Vấn đề 10 PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PHƯƠNG TRÌNH - MIN MAX LOGARIT

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH – BPT MŨ -LOGARIT

Thường sử dụng các phương pháp sau:

1. Phương pháp đưa về cùng cơ số.

1/ Phương trình – Bất phương trình mũ cơ bản

□ Phương trình mũ

+ Nếu $a>0,\ a\neq 1$ thì $a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)$

+ Nếu a chứa ẩn thì $a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow (a-1)\left[f(x)-g(x)\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1\\ f(x)=g(x)\end{array}\right.$.

+ $a^{f(x)}=b^{g(x)}\Leftrightarrow \log_a a^{f(x)}=\log_a b^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=\log_a b.g(x)$ (**logarit hóa**).

□ Bất phương trình mũ

+ Nếu $a>1$ thì $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)$. (cùng chiều)

+ Nếu $0<a<1$ thì $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)<g(x)$. (ngược chiều)

+ Nếu a chứa ẩn thì $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow (a-1)\left[f(x)-g(x)\right]>0$.

2/ Phương trình logarit – Bất phương trình logarit cơ bản

□ Phương trình logarit

+ Nếu $a>0,\ a\neq 1$: $\boxed{\log_a x=b\Leftrightarrow x=a^b}$ (1)

+ Nếu $a>0,\ a\neq 1$: $\boxed{\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)}$ (2)

+ Nếu $a>0,\ a\neq 1$: $\boxed{\log_a f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)=a^{g(x)}}$ (**mũ hóa**) (3)

□ Bất phương trình logarit

+ Nếu $a>1$ thì $\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x)$ (cùng chiều)

+ Nếu $0<a<1$ thì $\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)<g(x)$ (ngược chiều)

+ Nếu a chứa ẩn thì $\left[\begin{array}{l}\log_a B>0\Leftrightarrow (a-1)(B-1)>0\\ \dfrac{\log_a A}{\log_a B}>0\Leftrightarrow (A-1)(B-1)>0\end{array}\right.$.

✍ Các bước giải phương trình & bất phương trình mũ – logarit

□ **Bước 1**. Đặt điều kiện (điều kiện đại số $+$ điều kiện loga), ta cần chú ý:

$$\log_a b\xrightarrow{\text{ĐK}}\begin{cases}0<a\neq 1\\ b>0\end{cases}\quad \text{và}\quad \left\{\begin{array}{l}\log_a\left[f(x)\right]\xrightarrow[\text{ĐK}]{\text{mũ lẻ}} f(x)>0\\ \log_a\left[f(x)\right]\xrightarrow[\text{ĐK}]{\text{mũ chẵn}} f(x)\neq 0\end{array}\right..$$

□ **Bước 2**. Dùng các công thức và biến đổi đưa về các cơ bản trên, rồi giải.

□ **Bước 3**. So với điều kiện và kết luận nghiệm.

2. Phương pháp đặt ẩn phụ.

I/ Đặt ẩn phụ cho phương trình mũ

① Loại 1. $P\left(a^{f(x)}\right)=0\xrightarrow{\text{PP}}$ đặt $t=a^{f(x)},\ t>0$.

② Loại 2. $\alpha.a^{2.f(x)}+\beta.(a.b)^{f(x)}+\lambda.b^{2.f(x)}=0\xrightarrow{\text{PP}}$ Chia hai vế cho $b^{2.f(x)}$, rồi đặt $t=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)}>0$ (chia cho cơ số lớn nhất hoặc nhỏ nhất).

③ Loại 3. $a^{f(x)} + b^{f(x)} = c$ với $a.b = 1 \xrightarrow{PP}$ đặt $t = a^{f(x)} \Rightarrow b^{f(x)} = \frac{1}{t}$.

④ Loại 4. $\alpha.a^{f(x)} + \left[\begin{array}{l} a^{f(x)}.a^{g(x)} \\ \frac{a^{f(x)}}{a^{g(x)}} \end{array}\right. + \beta.a^{g(x)} + b = 0 \xrightarrow{PP}$ đặt $\begin{cases} u = a^{f(x)} \\ v = a^{g(x)} \end{cases}$.

II/ Đặt ẩn phụ cho phương trình logarit

① Loại 1. $P\left(\log_a f(x)\right) = 0 \xrightarrow{PP}$ đặt $t = \log_a f(x)$.

② Loại 2. Sử dụng công thức $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ để đặt $t = a^{\log_b x} \Rightarrow t = x^{\log_b a}$.

Lưu ý

Trên đây là một số dạng cơ bản thường gặp về phương trình mũ và loga, còn bất phương trình ta cũng làm tương tự nhưng lưu ý về chiều biến thiên. Về phương diện tổng quát, ta đi tìm mối liên hệ giữa biến để đặt ẩn phụ, đưa về phương trình (bất phương trình) đại số hoặc hệ phương trình đại số mà đã biết cách giải. Từ đó, tìm ra được nghiệm. Ngoài ra, còn một số trường hợp đặt ẩn phụ không hoàn toàn. Nghĩa là sau khi đặt ẩn phụ t vẫn còn x. Ta giải phương trình theo t với x được xem như là hằng số bằng cách lập biệt thức Δ hoặc đưa về tích số.

3. Phương pháp hàm số.

I/ Cơ sở lý thuyết và vận dụng cơ sở lý thuyết để tìm hướng giải

Thông thường ta sẽ vận dụng nội dung các định lý (và các kết quả) sau:

① Nếu hàm số $y = f(x)$ đơn điệu một chiều trên D thì phương trình $f(x) = 0$ không quá một nghiệm trên D.

$\longrightarrow$ Để vận dụng định lý này, ta cần nhẩm được 1 nghiệm $x = x_o$ của phương trình, rồi chỉ rõ hàm đơn điệu một chiều trên D (luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên D) và kết luận $x = x_o$ là nghiệm duy nhất.

② Hàm số $f(t)$ đơn điệu một chiều trên khoảng $(a;b)$ và tồn tại $u;\, v \in (a;b)$ thì $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$".

$\longrightarrow$ Để áp dụng định lý này, ta cần xây dựng hàm đặc trưng $f(t)$.

③ Hàm số $y = f(t)$ xác định và liên tục trên D:

Nếu $f(t)$ đồng biến trên D và $\forall u, v \in D$ thì $f(u) > f(v) \Leftrightarrow u > v$.

Nếu $f(t)$ nghịch biến trên D và $\forall u, v \in D$ thì $f(u) > f(v) \Leftrightarrow u < v$.

$\longrightarrow$ Để vận dụng nội dung định lí này trong giải bất phương trình, người ra đề thường cho dưới hai hình thức và có hai hướng xử lí thường gặp sau:

□ Nếu đề yêu cầu giải $f(x) > 0$:

Nhẩm nghiệm của $f(x) = 0$ trên miền xác định D, chẳng hạn $x = x_o$.

Xét hàm số $y = f(x)$ trên D và chỉ rõ nó đơn điệu tăng một chiều (đơn điệu giảm một chiều). Khi đó: $f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_o) \Leftrightarrow x > x_o$ nếu hàm số đơn điệu tăng trên D và $x < x_o$ nếu hàm số đơn điệu giảm trên D.

□ Nếu đề bài yêu cầu giải $f(x) > 0$ mà không nhẩm được nghiệm $x = x_o$ của $f(x) = 0$ thì cần biến đổi $f(x) > 0 \Leftrightarrow f[g(x)] > f[h(x)]$ với việc xây dựng hàm đặc trưng $y = f(t)$, rồi chỉ ra hàm $f(t)$ là đồng biến (nghịch biến). Khi đó $f[g(x)] > f[h(x)] \Leftrightarrow g(x) > f(x)$ $[\text{hay } g(x) < f(x)]$.

Ta sẽ làm tương tự nếu đề cho $f(x) < 0,\ f(x) \ge 0$ hoặc $f(x) \le 0$.

④ Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục và thỏa mãn $f'(x)=0$ có một nghiệm trên D thì phương trình $f(x)=0$ không quá 2 nghiệm trên D.

II/ Một số loại toán cơ bản thường gặp khi sử dụng đơn điệu hàm

① **Loại 1**. $\boxed{\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)} = \beta.\left[g(x)-f(x)\right]}$ (1)

- Tìm tập xác định D.
- Biến đổi $(1) \Leftrightarrow \log_a f(x) - \log_a g(x) = \beta.g(x) - \beta.f(x)$

$\Leftrightarrow \log_a f(x) + \beta.f(x) = \log_a g(x) + \beta.g(x) \Leftrightarrow f\left[f(x)\right] = f\left[g(x)\right]$.

- Xét hàm số đặc trưng $f(t) = \beta.t + \log_a t$ trên miền D và chỉ ra hàm số này luôn đơn điệu một chiều trên D và $f\left[f(x)\right] = f\left[g(x)\right] \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

② **Loại 2**. $\boxed{\log_a f(x) = \log_b g(x)}$ (2)

- Nếu $a=b$ thì $(2) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$: đây là dạng toán khá quen thuộc.
- Nếu $(a-1)(b-1)<0 \xrightarrow{PP}$ Dùng phương pháp đoán nghiệm và chứng minh đó là nghiệm duy nhất.
- Nếu $(a-1)(b-1)>0 \xrightarrow{PP}$ Đặt ẩn phụ kết hợp mũ hóa phương trình.

Tìm tập xác định D và đặt $\log_a f(x) = \log_b g(x) = t \Rightarrow \begin{cases} f(x) = a^t \\ g(x) = b^t \end{cases}$ và biến đổi phương trình về dạng: $f(t) = A^t + B^t = 1$ và giải bằng phương pháp đoán nghiệm và chứng minh nghiệm này duy nhất và tìm x khi biết t.

✍ Dạng toán: $\boxed{\alpha.\log_a f(x) = \beta.\log_b g(x)}$ ta cũng làm tương tự bằng cách đặt $\alpha \log_a f(x) = \beta \log_b g(x) = \gamma.t$ với γ là bội số chung nhỏ nhất của α và β.

③ **Loại 3**. $\boxed{\log_{f(x)} g(x) = \log_a b}$ (3)

- Đặt điều kiện: $f(x)>0$ và $0<g(x)\neq 1$.
- Sử dụng công thức đổi cơ số thì $(3) \Leftrightarrow \dfrac{\log_b f(x)}{\log_b g(x)} = \log_a b$

$\Leftrightarrow \log_b f(x) = \log_a b.\log_b g(x) \Leftrightarrow \log_b f(x) = \log_a g(x)$ (đây là loại 2).

④ **Loại 4**. $\boxed{a^{\alpha x+\beta} = p\log_a(\lambda x+\mu) + qx + r}$ (4)

$\xrightarrow{PP}$ Đặt ẩn phụ $\log_a(\lambda x+\mu) = y$ để đưa về hệ phương trình đối xứng loại II hay gần đối xứng và sử dụng phương pháp hàm để tìm được $x=y$.

Phương trình dạng $\log_a f(x,y) = \log_b g(x,y)$.

Phương pháp: đặt $t = \log_a f(x,y) = \log_b g(x,y)$ và chuyển về hệ $\begin{cases} f(x,y) = a^t \\ g(x,y) = b^t \end{cases}$ và đánh giá chặn giá trị t. Từ đó chọn giá trị nguyên của x thích hợp và thử lại xem với giá trị nguyên của x đã chọn thì hệ phương trình có nghiệm t trong miền đã chặn hay không?

Kiến thức để đánh giá chặn giá trị t:

+ Điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2.
+ Bất đẳng thức Cauchy, BCS…
+ Tính chất biến thiên của hàm số.

Câu 1. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(2x+y)$. Giá trị của $\frac{x}{y}$ bằng

A. 2. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\log_{\frac{3}{2}} 2$.

Câu 2. Biết $x_1; x_2$ $(x_1 < x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $\log_2\left(\frac{4x^2-4x+1}{x}\right) = 6x - 4x^2$ và $x_1 + 2x_2 = \frac{1}{4}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với a, b là các số nguyên dương. Giá trị $P = a + b$ là

A. $P = 14$. **B.** $P = 13$. **C.** $P = 15$. **D.** $P = 16$.

Câu 3. Biết $a = \log_{30} 10$, $b = \log_{30} 150$ và $\log_{2000} 15000 = \frac{x_1 a + y_1 b + z_1}{x_2 a + y_2 b + z_2}$ với $x_1; y_1; z_1; x_2; y_2; z_2$ là các số nguyên, tính $S = \frac{x_1}{x_2}$.

A. $S = \frac{1}{2}$. **B.** $S = 2$. **C.** $S = \frac{2}{3}$. **D.** $S = 1$.

Câu 4. Cho các số thực dương x, y khác 1 và thỏa mãn $\begin{cases} \log_x y = \log_y x \\ \log_x(x-y) = \log_y(x+y) \end{cases}$.

Giá trị của $x^2 + xy - y^2$ bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 5. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\sqrt{\log a} + \sqrt{\log b} + \log\sqrt{a} + \log\sqrt{b} = 100$ và $\sqrt{\log a}$, $\sqrt{\log b}$, $\log\sqrt{a}$, $\log\sqrt{b}$ đều là các số nguyên dương. Tính $P = ab$.

A. 10^{164}. **B.** 10^{100}. **C.** 10^{200}. **D.** 10^{144}.

Câu 6. Cho $\log_9 5 = a$; $\log_4 7 = b$; $\log_2 3 = c$ .Biết $\log_{24} 175 = \frac{mb + nac}{pc + q}$.Tính $A = m + 2n + 3p + 4q$

A. 27 **B.** 25 **C.** 23 **D.** 29

Câu 7. Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 thoả mãn $x^2 - 6y^2 = xy$. Tính $M = \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2\log_{12}(x+3y)}$.

A. $M = \frac{1}{4}$. **B.** $M = 1$. **C.** $M = \frac{1}{2}$. **D.** $M = \frac{1}{3}$.

Câu 8. Cho $f(x) = a\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + b\sin x + 6$ với a, $b \in \mathbb{R}$. Biết $f(\log(\log e)) = 2$. Tính $f(\log(\ln 10))$.

A. 4. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 2.

Câu 9. Cho $9^x + 9^{-x} = 14$ và $\frac{6 + 3(3^x + 3^{-x})}{2 - 3^{x+1} - 3^{1-x}} = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P = a.b$.

A. $P = 10$. **B.** $P = -45$. **C.** $P = -10$. **D.** $P = 45$.

Câu 10. Biết phương trình $27^x - 27^{1-x} - 16\left(3^x - \frac{3}{3^x}\right) + 6 = 0$ có các nghiệm $x = a$, $x = \log_3 b$ và $x = \log_3 c$ với $a \in \mathbb{Z}$, $b > c > 0$. Tỉ số $\frac{b}{c}$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(3; +\infty)$. **B.** $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{5}{2}; 3\right)$.

Câu 11. Cho hai số thực dương a, b thỏa $\log_4 a = \log_6 b = \log_9(a+b)$. Tính $\frac{a}{b}$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 12. Gọi a là một nghiệm của phương trình $4.2^{2\log x}-6^{\log x}-18.3^{2\log x}=0$. Khẳng định nào sau đây đúng khi đánh giá về a?

A. $(a-10)^2=1$. **B.** $a=10^2$. **C.** $a^2+a+1=2$. **D.** $a=\frac{1}{100}$.

Câu 13. Tổng các nghiệm của phương trình sau $7^{x-1}=6\log_7(6x-5)+1$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 10.

Câu 14. Bất phương trình $9^x-2(x+5)3^x+9(2x+1)\ge 0$ có tập nghiệm là $S=[a;b]\cup[c;+\infty)$. Tính tổng $a+b+c$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 15. Phương trình $2^{\sin^2 x}+3^{\cos^2 x}=4.3^{\sin^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $[-2017;2017]$.

A. 1284. **B.** 4034. **C.** 1285. **D.** 4035.

Câu 16. Cho các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_6 x=\log_9 y=\log_4(2x+2y)$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$?

A. $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{x}{y}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}$. **C.** $\frac{x}{y}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}$. **D.** $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$.

Câu 17. Số nghiệm của phương trình $2^{\log_5(x+3)}=x$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 18. Phương trình $3^{3+3x}+3^{3-3x}+3^{4+x}+3^{4-x}=10^3$ có tổng các nghiệm là?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 19. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\sqrt{3^x+1}\le 3^{\frac{x}{2}}+\frac{2}{\sqrt{3^x+1}}$.

A. $(-\infty;0)\cup[\log_3 2;+\infty)$. **B.** $[0;\log_3 2)$.

C. $\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup[\sqrt{2};+\infty)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 20. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{25}\frac{x}{2}=\log_{15} y=\log_9\frac{x+y}{4}$ và $\frac{x}{y}=\frac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a, b là các số nguyên dương, tính $a+b$.

A. $a+b=14$. **B.** $a+b=3$. **C.** $a+b=21$. **D.** $a+b=34$.

Câu 21. Biết rằng phương trình $\log_2(1+x^{1009})=2018\log_3 x$ có nghiệm duy nhất x_0. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $3^{\frac{1}{1008}}<x_0<3^{\frac{1}{1006}}$. **B.** $x_0>3^{\frac{2}{1009}}$. **C.** $1<x_0<3^{\frac{1}{1008}}$. **D.** $3^{\frac{1}{1007}}<x_0<1$.

Câu 22. Phương trình $2\log_3(\cot x)=\log_2(\cos x)$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0;2018\pi)$?

A. 2018 nghiệm. **B.** 1008 nghiệm. **C.** 2017 nghiệm. **D.** 1009 nghiệm.

Câu 23. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log_3(2u_5-63)=2\log_4(u_n-8n+8)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Đặt $S_n=u_1+u_2+...+u_n$. Tìm số nguyên dương lớn nhất n thỏa mãn $\frac{u_n.S_{2n}}{u_{2n}.S_n}<\frac{148}{75}$.

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 19.

Câu 24. Số nghiệm của phương trình $\log_3\left|x^2-\sqrt{2}x\right|=\log_5\left(x^2-\sqrt{2}x+2\right)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 25. Tìm giá trị gần đúng tổng các nghiệm của bất phương trình sau:

$$\left(\sqrt{2\log_x^2\frac{22}{3}-2\log_x\frac{22}{3}+5}-\sqrt{13}+\sqrt{\frac{2}{\log_{\frac{22}{3}}^2 x}-\frac{4}{\log_{\frac{22}{3}} x}+4}\right)\left(24x^6-2x^5+27x^4-2x^3+1997x^2+2016\right)\le 0$$

A. $12,3$. **B.** 12. **C.** $12,1$. **D.** $12,2$.

Câu 26. Tìm tích tất cả các nghiệm của phương trình $4.3^{\log(100x^2)}+9.4^{\log(10x)}=13.6^{1+\log x}$.

A. 100. **B.** 10. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{10}$.

Câu 27. Tập nghiệm của bất phương trình $2.7^{x+2}+7.2^{x+2}\le 351.\sqrt{14^x}$ có dạng là đoạn $S=[a;b]$. Giá trị $b-2a$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(3;\sqrt{10}\right)$. **B.** $(-4;2)$. **C.** $\left(\sqrt{7};4\sqrt{10}\right)$. **D.** $\left(\frac{2}{9};\frac{49}{5}\right)$.

Câu 28. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(2^x-2\right)^2<\left(2^x+2\right)\left(1-\sqrt{2^x-1}\right)^2$ là

A. $S=(-\infty;0)$. **B.** $S=[1;+\infty)$. **C.** $S=[0;1)$. **D.** $S=[-3;+\infty)$.

Câu 29. Bất phương trình $2^{x^2+\sqrt{x-1}-1}+2\le 2^{x^2}+2^{\sqrt{x-1}}$ có tập nghiệm $S=[a;b]$. Khi đó $a+b$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 10.

Câu 30. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(5+\sqrt{21}\right)^x+\left(5-\sqrt{21}\right)^x\le 2^{x+\log_2 5}$ là

A. $S=(-2;1)$. **B.** $S=[-1;1]$. **C.** $S=(1;5]$. **D.** $S=(1;+\infty)$.

Câu 31. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y$?

A. 2019. **B.** 6. **C.** 2020. **D.** 4.

Câu 32. Có bao nhiêu cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $\log_{9x^2+y^2}(3x+y+9)\ge 1$?

A. 7. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 9.

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho tồn tại duy nhất cặp số thực (x,y) thỏa mãn $x^2+y^2=18$ và $x-y+m=\log_3(y-2m)-\log_3(x-m)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 34. Biết $x_1,x_2(x_1>x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $\log_3\left(\frac{x^2-2x+1}{3x}\right)+x^2+2=3x$ và $4x_1+2x_2=a+\sqrt{b}$, với a,b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$

A. $a+b=9$. **B.** $a+b=12$. **C.** $a+b=7$. **D.** $a+b=14$.

Câu 35. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $\log_2(4x+4)+x=y+1+2^y$?

A. 10. **B.** 11. **C.** 2020. **D.** 4.

Câu 36. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_2\left(x^2+4y^2\right)=\log_3(x+4y)$.

A. 3. **B.** Vô số. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 37. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn $0\le x\le 2020$ và $2\left(x+\ln(x+1)\right)+x^2+1=y+e^y$?

A. 0. **B.** 7. **C.** 1. **D.** 8.

Câu 38. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y)=\log_4\left(x^2+2y^2\right)$?

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** Vô số

Câu 39. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $1\le x\le 10^6$ và $\log\left(10x^2-20x+20\right)=10^{y^2}+y^2-x^2+2x-1$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 40. Có bao nhiêu số nguyên $y<10$ sao cho tồn tại số nguyên x thỏa mãn $5^{\sqrt{2}^y+x-2}+\sqrt{2}^y=5^{x^2-x-1}+(x-1)^2$?

A. 10 **B.** 1 **C.** 5 **D.** Vô số

Câu 41. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thoả mãn $1\le x\le 2020$ và $2^y+y=2x+\log_2\left(x+2^{y-1}\right)$

A. 2021. **B.** 10. **C.** 2020. **D.** 11.

Câu 42. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $2\log_2(x+y)-\log_2\left(1+\sqrt{3}\right)=\log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2-1\right)$

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 5

Câu 43. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le y\le 2020$ và $\log_3\left(\dfrac{2^x-1}{y}\right)=y+1-2^x$?

A. 2019. **B.** 11. **C.** 2020. **D.** 4.

Câu 44. Biết x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x$ và $x_1+2x_2=\dfrac{1}{4}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

A. $a+b=13$. **B.** $a+b=11$. **C.** $a+b=16$. **D.** $a+b=14$.

Câu 45. Biết phương trình $\log_5\dfrac{2\sqrt{x}+1}{x}=2\log_3\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ có một nghiệm dạng $x=a+b\sqrt{2}$ trong đó a,b là các số nguyên. Tính $2a+b$.

A. 3. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 46. Số nghiệm thực của phương trình $6^x=3\log_6(5x+1)+2x+1$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 47. Tính tổng S tất cả các nghiệm của phương trình $\ln\left(\dfrac{5^x+3^x}{6x+2}\right)+5^{x+1}+5.3^x-30x-10=0$.

A. $S=1$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=3$.

Câu 48. Số nghiệm của phương trình $\ln\dfrac{\sqrt{x^2+80}}{3^x}=2.3^{x+1}-2\sqrt{x^2+80}+\ln 3$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

B. BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ

① **Dạng 1. Tìm m để $f(t;m)=0$ có nghiệm (hoặc có k nghiệm) trên D?**

— Bước 1. Tách m ra khỏi biến số và đưa về dạng $f(t)=A(m)$.

— Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(t)$ trên D.

— Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên để xác định giá trị của tham số $A(m)$ để đường thẳng $y=A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y=f(t)$.

— Bước 4. Kết luận các giá trị cần tìm của $A(m)$ để phương trình $f(t)=A(m)$ có nghiệm (hoặc có k nghiệm) trên D.

Lưu ý

— Nếu hàm số $y=f(t)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên D thì giá trị $A(m)$ cần tìm là những m thỏa mãn: $\min_{t\in D} f(t)\le A(m)\le \max_{t\in D} f(t)$.

— Nếu bài toán yêu cầu tìm tham số để phương trình có k nghiệm phân biệt, ta chỉ cần dựa vào bảng biến thiên để xác định sao cho đường thẳng $y=A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y=f(t)$ tại k điểm phân biệt.

② **Dạng 2. Tìm m để bất phương trình $f(t;m)\ge 0$ hoặc $f(t;m)\le 0$ có nghiệm trên miền D?**

— Bước 1. Tách tham số m ra khỏi biến số t và đưa về dạng $A(m)\le f(t)$ hoặc $A(m)\ge f(t)$.

— Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(t)$ trên D.

— Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên xác định các giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm:

+ $A(m)\le f(t)$ có nghiệm trên $D \Leftrightarrow A(m)\le \max_{t\in D} f(t)$.

+ $A(m)\ge f(t)$ có nghiệm trên $D \Leftrightarrow A(m)\ge \min_{t\in D} f(t)$.

Lưu ý

— Bất phương trình $A(m)\le f(t)$ nghiệm đúng $\forall t\in D \Leftrightarrow A(m)\le \min_{t\in D} f(t)$.

— Bất phương trình $A(m)\ge f(t)$ nghiệm đúng $\forall t\in D \Leftrightarrow A(m)\ge \max_{t\in D} f(t)$.

Câu 1. Cho phương trình $\log_2^2(2x)-(m+2)\log_2 x+m-2=0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;2]$ là

A. $(1;2)$. **B.** $[1;2]$. **C.** $[1;2)$. **D.** $[2;+\infty)$.

Câu 2. Cho phương trình $\left(2\log_2^3 x-7\log_2^2 x+4\log_2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\sqrt{3^x-m}=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 78. **B.** 80. **C.** 81. **D.** 79.

Câu 3. Cho phương trình $\left(2\log_2^2 x-3\log_2 x-2\right)\sqrt{9^x+(1-m)3^x-m}=0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 3238. **B.** 3236. **C.** 3237. **D.** 3239.

Câu 4. Cho phương trình $\left(2\log_3^2 x-3\log_3 x-2\right)\sqrt{3^x-m.2^x}=0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 741. **B.** 742. **C.** 740. **D.** 703.

Câu 5. Cho phương trình $\left(2^{2\lg^2 x-\lg x}-4^{1+\lg x}\right)\sqrt{3^x-m}=0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng của phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất S bằng

A. $3^{100}+1$. **B.** $3^{100}-1$. **C.** 3^{99}. **D.** $3^{99}+1$.

Câu 6. Cho phương trình $\left(3.2^x.\log x-12\log x+2^x-4\right)\sqrt{5^x-m}=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 24. **B.** 25. **C.** 23. **D.** 22.

Câu 7. Cho phương trình $\log_2^2 x+3m\log_2(3x)+2m^2-2m-1=0$ (m là tham số thực). Tìm tất cả các số thực m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;9]$.

A. $-3\le m\le\frac{1}{2}$. **B.** $\forall m\ne 2$. **C.** $\varnothing$. **D.** $-\frac{1}{2}\le m\le\frac{1}{2}$.

Câu 8. Cho phương trình $\log_2^2 x+(m-3)\log_2 x-2m^2+3m=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có đúng một nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{1}{4};32\right]$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 9. Cho phương trình $9^x-(m+5)3^x+3m+6=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;2]$.

A. 6. **B.** 7. **C.** $\forall m\in R$. **D.** 1.

Câu 10. Cho phương trình $\log_2^2 x-\log_2 x^2-m^2-2m=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có đúng một nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{1}{8};16\right]$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 11. Cho phương trình $\log_2^2(2x)-2\log_2 x^2-m-1=0$.Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có đúng một nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2};16\right]$?

A. 10. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 12. Cho phương trình $\left(\log_2^2 x-\log_2 x^2-m^2+2m\right)\sqrt{3-\log_2 x}=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt $x\ge\frac{1}{8}$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 13. Cho phương trình $\left(1+\sqrt{2020^x}\right)^2-(m+2)\sqrt{2020^x}+m-2=0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;2]$ là

A. $[2;2021]$. **B.** $\forall m\in R$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(2;2021]$.

Câu 14. Cho phương trình $\left(\log_3^2 x+(m-3)\log_3 x-2m^2+3m\right)\sqrt{1-\log_{81} x}=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt $x\ge\frac{1}{27}$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 15. Cho phương trình $\log_{2021}^2(2021x)-(m+2)\log_{2021} x=2-m$ (m là tham số thực).
Tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[1;2021^3\right]$ là:

A. 10. **B.** 8. **C.** vô số. **D.** 13.

Câu 16. Cho phương trình $\left(\log_2^2 x-\log_2 x^2-m^2+2m\right)\sqrt{3-\log_2 x}=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $x\ge\frac{1}{8}$?

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 8.

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $9^{1+\sqrt{1-x^2}}-(m+2)3^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$ có nghiệm thực?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 18. Cho phương trình $\log_a x^2+2\log_a(x+2)=1$. Số giá trị nguyên của $a\in(0;2020)$ để phương trình trên có 1 nghiệm thực là

A. 0. **B.** 2018. **C.** 2019. **D.** 2020.

Câu 19. Cho phương trình $\log_{\sqrt{2}}\left(mx-6x^3\right)+2\log_{\frac{1}{2}}\left(-14x^2+29x-2\right)=0$, số giá trị nguyên của m để phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt là

A. 1. **B.** 0. **C.** 23. **D.** 5.

Câu 20. Phương trình $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0$ có nghiệm trên đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$ khi $m\in[a;b]$. Khi đó giá trị biểu thức $T=a.b$ bằng

A. 0. **B.** -1. **C.** $-\frac{1}{4}$. **D.** 4.

Câu 21. Phương trình $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0$ có nghiệm trên đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$ khi $m\in[a;b]$. Khi đó giá trị biểu thức $T=a.b$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** $-\frac{1}{4}$. **D.** 4.

Câu 22. Cho phương trình $\left(3\log_3^2 x-2\log_3 x-1\right)\sqrt{5^x-m}=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. Vô số. **B.** 120. **C.** 121. **D.** 124.

Câu 23. Cho phương trình $\log_4\left(x^2-2x+1\right)-\log_2(x-2)=1-\log_2 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 24. Tìm tập hợp tất cả giá trị của tham số thực m để phương trình $\log_2^2 x+4\log_2 x-m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $(-4;+\infty)$. **B.** $[-4;+\infty)$. **C.** $[-4;0)$. **D.** $[-2;0]$.

Câu 25. Cho phương trình $2020\left(-2\log_2^3 x+7\log_2^2 x+4\log_2(2x)\right)\sqrt{3^x-m}=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 79. **B.** 80. **C.** Vô số. **D.** 78.

Câu 26. Cho phương trình $\left(-2\log_3^2 x+3\log_3 x+2\right)\sqrt{5^x-m.3^x}=0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 4950. **B.** 2475. **C.** Vô số. **D.** 4949.

