TRƯỜNG THPT NGUYỄN GIA THIỀU

(Đề thi gồm 01 trang)

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10
VÒNG 1

Năm học 2023 - 2024

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1. *(4 điểm)*

Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^2-2\left(m-1\right)x+m$

1. Tìm m để bất phương trình $f\left(x\right)\ge 0$ nhận mọi x thuộc R là nghiệm.
2. Tìm m để phương trình $f\left(x\right)=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 lớn hơn 1.

Câu 2. *(4 điểm)*

1. Tìm m để phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{9-x}=\sqrt{-x^2+9x+m}$ có nghiệm thực.
2. Giải phương trình: $\left(x^2-x\right)^2-2\left(x^2-x+3\right)-18=0.$

Câu 3. *(4 điểm)*

1. Một hộ nông dân dự định trồng đậu và trồng cà trên diện tích $800m^2$. Biết rằng cứ $100m^2$ trồng đậu cần 10 công và lãi là 7 triệu đồng, cứ $100m^2$ trồng cà cần 15 công và lãi là 9 triệu đồng. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên diện tích bao nhiêu để lãi lớn nhất, biết tổng số công không vượt quá 90 công.
2. Một bác nông dân có $60m$ lưới muốn rào một mảng vườn hình chữ nhật để trồng rau, biết rằng một cạnh là tường, bác chỉ cần rào 3 cạnh còn lại của hình chữ nhật để làm vườn. Em hãy tính hộ diện tích lớn nhất mà bác nông dân có thể rào được?

Câu 4. *(4 điểm)*

1. Cho hình chữ nhật ABCD có cạnh AB=2 và AD=4.Gọi M là trung điểm cạnh AB và N trên cạnh AD sao cho $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$. Chứng minh $CM\perp BN$
2. Cho tam giác ABC. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho MC = 2MB, N là điểm thuộc cạnh AC sao cho NA = 2NC. Gọi K là giao điểm của MA và BN.
   Chứng minh rằng: AK = 6.KM

Câu 5. *(4 điểm)*

1. Cho tam giác ABC, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Chứng minh rằng:
   $$\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}=4R^2\sin A\sin B\sin C$$
2. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi *A₁, B₁, C₁* lần lượt là hình chiếu vuông góc của G xuống cạnh BC, AC, AB. Chứng minh rằng: $a^2.\overrightarrow{GA_1}+b^2.\overrightarrow{GB_1}+c^2.\overrightarrow{GC_1}=\vec{0}$. (*với a=BC, b=AC, c=AB*).

……..……………..Hết……………………..

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu 1. *(4 điểm)*

1. Ta có: $a = 1 > 0, \Delta' = m^2 - 3m + 1$

$$f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 1 \leq 0 \Leftrightarrow m \in \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$$ *(2 điểm)*

2. Yêu cầu bài toán tương đương với $\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \\ (x_1 - 1) + (x_2 - 1) > 0 \end{cases}$ *(1 điểm)*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0 \\ x_1 + x_2 - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee m \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ 3 - m > 0 \\ 2m - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3+\sqrt{5}}{2} \leq m \leq 3$$

(1 điểm)

Câu 2. *(4 điểm)*

1. Tìm m để phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{9 - x} = \sqrt{-x^2 + 9x + m}$ (1) có nghiệm thực.

ĐK $0 \leq x \leq 9$

PT (1) $\Leftrightarrow x + 9 - x + 2\sqrt{x(9-x)} = -x^2 + 9x + m \Leftrightarrow 9 + 2\sqrt{-x^2 + 9x} = -x^2 + 9x + m$ *(2) (0,5 điểm)*

Xác định điều kiện chặt cho t: *Đặt* $t = \sqrt{-x^2 + 9x}$ *do* $0 \leq x \leq 9$ *suy ra* $0 \leq t \leq \frac{9}{2}$ *(0,5 điểm)*

Phương trình (2) trở thành $9 + 2t = t^2 + m \Leftrightarrow -t^2 + 2t + 9 = m$ (3)

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 2t + 9$, $0 \leq t \leq \frac{9}{2}$ Bảng biến thiên *(0,5 điểm)*

t	0		1		$\frac{9}{2}$
$f(t)$			10		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	9				$-\frac{9}{4}$

Phương trình (1) có nghiệm $x \in [0;9] \Leftrightarrow$ phương trình (3) có nghiệm $t \in \left[0; \frac{9}{2}\right]$

Từ BBT ta có $YCBT \Leftrightarrow -\frac{9}{4} \leq m \leq 10$ *(0,5 điểm)*

2. Giải phương trình: $(x^2 - x)^2 - 2(x^2 - x + 3) - 18 = 0.$

ĐK: $x \in R$. Đặt $t = x^2 - x$ *(0,5 điểm)* (2) $\Rightarrow t^2 - 2t - 24 = 0$

$t^2-2t-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=6 \\ t=-4 \end{array}\right.$ *(0,5 điểm)*

$t=-4 \Rightarrow x^2-x+4=0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$ *(0,5 điểm)*

$t=6 \Rightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-2 \end{array}\right.$ *(0 5 điểm)* . Kết luận:Tập nghiệm $S=\{-2;3\}$.

Câu 3. *(4 điểm)*

1. Gọi x, y lần lượt là diện tích trồng đậu, diện tích trồng cà (đơn vị $100m^2$)

   $\Rightarrow x \geq 0; y \geq 0;$ x+y ≤ 8 (1) *(0,5 điểm)*

   Vì tổng số công không quá 90 nên ta có $10x+15y \leq 90 \Leftrightarrow 2x+3y \leq 18$ (2) *(0,5 điểm)*

   Số tiền lãi tính bằng công thức $T=7x+9y$

   Ta có: $T=7x+9y=3(x+y)+2(2x+3y) \overset{(1),(2)}{\leq} 3.8+2.18=60$ *(0,5 điểm)*

   Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=8 \\ 2x+3y=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$

   T lớn nhất khi x=6, y=2

   KL: Vậy trồng $600m^2$ đậu, $200m^2$ cà *(0,5 điểm)*

2. Gọi hai cạnh của hình chữ nhật có độ dài là x, y (như hình vẽ); $0<x,y<60$ *(0,5 điểm)*

   Ta có $2x+y=60 \Rightarrow y=60-2x$ *(0, 5 điểm)*

   Diện tích hình chữ nhật là

   $S=xy=x(60-2x)=\frac{1}{2}.2x(60-2x) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2x+60-2x}{2}\right)^2$ *(0,5 điểm)*

   Vậy diện tích hình chữ nhật lớn nhất là $450\left(m^2\right)$, đạt được khi $x=15, y=30$. *(0,5 điểm)*

Câu 4. *(4 điểm)*

1. Ta có

   $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}$

   $= -\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (1) $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ (2) *(1 điểm)*

   Từ (1) và (2) suy ra:

   $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BN}=\left(-\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AD}\right)$

   $=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\frac{1}{8}\overrightarrow{AD}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{16}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

   $= 0-\frac{1}{8}4^2+\frac{1}{2}2^2-0=0$

   (1 điểm)

   (vì $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$, $AB=2$, $AD=4$, $\overrightarrow{AD}^2=AD^2$)

   Vậy $CM \perp BN$

2. Đặt: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}; \overrightarrow{AC}=\vec{b}$ và $\overrightarrow{AK}=t.\overrightarrow{AM}$ *(0,5 điểm)*

Khi đó: $\overrightarrow{BK}=\left(\frac{2t}{3}-1\right)\vec{a}+\frac{t}{3}.\vec{b}$ $\overrightarrow{BN}=-\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$ *(0,5 điểm)*

Do B, N, K thẳng hàng nên $\exists m:\overrightarrow{BK}=m\overrightarrow{BN}\Leftrightarrow\left(\frac{2t}{3}-1\right)\vec{a}+\frac{t}{3}.\vec{b}=m\left(-\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2t}{3}-1=-m\\ \frac{t}{3}=\frac{2m}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\frac{3}{7}\\ t=\frac{6}{7}\end{cases}$ *(0,5 điểm)*

Suy ra $\overrightarrow{AK}=\frac{6}{7}.\overrightarrow{AM}\Rightarrow\overrightarrow{AK}=6.\overrightarrow{KM}\Rightarrow AK=6.KM$ (đpcm). *(0,5 điểm)*

Câu 5. *(4 điểm)*

1. $VT=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}=\sqrt{AB^2.AC^2-AB^2.AC^2.\cos^2A}=AB.AC.\sin A$ *(1 điểm)*

Theo định lí Sin ta có: $AB=2R\sin C$ và $AC=2R\sin\mathrm{B}$ *(0,5 điểm)*

Vậy: $VT=4R^2\sin A\sin B\sin C=VP$ (đpcm). *(0,5 điểm)*

2. Chứng minh rằng: $a^2.\overrightarrow{GA_1}+b^2.\overrightarrow{GB_1}+c^2.\overrightarrow{GC_1}=\vec{0}$. (*Với a=BC, b=AC, c=AB*).

