

CHƯƠNG VII. TẦN SỐ VÀ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI.

BÀI 22. BẢNG TẦN SỐ VÀ BIỂU ĐỒ TẦN SỐ.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. BẢNG TẦN SỐ

Tần số và bảng tần số

- Tần số của một giá trị là số lần xuất hiện giá trị đó trong mẫu dữ liệu.
- Bảng tần số là bảng thống kê cho biết tần số của các giá trị trong mẫu dữ liệu. Bảng tần số có dạng sau:

Giá trị	x_1	x_2	...	x_k
Tần số	m_1	m_2	...	m_k

trong đó m_1 là tần số của x_1 , m_2 là tần số của x_2 , ..., m_k là tần số của x_k .

Chú ý. Người ta còn cho bảng tần số ở dạng cột: cột thứ nhất ghi các giá trị, cột thứ hai ghi tần số của các giá trị đó.

Ví dụ 1: Để mua giày thể thao cho các bạn nam trong lớp luyện tập chuẩn bị cho giải bóng đá của trường, Huy đã thu thập cỡ giày của các bạn nam trong lớp và thu được kết quả như sau:

40, 36, 37, 36, 40, 38, 39, 38, 37, 36, 40, 39, 36, 38, 37, 38, 38, 37, 38, 38, 36

- Bạn Huy cần mua giày các cỡ nào? Mỗi loại bao nhiêu đôi?
- Lập bảng tần số cho dãy dữ liệu trên. Từ bảng tần số, cho biết cỡ giày nào phù hợp với nhiều bạn nam trong lớp nhất.

Lời giải

a) Bạn Huy cần mua giày với các cỡ 36, 37, 38, 39, 40. Giày cỡ 36 cần 5 đôi; cỡ 37 cần 4 đôi; cỡ 38 cần 8 đôi; cỡ 39 cần 2 đôi; cỡ 40 cần 3 đôi.

b) Bảng tần số

Cỡ giày	36	37	38	39	40
Tần số	5	4	8	2	3

Giày cỡ 38 phù hợp với nhiều bạn nam trong lớp nhất.

Nhận xét. Trong bảng tần số, ta chỉ liệt kê các giá trị x_i khác nhau. Các giá trị x_i này có thể không là số.

Tần số của một giá trị cho biết giá trị đó xuất hiện trong mẫu dữ liệu nhiều hay ít, từ đó ta dễ dàng xác định được giá trị xuất hiện nhiều nhất, ít nhất.

2. BIỂU ĐỒ TẦN SỐ

Tìm hiểu về biểu đồ tần số

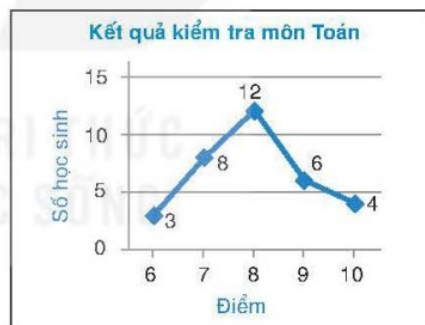
Biểu đồ biểu diễn bảng tần số được gọi là biểu đồ tần số. Biểu đồ tần số thường gặp là biểu đồ tần số dạng cột

(H.7.1) và biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng (H.7.2).

Lưu ý: Biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng còn gọi là đa giác tần số (frequency polygon).



Hình 7.1. Biểu đồ A



Hình 7.2. Biểu đồ B

Nhận xét. Để vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Vẽ trục ngang để biểu diễn các giá trị trong dãy dữ liệu, vẽ trục đứng thể hiện tần số.

Bước 2. Với mỗi giá trị trên trục ngang và tần số tương ứng ta xác định một điểm. Nối các điểm liên tiếp với nhau.

Bước 3. Ghi chú giải cho các trục, các điểm và tiêu đề của biểu đồ.

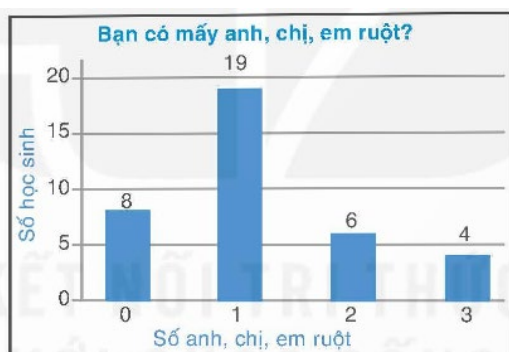
Ví dụ 2 Bạn Bình thống kê số anh, chị, em ruột của các bạn trong lớp và thu được bảng sau:

Số anh, chị, em ruột	0	1	2	3
Số bạn	8	19	6	4

Vẽ biểu đồ tần số dạng cột và biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng biểu diễn bảng thống kê trên.

Lời giải

- Vẽ biểu đồ tần số dạng cột (H.7.3).



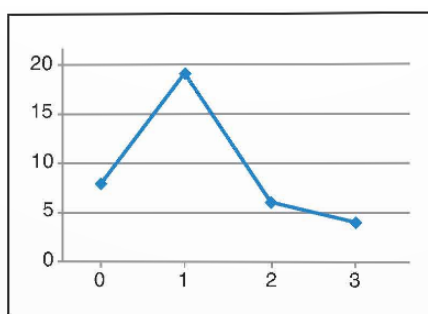
Hình 7.3

- Vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng.

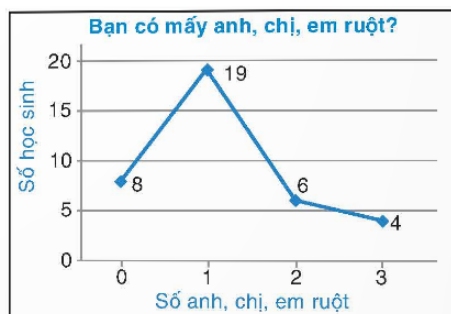
Bước 1. Vẽ các trục (H.7.4).

Bước 2. Xác định các điểm và nối các điểm liên tiếp với nhau (H.7.4).

Bước 3. Ghi chú giải cho các trục, các điểm và tiêu đề của biểu đồ (H.7.5).



Hình 7.4



Hình 7.5

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

Dạng 1. Lập bảng tần số

Ví dụ 1. Một đội bóng đã thi đấu 26 trận trong một mùa giải. Số bàn thắng mà đội đó ghi được trong từng trận đấu được thống kê lại như sau:

2	3	2	3	3	1	0	3	1	0	1	1	2
2	4	0	0	2	2	0	5	4	2	0	2	0

Mẫu dữ liệu trên có bao nhiêu giá trị khác nhau? Xác định tần số của mỗi giá trị và lập bảng tần số của mẫu dữ liệu.

Ví dụ 2. Người ta đếm số lượng người ngồi trên mỗi chiếc xe ô tô 5 chỗ đi qua một trạm thu phí trong khoảng thời gian từ 9 giờ đến 10 giờ sáng. Kết quả được ghi lại ở bảng sau:

5	4	5	2	3	2	5	2	1	2	1	1	2	5	1
1	1	3	2	1	1	4	1	1	4	1	2	1	4	1
2	3	2	3	2	3	2	3	3	1	2	1	3	2	2
1	4	3	2	3	1	3	5	1	2	3	5	1	2	1

Lập bảng tần số cho mẫu dữ liệu trên.

Ví dụ 3. Số cuộc gọi đến một tổng đài hỗ trợ khách hàng mỗi ngày trong tháng 4/2023 được ghi lại như sau:

4	2	6	3	6	3	2	5	4	2	5	4	3	3	3
3	5	4	4	3	4	6	5	3	6	3	5	3	5	5

Lập bảng tần số cho mẫu dữ liệu trên.

Ví dụ 4. Bảng sau đây ghi lại tên các bạn đạt điểm tốt vào các ngày trong tuần của lớp 9 E, mỗi điểm tốt ghi tên một lần.

Ngày	Thứ Hai	Thứ Ba	Thứ Tư	Thứ Năm	Thứ Sáu
Tên bạn đạt điểm tốt	Bình Nam	Tuấn Thảo	Bình	Yến Nam	Nam Thảo

Lập bảng tần số cho mẫu dữ liệu trên.

Ví dụ 5. Thống kê điểm kiểm tra môn Toán của 40 học sinh lớp 9C như sau:

5	5	5	7	7	8	8	8	5	8	8	8	6	6	6	6	8	9	5	7
6	6	7	7	6	8	9	9	7	8	8	5	7	7	7	7	6	8	8	9

Lập bảng tần số cho mẫu dữ liệu trên.

Ví dụ tương tự.

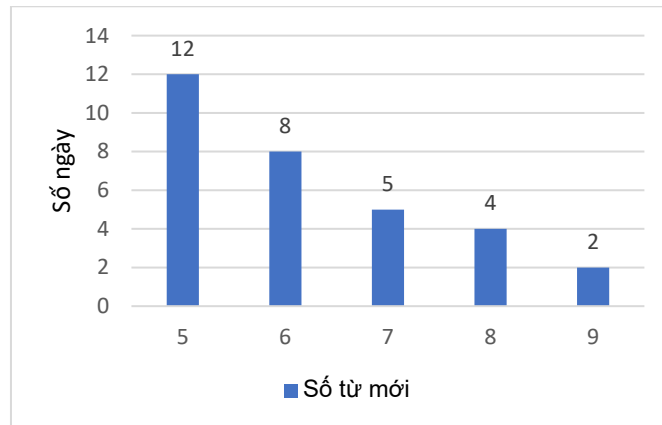
Thống kê thâm niên công tác (đơn vị: năm) của 33 nhân viên ở một công sở như sau:

7	2	5	9	7	4	3	8	10	4	4
2	4	4	5	6	7	7	5	4	1	8
9	4	2	8	5	5	7	3	14	8	8

Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê trên.

Dạng 2. Biểu đồ tần số

Ví dụ 1. Vào đợt nghỉ hè vừa rồi, mỗi ngày bạn Bình đều học thêm một số từ vựng tiếng Anh mới. Số lượng từ vựng mới bạn Bình học mỗi ngày được biểu diễn ở biểu đồ cột như hình bên dưới.



a) Số lượng từ vựng mới mà bạn Bình học mỗi ngày nhận được những giá trị nào? Tìm tần số của mỗi giá trị đó?

b) Bạn Bình đã học từ vựng tiếng Anh mới trong bao nhiêu ngày?

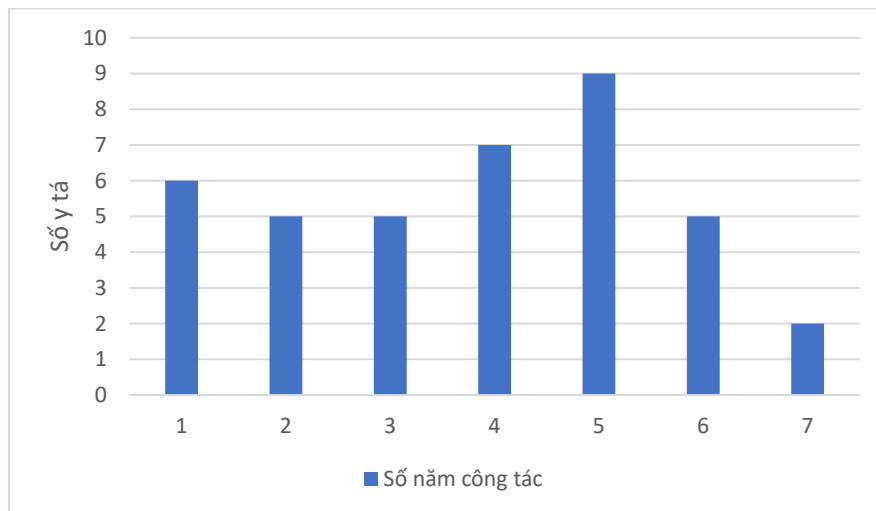
c) Có bao nhiêu ngày bạn Bình nhiều hơn 7 từ vựng mới?

Ví dụ 2. Biểu đồ bên dưới thống kê thời gian (theo năm) của các y tá ở một phòng khám.

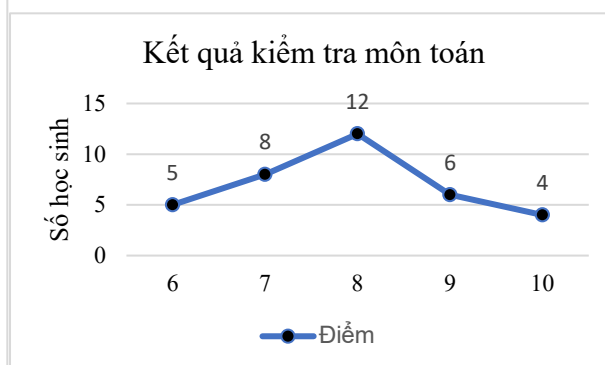
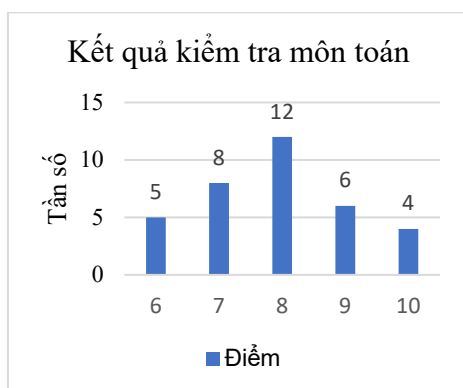
a) Các y tá của phòng khám có thời gian công tác nhận được những giá trị nào? Tìm tần số của mọi giá trị đó.

b) Phòng khám có tổng số bao nhiêu y tá?

c) Có bao nhiêu y tá đã công tác ở phòng khám ít nhất 3 năm?



Ví dụ 3. Cho hai biểu đồ sau:



Biểu đồ A

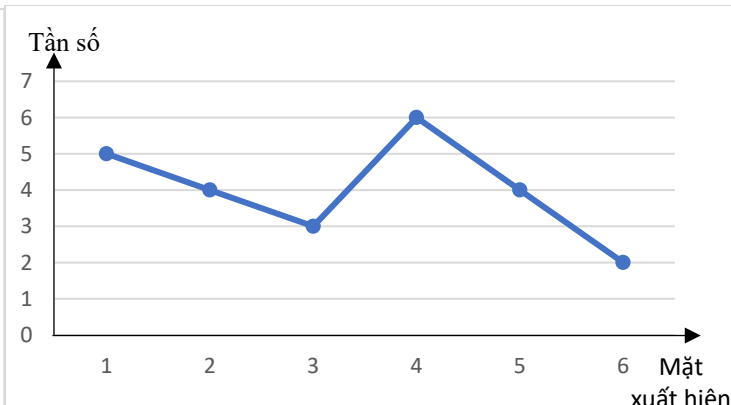
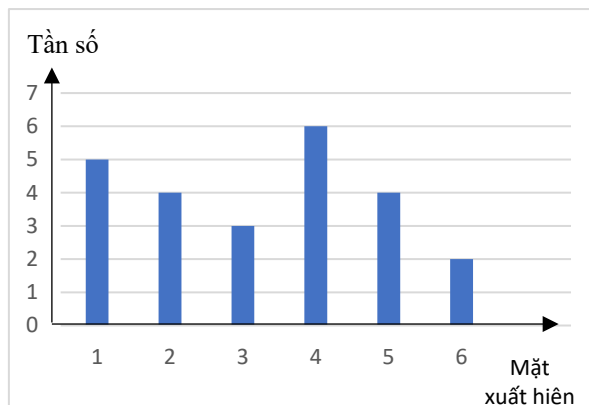
Biểu đồ B

a) Đọc và giải thích mỗi biểu đồ trên.

b) Hai biểu đồ trên có biểu diễn cùng một dữ liệu không? Lập bảng thống kê cho dữ liệu đó. Bảng thống kê thu được có phải là bảng tần số hay không?

Ví dụ tương tự.

Lập bảng thống kê và kết quả khi gieo con xúc xắc từ biểu đồ đã cho.



Ví dụ 3. Một khu vui chơi dành cho trẻ em thống kê lại độ tuổi của một số trẻ em đến chơi trong một ngày ở bảng tần số như sau:

Điểm	6	7	8	9	10
Số học sinh (tần số)	5	8	12	6	4

a) Hãy vẽ các biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn số liệu ở bảng tần số.

b) Theo biểu đồ ở câu a, trong số các trẻ em đến khu vui chơi, trẻ em ở độ tuổi nào là nhiều nhất?

Ví dụ tương tự.

Bác An thống kê lại số cuộc gọi điện thoại mà mình thực hiện mỗi ngày trong tháng 7 ở bảng tần số như sau:

Tuổi	3	4	5	6	7	8
Tần số	4	5	4	5	11	7

Hãy vẽ biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn mẫu số trên.

Ví dụ 4. Bảng tần số sau cho biết số học sinh của lớp 9D dự đoán đội bóng vô địch World Cup 2022 trước khi giải đấu bắt đầu.

Số cuộc gọi	5	6	7	8	9
Tần số (số ngày)	2	5	9	11	4

Vẽ biểu đồ tần số dạng cột và biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng biểu diễn bảng tần số trên.

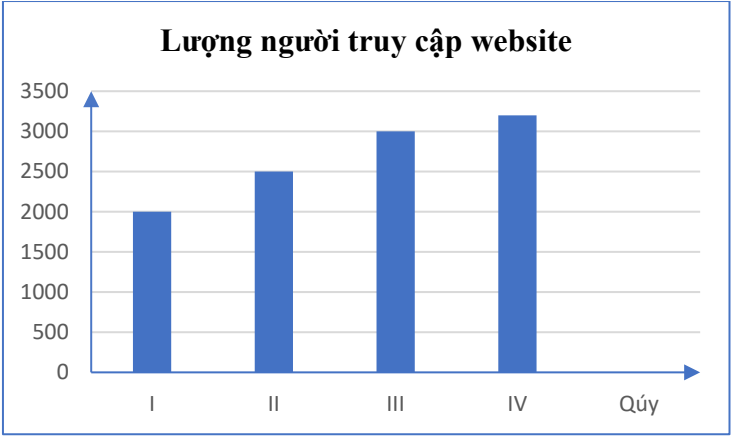
Ví dụ 5. Một công ty xuất khẩu các mặt hàng nông hải sản thống kê lại trong bảng sau số đơn đặt hàng trong mỗi năm thuộc giai đoạn 2018 -2022 :

a) Hãy chọn loại biểu đồ thuận tiện cho việc so sánh số đơn đặt hàng của các năm. Vẽ biểu đồ đó. Số đơn đặt hàng tập trung nhiều nhất vào năm nào? Số đơn đặt hàng của năm nào ít nhất?

b) Hãy chọn loại biểu đồ thể hiện rõ xu hướng thay đổi số đơn hàng qua các năm. Vẽ biểu đồ đó. Dựa vào biểu đồ này, cho biết vào những năm nào số đơn đặt hàng giảm sút so với năm trước đó? Năm nào giảm nhiều nhất?

Ví dụ 6. Biểu đồ được đưa ra để quảng cáo cho một website.

Quan sát biểu đồ, bạn Vân nhận xét: “Lượng người truy cập quý II tăng gấp đôi so với quý I. Sang quý III, lượng người truy cập lại tăng gấp 3 so với quý I”.



Ý kiến của bạn Vân đúng không? Giải thích vì sao?

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

7.1. Một nhóm học sinh đã khảo sát ý kiến về ý thức giữ gìn vệ sinh công cộng của các bạn trong trường với các mức đánh giá Tốt, Khá, Trung bình, Kém và thu được kết quả như sau:

Tốt, Trung bình, Tốt, Trung bình, Khá, Tốt, Khá, Tốt, Tốt, Khá, Trung bình, Kém, Khá, Tốt, Khá, Tốt, Trung bình, Khá, Tốt, Tốt, Tốt, Khá, Kém, Trung bình, Tốt, Khá, Tốt, Khá, Tốt, Khá, Khá.

- a) Lập bảng tần số cho dãy dữ liệu trên.
- b) Từ bảng tần số, hãy cho biết mức đánh giá nào chiếm ưu thế nhất. Vì sao?