Câu 27. Cho phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2}+4m-4=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm thuộc $\left[\frac{5}{2};4\right]$.

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** Vô số.

Câu 28. Cho phương trình $\left(2\log_2^2 x-3\log_2 x-2\right)\sqrt{16^x+(1-m)4^x-m}=0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng ba nghiệm phân biệt. Tổng tất cả các phần tử của S là

A. 32637. **B.** 32640. **C.** 255. **D.** 256.

Câu 29. Giá trị lớn nhất của tham số m sao cho bất phương trình $1+\log_5\left(x^2+1\right)\geq\log_5\left(mx^2+4x+m\right)$ nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 4.

Câu 30. Giá trị lớn nhất của tham số m sao cho bất phương trình $1+\log_5\left(x^2+1\right)\ge \log_5\left(mx^2+4x+m\right)$ nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** 4.

Câu 31. Cho phương trình $\left(-\log_7^2 x+3\log_7 x-2\right)\sqrt{5^x-m}=0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng của phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất S bằng

A. 5^{49}. **B.** $5^{49}-1$. **C.** 5^{48}. **D.** $5^{49}+1$.

Câu 32. Cho phương trình $\left(2\log_2^2 x-5\log_2 x+2\right)\sqrt{5^x-m}=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 616. **B.** 615. **C.** vô số. **D.** 617.

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2019;2019]$ để phương trình $2019^x+\dfrac{2x-1}{x+1}+\dfrac{mx-2m-1}{x-2}=0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?

A. 4038. **B.** 2019. **C.** 2017. **D.** 4039.

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tồn tại cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $e^{3x+5y}-e^{x+3y+1}=1-2x-2y$, đồng thời thỏa mãn $\log_3^2(3x+2y-1)-(m+6)\log_3 x+m^2+9=0$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 35. Có bao nhiêu số nguyên của m để phương trình $\log_2(2x+m)-2\log_2 x=x^2-4x-2m-1$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4

Câu 36. Tìm tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}}+\left(x^3-9x^2+24x+m\right).3^{x-3}=3^x+1$ có 3 nghiệm phân biệt.

A. 45. **B.** 34. **C.** 27. **D.** 38.

Câu 37. Tìm các giá trị m để phương trình $3^{\sin x+\sqrt{5}\cos x-|m|+5}=\log_{\sin x+\sqrt{5}\cos x+10}\left(|m|+5\right)$ có nghiệm.

A. $\sqrt{6}\le m\le\sqrt{6}$. **B.** $-5\le m\le 5$. **C.** $5-\sqrt{6}\le|m|\le 5+\sqrt{6}$. **D.** $-\sqrt{6}\le m\le 5$.

Câu 38. Cho phương trình $2^x+m=\log_2(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-18;18)$ để phương trình đã cho có hai nghiệm?

A. 20. **B.** 17. **C.** 9. **D.** 21.

Câu 39. Cho phương trình

$$2^{-\left|\left|m^3\right|-3m^2+1\right|}.\log_{81}\left(\left|\left|x^3\right|-3x^2+1\right|+2\right)+2^{-\left|\left|x^3\right|-3x^2+1\right|-2}.\log_3\left(\frac{1}{\left|\left|m^3\right|-3m^2+1\right|+2}\right)=0$$

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị m nguyên để phương trình đã cho có 6 nghiệm hoặc 7 nghiệm hoặc 8 nghiệm phân biệt. Tính tổng bình phương tất cả các phần tử của tập S.

A. 20. **B.** 19. **C.** 14. **D.** 28.

Câu 40. Cho phương trình $2^{x^2}\log_2\left(x^2+2\right)=4^{|x+a|}\left[\log_2\left(2|x+a|\right)+2\right]$. Gọi S là tập hợp các giá trị a thuộc đoạn $[0;2020]$ và chia hết cho 3 để phương trình có hai nghiệm. Hãy tính tổng các phần tử của S.

A. 0. **B.** 2041210. **C.** 680403. **D.** 680430.

Câu 41. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số a để phương trình

$$4^{-|x-a|}\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-2x+3\right)+2^{-x^2+2x}\log_{\frac{1}{2}}\left(2|x-a|+2\right)=0$$

có 3 nghiệm thực phân biệt ?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 42. Tìm tổng tất cả các giá trị của tham số a để phương trình $3^{x^2-2x+1-2|x-a|}=\log_{x^2-2x+3}\left(2|x-a|+2\right)$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 43. Tìm số giá trị nguyên của m thuộc $[-20;20]$ để phương trình

$\log_2(x^2+m+x\sqrt{x^2+4})=(2m-9)x-1+(1-2m)\sqrt{x^2+4}$ có nghiệm.

A. 12. **B.** 23. **C.** 25. **D.** 10.

C. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Câu 1. Xét các số thực dương a,b,x,y thoả mãn $a>1, b>1$ và $a^x=b^y=\sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+2y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $\left[2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $[3;4)$. **D.** $\left[\frac{5}{2};3\right)$.

Câu 2. Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a>1$, $b>1$ và $a^x=b^y=\sqrt[4]{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+4y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $\left[2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $[1;2)$. **D.** $[0;1)$.

Câu 3. Xét các số thực a, b, $c\neq 0$ thỏa mãn $3^a=5^b=15^{-c}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2-4(a+b+c)$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $[-5;-1)$. **C.** $[2;4)$. **D.** $[4;6)$.

Câu 4. Xét các số thực dương a, b, c, x, y, z thỏa mãn $a>1$, $b>1$, $c>1$ và $a^x=b^y=c^z=\sqrt{abc}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y+z+\frac{1}{2}$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $[10;13)$. **B.** $[7;10)$. **C.** $[3;5)$. **D.** $[5;7)$.

Câu 5. Xét các số thực dương a,b,x,y thỏa mãn $a>1,b>1$ và $a^{x^2}=b^{y^2}=\sqrt{a.b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x.y$ là

A. $P=\frac{9}{4}$. **B.** $P=\frac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $P=\frac{3}{2}$. **D.** $P=\frac{4}{9}$.

Câu 6. Xét các số thực dương a,b,x,y thỏa mãn $a>1,b>1$ và $a^{\frac{x^2}{y}}=b^{\frac{y^2}{x}}=ab$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x.y$ là

A. $P=2$. **B.** $P=4$. **C.** $P=3$. **D.** $P=1$.

Câu 7. Xét các số thực dương a,b,c,x,y,z thỏa mãn $a>1,b>1,c>1,y>2$ và $a^{x+1}=b^{y-2}=c^{z+1}=abc$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y+z$ là

A. $P=13$. **B.** $P=3$. **C.** $P=9$. **D.** $P=1$.

Câu 8. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3\frac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=x+y$.

A. $P_{\min}=\frac{9\sqrt{11}-19}{9}$. **B.** $P_{\min}=\frac{9\sqrt{11}+19}{9}$. **C.** $P_{\min}=\frac{18\sqrt{11}-29}{9}$. **D.** $P_{\min}=\frac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

Câu 9. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\ln\frac{1-2x}{x+y}=3x+y-1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{xy}}+1$.

A. $P_{\min}=8$. **B.** $P_{\min}=16$. **C.** $P_{\min}=9$. **D.** $P_{\min}=2$.

Câu 10. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $3^{2x+3y}=\frac{3-3x-6y}{x+y}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=\frac{9}{4x}+\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{xy}}-\frac{1}{4}$.

A. $P_{\min}=2$. **B.** $P_{\min}=\frac{22+15\sqrt{3}}{2}$. **C.** $P_{\min}=20$. **D.** $P_{\min}=\frac{35+36\sqrt{2}}{4}$.

Câu 11. Cho hai số thực a, b thỏa $a>b>\frac{4}{3}$ và $P=16\log_a\left(\frac{a^3}{12b-16}\right)+3\log^2_{\frac{a}{b}}a$ có giá trị nhỏ nhất. Tính $a+b$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** 4. **C.** $\frac{11}{2}$. **D.** 6.

Câu 12. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $3^{xy-2x-y-1}=\frac{2x+y}{xy-1}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của biểu thức $S=x+4y$.

A. $S_{\min}=4\sqrt{3}+9$. **B.** $S_{\min}=6+4\sqrt{3}$. **C.** $S_{\min}=2\sqrt{3}-2$. **D.** $S_{\min}=4\sqrt{3}-6$.

Câu 13. Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $4+9.3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x+2y+18}{x}$ là

A. 9. **B.** $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$. **C.** $1+9\sqrt{2}$. **D.** 17.

Câu 14. Cho các số dương x, y thỏa mãn $\log_5\left(\frac{x+y-1}{2x+3y}\right)+3x+2y\le 4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=6x+2y+\frac{4}{x}+\frac{9}{y}$ bằng

A. $\frac{31\sqrt{6}}{4}$. **B.** $11\sqrt{3}$. **C.** $\frac{27\sqrt{2}}{2}$. **D.** 19.

Câu 15. Cho hai số thực x, y lớn hơn 1 và thỏa mãn $y^x.(e^x)^{e^y}\ge x^y.(e^y)^{e^x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_x\sqrt{xy}+\log_y x$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Câu 16. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0\le x, y\le 1$ trong đó x, y không đồng thời bằng 0 hoặc 1 và $\log_3\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+(x+1).(y+1)-2=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P với $P=2x+y$

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 0.

Câu 17. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\ln\left(\frac{1-2x}{x+y}\right)=3x+y-1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{xy}}$.

A. $P_{\min}=8$. **B.** $P_{\min}=4$. **C.** $P_{\min}=2$. **D.** $P_{\min}=16$.

Câu 18. Cho hai số thực x, y không âm thỏa mãn $x^2+2x-y+1=\log_2\frac{\sqrt{2y+1}}{x+1}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=e^{2x-1}+4x^2-2y+1$ là

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** -1.

Câu 19. Cho hai số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn đẳng thức $(xy-1).2^{2xy-1}=(x^2+y).2^{x^2+y}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $y_{\min}$ của y.

A. $y_{\min}=3$. **B.** $y_{\min}=2$. **C.** $y_{\min}=1$. **D.** $y_{\min}=\sqrt{3}$.

Câu 20. Cho $\begin{cases} x,y\in\mathbb{R} \\ x,y\geq 1 \end{cases}$ sao cho $\ln\left(2+\frac{x}{y}\right)+x^3-\ln 3=19y^3-6xy(x+2y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $T=x+\frac{1}{x+3y}$.

A. $m=1+\sqrt{3}$. **B.** $m=2$. **C.** $m=\frac{5}{4}$. **D.** $m=1$.

Câu 21. Cho $x;y$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $5^{x+4y}+\frac{3}{3^{xy}}+x+1=\frac{5^{xy}}{5}+3^{-x-4y}+y(x-4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y$.

A. 3. **B.** $5+2\sqrt{5}$. **C.** $3-2\sqrt{5}$. **D.** $1+\sqrt{5}$.

Câu 22. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $5^{x+2y}+\frac{3}{3^{xy}}+x+1=\frac{5^{xy}}{5}+3^{-x-2y}+y(x-2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x+y$.

A. $T_{\min}=2+3\sqrt{2}$. **B.** $T_{\min}=3+2\sqrt{3}$. **C.** $T_{\min}=1+\sqrt{5}$. **D.** $T_{\min}=5+3\sqrt{2}$.

Câu 23. Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_3\frac{x-3y}{xy+1}=xy+3y-x+1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x+\frac{1}{y}$.

A. $A_{\min}=\frac{14}{3}$. **B.** $A_{\min}=-\frac{14}{3}$. **C.** $A_{\min}=-6$. **D.** $A_{\min}=6$.

Câu 24. Cho $x,y>0$ thỏa $2019^{2(x^2-y+2)}-\frac{4x+y+2}{(x+2)^2}=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=2y-4x$.

A. 2018. **B.** 2019. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Câu 25. Cho 2 số thực dương x,y thỏa mãn $\log_3\left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1}=9-(x-1)(y+1)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+2y$ là

A. $P_{\min}=\frac{11}{2}$. **B.** $P_{\min}=\frac{27}{5}$. **C.** $P_{\min}=-5+6\sqrt{3}$. **D.** $P_{\min}=-3+6\sqrt{2}$.

Câu 26. Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_3\frac{1-y}{x+3xy}=3xy+x+3y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=x+y$.

A. $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}+4}{3}$. **B.** $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}$. **C.** $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{9}$. **D.** $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}+4}{9}$.

Câu 27. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P=\dfrac{3x+2y+1}{x+y+6}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 28. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $2018^{2(x^2-y+1)}=\dfrac{2x+y}{(x+1)^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=2y-3x$.

A. $P_{\min}=\dfrac{1}{2}$. **B.** $P_{\min}=\dfrac{7}{8}$. **C.** $P_{\min}=\dfrac{3}{4}$. **D.** $P_{\min}=\dfrac{5}{6}$.

Câu 29. Cho 2 số thực dương x,y thỏa mãn $\log_3\left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1}=9-(x-1)(y+1)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+2y$ là

A. $P_{\min}=\dfrac{11}{2}$. **B.** $P_{\min}=\dfrac{27}{5}$. **C.** $P_{\min}=-5+6\sqrt{3}$. **D.** $P_{\min}=-3+6\sqrt{2}$.

Câu 30. Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $\log_2 x+x(x+y)\ge\log_2(6-y)+6x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3x+2y+\dfrac{6}{x}+\dfrac{8}{y}$ bằng

A. $\dfrac{59}{3}$. **B.** 19. **C.** $\dfrac{53}{3}$. **D.** $8+6\sqrt{2}$.

Câu 31. Cho x,y là các số dương thỏa mãn $\log_2\dfrac{x^2+5y^2}{x^2+10xy+y^2}+1+x^2-10xy+9y^2\le 0$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P=\dfrac{x^2+xy+9y^2}{xy+y^2}$. Tính $T=10M-m$.

A. $T=60$. **B.** $T=94$. **C.** $T=104$. **D.** $T=50$.

Câu 32. Vậy $A_{\min}=6$.Cho các số thực dương x và y thỏa mãn $4+9.3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x+2y+18}{x}$.

A. $P=9$. **B.** $P=\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$.

C. $P=1+9\sqrt{2}$. **D.** Hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 33. Cho x,y là các số thực lớn hơn 1 sao cho $y^x\left(e^x\right)^{e^y}\ge x^y\left(e^y\right)^{e^x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\log_x\sqrt{xy}+\log_y x$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Câu 34. Tính giá trị của biểu thức $P=x^2+y^2-xy+1$ biết rằng $4^{x^2+\frac{1}{x^2}-1}=\log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]$ với $x\ne 0$ và $-1\le y\le\dfrac{13}{2}$.

A. $P=4$. **B.** $P=2$. **C.** $P=1$. **D.** $P=3$.

Câu 35. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0\le x\le\dfrac{1}{2}$, $0\le y\le\dfrac{1}{2}$ và $\log(11-2x-y)=2y+4x-1$. Xét biểu thức $P=16yx^2-2x(3y+2)-y+5$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của P. Khi đó giá trị của $T=(4m+M)$ bằng bao nhiêu?

A. 16. **B.** 18. **C.** 17. **D.** 19.

--------------------- **HẾT** ---------------------

Vấn đề 10 PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PHƯƠNG TRÌNH - MIN MAX LOGARIT

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH – BPT MŨ -LOGARIT

Thường sử dụng các phương pháp sau:

1. Phương pháp đưa về cùng cơ số.

1/ Phương trình – Bất phương trình mũ cơ bản

□ <u>Phương trình mũ</u>

+ Nếu $a>0,\ a\neq 1$ thì $a^{f(x)}=a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)$

+ Nếu a chứa ẩn thì $a^{f(x)}=a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)\left[f(x)-g(x)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ f(x)=g(x) \end{array}\right.$.

+ $a^{f(x)}=b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)}=\log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=\log_a b.g(x)$ (**logarit hóa**).

□ <u>Bất phương trình mũ</u>

+ Nếu $a>1$ thì $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x)$. (cùng chiều)

+ Nếu $0<a<1$ thì $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x)$. (ngược chiều)

+ Nếu a chứa ẩn thì $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)\left[f(x)-g(x)\right]>0$.

2/ Phương trình logarit – Bất phương trình logarit cơ bản

□ <u>Phương trình logarit</u>

+ Nếu $a>0,\ a\neq 1$: $\boxed{\log_a x=b \Leftrightarrow x=a^b}$ (1)

+ Nếu $a>0,\ a\neq 1$: $\boxed{\log_a f(x)=\log_a g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)}$ (2)

+ Nếu $a>0,\ a\neq 1$: $\boxed{\log_a f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)=a^{g(x)}}$ (**mũ hóa**) (3)

□ <u>Bất phương trình logarit</u>

+ Nếu $a>1$ thì $\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow f(x)>g(x)$ (cùng chiều)

+ Nếu $0<a<1$ thì $\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow f(x)<g(x)$ (ngược chiều)

+ Nếu a chứa ẩn thì $\left[\begin{array}{l} \log_a B>0 \Leftrightarrow (a-1)(B-1)>0 \\ \dfrac{\log_a A}{\log_a B}>0 \Leftrightarrow (A-1)(B-1)>0 \end{array}\right.$.

Các bước giải phương trình & bất phương trình mũ – logarit

□ **Bước 1**. Đặt điều kiện (điều kiện đại số $+$ điều kiện loga), ta cần chú ý:

$$\log_a b \xrightarrow{\text{ĐK}} \begin{cases} 0<a\neq 1 \\ b>0 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} \log_a\left[f(x)\right] \xrightarrow[\text{ĐK}]{\text{mũ lẻ}} f(x)>0 \\ \log_a\left[f(x)\right] \xrightarrow[\text{ĐK}]{\text{mũ chẵn}} f(x)\neq 0 \end{cases}.$$

□ **Bước 2**. Dùng các công thức và biến đổi đưa về các cơ bản trên, rồi giải.

□ **Bước 3**. So với điều kiện và kết luận nghiệm.

2. Phương pháp đặt ẩn phụ.

I/ Đặt ẩn phụ cho phương trình mũ

① Loại 1. $P\left(a^{f(x)}\right)=0 \xrightarrow{PP}$ đặt $t=a^{f(x)},\ t>0$.

② Loại 2. $\alpha.a^{2.f(x)}+\beta.(a.b)^{f(x)}+\lambda.b^{2.f(x)}=0 \xrightarrow{PP}$ Chia hai vế cho $b^{2.f(x)}$, rồi đặt $t=\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}>0$ (chia cho cơ số lớn nhất hoặc nhỏ nhất).

③ Loại 3. $a^{f(x)}+b^{f(x)}=c$ với $a.b=1 \xrightarrow{PP}$ đặt $t=a^{f(x)} \Rightarrow b^{f(x)}=\frac{1}{t}$.

④ Loại 4. $\alpha.a^{f(x)}+\left[\begin{array}{l} a^{f(x)}.a^{g(x)} \\ \dfrac{a^{f(x)}}{a^{g(x)}} \end{array}\right.+\beta.a^{g(x)}+b=0 \xrightarrow{PP}$ đặt $\begin{cases} u=a^{f(x)} \\ v=a^{g(x)} \end{cases}$.

II/ Đặt ẩn phụ cho phương trình logarit

① Loại 1. $P\left(\log_a f(x)\right)=0 \xrightarrow{PP}$ đặt $t=\log_a f(x)$.

② Loại 2. Sử dụng công thức $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$ để đặt $t=a^{\log_b x} \Rightarrow t=x^{\log_b a}$.

Lưu ý

Trên đây là một số dạng cơ bản thường gặp về phương trình mũ và loga, còn bất phương trình ta cũng làm tương tự nhưng lưu ý về chiều biến thiên. Về phương diện tổng quát, ta đi tìm mối liên hệ giữa biến để đặt ẩn phụ, đưa về phương trình (bất phương trình) đại số hoặc hệ phương trình đại số mà đã biết cách giải. Từ đó, tìm ra được nghiệm. Ngoài ra, còn một số trường hợp đặt ẩn phụ không hoàn toàn. Nghĩa là sau khi đặt ẩn phụ t vẫn còn x. Ta giải phương trình theo t với x được xem như là hằng số bằng cách lập biệt thức Δ hoặc đưa về tích số.

3. Phương pháp hàm số.

I/ Cơ sở lý thuyết và vận dụng cơ sở lý thuyết để tìm hướng giải

Thông thường ta sẽ vận dụng nội dung các định lý (và các kết quả) sau:

① Nếu hàm số $y=f(x)$ đơn điệu một chiều trên D thì phương trình $f(x)=0$ không quá một nghiệm trên D.

$\longrightarrow$ Để vận dụng định lý này, ta cần nhẩm được 1 nghiệm $x=x_o$ của phương trình, rồi chỉ rõ hàm đơn điệu một chiều trên D (luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên D) và kết luận $x=x_o$ là nghiệm duy nhất.

② Hàm số $f(t)$ đơn điệu một chiều trên khoảng $(a;b)$ và tồn tại $u;\ v\in(a;b)$ thì $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$ ".

$\longrightarrow$ Để áp dụng định lý này, ta cần xây dựng hàm đặc trưng $f(t)$.

③ Hàm số $y=f(t)$ xác định và liên tục trên D:

Nếu $f(t)$ đồng biến trên D và $\forall u,v\in D$ thì $f(u)>f(v)\Leftrightarrow u>v$.

Nếu $f(t)$ nghịch biến trên D và $\forall u,v\in D$ thì $f(u)>f(v)\Leftrightarrow u<v$.

$\longrightarrow$ Để vận dụng nội dung định lí này trong giải bất phương trình, người ra đề thường cho dưới hai hình thức và có hai hướng xử lí thường gặp sau:

□ Nếu đề yêu cầu giải $f(x)>0$:

Nhẩm nghiệm của $f(x)=0$ trên miền xác định D, chẳng hạn $x=x_o$.

Xét hàm số $y=f(x)$ trên D và chỉ rõ nó đơn điệu tăng một chiều (đơn điệu giảm một chiều). Khi đó:

$f(x)>0 \Leftrightarrow f(x)>f(x_o) \Leftrightarrow x>x_o$ nếu hàm số đơn điệu tăng trên D và $x<x_o$ nếu hàm số đơn điệu giảm trên D.

□ Nếu đề bài yêu cầu giải $f(x)>0$ mà không nhẩm được nghiệm $x=x_o$ của $f(x)=0$ thì cần biến đổi $f(x)>0 \Leftrightarrow f[g(x)]>f[h(x)]$ với việc xây dựng hàm đặc trưng $y=f(t)$, rồi chỉ ra hàm $f(t)$ là đồng biến (nghịch biến). Khi đó $f[g(x)]>f[h(x)] \Leftrightarrow g(x)>f(x)$ $[\text{hay } g(x)<f(x)]$.

Ta sẽ làm tương tự nếu đề cho $f(x)<0,\ f(x)\ge 0$ hoặc $f(x)\le 0$.

④ Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục và thỏa mãn $f'(x)=0$ có một nghiệm trên D thì phương trình $f(x)=0$ không quá 2 nghiệm trên D.

II/ Một số loại toán cơ bản thường gặp khi sử dụng đơn điệu hàm

① **Loại 1**. $\boxed{\log_a \frac{f(x)}{g(x)}=\beta.[g(x)-f(x)]}$ (1)

□ Tìm tập xác định D.

□ Biến đổi $(1) \Leftrightarrow \log_a f(x)-\log_a g(x)=\beta.g(x)-\beta.f(x)$

$\Leftrightarrow \log_a f(x)+\beta.f(x)=\log_a g(x)+\beta.g(x) \Leftrightarrow f[f(x)]=f[g(x)]$.

□ Xét hàm số đặc trưng $f(t)=\beta.t+\log_a t$ trên miền D và chỉ ra hàm số này luôn đơn điệu một chiều trên D và $f[f(x)]=f[g(x)] \Leftrightarrow f(x)=g(x)$.

② **Loại 2**. $\boxed{\log_a f(x)=\log_b g(x)}$ (2)

□ Nếu $a=b$ thì $(2) \Leftrightarrow f(x)=g(x)$: đây là dạng toán khá quen thuộc.

□ Nếu $(a-1)(b-1)<0 \xrightarrow{PP}$ Dùng phương pháp đoán nghiệm và chứng minh đó là nghiệm duy nhất.

□ Nếu $(a-1)(b-1)>0 \xrightarrow{PP}$ Đặt ẩn phụ kết hợp mũ hóa phương trình.

Tìm tập xác định D và đặt $\log_a f(x)=\log_b g(x)=t \Rightarrow \begin{cases} f(x)=a^t \\ g(x)=b^t \end{cases}$ và biến đổi phương trình về dạng: $f(t)=A^t+B^t=1$ và giải bằng phương pháp đoán nghiệm và chứng minh nghiệm này duy nhất và tìm x khi biết t.

✍ Dạng toán: $\boxed{\alpha.\log_a f(x)=\beta.\log_b g(x)}$ ta cũng làm tương tự bằng cách đặt $\alpha\log_a f(x)=\beta\log_b g(x)=\gamma.t$ với γ là bội số chung nhỏ nhất của α và β.

③ **Loại 3**. $\boxed{\log_{f(x)} g(x)=\log_a b}$ (3)

□ Đặt điều kiện: $f(x)>0$ và $0<g(x)\ne 1$.

□ Sử dụng công thức đổi cơ số thì $(3) \Leftrightarrow \dfrac{\log_b f(x)}{\log_b g(x)} = \log_a b$

$\Leftrightarrow \log_b f(x) = \log_a b.\log_b g(x) \Leftrightarrow \log_b f(x) = \log_a g(x)$ (đây là loại 2).

④ **Loại 4**. $\boxed{a^{\alpha x+\beta} = p\log_a(\lambda x+\mu)+qx+r}$ (4)

$\xrightarrow{PP}$ Đặt ẩn phụ $\log_a(\lambda x+\mu) = y$ để đưa về hệ phương trình đối xứng loại II hay gần đối xứng và sử dụng phương pháp hàm để tìm được $x = y$.

Phương trình dạng $\log_a f(x,y) = \log_b g(x,y)$.

Phương pháp: đặt $t = \log_a f(x,y) = \log_b g(x,y)$ và chuyển về hệ $\begin{cases} f(x,y) = a^t \\ g(x,y) = b^t \end{cases}$ và đánh giá chặn giá trị t. Từ đó chọn giá trị nguyên của x thích hợp và thử lại xem với giá trị nguyên của x đã chọn thì hệ phương trình có nghiệm t trong miền đã chặn hay không?

Kiến thức để đánh giá chặn giá trị t:

+ Điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2.

+ Bất đẳng thức Cauchy, BCS…

+ Tính chất biến thiên của hàm số.

Câu 1. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(2x+y)$. Giá trị của $\dfrac{x}{y}$ bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\log_2\left(\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $\log_{\frac{3}{2}} 2$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \log_9 x = \log_6 y = \log_4(2x+y)$. Khi đó $\begin{cases} x = 9^t \\ y = 6^t \\ 2x+y = 4^t \end{cases} \Rightarrow 2.9^t + 6^t = 4^t$

$\Leftrightarrow 2.\left(\dfrac{9}{4}\right)^t + \left(\dfrac{3}{2}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{3}{2}\right)^t = -1 \\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^t = \dfrac{1}{2}$.

Do đó: $\dfrac{x}{y} = \left(\dfrac{9}{6}\right)^t = \left(\dfrac{3}{2}\right)^t = \dfrac{1}{2}$.

Câu 2. Biết $x_1; x_2$ $(x_1 < x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $\log_2\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{x}\right) = 6x - 4x^2$ và $x_1 + 2x_2 = \dfrac{1}{4}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với a,b là các số nguyên dương. Giá trị $P = a+b$ là

A. $P = 14$. **B.** $P = 13$. **C.** $P = 15$. **D.** $P = 16$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\frac{4x^2-4x+1}{x}>0 \Leftrightarrow \frac{(2x-1)^2}{x}>0 \Leftrightarrow x>0, x\neq \frac{1}{2}$.

$\log_2 \frac{4x^2-4x+1}{x}=6x-4x^2 \Leftrightarrow \log_2(2x-1)^2-\log_2 x=-(2x-1)^2+2x+1$

$\Leftrightarrow \log_2(2x-1)^2+(2x-1)^2=\log_2(2x)+2x \quad (1)$.

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=\frac{1}{\ln 2.t}+1>0$ với $t>0$ suy ra $f(t)=\log_3 t+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Xét $x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$, từ (1) ta có

$$f\left((2x-1)^2\right)=f(2x)\Leftrightarrow(2x-1)^2=2x\Leftrightarrow 4x^2-6x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{3+\sqrt{5}}{4}(l) \\ x=\frac{3-\sqrt{5}}{4}\end{array}\right..$$

Xét $x\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$, từ (1) ta có

$$f\left((2x-1)^2\right)=f(2x)\Leftrightarrow(2x-1)^2=2x\Leftrightarrow 4x^2-6x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{3+\sqrt{5}}{4} \\ x=\frac{3-\sqrt{5}}{4}(l)\end{array}\right..$$

Do đó, phương trình $\log_2\left(\frac{4x^2-4x+1}{x}\right)=6x-4x^2$ có hai nghiệm phân biệt

$x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{4}; x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{4}$.

Suy ra $x_1+2x_2=\frac{1}{4}\left(9+\sqrt{5}\right)$. Suy ra $a=9, b=5\Rightarrow P=a+b=14$.

Câu 3. Biết $a=\log_{30}10$, $b=\log_{30}150$ và $\log_{2000}15000=\frac{x_1a+y_1b+z_1}{x_2a+y_2b+z_2}$ với $x_1;y_1;z_1;x_2;y_2;z_2$ là các số nguyên, tính $S=\frac{x_1}{x_2}$.

A. $S=\frac{1}{2}$. **B.** $S=2$. **C.** $S=\frac{2}{3}$. **D.** $S=1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_{2000}15000=\frac{\log_{30}15000}{\log_{30}2000}=\frac{\log_{30}150+2\log_{30}10}{\log_{30}2+3\log_{30}10} \quad (1)$

Ta có $a=\log_{30}10=\log_{30}5+\log_{30}2\Rightarrow\log_{30}2=a-\log_{30}5 \quad (2)$

$b=\log_{30}150=1+\log_{30}5\Rightarrow\log_{30}5=b-1$ thay vào (2) ta được $\log_{30}2=a-b+1$

Ta có $\log_{2000}1500=\frac{b+2a}{a-b+1+3a}=\frac{2a+b}{4a-b+1}$

Suy ra $S=\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 4. Cho các số thực dương x, y khác 1 và thỏa mãn $\begin{cases}\log_x y=\log_y x\\ \log_x(x-y)=\log_y(x+y)\end{cases}$.

Giá trị của x^2+xy-y^2 bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

ĐK: $x>y$.