$a^2.\overrightarrow{GA_1}+b^2.\overrightarrow{GB_1}+a^2.\overrightarrow{GC_1}=\vec{0}\Leftrightarrow(a^2.\overrightarrow{GA_1}+b^2.\overrightarrow{GB_1}+a^2.\overrightarrow{GC_1})^2=0$

$\Leftrightarrow a^4.GA_1^{\,2}+b^4.GB_1^{\,2}+c^4.Gc_1^{\,2}+2a^2b^2\overrightarrow{GA_1}.\overrightarrow{GB_1}+2a^2c^2\overrightarrow{GA_1}.\overrightarrow{GC_1}+2b^2c^2\overrightarrow{GB_1}.\overrightarrow{GC_1}=0\,(*)$ *(0,5 điểm)*

Ta có: $GA_1=\frac{h_a}{3},\ GB_1=\frac{h_b}{3},\ GC_1=\frac{h_c}{3},\ ah_a=bh_b=ch_c=2S$, *(0,5 điểm)*

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{GA_1}.\overrightarrow{GB_1}=GA_1.GB_1.\cos(180^0-C)=-GA_1.GB_1.\cos C,\ \text{-2ab}.\cos C=c^2-a^2-b^2\\&\overrightarrow{GA_1}.\overrightarrow{GC_1}=GA_1.GC_1.\cos(180^0-B)=-GA_1.GC_1.\cos\mathrm{B},\ \text{-2ac}.\cos B=b^2-a^2-c^2\\&\overrightarrow{GC_1}.\overrightarrow{GB_1}=GC_1.GB_1.\cos(180^0-A)=-GC_1.GB_1.\cos\mathrm{A},\ \text{-2cb}.\cos A=a^2-b^2-c^2\end{aligned}$$ *(0,5 điểm)*

$VT_{(*)}=\frac{4S^2.a^2}{9}+\frac{4S^2.b^2}{9}+\frac{4S^2.c^2}{9}+\frac{4S^2.(c^2-a^2-b^2)}{9}+\frac{4S^2.(b^2-a^2-c^2)}{9}+\frac{4S^2.(a^2-c^2-b^2)}{9}=0$ *(0,5 điểm)*

Là điều phải chứng minh.

TRƯỜNG THPT NGUYỄN GIA THIỀU

(Đề thi gồm 01 trang)

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10
VÒNG 2

Năm học 2023 - 2024

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: 120 phút

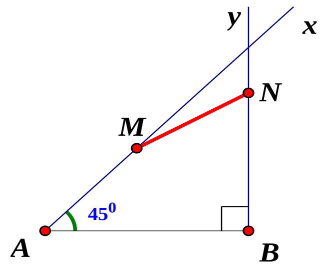
Câu 1. *(8 điểm)*

1. Giải bất phương trình: $(x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2}\ge 0$

2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bpt $x^2-2x+1-m^2\leqslant 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in[1;2]$

3. Cho tập A gồm n điểm phân biệt trên mặt phẳng sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Tìm n sao cho số tam giác có 3 đỉnh lấy từ 3 điểm thuộc A gấp đôi số đoạn thẳng được nối từ 2 điểm thuộc A.

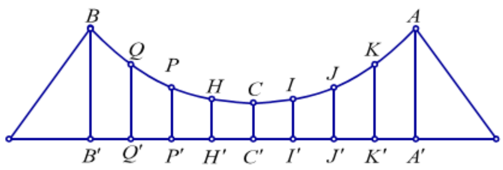
4. Cho hai tia Ax, By với $AB=100\,(cm)$, $xAB=45^0$ và $By\perp AB$. Chất điểm X chuyển động trên tia Ax bắt đầu từ A với vận tốc $3\sqrt{2}\,(cm/s)$, cùng lúc đó chất điểm Y chuyển động trên tia By bắt đầu từ B với vận tốc $4\,(cm/s)$. Sau t (giây) chất điểm X di chuyển được đoạn đường AM, chất điểm Y di chuyển được đoạn đường BN. Tìm giá trị nhỏ nhất của MN



Câu 2. *(6 điểm)*

1. Cho parabol $(P): y=2x^2+6x-1$. Tìm giá trị của k để đường thẳng $\Delta: y=(k+6)x+1$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho trung điểm của MN nằm trên đường thẳng $d: y=-2x+\dfrac{3}{2}$.

2. Một cầu treo có dây truyền đỡ là Parabol ACB như hình vẽ. Đầu, cuối của dây được gắn vào các điểm A, B trên mỗi trục AA' và BB' với độ cao 30 m. Chiều dài đoạn $A'B'$ trên nền cầu bằng 200 m. Độ cao ngắn nhất của dây truyền trên cầu là $CC'=5$ m. Gọi $Q', P', H', C', I', J', K'$ là các điểm chia đoạn $A'B'$ thành các phần bằng nhau. Các thanh thẳng đứng nối nền cầu với đáy dây truyền $QQ', PP', HH', CC', II', JJ', KK'$ gọi là các dây cáp treo. Tính tổng độ dài của các dây cáp treo



3. Có 8 người ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn. Mỗi người cầm một đồng xu cân đối và đồng chất. Cả 8 người đồng thời tung đồng xu. Ai tung được mặt ngửa thì phải đứng dậy, ai tung được mặt sấp thì ngồi yên tại chỗ. Hỏi có bao nhiêu khả năng xảy ra sao cho không có hai người nào ngồi cạnh nhau phải đứng dậy?

Câu 3. *(6 điểm)*

1. Chứng minh rằng tứ giác lồi $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2$.

2. Cho tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp và có các cạnh a,b,c,d. Chứng minh rằng diện tích tứ giác đó được tính theo công thức sau $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, trong đó p là nửa chu vi tứ giác

3. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi H là chân đường cao hạ từ A sao cho $\overrightarrow{BH}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{HC}$ Điểm M di động trên BC sao cho $\overrightarrow{BM}=x.\overrightarrow{BC}$. Tìm x sao cho độ dài vectơ $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

……..……………..Hết……………………..

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu 1.

1.Giải bất phương trình: $(x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2}\ge 0$ (2 điểm)

BPT $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x^2-3x-2}=0\\ \begin{cases}\sqrt{2x^2-3x-2}>0\\ x^2-3x\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$ (0,5 điểm)

TH1: $\sqrt{2x^2-3x-2}=0 \Leftrightarrow x=2 \vee x=-\dfrac{1}{2}$ (0,5 điểm)

TH2: $\begin{cases}\sqrt{2x^2-3x-2}>0\\ x^2-3x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x<-\dfrac{1}{2} \vee x\ge 3$ (0,5 điểm)

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $T=\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]\cup\{2\}\cup[3;+\infty)$ (0,5 điểm)

2.Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bpt $x^2-2x+1-m^2\leqslant 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in[1;2]$ (2đ)

Ta có $\Delta' = m^2\geqslant 0$. Phương trình có hai nghiệm $x_1=1-m$ và $x_2=1+m$ (0,25 điểm)

-Nếu $m=0$ thì bpt trở thành $x^2-2x+1\leqslant 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\leqslant 0 \Leftrightarrow x=1$ không thỏa mãn. (0,25 điểm)

-Nếu $m>0$ thì $x_1=1-m<x_2=1+m$. Suy ra tập nghiệm của bpt là $S=[1-m\ ;\ 1+m]$ (0,75 điểm)

Để bpt nghiệm đúng với mọi $x\in[1;2]$ khi và chỉ khi $[1;2]\subset[1-m;1+m]$

$\Leftrightarrow \begin{cases}1\geqslant 1-m\\ 2\geqslant 1+m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\geqslant 0\\ m\geqslant 1\end{cases} \Leftrightarrow m\geqslant 1$

-Nếu $m<0$ thì $x_1=1-m>x_2=1+m$. Suy ra tập nghiệm của bpt là $S=[1+m\ ;\ 1-m]$ (0,75 điểm)

Để bpt nghiệm đúng với mọi $x\in[1;2]$ khi và chỉ khi $[1;2]\subset[1+m;1-m]$

$\Leftrightarrow \begin{cases}1\geqslant 1+m\\ 2\geqslant 1-m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\le 0\\ m\le -1\end{cases} \Leftrightarrow m\le -1.$

Vậy $m\le -1 \vee m\ge 1$ thỏa mãn.