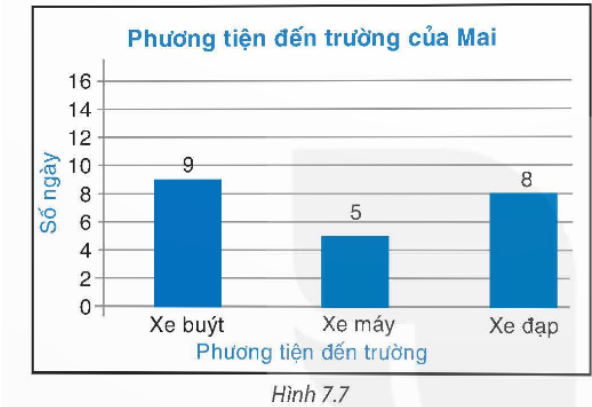
7.2. Cho biểu đồ tranh biểu diễn số lượng học sinh trong lớp đăng kí tham gia các câu lạc bộ của trường như sau:

Câu lạc bộ võ thuật	Câu lạc bộ tiếng Anh	Câu lạc bộ nghệ thuật

(Mỗi biểu diễn cho 1 học sinh)

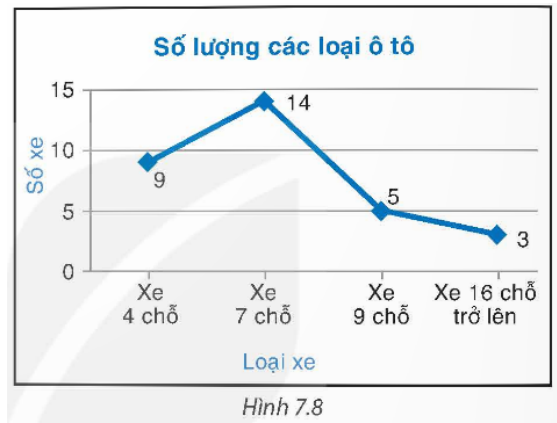
Lập bảng tần số cho dữ liệu được biểu diễn trong biểu đồ tranh trên.

7.3. Biểu đồ Hình 7.7 cho biết số ngày sử dụng phương tiện đến trường của bạn Mai trong tháng Chín. Lập bảng tần số cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.



Hình 7.7

7.4. Người ta thống kê các loại ô tô chạy qua một trạm thu phí trong 1 giờ và vẽ được biểu đồ tần số như Hình 7.8.



- a) Lập bảng tần số cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.
b) Từ bảng tần số, hãy cho biết loại xe nào đi qua trạm thu phí nhiều nhất.

7.5. Bảng thống kê sau cho biết số lượng các thiên tai xảy ra tại Việt Nam giai đoạn 1990 – 2021.

Loại thiên tai	Hạn hán	Bệnh dịch	Lũ lụt	Sạt lở đất	Bão
Số lượng	6	9	71	6	94

(Theo vietnam.opendevopmentmekong.net)

Vẽ biểu đồ tần số dạng cột và biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng biểu diễn bảng thống kê trên.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Một công ty đã ghi lại nhóm máu của các thành viên trong công ty để chuẩn bị cho đợt hiến máu tình nguyện cho kết quả như sau: O,A,B, AB, O, O,A, O,B, A,B,B, O, O,B, O,B,O, O,O,B,A,B, O, O,O,B, O,B.

- a) Có bao nhiêu nhóm máu? Đếm số thành viên trong công ty theo từng nhóm máu.
b) Lập bảng tần số cho dãy dữ liệu trên. Từ bảng tần số, hãy cho biết nhóm máu nào phổ biến nhất.

Câu 2. (Mức 1: lưu thông bình thường; Mức 2: lưu thông khó khăn; Mức 3: lưu thông không ổn định; Mức 4: ùn tắc nghiêm trọng) vào lúc 17 giờ các ngày trong tháng Chín tại một đoạn quốc lộ:

Mức độ	Mức 1	Mức 2	Mức 3	Mức 4
Tần số	5	15	7	3

- a) Dựa vào bảng tần số, hãy cho biết mức độ ùn tắc giao thông nào là phổ biến nhất vào lúc 17 giờ tại đoạn quốc lộ trên.
b) Vẽ biểu đồ tần số dạng cột biểu diễn bảng tần số trên.

Câu 3. Tính đến hết SEA Games 32 đã có năm quốc gia từng lên ngôi vô địch bóng đá nam SEA Games, cụ thể như sau:

Đội tuyển	Năm vô địch
Thái Lan	1975, 1981, 1983, 1985, 1993, 1995, 1997, 1999, 2001, 2003, 2005, 2007, 2013, 2015, 2017
Malaysia	1961, 1977, 1979, 1989, 2009, 2011
Myanmar	1965, 1967, 1969, 1971, 1973
Việt Nam	1959, 2019, 2021

Indonesia	1987, 1991, 2023
-----------	------------------

(Theo sportingnews.com)

- a) Lập bảng tần số biểu diễn số lần vô địch môn bóng đá nam SEA Games của các quốc gia trên.
b) Từ bảng tần số thu được ở câu a, hãy cho biết quốc gia nào vô địch môn Bóng đá nam SEA Games nhiều nhất, với mấy lần vô địch.

Câu 4. Giáo viên dạy Toán ghi lại số bài tập mỗi học sinh trong lớp đã làm sau bài học tuần trước cho kết quả như sau:

4, 2, 0, 5, 4, 3, 2, 1, 3, 3, 6, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 3
3, 1, 4, 6, 1, 2, 3, 5, 3, 2, 4, 3, 1, 4, 4, 5, 6, 2 .

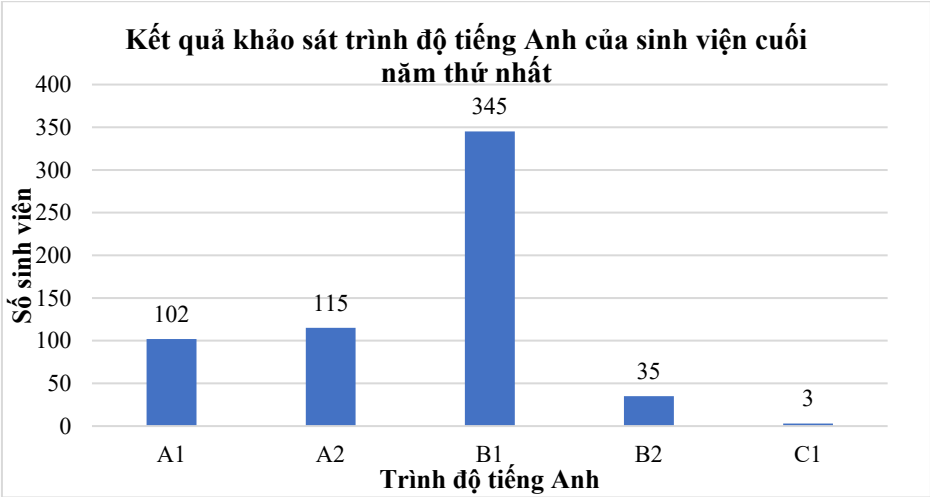
- a) Lập bảng tần số cho dãy số liệu trên.
b) Có bao nhiêu bạn trong lớp làm ít nhất ba bài tập?

Câu 5. Bảng sau cho biết kết quả bình chọn môn thể thao được yêu thích nhất của các bạn học sinh lớp 9A (mỗi gạch biểu diễn cho một bạn bình chọn):

Bóng đá	/
Cầu lông	/
Bóng bàn	
Môn khác	/

- a) Lập bảng tần số cho kết quả bình chọn trên.
b) Dựa vào bảng tần số thu được ở câu a, cho biết môn thể thao nào được các bạn yêu thích nhất.

Câu 6. Biểu đồ sau cho biết kết quả khảo sát trình độ tiếng Anh của sinh viên cuối năm thứ nhất ở một trường đại học:



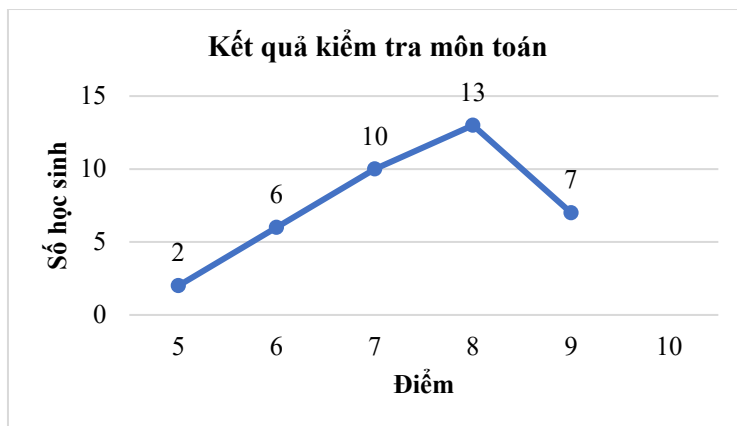
- a) Đọc và giải thích số liệu được biểu diễn trên hai cột bất kì của biểu đồ.
b) Lập bảng tần số cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.
c) Để tốt nghiệp đại học, sinh viên cần có trình độ tiếng Anh ở mức B1 trở lên. Ước lượng tỉ lệ sinh viên cuối năm thứ nhất đã đạt chuẩn trình độ tiếng Anh.

Câu 7. Số π với 50 chữ số sau dấu phẩy thập phân như sau:
3,14159265358979323846264338327950288419716939937510 .

- a) Lập bảng tần số cho các chữ số từ 0 đến 9 xuất hiện sau dấu phẩy thập phân.

b) Chữ số nào xuất hiện nhiều nhất, ít nhất?

Câu 8. Cho biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng sau:



a) Lập bảng tần số cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

b) Điểm nào có nhiều học sinh đạt nhất?

Câu 9. Một túi chứa một số viên bi có cùng kích thước, mỗi viên bi có một trong các màu đen, trắng, đỏ, vàng. Thực hiện lấy bi 20 lần, mỗi lần lấy một viên xem viên bi có màu gì sau đó trả bi lại túi, trộn đều. Kết quả trong 20 lần lấy bi có 8 lần lấy được bi đen, 4 lần lấy được bi đỏ, 6 lần lấy được bi trắng, 2 lần lấy được bi vàng.

a) Lập bảng tần số cho kết quả thu được.

b) Vẽ biểu đồ tần số dạng cột biểu diễn bảng tần số thu được ở câu a.

Câu 10. Thống kê số ngày nằm viện của 20 bệnh nhân được kết quả như sau:

5, 7, 4, 6, 8, 10, 6, 7, 8, 8, 6, 5, 8, 5, 4, 6, 5, 7, 4, 6

a) Lập bảng tần số cho dãy số liệu trên.

b) Vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng biểu diễn bảng tần số thu được ở câu a.

BÀI 23. BẢNG TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI VÀ BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. BẢNG TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

Tần số tương đối và bảng tần số tương đối

Cho dãy dữ liệu $x_1, x_2, \dots, x_n$. Tần số tương đối f_i của giá trị x_i là tỉ số giữa tần số của x_i (gọi là m_i) với n .

Bảng sau đây được gọi là bảng tần số tương đối.

Giá trị	x_1	...	x_k
Tần số tương đối	f_1	...	f_k

trong đó $n = m_1 + \dots + m_k$ và $f_1 = \frac{m_1}{n} \cdot 100(\%)$ là tần số tương đối của $x_1, \dots$, $f_k = \frac{m_k}{n} \cdot 100(\%)$ là tần số tương đối của x_k

Lưu ý: Tần số tương đối còn gọi là tần suất.

Chú ý. Người ta còn cho bảng tần số tương đối ở dạng cột: cột thứ nhất ghi các giá trị, cột thứ hai ghi tần số tương đối của các giá trị đó.

Ví dụ 1 Thu thập dữ liệu về chất lượng không khí tại một địa điểm trong 30 ngày mùa xuân cho kết quả như sau:

M1, M1, M2, M2, M2, M2, M1, M2, M2, M2, M2, M2, M2, M2, M2,

M4, M1, M3, M3, M3, M4, M4, M1, M1, M1, M1, M3, M3, M3, M1.

(M1: Tốt; M2: Trung bình; M3: Kém; M4: Xấu)

a) Lập bảng tần số tương đối cho dãy dữ liệu trên.

b) Trong một ngày xuân, khả năng cao nhất địa điểm này có chất lượng không khí ở mức nào?

Lời giải

a) Tổng số ngày quan sát là $n = 30$.

Số ngày có chất lượng không khí ở các mức M1, M2, M3, M4 tương ứng là $m_1 = 9, m_2 = 12, m_3 = 6, m_4 = 3$.

Do đó các tần số tương đối cho các mức M1, M2, M3, M4 lần lượt là:

$$f_1 = \frac{9}{30} \cdot 100\% = 30\%; f_2 = \frac{12}{30} \cdot 100\% = 40\%; f_3 = \frac{6}{30} \cdot 100\% = 20\%; f_4 = \frac{3}{30} \cdot 100\% = 10\%.$$

Ta có bảng tần số tương đối sau:

Chất lượng không khí	M1	M2	M3	M4
Tần số tương đối	30%	40%	20%	10%

b) Trong một ngày xuân, khả năng cao nhất là địa điểm này có chất lượng không khí ở mức M2, tức là mức Trung bình.

Nhận xét. Tần số tương đối của một giá trị là ước lượng cho xác suất xuất hiện giá trị đó.

2. BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

Tìm hiểu về biểu đồ tần số tương đối

- Biểu đồ biểu diễn bảng tần số tương đối được gọi là **biểu đồ tần số tương đối**. Dạng thường gặp của biểu đồ tần số tương đối là biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn.

- **Để vẽ biểu đồ hình quạt tròn ta thực hiện theo các bước sau:**

Bước 1. Xác định số đo cung tương ứng của các hình quạt dùng để biểu diễn tần số tương đối của các giá trị theo công thức $360^{\circ} \cdot f_i$ với $i = 1, \dots, k$.

Bước 2. Vẽ hình tròn và chia hình tròn thành các hình quạt có số đo cung tương ứng được xác định trong Bước 1.

Bước 3. Định dạng các hình quạt tròn (thường bằng cách tô màu), ghi tần số tương đối, chú giải và tiêu đề.

Ví dụ 2:

Cho bảng tần số tương đối về loại phim yêu thích của các học sinh trong lớp 9A như sau:

Loại phim	Hài	Khoa học viễn tưởng	Kinh dị
Tỉ lệ bạn yêu thích	50%	37,5%	12,5%

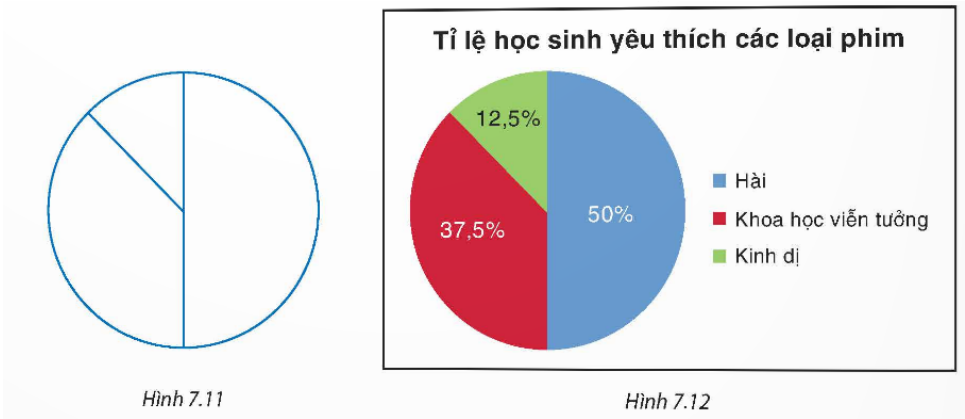
Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối trên.

Lời giải

Bước 1. Xác định số đo cung tương ứng của các hình quạt biểu diễn các tần số tương đối cho mỗi loại phim:

Hài: $360^{\circ} \cdot 50\% = 180^{\circ}$; Khoa học viễn tưởng: $360^{\circ} \cdot 37,5\% = 135^{\circ}$; Kinh dị: $360^{\circ} \cdot 12,5\% = 45^{\circ}$.

Bước 2. Vẽ hình tròn và chia hình tròn thành các hình quạt (H.7.11).



Bước 3. Định dạng các hình quạt tròn, ghi tỉ lệ phần trăm, chú giải và tiêu đề (H.7.12).

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tần số tương đối

Ví dụ 1. Sau bài thi môn Ngữ văn, cô giáo ghi lại số lỗi chính tả mà một học sinh mắc phải vào bảng thống kê sau:

2	5	2	2	1	3	4	0	5	2	5	1	2	1	3	5	1	0	4	1
4	2	1	4	3	3	2	0	4	5	4	5	1	4	1	1	0	3	1	4

- a) Mẫu số liệu trên gồm những giá trị khác nhau nào?
b) Hãy lập bảng tần số và bảng tần số tương đối của số lỗi chính tả mà học sinh mắc phải.

Ví dụ 2. Điều tra về “Loại nhạc cụ bạn muốn chơi nhất” đối với các bạn trong lớp, bạn Dương thu được ý kiến trả lời và ghi lại như dưới đây:

Đàn piano	Trống	Đàn bầu	Đàn piano	Đàn guitar
Đàn guitar	Sáo	Đàn guitar	Đàn guitar	Đàn piano
Sáo	Đàn guitar	Sáo	Kèn harmonica	Đàn violin
Trống	Đàn guitar	Đàn bầu	Đàn piano	Đàn piano
Đàn violin	Đàn piano	Đàn violin	Sáo	Trống
Kèn harmonica	Đàn violin	Đàn piano	Đàn piano	Đàn guitar

Lập bảng tần số tương đối của các loại nhạc cụ.

Hướng dẫn: Ta có thể lập bảng tần số và bảng tần số tương đối vào chung một hình vẽ.

Ví dụ 3. Thu thập dữ liệu về chất lượng không khí tại một địa điểm trong 30 ngày mùa xuân cho kết quả như sau:

M1, M1, M2, M2, M2, M1, M2, M2, M2, M2, M2, M2, M2,
M4, M3, M3, M3, M3, M4, M4, M1, M1, M1, M1, M3, M3, M3, M1.

(M1: Tốt; M2: Trung bình; M3: Kém; M4: Xấu)

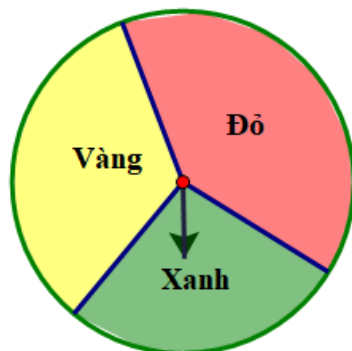
Lập bảng tần số tương đối.

Ví dụ 4. Quay 50 lần một tấm bìa hình tròn được chia thành ba hình quạt với các màu xanh, đỏ, vàng. Quan sát và ghi lại mũi tên chỉ vào hình quạt có màu nào khi tấm bìa dừng lại. Kết quả thu được như sau:

Xanh: 

Đỏ: 

Vàng: 



- a) Lập bảng tần số tương đối cho kết quả thu được.
Xanh
b) Ước lượng xác suất mũi tên chỉ vào hình quạt màu đỏ.

Dạng 2. Biểu đồ tần số tương đối

Ví dụ 1. Một doanh nghiệp thu thập mức độ yêu thích của người tiêu dùng về một loại sản phẩm theo các mức: 1, 2, 3, 4, 5. Mẫu số liệu thống kê sau phản ánh ý kiến của 50 người tiêu dùng như sau:

4	4	1	4	5	2	2	5	5	5	2	4	3	4	4	4	5
3	3	4	4	4	5	1	5	4	4	4	2	4	4	2	5	5
1	1	1	4	4	4	3	2	4	3	3	3	4	4	4	5	

- a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.
b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

Ví dụ 2. Gieo một xúc xắc 32 lần liên tiếp, ghi lại số chấm trên mặt xuất hiện của xúc xắc, ta được mẫu số liệu thống kê như sau:

Ví dụ 3. Thống kê điểm kiểm tra môn Toán của 40 học sinh lớp 9C (Xem Ví dụ 5 – Bài 22 . Bảng tần số và biểu đồ tần số). Vẽ biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn các số liệu thống kê đó.

Ví dụ 4. Câu lạc bộ mỹ thuật của nhà văn hoá thiếu nhi thống kê tuổi của các thành viên lớp hội hoạ và biểu diễn dữ liệu qua bảng sau:

Tuổi của các thành viên lớp hội hoạ

Tuổi	9	10	11	12	13	14	Tổng
Tần số	10	4	6	2	12	6	$N = 40$

- a) Tính tần số tương đối của mỗi giá trị và lập bảng tần số tương đối.
b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

7.6. Lớp 9A có 40 bạn, trong đó 20 bạn mặc áo cỡ M, 13 bạn mặc áo cỡ S, 7 bạn mặc áo cỡ L. Hãy lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu này.

7.7. Biểu đồ tranh sau đây biểu diễn số lượng học sinh lớp 9 B bình chọn phần mềm học trực tuyến được yêu thích nhất:

Skype	  
Zoom	         
Google Meet	     

(Mỗi  biểu diễn cho 2 học sinh)

Lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu được biểu diễn trong biểu đồ tranh trên.

7.8. Quay 150 lần một tấm bìa hình tròn được chia thành bốn hình quạt với các màu xanh, đỏ, tím, vàng. Quan sát mũi tên chỉ vào hình quạt màu gì và ghi lại, thu được kết quả sau:

Màu	Xanh	Đỏ	Tím	Vàng
Số lần	60	30	40	20

- a) Lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu trên.