Ta có $\begin{cases}\log_x y=\log_y x\\ \log_x(x-y)=\log_y(x+y)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_x y=\dfrac{1}{\log_x y}\\ \log_x(x-y)=\log_y(x+y)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{1}{x}\\ x=y\end{array}\right.\\ \log_x(x-y)=\log_{x^{-1}}(x+y)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{1}{x}\\ \log_x(x-y)+\log_x(x+y)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{1}{x}\\ \log_x(x^2-y^2)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy=1\\ x^2-y^2=1\end{cases} \Rightarrow x^2+xy-y^2=2$.

Câu 5. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\sqrt{\log a}+\sqrt{\log b}+\log\sqrt{a}+\log\sqrt{b}=100$ và $\sqrt{\log a}$, $\sqrt{\log b}$, $\log\sqrt{a}$, $\log\sqrt{b}$ đều là các số nguyên dương. Tính $P=ab$.

A. 10^{164}. **B.** 10^{100}. **C.** 10^{200}. **D.** 10^{144}.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\sqrt{\log a}+\sqrt{\log b}+\log\sqrt{a}+\log\sqrt{b}=100$

$\Leftrightarrow \log a+\log b+2\sqrt{\log a}+2\sqrt{\log b}=200 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\log a}+1\right)^2+\left(\sqrt{\log b}+1\right)^2=202=81+121$ (*)

Mà $\sqrt{\log a}$, $\sqrt{\log b}$, $\log\sqrt{a}$, $\log\sqrt{b}$ đều là các số nguyên dương nên

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{\log a}+1=9\\ \sqrt{\log b}+1=11\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{\log a}+1=11\\ \sqrt{\log b}+1=9\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log a=64\\ \log b=100\end{cases}\\ \begin{cases}\log a=100\\ \log b=64\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=10^{64}\\ b=10^{100}\end{cases}\\ \begin{cases}a=10^{100}\\ b=10^{64}\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy: $P=ab=10^{64}.10^{100}=10^{164}$.

Câu 6. Cho $\log_9 5=a$; $\log_4 7=b$; $\log_2 3=c$ .Biết $\log_{24}175=\dfrac{mb+nac}{pc+q}$ .Tính $A=m+2n+3p+4q$

A. 27 **B.** 25 **C.** 23 **D.** 29

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_{24}175=\log_{24}7.5^2=\log_{24}7+2\log_{24}5=\dfrac{1}{\log_7 24}+\dfrac{2}{\log_5 24}=$

$$\frac{1}{\log_7 3+\log_7 2^3}+\frac{2}{\log_5 3+\log_5 2^3}=\frac{1}{\frac{1}{\log_3 7}+\frac{3}{\log_2 7}}+\frac{2}{\frac{1}{\log_3 5}+\frac{3}{\log_2 5}}=$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\log_2 7.\log_3 2}+\frac{3}{\log_2 7}}+\frac{2}{\frac{1}{\log_3 5}+\frac{3}{\log_2 3.\log_3 5}}=\frac{1}{\frac{1}{2b.\frac{1}{c}}+\frac{3}{2b}}+\frac{2}{\frac{1}{2a}+\frac{3}{c.2a}}=$$

$$\frac{1}{\frac{c}{2b}+\frac{3}{2b}}+\frac{2}{\frac{c}{2ac}+\frac{3}{2ac}}=\frac{2b}{c+3}+\frac{4ac}{c+3}=\frac{2b+4ac}{c+3}.$$

$A=m+2n+3p+4q=2+8+3+12=25.$

Câu 7. Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 thoả mãn $x^2-6y^2=xy$. Tính $M=\dfrac{1+\log_{12}x+\log_{12}y}{2\log_{12}(x+3y)}$.

A. $M=\dfrac{1}{4}$. **B.** $M=1$. **C.** $M=\dfrac{1}{2}$. **D.** $M=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x^2-6y^2=xy\Leftrightarrow x^2-xy-6y^2=0\,(*)$.

Do x, y là các số thực dương lớn hơn 1 nên ta chia cả 2 vế của $(*)$ cho y^2 ta

được $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-\dfrac{x}{y}-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{y}=3\\ \dfrac{x}{y}=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3y\,(n)\\ x=-2y\,(l)\end{array}\right.$

Vậy $x=3y$ (1).

Mặt khác $M=\dfrac{1+\log_{12}x+\log_{12}y}{2\log_{12}(x+3y)}=\dfrac{\log_{12}12xy}{\log_{12}(x+3y)^2}$ (2).

Thay (1) vào (2) ta có $M=\dfrac{\log_{12}36y^2}{\log_{12}36y^2}=1$.

Câu 8. Cho $f(x)=a\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+b\sin x+6$ với a, $b\in\mathbb{R}$. Biết $f(\log(\log e))=2$. Tính $f(\log(\ln 10))$.

A. 4. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Đặt $x_0=\log(\log e)$

Có: $f(x_0)=a\ln\left(x_0+\sqrt{x_0^2+1}\right)+b\sin x_0+6=2$

Ta có $f\left(\log\left(\ln 10\right)\right)=f\left[\log\left(\dfrac{1}{\log e}\right)\right]=f\left(-\log\left(\log e\right)\right)=f\left(-x_0\right)$

$f\left(-x_0\right)=a\ln\left(\sqrt{x_0^2+1}-x_0\right)+b\sin\left(-x_0\right)+6=-a\ln\left(x_0+\sqrt{x_0^2+1}\right)-b\sin x_0+6$

$=-\left[a\ln\left(x_0+\sqrt{x_0^2+1}\right)+b\sin x_0+6\right]+12=-f\left(x_0\right)+12=10$.

Câu 9. Cho $9^x+9^{-x}=14$ và $\dfrac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3^{x+1}-3^{1-x}}=\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P=a.b.$

A. $P=10.$ **B.** $P=-45.$ **C.** $P=-10.$ **D.** $P=45.$

Lời giải

Chọn B

Ta có

$9^x+9^{-x}=14\Leftrightarrow 3^{2x}+2.3^{2x}.3^{-2x}+3^{-2x}=16$

$\Leftrightarrow\left(3^x+3^{-x}\right)^2=16\Leftrightarrow 3^x+3^{-x}=4.$

$\dfrac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3^{x+1}-3^{1-x}}=\dfrac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3.3^x-3.3^{-x}}=\dfrac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3.\left(3^x+3^{-x}\right)}$

$=\dfrac{6+3.4}{2-3.4}=-\dfrac{18}{10}\Rightarrow\dfrac{a}{b}=-\dfrac{9}{5}\Rightarrow ab=-45.$

Câu 10. Biết phương trình $27^x-27^{1-x}-16\left(3^x-\dfrac{3}{3^x}\right)+6=0$ có các nghiệm $x=a$, $x=\log_3 b$ và $x=\log_3 c$ với $a\in\mathbb{Z}$, $b>c>0$. Tỉ số $\dfrac{b}{c}$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{5}{2};3\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$27^x-27^{1-x}-16\left(3^x-\dfrac{3}{3^x}\right)+6=0\Leftrightarrow 3^{3x}-27.3^{-3x}-16\left(3^x-3.3^{-x}\right)+6=0\ (1)$

Đặt $t=3^x-3.3^{-x}\Rightarrow t^3=3^{3x}-27.3^{-3x}-3\left(3^{3x}-3.3^{-3x}\right).3^{3x}.3.3^{-3x}$

$=3^{3x}-27.3^{-3x}-9\left(3^{3x}-3.3^{-3x}\right)$

Khi đó $(1)\Rightarrow t^3-7t+6=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-3\\t=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}3^x-3.3^{-x}=1\\3^x-3.3^{-x}=-3\\3^x-3.3^{-x}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^{2x}-3^x-3=0\\3^{2x}+3.3^x-3=0\\3^{2x}-2.3^x-3=0\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = \dfrac{\sqrt{13}+1}{2} \\ 3^x = \dfrac{\sqrt{21}-3}{2} \\ 3^x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_3 \dfrac{\sqrt{13}+1}{2} \\ x = \log_3 \dfrac{\sqrt{21}-3}{2} \\ x = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{13}+1}{\sqrt{21}-3} \approx 2.9.$$

Câu 11. Cho hai số thực dương a,b thỏa $\log_4 a = \log_6 b = \log_9 (a+b)$. Tính $\dfrac{a}{b}$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Lờigiải

Chọn D

Đặt $t = \log_4 a = \log_6 b = \log_9 (a+b)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4^t \\ b = 6^t \\ a+b = 9^t \end{cases} \Rightarrow 4^t + 6^t = 9^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2t} + \left(\frac{2}{3}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{2}{3}\right)^t = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^t = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} (L) \end{array}\right..$$

$$\frac{a}{b} = \frac{4^t}{6^t} = \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Câu 12. Gọi a là một nghiệm của phương trình $4.2^{2\log x} - 6^{\log x} - 18.3^{2\log x} = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng khi đánh giá về a?

A. $(a-10)^2 = 1$. **B.** $a = 10^2$. **C.** $a^2 + a + 1 = 2$. **D.** $a = \dfrac{1}{100}$.

Lờigiải

Chọn D

Điều kiện $x > 0$.

Chia cả hai vế của phương trình cho $3^{2\log x}$ ta được $4\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2\log x} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\log x} - 18 = 0$.

Đặt $t = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\log x}$, $t > 0$.

Ta có $4t^2 - t - 18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{9}{4} \\ t = -2 (L) \end{array}\right.$.

Với $t = \dfrac{9}{4} \Rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\log x} = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow \log x = -2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{100}$.

Vậy $a = \dfrac{1}{100}$.

Câu 13. Tổng các nghiệm của phương trình sau $7^{x-1} = 6\log_7 (6x-5) + 1$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 10.

Lờigiải

Chọn B

Điều kiện: $x > \frac{5}{6}$.

Đặt $y-1=\log_7(6x-5)$ thì ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 7^{x-1}=6(y-1)+1 \\ y-1=\log_7(6x-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7^{x-1}=6y-5 \\ 7^{y-1}=6x-5 \end{cases} \Rightarrow 7^{x-1}+6x=7^{y-1}+6y\,(2)$$

Xét hàm số $f(t)=7^{t-1}+6t$ với $t>\frac{5}{6}$ thì $f'(t)=7^{t-1}\ln 7+6>0, \forall t>\frac{5}{6} \Rightarrow f(t)$ đồng biến nên

$(2) \Leftrightarrow f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$ khi đó ta có phương trình $7^{x-1}-6x+5=0$. (3)

Xét hàm số $g(x)=7^{x-1}-6x+5$ với $x>\frac{5}{6}$ thì $g'(x)=7^{x-1}\ln 7-6 \Rightarrow g''(x)=7^{x-1}(\ln 7)^2>0 \ \ \forall x>\frac{5}{6}$

nên suy ra phương trình $g(x)=0$ có không quá hai nghiệm.

Mặt khác $g(1)=g(2)=0$ nên $x=1$ và $x=2$ là 2 nghiệm của phương trình (3).

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=1$ và $x=2$.

Suy ra tổng các nghiệm của phương trình là $1+2=3$.

Câu 14. Bất phương trình $9^x-2(x+5)3^x+9(2x+1)\geq 0$ có tập nghiệm là $S=[a;b]\cup[c;+\infty)$. Tính tổng $a+b+c$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lờigiải

Chọn D

Đặt $t=3^x$, $t>0$.

Bất phương trình đã cho trở thành:

$t^2-2(x+5)t+9(2x+1)\geq 0 \Leftrightarrow (t-9)(t-2x-1)\geq 0$

TH1: $\begin{cases} t-9\geq 0 \\ t-2x-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\geq 9 \\ t-2x-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x\geq 9 & (1) \\ 3^x-2x-1\geq 0 & (2) \end{cases}$

Xét bất phương trình (2):

Đặt $g(x)=3^x-2x-1$ trên $\mathbb{R}$.

$g'(x)=3^x\ln 3-2$.

Gọi x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình $g'(x)=0$, $x_0>0$

Khi đó, $g(x)=0$ có nhiều nhất hai nghiệm.

Xét thấy, $g(x)=0$ có hai nghiệm là $x=0$ và $x=1$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		x_0		1		$+\infty$
$g'(x)$			$-$		0		$+$		
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$g(x_0)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có, $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 0 \\ x \ge 1 \end{array}\right.$

Ta lại có, $(1) \Leftrightarrow x \ge 2$.

Kết hợp (1) và (2) suy ra, $x \ge 2$. $(*)$

TH2: $\begin{cases} t-9 \le 0 \\ t-2x-1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \le 9 \\ t-2x-1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \le 9 & (3) \\ 3^x - 2x - 1 \le 0 & (4) \end{cases}$

Xét bất phương trình (4):

Đặt $g(x) = 3^x - 2x - 1$ trên $\mathbb{R}$.

$g'(x) = 3^x \ln 3 - 2$.

Gọi x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình $g'(x) = 0$, $x_0 > 0$

Khi đó, $g(x) = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm.

Xét thấy, $g(x) = 0$ có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = 1$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		x_0		1		$+\infty$
$g'(x)$			$-$		0		$+$		
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$g(x_0)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có, $(4) \Leftrightarrow 0 \le x \le 1$

Ta lại có, $(3) \Leftrightarrow x \le 2$.

Kết hợp (3) và (4) suy ra, $0 \le x \le 1$. $(**)$

Kết hợp $(*)$ và $(**)$ ta được tập nghiệm của BPT đã cho là $S = [0;1] \cup [2;+\infty)$

Câu 15. Phương trình $2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = 4.3^{\sin^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $[-2017; 2017]$.

A. 1284. **B.** 4034. **C.** 1285. **D.** 4035.

Lờigiải

Chọn C

Ta có $2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = 4.3^{\sin^2 x} \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x} + 3^{1-\sin^2 x} = 4.3^{\sin^2 x}$

Đặt $\sin^2 x = t$ với $t \in [0;1]$, ta có phương trình

$2^t + \frac{3}{3^t} = 4.3^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3.\left(\frac{1}{9}\right)^t = 4$. Vì hàm số $f(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3.\left(\frac{1}{9}\right)^t$ nghịch biến với $t \in [0;1]$

nên phương trình có nghiệm duy nhất $t = 0$. Do đó $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vì $x \in [-2017; 2017]$ nên ta có $-2017 \le k\pi \le 2017 \Leftrightarrow \frac{-2017}{\pi} \le k \le \frac{2017}{\pi}$ nên có 1285 giá trị nguyên của k thỏa mãn. Vậy có 1285 nghiệm.

Câu 16. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_6 x = \log_9 y = \log_4(2x + 2y)$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$?

A. $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$. **B.** $\frac{x}{y} = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$. **C.** $\frac{x}{y} = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$. **D.** $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$.

Lờigiải

Chọn B

Giả sử $\log_6 x = \log_9 y = \log_4(2x + 2y) = t$. Ta có: $\begin{cases} x = 6^t & (1) \\ y = 9^t & (2) \\ 2x + 2y = 4^t & (3) \end{cases}$.

Khi đó $\frac{x}{y} = \frac{6^t}{9^t} = \left(\frac{2}{3}\right)^t > 0$.

Lấy (1), (2) thay vào (3) ta có

$$2.6^t + 2.9^t = 4^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2t} - 2.\left(\frac{2}{3}\right)^t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \left(\frac{2}{3}\right)^t = 1 + \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} & \text{(thoa)} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^t = 1 - \sqrt{3} & \text{(loaii)} \end{array}\right.$$

Câu 17. Số nghiệm của phương trình $2^{\log_5(x+3)} = x$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lờigiải

Chọn B

Đk: $x > -3$

Đặt $t = \log_5(x+3) \Rightarrow x = 5^t - 3$, phương trình đã cho trở thành

$$2^t = 5^t - 3 \Leftrightarrow 2^t + 3 = 5^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^t + 3.\left(\frac{1}{5}\right)^t = 1 \quad (1)$$

Dễ thấy hàm số $f(t) = \left(\frac{2}{5}\right)^t + 3.\left(\frac{1}{5}\right)^t$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = 1$ nên phương trình (1) có nghiệm duy nhất $t = 1$.

Với $t = 1$, ta có $\log_5(x+3) = 1 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Câu 18. Phương trình $3^{3+3x} + 3^{3-3x} + 3^{4+x} + 3^{4-x} = 10^3$ có tổng các nghiệm là?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lờigiải

Chọn A

$3^{3+3x}+3^{3-3x}+3^{4+x}+3^{4-x}=10^3\ (7)$

$(7)\Leftrightarrow 27.3^{3x}+\dfrac{27}{3^{3x}}+81.3^{x}+\dfrac{81}{3^{x}}=10^3\Leftrightarrow 27.\left(3^{3x}+\dfrac{1}{3^{3x}}\right)+81.\left(3^{x}+\dfrac{1}{3^{x}}\right)=10^3\quad (7')$

Đặt $t=3^x+\dfrac{1}{3^x}\overset{Côsi}{\geq}2\sqrt{3^x.\dfrac{1}{3^x}}=2$

$\Rightarrow t^3=\left(3^x+\dfrac{1}{3^x}\right)^3=3^{3x}+3.3^{2x}.\dfrac{1}{3^x}+3.3^x.\dfrac{1}{3^{2x}}+\dfrac{1}{3^{3x}}\Leftrightarrow 3^{3x}+\dfrac{1}{3^{3x}}=t^3-3t$

Khi đó: $(7')\Leftrightarrow 27\left(t^3-3t\right)+81t=10^3\Leftrightarrow t^3=\dfrac{10^3}{27}\Leftrightarrow t=\dfrac{10}{3}>2\ \ (N)$

Với $t=\dfrac{10}{3}\Rightarrow 3^x+\dfrac{1}{3^x}=\dfrac{10}{3}\quad (7")$

Đặt $y=3^x>0$. Khi đó: $(7")\Leftrightarrow y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{10}{3}\Leftrightarrow 3y^2-10y+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3\ \ (N)\\ y=\dfrac{1}{3}\ \ (N)\end{array}\right.$

Với $y=3\Rightarrow 3^x=3\Leftrightarrow x=1$.

Với $y=\dfrac{1}{3}\Rightarrow 3^x=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow x=-1$.

Suy ra tổng các nghiệm của phương trình là: $1+(-1)=0$.

Câu 19. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\sqrt{3^x+1}\leq 3^{\frac{x}{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{3^x+1}}$.

A. $(-\infty;0)\cup[\log_3 2;+\infty)$. **B.** $[0;\log_3 2)$.

C. $\left(0;\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lờigiải

Chọn A

Ta có bất phương trình: $\sqrt{3^x+1}\leq 3^{\frac{x}{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{3^x+1}}\Leftrightarrow \sqrt{3^x+1}\leq\sqrt{3^x}+\dfrac{2}{\sqrt{3^x+1}}\Leftrightarrow\sqrt{3^x+1}\leq\dfrac{\sqrt{3^x(3^x+1)}+2}{\sqrt{3^x+1}}$

$\Leftrightarrow 3^x+1\leq\sqrt{3^x(3^x+1)}+2\ (*)$

Đặt $t=3^x+1>1\Rightarrow 3^x=t-1$

Từ đó bất phương trình $(*)\Leftrightarrow t\leq\sqrt{(t-1)\mathrm{t}}+2\Leftrightarrow t-2\leq\sqrt{(t-1)\mathrm{t}}$

Trường hợp 1:

$\begin{cases}1<t<2\\(t-1)t\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<t<2\\ \left[\begin{array}{l}t\geq 1\\ t\leq 0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow 1<t<2\Leftrightarrow 1<3^x+1<2\Leftrightarrow 3^x<1\Leftrightarrow x<0$.

Trường hợp 2:.

$$\begin{cases} t \ge 2 \\ (t-1)t \ge (t-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 2 \\ t^2 - t \ge t^2 - 4t + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 2 \\ t \ge \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow t \ge 2 \Leftrightarrow 3^x \ge 2 \Leftrightarrow x \ge \log_3 2.$$

Kết luận nghiệm của bất phương trình là: $\left[\begin{array}{l} x \ge \log_3 2 \\ x < 0 \end{array}\right.$.

Câu 20. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{25}\dfrac{x}{2} = \log_{15} y = \log_9 \dfrac{x+y}{4}$ và $\dfrac{x}{y} = \dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a, b là các số nguyên dương, tính $a+b$.

A. $a+b=14$. **B.** $a+b=3$. **C.** $a+b=21$. **D.** $a+b=34$.

Lờigiải

Chọn D

Ta có $\log_{25}\dfrac{x}{2} = \log_{15} y = \log_9 \dfrac{x+y}{4} \Rightarrow \begin{cases} y = 15^{\log_{25}\frac{x}{2}} \\ \log_9 \dfrac{x + 15^{\log_{25}\frac{x}{2}}}{4} = \log_{25}\dfrac{x}{2} \end{cases}$

Đặt $t = \log_{25}\dfrac{x}{2} \Rightarrow x = 2.25^t$, ta được $2.25^t + 15^t = 4.9^t \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{5}{3}\right)^{2t} + \left(\dfrac{5}{3}\right)^t = 4$

$\Rightarrow t = \log_{\frac{5}{3}} \dfrac{-1+\sqrt{33}}{4} \Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{2.25^t}{15^t} = 2.\left(\dfrac{5}{3}\right)^t = \dfrac{-1+\sqrt{33}}{2}$.

Do đó $a=1$, $b=33$ nên $a+b=34$.

Câu 21. Biết rằng phương trình $\log_2\left(1+x^{1009}\right) = 2018\log_3 x$ có nghiệm duy nhất x_0. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $3^{\frac{1}{1008}} < x_0 < 3^{\frac{1}{1006}}$. **B.** $x_0 > 3^{\frac{2}{1009}}$. **C.** $1 < x_0 < 3^{\frac{1}{1008}}$. **D.** $3^{\frac{1}{1007}} < x_0 < 1$.

Lờigiải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_2\left(1+x^{1009}\right) = 2018\log_3 x$. Khi đó $t > 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + x^{1009} = 2^t \\ x^{2018} = 3^t \end{cases} \Rightarrow \left(2^t - 1\right)^2 = 3^t \Leftrightarrow 2^t - 1 = \left(\sqrt{3}\right)^t \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\right)^t + 1 = 2^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^t + \left(\dfrac{1}{2}\right)^t = 1\ (*).$$

Ta thấy hàm số $f(t) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^t + \left(\dfrac{1}{2}\right)^t$ luôn nghịch biến và liên tục trên $(0;+\infty)$ và $f(2)=1$ nên phương trình (*) có duy nhất một nghiệm $t=2$.

$\Rightarrow x^{1009} = 3$ hay $x_0 = 3^{\frac{1}{1009}}$.

Mà $0 < \dfrac{1}{1009} < \dfrac{1}{1008}$ nên $1 < x_0 < 3^{\frac{1}{1008}}$.

Câu 22. Phương trình $2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x)$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0;2018\pi)$?

A. 2018 nghiệm. **B.** 1008 nghiệm. **C.** 2017 nghiệm. **D.** 1009 nghiệm.

Lờigiải

Chọn A

Đk: $\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$.

$2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x) \Leftrightarrow \log_3(\cot x)^2 = \log_2(\cos x)$

$\Leftrightarrow \log_3 \cos^2 x - \log_3 \sin^2 x = \log_2(\cos x)$

$\Leftrightarrow \log_3 \cos^2 x - \log_3(1 - \cos^2 x) = \log_2(\cos x)$

Đặt $t = \log_2 \cos x \Rightarrow \cos x = 2^t$.

Phương trình trở thành $\Leftrightarrow \log_3 \dfrac{2^{2t}}{1-2^{2t}} = t \Leftrightarrow 4^t = 3^t - 12^t$ hay $\left(\dfrac{4}{3}\right)^t + 4^t = 1$

Hàm số $f(t) = \left(\dfrac{4}{3}\right)^t + 4^t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Mặt khác $f(-1) = 1$ nên $x = -1$ là nghiệm của phương trình.

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất $t = -1$.

$\log_2 \cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k.2\pi$.

$x \in (0;2018\pi) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{6} < k < \dfrac{6053}{6} \\ \dfrac{1}{6} < k < \dfrac{6055}{6} \end{array}\right.$.

Vậy trong khoảng $(0;2018\pi)$ có $1009.2 = 2018$ nghiệm.

Câu 23. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log_3(2u_5 - 63) = 2\log_4(u_n - 8n + 8)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Tìm số nguyên dương lớn nhất n thỏa mãn $\dfrac{u_n.S_{2n}}{u_{2n}.S_n} < \dfrac{148}{75}$.

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 19.

Lờigiải

Chọn A

Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\log_3(2u_5 - 63) = 2\log_4(u_n - 8n + 8) \Leftrightarrow \log_3(2u_5 - 63) = \log_2(u_n - 8n + 8)$.

Đặt $t = \log_3(2u_5 - 63)$ $\Rightarrow \begin{cases} 2u_5 - 63 = 3^t \\ u_n - 8n + 8 = 2^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u_5 - 63 = 3^t \\ u_5 - 32 = 2^t \end{cases}$ (với $n = 5$)

$\Rightarrow 1 = 3^t - 2.2^t \Rightarrow t = 2 \Rightarrow u_n = 8n - 4$. Khi đó $u_5 = 36$

Với $u_n = 8n - 4$ và $u_5 = 36$, ta có:

$\log_3(2u_5 - 63) = 2\log_4(u_n - 8n + 8) \Leftrightarrow \log_3(2.36 - 63) = 2\log_4(8n - 4 - 8n + 8)$

$\Leftrightarrow \log_3 9 = 2\log_4 4 \Leftrightarrow 2 = 2$ đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $u_{n+1} - u_n = 8(n+1) - 4 - (8n - 4) = 8$. Vậy (u_n) là cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 4$, công sai $d = 8$.

$\Rightarrow S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \dfrac{(u_1 + u_n).n}{2} = 4n^2$.

Do đó $\dfrac{u_n.S_{2n}}{u_{2n}.S_n} = \dfrac{(8n-4).16n^2}{(16n-4).4n^2} < \dfrac{148}{75} \Rightarrow n < 19$.

Câu 24. Số nghiệm của phương trình $\log_3\left|x^2 - \sqrt{2}x\right| = \log_5\left(x^2 - \sqrt{2}x + 2\right)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lờigiải

Chọn B

ĐK: $x \neq 0;\ x \neq \sqrt{2}$.

Đặt $t = x^2 - \sqrt{2}x \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x + 2 = t + 2$

$\Rightarrow \log_3|t| = \log_5(t+2)$.

Đặt $\log_3|t| = \log_5(t+2) = u$

$\begin{cases} \log_3|t| = u \\ \log_5(t+2) = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |t| = 3^u \\ t + 2 = 5^u \end{cases}$

$\Rightarrow \left|5^u - 2\right| = 3^u$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5^u - 2 = 3^u \\ 5^u - 2 = -3^u \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5^u + 3^u = 2 \\ 3^u + 2 = 5^u \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} 5^u + 3^u = 2 & (1) \\ \left(\dfrac{3}{5}\right)^u + 2\left(\dfrac{1}{5}\right)^u = 1 & (2) \end{array}\right.$.

- Xét $(1): 5^u + 3^u = 2$

Ta thấy $u = 0$ là 1 nghiệm, dùng phương pháp hàm số hoặc dùng BĐT để chứng minh nghiệm $u = 0$ là duy nhất.

Với $u = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$, phương trình này vô nghiệm.

- Xét $(2): \left(\dfrac{3}{5}\right)^u + 2\left(\dfrac{1}{5}\right)^u = 1$

Ta thấy $u = 1$ là 1 nghiệm, dùng phương pháp hàm số hoặc dùng BĐT để chứng minh nghiệm $u = 1$ là duy nhất.

Với $u = 1 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x - 3 = 0$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa $x \neq 0;\ x \neq \sqrt{2}$.

BÌNH LUẬN

Cho $f(x) = g(x)(1)$ nếu $f(x), g(x)$ đối nghịch nhau nghiêm ngặt hoặc $g(x) = const$ và $f(x)$ tăng, giảm nghiêm ngặt thì (1) có nghiệm duy nhất.

Câu 25. Tìm giá trị gần đúng tổng các nghiệm của bất phương trình sau:

$$\left(\sqrt{2\log_x^2\frac{22}{3} - 2\log_x\frac{22}{3} + 5} - \sqrt{13} + \sqrt{\frac{2}{\log_{\frac{22}{3}}^2 x} - \frac{4}{\log_{\frac{22}{3}} x} + 4}\right)\left(24x^6 - 2x^5 + 27x^4 - 2x^3 + 1997x^2 + 2016\right) \leq 0$$

A. 12,3. **B.** 12. **C.** 12,1. **D.** 12,2.

Lờigiải

Chọn C

Điều kiện: $0 < x \neq 1$.

Ta có $24x^6 - 2x^5 + 27x^4 - 2x^3 + 1997x^2 + 2016$

$=\left(x^3-x^2\right)^2+\left(x^3-1\right)^2+22x^6+26x^4+1997x^2+2015>0$, $\forall x$.

Do đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\sqrt{2\log_x^2\frac{22}{3}-2\log_x\frac{22}{3}+5}-\sqrt{13}+\sqrt{\frac{2}{\log^2_{\frac{22}{3}}x}-\frac{4}{\log_{\frac{22}{3}}x}+4}\right)\le 0.$$

Đặt $t=\log_x\frac{22}{3}$, ta có bất phương trình

$\sqrt{2t^2-2t+5}+\sqrt{2t^2-4t+4}\le\sqrt{13}$

$\Leftrightarrow\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{(1-t)^2+1^2}\le\sqrt{\frac{13}{2}}$.

Đặt $\vec{u}=\left(t-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ và $\vec{v}=(1-t;1)$. Ta có $|\vec{u}|+|\vec{v}|\ge|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{\frac{13}{2}}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{t-\frac{1}{2}}{1-t}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2t-1=3-3t\Leftrightarrow t=\frac{4}{5}\Rightarrow x=\left(\frac{22}{3}\right)^{\frac{5}{4}}=12,06\approx 12,1$.

Nghiệm trên thỏa điều kiện.

Câu 26. Tìm tích tất cả các nghiệm của phương trình $4.3^{\log(100x^2)}+9.4^{\log(10x)}=13.6^{1+\log x}$.

A. 100. **B.** 10. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{10}$.

Lờigiải

Chọn C

ĐK: $x>0$.

PT $\Leftrightarrow 4.3^{2.\log(10x)}+9.2^{2.\log(10x)}=13.6^{\log(10x)}\Leftrightarrow 4.\left(\frac{3}{2}\right)^{2\log(10x)}-13.\left(\frac{3}{2}\right)^{\log(10x)}+9=0$

Đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^{\log(10x)}>0$ thì phương trình trở thành:

$$4t^2-13t+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\frac{9}{4}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^{\log(10x)}=1\\ \left(\frac{3}{2}\right)^{\log(10x)}=\frac{9}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log(10x)=0\\ \log(10x)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{10}\\ x=10\end{array}\right..$$

Suy ra tích các nghiệm bằng 1.