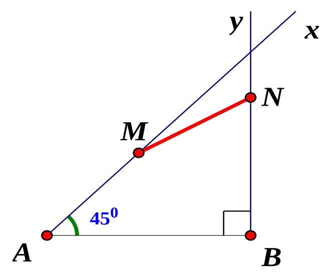
3. Cho tập A gồm n điểm phân biệt trên mặt phẳng sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Tìm n sao cho số tam giác có 3 đỉnh lấy từ 3 điểm thuộc A gấp đôi số đoạn thẳng được nối từ 2 điểm thuộc A.

Theo đề bài

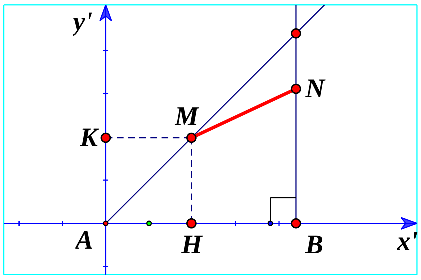
$$C_n^3=2C_n^2 \text{ với } (n\ge 3, n\in N) \text{ (1 điểm)}$$

$$\frac{n!}{3!(n-3)!}=2\frac{n!}{2!(n-2)!} \Leftrightarrow \frac{1}{6}=n-2 \Leftrightarrow n=8 \text{ (1 điểm)}$$

4. Cho hai tia Ax, By với $AB = 100\ (cm)$, $\widehat{xAB} = 45^0$ và $By \perp AB$. Chất điểm X chuyển động trên tia Ax bắt đầu từ A với vận tốc $3\sqrt{2}\ (cm/s)$, cùng lúc đó chất điểm Y chuyển động trên tia By bắt đầu từ B với vận tốc $4\ (cm/s)$. Sau t (giây) chất điểm X di chuyển được đoạn đường AM, chất điểm Y di chuyển được đoạn đường BN. Tìm giá trị nhỏ nhất của MN.



Sau t (giây) ta có $AM = 3\sqrt{2}t\ (cm)$, $BN = 4t\ (cm)$. (0,25 điểm)



Dựng hệ trục Descartes vuông góc $Ax'y'$, $A \equiv O(0;0)$ như hình vẽ trên. (0,25 điểm)

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên trục Ax' và Ay'.

Với $t > 0$ (tức $M \neq A$) ta có $AHMK$ là hình vuông. Suy ra $AH = AK = 3t\ (cm)$. (0,5 điểm)

$\Rightarrow M = (3t; 3t)$, $N = (100; 4t)$. (Nói thêm là trường hợp $M \equiv A$ thì tọa độ M vẫn đúng).

Khi đó $MN^2 = (100 - 3t)^2 + t^2 = 10t^2 - 600t + 10000 = 10(t - 30)^2 + 1000 \geq 1000,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow MN \geq 10\sqrt{10}, \forall t \in \mathbb{R}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t = 30$. (0,5 điểm)

Vậy $\min MN = 10\sqrt{10}\ cm$ khi $t = 30$ giây.

Câu 2.

1.Cho parabol $(P): y = 2x^2 + 6x - 1$. Tìm giá trị của k để đường thẳng $\Delta: y = (k+6)x + 1$ cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho trung điểm của đoạn thẳng MN nằm trên đường thẳng $d: y = -2x + \frac{3}{2}$. (2đ)

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (Δ) là

$$2x^2 + 6x - 1 = (k+6)x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - kx - 2 = 0\ (1). \text{ (0,5 điểm)}$$

Phương trình (1) có $\Delta = k^2 + 16 > 0, \forall k \in \mathbb{R}$ nên nó luôn có hai nghiệm phân biệt. Suy ra với mọi giá trị của tham số k thì đường thẳng Δ luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N. (0,5 điểm)

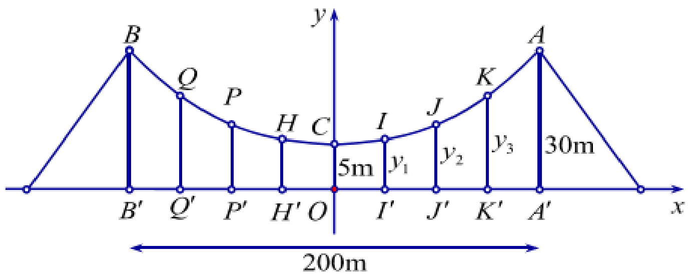
Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai nghiệm của (1). Khi đó theo Vi-et ta có $x_1 + x_2 = \frac{k}{2}$.

Ta có $M\left(x_1;(k+6)x_1+1\right);N\left(x_2;(k+6)x_2+1\right)$, nên tọa độ trung điểm I của MN là $I\left(\frac{k}{4};\frac{(k+6)k}{4}+1\right)$. (0,5 điểm)

Điểm $I\in d$ khi và chỉ kh $\frac{(k+6)k}{4}+1=-\frac{k}{2}+\frac{3}{2}\Leftrightarrow k^2+8k-2=0\Leftrightarrow k=-4\pm3\sqrt{2}$.

Vậy $k=-4\pm3\sqrt{2}$ thì thỏa yêu cầu bài toán. (0,5 điểm)

2. Một cầu treo có dây truyền đỡ là Parabol ACB như hình vẽ. Đầu, cuối của dây được gắn vào các điểm A, B trên mỗi trục AA' và BB' với độ cao 30 m. Chiều dài đoạn $A'B'$ trên nền cầu bằng 200 m. Độ cao ngắn nhất của dây truyền trên cầu là $CC'=5$ m. Gọi $Q', P', H', C', I', J', K'$ là các điểm chia đoạn $A'B'$ thành các phần bằng nhau. Các thanh thẳng đứng nối nền cầu với đáy dây truyền $QQ', PP', HH', CC', II', JJ', KK'$ gọi là các dây cáp treo. Tính tổng độ dài của các dây cáp treo ?



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.

Giả sử Parabol có dạng : $y=ax^2+bx+c, a\neq 0$.

Vì Parabol đi qua điểm $A(100;30)$ và đỉnh $C(0;5)$nên ta có hệ phương trình:

$\begin{cases}10000a+100b+c=30\\ \frac{-b}{2a}=0\\ c=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{400}\\ b=0\\ c=5\end{cases}$. (0, 5 x2 điểm) . Vậy (P): $y=\frac{1}{400}x^2+5$.

Đoạn $A'B'$ chia làm 8 phần bằng nhau, mỗi phần có độ dài là 25 m.

Khi đó, tổng độ dài của các dây cáp treo là:

$OC+2y_1+2y_2+2y_3=5+2\left(\frac{1}{400}.25^2+5\right)+2\left(\frac{1}{400}.50^2+5\right)+2\left(\frac{1}{400}.75^2+5\right)$=78,75 m. (0.5 x2đ)

3. Có 8 người ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn. Mỗi người cầm một đồng xu cân đối và đồng chất. Cả 8 người đồng thời tung đồng xu. Ai tung được mặt ngửa thì phải đứng dậy, ai tung được mặt sấp thì ngồi yên tại chỗ. Hỏi có bao nhiêu khả năng xảy ra sao cho không có hai người nào ngồi cạnh nhau phải đứng dậy? (2đ)

-TH1: Không có ai tung được mặt ngửa. Trường hợp này có 1 khả năng xảy ra. (0,25đ)

-TH2: Chỉ có 1 người tung được mặt ngửa. Trường hợp này có 8 khả năng xảy ra. (0,25đ)

-TH3: Có 2 người tung được mặt ngửa nhưng không ngồi cạnh nhau: Có $\frac{8.5}{2}=20$ khả năng xảy ra(do mỗi người trong vòng tròn thì có 5 người không ngồi cạnh nhau). (0,5đ)
-TH4: Có 3 người tung được mặt ngửa nhưng không có 2 người nào trong 3 người này ngồi cạnh nhau. Trường hợp này có $C_8^3-8-8.4=16$ khả năng xảy ra. Thật vậy: (0,5đ)

+ Có C_8^3 cách chọn 3 trong 8 người.

