc máy bay khi đạt $900\,km/h$ và $920\,km/h$.

Suy ra $v_1=900(km/h), v_2=920(km/h)$

Vì lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay nên $\dfrac{\left|\overrightarrow{F_1}\right|}{\left|\overrightarrow{F_2}\right|}=\dfrac{v_1^2}{v_2^2}=\dfrac{900^2}{920^2}=\dfrac{2025}{2116}\Rightarrow\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\dfrac{2025}{2116}\left|\overrightarrow{F_2}\right|$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\overrightarrow{F_1}=\dfrac{2025}{2116}\overrightarrow{F_2}\Rightarrow k=\dfrac{2025}{2116}\approx 0,96$

Câu 94. Một tấm gỗ tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A,B,C trên tấm gỗ tròn sao cho các lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ lần lượt trên mỗi dây OA,OB,OC đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\left|\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{F_3}\right|=10(N)$ (xem hình vẽ).

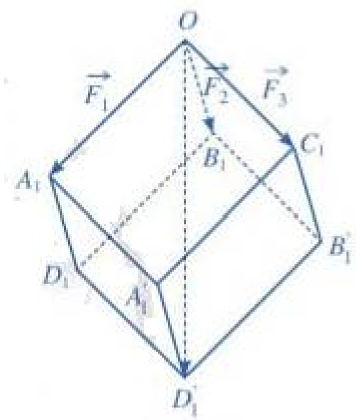


Tính trọng lượng P của tấm gỗ tròn đó (đơn vị N và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 17,3



Gọi A_1,B_1,C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{F_1},\ \overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{F_2},\ \overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{F_3}$

Lấy các điểm $D_1, A_1^{'}, B_1^{'}, D_1^{'}$ sao cho $OA_1D_1B_1.C_1A_1^{'}D_1^{'}B_1^{'}$ là hình hộp .

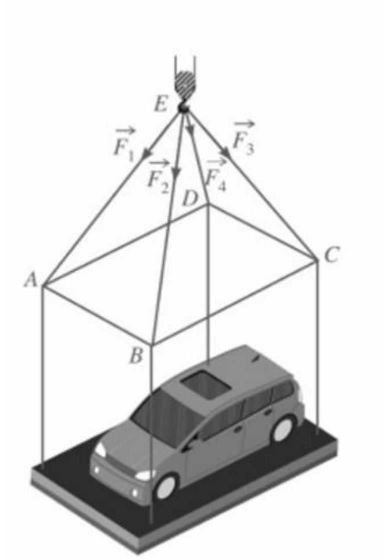
Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OD_1^{'}}$

Do các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn: $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right| = 10(N)$ nên hình hộp $OA_1D_1B_1.C_1A_1^{'}D_1^{'}B_1^{'}$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và bằng nhau. Vì thế $OA_1D_1B_1.C_1A_1^{'}D_1^{'}B_1^{'}$ là hình lập phương có độ dài cạnh bằng 10, suy ra độ dài đường chéo bằng $10\sqrt{3}$

Vì tấm gỗ tròn ở vị trí cân bằng nên: $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}$

Suy ra trọng lượng của tấm gỗ tròn: $\left|\overrightarrow{P}\right| = \left|\overrightarrow{OD_1^{'}}\right| = 10\sqrt{3}(N) \approx 17,3(N)$

Câu 95. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiến cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60^0 như hình vẽ. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ $5000(N)$ và trọng lượng khung sắt là $8000(N)$. Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (đơn vị N và làm tròn kết quả đến chữ số hàng đơn vị).

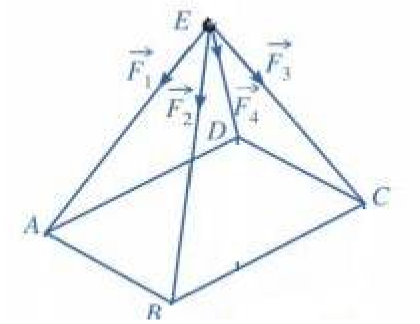


Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 9321

Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$, Theo bài toán thì là hình chóp $E.ABCD$ có đường cao là EO



Theo quy tắc hình bình hành: $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}=2\overrightarrow{EO}$; $\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_4}=2\overrightarrow{EO}$

$\Rightarrow \overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_4}=4\overrightarrow{EO}$