Câu 27. Tập nghiệm của bất phương trình $2.7^{x+2}+7.2^{x+2}\le 351.\sqrt{14^x}$ có dạng là đoạn $S=[a;b]$. Giá trị $b-2a$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(3;\sqrt{10}\right)$. **B.** $(-4;2)$. **C.** $\left(\sqrt{7};4\sqrt{10}\right)$. **D.** $\left(\frac{2}{9};\frac{49}{5}\right)$.

Lờigiải

Chọn C

$2.7^{x+2}+7.2^{x+2}\le 351.\sqrt{14^x}$

$\Leftrightarrow 49.7^x + 28.2^x \le 351.\sqrt{14^x}$

$\Leftrightarrow 49.\sqrt{\dfrac{7^{2x}}{14^x}} + 28.\sqrt{\dfrac{2^{2x}}{14^x}} \le 351$

$\Leftrightarrow 49.\sqrt{\dfrac{7^x}{2^x}} + 28.\sqrt{\dfrac{2^x}{7^x}} \le 351$.

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{7^x}{2^x}}, t > 0$ thì bpt trở thành: $49t + \dfrac{28}{t} \le 351$

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{49} \le t \le \dfrac{7}{2} \Rightarrow \dfrac{4}{49} \le \sqrt{\dfrac{7^x}{2^x}} \le \dfrac{7}{2} \Leftrightarrow -4 \le x \le 2$.

Khi đó $S = [-4;2]$.

Giá trị $b - 2a = 10 \in \left(\sqrt{7}; 4\sqrt{10}\right)$.

Câu 28. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(2^x - 2\right)^2 < \left(2^x + 2\right)\left(1 - \sqrt{2^x - 1}\right)^2$ là

A. $S = (-\infty; 0)$. **B.** $S = [1; +\infty)$. **C.** $S = [0; 1)$. **D.** $S = [-3; +\infty)$.

Lờigiải

Chọn C

Điều kiện xác định: $2^x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow 2^x \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 0$

Đặt $\sqrt{2^x - 1} = t, (t \ge 0) \Rightarrow 2^x - 1 = t^2 \Leftrightarrow 2^x = t^2 + 1$

Bất phương trình trở thành:

$\left(t^2 + 1 - 2\right)^2 < \left(t^2 + 1 + 2\right)(1 - t)^2 \Leftrightarrow \left(t^2 - 1\right)^2 < \left(t^2 + 3\right)(1 - t)^2$

$\Leftrightarrow (t - 1)^2 (t + 1)^2 < \left(t^2 + 3\right)(t - 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} (t+1)^2 < t^2 + 3 \\ t \ne 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + 2t + 1 < t^2 + 3 \\ t \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < 1 \\ t \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow t < 1$.

Do đó $\sqrt{2^x - 1} < 1 \Leftrightarrow 2^x - 1 < 1 \Leftrightarrow 2^x < 2 \Leftrightarrow x < 1$.

Kết hợp điều kiện: $0 \le x < 1$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là: $S = [0; 1)$.

Câu 29. Bất phương trình $2^{x^2 + \sqrt{x-1} - 1} + 2 \le 2^{x^2} + 2^{\sqrt{x-1}}$ có tập nghiệm $S = [a; b]$. Khi đó $a + b$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 10.

Lờigiải

Chọn B

ĐK: $x \ge 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{1}{2}.2^{x^2}.2^{\sqrt{x-1}} + 2 \le 2^{x^2} + 2^{\sqrt{x-1}}$

$\Leftrightarrow 2^{x^2}.2^{\sqrt{x-1}} + 4 \le 2.2^{x^2} + 2.2^{\sqrt{x-1}}$

Đặt $\begin{cases} u = 2^{x^2} \\ v = 2^{\sqrt{x-1}} \end{cases}$, điều kiện $\begin{cases} u > 0 \\ v > 0 \end{cases}$.

Bất phương trình trở thành

$uv + 4 \le 2u + 2v \Leftrightarrow (uv - 2u) + (4 - 2v) \le 0 \Leftrightarrow u(v-2) - 2(v-2) \le 0 \Leftrightarrow (u-2)(v-2) \le 0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u-2 \ge 0 \\ v-2 \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} u-2 \le 0 \\ v-2 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u \ge 2 \\ v \le 2 \end{cases} \\ \begin{cases} u \le 2 \\ v \ge 2 \end{cases} \end{array}\right..$$

Kết hợp với điều kiện $\begin{cases} u > 0 \\ v > 0 \end{cases}$ ta được

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u \ge 2 \\ 0 < v \le 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < u \le 2 \\ v \ge 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^{x^2} \ge 2 \\ 0 < 2^{\sqrt{x-1}} \le 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < 2^{x^2} \le 2 \\ 2^{\sqrt{x-1}} \ge 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 \ge 1 \\ \sqrt{x-1} \le 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 \le 1 \\ \sqrt{x-1} \ge 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le -1 \vee x \ge 1 \\ x-1 \le 1 \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x-1 \ge 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le -1 \vee x \ge 1 \\ x \le 2 \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x \ge 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [1; 2]$

Kết hợp điều kiện $x \ge 1$, ta suy ra tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = [1; 2]$.

Câu 30. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(5+\sqrt{21}\right)^x + \left(5-\sqrt{21}\right)^x \le 2^{x+\log_2 5}$ là

A. $S = (-2; 1)$. **B.** $S = [-1; 1]$. **C.** $S = (1; 5]$. **D.** $S = (1; +\infty)$.

Lờigiải

Chọn B

Ta có:

$$\left(5+\sqrt{21}\right)^x + \left(5-\sqrt{21}\right)^x \le 2^{x+\log_2 5} \Leftrightarrow \left(5+\sqrt{21}\right)^x + \left(5-\sqrt{21}\right)^x \le 2^x.5 \Leftrightarrow \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^x + \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^x \le 5$$

Đặt $\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^x = t \Rightarrow \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^x = \frac{1}{t}, (t > 0)$, bất phương trình trở thành:

$t + \frac{1}{t} \le 5 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 1 \le 0 \Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{21}}{2} \le t \le \frac{5+\sqrt{21}}{2}$.

Do đó ta có:

$$\frac{5-\sqrt{21}}{2} \le \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^x \le \frac{5+\sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow -1 \le x \le 1.$$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là: $S = [-1; 1]$.

Câu 31. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \le x \le 2020$ và $\log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y$?

A. 2019. **B.** 6. **C.** 2020. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Ta có: $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y \Leftrightarrow \log_3(x+1)+x+1=2y+3^{2y}$. (1)

Đặt $\log_3(x+1)=t \Rightarrow x+1=3^t$.

Phương trình (1) trở thành: $t+3^t=2y+3^{2y}$ (2)

Xét hàm số $f(u)=u+3^u$ trên $\mathbb{R}$.

$f'(u)=1+3^u\ln 3>0,\forall u\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(2)\Leftrightarrow f(t)=f(2y)\Leftrightarrow t=2y\Rightarrow \log_3(x+1)=2y\Leftrightarrow x+1=9^y\Leftrightarrow x=9^y-1$

Vì $0\le x\le 2020\Rightarrow 0\le 9^y-1\le 2020\Leftrightarrow 1\le 9^y\le 2021\Leftrightarrow 0\le y\le \log_9 2021$

$(\log_3 2021\approx 3,464)$

Do $y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y\in\{0;1;2;3\}$, có 4 giá trị của y nên cũng có 4 giá trị của x

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x;y)$.

Cách 2:

Ta có: $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y \Leftrightarrow \log_3(x+1)+x+1=2y+3^{2y}$

Xét hàm số $f(x)=\log_3(x+1)+x+1$ với $x\in[0;2020]$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)\ln 3}+1>0,\forall x\in x\in[0;2020]\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;2020]$.

Suy ra $f(0)\le f(x)=\log_3(x+1)+x+1\le f(2020)\Leftrightarrow 1\le f(x)\le \log_2 2021+2021$

$\Rightarrow 1\le 2y+9^y\le \log_3 2021+2021<2028$

Nếu $y<0\Rightarrow 2y+9^y<9^y<9^0=1\Rightarrow y\ge 0$

Khi đó $y\in\mathbb{N}\Rightarrow (2y+9^y)\in\mathbb{N}\Rightarrow 2y+9^y\le 2027\Rightarrow 9^y\le 2027-2y\le 2027$

$\Rightarrow y\le \log_9 2027\approx 3,465 \Rightarrow y\le 3\Rightarrow 0\le y\le 3$

$\Rightarrow y\in\{0;1;2;3\}$. Do $f(x)$ là hàm số luôn đồng biến nên với mỗi giá trị của y chỉ cho 1 giá trị của x.

+) $y=0\Rightarrow \log_3\left(x+1\right)+x+1=1\Leftrightarrow x=0$

+) $y=1\Rightarrow \log_3\left(x+1\right)+x+1=11\Leftrightarrow \log_3\left(x+1\right)+x=10\Leftrightarrow x=8$

+) $y=2\Rightarrow \log_3\left(x+1\right)+x+1=85\Leftrightarrow \log_3\left(x+1\right)+x=84\Leftrightarrow x=80$

+) $y=3\Rightarrow \log_3\left(x+1\right)+x+1=735\Leftrightarrow \log_3\left(x+1\right)+x=734\Leftrightarrow x=729$

Vậy có 4 cặp số nguyên $\left(x;y\right)$.

Câu 32. Có bao nhiêu cặp số nguyên $\left(x,y\right)$ thỏa mãn $\log_{9x^2+y^2}\left(3x+y+9\right)\ge 1$?

A. 7. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x\in\mathbb{Z},\ y\in\mathbb{Z} \\ 0<9x^2+y^2\ne 1 \\ 3x+y+9>0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{Z},\ y\in\mathbb{Z} \\ \left(x,y\right)\not\in\left\{\left(0,0\right);\left(0,1\right);\left(0,-1\right)\right\} \\ 3x+y+9>0 \end{cases}$

Khi đó $9x^2+y^2>1$ nên ta có:

$\log_{9x^2+y^2}\left(3x+y+9\right)\ge 1\Leftrightarrow 3x+y+9\ge 9x^2+y^2\Leftrightarrow 9x^2-3x+y^2-y-9\le 0$

$\Leftrightarrow\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{19}{2}$

Suy ra: $\begin{cases} \left(3x-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{19}{2} \\ \left(y-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{19}{2} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \frac{1-\sqrt{38}}{6}\le x\le\frac{1+\sqrt{38}}{6} \\ \frac{1-\sqrt{38}}{2}\le y\le\frac{1+\sqrt{38}}{2} \end{cases}$

Do $x\in\mathbb{Z},\ y\in\mathbb{Z}$ nên $\begin{cases} x\in\left\{0;1\right\} \\ y\in\left\{-2;-1;0;1;2\right\} \end{cases}$

Kết hợp điều kiện, ta được $\left(x,y\right)\in\left\{\left(0,-2\right);\left(0,2\right);\left(1;-2\right);\left(1,-1\right),\left(1,0\right);\left(1,1\right);\left(1,2\right)\right\}$

Thử lại ta thấy cặp $\left(x,y\right)=\left(1,-2\right)$ không thỏa yêu cầu đề bài.

Vậy có 6 cặp số nguyên $\left(x,y\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho tồn tại duy nhất cặp số thực $\left(x,y\right)$ thỏa mãn $x^2+y^2=18$ và $x-y+m=\log_3\left(y-2m\right)-\log_3\left(x-m\right)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x>m \\ y>2m \end{cases}$.

Ta có: $x-y+m=\log_3\left(y-2m\right)-\log_3\left(x-m\right)$

$\Leftrightarrow\log_3\left(x-m\right)+x-m=\log_3\left(y-2m\right)+y-2m\ \ (1)$

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ với $t>0$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0, \forall t>0$ nên hàm số f đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó: $(1)\Leftrightarrow x-m=y-2m\Leftrightarrow y=x+m$.

Theo giả thiết: $x^2+y^2=18\Leftrightarrow x^2+(x+m)^2=18\Leftrightarrow g(x)=2x^2+2mx+m^2-18=0\ (2)$

Để tồn tại duy nhất cặp số thực (x,y) thỏa yêu cầu bài toán thì phương trình (2) phải có duy nhất một nghiệm $x>m$ (khi đó $y>2m$ do $y=x+m$).

Trường hợp 1: (2) có nghiệm kép $x>m\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=-m^2+36=0\\ y=-\dfrac{m}{2}>2m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\pm 6\\ m<0\end{cases}\Leftrightarrow m=-6$.

Trường hợp 2: (2) có hai nghiệm phân biệt $x_1\le m<x_2$

- Nếu $x_1=m$ thì thay vào (2) ta được $5m^2-18=0\Leftrightarrow m=\pm\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$ (loại do $m\in\mathbb{Z}$)
- Nếu $x_1<m<x_2\Leftrightarrow a.g(m)<0\Leftrightarrow 5m^2-18<0\Leftrightarrow -\dfrac{3\sqrt{10}}{5}<m<\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$

Từ các trường hợp trên và $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-6;-1;0;1\}$.

Câu 34. Biết $x_1,x_2(x_1>x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $\log_3\left(\dfrac{x^2-2x+1}{3x}\right)+x^2+2=3x$ và $4x_1+2x_2=a+\sqrt{b}$, với a,b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$

A. $a+b=9$. **B.** $a+b=12$. **C.** $a+b=7$. **D.** $a+b=14$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\ x\ne 1\end{cases}$

Ta có:

$\log_3\left(\dfrac{x^2-2x+1}{3x}\right)+x^2+2=3x\Leftrightarrow \log_3(x-1)^2+x^2-2x+1=\log_3 x+x$

$\Leftrightarrow \log_3(x-1)^2+(x-1)^2=\log_3 x+x\ (1)$

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t\Leftrightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t.\ln 3}+1>0,\forall t>0$

Phương trình (1) trở thành $f\left((x-1)^2\right)=f(x)\Leftrightarrow (x-1)^2=x\Leftrightarrow x^2-3x+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\\ x_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

Vậy $4x_1+2x_2=9+\sqrt{5}$. Khi đó $a=9,b=5\Rightarrow a+b=14$

Câu 35. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $\log_2(4x+4)+x=y+1+2^y$?

A. 10. **B.** 11. **C.** 2020. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\log_2(4x+4)=t \Leftrightarrow 4x+4=2^t \Leftrightarrow x=2^{t-2}-1$.

Từ điều kiện $0\le x\le 2020 \Rightarrow 0\le 2^{t-2}-1\le 2020 \Leftrightarrow 1\le t-1\le 1+\log_2 2021$.

Theo giả thiết ta có: $t-1+2^{t-2}=y+1+2^y\ (*)$.

Xét hàm số $f(u)=u+2^{u-1}$ với $1\le u\le 1+\log_2 2021$.

Có $f'(u)=1+2^{u-1}.\ln 2>0, \forall u\in[1;1+\log_2 2021]$ nên hàm $f(u)$ đồng biến trên đoạn $[1;1+\log_2 2021]$.

Dựa vào $(*)\Rightarrow f(t-1)=f(y+1)\Leftrightarrow t-1=y+1$.

Mặt khác $1\le t-1\le 1+\log_2 2021 \Rightarrow 1\le y+1\le 1+\log_2 2021 \Rightarrow 0\le y\le \log_2 2021\approx 10,98$.

Vì $y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$.

Vậy có 11 cặp số nguyên thỏa mãn ycbt.

Câu 36. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_2(x^2+4y^2)=\log_3(x+4y)$.

A. 3. **B.** Vô số. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x^2+4y^2>0 \\ x+4y>0 \end{cases}$

Đặt $t=\log_2(x^2+4y^2)=\log_3(x+4y)\Rightarrow \begin{cases} x^2+4y^2=2^t \\ x+4y=3^t \end{cases}$

Áp dụng bất đẳng thức **B.** **C.** S, ta có:

$(x+4y)^2=(1.x+2.2y)^2\le(1^2+2^2).\left(x^2+(2y)^2\right)=5(x^2+4y^2)$

$\Leftrightarrow 9^t\le 5.2^t \Leftrightarrow t\le \log_{\frac{9}{2}} 5$

Từ $x^2+4y^2=2^t$ suy ra $x^2\le 2^t\le 2^{\log_{\frac{9}{2}}5}\approx 2,1$

Do $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-1;0;1\}$

- Với $x=-1\Rightarrow \begin{cases} 4y^2=2^t-1 \\ 4y=3^t+1 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} y^2=\dfrac{1}{4}(2^t-1)\ (1) \\ y=\dfrac{1}{4}.(3^t+1)\ (2) \end{cases}$

Thay (2) vào (1) ta được $9^t+2.3^t-4.2^t+5=0$

Do (1) nên $2^t-1\ge 0\Leftrightarrow t\ge 0$.

Khi đó: $9^t+2.3^t-4.2^t+5\ge 4^t-4.2^t+4+2.3^t+1=(2^t-2)^2+3.2^t+1>0$ nên không tồn tại giá trị của t. Vậy loại $x=-1$.

- Với $x=0\Rightarrow \begin{cases} 4y^2=2^t \\ 4y=3^t \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} t=\log_{\frac{9}{2}} 4 \\ y=\dfrac{1}{4}.3^{\log_{\frac{9}{2}}4} \end{cases}\Rightarrow$ nhận $x=0$.

- Với $x=1 \Rightarrow \begin{cases} 4y^2=2^t-1 \\ 4y=3^t-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=\frac{1}{4}\left(2^t-1\right) \\ y=\frac{1}{4}.\left(3^t-1\right) \end{cases}$.

Dễ thấy $\begin{cases} t=0 \\ y=0 \end{cases}$ là một nghiệm của hệ $\Rightarrow$ nhận $x=1$.

Vậy $x \in \{0;1\}$.

Câu 37. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn $0 \le x \le 2020$ và $2\left(x+\ln(x+1)\right)+x^2+1=y+e^y$?

A. 0. **B.** 7. **C.** 1. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2\left(x+\ln(x+1)\right)+x^2+1=y+e^y \Leftrightarrow 2\ln(x+1)+e^{2\ln(x+1)}=y+e^y \; (1)$.

Xét hàm số: $f(t)=t+e^t$, ta có: $f'(t)=1+e^t>0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó: $(1) \Leftrightarrow f\left(2\ln(x+1)\right)=f(y) \Leftrightarrow y=2\ln(x+1)$.

+ Do $0 \le x \le 2020$ nên $1 \le x+1 \le 2021 \Leftrightarrow 0 \le y \le 2\ln 2021 \approx 15,22$.

Do $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{0;1;2;...;14;15\}$.

Có $y=2\ln(x+1) \Leftrightarrow x=e^{\frac{y}{2}}-1$.

Với $y \in \{0;1;2;...;14;15\}$ thì chỉ có $y=0$ thì $x \in \mathbb{Z}$.

Vậy có duy nhất 1 cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn đề bài.

Câu 38. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y)=\log_4\left(x^2+2y^2\right)$?

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** Vô số

Phân tích

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x+y>0$.

Đặt $\log_3(x+y)=\log_4\left(x^2+2y^2\right)=t$, suy ra $\begin{cases} x+y=3^t \\ x^2+2y^2=4^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3^t-y \\ \left(3^t-y\right)^2+2y^2=4^t \end{cases} \quad (1)$

Phương trình $(1) \Leftrightarrow 3y^2-2.3^t y+9^t-4^t=0$. Phương trình phải có nghiệm nên:

$\Delta'=9^t-3\left(9^t-4^t\right)\ge 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow t \le \frac{1}{2}$.

Do đó: $\begin{cases} 0<x+y\le\sqrt{3} \\ x^2+2y^2 \le 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 \le 2 \Rightarrow x \in \{0;\pm 1\}$ (vì $x \in \mathbb{Z}$)

Thử lại:

Với $x=0 \Rightarrow \begin{cases} y=3^t \\ 2y^2=4^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\log_{\frac{4}{9}} 2 \\ y=3^{\log_{\frac{4}{9}} 2} \end{cases}$

Với $x=1 \Rightarrow \begin{cases}1+y=3^t \\ 1+2y^2=4^t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t=0 \\ y=0\end{cases}$

Với $x=-1 \Rightarrow \begin{cases}y=3^t+1 \\ 2y^2+1=4^t\end{cases} \Rightarrow 2.9^t+4.3^t+3-4^t=0 \quad (2)$

Khi $t \geq 0 \Rightarrow 9^t \geq 4^t$ nên (2) vô nghiệm, khi $t<0 \Rightarrow 4^t<1 \Rightarrow 1-4^t>0$ nên (2) cũng vô nghiệm.

Vậy $x \in \{0;1\}$.

Câu 39. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $1 \leq x \leq 10^6$ và $\log\left(10x^2-20x+20\right)=10^{y^2}+y^2-x^2+2x-1$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $10x^2-20x+20>0$, đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $\log\left(10x^2-20x+20\right)=10^{y^2}+y^2-x^2+2x-1 \Leftrightarrow \left(x^2-2x+1\right)+\log\left[10\left(x^2-2x+2\right)\right]=10^{y^2}+y^2$

$\Leftrightarrow \left(x^2-2x+1\right)+\log 10+\log\left(x^2-2x+2\right)=10^{y^2}+y^2$

$\Leftrightarrow \left(x^2-2x+2\right)+\log\left(x^2-2x+2\right)=10^{y^2}+y^2$

$\Leftrightarrow 10^{\log\left(x^2-2x+2\right)}+\log\left(x^2-2x+2\right)=10^{y^2}+y^2$ (*).

Xét hàm $f(t)=10^t+t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=10^t.\ln 10+1>0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow f\left[\log\left(x^2-2x+2\right)\right]=f\left(y^2\right) \Leftrightarrow \log\left(x^2-2x+2\right)=y^2 \Leftrightarrow x^2-2x+2=10^{y^2}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+1=10^{y^2}$.

Vì $1 \leq x \leq 10^6$ nên $1 \leq (x-1)^2+1=10^{y^2} \leq \left(10^6-1\right)^2+1 \Rightarrow 0 \leq y^2 \leq \log\left[\left(10^6-1\right)^2+1\right]$.

Vì $y \in \mathbb{Z}^+$ nên $y \in \{1;2;3\}$.

+ Với $y=1 \Rightarrow x^2-2x+2=10 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2 \text{ (ktm)} \\ x=4 \text{ (tm)}\end{array}\right.$.

+ Với $y=2 \Rightarrow x^2-2x+2=10^4 \Leftrightarrow x^2-2x-9998=0$ (không có giá trị x nguyên nào thỏa mãn).

+ Với $y=3 \Rightarrow x^2-2x+2=10^9 \Rightarrow x^2-2x-999999998=0$ (không có giá trị x nguyên nào thỏa mãn).

Vậy có một cặp nguyên dương $(x;y)=(4;1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 40. Có bao nhiêu số nguyên $y<10$ sao cho tồn tại số nguyên x thỏa mãn $5^{\sqrt{2}^y+x-2}+\sqrt{2}^y=5^{x^2-x-1}+(x-1)^2$?

A. 10 **B.** 1 **C.** 5 **D.** Vô số

Phân tích

Phương trình dạng $f(u)=f(v)$.

Phương pháp: Chứng minh $y=f(t)$ đơn điệu trên $(a;b)$. Từ phương trình suy ra $u=v$. Từ đó tìm sự liên hệ giữa 2 biến x,y và chọn x,y thích hợp.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $5^{\sqrt{2}^y+x-2}+\sqrt{2}^y=5^{x^2-x-1}+(x-1)^2 \Leftrightarrow 5^{\sqrt{2}^y+x-2}+\sqrt{2}^y+x-1=5^{x^2-x-1}+x^2-x$

Xét: $f(t)=5^{t-1}+t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó từ phương trình trên suy ra:

$\sqrt{2}^y+x-1=x^2-x \Leftrightarrow (x-1)^2=\sqrt{2}^y=2^{\frac{y}{2}} \Leftrightarrow x=1\pm 2^{\frac{y}{2}}$.

Do x nguyên nên ta có $2^{\frac{y}{2}}\in\mathbb{Z}$ và $y<10$ nên $y\in\{0;2;4;6;8\}$.

Câu 41. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thoả mãn $1\le x\le 2020$ và $2^y+y=2x+\log_2\left(x+2^{y-1}\right)$

A. 2021. **B.** 10. **C.** 2020. **D.** 11.

Lời giải

Chọn D

Theo đề bài, $2^y+y=2x+\log_2\left(x+2^{y-1}\right)$

$\Leftrightarrow 2^y+\log_2\left(2^y\right)=2x+\log_2\left(x+\frac{2^y}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 2^y+2^y+\log_2\left(2^y\right)=2x+2^y+\log_2\left(\frac{2x+2^y}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 2.\left(2^y\right)+\log_2\left(2^y\right)=2\cdot\left(\frac{2x+2^y}{2}\right)+\log_2\left(\frac{2x+2^y}{2}\right)\ (1)$.

Xét hàm số $f(t)=2t+\log_2 t$, $t>0$.

Vì $f'(t)=2+\frac{1}{t\ln 2}>0\ \forall t>0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

nên $(1)\Leftrightarrow f\left(2^y\right)=f\left(\frac{2x+2^y}{2}\right)\Leftrightarrow 2^y=\frac{2x+2^y}{2}\Leftrightarrow 2.2^y=2x+2^y\Leftrightarrow 2x=2^y\Leftrightarrow x=2^{y-1}$.

Do $1\le x\le 2020$ nên $0\le y-1\le \log_2 2020 \Leftrightarrow 1\le y\le 11{,}98$.

Do $y\in\mathbb{N}^*$ nên $y\in\{1;2;3;...;11\}$, với mỗi giá trị y cho ta 1 giá trị x thoả đề.

Vậy có 11 cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn đề bài.

Câu 42. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $2\log_2(x+y)-\log_2\left(1+\sqrt{3}\right)=\log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2-1\right)$

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 5

Lời giải

Chọn C

Đặt: $t=2\log_2(x+y)-\log_2\left(1+\sqrt{3}\right)=\log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2-1\right)$.

Suy ra: $\begin{cases}(x+y)^2=2^{t+\log_2(1+\sqrt{3})}\\x^2+y^2-1=\sqrt{3}^t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)^2=(1+\sqrt{3}).2^t\\x^2+y^2=1+\sqrt{3}^t\end{cases}$

Ta có:

$(x+y)^2\le 2(x^2+y^2)$

$\Leftrightarrow (1+\sqrt{3}).2^t\le 2\left(1+\sqrt{3}^t\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{(1+\sqrt{3})2^t}{2}\le 1+\sqrt{3}^t$.

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^t+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^t\ge \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

Xét $f(t)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^t+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^t$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^t+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^t\ge \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow f(t)\ge f(1)\Leftrightarrow t\le 1$.

Do đó $\begin{cases}0<x+y=2^{\frac{t+\log_2(1+\sqrt{3})}{2}}\le\sqrt{2\log_2(1+\sqrt{3})}\\x^2+y^2=1+\sqrt{3}^t\le 1+\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow x\in\{0;\pm1\}$ (vì $x\in\mathbb{Z}$)

Thử lại:

Với $x=1$:

$\begin{cases}y=\sqrt{(1+\sqrt{3})2^t}-1\\y^2=\sqrt{3}^t\end{cases}$

$\Rightarrow\left(\sqrt{(1+\sqrt{3})2^t}-1\right)^2-\sqrt{3}^t=0$

$\Rightarrow(1+\sqrt{3})2^t-2\sqrt{(1+\sqrt{3}).2^t}-\sqrt{3}^t+1=0$

Ta có: $g(x)=(1+\sqrt{3})2^t-2\sqrt{(1+\sqrt{3}).2^t}-\sqrt{3}^t+1$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $g(0)g(1)<0$ nên phương trình có nghiệm $t\in(0;1)$.

Do đó với $x=1$ thì tồn tại số thực y thỏa mãn $2\log_2(x+y)-\log_2(1+\sqrt{3})=\log_{\sqrt{3}}(x^2+y^2-1)$

Với $x=-1$:

$\begin{cases}y=\sqrt{(1+\sqrt{3})2^t}+1\\y^2=\sqrt{3}^t\end{cases}$

$\Rightarrow\left(\sqrt{(1+\sqrt{3})2^t}+1\right)^2-\sqrt{3}^t=0$

$\Rightarrow(1+\sqrt{3})2^t+2\sqrt{(1+\sqrt{3}).2^t}-\sqrt{3}^t+1=0$

Ta có: $(1+\sqrt{3})2^t+2\sqrt{(1+\sqrt{3}).2^t}-\sqrt{3}^t+1>0,\forall t\le 1$ nên phương trình vô nghiệm.

Do đó với $x=-1$ thì không tồn tại số thực y thỏa mãn

$2\log_2(x+y)-\log_2\left(1+\sqrt{3}\right)=\log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2-1\right)$

Với $x=0$:

$\begin{cases} y^2=\left(1+\sqrt{3}\right)2^t \\ y^2=1+\sqrt{3}^t \end{cases}$

$\Rightarrow \left(1+\sqrt{3}\right)2^t=\sqrt{3}^t+1$

$\Rightarrow \left(1+\sqrt{3}\right)2^t-\sqrt{3}^t-1=0$

Ta có: $h(x)=\left(1+\sqrt{3}\right)2^t-\sqrt{3}^t-1$ liên tục trên $[-1;0]$ thỏa mãn $h(-1)h(0)<0$ nên phương trình có nghiệm $t\in(-1;0)$.

Do đó với $x=0$ thì tồn tại số thực y thỏa mãn $2\log_2(x+y)-\log_2\left(1+\sqrt{3}\right)=\log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2-1\right)$.

Vậy $x\in\{0;1\}$.

Câu 43. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le y\le 2020$ và $\log_3\left(\frac{2^x-1}{y}\right)=y+1-2^x$?

A. 2019. **B.** 11. **C.** 2020. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} y\ne 0 \\ \frac{2^x-1}{y}>0\Leftrightarrow 2^x>1\Leftrightarrow x>0 \\ y\ge 0 \end{cases}$

Ta có: PT $\Leftrightarrow \log_3\left(2^x-1\right)+2^x-1=\log_3 y+y$ (*)

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ trên $(0;+\infty)$

Khi đó $f'(t)=\frac{1}{t\ln 3}+1>0$ do đó hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

(*) có dạng $f\left(2^x-1\right)=f(y)\Leftrightarrow y=2^x-1$

Vì $0\le y\le 2020\Leftrightarrow 0\le 2^x-1\le 2020\Leftrightarrow 1\le 2^x\le 2021\Leftrightarrow 0\le x\le \log_2(2021)$

$\begin{cases} 0\le x\le \log_2(2021) \\ x\in\mathbb{Z} \end{cases}\Leftrightarrow x\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$. Vậy có 11 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Câu 44. Biết x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\frac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x$ và $x_1+2x_2=\frac{1}{4}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

A. $a+b=13$. **B.** $a+b=11$. **C.** $a+b=16$. **D.** $a+b=14$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x>0, x\neq \frac{1}{2}$.