- b) Ước lượng các xác suất mũi tên chỉ vào hình quạt màu xanh, màu vàng.
- c) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a.

7.9. Theo Tổng cục Thống kê, vào năm 2021 trong số 50,5 triệu lao động Việt Nam từ 15 tuổi trở lên có 13,9 triệu lao động đang làm việc trong lĩnh vực nông nghiệp, lâm nghiệp và thủy sản; 16,9 triệu lao động đang làm việc trong lĩnh vực công nghiệp và xây dựng; 19,7 triệu lao động đang làm việc trong lĩnh vực dịch vụ.

- a) Lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu trên.
- b) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a.
- c) Tính tỉ lệ lao động không làm việc trong lĩnh vực nông nghiệp, lâm nghiệp và thủy sản.

7.10. Bảng thống kê sau cho biết tỉ lệ tăng trưởng GDP năm 2022 theo khu vực kinh tế.

Khu vực kinh tế	Nông nghiệp, lâm nghiệp và thủy sản	Công nghiệp và xây dựng	Dịch vụ
Mức tăng trưởng	3,36%	7,78%	9,99%

(Theo Tổng cục Thống kê)

- a) Bảng thống kê trên có là bảng tần số tương đối hay không?
- b) Lựa chọn loại biểu đồ thích hợp và biểu diễn bảng thống kê trên bằng loại biểu đồ đó.

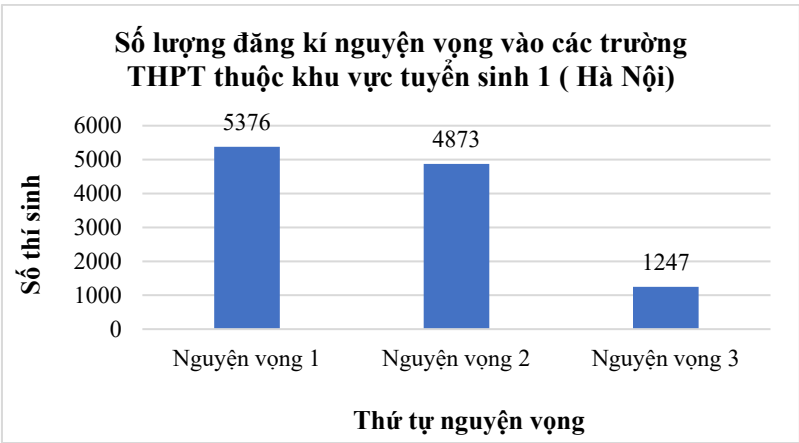
D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Bảng sau cho biết kết quả khảo sát về hoạt động được yêu thích nhất trong kì nghỉ hè của học sinh khối lớp 9:

Hoạt động	Thể thao	Nghệ thuật	Du lịch	Khác
Số bạn bình chọn	80	50	30	40

Lập bảng tần số tương đối và vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được.

Câu 2: Biểu đồ dưới đây cho biết số lượng thí sinh đăng kí dự tuyển sinh vào lớp 10 năm 2023 tại khu vực tuyển sinh 1 của thành phố Hà Nội (gồm các trường Trung học phổ thông trên địa bàn các quận Ba Đình và Tây Hồ).



(Theo Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội)

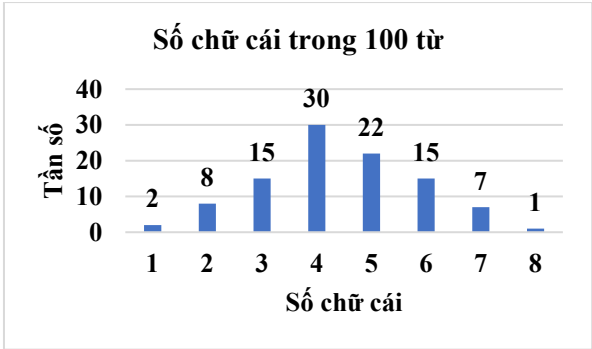
Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

Câu 3. Một xạ thủ bắn 50 lần vào bia và ghi lại điểm của 50 lần bắn như sau:

Điểm	10	9	8	7
Tần số	15	25	7	3

- a) Lập bảng tần số tương đối cho kết quả thu được.
- b) Ước lượng cho xác suất xạ thủ được điểm lớn hơn hoặc bằng 9 khi bắn vào bia.

Câu 4. Bạn Giang chọn một đoạn văn gồm 100 từ và đếm số chữ cái trong mỗi từ của đoạn văn này cho kết quả như trong biểu đồ sau:



- a) Lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.
- b) Tìm ước lượng cho xác suất một từ có nhiều hơn 5 chữ cái.

Câu 5. Kết quả bình chọn của khán giả cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất giải bóng đá học sinh trường Trung học cơ sở Chu Văn An năm học vừa qua đối với năm cầu thủ được ban tổ chức đề cử như sau:

Cầu thủ	An	Tân	Việt	Bình	Lê
Số lượng bình chọn	55	135	100	70	40

- a) Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối cho bảng dữ liệu trên.
- b) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a.

Câu 6. Bảng sau là kết quả đánh giá của khách hàng về chất lượng phục vụ của một lái xe công nghệ, mỗi gạch biểu diễn một lần đánh giá:

★ ★	
★ ★ ★	
★ ★ ★ ★	
★ ★ ★ ★ ★	

- a) Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối cho dữ liệu trên.
- b) Ước lượng cho xác suất một khách hàng đánh giá ở mức từ ba sao trở xuống.

Câu 7. Bảng tần số tương đối sau cho biết kết quả tập luyện của một vận động viên bắn súng:

Điểm	7	8	9	10
Tần số tương đối	5%	15%	55%	x%

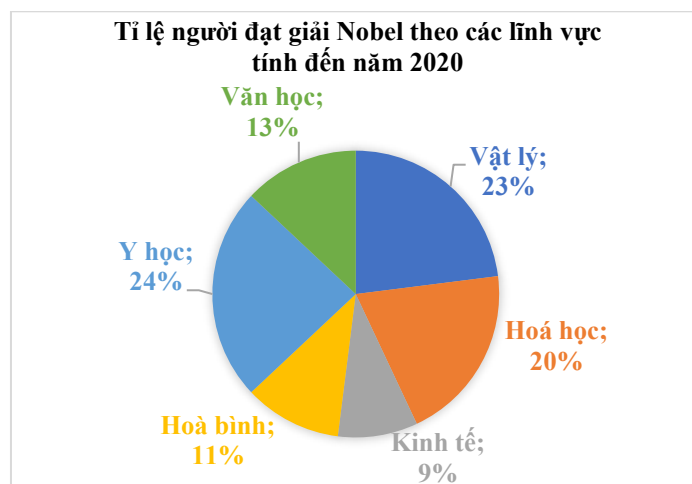
a) Xác định giá trị của x .

b) Ước lượng xác suất bắn trúng vòng 9 điểm hoặc vòng 10 điểm của vận động viên này.

c) Biết rằng vận động viên đã bắn 200 viên đạn trong quá trình luyện tập. Tính số lần bắn trúng vòng 9 điểm

hoặc vòng 10 điểm của vận động viên này.

Câu 8. Cho biểu đồ hình quạt tròn sau:



a) Giải thích các số liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

b) Lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

Câu 9. Cho bảng thống kê sau về số lượng học sinh tại một trường tham gia các câu lạc bộ (CLB):

	CLB tiếng Anh	CLB Toán	CLB Khoa học	Tổng
Nam	40	60	50	150
Nữ	70	30	65	165
Tổng	110	90	115	315

a) Lập các bảng tần số tương đối biểu diễn tỉ lệ học sinh nam, nữ tham gia các câu lạc bộ.

b) Vẽ các biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn các bảng tần số tương đối thu được ở câu a.

Câu 10. Với số liệu cho trong bài tập 7.15, hãy:

a) Lập bảng tần số tương đối cho tỉ lệ học sinh tham gia các câu lạc bộ.

b) Vẽ biểu đồ cột biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a.

LUYỆN TẬP CHUNG

PHẦN 1. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

A. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1 Một vận động viên bắn 30 viên đạn vào bia với các điểm số thu được như sau:

10,8,9,9,10,9,9,9,8,7,10,10,9,8,7,10,9,8,7,9,9,9,10,9,10,8,9,8,8,10

- Lập bảng tần số và tần số tương đối cho dãy dữ liệu trên.
- Vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng cho bảng tần số thu được ở câu a.

Ví dụ 2 Bảng thống kê sau cho biết số lượt mượn các loại sách trong một tuần tại thư viện của một trường Trung học cơ sở.

Loại sách	Sách giáo khoa	Sách tham khảo	Truyện ngắn	Tiểu thuyết
Số lượt	20	80	70	30

- Lập bảng tần số tương đối cho bảng thống kê trên.
- Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a.

B. BÀI TẬP

7.11. Bảng thống kê sau cho biết số lượng học sinh của lớp 9B theo mức độ cận thị.

Mức độ	Không cận thị	Cận thị nhẹ	Cận thị vừa	Cận thị nặng
Số học sinh	10	13	12	5

- Lập bảng tần số tương đối cho bảng thống kê trên.
- Đa số học sinh của lớp 9B cận thị hay không cận thị?

nghệ khối lớp 9 như sau:

Lớp	9 A	9 B	9 C	9 D
Tỉ lệ học sinh bình chọn	35%	25%	30%	10%

Biết rằng có 300 học sinh tham gia bình chọn. Lập bảng tần số biểu diễn số học sinh bình chọn cho tiết mục văn nghệ của mỗi lớp.

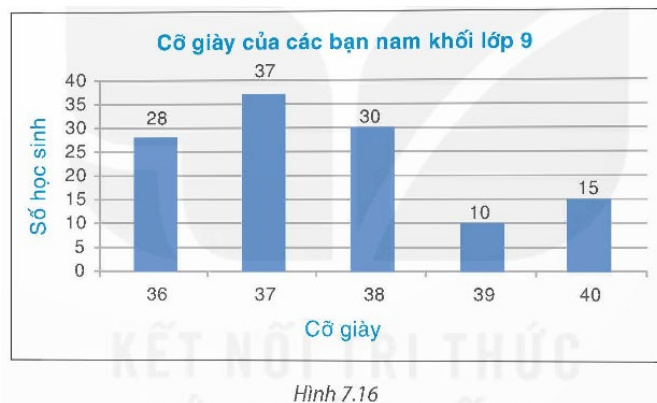
7.13. Bạn Hoàng khảo sát ý kiến của các bạn trong tổ về chất lượng phục vụ của căng tin trường thu được kết quả sau:

A, B, C, B, A, A, B, A, B, A,

trong đó A là mức Tốt, B là mức Trung bình, C là mức Kém.

Hãy lập bảng tần số và bảng tần số tương đối biểu diễn kết quả bạn Hoàng thu được.

7.14. Biểu đồ cột Hình 7.16 cho biết cỡ giày của các bạn nam khối lớp 9 trong trường.



Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

7.15. Cho bảng tần số sau:

Điểm thi môn Toán	6	7	8	9	10
Số học sinh	5	8	12	10	4

Vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng cho bảng tần số trên.

7.16. Theo dõi thời tiết tại một điểm du lịch trong 30 ngày người ta thu được bảng sau:

Thời tiết	Không mưa	Mưa nhỏ	Mưa to
Số ngày	10	8	12

a) Lập bảng tần số tương đối và vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được.

b) Ước lượng xác suất để một ngày trời có mưa ở điểm du lịch này.

PHẦN 2. BÀI TẬP THÊM

Bài 1. Thống kê khối lượng rau thu hoạch một vụ (đơn vị: tạ) của mỗi hộ gia đình trong 38 hộ gia đình tham gia chương trình trồng rau theo tiêu chuẩn VIETGAP như sau:

5 5 6 6 6 7 4 4 5 5 7 8 8
 9 4 5 7 4 10 7 7 7 6 6 5 7
 8 9 8 8 9 9 9 8 7 5 10 8

a) Trong 38 số liệu thống kê ở trên có bao nhiêu giá trị khác nhau?

b) Tìm tần số của mỗi giá trị đó.

c) Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê trên.

Bài 2. Tuổi nghề (đơn vị: năm) của 32 giáo viên ở một trường trung học cơ sở được ghi lại như sau:

7 7 10 3 4 4 9 3 3 7 7 10 9 7 10 4
 12 4 3 12 9 12 9 10 7 7 12 9 7 10 10 4

a) Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

Bài 3. Trong bài thơ "Quê hương" của tác giả Đỗ Trung Quân có hai câu thơ:

"Quê hương nếu ai không nhớ
Sẽ không lớn nổi thành người".

Mẫu dữ liệu thống kê các chữ cái H; N; G; L lần lượt xuất hiện trong hai câu thơ trên là: H; N; G; N; H; N; G; N; H; H; N; G; L; N; N; H; N; H; N; G. Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.

Bài 4. Một công ty nông sản xuất khẩu 4 mặt hàng chủ lực là Chè (C), Hạt điều (Đ), Hạt tiêu (T), Sắn (S). 40 container hàng xuất khẩu của công ty được thông quan qua cửa khẩu quốc tế Móng Cái vào tháng 5 năm 2023 như sau:

C C C Đ Đ Đ Đ C C C T T S S S C C C Đ T
T T S Đ Đ C S S S C T T Đ D T T T C C T

- a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê đó.
- b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

Bài 5. Một trường trung học cơ sở thống kê số giờ (trung bình) chơi thể thao trong một tuần của 420 học sinh. Kết quả mẫu số liệu thống kê đó được cho ở bảng tần số sau (Bảng 23):

Số giờ chơi thể thao (x)	8	9	10	12	Cộng
Tần số (n)	147	126	84	63	$N = 420$

Bảng 23

- a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê đó.
- b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.
- c) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ hình quạt tròn của mẫu số liệu thống kê đó.

Bài 6. Điều tra phương tiện đi lại thích nhất của hai đối tượng người lớn và thiếu niên, ta có bảng sau:

Đối tượng	Xe đạp	Ô tô	Xe buýt	Cộng
Thiếu niên	25	3	12	40
Người lớn	5	28	12	45

Lập biểu đồ tần số tương đối dạng hình quạt tròn thể hiện kết quả điều tra trên.

Bài 7. Bảng dưới đây thống kê loại quả thích nhất của một số học sinh lớp 9A và lớp 9B.

Đối tượng	Táo	Cam	Chuối	Cộng
Lớp 9A	18	10	22	...
Lớp 9B	20	...	12	40
Cộng	...	18	...	90

- a) Hãy điền tiếp số liệu vào các chỗ trống của bảng.
- b) Dùng tần số tương đối, cho biết mỗi loại quả được lớp nào thích hơn.

Bài 8. Tổng điểm mà các thành viên đội tuyển Olympic Toán quốc tế (IMO - hình thức thi trực tiếp) của Việt Nam đạt được trong các năm 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2022, 2023 được thống kê lần lượt như sau: 159; 161; 133; 113; 148; 180; 157; 151; 151; 155; 148; 177; 150; 196; 180.

a) Nêu các đối tượng thống kê và cho biết có bao nhiêu số liệu thống kê ở trên.

b) Trong các số liệu thống kê ở trên có bao nhiêu giá trị khác nhau?

Bài 9. Thống kê lượng hàng bán được (đơn vị: chiếc) của 39 mặt hàng ở một siêu thị điện máy như sau:

4 7 4 5 7 9 5 10 4 8 5 8 9
9 5 10 8 4 5 7 5 10 9 4 7 4
8 9 8 4 9 8 9 5 10 5 7 10 9

a) Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

Bài 10. Bác An ghi lại số cuộc điện thoại bác đã gọi trong mỗi ngày của tháng 2 năm 2023 như sau:

5 5 8 7 8 7 9 10 10 7 7 5 9 5
10 8 8 7 9 7 5 10 8 8 10 9 7 10

a) Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

Bài 11. Thống kê số quyển sách quyên góp ủng hộ thư viện nhà trường của 100 học sinh khối 9 như sau:

50 38 35 38 50 38 27 38 47 27 27 35 38 32 38 32 35 32 35 32
38 38 35 32 35 38 38 50 32 47 27 38 35 27 47 35 38 38 32 35
35 35 27 32 38 35 32 32 38 32 38 35 27 38 27 38 27 32 38 38
38 32 38 32 35 27 35 38 32 27 50 32 27 35 47 32 38 27 32 32
38 27 35 38 35 47 35 38 35 38 35 35 35 35 27 50 38 32 38

a) Trong 100 số liệu thống kê ở trên, có bao nhiêu giá trị khác nhau?

b) Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.

c) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

Bài 12. Điểm kiểm tra môn Toán của 200 học sinh khối 9 được thống kê như Bảng 25 sau:

Điểm	5	6	7	8	9	10
Số học sinh	30	40	50	35	25	20

Bảng 25

a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối (ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn) của mẫu số liệu thống kê đó.

Bài 13. Khối lượng thức ăn trung bình (đơn vị: gam) trong một ngày cho mỗi con lợn 50 kg của một số hộ gia đình được thống kê như sau:

2200 2100 2150 2100 2100 2150 2200 2100 2100 2050
2100 2200 2050 2050 2100 2100 2150 2200 2150 2200

2200	2050	2150	2100	2200	2200	2150	2100	2150	2100
2100	2200	2150	2150	2100	2200	2050	2100	2100	2150
2100	2100	2200	2150	2200	2050	2050	2200	2100	2150

a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối (ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn) của mẫu số liệu thống kê đó.

Bài 14. Trong bài thơ "Lượm" nổi tiếng của nhà thơ Tố Hữu có những câu thơ:

"Chú bé loắt choắt

Cái xác xinh xinh

Cái chân thoăn thoắt

Cái đầu nghênh nghênh..."

Mẫu dữ liệu thống kê các chữ cái C; N; H; T; L lần lượt xuất hiện trong những câu thơ trên là:

C; H; L; T; C; H; T; C; C; N; H;

N; H; C; C; H; N; T; H; N; T; H;

T; C; N; H; N; H; N; H; N; H.

a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ hình quạt tròn của mẫu dữ liệu thống kê đó.

Bài 15. Bảng sau cho kết quả loại màu thích nhất đối với một số học sinh nam và nữ.

Đối tượng	Xanh lục	Xanh lơ	Màu khác
Nam	15	5	10
Nữ	3	16	6

Lập biểu đồ tần số tương đối dạng hình quạt tròn thể hiện các thông tin trên.

Bài 16. Thống kê loại nhạc thích nhất của một số học sinh lớp 6 và lớp 9, kết quả được ghi ở bảng sau.

Đối tượng	Nhạc truyền thống	Nhạc hiện đại	Nhạc khác	Cộng
Lớp 6	...	13	23	...
Lớp 9	7	22	...	44
Cộng	25	...	38	98

a) Hãy điền tiếp số liệu vào các chỗ trống trong bảng.

b) Dùng tần số tương đối, cho biết mỗi loại nhạc được lớp nào thích hơn.

BÀI 24. BẢNG TẦN SỐ, TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHEP NHÓM VÀ BIỂU ĐỒ.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. BẢNG TẦN SỐ, TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHEP NHÓM

Tìm hiểu bảng tần số ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm

Bảng tần số ghép nhóm là bảng tần số của các nhóm số liệu:

Nhóm	$[a_1; a_2)$	$[a_2; a_3)$	...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số	m_1	m_2	...	m_k

Bảng 7.3. Bảng tần số ghép nhóm

Tần số m_i của nhóm $[a_i; a_{i+1})$ là số giá trị của mẫu số liệu lớn hơn hoặc bằng a_i và nhỏ hơn a_{i+1} .

Bảng tần số tương đối ghép nhóm là bảng tần số tương đối của các nhóm số liệu:

Nhóm	$[a_1; a_2)$	$[a_2; a_3)$	...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số tương đối	f_1	f_2	...	f_k

Bảng 7.4. Bảng tần số tương đối ghép nhóm

trong đó $n = m_1 + \dots + m_k$ và

$f_1 = \frac{m_1}{n} \cdot 100\%$ là tần số tương đối của nhóm $[a_1; a_2)$, ...,

$f_k = \frac{m_k}{n} \cdot 100\%$ là tần số tương đối của nhóm $[a_k; a_{k+1})$.

Ví dụ 1 Đo chiều cao (đơn vị là cm) của học sinh lớp 9C cho kết quả như sau:

156 157 164 166 166 165 157 154 155 158 160 163 163
161 162 159 159 160 160 160 159 158 160 160 158 163
162 162 162 161 162 161 163 161 163 161 164 166 165 165.

Lập bảng tần số ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm cho mẫu số liệu này với các nhóm $[155; 158)$, $[158; 161)$, $[161; 164)$, $[164; 167)$.