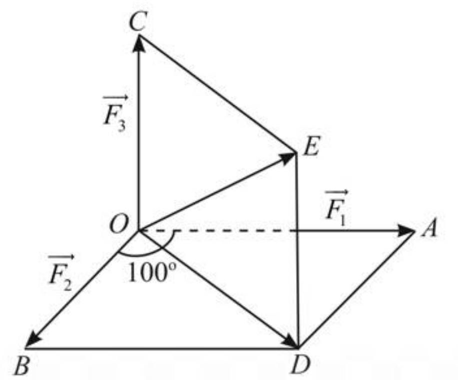
dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60^0 nên:

$\Rightarrow EO = EA.\sin 60^0 = 5000.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2500\sqrt{3}$

Vì chiếc xe ô tô ở vị trí cân bằng nên: $\vec{P}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}+\overrightarrow{P_1}$

Suy ra trọng lượng của chiếc xe ô tô: $\left|\vec{P}\right|+2000=4\left|\overrightarrow{EO}\right| \Rightarrow \left|\vec{P}\right|=4.2500\sqrt{3}-8000\approx 9321(N)$

Câu 96. Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc $100°$ và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4 N. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên (đơn vị N và làm tròn kết quả đến chữ số hàng đơn vị).



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 26

Gọi $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ là ba lực tác động vào vật đặt tại điểm O lần lượt có độ lớn là $25N, 12N, 4N$.

Vẽ $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{F_3}$.

Dựng hình bình hành $OADB$ và hình bình hành $ODEC$.

Hợp lực tác động vào vật là $\vec{F}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}$

Áp dụng định lí côsin trong tam giác OBD, ta có

$OD^2 = BD^2 + OB^2 - 2.BD.OB.\cos\widehat{OBD} = OA^2 + OB^2 + 2.OA.OB.\cos 100°$.

Vì $OC \perp (OADB)$ nên $OC \perp OD$ suy ra $ODEC$ là hình chữ nhật.

Do đó tam giác ODE vuông tại D.

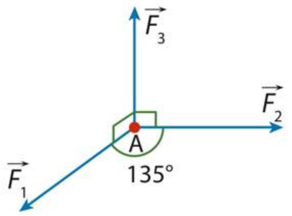
Ta có $OE^2 = OC^2 + OD^2 = OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2.OA.OB.\cos 100°$.

Suy ra $OE = \sqrt{OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2.OA.OB.\cos 100°}$

$= \sqrt{4^2 + 25^2 + 12^2 + 2 \cdot 25 \cdot 12 \cdot \cos 100^\circ} \approx 26,092.$

Vậy độ lớn của hợp lực là $F = OE \approx 26\,N$.

Câu 97. Một chất điểm A nằm trên mặt phẳng nằm ngang (α), chịu tác động bởi ba lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$. Các lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ có giá nằm trong (α) và $\left(\vec{F_1}, \vec{F_2}\right) = 135^\circ$, còn lực $\vec{F_3}$ có giá vuông góc với (α) và hướng lên trên.



Xác định hợp lực của các lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$, biết rằng độ lớn của ba lực đó lần lượt là $20\,N$, $15\,N$ và $10\,N$ (đơn vị N và làm tròn kết quả đến chữ số hàng thập phân thứ nhất).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 17,3

Vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{F_1}, \overrightarrow{OB} = \vec{F_2}, \overrightarrow{OC} = \vec{F_3}$.

Dựng hình bình hành $OADB$ và hình bình hành $ODEC$.

Hợp lực tác động vào vật là $\vec{F} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE}$

Áp dụng định lí côsin trong tam giác OBD, ta có

$OD^2 = BD^2 + OB^2 - 2 \cdot BD \cdot OB \cdot \cos \widehat{OBD} = OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 135^\circ$.

Vì $OC \perp (OADB)$ nên $OC \perp OD$, suy ra $ODEC$ là hình chữ nhật.

Do đó tam giác ODE vuông tại D.

Ta có $OE^2 = OC^2 + OD^2 = OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 135^\circ$.

Suy ra $OE = \sqrt{OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 135^\circ}$

$= \sqrt{10^2 + 20^2 + 15^2 + 2 \cdot 20 \cdot 15 \cdot \cos 135^\circ} \approx 17,3.$

Vậy độ lớn của hợp lực là $F = OE \approx 17,3\,(N)$.

Câu 98. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{MN} = k\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)$

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $0,5$

$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)$(quy tắc trung điểm) $=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}\right)$

Mà $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ (vì M là trung điểm AB) $\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$.

Vậy $k=\frac{1}{2}=0,5$

Câu 99. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm đoạn MN và P là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{PI}=k\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $0,25$

Ta có $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PN}$

nên $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PM}+2\overrightarrow{PN}=2(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN})=2.2.\overrightarrow{PI}=4\overrightarrow{PI}$.