+ Có 8 khả năng cả 3 người này ngồi cạnh nhau.

+ Nếu chỉ có 2 người ngồi cạnh nhau: Có 8 cách chọn ra 1 người, với mỗi cách chọn ra 1 người thì có 4 cách chọn ra 2 người ngồi cạnh nhau và không cạnh người đầu tiên. Vậy có 4.8 khả năng

- TH5: Có 4 người tung được mặt ngửa nhưng không có 2 người nào trong 4 người này ngồi cạnh nhau. Trường hợp này có 2 khả năng xảy ra. (0,5 đ)

Tổng cộng có 1 + 5 + 20 + 16 + 2 = 47

Câu 3.

1.Chứng minh rằng tứ giác lồi $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2$.

Tứ giác lồi ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ (0, 25 điểm)

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}\right)^2=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{DC}^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}=0$ (0, 5 điểm)

$\Leftrightarrow AB^2+DC^2-2\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})=0$ (0, 5 điểm)

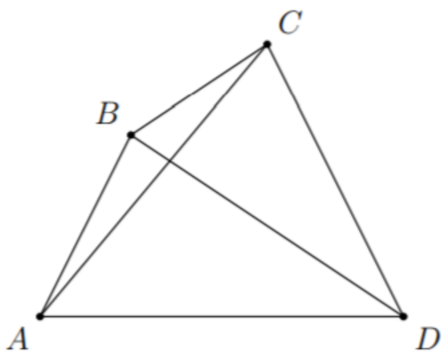
$\Leftrightarrow AB^2+DC^2-(AB^2+AC^2-BC^2)+(AB^2+AD^2-BD^2)=0$ (*) (0,5 điểm)

(vì $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2-2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2 \Rightarrow 2\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}^2+\vec{b}^2-\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$)

(*)$\Leftrightarrow AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2$ (Đpcm) (0,25 điểm)

*(**Chú ý**: nếu chỉ làm được 1 chiều thì cho 1 đ)*

2. Cho tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp và có các cạnh a,b,c,d . Chứng minh rằng diện tích tứ giác đó được tính theo công thức sau $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, trong đó p là nửa chu vi tứ giác



Giả sử $ABCD$ là tứ giác nội tiếp với độ dài cạnh a,b,c,d .

Khi đó $A+C=180^\circ$ nên $\sin C=\sin A;\cos C=-\cos A$.

Ta có $S=S_{ABD}+S_{CDB}=\frac{1}{2}ad\sin A+\frac{1}{2}bc\sin C$.

Vậy $2S=\left(ad+bc\right)\sin A$, suy ra $\sin A=\frac{2S}{ad+bc}$. (0,5 điểm)

Mặt khác, xét các tam giác ABD và BCD có
$BD^2=a^2+d^2-2ad\cos A=b^2+c^2-2bc\cos C=b^2+c^2+2bc\cos A.$

Suy ra $a^2+d^2-b^2-c^2=2\left(ad+bc\right)\cos A$ nên $\cos A=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2\left(ad+bc\right)}$. (0,5 điểm)

Do $\cos^2 A+\sin^2 A=1$ nên $16S^2+\left(a^2+d^2-b^2-c^2\right)=4\left(ad+bc\right)^2$.

Suy ra

$$16S^2=[2(ad+bc)]^2-\left(a^2+d^2-b^2-c^2\right)^2$$
$$=\left(2ad+2bc+a^2+d^2-b^2-c^2\right)\left(2ad+2bc-a^2-d^2+b^2+c^2\right)$$
$$=\left[(a+d)^2-(b-c)^2\right]\cdot\left[(b+c)^2-(a-d)^2\right] \qquad \text{(0,5 điểm x 2)}$$
$$=(a+d+b-c)(a+d-b+c)(b+c+a-d)(b+c-a+d)$$
$$=(2p-2c)(2p-2b)(2p-2d)(2p-2a)$$
$$=16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$$

3.Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi H là chân đường cao hạ từ A sao cho $\overrightarrow{BH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$. Điểm M di động trên BC sao cho $\overrightarrow{BM}=x.\overrightarrow{BC}$. Tìm x sao cho độ dài vectơ $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Dựng hình bình hành $AGCE$. Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{ME}$ (0, 5đ)

Kẻ $EF\perp BC, F\in BC\Rightarrow\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}\right|=\left|ME\right|\geq EF$

Do đó: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}\right|$ nhỏ nhất khi $M\equiv F$. (0,5đ)

Gọi P là trung điểm AC, Q là hình chiếu của B trên BC. Ta có $BP=\frac{3}{4}BE$

$\Delta BPQ\sim\Delta BEF\Rightarrow\frac{BQ}{BF}=\frac{BP}{BE}=\frac{3}{4}\Rightarrow\overrightarrow{BF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BQ}$ (0.5đ)

Mặt khác: $\overrightarrow{BH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}\Rightarrow PQ$ là đường trung bình của $\Delta AHC\Rightarrow\overrightarrow{HQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HC}$

$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HC}=\frac{5}{6}\overrightarrow{HC}=\frac{5}{8}\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overrightarrow{BF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BQ}=\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}\Rightarrow x=\frac{5}{6}$. (0.5đ)

TRƯỜNG THPT NGUYỄN GIA THIỀU

(Đề thi gồm 01 trang)

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10
VÒNG 3

Năm học 2023 - 2024

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1. (4 điểm)

1. Để gây quỹ cho chương trình Tết yêu thương, một trường THPT tổ chức cho các lớp gói bánh chưng và bánh tét. Mỗi lớp được sử dụng tối đa $10kg$ gạo nếp, $1kg$ thịt và $1,6kg$ đậu xanh. Để gói 1 cái bánh chưng cần $0,5kg$ gạo nếp, $0,05kg$ thịt và $0,1kg$ đậu xanh. Để gói 1 cái bánh tét cần $0,75kg$ gạo nếp, $0,075kg$ thịt và $0,1kg$ đậu xanh. Mỗi cái bánh chưng bán được 30 ngàn đồng, mỗi cái bánh tét bán được 40 ngàn đồng. Để thu được số tiền nhiều nhất, mỗi lớp cần gói bao nhiêu cái bánh chưng, bao nhiêu cái bánh tét?

2. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = mx + 1$ (với m là tham số).
Gọi A, B là giao điểm của đường thẳng d và parabol (P); H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên trục Ox. Tìm tất cả các giá trị thực của m để diện tích hình thang $ABKH$ bằng 3 lần diện tích tam giác AOB, với O là gốc toạ độ.

Câu 2 (6 điểm)

1. Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50000 đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1000 đồng thì số bưởi bán tăng thêm được là 10 quả. Xác định giá bán để của hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả là 30000 đồng.

2. Giải phương trình: $\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1} = x\sqrt{x}.$

3. Cho x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + a = 0$; x_3 và x_4 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 12x + b = 0$. Biết rằng $\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3}$. Tìm a và b.

Câu 3 (6 điểm)

1.Trên mặt phẳng tọa độ cho hai điểm $A(-1;1)$ và $B(2;4)$.Tìm điểm D sao cho tam giác ABD vuông cân tại A .

2.Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho điểm $A\left(\frac{3}{2};3\right)$; $B(6;0)$. Viết phương trình đường thẳng AB. Tìm tọa độ các điểm M trên đoạn OA; N trên đoạn AB; E, F trên đoạn OB sao cho MNEF là hình vuông.

3.Cho tam giác *ABC* có $AB = c, AC = b$ và $BAC = 60°$. Các điểm *M*, *N* được xác định bởi $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{NB} = -2\overrightarrow{NA}$. Tìm hệ thức liên hệ giữa *b* và *c* để *AM* và *CN* vuông góc với nhau.

Câu 4 (4 điểm)

1. Cho tam giác ABC$(AB < AC)$ nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O), trọng tâm G và $a = BC,\ b = CA,\ c = AB$. Gọi M là trung điểm của cạnh AC. Chứng minh rằng nếu bốn điểm A, O, M, G cùng nằm trên một đường tròn thì $b^2 + c^2 = 2a^2$.

2. Cho tam giác ABC, gọi M là trung điểm của BC, G là trọng tâm tam giác ABC, lấy D đối xứng với A qua M, I là trọng tâm của tam giác MCD. Lấy J thỏa $2\overrightarrow{CJ} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{JM}$. Chứng minh rằng IJ song song với AB.