Lời giải

Số học sinh có chiều cao từ 150 cm đến dưới 158 cm là 5 học sinh; từ 158 cm đến dưới 161 cm là 12 học sinh; từ 161 cm đến dưới 164 cm là 15 học sinh; từ 164 cm đến dưới 167 cm là 8 học sinh. Do đó, tần số tương ứng với các nhóm là $m_1 = 5$, $m_2 = 12$, $m_3 = 15$, $m_4 = 8$. Ta có bảng tần số ghép nhóm như sau:

Chiều cao (cm)	$[150; 158)$	$[158; 161)$	$[161; 164)$	$[164; 167)$
Số học sinh	5	12	15	8

Tổng số học sinh trong lớp là $n = 5 + 12 + 15 + 8 = 40$.

Tỉ lệ học sinh có chiều cao từ 150 cm đến dưới 158 cm là $\frac{5}{40} \cdot 100\% = 12,5\%$; từ 158 cm đến dưới 161 cm là

$\frac{12}{40} \cdot 100\% = 30\%$; từ 161 cm đến dưới 164 cm là $\frac{15}{40} \cdot 100\% = 37,5\%$; từ 164 cm đến dưới 167 cm là

$\frac{8}{40} \cdot 100\% = 20\%$. Ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm như sau:

Chiều cao (cm)	[150;158)	[158;161)	[161;164)	[164;167)
Tần số tương đối	12,5%	30%	37,5%	20%

Ví dụ 2 Chỉ số chất lượng không khí (AQI) cho biết tình trạng chất lượng không khí và mức độ ảnh hưởng đến sức khỏe con người. Chất lượng không khí là Tốt nếu AQI từ 0 đến dưới 50 ; là Trung bình nếu AQI từ 50 đến dưới 100 ; là Kém nếu AQI từ 100 đến dưới 150; là Xấu nếu AQI từ 150 đến dưới 200. Chất lượng không khí

tại Hà Nội từ ngày 4-2-2023 đến 5-3-2023 được cho như sau:

Trung bình, Trung bình, Trung bình, Trung bình, Trung bình, Trung bình,
Trung bình, Trung bình, Kém, Kém, Kém, Kém, Xấu, Xấu, Kém, Xấu,
Xấu, Xấu, Kém, Kém, Kém, Kém, Kém, Xấu, Kém, Xấu, Xấu, Xấu, Xấu, Xấu.

(Theo iqair.com)

Lập bảng tần số ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm theo chỉ số AQI cho dãy dữ liệu trên.

Lời giải

Có 8 ngày chất lượng không khí ở mức Trung bình tương ứng với chỉ số AQI từ 50 đến dưới 100; có 11 ngày chất lượng không khí ở mức Kém tương ứng với chỉ số AQI từ 100 đến dưới 150; có 11 ngày chất lượng không khí ở mức Xấu tương ứng với chỉ số AQI từ 150 đến dưới 200. Ta có bảng tần số ghép nhóm sau:

Chỉ số AQI	[50;100)	[100;150)	[150;200)
Tần số	8	11	11

Tỉ lệ ngày có chất lượng không khí ở mức Trung bình là $\frac{8}{30} \cdot 100\% \approx 26,6\%$; ở mức Kém là

$\frac{11}{30} \cdot 100\% \approx 36,7\%$; ở mức Xấu là $\frac{11}{30} \cdot 100\% \approx 36,7\%$. Ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm sau:

Chỉ số AQI	[50;100)	[100;150)	[150;200)
Tần số tương đối	26,6%	36,7%	36,7%

2. BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHEP NHÓM DẠNG CỘT

Tìm hiểu về biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột

- **Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột** là biểu đồ gồm các cột liền nhau để biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm. Trong biểu đồ này, chiều cao mỗi cột biểu diễn tần số tương đối của nhóm số liệu.

- Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm với các nhóm số liệu có độ dài bằng nhau ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Vẽ trục đứng, trục ngang. Trên trục đứng xác định đơn vị độ dài phù hợp với các tần số tương đối. Trên trục ngang xác định các nhóm số liệu cần biểu diễn.

Bước 2. Dựng các hình cột (kề nhau) ứng với các nhóm dữ liệu, mỗi hình cột có chiều cao bằng tần số tương đối của nhóm số liệu.

Bước 3. Ghi chú giải cho các trục, các cột và tiêu đề cho biểu đồ.

- Biểu đồ tần số tương đối (tần số) ghép nhóm dạng cột còn gọi là tổ chức đồ (histogram).

Chú ý. Trong biểu đồ trên, nếu chiều cao mỗi cột biểu diễn tần số của nhóm số liệu thì ta có biểu đồ tần số ghép nhóm dạng cột.

Ví dụ 3: Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê sau về thời gian đi từ nhà tới

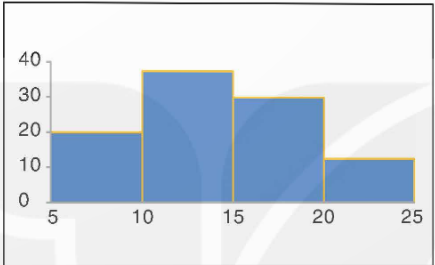
trường của một số bạn trong lớp 9D.

Thời gian (phút)	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)
Tần số tương đối	20%	37,5%	30%	12,5%

Lời giải

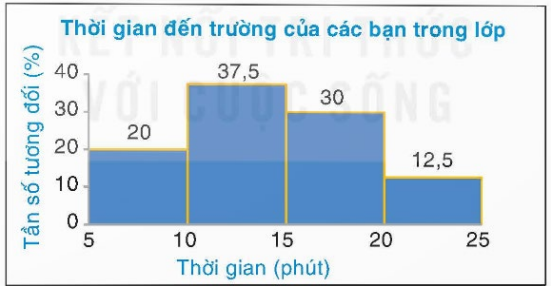
Bước 1. Vẽ các trục của biểu đồ, xác định đơn vị độ dài trên trục đứng, các nhóm trên trục ngang (H.7.18).

Bước 2. Dựng các hình cột kề nhau ứng với các nhóm số liệu (H.7.18).



Hình 7.18

Bước 3. Ghi chú giải cho các trục, các cột và tiêu đề của biểu đồ (H.7.19).



Hình 7.19

3. BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM DẠNG ĐOẠN THẲNG

Cách vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng

Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho mẫu số liệu ghép nhóm, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Chọn giá trị $x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$ đại diện cho nhóm số liệu $[a_i; a_{i+1})$ với $i = 1, 2, \dots, k$.

Bước 2. Vẽ trục ngang để biểu diễn các giá trị đại diện cho các nhóm số liệu, vẽ trục đứng thể hiện tần số tương đối.

Bước 3. Với mỗi giá trị đại diện x_i trên trục ngang và tần số tương đối f_i tương ứng, ta xác định một điểm $M_i(x_i; f_i)$. Nối các điểm liên tiếp với nhau.

Bước 4. Ghi chú giải cho các trục, các điểm và tiêu đề của biểu đồ.

Chú ý. Trong cách vẽ biểu đồ trên, nếu thay tần số tương đối bằng tần số thì ta có biểu đồ tần số ghép nhóm dạng đoạn thẳng.

Ví dụ 4 Cho bảng tần số tương đối ghép nhóm sau về tuổi thọ của một loại bóng đèn.

Tuổi thọ (năm)	$[1; 1,5)$	$[1,5; 2)$	$[2; 2,5)$	$[2,5; 3)$	$[3; 3,5)$
Tần số tương đối	15%	20%	30%	25%	10%

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho bảng thống kê trên.

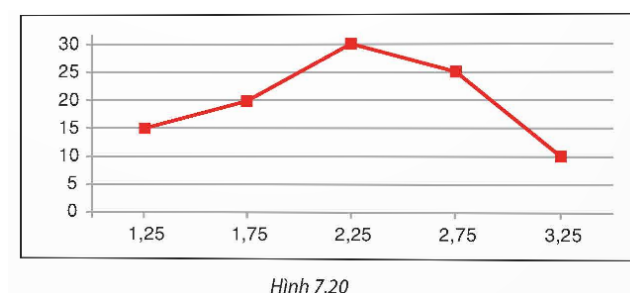
Lời giải

Bước 1. Chọn giá trị đại diện cho các nhóm số liệu ta có bảng sau:

Tuổi thọ (năm)	1,25	1,75	2,25	2,75	3,25
Tần số tương đối	15%	20%	30%	25%	10%

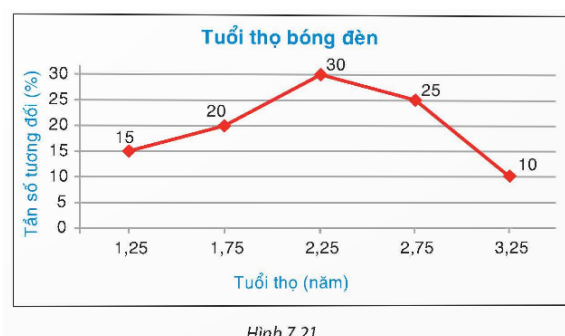
Bước 2. Vẽ các trục (H.7.20).

Bước 3. Xác định các điểm, nối các điểm liên tiếp với nhau (H.7.20).



Hình 7.20

Bước 4. Ghi chú giải cho các trục, các điểm và tiêu đề của biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm (H.7.21).



Hình 7.21

Chú ý. Trên trục ngang ta cũng có thể điền các nhóm số liệu thay cho các giá trị đại diện.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

Dạng 1. Tần số ghép nhóm, tần số tương đối ghép nhóm

Ví dụ 1. Giáo viên chủ nhiệm lớp 9 C đã thu được kết quả như sau: Thời gian tự học dưới 1 giờ có 10 bạn; từ 1 giờ đến dưới 2 giờ có 15 bạn; từ 2 giờ đến dưới 3 giờ có 8 bạn; từ 3 giờ đến dưới 4 giờ có 7 bạn. Dựa vào dữ liệu dưới, hãy hoàn thiện các bảng sau vào vở:

Bảng 1

Thời gian (giờ)	$[0;1)$	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;4)$
Tần số	?	?	?	?

Bảng 2

Thời gian (giờ)	$[0;1)$	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;4)$
Tần số tương đối	?	?	?	?

Hướng dẫn: Nhóm số liệu $[a; b)$ là nhóm gồm các số liệu lớn hơn hoặc bằng a và nhỏ hơn b .

Ví dụ 2. Cho bảng tần số ghép nhóm về tuổi thọ của một số ong mật cái như sau:

Tuổi thọ (ngày)	$[30;40)$	$[40;50)$	$[50;60)$
Tần số	12	23	15

- a) Đọc và giải thích bảng thống kê trên.
b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho bảng thống kê này.

Ví dụ 3. Nhà may Hưng Thịnh tặng áo phông cho 40 học sinh lớp 9A. Nhà may đo chiều cao (đơn vị: centimét) của cả lớp để quyết định chọn các cỡ áo khi may, kết quả như sau:

161	159	168	153	150	157	172	165	161	158
169	153	164	167	172	174	163	156	166	166
161	152	165	169	160	152	165	163	174	168
159	168	164	169	156	172	167	158	161	160

Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu trên.

Hướng dẫn: Ta có thể ghép các số liệu thành 5 nhóm, có độ dài bằng nhau.

Vì $174 < 175$, ta có: $175 - 150 = 25$ và $25 : 5 = 5 \Rightarrow [150;155), [155;160), [160;165), [165;170), [170;175)$.

Ví dụ 4. Mẫu số liệu dưới đây ghi lại tốc độ (đơn vị: km / h) của 44 ô tô khi đi qua một trạm đo tốc độ:

48,5	43	50	55	45	60	53	55,5	44	65	54,5
51	62,5	41	44,5	57	57	68	49	46,5	53,5	49
61	49,5	54	62	59	56	47	50	59,5	61	46,5
49,5	52,5	57	47	59	55	45	47,5	48	61,5	48,5

- a) Ghép các số liệu thành 6 nhóm.
b) Lập bảng tần số ghép nhóm.

Hướng dẫn:

a) Ta có số liệu có giá trị nhỏ nhất là 41 ; số liệu có giá trị lớn nhất là 68 .

Ta có $40 < 41, 68 < 70$. $70 - 40 = 30; 30 : 6 = 5$

b) Xem Ví dụ 3 .

Ví dụ tương tự.

Thông kê số lần truy cập Internet của 30 người trong một tuần là:

85	81	65	58	47	30	51	89	85	42
55	37	31	82	63	33	44	88	77	57
44	74	63	67	46	73	52	53	47	35

Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu đó sau khi được ghép nhóm theo sáu nhóm.

Ví dụ 5. Chỉ số phát triển con người (HDI) là chỉ tiêu tổng hợp phản ánh các mặt thu nhập, sức khỏe, giáo dục của người dân trong một quốc gia. Các nước và vùng lãnh thổ trên thế giới được chia thành bốn nhóm theo HDI: Nhóm 1 (rất cao) có HDI từ 0,8 trở lên; Nhóm 2 (cao) có HDI từ 0,7 đến dưới 0,8 ; Nhóm 3 (trung bình) có HDI từ 0,55 đến dưới 0,7 ; Nhóm 4 (thấp) có HDI dưới 0,55 . Năm 2021 , chỉ số HDI của 11 quốc gia Đông Nam Á như sau:

0,939	0,829	0,803	0,8	0,705	0,703	0,699	0,607	0,607	0,593	0,585
-------	-------	-------	-----	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Dựa vào dữ liệu trên, hãy hoàn thành bảng tần số ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm:

Chỉ số HDI	$[0; 0,55)$	$[0,55; 0,7)$	$[0,7; 0,8)$	$[0,8; 1,0)$
Tần số				
Tần số tương đối				

Hướng dẫn: Tần số tương đối tính theo số phần trăm. Ta có: $n = 11$.

Tần số ghép nhóm của nhóm 1: $[0,8; 1,0)$ là 4. Ta có tần số tương đối ghép nhóm của nhóm 1 là:

$$\frac{4}{11} = 36\% .$$

Ví dụ 6. Bác Quảng ghi lại thời gian truy cập Internet của mình mỗi ngày (đơn vị: giờ) trong vòng 1 tháng như sau:

~

1,2	3,2	2,4	2,7	0,5	2,6	4,8	2,4	4,2	2,4
3,7	2,3	3,5	4,9	0,4	0,6	1,5	4,6	1,7	3,4
3,9	2,1	3,4	2,7	1,5	1,8	2,9	3,5	3,9	1,6

a) Lập bảng tần số ghép nhóm theo 5 nhóm: $[0; 1), [1; 2), [2; 3), [3; 4), [4; 5)$.

b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm.

Ví dụ tương tự.

Cô Loan ghi lại chiều cao (đơn vị: cm) của các cây bạch đàn giống vừa được chuyển đến nông trường ở bảng sau:

16,4	19	29,6	18,3	21,8	20,6	22,2	27,1	23,3	19,5
21,2	15,9	28,6	18	29,8	27,2	18,1	28,4	18,8	23,5
29,2	23,8	29,6	25	24,4	15,4	23,8	16	17,2	23,5
23,2	17	17,8	19,8	16,8	18,4	21,9	24,3	27,3	21

Ví dụ 7. Kết quả đo chiều cao của 40 học sinh được thống kê trong bảng sau:

146	148	148	150	150	151	151	152	152	152
153	154	154	155	155	155	155	155	155	156
156	156	156	157	157	159	159	160	162	163
163	163	163	163	164	165	167	168	168	170

Theo quy định của công ty may mặc, cỡ S tương ứng với chiều cao từ 146 cm đến dưới 152 cm . Cỡ M tương ứng với chiều cao từ 152 cm đến dưới 158 cm. Cỡ L tương ứng với chiều cao từ 158 cm đến dưới 164cm . Cỡ XL tương ứng với chiều cao từ 164cm đến 170cm . Đối với 40 học sinh này, làm thế nào để xác định số quần áo cần may ở mỗi kích cỡ?

Dạng 2. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột

Ví dụ 1. Thủy thống kê lại độ dài quãng đường (đơn vị: km) mình đi bộ mỗi ngày trong tháng Sáu ở bảng sau:

Quãng đường (km)	[4;5)	[5;6)	[6;7)	[7;8)	[8;9)
Tần số (số ngày)	6	12	8	3	1

Hãy vẽ biểu đồ tần số ghép nhóm dạng cột biểu diễn mẫu số liệu trên.

Hướng dẫn:

Trước hết, ta lập bảng tần số tương đối ghép nhóm (tính theo tỉ lệ phần trăm).

Ví dụ tương tự.

Vẽ biểu đồ tần số ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê sau về thời gian đi từ nhà tới trường của một số bạn trong lớp 9D.

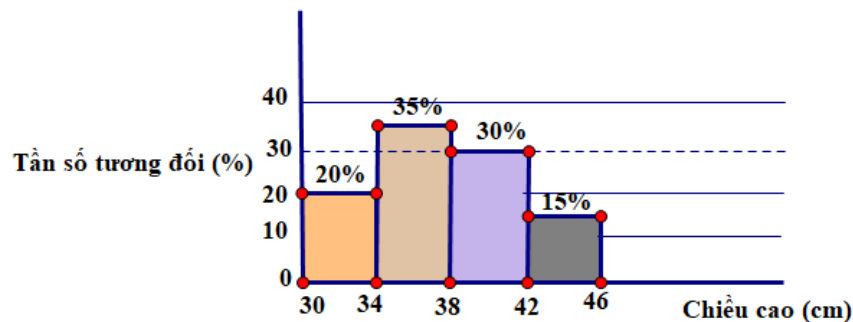
Thời gian (phút)	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)
Tần số tương đối	20%	37,5%	30%	12,5%

Ví dụ 2. Vẽ biểu đồ tần số ghép nhóm dạng cột cho bảng sau về chiều cao của một số cây chà là giống 3 tháng tuổi.

Quãng đường (km)	[38;42)	[42;46)
Tần số tương đối (%)	38%	5%

Lời giải

Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột:



Ví dụ 3. Xét mẫu số liệu ghép nhóm có bảng tần số ghép nhóm sau đây:

Nhóm	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)	[30;35)
Tần số	4	12	7	8	9

- Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.
- Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột.

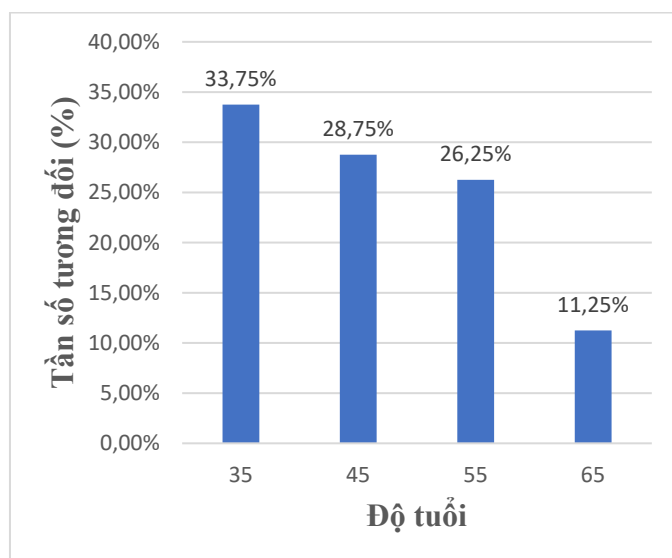
Ví dụ 4. Sau khi thống kê độ dài (đơn vị: centimét) của 50 lá dương xỉ trưởng thành, người ta có bảng tần số ghép nhóm như sau:

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng biểu đồ cột.

Hướng dẫn: Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm, tính theo phần trăm.

Ví dụ 5. Biểu đồ bên biểu diễn tỉ lệ đại biểu tham dự hội nghị theo độ tuổi. Biết rằng có 54 đại biểu từ 25 đến 35 tuổi.

- Có bao nhiêu đại biểu tham dự hội nghị?
- Lập bảng tần số ghép nhóm tương ứng.
- Một người cho rằng có trên 50% số đại biểu tham dự hội nghị dưới 45 tuổi. Nhận định đó đúng hay sai? Tại sao?



Hướng dẫn: Nhóm [25;35) chiếm 33,75% so với tổng số đại biểu và có 54 người.

Ta có: $54 : 33,75\% = 160$ (người).

Dạng 3. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng

Ví dụ 1. Cho bảng tần số tương đối ghép nhóm sau về tuổi thọ của một bóng đèn.

Tuổi thọ (năm)	[1;1,5)	[1,5;2)	[2;2,5)	[2,5;3)	[3;3,5)
Tần số tương đối	15%	20%	30%	25%	10%

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho bảng thống kê trên.

Hướng dẫn: Chọn giá trị đại diện cho các nhóm.

$$\frac{1+1,5}{2} = 1,25; \frac{1,5+2}{2} = 1,75; \frac{2+2,5}{2} = 2,25; \frac{2,5+3}{2} = 2,75; \frac{3+3,5}{2} = 3,25$$

Xem phần A. Kiến thức cần nhớ.