Vậy $k=\frac{1}{4}=0,25$

Câu 100. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{MN}=k\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $0,5$

Ta có: $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}\end{array}\right\}\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{CN}$

Mà M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{NC}=-\overrightarrow{CN}$

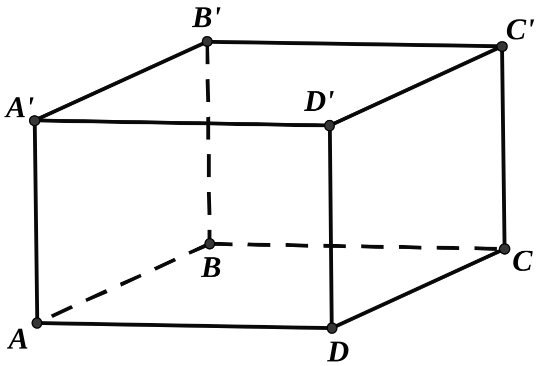
Do đó $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.

Vậy $k=\frac{1}{2}=0,5$

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 101. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{D'D}-\overrightarrow{B'D'}=k\overrightarrow{BB'}$

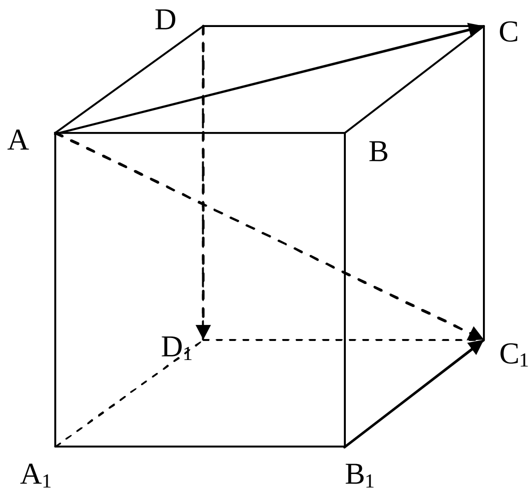
Lời giải



Ta có $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{D'D}-\overrightarrow{B'D'}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{D'B'}=\overrightarrow{BB'}$ nên $k=1$

Câu 102. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=k\overrightarrow{AC_1}$

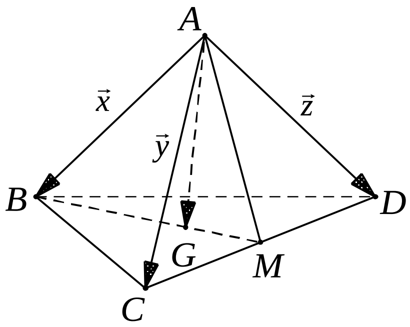
Lời giải



+ Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC_1}$. Nên $k=1$.

Câu 103. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD. Đặt $\vec{x}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{y}=\overrightarrow{AC}$; $\vec{z}=\overrightarrow{AD}$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AG}$ theo ba vectơ $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ ta được $\overrightarrow{AG}=a.\vec{x}+b.\vec{y}+c.\vec{z}$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm CD.

Ta phân tích:

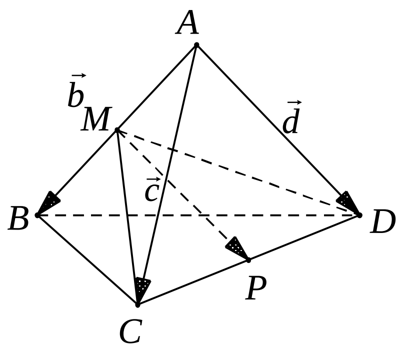
$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}\right)$$

$$=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)-\overrightarrow{AB}\right]=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{3}\vec{x}+\frac{1}{3}\vec{y}+\frac{1}{3}\vec{z}.$$

$\Rightarrow T=a+b+c=1$

Câu 104. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{MP}$ theo ba vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ ta được $\overrightarrow{MP}=x.\vec{b}+y.\vec{c}+z.\vec{d}$ với $x,y,z\in\mathbb{R}$. Tính giá trị biểu thức $T=x+y+z$.