……..……………..Hết……………………..

ĐÁP ÁN

Câu 1. 1Để gây quỹ cho chương trình Tết yêu thương, một trường THPT tổ chức cho các lớp gói bánh chưng và bánh tét. Mỗi lớp được sử dụng tối đa $10kg$ gạo nếp, $1kg$ thịt và $1,6kg$ đậu xanh. Để gói 1 cái bánh chưng cần $0,5kg$ gạo nếp, $0,05kg$ thịt và $0,1kg$ đậu xanh. Để gói 1 cái bánh tét cần $0,75kg$ gạo nếp, $0,075kg$ thịt và $0,1kg$ đậu xanh. Mỗi cái bánh chưng bán được 30 ngàn đồng, mỗi cái bánh tét bán được 40 ngàn đồng. Để thu được số tiền nhiều nhất, mỗi lớp cần gói bao nhiêu cái bánh chưng, bao nhiêu cái bánh tét?

Gọi x (cái) là số cái bánh chưng cần gói;

y (cái) là số cái bánh tét cần gói.

Điều kiện: $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$. Suy ra: $x \ge 0, y \ge 0$. (1)

Khi đó, số tiền thu được là: $F(x, y) = 30x + 40y$ (nghìn đồng).

Số gạo nếp cần để gói bánh là: $0,5x + 0,75y$ (kg).

Suy ra: $0,5x + 0,75y \le 10$. (2)

Số thịt cần để gói bánh là: $0,05x + 0,075y$ (kg).

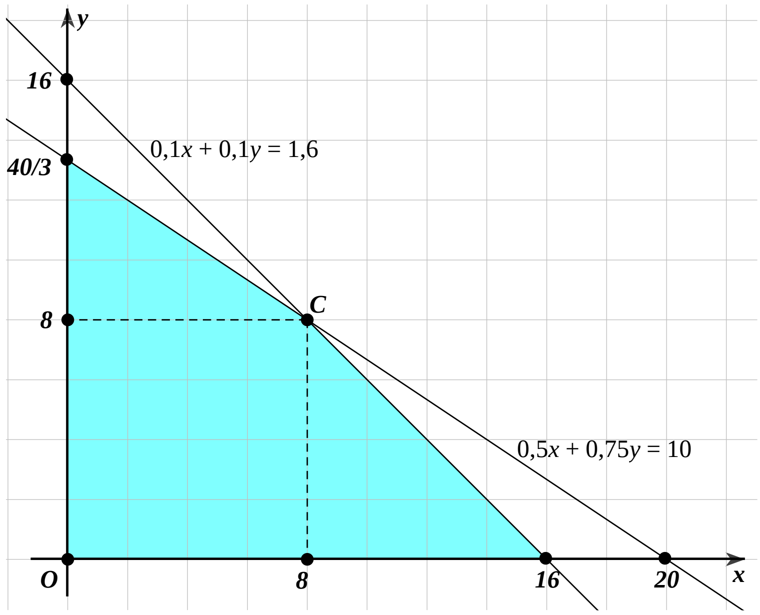
Suy ra: $0,05x + 0,075y \le 1 \Leftrightarrow 0,5x + 0,75y \le 10$. Bất phương trình này tương đương với bất phương trình (2).

Số đậu xanh cần để gói bánh là: $0,1x + 0,1y$ (kg).

Suy ra: $0,1x + 0,1y \le 1,6$. (3)

Từ (1), (2), (3) ta có hệ bất phương trình: $\begin{cases} x \ge 0, y \ge 0 \\ 0,5x + 0,75y \le 10 \\ 0,1x + 0,1y \le 1,6 \end{cases}$.

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên:



Khi đó, tập nghiệm hệ bất phương trình là miền tứ giác $OBCD$ với $B\left(0;\dfrac{40}{3}\right)$, $C(8;8)$, $D(16;0)$.

Ta có: $F\left(B\right)=\dfrac{1600}{3}$; $F\left(C\right)=560$; $F\left(D\right)=480$.

Suy ra $F_{\max}=560$ (nghìn đồng) khi $x=y=8$ (thỏa mãn).

Vậy để thu được số tiền nhiều nhất, mỗi lớp cần gói 8 cái bánh chưng và 8 cái bánh tét.

Câu 1. 2 (6 điểm) Cho parabol $\left(P\right):y=x^2$ và đường thẳng $d:y=mx+1$ (với m là tham số).

Gọi A,B là giao điểm của đường thẳng d và parabol $\left(P\right)$; H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A,B lên trục Ox. Tìm tất cả các giá trị thực của m để diện tích hình thang $ABKH$ bằng 3 lần diện tích tam giác AOB, với O là gốc toạ độ.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và $\left(P\right)$: $x^2=mx+1\Leftrightarrow x^2-mx-1=0$.

Ta thấy phương trình $x^2-mx-1=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x_A<0<x_B$ $\forall m$ nên đường thẳng d luôn cắt parabol $\left(P\right)$ tại hai điểm phân biệt $A\left(x_A;x_A^2\right),B\left(x_B;x_B^2\right)$ với $\begin{cases}x_A+x_B=m\\x_A.x_B=-1\end{cases}$.

Ta có $A\left(x_A;x_A^2\right),B\left(x_B;x_B^2\right)$ nên suy ra $H\left(x_A;0\right),K\left(x_B;0\right)$ với ($x_A<0<x_B$).

Diện tích của hình thang $ABKH$ là $S_{ABKH}=\dfrac{1}{2}\left(x_B-x_A\right)\left(x_A^2+x_B^2\right)$.

Diện tích của tam giác OAH , OBK là $S_{OAH}=\dfrac{1}{2}\left|x_A\right|x_A^2=-\dfrac{1}{2}x_A^3$, $S_{OBK}=\dfrac{1}{2}x_Bx_B^2=\dfrac{1}{2}x_B^3$.

Theo giả thiết ta có $S_{OAH}+S_{OBK}=\dfrac{2}{3}S_{ABKH}\Leftrightarrow x_B^3-x_A^3=\dfrac{2}{3}\left(x_B-x_A\right)\left(x_B^2+x_A^2\right)$

$\Leftrightarrow\left(x_B-x_A\right)\left(x_B^2+x_A^2+x_Ax_B-\dfrac{2}{3}x_B^2-\dfrac{2}{3}x_A^2\right)=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}\left(x_B^2+x_A^2\right)+x_Ax_B=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}\left[\left(x_A+x_B\right)^2-2x_Ax_B\right]+x_Ax_B=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}\left(m^2+2\right)-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-1\end{array}\right.$.

Vậy các giá trị của m là $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-1\end{array}\right.$.

Câu 2.1

Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50000 đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1000 đồng thì số bưởi bán tăng thêm được là 10 quả. Xác định giá bán để của hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả là 30000 đồng.

Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng (x : đồng, $30000 \le x \le 50000$).

Tương ứng với giá bán là x thì số quả bán được là: $40+\frac{10}{1000}\left(50000-x\right)=-\frac{1}{100}x+540$.

Gọi $f\left(x\right)$ là hàm lợi nhuận thu được ($f(x)$: đồng), ta có:

$$f\left(x\right)=\left(-\frac{1}{100}x+540\right).\left(x-30000\right)=-\frac{1}{100}x^2+840x-16200000$$

Lợi nhuận thu được lớn nhất khi hàm $f\left(x\right)$ đạt giá trị lớn nhất trên $\left[30000;50000\right]$

Ta có: $f\left(x\right)=-\left(\frac{1}{10}x-4200\right)^2+1440000\le 1440000,\ \forall x\in\left[30000;50000\right]$

$\Rightarrow \max\limits_{x\in\left[30000;50000\right]} f\left(x\right)=f\left(42000\right)=1440000$.

Vậy với giá bán 42000 đồng mỗi quả bưởi thì cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

2.**2.** Giải phương trình: $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-1}=x\sqrt{x}.$

1. Ta có: $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-1}=x\sqrt{x}$

Điều kiện: $x\ge 1$

$$pt\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}=x\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\ge 0 \\ x^2-1=x^3+x-1-2x\sqrt{x^2-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x(x-1)-2\sqrt{x(x-1)}+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x(x-1)}=1 \\ x\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

2.3Cho x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2-3x+a=0$; x_3 và x_4 là hai nghiệm của phương trình $x^2-12x+b=0$. Biết rằng $\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_3}{x_2}=\frac{x_4}{x_3}$. Tìm a và b.