Ví dụ 2. Bảng sau thống kê chiều cao (đơn vị: mét) của các cây keo 3 năm tuổi ở một nông trường.

Chiều cao (m)	[8,5;8,7)	[8,7;8,9)	[8,9;9,1)	[9,1;9,3)	[9,3;9,5)
Tần số tương đối	15%	25%	25%	20%	15%

Hãy vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng biểu diễn số liệu trên.

Hướng dẫn: Chọn giá trị đại diện cho các nhóm.

$$\frac{8,5+8,7}{2} = 8,6; \frac{8,7+8,9}{2} = 8,8; \frac{8,9+9,1}{2} = 9,0; \frac{9,1+9,3}{2} = 9,2; \frac{9,3+9,5}{2} = 9,4$$

Ví dụ 3. Bảng dưới đây được lấy từ dữ liệu do một trọng tài ghi lại về thành tích của các vận động viên nam trong cuộc thi bơi tự do dài 50 m được một trung tâm thể dục thể thao tổ chức.

Thành tích bơi tự do 50m nam

Thời gian (giây)	[24;26)	[26;28)	[28;30)	[30;32)	[32;34)
Tần số	2	8	10	8	4

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng biểu diễn số liệu trên.

Hướng dẫn: - Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm.

- Chọn các giá trị đại diện cho nhóm số liệu.

- Vẽ biểu đồ.

- Tần số tương đối của nhóm [24;26) là $f_1 = \frac{2}{32} = 0,0625 = 6,25\%$.

- Tần số tương đối của nhóm [26;28) là $f_2 = \frac{8}{32} = 0,25 = 25\%$.

- Tương tự với các nhóm tiếp theo: $f_3 = \frac{10}{32} = 0,3125 = 31,25\%$.

$$f_4 = \frac{10}{32} \cdot \frac{8}{32} = 0,25 = 25\%; f_5 = \frac{4}{32} = 0,125 = 12,5\%$$

Ta lập được bảng tần số tương đối ghép nhóm dưới đây:

Bảng tần số tương đối ghép nhóm thành tích bơi tự do 50m nam

Thời gian (giây)	[24; 26)	[26; 28)	[28; 30)	[30; 32)	[32; 34)
Tần số tương đối	6,25	25	31,25	25	12,5

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

7.17. Một cuộc điều tra về thời gian dùng mạng Internet trong ngày của học sinh lớp 9 tại một thành phố cho kết quả như sau:

Thời gian (giờ)	[0; 0,5)	[0,5; 1,0)	[1,0; 1,5)	[1,5; 2,0)	[2,0; 2,5)
Tỉ lệ	15%	27%	23%	18%	17%

a) Đọc và giải thích bảng thống kê trên.

b) Để thu được bảng thống kê trên, người ta đã lập phiếu điều tra và thu về tổng cộng 2000 phiếu trả lời. Lập bảng tần số ghép nhóm cho kết quả thu được.

7.18. Ghi lại cấp độ động đất của các trận động đất xảy ra tại một vùng trong 10 năm người ta thu được kết quả sau:

I, V, II, III, VI, V, IV, II, III, V, VI, VII, VIII, I, I, II, VI, VII, IV.

Biết rằng theo thang Richter thì trận động đất cấp I có độ lớn từ 1 đến dưới 3 ; cấp II và III có độ lớn từ 3 đến dưới 4 ; cấp IV và V có độ lớn từ 4 đến dưới 5 ; cấp VI và VII có độ lớn từ 5 đến dưới 6 ; cấp VIII có độ lớn từ 6 đến dưới 6,9.

Lập bảng tần số ghép nhóm cho độ lớn các trận động đất xảy ra ở vùng này theo thang Richter.

7.19. Giáo viên ghi lại thời gian chạy cự li 100 mét của các học sinh lớp 9 A cho kết quả như sau:

Thời gian (giây)	[13;15)	[15;17)	[17;19)	[19;21)
Số học sinh	5	20	13	2

a) Nêu các nhóm số liệu và tần số tương ứng.

b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm.

7.20. Người ta trồng cà rốt và thử nghiệm một loại phân bón mới. Khi thu hoạch người ta đo chiều dài các củ cà rốt thu được kết quả sau:

Chiều dài (cm)	[15;16)	[16;17)	[17;18)	[18;19)	[19;20)	[20;21)
Số củ cà rốt	8	17	30	28	12	5

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê trên.

7.21. Thời gian chờ mua vé xem bóng đá của một số cổ động viên được cho như sau:

Thời gian (phút)	[0;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Số cổ động viên	15	38	50	27	20	10

- a) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm.
b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho bảng thống kê thu được ở câu a.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Thống kê thời gian đi từ nhà đến cơ quan (đơn vị tính là phút) của 40 nhân viên một công ty được kết quả như sau:

9	12	59	47	53	5	14	32	35	40	35	10	10	4	8	20	28	23	42	44
33	39	18	20	16	25	29	27	18	17	20	23	27	29	31	41	40	40	55	50

- a) Hoàn thiện bảng tần số ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[0;15)	[15;30)	[30;45)	[45;60)
Tần số	?	?	?	?

- b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho bảng tần số ghép nhóm thu được.

Câu 2: Cho bảng tần số tương đối ghép nhóm về thời gian làm bài tập về nhà trong tuần (đơn vị tính là giờ) của 40 bạn học sinh lớp 9A.

Thời gian (giờ)	[0;3)	[3;6)	[6;9)	[9;12)	[12;15)
Tần số tương đối	15%	20%	25%	30%	10%

- a) Tính tỉ lệ học sinh trong lớp dành ít nhất 6 giờ trong tuần để làm bài tập về nhà.
b) Có bao nhiêu học sinh lớp 9 A dành ít nhất 6 giờ trong tuần để làm bài tập về nhà?
c) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm trên.

Câu 3. Bảng tần số ghép nhóm sau cho biết cân nặng của một số con voi khi vừa sinh ra (đơn vị tính là kg):

Cân nặng (kg)	[110;115)	[115;120)	[120;125)	[125;130)
Tần số	8	15	17	10

- a) Đọc và giải thích dữ liệu cho bởi bảng tần số ghép nhóm trên.
b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm.

Câu 4. Một nhóm học sinh lớp 9B thực hiện 20 lần đo hiệu điện thế và cường độ dòng điện để xác định công suất của một chiếc quạt điện và thu được bảng tần số tương đối ghép nhóm sau:

Công suất (W)	[72;73)	[73;74)	[74;75)	[75;76)	[76;77)
Tần số tương đối	10%	20%	30%	25%	15%

- a) Đọc và giải thích thông tin của hai nhóm dữ liệu cho bởi bảng tần số tương đối ghép nhóm trên.
b) Lập bảng tần số ghép nhóm cho kết quả 20 lần đo của nhóm học sinh.

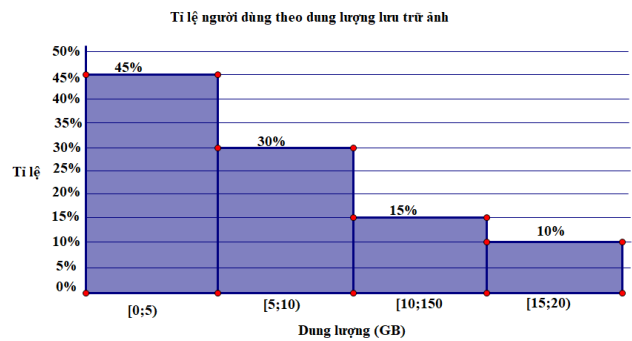
Câu 5. Một phòng khám đo và ghi lại huyết áp tâm thu (đơn vị tính là $mmHg$) của một số người đến khám bệnh thu được kết quả như sau:

118 100 107 135 127 158 179 95 127 130 135 116 182 166 164
99 112 129 134 144 158 97 175 110 99 128 134 192 149 135 90

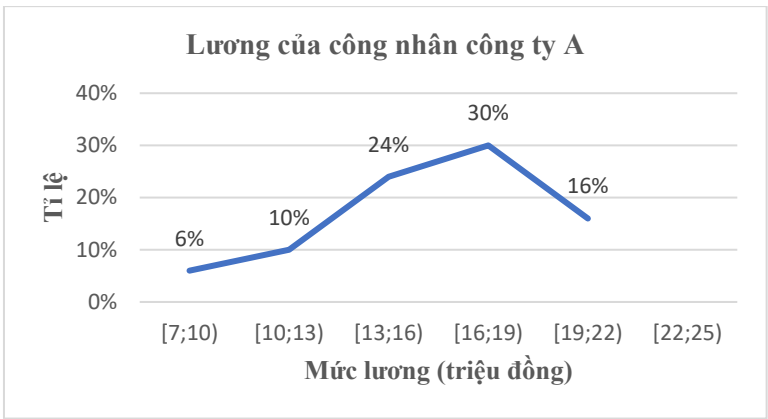
Theo Hiệp hội Tim mạch Hoa Kỳ, người bình thường có huyết áp tâm thu từ $90mmHg$ đến dưới $120mmHg$, người ở dạng tiền tăng huyết áp có huyết áp tâm thu từ $120mmHg$ đến dưới $140mmHg$; người bị tăng huyết áp có huyết áp tâm thu lớn hơn hoặc bằng $140mmHg$.

Lập bảng tần số ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm cho dãy số liệu trên theo các mức bệnh huyết áp.

Câu 6. Một công ty quản lý phần mềm ứng dụng trực tuyến đã thống kê tỉ lệ người dùng phần mềm này theo dung lượng bộ nhớ dành cho lưu trữ ảnh và biểu diễn dưới dạng biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột như sau:



Câu 7. Cho biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng sau:



- a) Đọc và giải thích thông tin về hai nhóm dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.
- b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.
- c) Biết rằng công ty A có 300 người, lập bảng tần số ghép nhóm cho lương của công nhân công ty này.

Câu 8. Bảng thống kê sau cho biết thời gian học tiếng Anh (đơn vị là năm, tính từ lúc bắt đầu học tiếng Anh đến thời điểm khảo sát) của một số học sinh lớp 9.

Thời gian (năm)	[0;2)	[2;4)	[4;6)	[6;8)	[8;10)
Số học sinh	8	12	15	10	5

- a) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho bảng thống kê trên.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm thu được ở câu a.

Câu 9. Bảng tần số ghép nhóm sau cho biết thành tích luyện tập của một vận động viên nghiệp dư chạy maraton 42 km.

Thời gian (giờ)	[6; 6,5)	[6,5; 7)	[7; 7,5)	[7,5; 8)	[8; 8,5)
Số lần	2	6	7	4	1

a) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho bảng thống kê trên.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm thu được.

Câu 10. Kiểm tra khối lượng của một số bao xi măng trước khi xuất xưởng cho kết quả như sau:

Khối lượng (kg)	[48,5; 49)	[49; 49,5)	[49,5; 50)	[50; 50,5)	[50,5; 51)
Tỉ lệ	5%	10%	35%	40%	10%

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột và dạng đoạn thẳng biểu diễn dữ liệu trên.

ÔN TẬP CHƯƠNG V

PHẦN 1. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

A. TRẮC NGHIỆM

Sử dụng dữ liệu sau để trả lời các bài tập từ 7.22 đến 7.24.

Gieo một con xúc xắc 50 lần cho kết quả như sau:

Số chấm xuất hiện	1	2	3	4	5	6
Tần số	8	7	?	8	6	11

7.22. Tần số xuất hiện của mặt 3 chấm là

- A. 9 . B. 10 . C. 11 . D. 12 .

7.23. Tần số tương đối xuất hiện của mặt 5 chấm là

- A. 6% . B. 8% . C. 12% . D. 14% .

7.24. Để biểu diễn bảng thống kê trên, không thể dùng loại biểu đồ nào sau đây?

- A. Biểu đồ tranh. B. Biểu đồ tần số dạng cột.
C. Biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng. D. Biểu đồ cột kép.

7.25. Cho bảng tần số tương đối ghép nhóm về thời gian đi từ nhà đến trường của học sinh lớp 9A như sau:

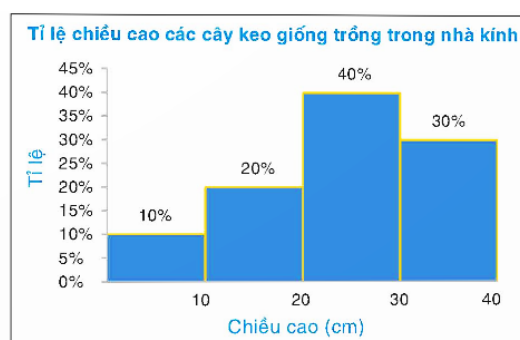
Thời gian đến trường (phút)	$[0;10)$	$[10;20)$	$[20;30)$
Tần số tương đối	20 %	55 %	25 %

Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng, ta dùng giá trị nào đại diện cho nhóm số liệu $[10;20)$?

- A. 10 . B. 15 . C. 20 . D. 30 .

B. TỰ LUẬN

7.26. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm Hình 7.22 cho biết tỉ lệ chiều cao của các cây keo giống do một kĩ sư lâm nghiệp đã trồng trong nhà kính.



Hình 7.22

Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

7.27. Kĩ sư lâm nghiệp trên cũng trồng một số cây keo giống khác ngoài trời và thu được kết quả như sau:

3. Để biểu diễn bảng thống kê trên, không thể dùng loại biểu đồ nào sau đây?

- A. Biểu đồ tranh. B. Biểu đồ tần số dạng cột.
C. Biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng. D. Biểu đồ cột kép.

4. Cho bảng tần số tương đối ghép nhóm về thời gian đi từ nhà đến trường của học sinh lớp 9A như sau:

Thời gian đến trường (phút)	$[0;10)$	$[10;20)$	$[20;30)$
Tần số tương đối	20%	55%	25%

Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng, ta dùng giá trị nào đại diện cho nhóm số liệu $[10;20)$?

- A. 10. B. 15. C. 20. D. 30.

5. Tần số xuất hiện của điểm 8 trong dãy dữ liệu trên là

- A. 8. B. 9. C. 10. D. 11.

6. Tần số tương đối của điểm 10 trong dãy dữ liệu trên là

- A. 5%. B. 10%. C. 15%. D. 20%.

7. Để biểu diễn số lượng học sinh theo điểm thi môn Toán đạt được thì ta không thể dùng biểu đồ nào?

- A. Biểu đồ cột kép. B. Biểu đồ tần số dạng cột.
C. Biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng. D. Biểu đồ tranh.

8. Giá trị của x là

- A. 10. B. 15. C. 20. D. 25.

9. Muốn biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm trên ta có thể dùng biểu đồ nào sau đây?

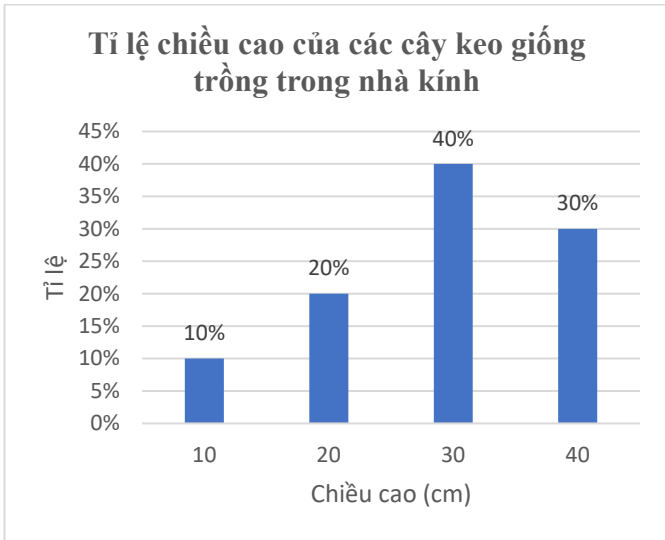
- A. Biểu đồ tần số ghép nhóm. B. Biểu đồ tần số dạng cột.
C. Biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng. D. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm.

10. Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng biểu diễn bảng thống kê trên ta chọn giá trị nào làm giá trị đại diện cho nhóm $[2;3)$?

- A. 0,5. B. 1,5. C. 2,5. D. 3,5.

B. TỰ LUẬN

Câu 1. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm (hình vẽ) cho biết tỉ lệ chiều cao của các cây keo giống do một kỹ sư lâm nghiệp đã trồng trong nhà kính.



Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

Câu 2. Kỹ sư lâm nghiệp trên cũng trồng một số cây keo giống khác ngoài trời thu được kết quả như sau:

Chiều cao (cm)	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40)
Số cây	5	9	4	2

- a) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê trên.
- b) Từ biểu đồ vừa vẽ và biểu đồ cho trong bài 1, hãy so sánh chiều cao của các cây keo giống được trồng trong nhà kính và trồng ngoài trời.

Câu 3. Tỉ lệ học sinh bình chọn cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất trong giải bóng đá của trường được ghi trong bảng sau:

Cầu thủ	Huy	Minh	An	Thảo
Tỉ lệ học sinh bình chọn	30%	25%	10%	35%

Biết rằng có 500 học sinh tham gia bình chọn.

- a) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối trên.
- b) Lập bảng tần số biểu diễn số học sinh bình chọn cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất trong giải bóng đá của trường.

Câu 4. Qua đợt khám mắt, lớp 9 A có 20 học sinh bị cận thị trong đó có 10 học sinh cận thị nhẹ, 8 học sinh cận thị vừa và 2 học sinh cận thị nặng. Biết rằng cận thị có số đo từ 0,25 đến dưới 3,25 dioptrê là cận thị nhẹ; từ 3,25 đến dưới 6,25 dioptrê là cận thị vừa; từ 6,25 đến dưới 10,25 dioptrê là cận thị nặng.

- a) Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối ghép nhóm theo độ cận thị của các học sinh này.
- b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho bảng tần số tương đối ghép nhóm thu được ở câu a.

Câu 5. Lương của các công nhân một nhà máy được cho trong bảng sau:

Lương (triệu đồng)	[5;7)	[7;9)	[9;11)	[11;13)	[13;15)
Số công nhân	20	50	70	40	20

- a) Nêu các nhóm số liệu và tần số. Giải thích ý nghĩa cho một nhóm số liệu và tần số của nó.
- b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê trên.

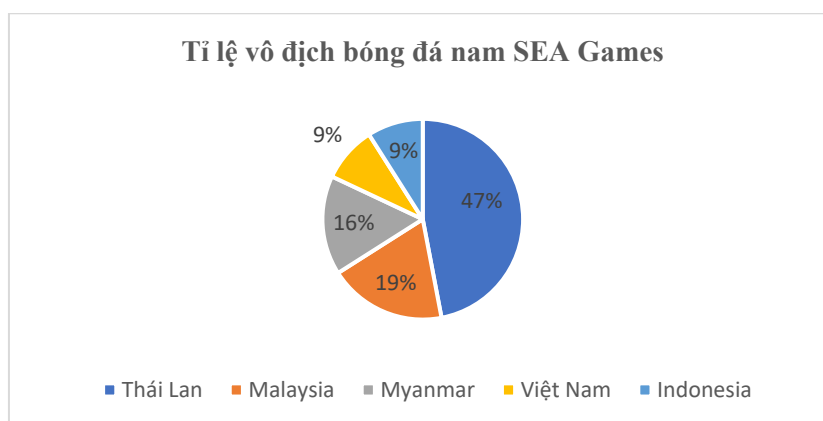
Câu 6. Kết thúc vòng tứ kết giải bóng đá của một trường Trung học cơ sở, có 4 đội lọt vào bán kết là các đội bóng lớp 9A, 9C, 8B và 7D. Ban tổ chức đã khảo sát học sinh trong trường với câu hỏi “Theo bạn, đội bóng nào sẽ vô địch?” với 4 phương án trả lời:

1. Đội bóng lớp 9A,
2. Đội bóng lớp 9C,
3. Đội bóng lớp 8B,
4. Đội bóng lớp 7D,

và thu được 500 phản hồi với 150 lựa chọn phương án 1, 200 lựa chọn phương án 2, 50 lựa chọn phương án 3 và 100 lựa chọn phương án 4.

- a) Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối cho kết quả thu được.
- b) Tìm tỉ lệ học sinh không dự đoán hai đội bóng của khối lớp 9 vô địch giải bóng đá trường.
- c) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn tỉ lệ học sinh dự đoán mỗi đội vô địch.