Lời giải



Ta phân tích:

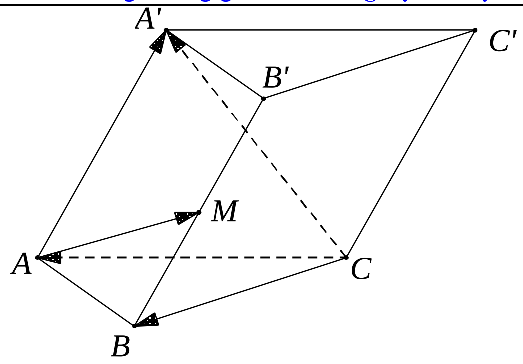
$\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)$ (tính chất đường trung tuyến)

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AM}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-2\overrightarrow{AM}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}\right)=-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}.$$

$\Rightarrow T=x+y+z=\frac{1}{2}=0,5$

Câu 105. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AA'}$ ta được $\overrightarrow{AM}=a.\overrightarrow{CA}+b.\overrightarrow{CB}+c.\overrightarrow{AA'}$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$.

Lời giải



Ta phân tích như sau: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}=-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$

$\Rightarrow T=a+b+c=1+(-1)+\frac{1}{2}=0,5$

Câu 106. Cho tứ diện $ABCD$. Tìm giá trị của k thích hợp thỏa mãn: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=k$

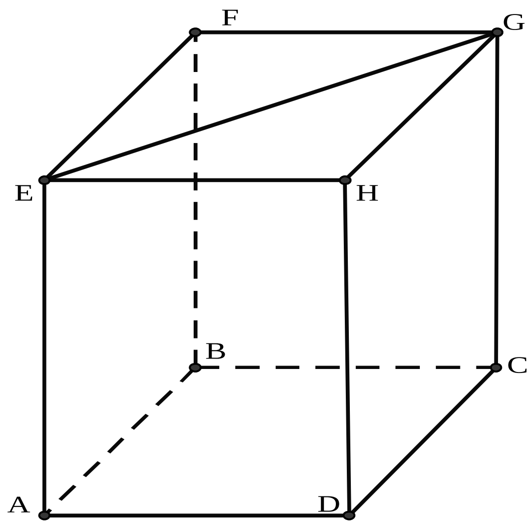
Lời giải

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right).\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$

$=\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}\right)+\overrightarrow{CB}\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AC}=0.$

Câu 107. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh $\sqrt{2025}$. Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}=\left(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}\right)\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}\right)$

$=\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{AE}+EF^2+\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{FB}$

$=0+\left(\sqrt{2025}\right)^2+0+0+0+\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{EA}=2025+0=2025$

Câu 108. Trong không gian, cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $\left|\vec{a}\right|=4,\left|\vec{b}\right|=3$ và $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=2\sqrt{7}$. Tính $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Lời giải

Ta có:

$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=2\sqrt{7} \Leftrightarrow \left(\vec{a}+2\vec{b}\right)^2=28 \Leftrightarrow \vec{a}^2+4\vec{b}^2+4\vec{a}\vec{b}=28 \Leftrightarrow \left|\vec{a}\right|^2+4\left|\vec{b}\right|^2+4\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=28$

$\Rightarrow \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\dfrac{1}{2}=-0,5$

Câu 109. Trong không gian, cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ thỏa mãn $\left|\vec{a}\right|=1$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=3$. Tính $\left(\vec{a}-2\vec{b}\right).\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)$.

Lời giải

Ta có: $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=3 \Leftrightarrow \left(\vec{a}\right)^2-2.\vec{a}.\vec{b}+\left(\vec{b}\right)^2=9 \Leftrightarrow 1-2.\vec{a}.\vec{b}+4=9 \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=-2$.

Ta có: $\left(\vec{a}-2\vec{b}\right).\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)=2\left(\vec{a}\right)^2-3.\vec{a}.\vec{b}-2\left(\vec{b}\right)^2=2.1-3.(-2)-2.4=0$.

Câu 110. Trong không gian, cho ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ thỏa mãn: $\left|\vec{a}\right|=4$, $\left|\vec{b}\right|=1$, $\left|\vec{c}\right|=5$ và $5\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+3\vec{c}=\vec{0}$. Khi đó biểu thức $M=\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$ có giá trị bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $5\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+3\vec{c}=\vec{0} \Leftrightarrow 5\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=3\vec{c} \Leftrightarrow 25\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=9\vec{c}^2$

$\Leftrightarrow 25\left(\vec{a}^2-2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2\right)=9\vec{c}^2 \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=4$.

Tương tự: $5\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+3\vec{c}=\vec{0} \Leftrightarrow 5\vec{a}=5\vec{b}+3\vec{c} \Leftrightarrow \vec{b}.\vec{c}=5$.

$5\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+3\vec{c}=\vec{0} \Leftrightarrow 5\vec{b}=5\vec{a}-3\vec{c} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{c}=20$.

Vậy $M=4+5+20=29$.