Lời giải

Phương trình $x^2-3x+a=0$ có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta=9-4a\ge 0\Leftrightarrow a\le\frac{9}{4}$. (1)

Phương trình $x^2-12x+b=0$ có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'=36-b\ge 0\Leftrightarrow b\le 36$. (2)

Với điều kiện trên, theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1.x_2=a \\ x_3+x_4=12 \\ x_3.x_4=b \end{cases}\ (I)$

Đặt $\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_3}{x_2}=\frac{x_4}{x_3}=t\Leftrightarrow \begin{cases} x_2=tx_1 \\ x_3=tx_2=t^2x_1 \\ x_4=tx_3=t^3x_1 \end{cases}$.

Thế vào hệ (I) ta được: $\begin{cases} x_1 + tx_1 = 3 \\ x_1.tx_1 = a \\ t^2x_1 + t^3x_1 = 12 \\ t^2x_1.t^3x_1 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + tx_1 = 3 & (3) \\ x_1.tx_1 = a & (4) \\ t^2(x_1 + tx_1) = 12 & (5) \\ t^2x_1.t^3x_1 = b & (6) \end{cases}$

Thế (3) vào (5) ta được $t^2 = 4 \Leftrightarrow t = \pm 2$.

Với $t = 2$ thay vào (3) ta được $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 2;\ x_3 = 4;\ x_4 = 8$.

Khi đó $\begin{cases} a = x_1.x_2 = 1.2 = 2 \\ b = x_3.x_4 = 4.8 = 32 \end{cases}$ (t/m)

Với $t = -2$ thay vào (3) ta được $x_1 = -3 \Rightarrow x_2 = 6;\ x_3 = -12;\ x_4 = 24$.

Khi đó $\begin{cases} a = x_1.x_2 = -3.6 = -18 \\ b = x_3.x_4 = -12.24 = -288 \end{cases}$ (t/m)

Vậy $\begin{cases} a = 2 \\ b = 32 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = -18 \\ b = -288 \end{cases}$.

Câu 3.1 Trên mặt phẳng tọa độ cho hai điểm $A(-1;1)$ và $B(2;4)$. Tìm điểm D sao cho tam giác ABD vuông cân tại A .

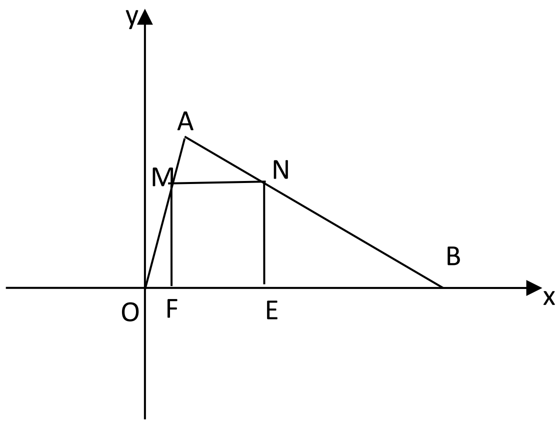
Gọi $D(x;y)$ là điểm cần tìm. Để tam giác ABD vuông cân tại A thì: $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0 \\ AB = AD \end{cases}$ (1)

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3;3), \overrightarrow{AD} = (x+1; y-1)$. Từ (1) suy ra:

$$\begin{cases} 3(x+1) + 3(y-1) = 0 \\ \sqrt{18} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ (x+1)^2 + (-x-1)^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4 \\ y = 4 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm D thỏa điều kiện bài toán là: $D(2;-2)$ hoặc $D(-4;4)$.

3.2 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho điểm $A\left(\frac{3}{2};3\right)$; $B(6;0)$. Viết phương trình đường thẳng AB. Tìm tọa độ các điểm M trên đoạn OA; N trên đoạn AB; E, F trên đoạn OB sao cho MNEF là hình vuông.



*) Viết pt đường thẳng AB:

ta có AB có vtcp là $\overrightarrow{AB}=(\frac{9}{2};-3)=\frac{3}{2}(3;-2)\Rightarrow$ AB có vtpt là : $\vec{n}=(2;3)$

$\Rightarrow$ pt AB: 2(x - 6) + 3(y - 0) = 0 $\Leftrightarrow$ pt AB: 2x + 3y -12 = 0

*) Tìm tọa độ các điểm M trên đoạn OA; N trên đoạn AB; E, F trên đoạn OB sao cho MNEF là hình vuông.

Gọi H là hình chiếu của A trên Ox, do MNEF là hình vuông nên ta có:

MF //AH // NE

$$\frac{MF}{AH}=\frac{OM}{OA}=\frac{OA-AM}{OA}=1-\frac{AM}{OA}=1-\frac{MN}{OB}=1-\frac{MF}{OB}$$

$\Leftrightarrow \frac{MF}{3}=1-\frac{MF}{6}\Leftrightarrow MF=2 \Rightarrow y_M=2\Rightarrow x_M=1$ và $y_N=2\Rightarrow x_N=3$

khi đoa M(1 ; 2) , F(1; 0), N(3; 2), E(3; 0)

3.3 Cho tam giác *ABC* có $AB=c, AC=b$ và $BAC=60°$. Các điểm *M, N* được xác định bởi $\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{NB}=-2\overrightarrow{NA}$. Tìm hệ thức liên hệ giữa *b* và *c* để *AM* và *CN* vuông góc với nhau.

Ta có: $\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}=-2\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}\right)\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Tương tự ta cũng có: $3\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$

Vậy: $AM\perp CN\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CN}=0\Leftrightarrow\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\left(2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}\right)=0\Leftrightarrow 2AB^2-3AC^2-5\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

$\Leftrightarrow 2c^2-3b^2-\frac{5bc}{2}=0\Leftrightarrow 4c^2-6b^2-5bc=0$

<u>Câu 4.1</u>Cho tam giác ABC$\left(AB<AC\right)$ nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O), trọng tâm G và $a=BC,\ b=CA,\ c=AB$. Gọi M là trung điểm của cạnh AC. Chứng minh rằng nếu bốn điểm A, O, M, G cùng nằm trên một đường tròn thì $b^2+c^2=2a^2$.

Ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3.\overrightarrow{OG}\Rightarrow 9.OG^2=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)^2$

$=OA^2+OB^2+OC^2+2.\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+2.\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}+2.\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}$

$=3R^2+OA^2+OB^2-AB^2+OB^2+OC^2-BC^2+OC^2+OA^2-CA^2$

$=9R^2-a^2-b^2-c^2$.

Do 4 điểm A, G, O, M cùng nằm trên một đường tròn nên OG vuông góc với GA hay

$OG^2+GA^2=OA^2\Leftrightarrow\frac{1}{9}\left(9R^2-a^2-b^2-c^2\right)+\frac{1}{9}\left(2b^2+2c^2-a^2\right)=R^2$

$\Leftrightarrow 9R^2-a^2-b^2-c^2+2b^2+2c^2-a^2=9R^2$

$\Leftrightarrow b^2+c^2=2a^2$

4.2 Cho tam giác ABC, gọi M là trung điểm của BC, G là trọng tâm tam giác ABC, lấy D đối xứng với A qua M, I là trọng tâm của tam giác MCD.

Lấy J thỏa $2\overrightarrow{CJ}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{JM}$. Chứng minh rằng IJ song song với AB.

$$2\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{JM}+2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AJ}-2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AJ}+2\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AM}=5\overrightarrow{AM}\Rightarrow \overrightarrow{AJ}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AM}$$

Mà M là trung điểmcủa AD nên $\frac{MJ}{JD}=2$.

Gọi K là trung điểm của CD, ta có $\frac{MI}{IK}=2$. Vậy ta có: $\frac{MJ}{JD}=\frac{MI}{IK}\Rightarrow IJ\ //\ CD\ //\ AB$.

TRƯỜNG THPT NGUYỄN GIA THIỀU
(Đề thi gồm 01 trang)

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10
VÒNG 4
Năm học 2023 - 2024
Môn thi: Toán
Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1 (4đ)

Cho parabol *(P)*: $y=-x^2$ và đường thẳng *(d)* có dạng $y=kx-1$. Gọi *A* và *B* là các giao điểm của *(P)* và *(d)*. Giả sử *A, B* lần lượt có hoành độ là $x_1;x_2$.