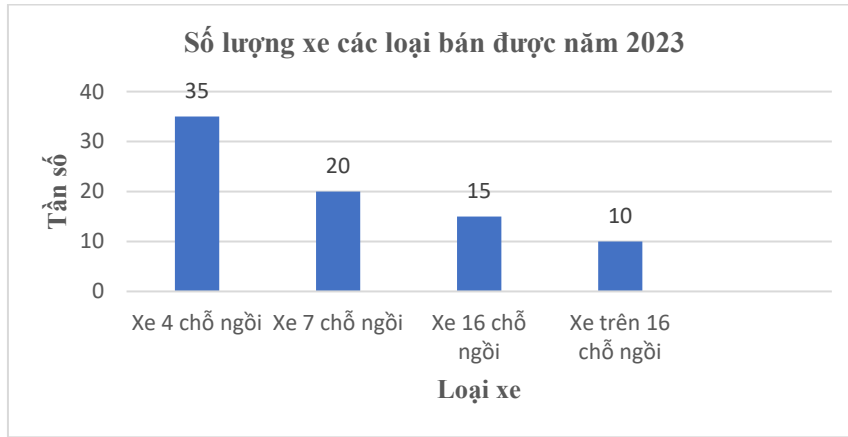
Câu 7. Biểu đồ hình quạt tròn sau đây cho biết tỉ lệ vô địch bóng đá nam SEA Games của các đội bóng trong khu vực tính đến năm 2023.



(Theo Liên đoàn Bóng đá Đông Nam Á)

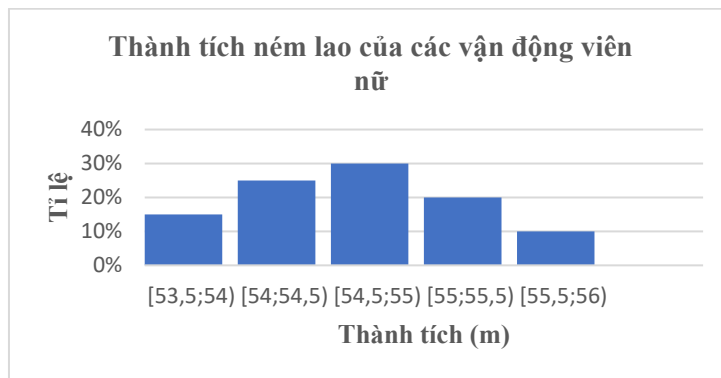
- a) Lập bảng tần số tương đối cho biết tỉ lệ vô địch bóng đá nam SEA Games của các quốc gia trong khu vực.
- b) Biết rằng tính đến năm 2023 môn Bóng đá nam đã được tổ chức ở 32 kì SEA Games. Lập bảng tần số cho số lần vô địch của các đội tuyển (làm tròn số liệu đến số nguyên gần nhất).
- c) Vẽ biểu đồ tần số dạng cột biểu diễn bảng tần số thu được ở câu b.
- d) Đội tuyển quốc gia nào có số lần vô địch bóng đá nam SEA Games nhiều nhất, với bao nhiêu lần?

Câu 8. Biểu đồ sau cho biết số lượng các loại ô tô một cửa hàng bán được trong năm 2023:



- a) Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.
- b) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a.
- c) Giả sử tỉ lệ các loại xe bán được không đổi và cửa hàng bán được tổng số 200 ô tô các loại trong năm 2024. Hãy ước lượng số ô tô 7 chỗ cửa hàng bán được.

Câu 9. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm sau cho biết thành tích ném lao của các vận động viên nữ tại một giải đấu:



- a) Đọc và giải thích thông tin cho hai nhóm dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.
- b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho dữ liệu này.
- c) Biết rằng có 40 vận động viên nữ tham dự giải. Lập bảng tần số ghép nhóm (các tần số làm tròn đến số nguyên gần nhất).

Câu 10. Thành tích ném lao của 40 vận động viên nam trong giải thể thao trên được cho như sau:

Thành tích (m)	[70,5; 71)	[71; 71,5)	[71,5; 72)	[72; 72,5)	[72,5; 73)	[73; 73,5)
Số vận động viên	2	5	7	15	8	3

- a) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm.
- b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm thu được ở câu a.
- c) Từ biểu đồ thu được ở câu b và biểu đồ cho trong bài tập 7.28, hãy nhận xét về thành tích ném lao của các vận động viên nam và nữ.

Câu 11. Dữ liệu dưới đây cho biết cỡ giày của một nhóm 30 học sinh tại trường Trung học cơ sở C:

32 33 36 34 33 32 36 34 35 34 32 33 34 36 35

34 34 34 34 34 35 34 35 33 34 34 34 35 33 34

- a) Lập bảng tần số cho dãy dữ liệu trên. Cỡ giày nào phù hợp với nhiều bạn nhất?
- b) Lập bảng tần số tương đối cho dãy dữ liệu trên. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trường Trung học cơ sở C, hãy ước lượng xác suất để học sinh này đi giày cỡ 34 .
- c) Bảng sau quy định cỡ giày theo chiều dài của bàn chân:

Chiều dài bàn chân (cm)	[19;19,4)	[19,4;19,7)	[19,7;20,6)	[20,6;21,6)	[21,6;22,2)
Cỡ giày	32	33	34	35	36

Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối ghép nhóm theo chiều dài bàn chân của nhóm học sinh trên.

CHƯƠNG VII. TẦN SỐ VÀ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI.

BÀI 22. BẢNG TẦN SỐ VÀ BIỂU ĐỒ TẦN SỐ.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. BẢNG TẦN SỐ

Tần số và bảng tần số

- Tần số của một giá trị là số lần xuất hiện giá trị đó trong mẫu dữ liệu.
- Bảng tần số là bảng thống kê cho biết tần số của các giá trị trong mẫu dữ liệu. Bảng tần số có dạng sau:

Giá trị	x_1	x_2	...	x_k
Tần số	m_1	m_2	...	m_k

trong đó m_1 là tần số của x_1 , m_2 là tần số của x_2 , ..., m_k là tần số của x_k .

Chú ý. Người ta còn cho bảng tần số ở dạng cột: cột thứ nhất ghi các giá trị, cột thứ hai ghi tần số của các giá trị đó.

Ví dụ 1: Để mua giày thể thao cho các bạn nam trong lớp luyện tập chuẩn bị cho giải bóng đá của trường, Huy đã thu thập cỡ giày của các bạn nam trong lớp và thu được kết quả như sau:

40, 36, 37, 36, 40, 38, 39, 38, 37, 36, 40, 39, 36, 38, 37, 38, 38, 37, 38, 38, 36

- Bạn Huy cần mua giày các cỡ nào? Mỗi loại bao nhiêu đôi?
- Lập bảng tần số cho dãy dữ liệu trên. Từ bảng tần số, cho biết cỡ giày nào phù hợp với nhiều bạn nam trong lớp nhất.

Lời giải

a) Bạn Huy cần mua giày với các cỡ 36, 37, 38, 39, 40. Giày cỡ 36 cần 5 đôi; cỡ 37 cần 4 đôi; cỡ 38 cần 8 đôi; cỡ 39 cần 2 đôi; cỡ 40 cần 3 đôi.

b) Bảng tần số

Cỡ giày	36	37	38	39	40
Tần số	5	4	8	2	3

Giày cỡ 38 phù hợp với nhiều bạn nam trong lớp nhất.

Nhận xét. Trong bảng tần số, ta chỉ liệt kê các giá trị x_i khác nhau. Các giá trị x_i này có thể không là số.

Tần số của một giá trị cho biết giá trị đó xuất hiện trong mẫu dữ liệu nhiều hay ít, từ đó ta dễ dàng xác định được giá trị xuất hiện nhiều nhất, ít nhất.

2. BIỂU ĐỒ TẦN SỐ

Tìm hiểu về biểu đồ tần số

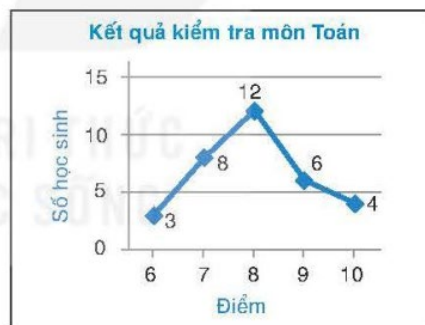
Biểu đồ biểu diễn bảng tần số được gọi là biểu đồ tần số. Biểu đồ tần số thường gặp là biểu đồ tần số dạng cột

(H.7.1) và biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng (H.7.2).

Lưu ý: Biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng còn gọi là đa giác tần số (frequency polygon).



Hình 7.1. Biểu đồ A



Hình 7.2. Biểu đồ B

Nhận xét. Để vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Vẽ trục ngang để biểu diễn các giá trị trong dãy dữ liệu, vẽ trục đứng thể hiện tần số.

Bước 2. Với mỗi giá trị trên trục ngang và tần số tương ứng ta xác định một điểm. Nối các điểm liên tiếp với nhau.

Bước 3. Ghi chú giải cho các trục, các điểm và tiêu đề của biểu đồ.

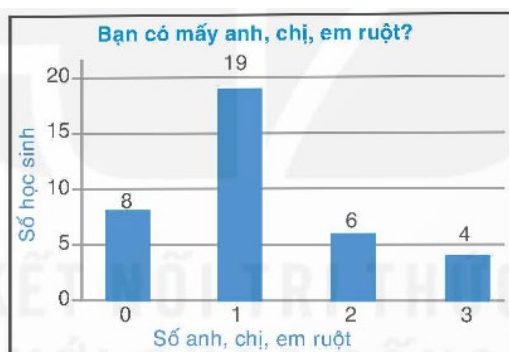
Ví dụ 2 Bạn Bình thống kê số anh, chị, em ruột của các bạn trong lớp và thu được bảng sau:

Số anh, chị, em ruột	0	1	2	3
Số bạn	8	19	6	4

Vẽ biểu đồ tần số dạng cột và biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng biểu diễn bảng thống kê trên.

Lời giải

- Vẽ biểu đồ tần số dạng cột (H.7.3).



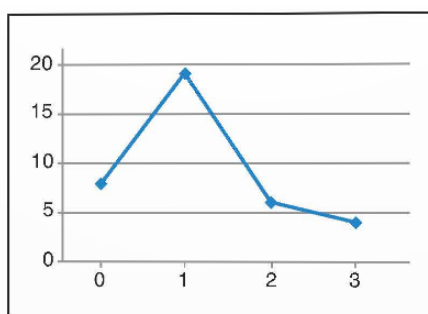
Hình 7.3

- Vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng.

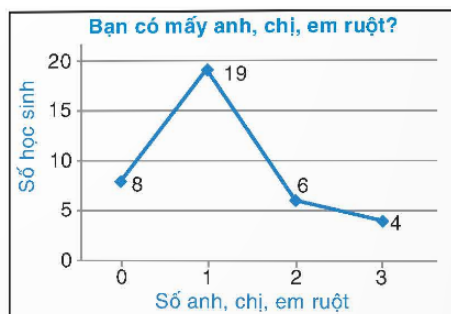
Bước 1. Vẽ các trục (H.7.4).

Bước 2. Xác định các điểm và nối các điểm liên tiếp với nhau (H.7.4).

Bước 3. Ghi chú giải cho các trục, các điểm và tiêu đề của biểu đồ (H.7.5).



Hình 7.4



Hình 7.5

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

Dạng 1. Lập bảng tần số

Ví dụ 1. Một đội bóng đã thi đấu 26 trận trong một mùa giải. Số bàn thắng mà đội đó ghi được trong từng trận đấu được thống kê lại như sau:

2	3	2	3	3	1	0	3	1	0	1	1	2
2	4	0	0	2	2	0	5	4	2	0	2	0

Mẫu dữ liệu trên có bao nhiêu giá trị khác nhau? Xác định tần số của mỗi giá trị và lập bảng tần số của mẫu dữ liệu.

Lời giải

Mẫu dữ liệu có các giá trị là: 0;1;2;3;4;5 .
Tần số của các giá trị 0;1;2;3;4;5 lần lượt là: 7;4;8;4;2;1.
Bảng tần số:

Số bàn thắng	0	1	2	3	4	5
Tần số	7	4	8	4	2	1

Chú ý 1: Số giá trị của mẫu dữ liệu gọi là cỡ mẫu. Trong Ví dụ 1 , tổng các tần số $7 + 4 + 8 + 4 + 2 + 1 = 26$ Cỡ mẫu là 26.

Chú ý 2: Có thể lập bảng tần số ở dạng cột thứ nhất ghi các giá trị, cột thứ hai ghi tần số của các giá trị đó.

Số bàn thắng	Tần số
0	7
1	4
2	8
3	4
4	2
5	1

Ví dụ 2. Người ta đếm số lượng người ngồi trên mỗi chiếc xe ô tô 5 chỗ đi qua một trạm thu phí trong khoảng thời gian từ 9 giờ đến 10 giờ sáng. Kết quả được ghi lại ở bảng sau:

5	4	5	2	3	2	5	2	1	2	1	1	2	5	1
1	1	3	2	1	1	4	1	1	4	1	2	1	4	1
2	3	2	3	2	3	2	3	3	1	2	1	3	2	2
1	4	3	2	3	1	3	5	1	2	3	5	1	2	1

Lập bảng tần số cho mẫu dữ liệu trên.

Lời giải

Bảng tần số:

Số người	1	2	3	4	5
Tần số	20	17	12	5	6

Nhận xét: Số người ngồi trên xe phổ biến nhất là 1 người. Cỡ mẫu: 60 .

Ví dụ 3. Số cuộc gọi đến một tổng đài hỗ trợ khách hàng mỗi ngày trong tháng 4 / 2023 được ghi lại như sau:

4	2	6	3	6	3	2	5	4	2	5	4	3	3	3
3	5	4	4	3	4	6	5	3	6	3	5	3	5	5

Lập bảng tần số cho mẫu dữ liệu trên.

Lời giải

Bảng tần số:

Số cuộc gọi một ngày	2	3	4	5	6
Tần số	3	10	6	7	4

Nhận xét: Tháng 4 có 30 ngày. Cỡ mẫu: 30 .

Ví dụ 4. Bảng sau đây ghi lại tên các bạn đạt điểm tốt vào các ngày trong tuần của lớp 9 E , mỗi điểm tốt ghi tên một lần.

Ngày	Thứ Hai	Thứ Ba	Thứ Tư	Thứ Năm	Thứ Sáu
Tên bạn đạt điểm tốt	Bình Nam	Tuấn Thảo	Bình	Yến Nam	Nam Thảo

Lập bảng tần số cho mẫu dữ liệu trên.

Lời giải

Bảng tần số:

Tên người	Bình	Nam	Tuấn	Thảo	Yến
Tần số	2	3	1	2	1

Nhận xét: - Có thể lập bảng tần số dạng cột.

- Người có số lần đạt điểm tốt nhiều nhất là bạn Nam, Nam được 3 lần đạt điểm tốt.

Ví dụ 5. Thống kê điểm kiểm tra môn Toán của 40 học sinh lớp 9C như sau:

5	5	5	7	7	8	8	8	5	8	8	8	6	6	6	6	8	9	5	7
6	6	7	7	6	8	9	9	7	8	8	5	7	7	7	7	6	8	8	9

Lập bảng tần số cho mẫu dữ liệu trên.

Lời giải

Bảng tần số của mẫu số liệu:

Điểm	5	6	7	8	9	Cộng
Tần số	6	8	10	12	4	$N = 40$

Ví dụ tương tự.

Thống kê thâm niên công tác (đơn vị: năm) của 33 nhân viên ở một công sở như sau:

7	2	5	9	7	4	3	8	10	4	4
2	4	4	5	6	7	7	5	4	1	8
9	4	2	8	5	5	7	3	14	8	8

Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê trên.

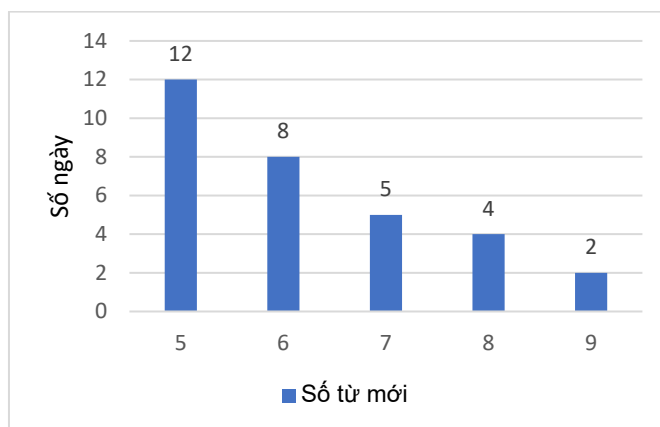
Hướng dẫn

Bảng tần số của mẫu số liệu:

Số năm công tác	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	14
Tần số	1	3	2	7	5	1	5	5	2	1	1

Dạng 2. Biểu đồ tần số

Ví dụ 1. Vào đợt nghỉ hè vừa rồi, mỗi ngày bạn Bình đều học thêm một số từ vựng tiếng Anh mới. Số lượng từ vựng mới bạn Bình học mỗi ngày được biểu diễn ở biểu đồ cột như hình bên dưới.



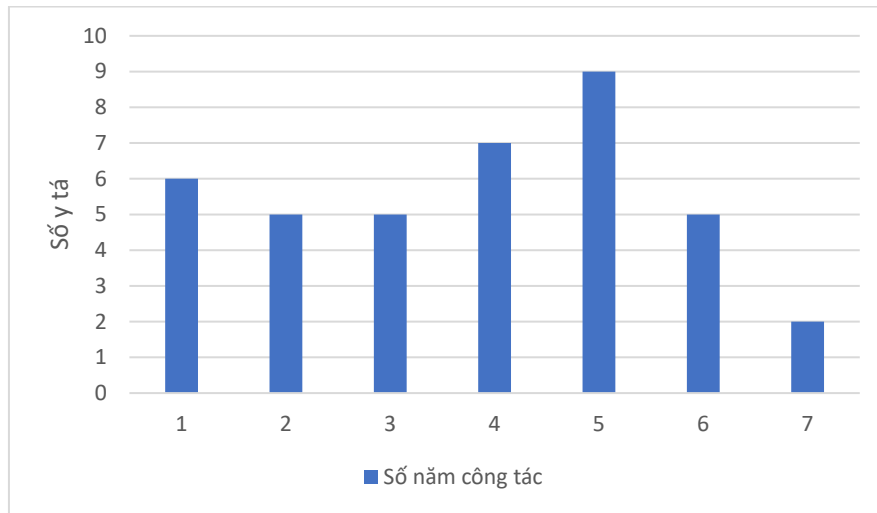
- Số lượng từ vựng mới mà bạn Bình học mỗi ngày nhận được những giá trị nào? Tìm tần số của mỗi giá trị đó?
- Bạn Bình đã học từ vựng tiếng Anh mới trong bao nhiêu ngày?
- Có bao nhiêu ngày bạn Bình nhiều hơn 7 từ vựng mới?

Lời giải

- Số lượng từ vựng mới mà bạn Bình học mỗi ngày nhận được những giá trị là 5; 6; 7; 8; 9. Tần số của các giá trị đó lần lượt là 12; 8; 5; 4; 2.
- Số ngày bạn Bình học từ vựng mới là: $12 + 8 + 5 + 4 + 2 = 31$ (ngày)
- Số ngày bạn Bình học nhiều hơn 7 từ vựng mới là $4 + 2 = 6$ (ngày).

Ví dụ 2. Biểu đồ bên dưới thống kê thời gian (theo năm) của các y tá ở một phòng khám.

- Các y tá của phòng khám có thời gian công tác nhận được những giá trị nào? Tìm tần số của mọi giá trị đó.
- Phòng khám có tổng số bao nhiêu y tá?
- Có bao nhiêu y tá đã công tác ở phòng khám ít nhất 3 năm?



Lời giải

a) Các giá trị: 1;2;3;4;5;6;7. Tần số của mỗi giá trị đó lần lượt là 6;5;5;7;9;5;2.

b) Ta có: $6 + 5 + 5 + 7 + 9 + 5 + 2 = 39$ (y tá).

c) Ta có: $5 + 7 + 9 + 5 + 2 = 28$ (y tá)

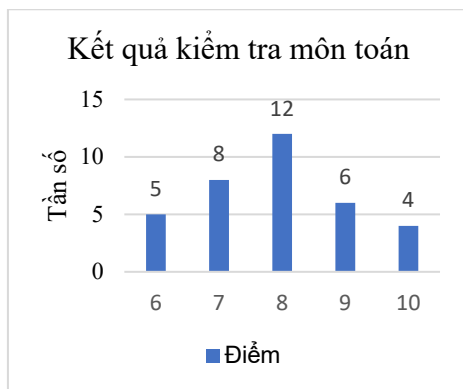
Nhận xét:

1. Từ biểu đồ trên, ta có thể lập bảng thống kê cho dữ liệu đó.

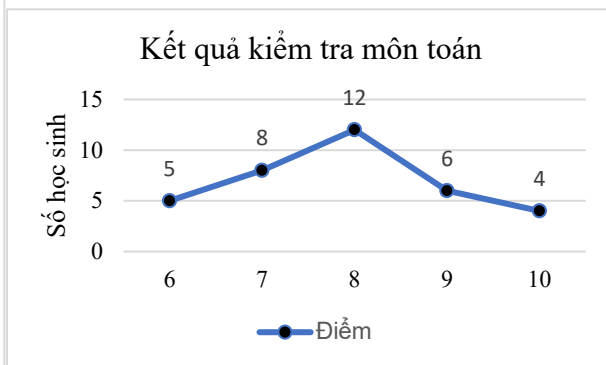
Số năm công tác	1	2	3	4	5	6	7
Số y tá	6	5	5	7	9	5	2

2. Ta có thể vẽ biểu đồ đoạn thẳng.

Ví dụ 3. Cho hai biểu đồ sau:



Biểu đồ A



Biểu đồ B

a) Đọc và giải thích mỗi biểu đồ trên.

b) Hai biểu đồ trên có biểu diễn cùng một dữ liệu không? Lập bảng thống kê cho dữ liệu đó. Bảng thống kê thu được có phải là bảng tần số hay không?