Ta có: $\log_7\left(\frac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x \Leftrightarrow \log_7\left(4x^2-4x+1\right)+4x^2-4x+1=\log_7\left(2x\right)+2x$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=\log_7 t+t$ có $f'\left(t\right)=\frac{1}{t\ln 7}+1>0\ \ \forall t>0$ nên là hàm số đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

Do đó ta có $4x^2-4x+1=2x \Leftrightarrow 4x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{4}$.

Khi đó

$x_1+2x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{4}+2\frac{3+\sqrt{5}}{4}=\frac{1}{4}\left(9+\sqrt{5}\right)$ hoặc $x_1+2x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{4}+2\frac{3-\sqrt{5}}{4}=\frac{1}{4}\left(9-\sqrt{5}\right)$.

Vậy $x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{4}; x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{4}$. Do đó $a=9;b=5$ và $a+b=9+5=14$.

Câu 45. Biết phương trình $\log_5\frac{2\sqrt{x}+1}{x}=2\log_3\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ có một nghiệm dạng $x=a+b\sqrt{2}$ trong đó a,b là các số nguyên. Tính $2a+b$.

A. 3. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_5\frac{2\sqrt{x}+1}{x}=2\log_3\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \Leftrightarrow \log_5\frac{2\sqrt{x}+1}{x}=2\log_3\left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right)$ $\left(1\right)$.

ĐKXĐ: $x>1$.

$\left(1\right)\Leftrightarrow \log_5\left(2\sqrt{x}+1\right)+2\log_3 2\sqrt{x}=\log_5 x+2\log_3\left(x-1\right)$ (*)

Xét hàm số $f\left(t\right)=\log_5 t+2\log_3\left(t-1\right)$, với $t>1$.

$f'\left(t\right)=\frac{1}{t.\ln 5}+\frac{2}{\left(t-1\right)\ln 3}>0$ với mọi $t>1$, suy ra $f\left(t\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$.

Từ (*) ta có $f\left(2\sqrt{x}+1\right)=f\left(x\right)$ nên suy ra $2\sqrt{x}+1=x \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=1+\sqrt{2}$ (do $x>1$).

Suy ra $x=3+2\sqrt{2} \Rightarrow a=3;b=2 \Rightarrow 2a+b=8$.

Câu 46. Số nghiệm thực của phương trình $6^x=3\log_6\left(5x+1\right)+2x+1$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>-\frac{1}{5}$.

PT: $\Leftrightarrow 6^x+3x=3\log_6\left(5x+1\right)+5x+1 \Leftrightarrow 6^x+3x=6^{\log_6\left(5x+1\right)}+3\log_6\left(5x+1\right)$ $\quad(1)$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=6^t+3t$, vì $f'\left(t\right)=6^t.\ln 6+3>0, \forall t\in\mathbb{R}$ nên $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $\left(1\right) \Leftrightarrow f\left(x\right)=f\left(\log_6\left(5x+1\right)\right) \Leftrightarrow x=\log_6\left(5x+1\right) \Leftrightarrow \log_6\left(5x+1\right)-x=0$

Xét hàm số $h(x)=\log_6(5x+1)-x$ trên $\left(-\frac{1}{5};+\infty\right)$, ta có

$h'(x)=\frac{5}{(5x+1)\ln 6}-1$

$h''(x)=-\frac{25}{(5x+1)^2\ln 6}<0, \forall x>-\frac{1}{5}$ và $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{5}\right)^+} h'(x)=+\infty; \lim\limits_{x\to+\infty} h'(x)=-1$

Bảng biến thiên:

x	$\frac{-1}{5}$		x_0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$h(x_0)$	$\searrow$	-1

Từ BBT suy ra phương trình $h(x)=0$ có nhiều nhất 2 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{1}{5};+\infty\right)$

Mà $h(0)=0, h(1)=0$.

Vậy phương trình đã cho có đúng hai nghiệm $x=0, x=1$.

Câu 47. Tính tổng S tất cả các nghiệm của phương trình $\ln\left(\frac{5^x+3^x}{6x+2}\right)+5^{x+1}+5.3^x-30x-10=0$.

A. $S=1$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=3$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x>-\frac{1}{3}$.

Phương trình tương đương

$\ln(5^x+3^x)-\ln(6x+2)+5(5^x+3^x)-5(6x+2)=0$

$\Leftrightarrow \ln(5^x+3^x)+5(5^x+3^x)=\ln(6x+2)+5(6x+2)$ (1).

Xét hàm số $f(t)=\ln t+5t, t>0$. Có $f'(t)=\frac{1}{t}+5>0$, $\forall t>0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Từ (1) suy ra $f(5^x+3^x)=f(6x+2)\Leftrightarrow 5^x+3^x=6x+2 \Leftrightarrow 5^x+3^x-6x-2=0$

Xét $g(x)=5^x+3^x-6x-2$, $g'(x)=5^x\ln 5+3^x\ln 3-6$

$g''(x)=5^x(\ln 5)^2+3^x(\ln 3)^2>0$, $\forall x>-\frac{1}{3}$.

Nên $g'(x)=0$ có không quá 1 nghiệm suy ra $g(x)=0$ có không quá 2 nghiệm trên $\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$. Mà $g(0)=g(1)=0$. Vậy phương trình có tập nghiệm là $\{0,1\}$. Do đó $S=1$.

Câu 48. Số nghiệm của phương trình $\ln\frac{\sqrt{x^2+80}}{3^x}=2.3^{x+1}-2\sqrt{x^2+80}+\ln 3$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

PT $\Leftrightarrow \ln\sqrt{x^2+80}+2\sqrt{x^2+80}=\ln 3^{x+1}+2.3^{x+1}$ (1)

Xét hàm số $f(t)=\ln t+2t,\forall t>0$; Ta có: $f'(t)=\frac{1}{t}+2>0,\forall t>0\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Từ (1) suy ra $f\left(\sqrt{x^2+80}\right)=f\left(3^{x+1}\right)\Leftrightarrow\sqrt{x^2+80}=3^{x+1}\Leftrightarrow x^2+80=9^{x+1}\Leftrightarrow 9^{x+1}-x^2-80=0$

Xét hàm số $g(x)=9^{x+1}-x^2-80$ trên $\mathbb{R}$. Ta có:

$g'(x)=2.9^{x+1}\ln 3-2x$

$g''(x)=4.9^{x+1}(\ln 3)^2-2$

$g''(x)=0\Leftrightarrow x=x_0=-\log_9\left(2\ln^2 3\right)-1\Rightarrow g'(x_0)=g'\left(-\log_9\left(2\ln^2 3\right)-1\right)\approx 3,7>0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}g'(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}g'(x)=+\infty$

Bảng biến thiên:

x	6		$-log_9(2ln^2 3)-1$		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g'(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $g'(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ phương trình $g(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm.

Mà $g(1)=0$

Do đó phương trình đã cho có duy nhất 1 nghiệm.

B. BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ

① **Dạng 1. Tìm m để $f(t;m)=0$ có nghiệm (hoặc có k nghiệm) trên D?**

— Bước 1. Tách m ra khỏi biến số và đưa về dạng $f(t)=A(m)$.

— Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(t)$ trên D.

— Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên để xác định giá trị của tham số $A(m)$ để đường thẳng $y=A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y=f(t)$.

— Bước 4. Kết luận các giá trị cần tìm của $A(m)$ để phương trình $f(t)=A(m)$ có nghiệm (hoặc có k nghiệm) trên D.

Lưu ý

— Nếu hàm số $y=f(t)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên D thì giá trị $A(m)$ cần tìm là những m thỏa mãn: $\min\limits_{t\in D} f(t) \le A(m) \le \max\limits_{t\in D} f(t)$.

— Nếu bài toán yêu cầu tìm tham số để phương trình có k nghiệm phân biệt, ta chỉ cần dựa vào bảng biến thiên để xác định sao cho đường thẳng $y=A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y=f(t)$ tại k điểm phân biệt.

② **Dạng 2. Tìm m để bất phương trình $f(t;m)\ge 0$ hoặc $f(t;m)\le 0$ có nghiệm trên miền D?**

— Bước 1. Tách tham số m ra khỏi biến số t và đưa về dạng $A(m)\le f(t)$ hoặc $A(m)\ge f(t)$.

— Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(t)$ trên D.

— Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên xác định các giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm:

+ $A(m)\le f(t)$ có nghiệm trên $D \Leftrightarrow A(m)\le \max\limits_{t\in D} f(t)$.

+ $A(m)\ge f(t)$ có nghiệm trên $D \Leftrightarrow A(m)\ge \min\limits_{t\in D} f(t)$.

Lưu ý

— Bất phương trình $A(m)\le f(t)$ nghiệm đúng $\forall t\in D \Leftrightarrow A(m)\le \min\limits_{t\in D} f(t)$.

— Bất phương trình $A(m)\ge f(t)$ nghiệm đúng $\forall t\in D \Leftrightarrow A(m)\ge \max\limits_{t\in D} f(t)$.

Câu 1. Cho phương trình $\log_2^2(2x)-(m+2)\log_2 x+m-2=0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;2]$ là

A. $(1;2)$. **B.** $[1;2]$. **C.** $[1;2)$. **D.** $[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$\log_2^2(2x)-(m+2)\log_2 x+m-2=0 \Leftrightarrow \left[1+\log(x)\right]^2-(m+2)\log_2 x+m-2=0\ (*)$

Đặt $t=\log_2 x=g(x)$ $\Rightarrow 0\le t\le 1$ và mỗi giá trị của x sẽ cho một giá trị của t

$(*)$ trở thành $(1+t)^2-(m+2)t+m-2=0$

$\Leftrightarrow t^2+2t+1-mt-2t+m-2=0$

$\Leftrightarrow t^2-1=m(t-1)$

$\Leftrightarrow (t-1)(t+1-m)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=m-1 & (1) \\ t=1 & (2) \end{array}\right.$$

Với $t=1$ thì phương trình có một nghiệm $x=2$

Vậy để phương trình ban đầu có hai nghiệm phân biệt thì phương trình (1) phải có một nghiệm $t\ne 1$

$0\le m-1<1 \Leftrightarrow 1\le m<2$

Vậy $m \in [1;2)$ để thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2. Cho phương trình $\left(2\log_2^3 x - 7\log_2^2 x + 4\log_2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\sqrt{3^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 78. **B.** 80. **C.** 81. **D.** 79.

Lời giải

Chọn D.

Đk: $\begin{cases} x > 0 \\ 3^x \geq m \end{cases}$.

$\left(2\log_2^3 x - 7\log_2^2 x + 4\log_2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\sqrt{3^x - m} = 0 \Leftrightarrow (\log_2 x - 2)^2.(2\log_2 x + 1)\sqrt{3^x - m} = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -\frac{1}{2} \\ 3^x = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \log_3 m \end{array}\right.$.

Với $m = 1$ thì $x = \log_3 m = 0$ (loại). Do đó phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x = 4,\ x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Với $m > 1$ thì $x = \log_3 m > 0$ nên luôn nhận nghiệm $x = \log_3 m$.

Mà $4 > \frac{1}{\sqrt{2}}$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \log_3 m < 4 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \leq m < 81$.

m nguyên dương nên $m \in \{3;\ 4;\ ..,\ 80\}$.

Vậy có 79 giá trị m nguyên dương.

Câu 3. Cho phương trình $(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2)\sqrt{9^x + (1-m)3^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 3238. **B.** 3236. **C.** 3237. **D.** 3239.

Lời giải

Chọn A

Viết lại phương trình $(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2)\sqrt{(3^x+1)(3^x - m)} = 0$

Đk: $\begin{cases} x > 0 \\ 3^x \geq m \end{cases}$.

$(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2)\sqrt{9^x + (1-m)3^x - m} = 0 \Leftrightarrow (2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2)\sqrt{(3^x+1)(3^x - m)} = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -\frac{1}{2} \\ 3^x = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \log_3 m \end{array}\right.$.

Với $m = 1$ thì $x = \log_3 m = 0$ (loại). Do đó phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x = 4,\ x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Với $m>1$ thì $x=\log_3 m\ \ >0$ nên luôn nhận nghiệm $x=\log_3 m$.

Mà $4>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\le \log_3 m<4 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\le m<81$.

m nguyên dương nên $m\in\{3;\ 4;\ ..,\ 80\}$.

Tổng $1+2+3+...+80-2=3238$.

Câu 4. Cho phương trình $\left(2\log_3^2 x-3\log_3 x-2\right)\sqrt{3^x-m.2^x}=0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 741. **B.** 742. **C.** 740. **D.** 703.

Lời giải

Chọn A.

Viết lại phương trình $\left(2\log_3^2 x-3\log_3 x-2\right)\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^x-m}=0$

Đk: $\begin{cases} x>0 \\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^x\ge m \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\ge \log_{\frac{3}{2}} m \end{cases}$ (Do m nguyên dương nên tồn tại $\log_{\frac{3}{2}} m$).

$$\left(2\log_3^2 x-3\log_3 x-2\right)\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^x-m}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x=2 \\ \log_3 x=-\dfrac{1}{2} \\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^x=m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=9>0 \\ x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}>0 \\ x=\log_{\frac{3}{2}} m \end{array}\right..$$

Với $m=1$ thì $x=\log_{\frac{3}{2}} m=0$ (loại). Do đó phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x=9,\ x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Với $m>1$ thì $x=\log_{\frac{3}{2}} m\ \ >0$ nên luôn nhận nghiệm $x=\log_{\frac{3}{2}} m$.

Mà $9>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt khi

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\le \log_{\frac{3}{2}} m<9 \Leftrightarrow 1,26\approx\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\le m<\left(\dfrac{3}{2}\right)^9\approx 38,44$.

m nguyên dương nên $m\in\{2;3;\ 4;\ ..,\ 38\}$.

Như vậy có tất cả các giá trị m là $\{1;2;3;;4;...;38\}$.

Tổng $1+2+3+...+38=741$.

Câu 5. Cho phương trình $\left(2^{2\lg^2 x-\lg x}-4^{1+\lg x}\right)\sqrt{3^x-m}=0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng của phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất S bằng

A. $3^{100}+1$. **B.** $3^{100}-1$. **C.** 3^{99}. **D.** $3^{99}+1$.

Lời giải

Chọn A

Đk: $\begin{cases} x > 0 \\ 3^x \ge m \end{cases}$.

$\left(2^{2\lg^2 x - \lg x} - 4^{1+\lg x}\right)\sqrt{3^x - m} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = m \\ 2^{2\lg^2 x - \lg x} = 4^{1+\lg x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_3 m \\ 2\lg^2 x - \lg x = 2 + 2\lg x \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x = 2 \\ \lg x = -\dfrac{1}{2} \\ 3^x = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 100 \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ x = \log_3 m \end{array}\right.$.

Với $m = 1$ thì $x = \log_3 m = 0$ (loại). Do đó phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x = 100,\ x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Với $m > 1$ thì $x = \log_3 m\ > 0$ nên luôn nhận nghiệm $x = \log_3 m$.

Mà $100 > \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\dfrac{1}{\sqrt{10}} \le \log_3 m < 100 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{\sqrt{10}}} \le m < 3^{100}$.

m nguyên dương nên $m \in \left\{2; 3;\ 4;\ ..,\ 3^{100} - 1\right\}$.

Do đó tổng của phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất bằng $3^{100} + 1$.

Câu 6. Cho phương trình $\left(3.2^x.\log x - 12\log x + 2^x - 4\right)\sqrt{5^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 24. **B.** 25. **C.** 23. **D.** 22.

Lời giải

Chọn D

Đk: $\begin{cases} x > 0 \\ 5^x \ge m; (m > 0) \end{cases}$.

$\left(3.2^x.\lg x - 12\lg x + 2^x - 4\right)\sqrt{5^x - m} = 0 \Leftrightarrow \left(3\lg x + 1\right)\left(2^x - 4\right)\sqrt{5^x - m} = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 4 \\ \lg x = -\dfrac{1}{3} \\ 5^x = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{10}} \\ x = \log_5 m; (m > 0) \end{array}\right.$.

Với $m = 1$ thì $x = \log_5 m = 0$ (loại). Do đó phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x = 2,\ x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{10}}$.

Với $m > 1$ thì $x = \log_5 m\ > 0$ nên luôn nhận nghiệm $x = \log_5 m$.

Mà $2 > \dfrac{1}{\sqrt[3]{10}}$ và vì $x \ge \log_5 m$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt khi

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{10}} \le \log_5 m < 2 \Leftrightarrow 5^{\frac{1}{\sqrt[3]{10}}} \le m < 25$, m nguyên nên $m \in \left\{3;\ 4;\ ..,\ 24\right\}$.

Vậy có 22 giá trị m nguyên dương.

Câu 7. Cho phương trình $\log_2^2 x+3m\log_2(3x)+2m^2-2m-1=0$ (m là tham số thực). Tìm tất cả các số thực m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;9]$.

A. $-3\le m\le\frac{1}{2}$. **B.** $\forall m\ne 2$. **C.** $\varnothing$. **D.** $-\frac{1}{2}\le m\le\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>0$.

PT: $\log_3^2 x+3m\log_3(3x)+2m^2-2m-1=0\Leftrightarrow \log_3^2 x+3m\log_3 x+2m^2+m-1=0$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x=-m-1\\ \log_3 x=-2m+1\end{array}\right.$$

Ta có $x\in[1;9]\Leftrightarrow \log_3 x\in[0;2]$

Vậy để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;9]$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}0\le -m-1\le 2\\ 0\le -2m+1\le 2\\ -m-1\ne -2m+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\le m\le -1\\ -\frac{1}{2}\le m\le\frac{1}{2}\\ m\ne 2\end{cases}$$ (Hệ vô nghiệm).

Câu 8. Cho phương trình $\log_2^2 x+(m-3)\log_2 x-2m^2+3m=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có đúng một nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{1}{4};32\right]$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\log_2 x$. Do $x\in\left[\frac{1}{4};32\right]$ nên $t\in[-2;5]$ và ứng với mỗi $t\in[-2;5]$ cho ta một giá trị $x\in\left[\frac{1}{4};32\right]$. Khi đó phương trình trở thành:

$$t^2+(m-3)t-2m^2+3m=0\Leftrightarrow t^2+mt-2m^2-3t+3m=0$$

$$\Leftrightarrow (t-m)(t+2m)-3(t-m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=m\\ t=3-2m\end{array}\right..$$

Với m nguyên, để phương trình có nghiệm duy nhất $t\in[-2;5]$, ta có các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases}m=3-2m\\ m\in[-2;5]\end{cases}\Rightarrow m=1$.

TH2: $\begin{cases}3-2m\notin[-2;5]\\ m\in[-2;5]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}3-2m<-2\\ 3-2m>5\end{array}\right.\\ m\in[-2;5]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>5/2\\ m<-1\end{array}\right.\\ m\in[-2;5]\end{cases}\Rightarrow m\in\{-2;3;4;5\}$.

TH3: $\begin{cases} m \notin [-2;5] \\ 3-2m \in [-2;5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>5 \end{array}\right. \\ -2 \le 3-2m \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>5 \end{array}\right. \\ -1 \le m \le \dfrac{5}{2} \end{cases}$ vô nghiệm

Vậy tổng cộng có 5 số nguyên của m thỏa đề.

Câu 9. Cho phương trình $9^x-(m+5)3^x+3m+6=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;2]$.

A. 6. **B.** 7. **C.** $\forall m \in R$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

$9^x-(m+5)3^x+3m+6=0$

$\Leftrightarrow 3^x\left(3^x-3\right)-(m+2)\left(3^x-3\right)=0 \Leftrightarrow \left(3^x-3\right)\left(3^x-m-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x=3 \\ 3^x=m+2 \end{array}\right.$.

$3^x=3 \Leftrightarrow x=1$ thỏa mãn $x \in [1;2]$.

Mặt khác: $x \in [1;2] \Leftrightarrow 3^x \in [3;9]$. Vậy để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;2]$ khi và chỉ khi $\begin{cases} 3 \le m+2 \le 9 \\ m+2 \ne 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le m \le 7 \\ m \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1<m \le 7$

mà m nguyên suy ra $m=\{2;3;4;5;6;7\}$ nên có 6 giá trị nguyên của m.

Câu 10. Cho phương trình $\log_2^2 x-\log_2 x^2-m^2-2m=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có đúng một nghiệm thuộc đoạn $\left[\dfrac{1}{8};16\right]$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\log_2 x$. Do $x \in \left[\dfrac{1}{8};16\right]$ nên $t \in [-3;4]$ và ứng với mỗi $t \in [-3;4]$ cho ta một giá trị $x \in \left[\dfrac{1}{8};16\right]$. Khi đó phương trình trở thành:

$t^2-2t-m^2-2m=0 \Leftrightarrow (t-m)(t+m)-2(t+m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-m \\ t=m+2 \end{array}\right.$.

Với m nguyên, để phương trình có nghiệm duy nhất $t \in [-3;4]$, ta có các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases} -m=m+2 \\ -m \in [-3;4] \end{cases} \Rightarrow m=-1$.

TH2: $\begin{cases} m+2 \notin [-3;4] \\ -m \in [-3;4] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m+2<-3 \\ m+2>4 \end{array}\right. \\ m \in [-4;3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-5 \\ m>2 \end{array}\right. \\ m \in [-4;3] \end{cases} \Rightarrow m=3$.

TH3: $\begin{cases} -m \notin [-3;4] \\ m+2 \in [-3;4] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -m<-3 \\ -m>4 \end{array}\right. \\ m \in [-5;2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>3 \\ m<-4 \end{array}\right. \\ m \in [-5;2] \end{cases} \Rightarrow m=-5$.

Vậy tổng cộng có 5 số nguyên của m thỏa đề.

Câu 11. Cho phương trình $\log_2^2(2x)-2\log_2 x^2-m-1=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có đúng một nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2};16\right]$?

A. 10. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x>0$.

Biến đổi phương trình về dạng

$(1+\log_2 x)^2-4\log_2 x-m-1=0 \Leftrightarrow \log_2^2 x-2\log_2 x=m$.

Đặt $t=\log_2 x$, với mỗi $x \in \left[\frac{1}{2};16\right]$ thì cho một giá trị $t \in [-1;4]$.

Khi đó ta được phương trình $t^2-2t=m$.

Xét hàm số $f(t)=t^2-2t$ trên đoạn $[-1;4]$.

Ta có $f'(t)=2t-2$, $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=1$.

Bảng biến thiên của $f(t)$

t	-1		1		4
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	8

Từ bảng biến thiên suy ra $m \in \{-1\} \cup (3;8] \Rightarrow m=\{1;4;5;6;7;8\}$ có 6 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 12. Cho phương trình $\left(\log_2^2 x-\log_2 x^2-m^2+2m\right)\sqrt{3-\log_2 x}=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt $x \geq \frac{1}{8}$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta cần tìm các giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt $x \in \left[\frac{1}{8};8\right]$.

Đặt $t = \log_2 x$. Do $x \in \left[\frac{1}{8};8\right]$ nên $t \in [-3;3]$ và ứng với mỗi $t \in [-3;3]$ cho ta một giá trị $x \in \left[\frac{1}{8};8\right]$.

Với điều kiện $t \in [-3;3]$ phương trình trở thành:

$$\left(t^2 - 2t - m^2 + 2m\right)\sqrt{3-t} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = m \\ t = 2-m \end{array}\right. \quad (*).$$

Với m nguyên, để phương trình đầu có 3 nghiệm $x \in \left[\frac{1}{8};8\right] \Leftrightarrow (*)$ có 3 nghiệm phân biệt $t \in [-3;3] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 \le 2-m < m < 3 \\ -3 \le m < 2-m < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < m < 3 \\ -1 < m < 1 \end{array}\right. \Rightarrow m \in \{0;2\}$.

Câu 13. Cho phương trình $\left(1+\sqrt{2020^x}\right)^2 - (m+2)\sqrt{2020^x} + m - 2 = 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;2]$ là

A. $[2;2021]$. **B.** $\forall m \in R$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(2;2021]$.

Lời giải

Chọn D

$$\left(1+\sqrt{2020^x}\right)^2 - (m+2)\sqrt{2020^x} + m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{2020^x} + 2020^x - m\sqrt{2020^x} - 2\sqrt{2020^x} + m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2020^x - m\sqrt{2020^x} + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2020^x} = 1 \\ \sqrt{2020^x} = m-1 \end{array}\right..$$

Theo bài ra ta có: $x \in [0;2] \Leftrightarrow \sqrt{2020^x} \in [1;2020]$.

Vậy để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;2]$ khi và chỉ khi $\begin{cases} 1 \le m-1 \le 2020 \\ m-1 \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le m \le 2021 \\ m \ne 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \le 2021$.

Câu 14. Cho phương trình $\left(\log_3^2 x + (m-3)\log_3 x - 2m^2 + 3m\right)\sqrt{1-\log_{81} x} = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt $x \ge \frac{1}{27}$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta cần tìm các giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt $x \in \left[\frac{1}{27};81\right]$.

Đặt $t=\log_3 x$. Do $x\in\left[\frac{1}{27};81\right]$ nên $t\in[-3;4]$ và ứng với mỗi $t\in[-3;4]$ cho ta một giá trị $x\in\left[\frac{1}{27};81\right]$. Với điều kiện $t\in[-3;4]$ phương trình trở thành:

$$\left(t^2+(m-3)t-2m^2+3m\right)\sqrt{4-t}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\t=m\\t=3-2m\end{array}\right.\quad(*).$$

Với m nguyên, phương trình đầu có 3 nghiệm phân biệt $x\in\left[\frac{1}{27};81\right]\Leftrightarrow(*)$ có 3 nghiệm phân biệt $t\in[-3;4]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3\le m<3-2m<4\\-3\le 3-2m<m<4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{2}<m<1\\1<m<4\end{array}\right.\Rightarrow m\in\{0;2;3\}$.

Vậy tổng cộng có 3 số nguyên của m thỏa đề.

Câu 15. Cho phương trình $\log_{2021}^2(2021x)-(m+2)\log_{2021}x=2-m$ (m là tham số thực). Tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[1;2021^3\right]$ là:

A. 10. **B.** 8. **C.** vô số. **D.** 13.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình

$\log_{2021}^2(2021x)-(m+2)\log_{2021}x=2-m$

$\Leftrightarrow\log_{2021}^2(2021x)-(m+2)\log_{2021}x+m-2=0$ (1)

Điệu kiện $x>0$

Phương trình $(1)\Leftrightarrow(1+\log_{2021}x)^2-(m+2)\log_{2021}x+m-2=0$

$\Leftrightarrow\log^2{}_{2021}x-m\log_{2021}x+m-1=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_{2021}x=1\\\log_{2021}x=m-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2021\\x=2021^{m-1}\end{array}\right.$

Để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[1;2021^3\right]$ thì:

$$\begin{cases}2021^{m-1}\ne 2021\\1\le 2021^{m-1}\le 2020^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne 2\\0\le m-1\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne 2\\1\le m\le 4\end{cases}\Rightarrow m\in\{1;3;4\}$$

Vậy tổng các giá trị m nguyên là: $1+3+4=8$.

Câu 16. Cho phương trình $\left(\log_2^2x-\log_2x^2-m^2+2m\right)\sqrt{3-\log_2x}=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $x\ge\frac{1}{8}$?

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Ta cần tìm các giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm $x\in\left[\frac{1}{8};8\right]$.

Đặt $t=\log_2 x$. Do $x\in\left[\frac{1}{8};8\right]$ nên $t\in[-3;3]$ và ứng với mỗi $t\in[-3;3]$ cho ta một giá trị $x\in\left[\frac{1}{8};8\right]$.

Với điều kiện $t\in[-3;3]$ phương trình trở thành:

$$\left(t^2-2t-m^2+2m\right)\sqrt{3-t}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=m\\t=2-m\end{array}\right..$$

Với m nguyên, phương trình đầu có 2 nghiệm $x\in\left[\frac{1}{8};8\right]\Leftrightarrow$ (*) có 2 nghiệm phân biệt $t\in[-3;3]$, ta có các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases}m=2-m\\m\in[-3;3)\end{cases}\Rightarrow m=1$.

TH2: Nếu $m=3$ thì phương trình có 2 nghiệm $t=-1,t=3$. Nhận $m=3$.

TH3: Nếu $2-m=3\Leftrightarrow m=-1$ thì phương trình có 2 nghiệm $t=-1,t=3$. Nhận $m=-1$.

TH4: $\begin{cases}2-m\notin[-3;3]\\m\in[-3;3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}2-m<-3\\2-m>3\end{array}\right.\\m\in[-3;3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>1\\m<-1\end{array}\right.\\m\in[-3;3)\end{cases}\Rightarrow m\in\{-3;-2;2\}$.

TH5: $\begin{cases}m\notin[-3;3]\\2-m\in[-3;3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-3\\m>3\end{array}\right.\\-m\in[-5;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-3\\m>3\end{array}\right.\\m\in(-1;5]\end{cases}\Rightarrow m\in\{4;5\}$.

Vậy $m\in\{-3;2;-1;1;2;3;4;5\}$ tổng cộng có 5 số nguyên của m thỏa đề.

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $9^{1+\sqrt{1-x^2}}-(m+2)3^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$ có nghiệm thực?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $-1\le x\le 1$. Đặt $t=3^{1+\sqrt{1-x^2}}$, với $-1\le x\le 1\Rightarrow 3\le t\le 9$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $t^2-(m+2)t+2m+1=0$ (1).

Ta có $(1)\Leftrightarrow\frac{t^2-2t+1}{t-2}=m$ (2). Khi đó yêu cầu bài toán trở thành tìm m để phương trình: (2) có nghiệm $t\in[3;9]$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2-2t+1}{t-2}$ trên $[3;9]$, có $f'(t)=\frac{t^2-4t+3}{(t-2)^2}>0,\forall t\in[3;9]$. Do đó, $f(t)$ đồng biến trên $[3;9]$. Suy ra, phương trình (2) có nghiệm trên $[3;9]$ khi và chỉ khi

$$f(3) \le m \le f(9) \Leftrightarrow 4 \le m \le \frac{64}{7}.$$

Vậy có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 18. Cho phương trình $\log_a x^2 + 2\log_a(x+2) = 1$. Số giá trị nguyên của $a \in (0;2020)$ để phương trình trên có 1 nghiệm thực là

A. 0. **B.** 2018. **C.** 2019. **D.** 2020.

Lời giải

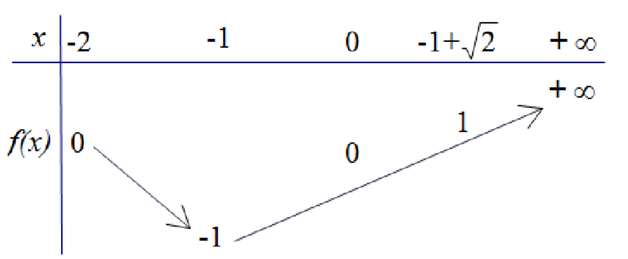
Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x > -2 \\ x \ne 0 \\ 0 < a \ne 1 \end{cases}$.