1) Tìm k để trung điểm của đoạn thẳng *AB* nằm trên trục tung.

2) Chứng minh rằng $\left|x_1^3-x_2^3\right|\ge 2\left(\forall k\in R\right)$

Câu 2 (2đ)

Một công ty TNHH trong một đợt quảng cáo và bán khuyến mãi hàng hóa (1 sản phẩm mới của công ty) cần thuê xe để chở trên 140 người và trên 9 tấn hàng. Nơi thuê chỉ có hai loại xe A và B. Trong đó xe loại A có 10 chiếc, xe loại B có 9 chiếc. Một chiếc xe loại A cho thuê với giá 4 triệu, loại B giá 3 triệu. Hỏi phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí vận chuyển là thấp nhất. Biết rằng xe A chỉ chở tối đa 20 người và $0,6$ tấn hàng. Xe B chở tối đa 10 người và $1,5$ tấn hàng.

Câu 3 (4đ)

1. Giải phương trình: $2\sqrt{x^2-5x+7}=3\left(x-1\right)\left(x-4\right)+8$
2. Giải phương trình sau trên $\mathbb{R}: 4x^2+12x\sqrt{x+1}=27\left(x+1\right)$

Câu 4 (3đ)

1. Cho tam giác ABC, lấy các điểm M, N, E trên các đoạn AB, BC, CA sao cho $AM=\frac{1}{3}AB,\ BN=\frac{1}{3}BC,\ CE=\frac{1}{3}CA$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$
2. Cho tam giác nhọn *ABC* không cân, nội tiếp đường tròn $\left(O;R\right)$. Gọi *G* và *M* lần lượt là trọng tâm tam giác *ABC* và trung điểm cạnh *BC*. Chứng minh nếu đường thẳng *OG* vuông góc với đường thẳng *OM* thì $AC^2+AB^2+2BC^2=12R^2$.

Câu 5. (3đ)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A\left(1;2\right)$, $B\left(3;-4\right)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho ΔABC vuông tại C và có góc B bằng $60°$.
2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho điểm $A\left(1;3\right),B\left(-5;-3\right)$. Xác định tọa độ điểm *M* trên đường thẳng $d: x-2y+1=0$ sao cho $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

Câu 6 (4đ)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC biết A(3; 0) đường thẳng chứa đường cao từ B và đường trung tuyến từ C lần lượt có phương trình x + y + 1 = 0 ; 2x - y - 2 = 0. Tìm tọa độ đỉnh B và C của tam giác ABC.
2. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O), biết $BC=a,\ AC=b,\ AB=c$. Chứng minh rằng: $\frac{OA^2}{bc}+\frac{OB^2}{ac}+\frac{OC^2}{ab}=1.$

……..……………..Hết……………………..

ĐÁP ÁN

Câu 1. Cho parabol *(P)*: $y=-x^2$ và đường thẳng *(d)* đi qua điểm $I(0;-1)$ và có hệ số góc là k. Gọi *A* và *B* là các giao điểm của *(P)* và *(d)*. Giả sử *A, B* lần lượt có hoành độ là $x_1;x_2$. 1) Tìm k để trung điểm của đoạn thẳng *AB* nằm trên trục tung.
+ Đường thẳng (d) có pt: $y=kx-1$
+ PT tương giao (d) và (P): $-x^2=kx-1 \Leftrightarrow x^2+kx-1=0(*)$
+ (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ vì $\Delta=k^2+4>0\ \forall k$
+ Trung điểm M của AB có hoành độ là $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{-k}{2}$; M nằm trên trục tung $\Leftrightarrow$ $\dfrac{-k}{2}=0 \Leftrightarrow k=0$
2) Chứng minh rằng $\left|x_1^3-x_2^3\right|\ge 2\left(\forall k\in R\right)$
Theo Vi et có: $x_1+x_2=-k,\quad x_1x_2=-1$
Ta có: $\left|x_1^3-x_2^3\right|=\left|(x_1-x_2)\left[(x_1+x_2)^2-x_1x_2\right]\right| = \left|x_1-x_2\right|.\left|(x_1+x_2)^2-x_1x_2\right|$
Có $\left|x_1-x_2\right|^2 = x_1+x_2\ {}^2-4x_1x_2=k^2+4$
$\Rightarrow\left|x_1^3-x_2^3\right| = \sqrt{k^2+4}(k^2+1)\ge 2$, $\forall k\in R$. Đẳng thức xảy ra khi k = 0

Câu 2

Một công ty TNHH trong một đợt quảng cáo và bán khuyến mãi hàng hóa (1 sản phẩm mới của công ty) cần thuê xe để chở trên 140 người và trên 9 tấn hàng. Nơi thuê chỉ có hai loại xe A và B. Trong đó xe loại A có 10 chiếc, xe loại B có 9 chiếc. Một chiếc xe loại A cho thuê với giá 4 triệu, loại B giá 3 triệu. Hỏi phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí vận chuyển là thấp nhất. Biết rằng xe A chỉ chở tối đa 20 người và $0,6$ tấn hàng. Xe B chở tối đa 10 người và $1,5$ tấn hàng.

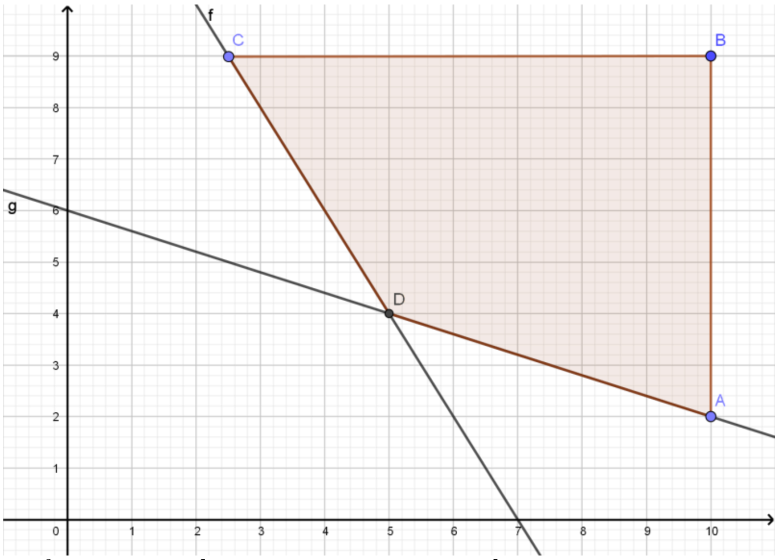
□ **Lời giải**

Gọi x là số xe loại A $\left(0\le x\le 10; x\in\mathbb{N}\right)$, y là số xe loại B $\left(0\le y\le 9; y\in\mathbb{N}\right)$. Khi đó tổng chi phí thuê xe là $T=4x+3y$ (triệu đồng).

Xe A chở tối đa 20 người, xe B chở tối đa 10 người nên tổng số người 2 xe chở tối đa được là $20x+10y$ (người).

Xe A chở được $0,6$ tấn hàng, xe B chở được $1,5$ tấn hàng nên tổng lượng hàng 2 xe chở được là $0,6x+1,5y$ (tấn).

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases}0\le x\le 10\\ 0\le y\le 9\\ 20x+10y\ge 140\\ 0,6x+1,5y\ge 9\end{cases}\quad(*)$



Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình $(*)$ là tứ giác $ABCD$ kể cả miền trong của tứ giác (như hình vẽ trên).

Biểu thức $T = 4x + 3y$ đạt giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$.

Tại các đỉnh $A(10;2); B(10;9); C\left(\frac{5}{2};9\right); D(5;4)$, ta thấy T đạt giá trị nhỏ nhất tại $\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$.

Khi đó $T_{\min} = 32$ (triệu đồng).