Lời giải

a) Biểu đồ A : biểu đồ cột. Số học sinh đạt điểm 6;7;8;9;10 tương ứng là 5;8;12;6;4.

Biểu đồ B : biểu đồ đoạn thẳng. Biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng còn gọi là đa giác tần số (frequency polygon)

b) Hai biểu đồ trên cùng biểu diễn một dữ liệu.

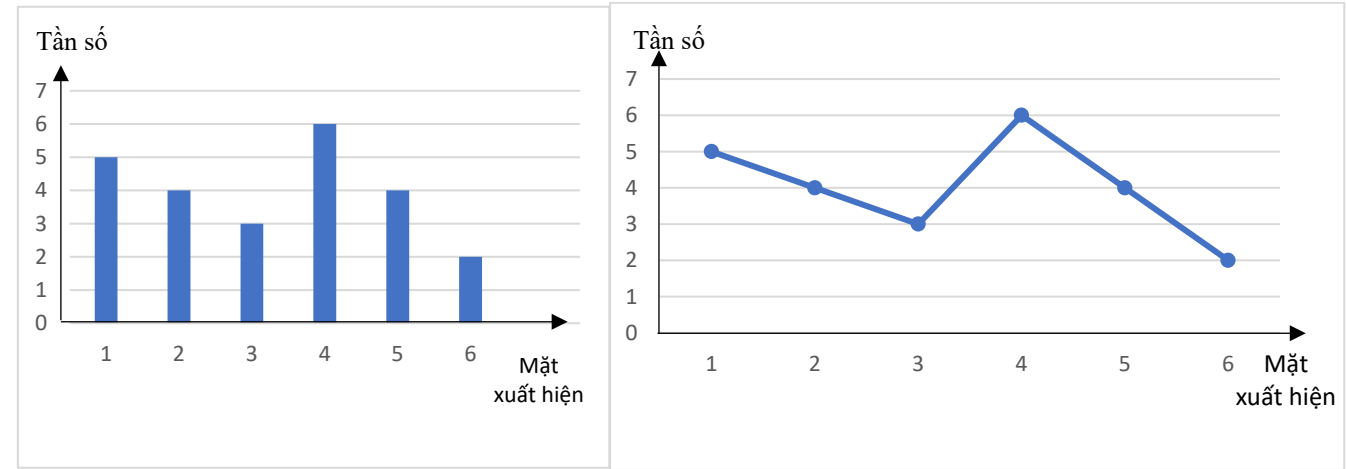
Bảng thống kê

nh (tần số)					

Bảng thống kê trên cùng là bảng tần số.

Ví dụ tương tự.

Lập bảng thống kê và kết quả khi gieo con xúc xắc từ biểu đồ đã cho.



Ví dụ 3. Một khu vui chơi dành cho trẻ em thống kê lại độ tuổi của một số trẻ em đến chơi trong một ngày ở bảng tần số như sau:

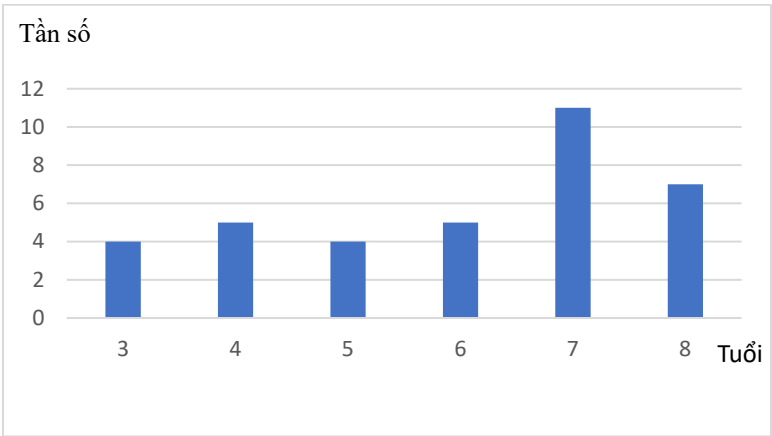
Điểm	6	7	8	9	10
Số học sinh (tần số)	5	8	12	6	4

- a) Hãy vẽ các biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn số liệu ở bảng tần số.
- b) Theo biểu đồ ở câu a, trong số các trẻ em đến khu vui chơi, trẻ em ở độ tuổi nào là nhiều nhất?

Lời giải

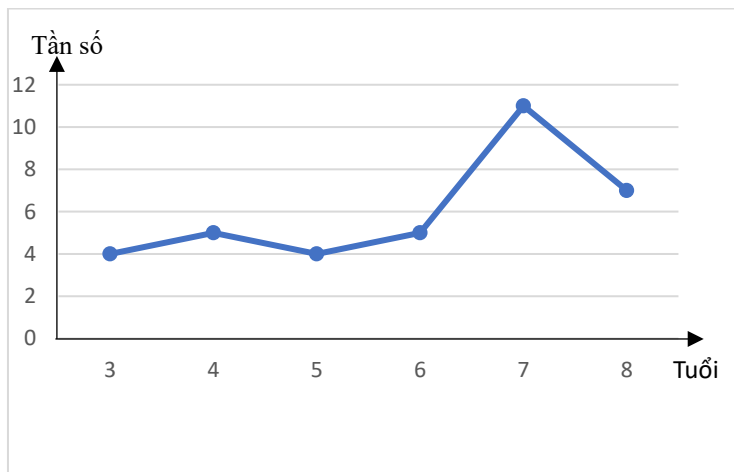
a) Biểu đồ cột.

Số lượng trẻ em phân theo độ tuổi



Biểu đồ đoạn thẳng

Số lượng trẻ em phân theo độ tuổi



b) Theo biểu đồ trên, trong số các trẻ em đến khu vui chơi, trẻ em 7 tuổi là nhiều nhất.

Ví dụ tương tự.

Bác An thống kê lại số cuộc gọi điện thoại mà mình thực hiện mỗi ngày trong tháng 7 ở bảng tần số như sau:

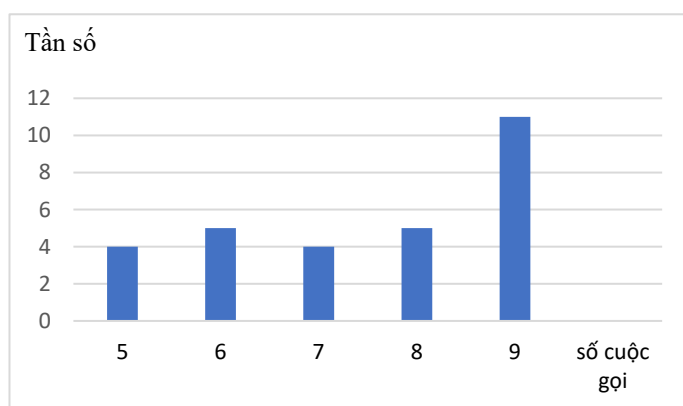
Tuổi	3	4	5	6	7	8
Tần số	4	5	4	5	11	7

Hãy vẽ biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn mẫu số trên.

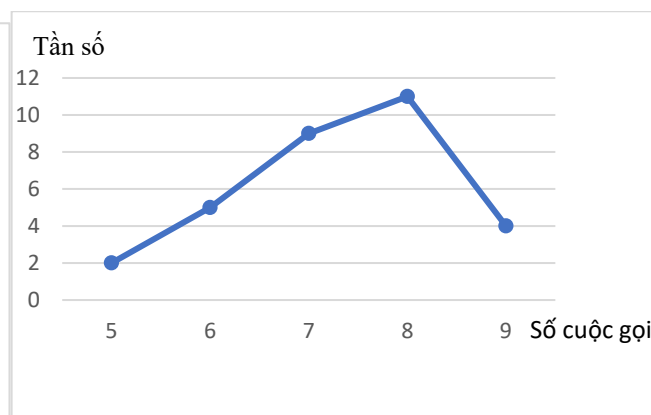
Hướng dẫn

Xem hình vẽ.

Biểu đồ cột:



Biểu đồ đoạn thẳng:



Ví dụ 4. Bảng tần số sau cho biết số học sinh của lớp 9D dự đoán đội bóng vô địch World Cup 2022 trước khi giải đấu bắt đầu.

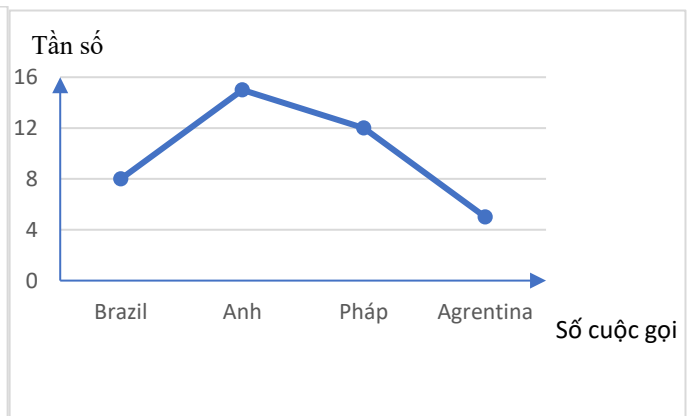
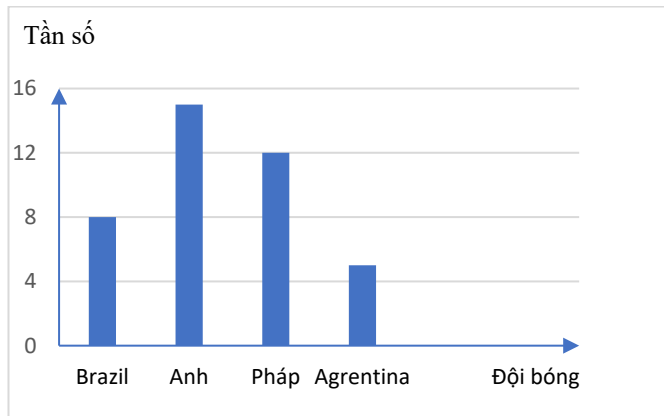
Số cuộc gọi	5	6	7	8	9
Tần số (số ngày)	2	5	9	11	4

Vẽ biểu đồ tần số dạng cột và biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng biểu diễn bảng tần số trên.

Lời giải

Biểu đồ cột:

Biểu đồ đoạn thẳng:

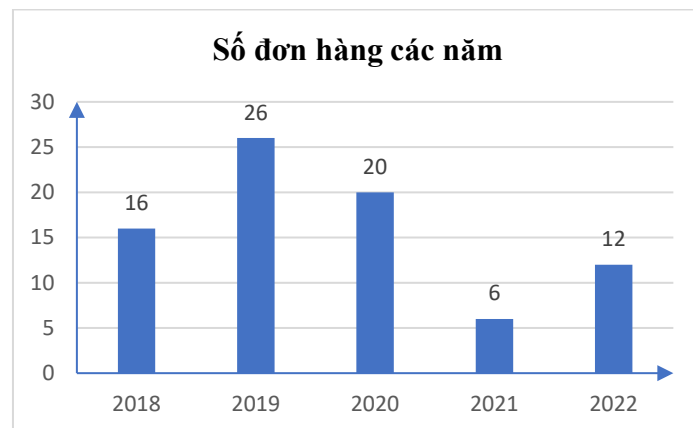


Ví dụ 5. Một công ty xuất khẩu các mặt hàng nông hải sản thống kê lại trong bảng sau số đơn đặt hàng trong mỗi năm thuộc giai đoạn 2018 -2022 :

- Hãy chọn loại biểu đồ thuận tiện cho việc so sánh số đơn đặt hàng của các năm. Vẽ biểu đồ đó. Số đơn đặt hàng tập trung nhiều nhất vào năm nào? Số đơn đặt hàng của năm nào ít nhất?
- Hãy chọn loại biểu đồ thể hiện rõ xu hướng thay đổi số đơn hàng qua các năm. Vẽ biểu đồ đó. Dựa vào biểu đồ này, cho biết vào những năm nào số đơn đặt hàng giảm sút so với năm trước đó? Năm nào giảm nhiều nhất?

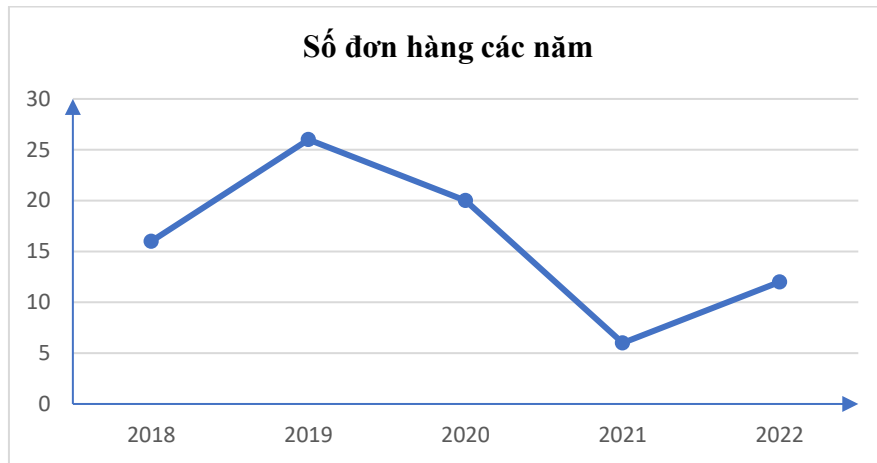
Lời giải

- Để so sánh số đơn hàng trong các năm thì biểu đồ tần số dạng cột là loại biểu đồ phù hợp. Biểu đồ được vẽ ở hình dưới đây, trong đó trục ngang biểu thị các năm và trục đứng biểu thị tần số ứng với mỗi năm.



Biểu đồ cho thấy rõ là số đơn hàng tập trung vào năm 2019. Năm 2021 có số đơn hàng ít nhất và chênh lệch khá nhiều so với các năm còn lại (chẳng hạn chỉ bằng một nửa số đơn hàng của năm 2022 hay chưa đến một phần tư số đơn hàng của năm 2019).

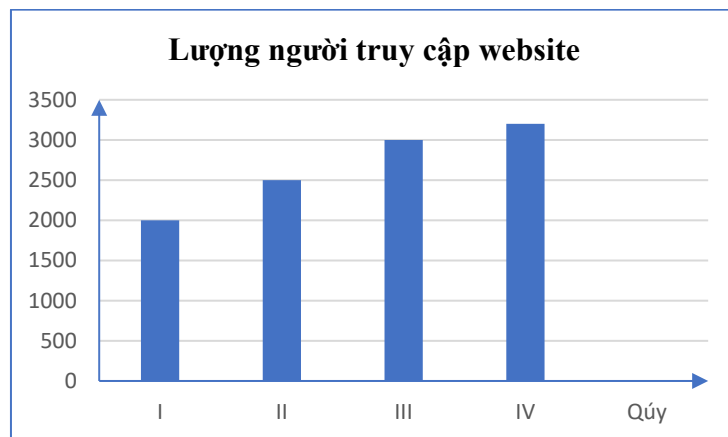
- Để thể hiện rõ xu hướng thay đổi qua các năm thì ta vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng.



Quan sát biểu đồ, ta thấy năm 2020 và năm 2021 đều có số đơn hàng giảm so với năm trước đó. Đoạn thẳng đi xuống “dốc” hơn là đoạn chuyển từ năm 2020 sang năm 2021, chứng tỏ năm 2021 có số đơn đặt hàng giảm nhiều nhất so với năm trước đó.

Ví dụ 6. Biểu đồ được đưa ra để quảng cáo cho một website.

Quan sát biểu đồ, bạn Vân nhận xét: “Lượng người truy cập quý II tăng gấp đôi so với quý I. Sang quý III, lượng người truy cập lại tăng gấp 3 so với quý I”.



Ý kiến của bạn Vân đúng không? Giải thích vì sao?

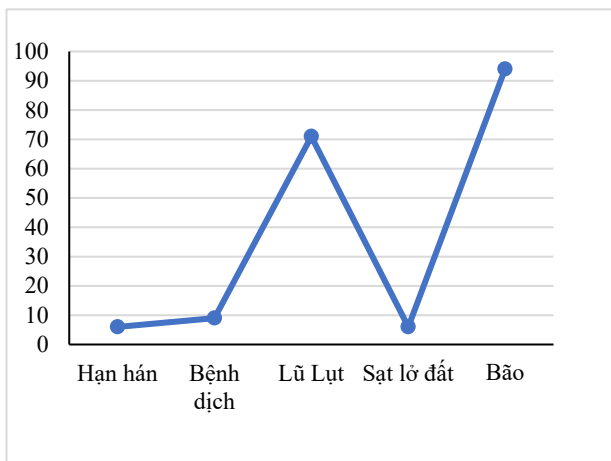
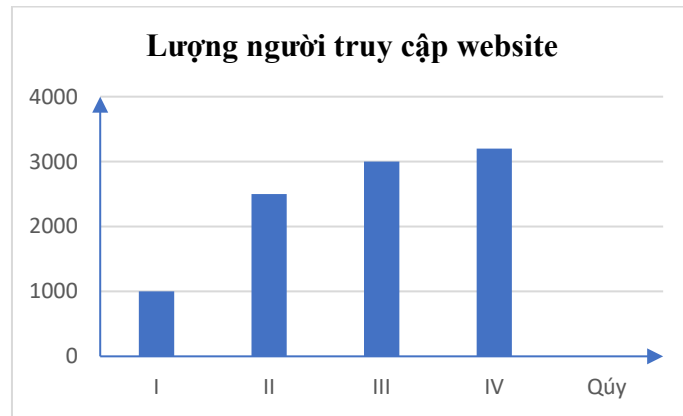
Lời giải

Hình vẽ người ta đã thu gọn đoạn ứng với số 2000 trên trục tung. Mỗi đơn vị tiếp theo ứng với 500 (người).

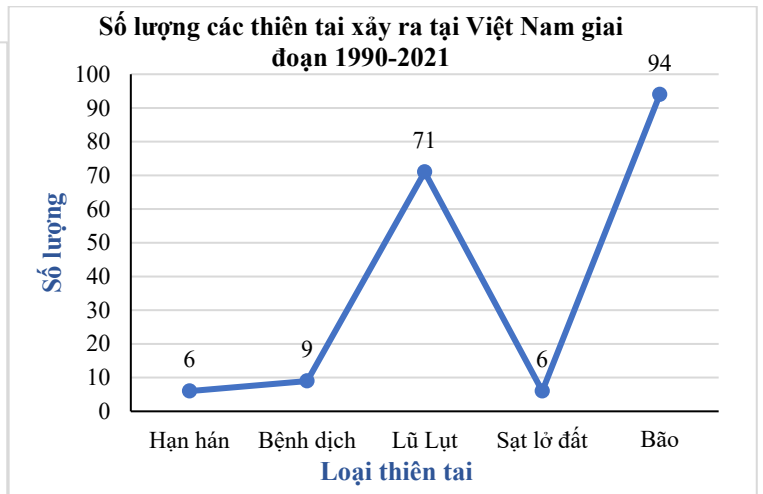
Như vậy từ quý I sang quý II chỉ tăng 500 người chứ không phải tăng gấp đôi (từ 2000 lên 4000). Tương tự, lượng người truy cập từ quý I sang quý III chỉ tăng 1000 chứ không phải tăng gấp 3 (từ 2000 lên 6000).

Như vậy ý kiến của bạn Vân không đúng vì chỉ nhìn chiều cao của các cột mà không để ý đến số liệu trên trục tần số.