Phương trình $\Leftrightarrow \log_a\left[x(x+2)\right]^2 = 1 \Leftrightarrow \left[x(x+2)\right]^2 = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2+2x=\sqrt{a} & (1) \\ x^2+2x=-\sqrt{a} & (2) \end{array}\right.$.

Phương trình đã cho có 1 nghiệm thực khi và chỉ khi một trong hai phương trình (1) và (2) chỉ có 1 nghiệm $x \in (-2;+\infty)\setminus\{0\}$.

Xét hàm số $f(x) = x^2 + 2x$ trên $D = (-2;+\infty)\setminus\{0\}$, có bảng biến thiên như sau:



Từ bảng biến thiên, ta thấy yêu cầu bài toán thỏa mãn khi $-\sqrt{a} < -1 \Leftrightarrow a > 1$.

Do đó, có 2018 giá trị nguyên của a trên $(0;2020)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 19. Cho phương trình $\log_{\sqrt{2}}(mx - 6x^3) + 2\log_{\frac{1}{2}}(-14x^2 + 29x - 2) = 0$, số giá trị nguyên của m để phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt là

A. 1. **B.** 0. **C.** 23. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

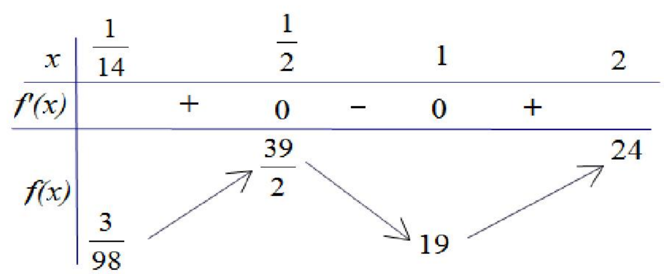
Phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} -14x^2 + 29x - 2 > 0 \\ \log_2(mx - 6x^3) = \log_2(-14x^2 + 29x - 2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{14} < x < 2 \\ mx - 6x^3 = -14x^2 + 29x - 2 \quad (1) \end{cases}$

Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm của (1), nên $(1) \Leftrightarrow 6x^2 - 14x + 29 - \dfrac{2}{x} = m \quad (2)$.

Yêu cầu bài toán trở thành: tìm m để phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt trên $\left(\frac{1}{14};2\right)$.

Xét hàm số $f(x)=6x^2-14x+29-\frac{2}{x^2}$ trên $\left(\frac{1}{14};2\right)$, có $f'(x)=12x-14+\frac{2}{x^2}$.. Suy ra bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta thấy, phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt trên $\left(\frac{1}{14};2\right) \Leftrightarrow 19<m<\frac{39}{2}$.

Do vậy, không có giá trị nguyên nào của m thỏa mãn đề bài.

Câu 20. Phương trình $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0$ có nghiệm trên đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$ khi $m\in[a;b]$. Khi đó giá trị biểu thức $T=a.b$ bằng

A. 0. **B.** -1. **C.** $-\frac{1}{4}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{\log_3^2 x+1}\Rightarrow t^2-1=\log_3^2 x$. Khi đó $x\in\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]\Rightarrow t\in[1;2]$ và phương trình đã cho trở thành:

$t^2-1+t-2m-1=0\Leftrightarrow t^2+t=2m+2\ (2)$.

Yêu cầu bài toán trở thành: tìm m để phương trình (2) có nghiệm $t\in[1;2]$.

Xét hàm số: $f(t)=t^2+t$ có $f'(t)=2t+1>0,\forall t\in[1;2]$, suy ra hàm số đồng biến trên $[1;2]$.

Do đó, phương trình (2) có nghiệm trên $[1;2]$

$\Leftrightarrow f(1)\le 2m+2\le f(2)\Rightarrow 2\le 2m+2\le 6\Leftrightarrow 0\le m\le 2$.

Suy ra $a=0;b=2\Rightarrow T=a.b=0$.

Câu 21. Phương trình $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0$ có nghiệm trên đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$ khi $m\in[a;b]$. Khi đó giá trị biểu thức $T=a.b$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** $-\frac{1}{4}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{\log_3^2 x+1}\Rightarrow t^2-1=\log_3^2 x$. Khi đó $x\in\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]\Rightarrow t\in[1;2]$ và phương trình đã cho trở thành: $t^2-1+t-2m-1=0\Leftrightarrow t^2+t=2m+2\ \ (2)$.

Yêu cầu bài toán trở thành: tìm m để phương trình (2) có nghiệm $t\in[1;2]$.

Xét hàm số: $f(t)=t^2+t$ có $f'(t)=2t+1>0,\forall t\in[1;2]$, suy ra hàm số đồng biến trên $[1;2]$.

Do đó, phương trình (2) có nghiệm trên $[1;2]\Leftrightarrow f(1)\le 2m+2\le f(2)\Leftrightarrow 0\le m\le 2$.

Suy ra $a=0;b=2\Rightarrow T=a.b=0$.

Câu 22. Cho phương trình $\left(3\log_3^2 x-2\log_3 x-1\right)\sqrt{5^x-m}=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. Vô số. **B.** 120. **C.** 121. **D.** 124.

Lời giải

Chọn C

Đk: $\begin{cases}x>0\\5^x\ge m\end{cases}$ (*)

Phương trình $\left(3\log_3^2 x-2\log_3 x-1\right)\sqrt{5^x-m}=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x=1\\ \log_3 x=-\dfrac{1}{3}\\ 5^x=m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\\ x=\log_5 m\end{array}\right..$$

+Với $m=1$ thì $x=\log_5 m=0$ (loại nghiệm này do không thỏa (*)). Do đó phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x=3,\ x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$. Suy ra nhận $m=1$.

+ Với $m>1$ thì $x=\log_5 m\ >0$ nên luôn nhận nghiệm $x=\log_5 m$.

Mà $3>\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\le\log_5 m<3\Leftrightarrow 3.052\approx 5^{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}\le m<125$.

Do m nguyên dương nên $m\in\{4;\ ..,\ 124\}$.

Vậy cả hai trường hợp có 121 giá trị m nguyên dương.

Câu 23. Cho phương trình $\log_4\left(x^2-2x+1\right)-\log_2(x-2)=1-\log_2 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>2$.

Có $\log_4\left(x^2-2x+1\right)-\log_2(x-2)=1-\log_2 m\Leftrightarrow\log_2\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)=\log_2\dfrac{m}{2}\Leftrightarrow\dfrac{m}{2}=\dfrac{x-2}{x-1}$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$ trên $(2;+\infty)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}>0,\ \forall x>2$.

Bảng biến thiên $f(x)$:

x	2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

Từ bảng biến thiên ta suy ra phương trình có nghiệm khi $0<\dfrac{m}{2}<1 \Leftrightarrow 0<m<2$.

Có một giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm là $m=1$.

Câu 24. Tìm tập hợp tất cả giá trị của tham số thực m để phương trình $\log_2^2 x+4\log_2 x-m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $(-4;+\infty)$. **B.** $[-4;+\infty)$. **C.** $[-4;0)$. **D.** $[-2;0]$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\log_2 x$, với $x\in(0;1)\Rightarrow t<0$.

Để phương trình đã cho có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$ thì phương trình $t^2+4t-m=0$ có nghiệm $t<0$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+4t\,(t<0)$; $f'(t)=2t+4=0\Leftrightarrow t=-2$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy giá trị cần tìm là $m\in[-4;+\infty)$.

Câu 25. Cho phương trình $2020\left(-2\log_2^3 x+7\log_2^2 x+4\log_2(2x)\right)\sqrt{3^x-m}=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 79. **B.** 80. **C.** Vô số. **D.** 78.

Lời giải

Chọn A

Đk: $\begin{cases} x>0 \\ 3^x\ge m \end{cases}$ (*)

$$2020\left(-2\log_2^3 x+7\log_2^2 x+4\log_2(2x)\right)\sqrt{3^x-m}=0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x-2)^2.(2\log_2 x+1)\sqrt{3^x-m}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -\dfrac{1}{2} \\ 3^x = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \log_3 m \end{array}\right. .$$

+ Với $m=1$ thì $x=\log_3 m=0$ (loại nghiệm này do không thỏa (*)). Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x=4,\ x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Suy ra nhận $m=1$.

+ Với $m>1$ thì $x=\log_3 m\ >0$ nên luôn nhận nghiệm $x=\log_3 m$.

Mà $4>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt khi

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \le \log_3 m < 4 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \le m < 81$.

Do m nguyên dương nên $m \in \{3;\ 4;\ ..,\ 80\}$.

Vậy cả hai trường hợp có 79 giá trị m nguyên dương.

Câu 26. Cho phương trình $\left(-2\log_3^2 x+3\log_3 x+2\right)\sqrt{5^x-m.3^x}=0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 4950. **B.** 2475. **C.** Vô số. **D.** 4949.

Lời giải

Chọn A

Phương trình tương đương: $\left(-2\log_3^2 x+3\log_3 x+2\right)\sqrt{\left(\dfrac{5}{3}\right)^x-m}=0$.

Điều kiện $\begin{cases} x>0 \\ \left(\dfrac{5}{3}\right)^x \ge m \end{cases}$ (*)

$$\left(-2\log_3^2 x+3\log_3 x+2\right)\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^x-m}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 2 \\ \log_3 x = -\dfrac{1}{2} \\ \left(\dfrac{5}{3}\right)^x = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9 \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ x = \log_{\frac{5}{3}} m \end{array}\right. .$$

+ Với $m=1$ thì $x=\log_{\frac{5}{3}} m=0$ (loại nghiệm này do không thỏa mãn (*)). Do đó phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x=9$, $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Suy ra nhận $m=1$.

+ Với $m>1$ thì $x=\log_{\frac{5}{3}} m\ >0$ nên luôn nhận nghiệm $x=\log_{\frac{5}{3}} m$.

Mà $9>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\le \log_{\frac{5}{3}} m<9$

$\Leftrightarrow 1,343\approx\left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\le m<\left(\dfrac{5}{3}\right)^{9}\approx 99,229$.

Do m nguyên dương nên $m\in\{2;3;4;...,99\}$.

Vậy cả hai trường hợp suy ra $S=1+2+3+...+99=4950$.

Câu 27. Cho phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^{2}(x-2)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x-2}+4m-4=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm thuộc $\left[\dfrac{5}{2};4\right]$.

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x-2>0\Leftrightarrow x>2$.

Ta có: $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^{2}(x-2)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x-2}+4m-4=0$

$\Leftrightarrow 4(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^{2}(x-2)-4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}(x-2)+4m-4=0 \quad (*)$.

Đặt $t=\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$. Vì $x\in\left[\dfrac{5}{2};4\right]\Rightarrow t\in[-1;1]$.

Khi đó phương trình (*) trở thành $4(m-1)t^2-4(m-5)t+4m-4=0$

$\Leftrightarrow (m-1)t^2-(m-5)t+m-1=0\Leftrightarrow m=\dfrac{t^2-5t+1}{t^2-t+1} \quad (**)$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-5t+1}{t^2-t+1}, t\in[-1;1]$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{4t^2-4}{(t^2-t+1)^2}$.

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=\pm 1$.

Ta có bảng biến thiên:

t	$-\infty$	-2	-1		1	2	$+\infty$
$f'(t)$	[redacted]			$-$	[redacted]		
$f(t)$	[redacted]		$\dfrac{7}{3}$	$\searrow$	-3	[redacted]	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $(**)$ có nghiệm khi $-3\le m\le\dfrac{7}{3}$.

Suy ra có 6 giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm thuộc $\left[\dfrac{5}{2};4\right]$.

Câu 28. Cho phương trình $\left(2\log_2^2 x-3\log_2 x-2\right)\sqrt{16^x+\left(1-m\right)4^x-m}=0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng ba nghiệm phân biệt. Tổng tất cả các phần tử của S là

A. 32637. **B.** 32640. **C.** 255. **D.** 256.

Lời giải

Chọn A

Viết lại phương trình $\left(2\log_2^2 x-3\log_2 x-2\right)\sqrt{\left(4^x+1\right)\left(4^x-m\right)}=0$

Đk: $\begin{cases} x>0 \\ 4^x\ge m \end{cases}$ (*)

Với điều kiện trên phương trình đã cho tương đương:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=2 \\ \log_2 x=-\dfrac{1}{2} \\ 4^x=m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x=\log_4 m \end{array}\right. .$$

Với $m=1$ thì $x=\log_4 m=0$ (loại nghiệm này do không thỏa (*)). Do đó phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x=4,\ x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Suy ra loại $m=1$.

Với $m>1$ thì $x=\log_4 m\ >0$ nên luôn nhận nghiệm $x=\log_4 m$.

Mà $4>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt khi

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\log_4 m<4 \Leftrightarrow 2,665\approx 4^{\frac{1}{\sqrt{2}}}<m<256$.

Do m nguyên dương nên $m\in\{3;\ 4;\ ..,\ 255\}$.

Ta có $1+2+3+...+255=32640$ suy ra $S=32640-3=32637$.

Câu 29. Giá trị lớn nhất của tham số m sao cho bất phương trình $1+\log_5\left(x^2+1\right)\ge\log_5\left(mx^2+4x+m\right)$ nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $mx^2+4x+m>0,\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ \Delta'=4-m^2<0 \end{cases} \Leftrightarrow m>2$

Ta có

$1+\log_5\left(x^2+1\right)\ge\log_5\left(mx^2+4x+m\right)$

$\Leftrightarrow \log_5\left[5\left(x^2+1\right)\right] \geq \log_5\left(mx^2+4x+m\right)$

$\Leftrightarrow 5\left(x^2+1\right) \geq mx^2+4x+m$

$\Leftrightarrow m\left(x^2+1\right) \leq 5x^2-4x+5$

$\Leftrightarrow m \leq \dfrac{5x^2-4x+5}{x^2+1}$

Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{5x^2-4x+5}{x^2+1}$

Ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{4x^2-4}{\left(x^2+1\right)^2}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	5

Từ bảng biến thiên ta suy ra $m \leq \dfrac{5x^2-4x+5}{x^2+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m \leq 3$

Kết hợp với điều kiện $m > 2$ ta được $2 < m \leq 3$.

Vậy giá trị lớn nhất của tham số m cần tìm là 3.

Câu 30. Giá trị lớn nhất của tham số m sao cho bất phương trình $1+\log_5\left(x^2+1\right) \geq \log_5\left(mx^2+4x+m\right)$ nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $mx^2+4x+m>0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ \Delta'=4-m^2<0 \end{cases} \Leftrightarrow m>2$.

$1+\log_5\left(x^2+1\right)\geq \log_5\left(mx^2+4x+m\right)$

$\Leftrightarrow \log_5\left[5\left(x^2+1\right)\right]\geq \log_5\left(mx^2+4x+m\right)$

$\Leftrightarrow 5\left(x^2+1\right)\geq mx^2+4x+m$

$\Leftrightarrow m\left(x^2+1\right)\leq 5x^2-4x+5$

$\Leftrightarrow m\leq \dfrac{5x^2-4x+5}{x^2+1}$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{5x^2-4x+5}{x^2+1}$

Ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{4x^2-4}{\left(x^2+1\right)^2}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	5

Từ bảng biến thiên ta suy ra $m\leq \dfrac{5x^2-4x+5}{x^2+1}$, $\forall x\in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m\leq 3$.

Kết hợp với điều kiện $m>2$ ta được $2<m\leq 3$.

Vậy giá trị lớn nhất của tham số m cần tìm là 3.

Câu 31. Cho phương trình $\left(-\log_7^2 x+3\log_7 x-2\right)\sqrt{5^x-m}=0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng của phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất S bằng

A. 5^{49}. **B.** $5^{49}-1$. **C.** 5^{48}. **D.** $5^{49}+1$.

Lời giải

Chọn A

Đk: $\begin{cases} x>0 \\ 5^x\geq m \end{cases}$ (*)

$\left(-\log_7^2 x+3\log_7 x-2\right)\sqrt{5^x-m}=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_7 x=1 \\ \log_7 x=2 \\ 5^x=m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=49 \\ x=\log_5 m \end{array}\right.$.

+ Với $m=1$ thì $x=\log_5 m=0$ (loại nghiệm này do không thỏa (*)). Do đó phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x=7,\ x=49$. Suy ra nhận $m=1$.

+ Với $m>1$ thì $x=\log_5 m\ >0$ nên luôn nhận nghiệm $x=\log_5 m$.

Mà $49>7$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $7\le \log_5 m<49 \Leftrightarrow 5^7\le m<5^{49}$, m nguyên nên $m\in\left\{78125;\ 78126;\ ...,\ 5^{49}-1\right\}$.

Phần tử nhỏ nhất là $m=1$

Phần tử lớn nhất là $m=5^{49}-1$

Vậy có $S=5^{49}$.

Câu 32. Cho phương trình $\left(2\log_2^2 x-5\log_2 x+2\right)\sqrt{5^x-m}=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 616. **B.** 615. **C.** vô số. **D.** 617.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\begin{cases} x>0 \\ 5^x-m\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ m\le 5^x\end{cases}$ (*).

Ta có $\left(2\log_2^2 x-5\log_2 x+2\right)\sqrt{5^x-m}=0$ $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\log_2^2 x-5\log_2 x+2=0 & (2) \\ \sqrt{5^x-m}=0 & (3)\end{array}\right.$.

Trong đó $(2)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=2 \\ \log_2 x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=\sqrt{2}\end{array}\right.$ (4).

Với $m>0$ thì $5^x=m\Leftrightarrow \log_5 m=x$.

Do đó, phương trình (1) có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi xảy ra các trường hợp sau:

TH1: (3) có nghiệm $x=\log_5 m\le 0\Leftrightarrow 0<m\le 1$. Kết hợp điều kiện (*) và (4) ta được $m=1$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt $x=\sqrt{2}$ và $x=4$.

TH2: $m>1$, khi đó (*) $\Leftrightarrow x\ge \log_5 m>0$.

Và do $4>\sqrt{2}$ nên (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\sqrt{2}\le \log_5 m<4$ $\Leftrightarrow 5^{\sqrt{2}}\le m<5^4$

Mà m nguyên dương nên ta có $m\in\left\{10,11,...,624\right\}$, có 615 giá trị của m.

Vậy có 616 giá trị nguyên dương của m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt.

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-2019;2019\right]$ để phương trình $2019^x+\dfrac{2x-1}{x+1}+\dfrac{mx-2m-1}{x-2}=0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?

A. 4038. **B.** 2019. **C.** 2017. **D.** 4039.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-1;2\right\}$.

Ta có

$$2019^x+\frac{2x-1}{x+1}+\frac{mx-2m-1}{x-2}=0$$

$$\Leftrightarrow\ 2019^x+\frac{2x-1}{x+1}+\frac{m(x-2)-1}{x-2}=0$$

$$\Leftrightarrow\ 2019^x+\frac{2x-1}{x+1}-\frac{1}{x-2}=-m. \qquad (*)$$

Đặt $f(x)=2019^x+\dfrac{2x-1}{x+1}-\dfrac{1}{x-2}$. Khi đó

$$f'(x)=2019^x\ln 2019+\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x-2)^2}>0\quad \forall x\in D.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	||	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình $(*)$ có 3 nghiệm thực phân biệt thì

$$-m>2\Rightarrow m<-2.$$

Mà $m\in[-2019;\,2019]$ và $m\in\mathbb{Z}$ nên có 2017 giá trị m thỏa mãn.

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tồn tại cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $e^{3x+5y}-e^{x+3y+1}=1-2x-2y$, đồng thời thỏa mãn $\log_3^2(3x+2y-1)-(m+6)\log_3 x+m^2+9=0$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có $e^{3x+5y}-e^{x+3y+1}=1-2x-2y\Leftrightarrow e^{3x+5y}+(3x+5y)=e^{x+3y+1}+(x+3y+1)$ (1)

Xét hàm số $f(t)=e^t+t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=e^t+1>0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow f(3x+5y)=f(x+3y+1)\Leftrightarrow 3x+5y=x+3y+1\Leftrightarrow 2y=1-2x$.

Thế vào phương trình còn lại ta được $\log_3^2 x-(m+6)\log_3 x+m^2+9=0$ (2)

Đặt $t=\log_3 x$. Số nghiệm của phương trình (2) chính là số nghiệm của phương trình

$$t^2-(m+6)t+m^2+9=0\ (3)$$

Phương trình (3) có nghiệm khi $\Delta\ge 0\Leftrightarrow -3m^2+12m\ge 0\Leftrightarrow 0\le m\le 4$.

Do đó có 5 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 35. Có bao nhiêu số nguyên của m để phương trình $\log_2(2x+m)-2\log_2 x=x^2-4x-2m-1$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\begin{cases}x>0\\ x>-\dfrac{m}{2}\end{cases}$

$\log_2(2x+m)-2\log_2 x=x^2-4x-2m-1$

$\Leftrightarrow \log_2(2x+m)-2\log_2 x=x^2-2(x+2m)-1$

$\Leftrightarrow \log_2(2x+m)+2(x+2m)+1=\log_2 x^2+x^2$

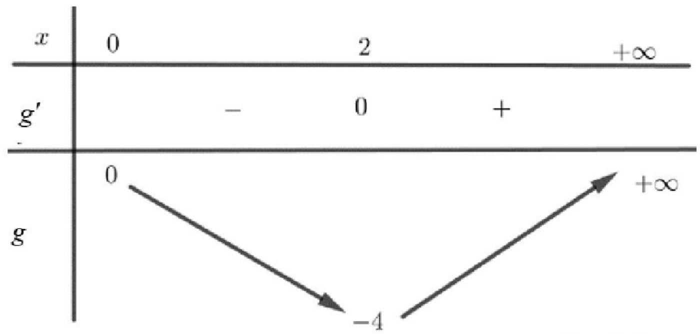
$\Leftrightarrow \log_2 2(2x+m)+2(x+2m)=\log_2 x^2+x^2$ (1)

Xét $f(u)=\log_2 u+u,(u>0)$

$f'(u)=\dfrac{1}{u\ln 2}+1>0$, do đó hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow f(2(2x+m))=f(x^2)\Leftrightarrow 2(2x+m)=x^2 \Leftrightarrow x^2-4x=2m$

Xét hàm số $g(x)=x^2-4x,(x>0)$



Phương trình có 2 nghiệm dương khi $-4<2m<0 \Leftrightarrow -2<m<0$ suy ra có 1 giá trị nguyên.

Câu 36. Tìm tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}}+(x^3-9x^2+24x+m).3^{x-3}=3^x+1$ có 3 nghiệm phân biệt.

A. 45. **B.** 34. **C.** 27. **D.** 38.

Lời giải

Chọn C

$3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}}+(x^3-9x^2+24x+m).3^{x-3}=3^x+1$

$\Leftrightarrow 3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}}+\left[(x-3)^3+27+m-3x\right].3^{x-3}=3^x+1$

$\Leftrightarrow 3^{\sqrt[3]{m-3x}}+(x-3)^3+m-3x+27=3^3+3^{3-x}\,(1)$

$(1)\Leftrightarrow 3^b+27+b^3-a^3=27.+3^a \Leftrightarrow 3^b+b^3=3^a+a^3$

Đặt $a=3-x;\ b=\sqrt[3]{m-3x}$, phương trình (1) trở thành

$3^b+27+b^3-a^3=27.+3^a \Leftrightarrow 3^b+b^3=3^a+a^3$.

Xét hàm số $f(t)=3^t+t^3 \Rightarrow f'(t)=3^t.\ln 3+3t^2\geq 0,\forall t\in\mathbb{R}$

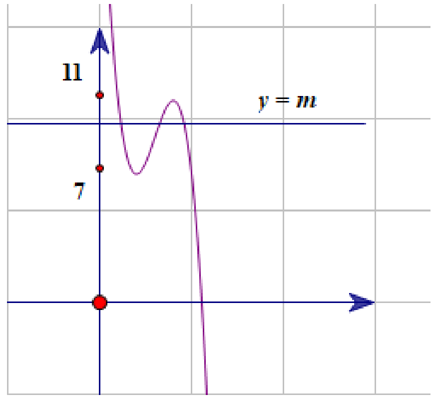
(1) $\Leftrightarrow f(a)=f(b)\Leftrightarrow a=b \Leftrightarrow 3-x=\sqrt[3]{m-3x}$

$\Leftrightarrow m=(3-x)^3+3x=-x^3+9x^2-24x+27$

$g(x)=-x^3+9x^2-24x+27 \Rightarrow g'(x)=-3x^2+18x-24$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=2 \vee x=4$

Đồ thị:



Dựa vào đồ thị ta thấy điều kiện để phương trình có 3 nghiệm phân biệt là $7 < m < 11$ hay $m \in \{8;9;10\}$.

Câu 37. Tìm các giá trị m để phương trình $3^{\sin x+\sqrt{5}\cos x-|m|+5} = \log_{\sin x+\sqrt{5}\cos x+10}\left(|m|+5\right)$ có nghiệm.

A. $\sqrt{6} \le m \le \sqrt{6}$. **B.** $-5 \le m \le 5$. **C.** $5-\sqrt{6} \le |m| \le 5+\sqrt{6}$. **D.** $-\sqrt{6} \le m \le 5$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$3^{\sin x+\sqrt{5}\cos x-|m|+5} = \log_{\sin x+\sqrt{5}\cos x+10}\left(|m|+5\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{3^{\sin x+\sqrt{5}\cos x+10}}{3^{|m|+5}} = \dfrac{\ln\left(|m|+5\right)}{\ln\left(\sin x+\sqrt{5}\cos x+10\right)}$

$\Leftrightarrow 3^{\sin x+\sqrt{5}\cos x+10}.\ln\left(\sin x+\sqrt{5}\cos x+10\right) = 3^{|m|+5}.\ln\left(|m|+5\right)$ (1)

Xét $f(t) = \ln(t).3^t, \forall t \ge 5$, vì $f'(t) = \dfrac{1}{t}3^t + \ln(t)3^t\ln(3) > 0, \forall t \ge 5$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(5;+\infty)$.

Khi đó

$(1) \Leftrightarrow f\left(\sin x+\sqrt{5}\cos x+10\right) = f\left(|m|+5\right)$

$\Leftrightarrow \sin x+\sqrt{5}\cos x+10 = |m|+5$

$\Leftrightarrow \sin x+\sqrt{5}\cos x+5 = |m|$

Mà $-\sqrt{6} \le \sin x+\sqrt{5}\cos x \le \sqrt{6}$ nên để phương trình có nghiệm ta phải có $5-\sqrt{6} \le |m| \le 5+\sqrt{6}$.

Câu 38. Cho phương trình $2^x + m = \log_2\left(x-m\right)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in \left(-18;18\right)$ để phương trình đã cho có hai nghiệm?

A. 20. **B.** 17. **C.** 9. **D.** 21.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x > m$

PT $\Leftrightarrow 2^x + x = x - m + \log_2\left(x-m\right) \Leftrightarrow 2^x + x = 2^{\log_5(x-m)} + \log_2(x-m)$ (1)

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t, \forall t \in \mathbb{R}$; Ta có: $f'(t) = 2^t\ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ (1) suy ra $f(x) = f\left(\log_2(x-m)\right) \Leftrightarrow x = \log_2(x-m) \Leftrightarrow x - m = 2^x \Leftrightarrow m = x - 2^x$

Xét hàm số $g\left(x\right)=x-2^{x}$ trên $\left(m;+\infty\right)$. Ta có: $g'\left(x\right)=1-2^{x}\ln 2$;

$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 2^{x}\ln 2=1\Leftrightarrow x=\log_2\left(\log_2 e\right)\ \Rightarrow g\left(\log_2\left(\log_2 e\right)\right)=\log_2\left(\log_2 e\right)-\log_2 e$

$\lim\limits_{x\to m^{+}} g\left(x\right)=m-2^{m}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

Bảng biến thiên:

x	m		$log_2(log_2 e)$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$m-2^{m}$	$\nearrow$	$log_2(log_2 e)-log_2 e$	$\searrow$	$-\infty$

Do đó. Phương trình đã cho có 2 nghiệm

$m-2^{m}<m<\log_2\left(\log_2 e\right)-\log_2 e\Leftrightarrow m<\log_2\left(\log_2 e\right)-\log_2 e\approx-0,91$

Vì $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\in\left(-18;18\right)\end{cases}$ nên $m\in\left\{-17;-16;-15;....;-1\right\}$

Vậy có 17 giá trị của m.

Câu 39. Cho phương trình

$$2^{-\left|\left|m^{3}\right|-3m^{2}+1\right|}.\log_{81}\left(\left|\left|x^{3}\right|-3x^{2}+1\right|+2\right)+2^{-\left|\left|x^{3}\right|-3x^{2}+1\right|-2}.\log_3\left(\frac{1}{\left|\left|m^{3}\right|-3m^{2}+1\right|+2}\right)=0$$

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị m nguyên để phương trình đã cho có 6 nghiệm hoặc 7 nghiệm hoặc 8 nghiệm phân biệt. Tính tổng bình phương tất cả các phần tử của tập S.

A. 20. **B.** 19. **C.** 14. **D.** 28.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2^{-\left|\left|m^{3}\right|-3m^{2}+1\right|}.\log_{81}\left(\left|\left|x^{3}\right|-3x^{2}+1\right|+2\right)+2^{-\left|\left|x^{3}\right|-3x^{2}+1\right|-2}.\log_3\left(\frac{1}{\left|\left|m^{3}\right|-3m^{2}+1\right|+2}\right)=0$

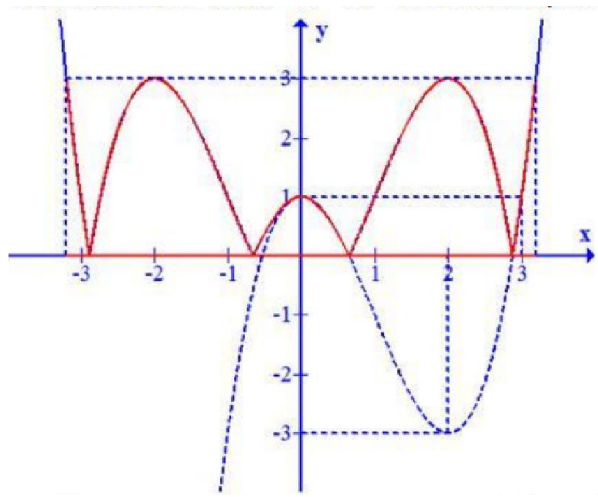
$\Leftrightarrow 2^{\left|\left|x^{3}\right|-3x^{2}+1\right|+2}.\log_3\left(\left|\left|x^{3}\right|-3x^{2}+1\right|+2\right)=2^{\left|\left|m^{3}\right|-3m^{2}+1\right|+2}.\log_3\left(\left|\left|m^{3}\right|-3m^{2}+1\right|+2\right)$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=2^{t}.\log_3 t$ với $t\geq 2$; Ta có $f'\left(t\right)=2^{t}\ln 2.\log_3 t+2^{t}.\frac{1}{t\ln 3}>0\forall t\geq 2$.