Câu 3

1. Giải phương trình: $2\sqrt{x^2 - 5x + 7} = 3(x-1)(x-4) + 8$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 5x + 7}, (t \geq 0)$

$(x-1)(x-4) = t^2 - 3$

Phương trình trở thành $2t = 3(t^2 - 3) + 8$

$2t = 3(t^2 - 3) + 8 \Leftrightarrow 3t^2 - 2t - 1 = 0$

$t = 1 \vee t = \frac{-1}{3}$

$t = \frac{-1}{3}$ không thỏa mãn điều kiện

Với t = 1, ta có $\sqrt{x^2 - 5x + 7} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 3$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $\{2;3\}$

2. Giải phương trình sau trên $\mathbb{R}: 4x^2 + 12x\sqrt{x+1} = 27(x+1)$

điều kiện: $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

Phương trình đã cho tương đương với:

$$4x^2 + 12x\sqrt{x+1} = 27(x+1) = 36(1+x) \Leftrightarrow \left(2x + 3\sqrt{1+x}\right)^2 = \left(6\sqrt{1+x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 3\sqrt{1+x} = 6\sqrt{1+x} \\ 2x + 3\sqrt{1+x} = -6\sqrt{1+x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\sqrt{1+x} = 2x \quad (1) \\ 9\sqrt{1+x} = -2x\,(2) \end{array}\right.$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 9(1+x) = 4x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 9x - 9 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

Ta có (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 8(1+x) = 4x^2 \\ x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 81x - 81 = 0 \\ x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{81 - 9\sqrt{97}}{8}$

Vậy x = 3; $x = \dfrac{81 - 9\sqrt{97}}{8}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 4

1. Cho tam giác ABC, lấy các điểm M, N, E trên các đoạn AB, BC, CA sao cho $AM = \frac{1}{3}AB,\ BN = \frac{1}{3}BC,\ CE = \frac{1}{3}CA$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$
Từ gt ta có: $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \Rightarrow \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
cộng theo vế các đẳng thức trên ta được: $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CM} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$
mà $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$, nên $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$

2. Cho tam giác nhọn ABC không cân, nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Gọi G và M lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và trung điểm cạnh BC. Chứng minh nếu đường thẳng OG vuông góc với đường thẳng OM thì $AC^2 + AB^2 + 2BC^2 = 12R^2$.

Áp dụng quy tắc trọng tâm và quy tắc trung điểm ta có:

$\overrightarrow{OG} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3},\ \overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$. Khi đó

3.

$OG \perp OM \Rightarrow \overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OM} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + 2R^2 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(2R^2 - AB^2\right) + \frac{1}{2}\left(2R^2 - AC^2\right) + 2R^2 - BC^2 + 2R^2 = 0$ (chú ý $\vec{a}.\vec{b} = \dfrac{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - \left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2}{2}$)

$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 + 2BC^2 = 12R^2$

Câu 5.1 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(1;2)$, $B(3;-4)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho ΔABC vuông tại C và có góc B bằng $60°$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;-6)$, giả sử $C(x;y) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (x-1; y-2)$, $\overrightarrow{BC} = (x-3; y+4)$.

ΔABC vuông tại C và có góc B bằng $60°$ $\Leftrightarrow \begin{cases} AC \perp BC \\ BC = \frac{1}{2}AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ BC^2 = \frac{1}{4}AB^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1).(x-3) + (y-2).(y+4) = 0 \\ (x-3)^2 + (y+4)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 8y + 25 = 10 \end{cases}$

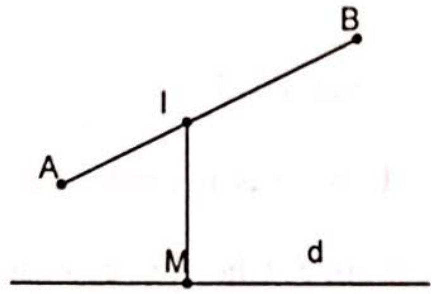
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4x+2y-5=0 \\ 2x-6y-20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4x+2y-5=0 \\ x=3y+10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9y^2+60y+100+y^2-12y-40+2y-5=0 \\ x=3y+10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y^2+50y+55=0 \\ x=3y+10 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5-3\sqrt{3}}{2}, y=\frac{-5-\sqrt{3}}{2} \\ x=\frac{5+3\sqrt{3}}{2}, y=\frac{-5+\sqrt{3}}{2} \end{array} \right.$$

Vậy $C\left(\frac{5-3\sqrt{3}}{2};\frac{-5-\sqrt{3}}{2}\right)$ hoặc $C\left(\frac{5+3\sqrt{3}}{2};\frac{-5+\sqrt{3}}{2}\right)$.

Câu 5.2 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho điểm $A(1;3), B(-5;-3)$. Xác định tọa độ điểm *M* trên đường thẳng $d: x-2y+1=0$ sao cho $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

Gọi $I(x_0;y_0)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$



$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BI} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1-x_0)=x_0+5 \\ 2(3-y_0)=y_0+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=1 \end{cases}$$

Vậy $I(-1;1)$. Ta có

$$\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right| = \left|2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right|$$

$$=\left|3\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right| = 3\left|\overrightarrow{MI}\right| = 3MI$$

Như vậy $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi *MI* nhỏ nhất. Suy ra *M* là hình chiếu của *I* trên *d*.

Phương trình tham số của $d\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t \end{cases}$. Gọi tọa độ $M(2t_0-1;t_0)$

Suy ra $\overrightarrow{IM}=(2t_0;t_0-1)$. Ta có $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{u_d}=0 \Leftrightarrow 2.2t_0+t_0-1=0 \Leftrightarrow t_0=\frac{1}{5}$.

Vậy $M\left(\frac{-3}{5};\frac{1}{5}\right)$.

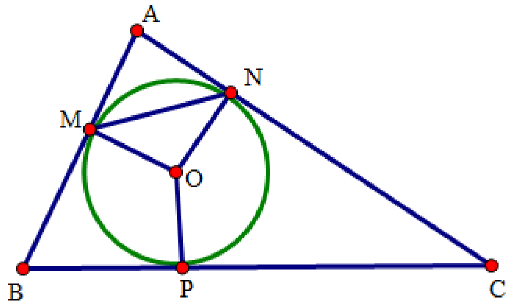
Câu 6

<table>
<tr><td>1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC biết A(3; 0) đường thẳng chứa đường cao từ B và đường trung tuyến từ C lần lượt có phương trình x + y + 1 = 0 ; 2x - y - 2 = 0. Tìm tọa độ đỉnh B và C của tam giác ABC.</td></tr>
<tr><td>Tọa độ điểm B:
vì $B\in$ đt: x + y + 1 = 0 $\Rightarrow$B(b; -b - 1)
gọi M là trung điểm của AB ta có $M\left(\frac{b+3}{2};\frac{-b-1}{2}\right)$</td></tr>
<tr><td>vì M$\in$đt: 2x - y -2 = 0 $\Rightarrow$ $b+3+\frac{b+1}{2}-2=0 \Leftrightarrow b=-1$ $\Rightarrow$ B(-1; 0)</td></tr>
<tr><td>Tọa độ điểm C:
vì AC đi qua A(3; 0) và vuông góc với đt: x + y + 1 = 0 nên ta có:
pt AC: x - y - 3 = 0</td></tr>
<tr><td>Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ pt: $\begin{cases} x-y-3=0 \\ 2x-y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-4 \end{cases} \Rightarrow C(-1;-4)$</td></tr>
<tr><td>2. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O), biết $BC=a, AC=b, AB=c.$ Chứng minh rằng: $\frac{OA^2}{bc}+\frac{OB^2}{ac}+\frac{OC^2}{ab}=1.$</td></tr>
</table>

Gọi M, N, P lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn (O) AB, AC, BC.

Ta có: AM=AN, OM=ON

$MAN + MON = 180^o$



$$S_{AMON} = \frac{1}{2}AM.AN.\sin A + \frac{1}{2}OM.ON.\sin MON$$
$$= \frac{1}{2}AM^2.\sin A + \frac{1}{2}OM^2\sin\left(180^o - A\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(AM^2 + OM^2\right).\sin A$$
$$= \frac{1}{2}AO^2.\sin A$$
$$\Rightarrow OA^2 = \frac{2.S_{AMON}}{\sin A}$$

Chứng minh tương tự ta có: $OB^2 = \frac{2.S_{BMOP}}{\sin B}$, $OC^2 = \frac{2.S_{CNOP}}{\sin C}$

$$\Rightarrow \frac{OA^2}{bc} + \frac{OB^2}{ac} + \frac{OC^2}{ab} = \frac{2.S_{AMON}}{bc.\sin A} + \frac{2.S_{BMOP}}{ac.\sin B} + \frac{2.S_{CNOP}}{ab.\sin C}$$
$$= \frac{2\left(S_{AMON} + S_{BMOP} + S_{CNOP}\right)}{2.S_{\Delta ABC}} = \frac{2.S_{\Delta ABC}}{2.S_{\Delta ABC}} = 1.$$