Suy ra hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\left(2;+\infty\right)$.

Do đó phương trình tương đương với $\left|\left|m^{3}\right|-3m^{2}+1\right|=\left|\left|x^{3}\right|-3x^{2}+1\right|\quad(1)$.

Vẽ đồ thị hàm số $g\left(x\right)=x^{3}-3x^{2}+1$ từ đó suy ra đồ thị $\left|g\left(x\right)\right|$ và đồ thị của $\left|g\left(\left|x\right|\right)\right|$ như hình vẽ.



Từ đồ thị suy ra (1) có $6,7,8$ nghiệm $\Leftrightarrow 0<\left|g\left(|m|\right)\right|<3$.

Từ đồ thị suy ra các giá trị nguyên của m là $-3,-1,0,1,3$.

Vậy $S=20$.

Câu 40. Cho phương trình $2^{x^2}\log_2\left(x^2+2\right)=4^{|x+a|}\left[\log_2\left(2|x+a|\right)+2\right]$. Gọi S là tập hợp các giá trị a thuộc đoạn $[0;2020]$ và chia hết cho 3 để phương trình có hai nghiệm. Hãy tính tổng các phần tử của S.

A. 0. **B.** 2041210. **C.** 680403. **D.** 680430.

Lời giải

Chọn C

Phương trình tương đương

$2^{x^2}\log_2\left(x^2+2\right)=2^{2|x+a|}\left[\log_2\left(2|x+a|\right)+2\right]$

$\Leftrightarrow 4.2^{x^2}\log_2\left(x^2+2\right)=4.2^{2|x+a|}\left[\log_2\left(2|x+a|\right)+2\right]$

$\Leftrightarrow 2^{x^2+2}\log_2\left(x^2+2\right)=2^{2|x+a|+2}\left[\log_2\left(2|x+a|\right)+2\right]$ (*)

Xét hàm số $f(t)=2^t\log t,\ t\geq 2$. Có $f'(t)=2^t\ln 2.\log_2 t+\dfrac{2^t}{t\ln 2}>0,\forall t\geq 2$, nên $f(t)$ đồng biến $[2;+\infty)$.

Khi đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} f\left(x^2+2\right)=f\left(2|x+a|+2\right) \\ x^2+2\geq 2;\ 2|x+a|+2\geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2=2|x+a|$ (1)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=2(x+a) \\ x^2=-2(x+a) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-2x-2a=0 & (2) \\ x^2+2x+2a=0 & (3) \end{array}\right.$

Phương trình (2) $\Delta'_{(2)}=1+2a$, phương trình (3) có $\Delta'_{(3)}=1-2a$.

Vì $\Delta'_{(2)}+\Delta'_{(3)}=2>0$ nên ít nhất một trong hai phương trình (2), (3) luôn có hai nghiệm phân biệt. Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, ta xét các trường hợp sau:

* TH1: (2) có hai nghiệm phân biệt: $\Delta'_{(2)}>0\Leftrightarrow 1+2a>0\Leftrightarrow a>-\dfrac{1}{2}$. Khi đó $\Delta'_{(3)}<0$ nên (3) vô nghiệm. Trường hợp này thỏa mãn điều kiện bài toán.

* TH1: (3) có hai nghiệm phân biệt: $\Delta'_{(3)} > 0 \Leftrightarrow 1-2a > 0 \Leftrightarrow a < \frac{1}{2}$. Khi đó $\Delta'_{(2)} < 0$ nên (2) vô nghiệm. Trường hợp này cũng thỏa mãn điều kiện bài toán.

Do đó phương trình đã cho có 2 nghiệm khi và chỉ khi $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Vì $a \in [0; 2020]$ và chia hết cho 3 nên $a \in S = \{3; 6; 9; 12; ..., 2019\}$

Tổng các phần tử của S là: $3+6+9+...+2019 = 3.1+3.2+3.3+...+3.673$

$= 3(1+2+3+...+673) = 3.\frac{673.674}{2} = 680403$

Câu 41. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số a để phương trình

$$4^{-|x-a|}\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-2x+3\right) + 2^{-x^2+2x}\log_{\frac{1}{2}}\left(2|x-a|+2\right) = 0$$

có 3 nghiệm thực phân biệt ?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

PT đã cho tương đương với $\frac{1}{2^{2|x-a|}}\log_{2^{\frac{1}{2}}}\left(x^2-2x+3\right) + \frac{1}{2^{x^2-2x}}\log_{2^{-1}}\left(2|x-a|+2\right) = 0$.

$\Leftrightarrow \frac{2}{2^{2|x-a|}}\log_2\left(x^2-2x+3\right) = \frac{1}{2^{x^2-2x}}\log_2\left(2|x-a|+2\right)$

$\Leftrightarrow 2^{x^2-2x+1}\log_2\left(x^2-2x+3\right) = 2^{2|x-a|}\log_2\left(2|x-a|+2\right)$

$\Leftrightarrow 2^{x^2-2x+3}\log_2\left(x^2-2x+3\right) = 2^{2|x-a|+2}\log_2\left(2|x-a|+2\right)$ (1)

Xét hàm số $f(t) = 2^t.\log_2 t, \forall t \geq 2$; Ta có: $f'(t) = 2^t \ln t + \frac{2^t}{t\ln 2} > 0, \forall t \geq 2 \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Từ (1) suy ra $f\left(x^2-2x+3\right) = f\left(2|x-a|+2\right) \Leftrightarrow x^2-2x+3 = 2|x-a|+2$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1 = 2|x-a|$ (*)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x+1 = 2(x-a) \\ x^2-2x+1 = -2(x-a) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-4x+2a+1 = 0 & (2) \\ x^2 = 2a-1 & (3) \end{array}\right.$$

Phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt nếu xảy ra một trong các trường hợp sau:

* TH1: (2) có hai nghiệm phân biệt và (3) có nghiệm kép khác hai nghiệm của (2):

$$\begin{cases} \Delta'_{(2)} > 0 \\ \Delta'_{(3)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2a > 0 \\ 2a-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{3}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

* TH2: (3) có hai nghiệm phân biệt và (2) có nghiệm kép khác hai nghiệm của (3):

$$\begin{cases} \Delta'_{(2)} = 0 \\ \Delta'_{(3)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2a = 0 \\ 2a-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ a > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

* TH3: (2) và (3) đều có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm chung:

Điều này xảy ra khi hệ $\begin{cases} x^2-4x+2a+1=0 \\ x^2=2a-1 \end{cases}$ có nghiệm

$$\begin{cases} x^2-4x+2a+1=0 \\ x^2=2a-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ a=1 \end{cases}$$

 Khi $a=1$ ta có: (2) trở thành $x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

(3) trở thành $x^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Khi đó: PT đã cho có 3 nghiệm.

Vậy $a \in \left\{\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}\right\}$.

Câu 42. Tìm tổng tất cả các giá trị của tham số a để phương trình $3^{x^2-2x+1-2|x-a|}=\log_{x^2-2x+3}\left(2|x-a|+2\right)$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

PT đã cho tương đương với $3^{x^2-2x+3-(2|x-a|+2)}=\dfrac{\ln\left(2|x-a|+2\right)}{\ln\left(x^2-2x+3\right)}$

$\Leftrightarrow 3^{x^2-2x+3}.\ln\left(x^2-2x+3\right)=3^{2|x-a|+2}.\ln\left(2|x-a|+2\right)$ (1).

Xét hàm số $f(t)=3^t.\ln t, \forall t\ge 2$; Ta có: $f'(t)=3^t\ln 3.\ln t+\dfrac{3^t}{t}>0, \forall t\ge 2 \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Từ (1) suy ra $f\left(x^2-2x+3\right)=f\left(2|x-a|+2\right) \Leftrightarrow x^2-2x+3=2|x-a|+2$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1=2|x-a|$ (*)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x+1=2(x-a) \\ x^2-2x+1=-2(x-a) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-4x+2a+1=0 & (2) \\ x^2=2a-1 & (3) \end{array}\right.$$

Phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt nếu xảy ra một trong các trường hợp sau:

* TH1: (2) có hai nghiệm phân biệt và (3) có nghiệm kép khác hai nghiệm của (2):

$$\begin{cases} \Delta'_{(2)}>0 \\ \Delta'_{(3)}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2a>0 \\ 2a-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<\frac{3}{2} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$$

* TH2: (3) có hai nghiệm phân biệt và (2) có nghiệm kép khác hai nghiệm của (3):

$$\begin{cases} \Delta'_{(2)}=0 \\ \Delta'_{(3)}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2a=0 \\ 2a-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{2} \\ a>\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{3}{2}$$

* TH3: (2) và (3) đều có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm chung:

Điều này xảy ra khi hệ $\begin{cases} x^2-4x+2a+1=0 \\ x^2=2a-1 \end{cases}$ có nghiệm

$\begin{cases} x^2-4x+2a+1=0 \\ x^2=2a-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ a=1 \end{cases}$

 Khi $a=1$ ta có: (2) trở thành $x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

(3) trở thành $x^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Khi đó: PT đã cho có 3 nghiệm.

Vậy $a\in\left\{\dfrac{1}{2};1;\dfrac{3}{2}\right\}$.

Câu 43. Tìm số giá trị nguyên của m thuộc $[-20;20]$ để phương trình $\log_2(x^2+m+x\sqrt{x^2+4})=(2m-9)x-1+(1-2m)\sqrt{x^2+4}$ có nghiệm.

A. 12. **B.** 23. **C.** 25. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $x^2+m+x\sqrt{x^2+4}>0$.

$\log_2\left(x^2+m+x\sqrt{x^2+4}\right)=(2m-9)x-1+(1-2m)\sqrt{x^2+4}$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)+m\right)=2mx-9x-1+\sqrt{x^2+4}-2m\sqrt{x^2+4}$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\dfrac{4x}{\sqrt{x^2+4}-x}+m\right)=2mx-9x-1+\sqrt{x^2+4}-2m\sqrt{x^2+4}$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\dfrac{4x+m\sqrt{x^2+4}-mx}{\sqrt{x^2+4}-x}\right)=2mx-9x-1+\sqrt{x^2+4}-2m\sqrt{x^2+4}$

$\Leftrightarrow \log_2\left(4x+m\sqrt{x^2+4}-mx\right)+\left(8x+2m\sqrt{x^2+4}-2mx\right)+1=\log_2\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)+\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(8x+2m\sqrt{x^2+4}-2mx\right)+\left(8x+2m\sqrt{x^2+4}-2mx\right)=\log_2\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)+\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$ (1) Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$, $t\in(0;+\infty)$.

$f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0, \forall t\in(0;+\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 8x+2m\sqrt{x^2+4}-2mx=\sqrt{x^2+4}-x$

$\Leftrightarrow 2m\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)=\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)-8x$

$\Leftrightarrow 2m=1-\dfrac{8x}{\sqrt{x^2+4}-x}$

$\Leftrightarrow 2m = 1 - \dfrac{8x\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)}{4}$

$\Leftrightarrow 2m = 1 - 2x\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)$

$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+4}+x^2 = \dfrac{1-2m}{2}$.

Xét hàm số $g(x) = x\sqrt{x^2+4}+x^2$ với $x \in (-\infty;+\infty)$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)^2}{\sqrt{x^2+4}} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}-x}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{-\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}-1} = -2$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}+1\right)\right] = +\infty$.

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-2 \nearrow +\infty$

Để phương trình có nghiệm thì $\dfrac{1-2m}{2} > -2 \Leftrightarrow m < \dfrac{5}{2}$.

Do m nguyên thuộc $[-20;20]$ nên số giá trị m là 23.

C. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Câu 1. Xét các số thực dương a,b,x,y thoả mãn $a>1, b>1$ và $a^x = b^y = \sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x+2y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $\left[2;\dfrac{5}{2}\right)$. **C.** $[3;4)$. **D.** $\left[\dfrac{5}{2};3\right)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \log_a b$. Vì $a,b>1$ nên $t>0$.

Ta có: $a^x = \sqrt{ab} \Rightarrow x = \log_a\sqrt{ab} = \dfrac{1}{2}(1+\log_a b) = \dfrac{1}{2}(1+t)$.

$b^y = \sqrt{ab} \Rightarrow y = \log_b\sqrt{ab} = \dfrac{1}{2}(1+\log_b a) = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)$.

Vậy $P = x+2y = \dfrac{1}{2}(1+t)+1+\dfrac{1}{t} = \dfrac{3}{2}+\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{t} \geq \dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{t}{2} = \dfrac{1}{t} \Leftrightarrow b = a^{\sqrt{2}}$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ bằng $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$ thuộc nửa khoảng $\left[\frac{5}{2};3\right)$.

Câu 2. Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1$, $b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt[4]{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 4y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $\left[2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $[1;2)$. **D.** $[0;1)$.

Lời giải

Chọn B

Theo bài ra ta có: $a^x = b^y = \sqrt[4]{ab} \Leftrightarrow \begin{cases} a^x = a^{\frac{1}{4}}.b^{\frac{1}{4}} \\ b^y = a^{\frac{1}{4}}.b^{\frac{1}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{x-\frac{1}{4}} = b^{\frac{1}{4}} \\ b^{y-\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\log_a b \\ y - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.\log_b a \end{cases}$

Do đó: $P = x + 4y = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\log_a b + 1 + \log_b a = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}\log_a b + \log_b a$

Đặt $t = \log_a b \Rightarrow t > 0$. Vì a, $b > 1$ nên $\log_a b > \log_a 1 = 0$.

Khi đó $P = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{t} \geq \frac{5}{4} + 2\sqrt{\frac{1}{4}t.\frac{1}{t}} = \frac{9}{4}$. (Áp dụng BĐT Cô Si)

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{9}{4}$ khi $t = 2$ hay $b = a^2$.

Câu 3. Xét các số thực a, b, $c \neq 0$ thỏa mãn $3^a = 5^b = 15^{-c}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 - 4(a+b+c)$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $[-5;-1)$. **C.** $[2;4)$. **D.** $[4;6)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $3^a = 5^b = 15^{-c} = t > 0 \Rightarrow \begin{cases} a = \log_3 t \\ b = \log_5 t \\ c = -\log_{15} t \end{cases}$. Khi đó

$P = \log_3^2 t + \log_5^2 t + \log_{15}^2 t - 4(\log_3 t + \log_5 t - \log_{15} t)$

$= \log_3^2 t\left(1 + \log_5^2 3 + \log_{15}^2 3\right) - 4\log_3 t\left(1 + \log_5 3 - \log_{15} 3\right)$

$= X^2\left(1 + \log_5^2 3 + \log_{15}^2 3\right) - 4X\left(1 + \log_5 3 - \log_{15} 3\right)$, (với $X = \log_3 t$)

$P_{\min} = P\left(\frac{2\left(1 + \log_5 3 - \log_{15} 3\right)}{1 + \log_5^2 3 + \log_{15}^2 3}\right) = -4$,

khi $\log_3 t = \frac{2\left(1 + \log_5 3 - \log_{15} 3\right)}{1 + \log_5^2 3 + \log_{15}^2 3} \Rightarrow t = 3^{\frac{2(1+\log_5 3 - \log_{15} 3)}{1+\log_5^2 3 + \log_{15}^2 3}}$

Suy ra

$$a=\frac{2\left(1+\log_5 3-\log_{15}3\right)}{1+\log_5^2 3+\log_{15}^2 3}$$

$$b=\log_5 3^{\frac{2\left(1+\log_5 3-\log_{15}3\right)}{1+\log_5^2 3+\log_{15}^2 3}}$$

$$c=-\log_{15} 3^{\frac{2\left(1+\log_5 3-\log_{15}3\right)}{1+\log_5^2 3+\log_{15}^2 3}}.$$

Câu 4. Xét các số thực dương a, b, c, x, y, z thỏa mãn $a>1$, $b>1$, $c>1$ và $a^x=b^y=c^z=\sqrt{abc}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y+z+\frac{1}{2}$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $[10;13)$. **B.** $[7;10)$. **C.** $[3;5)$. **D.** $[5;7)$.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết ta có

$x=\frac{1}{2}\left(1+\log_a b+\log_a c\right)$, $y=\frac{1}{2}\left(1+\log_b a+\log_b c\right)$, $z=\frac{1}{2}\left(1+\log_c b+\log_c a\right)$. Khi đó ta có

$2P=4+\log_a b+\log_b a+\log_a c+\log_c a+\log_b c+\log_c b$.

Vì $a>1$, $b>1$, $c>1$ nên $\log_a b>0$, $\log_b c>0$, $\log_c a>0$, $\log_b a>0$, $\log_c b>0$, $\log_a c>0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô Si ta được

$\log_a b+\log_b a\ge 2\sqrt{\log_a b.\log_b a}$ hay $\log_a b+\log_b a\ge 2$.

Tương tự $\log_a c+\log_c a\ge 2$ và $\log_b c+\log_c b\ge 2$.

Do đó $2P\ge 10$ hay $P\ge 5$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Vậy giá trị nhỏ nhất $P_{\min}=5$.

Câu 5. Xét các số thực dương a,b,x,y thỏa mãn $a>1,b>1$ và $a^{x^2}=b^{y^2}=\sqrt{a.b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x.y$ là

A. $P=\frac{9}{4}$. **B.** $P=\frac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $P=\frac{3}{2}$. **D.** $P=\frac{4}{9}$.

Lời giải

Chọn B

$$a^{x^2}=b^{y^2}=\sqrt{a.b}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\frac{1}{2}\log_a b+\frac{1}{2}\\ y^2=\frac{1}{2}\log_b a+\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$+)\left(xy\right)^2=\left(\frac{1}{2}\log_a b+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\log_b a+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\log_a b+\log_b a\right)+\frac{1}{4}\right)$$

$$\ge\frac{3}{2}\ \left(a,b>1\Rightarrow\log_a b>0,\log_b a>0\right).$$

Vì $x>0,y>0\Rightarrow xy\ge\frac{\sqrt{6}}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Câu 6. Xét các số thực dương a,b,x,y thỏa mãn $a>1,b>1$ và $a^{\frac{x^2}{y}}=b^{\frac{y^2}{x}}=ab$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x.y$ là

A. $P=2$. **B.** $P=4$. **C.** $P=3$. **D.** $P=1$.

Lời giải

Chọn B

$$a^{\frac{x^2}{y}}=b^{\frac{y^2}{x}}=ab\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x^2}{y}=1+\log_a b\\ \frac{y^2}{x}=1+\log_b a\end{cases}.$$

Ta có $xy=\frac{x^2}{y}.\frac{y^2}{x}=\left(1+\log_a b\right)\left(1+\log_a b\right)$

$=1+1+\log_a b+\log_b a$

$\geq 4\,(a,b>1\Rightarrow\log_a b>0,\log_b a>0)$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Câu 7. Xét các số thực dương a,b,c,x,y,z thỏa mãn $a>1,b>1,c>1,y>2$ và $a^{x+1}=b^{y-2}=c^{z+1}=abc$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y+z$ là

A. $P=13$. **B.** $P=3$. **C.** $P=9$. **D.** $P=1$.

Lời giải

Chọn C

$$a^{x+1}=b^{y-2}=c^{z+1}=abc\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=1+\log_a b+\log_a c\\ y-2=1+\log_b a+\log_b c\\ z+1=1+\log_c b+\log_c a\end{cases}.$$

Ta có: $x+1+y-2+z-1=3+\log_a b+\log_a c+\log_b c+\log_b a+\log_c b+\log_c a$

$\Leftrightarrow x+y+z\geq 3+6$

$\Leftrightarrow P\geq 9\,(a,b,c>1\Rightarrow\log_a b>0,\log_a c>0,\log_b a>0,\log_b c>0,\log_c a>0,\log_c b>0)$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Câu 8. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3\frac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=x+y$.

A. $P_{\min}=\frac{9\sqrt{11}-19}{9}$. **B.** $P_{\min}=\frac{9\sqrt{11}+19}{9}$. **C.** $P_{\min}=\frac{18\sqrt{11}-29}{9}$. **D.** $P_{\min}=\frac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Theo đề bài suy ra: $1-xy>0$, $x+2y>0$.

Ta có: $\log_3\frac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4\Leftrightarrow\log_3\left(3-3xy\right)+3-3xy=\log_3\left(x+2y\right)+x+2y\ \ (1)$.

Xét hàm số: $f\left(t\right)=\log_3 t+t,\left(t>0\right)$:

$f'(t)=\frac{1}{t\ln 3}+1>0,\forall t>0$.

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó: $(1)\Leftrightarrow f(3-3xy)=f(x+2y)\Leftrightarrow 3-3xy=x+2y\Leftrightarrow x=\frac{3-2y}{1+3y}$.

Theo đề bài ta có: $x,y>0\Rightarrow 0<y<\frac{3}{2}$.

Ta có: $P=x+y=\frac{3-2y}{1+3y}+y\ \left(0<y<\frac{3}{2}\right)$.

Đạo hàm: $P'=\frac{-11}{(1+3y)^2}+1$; $P'=0\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{11}-1}{3}\in\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

Ta có: $P(0)=3;P\left(\frac{\sqrt{11}-1}{3}\right)=\frac{2\sqrt{11}-3}{3};P\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$. Vậy $P_{\min}=\frac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

Câu 9. Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $\ln\frac{1-2x}{x+y}=3x+y-1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{xy}}+1$.

A. $P_{\min}=8$. **B.** $P_{\min}=16$. **C.** $P_{\min}=9$. **D.** $P_{\min}=2$.

Lời giải

Chọn C

Theo đề bài suy ra: $x<\frac{1}{2}$.

Ta có: $\ln\frac{1-2x}{x+y}=3x+y-1\Leftrightarrow \ln(1-2x)+1-2x=\ln(x+y)+x+y\ \ (1)$.

Xét hàm số: $f(t)=\ln t+t,(t>0)\to f'(t)=\frac{1}{t}+1>0,t>0$

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó: $(1)\Leftrightarrow f(1-2x)=f(x+y)\Leftrightarrow 1-2x=x+y\Leftrightarrow 3x+y=1$

Ta có: $P=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{xy}}+1\ge\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{x+y}{2}}+1\ge\frac{(1+1)^2}{\frac{3x+y}{2}}+1=9$

Vậy $P_{\min}=\frac{2\sqrt{11}-3}{3}$ khi $x=y=\frac{1}{4}$.

Câu 10. Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $3^{2x+3y}=\frac{3-3x-6y}{x+y}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=\frac{9}{4x}+\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{xy}}-\frac{1}{4}$.

A. $P_{\min}=2$. **B.** $P_{\min}=\dfrac{22+15\sqrt{3}}{2}$. **C.** $P_{\min}=20$. **D.** $P_{\min}=\dfrac{35+36\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết bài toán suy ra $\begin{cases}x+y>0\\x+2y<1\end{cases}$.

Ta có: $3^{2x+3y}=\dfrac{3-3x-6y}{x+y}\Leftrightarrow\dfrac{3^{x+y}}{3^{1-x-2y}}=\dfrac{1-x-2y}{x+y}\Leftrightarrow(x+y).3^{x+y}=(1-x-2y).3^{1-x-2y}\ (1)$.

Xét hàm số: $f(t)=t.3^t,(t>0)\rightarrow f'(t)=3^t+t.3^t.\ln 3>0,\forall t>0$.

Suy ra: hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó: $(1)\Leftrightarrow f(x+y)=f(1-x-2y)\Leftrightarrow 2x+3y=1$.

Ta có: $P=\dfrac{9}{4x}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{xy}}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{4x}+\dfrac{9}{2\sqrt{x.3y}}-\dfrac{1}{4}\geq\dfrac{9}{4x}+\dfrac{9}{x+3y}-\dfrac{1}{4}\geq\dfrac{\left(\dfrac{3}{2}+3\right)^2}{2x+3y}-\dfrac{1}{4}=20$.

Vậy $P_{\min}=20$ khi $x=\dfrac{1}{3};y=\dfrac{1}{9}$.

Câu 11. Cho hai số thực a,b thỏa $a>b>\dfrac{4}{3}$ và $P=16\log_a\left(\dfrac{a^3}{12b-16}\right)+3\log^2_{\frac{a}{b}}a$ có giá trị nhỏ nhất. Tính $a+b$.

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** 4. **C.** $\dfrac{11}{2}$. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $b^3-12b+16=(b-2)^2(b+4)\geq 0,\forall b>\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow b^3\geq 12b-16$.

Suy ra: $\dfrac{a^3}{12b-16}\geq\dfrac{a^3}{b^3}\left(a>b>\dfrac{4}{3}\right)\rightarrow\log_a\left(\dfrac{a^3}{12b-16}\right)\geq\log_a\left(\dfrac{a}{b}\right)^3,\left(a>\dfrac{4}{3}\right)$.

Do đó: $P=16\log_a\left(\dfrac{a^3}{12b-16}\right)+3\log^2_{\frac{a}{b}}a\geq 16\log_a\left(\dfrac{a}{b}\right)^3+3\log^2_{\frac{a}{b}}a=48(1-\log_a b)+\dfrac{3}{(1-\log_a b)^2}$.

$P\geq 24(1-\log_a b)+24(1-\log_a b)+\dfrac{3}{(1-\log_a b)^2}\geq 36$.

Vậy $P_{\min}=36$ khi $a=4,b=2$.

Câu 12. Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $3^{xy-2x-y-1}=\dfrac{2x+y}{xy-1}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của biểu thức $S=x+4y$.

A. $S_{\min}=4\sqrt{3}+9$. **B.** $S_{\min}=6+4\sqrt{3}$. **C.** $S_{\min}=2\sqrt{3}-2$. **D.** $S_{\min}=4\sqrt{3}-6$.

Lời giải

Chọn D

Theo đề bài suy ra: $xy-1>0$.

Ta có: $3^{xy-2x-y-1}=\dfrac{2x+y}{xy-1}\Leftrightarrow(xy-1).3^{xy-1}=(2x+y).3^{2x+y}\ (1)$.

Xét hàm số: $f(t)=t.3^t,(t>0)\to f'(t)=3^t+t.3^t.\ln 3>0,\forall t>0$

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó: $(1)\Leftrightarrow f(xy-1)=f(2x+y)\Leftrightarrow xy-1=2x+y\Leftrightarrow y=\dfrac{1+2x}{x-1}$

Theo đề bài ta có: $x,y>0\Rightarrow x>1$.

Ta có: $S=x+4y=x+\dfrac{8x+4}{x-1}$, $x>1$.

Đạo hàm: $S'=\dfrac{-12}{(x-1)^2}+1\Rightarrow S'=0\Leftrightarrow x=\sqrt{12}+1$.

Từ đó ta được $P_{\min}=9+4\sqrt{3}$.

Câu 13. Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn $4+9.3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x+2y+18}{x}$ là

A. 9. **B.** $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$. **C.** $1+9\sqrt{2}$. **D.** 17.

Lời giải

Chọn A

Ta có $4+9.3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}\Leftrightarrow 4+3^{x^2-2y+2}=\left[4+3^{2(x^2-2y)}\right].7^{2y-x^2+2}$

$\Leftrightarrow\dfrac{4+3^{x^2-2y+2}}{7^{x^2-2y+2}}=\dfrac{4+3^{2(x^2-2y)}}{7^{2(x^2-2y)}}(*)$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{4+3^t}{7^t}$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f(t)=4.\left(\dfrac{1}{7}\right)^t+\left(\dfrac{3}{7}\right)^t$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow f\left(x^2-2y+2\right)=f\left[2(x^2-2y)\right]\Leftrightarrow x^2-2y+2=2(x^2-2y)\Leftrightarrow x^2-2y=2\Leftrightarrow 2y=x^2-2$. Từ đó $P=\dfrac{x^2+x+16}{x}=x+\dfrac{16}{x}+1\geq 2\sqrt{x.\dfrac{16}{x}}+1\Leftrightarrow P\geq 9$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=4$.

Câu 14. Cho các số dương x,y thỏa mãn $\log_5\left(\dfrac{x+y-1}{2x+3y}\right)+3x+2y\leq 4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=6x+2y+\dfrac{4}{x}+\dfrac{9}{y}$ bằng

A. $\dfrac{31\sqrt{6}}{4}$. **B.** $11\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{27\sqrt{2}}{2}$. **D.** 19.

Lời giải

Chọn D

ĐK: $\begin{cases} \dfrac{x+y-1}{2x+3y}>0 \\ x,y>0 \end{cases} \Leftrightarrow x+y>1$

Ta có:

$\log_5\left(\dfrac{x+y-1}{2x+3y}\right)+3x+2y\le 4$

$\Leftrightarrow \left(\log_5(x+y-1)+1\right)+5(x+y-1)\le \log_5(2x+3y)+2x+3y$

$\Leftrightarrow \log_5\left[5(x+y-1)\right]+5(x+y-1)\le \log_5(2x+3y)+2x+3y(*)$

Xét hàm số $f(t)=\log_5(t)+t$ trên $(0;+\infty)$, vì $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 5}+1>0,\forall t\in(0;+\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

$(*)\Leftrightarrow 5(x+y-1)\le 2x+3y \Leftrightarrow 3x+2y\le 5$

Mặt khác, ta có

$A=6x+2y+\dfrac{4}{x}+\dfrac{9}{y}=\left(9x+\dfrac{4}{x}\right)+\left(4y+\dfrac{9}{y}\right)-(3x+2y)\ge 2.6+2.6-5=19$.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 9x=\dfrac{4}{x} \\ 4y=\dfrac{9}{y} \\ 3x+2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy GTNN của A là 19.

Câu 15. Cho hai số thực x,y lớn hơn 1 và thỏa mãn $y^x.(e^x)^{e^y}\ge x^y.(e^y)^{e^x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_x\sqrt{xy}+\log_y x$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Với $x,y>1$, ta có

$$y^x.(e^x)^{e^y}\ge x^y.(e^y)^{e^x}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(y^x.(e^x)^{e^y}\right)\ge \ln\left(x^y.(e^y)^{e^x}\right)$$

$$\Leftrightarrow x\ln y+xe^y\ge y\ln x+ye^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln y}{y}+\frac{e^y}{y}\ge \frac{\ln x}{x}+\frac{e^x}{x}(1).$$

Xét hàm số $g(t)=te^t-e^t+1-\ln t$ trên $[1;+\infty)$, có $g'(t)=te^t-\dfrac{1}{t}>0,\forall t\ge 1$.

Hàm số $g(t)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ nên $g(t)>g(1)=1>0,\forall t>1$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{\ln t}{t}+\dfrac{e^t}{t}$ trên $(1;+\infty)$, có $f'(t)=\dfrac{g(t)}{t^2}>0,\forall t>1$, nên $f(t)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Với $x,y>1$ thì (1) $\Leftrightarrow f(y)\ge f(x)\Leftrightarrow y\ge x$.

Đặt $u=\log_x y$. Do $y\ge x>1$ nên $u\ge 1$. Ta có $P=h(u)=\dfrac{1+u}{2}+\dfrac{1}{u}$. Nhận thấy $h'(u)=\dfrac{u^2-2}{2u^2}$, nên

$h'(u)=0$ khi $u=\sqrt{2}$, $h'(u)<0$ khi $1\le u<\sqrt{2}$, $h'(u)>0$ khi $u>\sqrt{2}$. Dẫn tới

$P=h(u)\ge h\left(\sqrt{2}\right)=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2},\forall u\ge 1$, đẳng thức xảy ra khi $u=\sqrt{2}$.

Vậy $\min P=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$, đạt được khi $y=x^{\sqrt{2}}$ và $x>1$.

Câu 16. Cho hai số thực x,y thỏa mãn $0\le x,y\le 1$ trong đó x,y không đồng thời bằng 0 hoặc 1 và $\log_3\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)+(x+1).(y+1)-2=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P với $P=2x+y$

A. 2. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Từ điều kiện đề bài và $\dfrac{x+y}{1-xy}>0;1-xy\ne 0\Rightarrow x+y>0;1-xy>0$ khi đó

$\log_3\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)+(x+1).(y+1)-2=0\Leftrightarrow \log_3(x+y)+(x+y)=\log_3(1-xy)+(1-xy)\quad (1)$

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t\quad (t>0)$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t.\ln 3}+1>0\ \forall t>0$

$\Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Vậy phương trình $(1)\Leftrightarrow x+y=1-xy\Rightarrow y=\dfrac{1-x}{1+x}\Rightarrow P=2x+\dfrac{1-x}{1+x}$

Xét hàm số $f(x)=2x+\dfrac{1-x}{x+1}$ với $x\in[0;1]$ có $f'(x)=2+\dfrac{-2}{(x+1)^2}$ cho $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$

$f(0)=1;f(1)=2\Rightarrow \min\limits_{[0;1]}f(x)=1\Rightarrow$ chọn **B**

Câu 17. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\ln\left(\dfrac{1-2x}{x+y}\right)=3x+y-1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$.

A. $P_{\min}=8$. **B.** $P_{\min}=4$. **C.** $P_{\min}=2$. **D.** $P_{\min}=16$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $0<x<\dfrac{1}{2}$.

Từ giả thiết $\ln\left(\dfrac{1-2x}{x+y}\right)=3x+y-1 \Leftrightarrow \ln(1-2x)+(1-2x)=\ln(x+y)+(x+y)\ \ (1)$

Xét hàm số $f(t)=\ln t+t$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t}+1>0$, $\forall t>0$ do đó hàm $f(t)$ đơn điệu.

Vậy $(1)\Leftrightarrow 1-2x=x+y \Leftrightarrow 3x+y=1\ \ (2)$

Có $P=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{xy}}\ge\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x+y}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{1-2x}$

Đặt $g(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{1-2x}$, ta có $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{(1-2x)^2}$ suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$.

Do đó $\min\limits_{\left(0;\frac{1}{2}\right)} g(x)=8$. Vậy $P_{\min}=8$.

Bổ sung: có thể đánh giá $P=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{xy}}\ge\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x+y}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{1-2x}\ge\dfrac{4}{x+\dfrac{1}{2}-x}=\dfrac{1}{8}$

Câu 18. Cho hai số thực x,y không âm thỏa mãn $x^2+2x-y+1=\log_2\dfrac{\sqrt{2y+1}}{x+1}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=e^{2x-1}+4x^2-2y+1$ là

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

$x^2+2x-y+1=\log_2\dfrac{\sqrt{2y+1}}{x+1} \Leftrightarrow 2(x+1)^2+\log_2\left(2(x+1)^2\right)=\log_2(2y+1)+(2y+1)$.

Xét hàm số $f(t)=t+\log_2 t\ \ ,(t>0)$; $f'(t)=1+\dfrac{1}{t.\ln 2}>0,\forall t>0$

Suy ra $2(x+1)^2=2y+1 \Rightarrow 2y=2(x+1)^2-1$.

$P=e^{2x-1}+4x^2-2y+1=e^{2x-1}+4x^2-2(x+1)^2+1+1=e^{2x-1}+2x^2-4x=g(x)$.

$g'(x)=2e^{2x-1}+4x-4$ là hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ nên $g'(x)=0$ có tối đa 1 nghiệm, nhẩm được nghiệm $x=\dfrac{1}{2}$ nên nghiệm đó là duy nhất.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\frac{1}{e}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

Vậy $\min P=-\dfrac{1}{2}$ tại $x=\dfrac{1}{2}$.

Câu 19. Cho hai số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn đẳng thức $(xy-1).2^{2xy-1}=(x^2+y).2^{x^2+y}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $y_{\min}$ của y.

A. $y_{\min}=3$. **B.** $y_{\min}=2$. **C.** $y_{\min}=1$. **D.** $y_{\min}=\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(xy-1)2^{2xy-1}=(x^2+y)2^{x^2+y}\Leftrightarrow(2xy-1-1)2^{2xy-1}=(x^2+y)2^{x^2+y+1}\,(1)$

Xét hàm $f(t)=(t-1).2^t$ với $t\ge 1$.

Khi đó $f'(t)=2^t+(t-1).2^t.\ln 2>0$ với $\forall t\ge 1$.

Từ $(1)\Leftrightarrow 2xy-1=x^2+y+1\Leftrightarrow y=\dfrac{x^2+2}{2x-1}$

$y'=\dfrac{2x^2-2x-4}{(2x-1)^2}=0\Leftrightarrow 2x^2-2x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-1\end{array}\right.$

Loại $x=-1$ vì điều kiện của t nên $f(2)=2$.

Câu 20. Cho $\begin{cases}x,y\in\mathbb{R}\\x,y\ge 1\end{cases}$ sao cho $\ln\left(2+\dfrac{x}{y}\right)+x^3-\ln 3=19y^3-6xy(x+2y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $T=x+\dfrac{1}{x+3y}$.

A. $m=1+\sqrt{3}$. **B.** $m=2$. **C.** $m=\dfrac{5}{4}$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$\ln\left(2+\dfrac{x}{y}\right)+x^3-\ln 3=19y^3-6xy(x+2y)\Leftrightarrow\ln(2y+x)+(2y+x)^3=\ln(3y)+(3y)^3\ \ (1)$

Xét hàm số $f(t)=\ln(t)+t^3$ với $t>0$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t}+3t^2>0\quad\forall t>0\Rightarrow f(t)$ đồng biến

Vậy $(1)\Leftrightarrow 2y+x=3y\Leftrightarrow x=y\Rightarrow T=x+\dfrac{1}{4x}$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM

$T=x+\dfrac{1}{4x}=\dfrac{3x}{4}+\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{4x}\ge\dfrac{3x}{4}+2\sqrt{\dfrac{x}{4}.\dfrac{1}{4x}}=\dfrac{3x}{4}+\dfrac{1}{2}\ge\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{4}$ Dấu bằng xảy ra khi $x=y=1$

Câu 21. Cho $x;y$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $5^{x+4y}+\dfrac{3}{3^{xy}}+x+1=\dfrac{5^{xy}}{5}+3^{-x-4y}+y(x-4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y$.

A. 3. **B.** $5+2\sqrt{5}$. **C.** $3-2\sqrt{5}$. **D.** $1+\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $5^{x+4y}+\dfrac{3}{3^{xy}}+x+1=\dfrac{5^{xy}}{5}+3^{-x-4y}+y(x-4)$

$\Leftrightarrow\ 5^{x+4y}-3^{-x-4y}+x+4y=5^{xy-1}-3^{1-xy}+xy-1(1)$.

Xét hàm số $f(t)=5^t-3^{-t}+t$ trên $\mathbb{R}$.

Vì $f'(t)=5^t.\ln 5+3^{-t}.\ln 3+1>0;\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $x+4y=xy-1(3)$. Dễ thấy $x=4$ không thỏa mãn (3).

Với $x\neq 4$, $(3)\Leftrightarrow y=\dfrac{x+1}{x-4}$ kết hợp điều kiện $y>0$ suy ra $x>4$.

Do đó $P=x+y=x+\dfrac{x+1}{x-4}$.

Xét hàm số $g(x)=x+\dfrac{x+1}{x-4}$ trên $(4;+\infty)$.

Ta có $g'(x)=1-\dfrac{5}{(x-4)^2}=0\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4+\sqrt{5}\\ x=4-\sqrt{5}\end{array}\right.$.

x	4		$4+\sqrt{5}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$5+2\sqrt{5}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P_{\min}=\min\limits_{(4;+\infty)} g(x)=5+2\sqrt{5}$.

Câu 22. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $5^{x+2y}+\dfrac{3}{3^{xy}}+x+1=\dfrac{5^{xy}}{5}+3^{-x-2y}+y(x-2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x+y$.

A. $T_{\min}=2+3\sqrt{2}$. **B.** $T_{\min}=3+2\sqrt{3}$. **C.** $T_{\min}=1+\sqrt{5}$. **D.** $T_{\min}=5+3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Theo đề ra ta có

$5^{x+2y}+\dfrac{3}{3^{xy}}+x+1=\dfrac{5^{xy}}{5}+3^{-x-2y}+y(x-2)$

$\Leftrightarrow 5^{x+2y}-\dfrac{1}{3^{x+2y}}+x+2y=5^{xy-1}-\dfrac{1}{3^{xy-1}}+xy-1$

Xét $f(t)=5^t-\dfrac{1}{3^t}+t$. $\Rightarrow f'(t)=5^t\ln 5+3^{-t}\ln 3+1>0$

$\Rightarrow x+2y=xy-1\Rightarrow y=\dfrac{x+1}{x-2}$.Do $y>0,x>0\Rightarrow\dfrac{x+1}{x+2}>0\Rightarrow x>2$

Ta có: $T=x+y=x+\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{x^2-x+1}{x-2}$

$T'=\dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2+\sqrt{3}\in(2;+\infty)\\ x=2-\sqrt{3}\notin(2;+\infty)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

Chỉnh lại bbt cho em,chỉ xét với $x>2$ nhé,kết quả không thay đổi.

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		0		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
T'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
T	$-\infty$	$\nearrow$	$3-2\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$3+2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $T_{\min}=3+2\sqrt{3}$ tại $x=2+\sqrt{3}$.

Câu 23. Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_3\dfrac{x-3y}{xy+1}=xy+3y-x+1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x+\dfrac{1}{y}$.

A. $A_{\min}=\dfrac{14}{3}$. **B.** $A_{\min}=-\dfrac{14}{3}$. **C.** $A_{\min}=-6$. **D.** $A_{\min}=6$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x-3y>0$.

$\log_3\dfrac{x-3y}{xy+1}=xy+3y-x+1 \Leftrightarrow \log_3(x-3y)-\log_3(xy+1)=xy+3y-x+1$

$\Leftrightarrow \log_3(x-3y)+(x-3y)=\log_3(xy+1)+xy+1(1)$.

Xét hàm $f(t)=\log_3 t+t,\ t>0$.

$f'(t)=\dfrac{1}{t.\ln 3}+1>0, \forall t>0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên $(1)\Leftrightarrow x-3y=xy+1 \Rightarrow y=\dfrac{x-1}{x+3}$.

$A=x+\dfrac{1}{y}=x+\dfrac{x+3}{x-1}$.

Đặt $A=A(x)=x+\dfrac{x+3}{x-1} \Rightarrow A'(x)=1-\dfrac{4}{(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow x=3$ do $x,y>0$.

x	0		3		$+\infty$
A'		$-$	0	$+$	
A	$-\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Câu 24. Cho $x,y>0$ thỏa $2019^{2(x^2-y+2)}-\dfrac{4x+y+2}{(x+2)^2}=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=2y-4x$.

A. 2018. **B.** 2019. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2019^{2(x^2-y+2)}-\dfrac{4x+y+2}{(x+2)^2}=0 \Leftrightarrow 2019^{2(x^2+4x+4)-2(4x+y+2)}=\dfrac{4x+y+2}{(x+2)^2}$

$\Leftrightarrow 2019^{2(x+2)^2}.(x+2)^2=2019^{2(4x+y+2)}.(4x+y+2)(*)$.

Đặt $\begin{cases} u=(x+2)^2 \\ v=4x+y+2 \end{cases} (u,v>0)$

Khi đó: $(*)\Leftrightarrow 2019^{2u}.u=2019^{2v}.v \Leftrightarrow f(u)=f(v)$

với $f(t)=2019^{2t}.t,(t>0)$

$\Rightarrow f'(t)=2019^{2t}.2\ln 2019.t+2019^{2t}>0,\forall t>0$

Do đó: $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v \Leftrightarrow (x+2)^2=4x+y+2\Leftrightarrow y=x^2+2$.

$\Rightarrow P=2y-4x=2x^2-4x+4=2(x-1)^2+2\ge 2$.

Vậy $P_{\min}=2\Leftrightarrow x=1$.

Câu 25. Cho 2 số thực dương x,y thỏa mãn $\log_3\left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1}=9-(x-1)(y+1)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+2y$ là

A. $P_{\min}=\dfrac{11}{2}$. **B.** $P_{\min}=\dfrac{27}{5}$. **C.** $P_{\min}=-5+6\sqrt{3}$. **D.** $P_{\min}=-3+6\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3\left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1}=9-(x-1)(y+1)$

$\Leftrightarrow (y+1)\left[\log_3(x+1)+\log_3(y+1)\right]+(x-1)(y+1)=9$.

$\Leftrightarrow (y+1)\left[\log_3(x+1)+\log_3(y+1)+x-1\right]=9$

$\Leftrightarrow \log_3(x+1)+x-1=\dfrac{9}{y+1}-\log_3(y+1)$

$\Leftrightarrow \log_3(x+1)+x+1-2=\dfrac{9}{y+1}-2+\log_3\dfrac{9}{y+1}$.

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t-2$ với $t>0$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0$ với mọi $t>0$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến và liên tục trên $(0;+\infty)$.

Từ đó suy ra $x+1=\dfrac{9}{y+1} \Leftrightarrow x=\dfrac{9}{y+1}-1=\dfrac{8-y}{y+1}$, do $x>0$ nên $y\in(0;8)$.

Vậy $P=x+2y=\dfrac{8-y}{y+1}+2y=2y-1+\dfrac{9}{y+1}=2(y+1)+\dfrac{9}{y+1}-3\ge -3+6\sqrt{2}$.

Vậy $P_{\min}=-3+6\sqrt{2}$ khi $2(y+1)=\dfrac{9}{y+1}\Leftrightarrow y=\dfrac{3}{\sqrt{2}}-1$.

Câu 26. Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_3\dfrac{1-y}{x+3xy}=3xy+x+3y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=x+y$.

A. $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}+4}{3}$. **B.** $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}$. **C.** $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{9}$. **D.** $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}+4}{9}$.

Lời giải

Chọn B

$\log_3 \dfrac{1-y}{x+3xy} = 3xy + x + 3y - 4 \Leftrightarrow \log_3(1-y) - \log_3(x+3xy) = 3xy + x + 3y - 4$

$\Leftrightarrow \log_3 3(1-y) + 3(1-y) = \log_3(x+3xy) + (x+3xy)$

Xét hàm $f(t) = \log_3 t + t,\ t > 0$ có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 3} + 1 > 0,\ \forall t > 0$. Suy ra hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$. Suy ra $\Leftrightarrow \log_3 3(1-y) + 3(1-y) = \log_3(x+3xy) + (x+3xy) \Leftrightarrow 3(1-y) = x + 3xy$

$\Rightarrow x = \dfrac{3(1-y)}{1+3y} \Rightarrow x + y = y + \dfrac{3(1-y)}{1+3y} \geq \dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}$. Vậy $P_{\min} = \dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}$.

Câu 27. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P = \dfrac{3x+2y+1}{x+y+6}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$\log_{\sqrt{3}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$

$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}} 3(x+y) + 3(x+y) = \log_{\sqrt{3}}(x^2+y^2+xy+2) + x^2+y^2+xy+2$.

Xét hàm số $f(t) = \log_{\sqrt{3}} t + t$, $t > 0$ có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln\sqrt{3}} + 1 > 0,\ \forall t > 0$. Vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến và liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó: $f(3(x+y)) = f(x^2+y^2+xy+2) \Leftrightarrow 3(x+y) = x^2+y^2+xy+2 \quad (1)$

Từ $(1) \Leftrightarrow xy = (x+y)^2 - 3(x+y) + 2$.

Ta có $x = x + xy - xy = x(y+1) - xy \leq \left(\dfrac{x+y+1}{2}\right)^2 - xy$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y + 1$.

Do đó từ (1), suy ra: $x \leq \dfrac{(x+y+1)^2}{4} - (x+y)^2 + 3(x+y) - 2$.

Đặt $t = x + y$, $t > 0$.

Suy ra: $P = \dfrac{2(x+y)+1+x}{x+y+6} \leq \dfrac{2t+1+\dfrac{(t+1)^2}{4} - t^2 + 3t - 2}{t+6} = \dfrac{-3t^2+22t-3}{4(t+6)} = f(t)$.

Ta có: $f'(t) = \dfrac{-3t^2-36t+135}{4(t+6)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 3$ (nhận)

Bảng biến thiên

t	0		3		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗		↘	

Dựa vào BBT, ta có $\max P = \max\limits_{(0;+\infty)} f(t) = f(3) = 1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y+1 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

Câu 28. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $2018^{2(x^2-y+1)} = \dfrac{2x+y}{(x+1)^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = 2y - 3x$.

A. $P_{\min} = \dfrac{1}{2}$. **B.** $P_{\min} = \dfrac{7}{8}$. **C.** $P_{\min} = \dfrac{3}{4}$. **D.** $P_{\min} = \dfrac{5}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Ta có $2018^{2(x^2-y+1)} = \dfrac{2x+y}{(x+1)^2} \Leftrightarrow 2(x^2-y+1) = \log_{2018}\dfrac{2x+y}{(x+1)^2}$

$\Leftrightarrow 2(x+1)^2 - 2(2x+y) = \log_{2018}(2x+y) - \log_{2018}(x+1)^2$

$\Leftrightarrow 2(x+1)^2 + \log_{2018}(x+1)^2 = 2(2x+y) + \log_{2018}(2x+y)$

Có dạng $f\left[(x+1)^2\right] = f(2x+y)$ với $f(t) = 2t + \log_{2018} t$, $(\forall t > 0)$.

Xét hàm số $f(t) = 2t + \log_{2018} t$, $(\forall t > 0)$, ta có $f'(t) = 2 + \dfrac{1}{t.\ln 2018} > 0$ $(\forall t > 0)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Khi đó $f\left[(x+1)^2\right] = f(2x+y) \Leftrightarrow (x+1)^2 = 2x+y \Leftrightarrow y = x^2+1$.

Ta có $P = 2y - 3x = 2(x^2+1) - 3x = 2x^2 - 3x + 2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
P	$+\infty$	↘	$\frac{7}{8}$	↗	$+\infty$

Vậy $P_{\min} = \dfrac{7}{8}$ khi $x = \dfrac{3}{4}$.

Câu 29. Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3\left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ là

A. $P_{\min} = \dfrac{11}{2}$. **B.** $P_{\min} = \dfrac{27}{5}$. **C.** $P_{\min} = -5 + 6\sqrt{3}$. **D.** $P_{\min} = -3 + 6\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3\left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1)$

$\Leftrightarrow (y+1)\left[\log_3(x+1)+\log_3(y+1)\right]+(x-1)(y+1)=9$.

$\Leftrightarrow (y+1)\left[\log_3(x+1)+\log_3(y+1)+x-1\right]=9$

$\Leftrightarrow \log_3(x+1)+x-1=\dfrac{9}{y+1}-\log_3(y+1)$

$\Leftrightarrow \log_3(x+1)+x+1-2=\dfrac{9}{y+1}-2+\log_3\dfrac{9}{y+1}$ (*).

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t-2$ với $t>0$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0$ với mọi $t>0$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến và liên tục trên $(0;+\infty)$.

Từ (*) suy ra $x+1=\dfrac{9}{y+1}$ $\Leftrightarrow x=\dfrac{9}{y+1}-1=\dfrac{8-y}{y+1}$, do $x>0$ nên $y\in(0;8)$.

Vậy $P=x+2y=\dfrac{8-y}{y+1}+2y=2y-1+\dfrac{9}{y+1}=2(y+1)+\dfrac{9}{y+1}-3\ge -3+6\sqrt{2}$.

Vậy $P_{\min}=-3+6\sqrt{2}$ khi $2(y+1)=\dfrac{9}{y+1}\Leftrightarrow y=\dfrac{3}{\sqrt{2}}-1$.

Câu 30. Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $\log_2 x+x(x+y)\ge \log_2(6-y)+6x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3x+2y+\dfrac{6}{x}+\dfrac{8}{y}$ bằng

A. $\dfrac{59}{3}$. **B.** 19. **C.** $\dfrac{53}{3}$. **D.** $8+6\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ 0<y<6 \end{cases}$.

Từ giả thiết ta có: $\log_2 x+x(x+y)\ge \log_2(6-y)+6x \Leftrightarrow \log_2 x^2+x^2\ge \log_2\left[x(6-y)\right]+x(6-y)$ (*)

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ với $t>0$, Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0,\forall t>0$ nên hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow f(x^2)\ge f\left[x(6-y)\right]\Leftrightarrow x^2\ge x(6-y)\Leftrightarrow x\ge 6-y\Leftrightarrow x+y\ge 6\,(**)$ (do $x>0$)

Áp dụng Bất đẳng thức Cô si cho các cặp số dương và bất đẳng thức $(**)$, ta có:

$P=3x+2y+\dfrac{6}{x}+\dfrac{8}{y}=\dfrac{3}{2}(x+y)+\left(\dfrac{3x}{2}+\dfrac{6}{x}\right)+\left(\dfrac{y}{2}+\dfrac{8}{y}\right)\ge\dfrac{3}{2}.6+2\sqrt{\dfrac{3x}{2}.\dfrac{6}{x}}+2\sqrt{\dfrac{y}{2}.\dfrac{8}{y}}=19$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x+y=6 \\ \dfrac{3x}{2}=\dfrac{6}{x} \\ \dfrac{y}{2}=\dfrac{8}{y} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 19.

Câu 31. Cho x,y là các số dương thỏa mãn $\log_2\dfrac{x^2+5y^2}{x^2+10xy+y^2}+1+x^2-10xy+9y^2\le 0$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P=\dfrac{x^2+xy+9y^2}{xy+y^2}$. Tính $T=10M-m$.

A. $T=60$. **B.** $T=94$. **C.** $T=104$. **D.** $T=50$.

Lời giải

Chọn B

$$\log_2\frac{x^2+5y^2}{x^2+10xy+y^2}+1+x^2-10xy+9y^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2+5y^2\right)-\log_2\left(x^2+10xy+y^2\right)+\log_2 2+2\left(x^2+5y^2\right)-\left(x^2+10xy+y^2\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(2x^2+10y^2\right)+2\left(x^2+5y^2\right)\le \log_2\left(x^2+10xy+y^2\right)+\left(x^2+10xy+y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+10y^2\le x^2+10xy+y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-10xy+9y^2\le 0\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y}\right)^2-10\left(\frac{x}{y}\right)+9\le 0\Leftrightarrow 1\le\frac{x}{y}\le 9$$

$$P=\frac{x^2+xy+9y^2}{xy+y^2}=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}+9}{\frac{x}{y}+1}$$

Đặt $t=\dfrac{x}{y}$, điều kiện: $1\le t\le 9$

$$f(t)=\frac{t^2+t+9}{t+1};\ f'(t)=\frac{t^2+2t-8}{(t+1)^2};\ f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-4\\t=2\end{array}\right.$$

$$f(1)=\frac{11}{2};\ f(2)=5;\ f(9)=\frac{99}{10}$$

Nên $M=\dfrac{99}{10}$, $m=5$. Vậy $T=10M-m=94$.

Câu 32. Vậy $A_{\min}=6$.Cho các số thực dương x và y thỏa mãn $4+9.3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x+2y+18}{x}$.

A. $P=9$. **B.** $P=\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$.

C. $P=1+9\sqrt{2}$. **D.** Hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết ta đặt $t=x^2-2y$, $t\in\mathbb{R}$.

Phương trình $4+9.3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}$ trở thành

$$4+9.3^t=\left(4+9^t\right).\frac{49}{7^t}\Leftrightarrow 4\left(7^t-49\right)+9^t\left[9.\left(\frac{7}{3}\right)^t-49\right]=0.$$

Nhận thấy $t=2$ là nghiệm phương trình.

Ta chứng minh $t=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

☑ Xét $t>2$: $7^t>49$ và $9.\left(\frac{7}{3}\right)^t>49$ nên vế trái phương trình luôn dương, nên phương trình vô nghiệm.

☑ Xét $t<2$: $7^t<49$ và $9.\left(\frac{7}{3}\right)^t<49$ nên vế trái phương trình luôn âm, nên phương trình vô nghiệm.

Vậy $t=x^2-2y=2 \Leftrightarrow y=\frac{x^2-2}{2}$ thay vào $P=\frac{x+2y+18}{x}=\frac{x^2+x+16}{x}$

$=x+\frac{16}{x}+1\ge 2\sqrt{x.\frac{16}{x}}+1=9$. Dấu bằng đạt được khi $x=\frac{16}{x}\Rightarrow x=4$.

Câu 33. Cho x,y là các số thực lớn hơn 1 sao cho $y^x\left(e^x\right)^{e^y}\ge x^y\left(e^y\right)^{e^x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\log_x\sqrt{xy}+\log_y x$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1.

Ta có:

$y^x\left(e^x\right)^{e^y}\ge x^y\left(e^y\right)^{e^x}\Leftrightarrow \ln\left(y^x\left(e^x\right)^{e^y}\right)\ge \ln\left(x^y\left(e^y\right)^{e^x}\right)$

$\Leftrightarrow x\ln y+xe^y\ge y\ln x+ye^x\Leftrightarrow \frac{x}{\ln x+e^x}\ge\frac{y}{\ln y+e^y}$ (*) (vì $y=e^x+\ln x$ có $y'=e^x+\frac{1}{x}>0;\forall x>1$ nên $y\ge y(1)=e>0$)

Xét hàm số: $f(t)=\frac{t}{\ln t+e^t}$ trên $(1;+\infty)$ ta có $f'(t)=\frac{\ln t+e^t-1-te^t}{\left(\ln t+e^t\right)^2}$. Với hàm số

$g(t)=\ln t+e^t-1-te^t$ có $g'(t)=\left(\ln t+e^t-1-te^t\right)'=\frac{1}{t}-te^t<0,\forall t>1$

Nên $g(t)<g(1)=-1\Rightarrow f'(t)<0;\forall t>1$

$\Rightarrow y=f(t)$ là hàm nghịch biến trên $(1;+\infty)$ nên với (*) $f(x)\ge f(y)\Rightarrow y\ge x>1$

Khi đó $P=\log_x\sqrt{xy}+\log_y x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_x y+\frac{1}{\log_x y}\ge\frac{1}{2}+2\sqrt{\frac{1}{2}\log_x y.\frac{1}{\log_x y}}=\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi: $\frac{1}{2}\log_x y=\frac{1}{\log_x y}\Leftrightarrow\left(\log_x y\right)^2=2\Leftrightarrow y=x^{\sqrt{2}}$

Vậy: $P_{\min}=\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$.

Câu 34. Tính giá trị của biểu thức $P=x^2+y^2-xy+1$ biết rằng $4^{x^2+\frac{1}{x^2}-1}=\log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]$ với $x\ne 0$ và $-1\le y\le\frac{13}{2}$.

A. $P=4$. **B.** $P=2$. **C.** $P=1$. **D.** $P=3$.

Lời giải

Chọn B

Xét $4^{x^2+\frac{1}{x^2}-1}=\log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]$.

Ta có $4^{x^2+\frac{1}{x^2}-1}\ge 4^{2\sqrt{x^2.\frac{1}{x^2}}-1}=4$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=\pm1$,.

Mặt khác $14-(y-2)\sqrt{y+1}=14+3\sqrt{y+1}-\left(\sqrt{y+1}\right)^3$.

Đặt $t=\sqrt{y+1}$ ta có $0\le t\le\frac{\sqrt{30}}{2}$. Xét hàm số $f(t)=-t^3+3t+14$. Ta tìm GTLN – GTNN của hàm số trên đoạn $\left[0;\frac{\sqrt{30}}{2}\right]$ được $\min\limits_{\left[0;\frac{\sqrt{30}}{2}\right]}f(t)=f\left(\frac{\sqrt{30}}{2}\right)=\frac{56-9\sqrt{30}}{4}$; $\max\limits_{\left[0;\frac{\sqrt{30}}{2}\right]}f(t)=f(1)=16$.

Suy ra $\log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]\le\log_2 16=4$,.

Từ và suy ra ta có $\begin{cases}x=\pm1\\ t=\sqrt{y+1}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm1\\ y=0\end{cases}$. Thay vào $P=2$.

Câu 35. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0\le x\le\frac{1}{2}$, $0\le y\le\frac{1}{2}$ và $\log(11-2x-y)=2y+4x-1$. Xét biểu thức $P=16yx^2-2x(3y+2)-y+5$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của P. Khi đó giá trị của $T=(4m+M)$ bằng bao nhiêu?

A. 16. **B.** 18. **C.** 17. **D.** 19.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$\log(11-2x-y)=2y+4x-1\Leftrightarrow 2(2x+y)-\log\left(11-(2x+y)\right)-1=0$

Đặt $t=2x+y$, $0<t<11$. Phương trình trở thành: $2t-\log(11-t)-1=0$. (1)

Xét hàm số $f(t)=2t-\log(11-t)-1$ trên khoảng $(0;11)$.

Có $y'=2+\frac{1}{11-t}>0$, $\forall t\in(0;11)$. Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến.

Dễ thấy (1) có nghiệm $t=1$. Do đó $t=1$ là nghiệm duy nhất của (1).

Suy ra $2x=1-y$. Khi đó $P=16y\frac{(1-y)^2}{4}-(1-y)(3y+2)-y+5=4y^3-5y^2+2y+3$.

Xét hàm số $g(y)=4y^3-5y^2+2y+3$ trên $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, có

$g'(y)=12y^2-10y+2>0$, $\forall y\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

Do đó, $\min\limits_{\left[0;\frac{1}{2}\right]} g(y) = g(0) = 3$, $\max\limits_{\left[0;\frac{1}{2}\right]} g(y) = g(1) = 4$.

Suy ra $m = 3$, $m = 4$.

Vậy $T = 4.3 + 4 = 16$.

-------------------- HẾT --------------------