Chú ý: Khi vẽ biểu đồ, ta nên chọn đơn vị phù hợp cho trục tần số để có thể bắt đầu từ số 0, không gây nhầm lẫn về thị giác. Chẳng hạn, biểu đồ ở hình trên có thể vẽ lại như sau:



Hình b



Hình c

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

7.1. Một nhóm học sinh đã khảo sát ý kiến về ý thức giữ gìn vệ sinh công cộng của các bạn trong trường với các mức đánh giá Tốt, Khá, Trung bình, Kém và thu được kết quả như sau:

Tốt, Trung bình, Tốt, Trung bình, Khá, Tốt, Khá, Tốt, Tốt, Khá, Trung bình, Kém, Khá, Tốt, Khá, Tốt, Trung bình, Khá, Tốt, Tốt, Tốt, Khá, Kém, Trung bình, Tốt, Khá, Tốt, Khá, Tốt, Khá, Khá.

a) Lập bảng tần số cho dãy dữ liệu trên.

b) Từ bảng tần số, hãy cho biết mức đánh giá nào chiếm ưu thế nhất. Vì sao?

Lời giải

a) Bảng tần số cho dãy dữ liệu trên như sau:

Mức đánh giá	Tốt	Khá	Trung bình	Kém
Tần số	13	11	5	2

b) Từ bảng tần số, ta thấy mức đánh giá Tốt chiếm ưu thế nhất vì mức đánh giá Tốt có tần số lớn nhất (13 bạn).

7.2. Cho biểu đồ tranh biểu diễn số lượng học sinh trong lớp đăng kí tham gia các câu lạc bộ của trường như sau:

Câu lạc bộ võ thuật	Câu lạc bộ tiếng Anh	Câu lạc bộ nghệ thuật

(Mỗi biểu diễn cho 1 học sinh)

Lập bảng tần số cho dữ liệu được biểu diễn trong biểu đồ tranh trên.

Lời giải

Từ biểu đồ tranh, ta có:

- Số học sinh đăng kí tham gia câu lạc bộ võ thuật là: 6 học sinh
- Số học sinh đăng kí tham gia câu lạc bộ tiếng Anh là: 9 học sinh.
- Số học sinh đăng kí tham gia câu lạc bộ nghệ thuật là: 5 học sinh.

Bảng tần số cho dữ liệu được biểu diễn trong biểu đồ tranh như sau:

Câu lạc bộ	Võ thuật	Tiếng Anh	Nghệ thuật
Tần số	6	9	5

7.3. Biểu đồ Hình 7.7 cho biết số ngày sử dụng phương tiện đến trường của bạn Mai trong tháng chín. Lập bảng tần số cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.



Hình 7.7

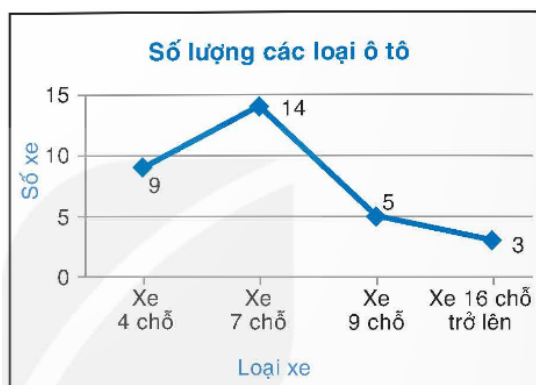
Lời giải

Từ biểu đồ Hình 7.7, ta thấy có 9 ngày bạn Mai đến trường bằng xe buýt, 5 ngày bạn Mai đến trường bằng xe máy và 8 ngày bạn Mai đến trường bằng xe đạp.

Bảng tần số cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ Hình 7.7 như sau:

Phương tiện	Xe buýt	Xe máy	Xe đạp
Tần số	9	5	8

7.4. Người ta thống kê các loại ô tô chạy qua một trạm thu phí trong 1 giờ và vẽ được biểu đồ tần số như Hình 7.8.



Hình 7.8

- Lập bảng tần số cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.
- Từ bảng tần số, hãy cho biết loại xe nào đi qua trạm thu phí nhiều nhất.

Lời giải

a) Từ biểu đồ tần số Hình 7.8, ta thấy có 9 xe 4 chỗ, 14 xe 7 chỗ, 5 xe 9 chỗ và 3 xe 16 chỗ trở lên chạy qua trạm thu phí trong 1 giờ.

Bảng tần số cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ như sau:

Loại ô tô	Xe 4 chỗ	Xe 7 chỗ	Xe 9 chỗ	Xe 16 chỗ trở lên
Tần số	9	14	5	3

b) Từ bảng tần số, ta thấy $14 > 9 > 5 > 3$ nên loại xe 7 chỗ đi qua trạm thu phí nhiều nhất.

7.5. Bảng thống kê sau cho biết số lượng các thiên tai xảy ra tại Việt Nam giai đoạn 1990 – 2021 .

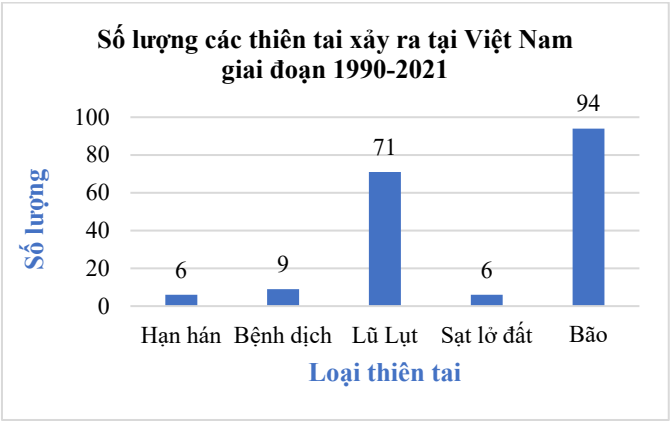
Loại thiên tai	Hạn hán	Bệnh dịch	Lũ lụt	Sạt lở đất	Bão
Số lượng	6	9	71	6	94

(Theo vietnam.opendevlopmentmekong.net)

Vẽ biểu đồ tần số dạng cột và biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng biểu diễn bảng thống kê trên.

Lời giải

- Vẽ biểu đồ tần số dạng cột .



• Vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng.

Bước 1. Vẽ các trục (Hình b).

Bước 2. Xác định các điểm và nối các điểm liên tiếp với nhau (Hình b).

Bước 3. Ghi chú giải cho các trục, các điểm và tiêu đề của biểu đồ (Hình c).

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Một công ty đã ghi lại nhóm máu của các thành viên trong công ty để chuẩn bị cho đợt hiến máu tình nguyện cho kết quả như sau: O,A,B,AB,O,O,A,O,B,A,B,B,O,O,B

B,O,B,O,O,O,B,A,B,O,O,O,B,O,B.

a) Có bao nhiêu nhóm máu? Đếm số thành viên trong công ty theo từng nhóm máu.

b) Lập bảng tần số cho dãy dữ liệu trên. Từ bảng tần số, hãy cho biết nhóm máu nào phổ biến nhất.

Lời giải

a) Có 4 nhóm máu là A, B, O, AB . Trong số 30 thành viên của công ty có 14 người có nhóm máu O, 4 người có nhóm máu A, 11 người có nhóm máu B , 1 người có nhóm máu AB .

b) Bảng tần số:

Nhóm máu	A	B	O	AB
Tần số	4	11	14	1

Từ bảng tần số trên, ta thấy nhóm máu O là phổ biến nhất.

Câu 2. (Mức 1: lưu thông bình thường; Mức 2: lưu thông khó khăn; Mức 3: lưu thông không ổn định; Mức 4: ùn tắc nghiêm trọng) vào lúc 17 giờ các ngày trong tháng Chín tại một đoạn quốc lộ:

Mức độ	Mức 1	Mức 2	Mức 3	Mức 4
Tần số	5	15	7	3

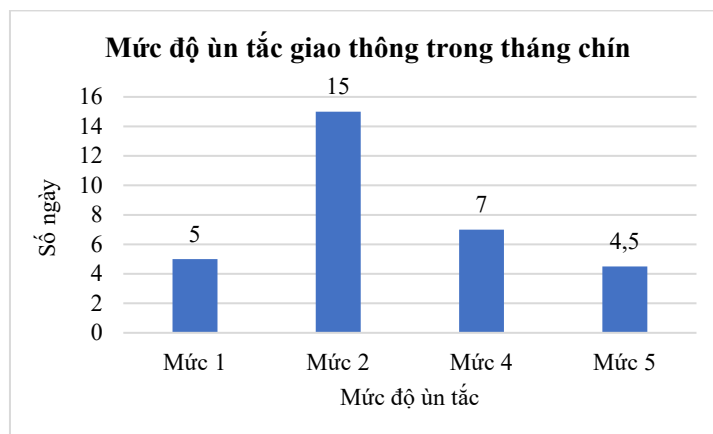
a) Dựa vào bảng tần số, hãy cho biết mức độ ùn tắc giao thông nào là phổ biến nhất vào lúc 17 giờ tại đoạn quốc lộ trên.

b) Vẽ biểu đồ tần số dạng cột biểu diễn bảng tần số trên.

Lời giải

a) Mức 2 là mức độ ùn tắc giao thông phổ biến nhất vào lúc 17 giờ tại đoạn quốc lộ trên vì nó tương ứng với tần số lớn nhất.

b) Biểu đồ tần số dạng cột:



Câu 3. Tính đến hết SEA Games 32 đã có năm quốc gia từng lên ngôi vô địch bóng đá nam SEA Games, cụ thể như sau:

Đội tuyển	Năm vô địch
Thái Lan	1975, 1981, 1983, 1985, 1993, 1995, 1997, 1999, 2001, 2003, 2005, 2007, 2013, 2015, 2017
Malaysia	1961, 1977, 1979, 1989, 2009, 2011
Myanmar	1965, 1967, 1969, 1971, 1973
Việt Nam	1959, 2019, 2021
Indonesia	1987, 1991, 2023

(Theo sportingnews.com)

a) Lập bảng tần số biểu diễn số lần vô địch môn bóng đá nam SEA Games của các quốc gia trên.

b) Từ bảng tần số thu được ở câu a, hãy cho biết quốc gia nào vô địch môn Bóng đá nam SEA Games nhiều nhất, với mấy lần vô địch.

Lời giải

a) Bảng tần số:

Đội tuyển	Thái Lan	Malaysia	Myanmar	Việt Nam	Indonesia
Tần số	15	6	5	3	3

b) Thái Lan có số lần vô địch đá nam SEA Games nhiều nhất, với 15 lần.

Câu 4. Giáo viên dạy Toán ghi lại số bài tập mỗi học sinh trong lớp đã làm sau bài học tuần trước cho kết quả như sau:

4, 2, 0, 5, 4, 3, 2, 1, 3, 3, 6, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 3

3,1,4,6,1,2,3,5,3,2,4,3,1,4,4,5,6,2 .

a) Lập bảng tần số cho dãy số liệu trên.

b) Có bao nhiêu bạn trong lớp làm ít nhất ba bài tập?

Lời giải

a) Bảng tần số:

Số bài tập	0	1	2	3	4	5	6
Tần số	1	5	6	10	7	4	3

b) Có 24 bạn trong lớp làm ít nhất ba bài tập.

Câu 5. Bảng sau cho biết kết quả bình chọn môn thể thao được yêu thích nhất của các bạn học sinh lớp 9A (mỗi gạch biểu diễn cho một bạn bình chọn):

Bóng đá	/
Cầu lông	/
Bóng bàn	
Môn khác	/

a) Lập bảng tần số cho kết quả bình chọn trên.

b) Dựa vào bảng tần số thu được ở câu a, cho biết môn thể thao nào được các bạn yêu thích nhất.

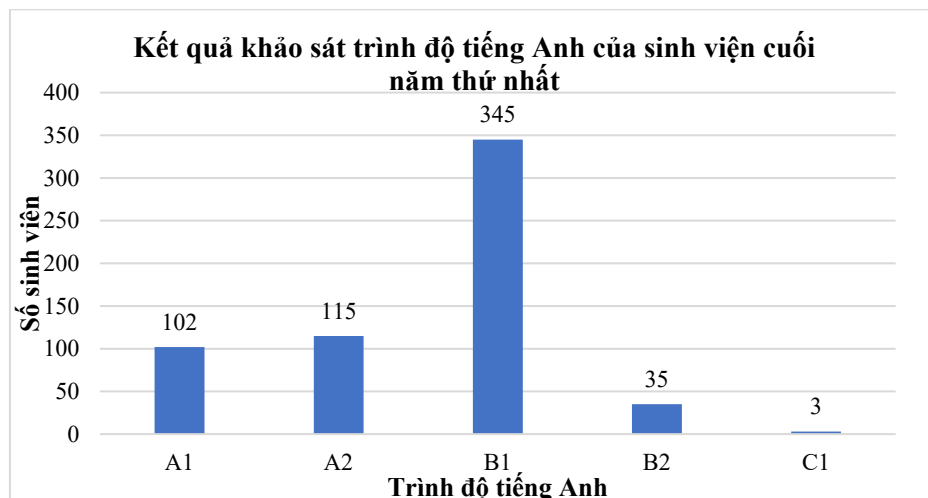
Lời giải

a) Bảng tần số:

Môn thể thao	Bóng đá	Cầu lông	Bóng bàn	Môn khác
Tần số	14	8	4	7

b) Bóng đá được nhiều nhất bạn yêu thích nhất.

Câu 6. Biểu đồ sau cho biết kết quả khảo sát trình độ tiếng Anh của sinh viên cuối năm thứ nhất ở một trường đại học:



a) Đọc và giải thích số liệu được biểu diễn trên hai cột bất kì của biểu đồ.

b) Lập bảng tần số cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

c) Để tốt nghiệp đại học, sinh viên cần có trình độ tiếng Anh ở mức B1 trở lên. Ước lượng tỉ lệ sinh viên cuối năm thứ nhất đã đạt chuẩn trình độ tiếng Anh.

Lời giải

a) Cuối năm thứ nhất, có 102 sinh viên đạt trình độ tiếng Anh mức A1, 115 sinh viên đạt trình độ tiếng Anh mức A2.

b) Bảng tần số:

Trình độ	A1	A2	B1	B2	C1
Tần số	102	115	345	35	3

c) Tổng số sinh viên là $n = 102 + 115 + 345 + 35 + 3 = 600$. Cuối năm thứ nhất, số sinh viên đạt trình độ tiếng Anh mức B1 trở lên là $345 + 35 + 3 = 383$.

Ước lượng tỉ lệ sinh viên cuối năm thứ nhất đạt chuẩn trình độ tiếng Anh là $\frac{383}{600} \cdot 100\% \approx 64\%$.

Câu 7. Số π với 50 chữ số sau dấu phẩy thập phân như sau:

3,14159265358979323846264338327950288419716939937510.

a) Lập bảng tần số cho các chữ số từ 0 đến 9 xuất hiện sau dấu phẩy thập phân.

b) Chữ số nào xuất hiện nhiều nhất, ít nhất?

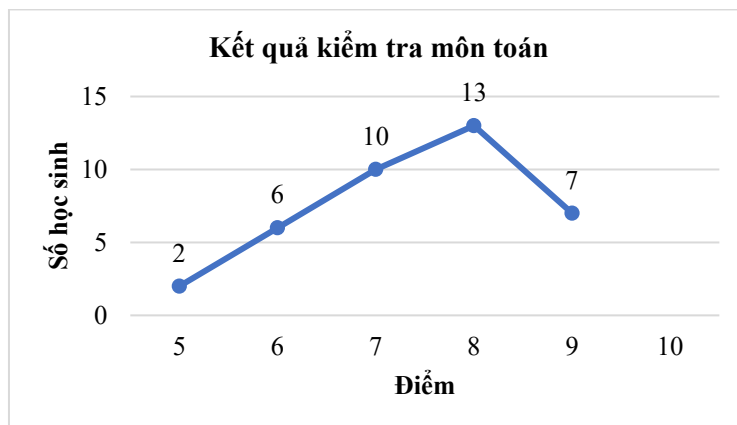
Lời giải

a) Bảng tần số:

Chữ số	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Tần số	2	5	5	8	4	5	4	4	5	8

b) Hai chữ số xuất hiện nhiều nhất là 3 và 9; chữ số xuất hiện ít nhất là 0.

Câu 8. Cho biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng sau:



a) Lập bảng tần số cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

b) Điểm nào có nhiều học sinh đạt nhất?

Lời giải

a) Bảng tần số:

Điểm	5	6	7	8	9	10
Tần số	2	6	10	13	7	1

b) Có nhiều học sinh được điểm 8 nhất, với 13 bạn.

Câu 9. Một túi chứa một số viên bi có cùng kích thước, mỗi viên bi có một trong các màu đen, trắng, đỏ, vàng. Thực hiện lấy bi 20 lần, mỗi lần lấy một viên xem viên bi có màu gì sau đó trả bi lại túi, trộn đều.

Kết quả trong 20 lần lấy bi có 8 lần lấy được bi đen, 4 lần lấy được bi đỏ, 6 lần lấy được bi trắng, 2 lần lấy được bi vàng.

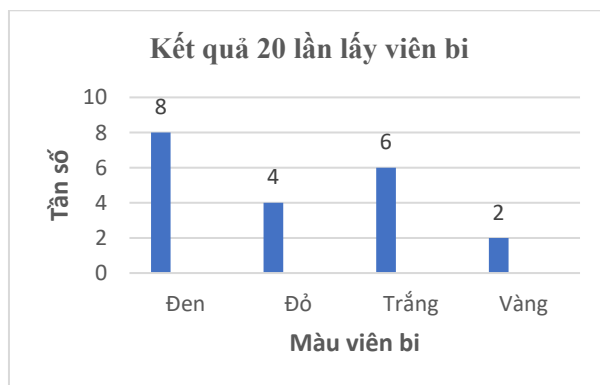
a) Lập bảng tần số cho kết quả thu được.

b) Vẽ biểu đồ tần số dạng cột biểu diễn bảng tần số thu được ở câu a.

Lời giải

a) Các giá trị là đen, đỏ, trắng, vàng với tần số tương ứng là 8,4,6,2.

b)



Câu 10. Thống kê số ngày nằm viện của 20 bệnh nhân được kết quả như sau:

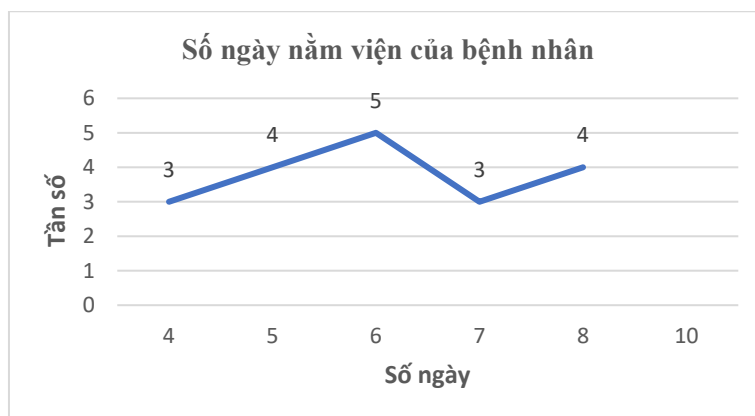
5, 7, 4, 6, 8, 10, 6, 7, 8, 8, 6, 5, 8, 5, 4, 6, 5, 7, 4, 6

a) Lập bảng tần số cho dãy số liệu trên.

b) Vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng biểu diễn bảng tần số thu được ở câu a.

Lời giải

a) Đếm số lần xuất hiện của các giá trị 4, 5, 6, 7, 8, 10 và lập bảng tần số.



BÀI 23. BẢNG TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI VÀ BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. BẢNG TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

Tần số tương đối và bảng tần số tương đối

Cho dãy dữ liệu $x_1, x_2, \dots, x_n$. Tần số tương đối f_i của giá trị x_i là tỉ số giữa tần số của x_i (gọi là m_i) với n .

Bảng sau đây được gọi là bảng tần số tương đối.

Giá trị	x_1	...	x_k
Tần số tương đối	f_1	...	f_k

trong đó $n = m_1 + \dots + m_k$ và $f_1 = \frac{m_1}{n} \cdot 100(\%)$ là tần số tương đối của $x_1, \dots$, $f_k = \frac{m_k}{n} \cdot 100(\%)$ là tần số tương đối của x_k

Lưu ý: Tần số tương đối còn gọi là tần suất.

Chú ý. Người ta còn cho bảng tần số tương đối ở dạng cột: cột thứ nhất ghi các giá trị, cột thứ hai ghi tần số tương đối của các giá trị đó.

Ví dụ 1 Thu thập dữ liệu về chất lượng không khí tại một địa điểm trong 30 ngày mùa xuân cho kết quả như sau:

M1, M1, M2, M2, M2, M2, M1, M2, M2, M2, M2, M2, M2, M2, M2,

M4, M1, M3, M3, M3, M4, M4, M1, M1, M1, M1, M3, M3, M3, M1.

(M1: Tốt; M2: Trung bình; M3: Kém; M4: Xấu)

a) Lập bảng tần số tương đối cho dãy dữ liệu trên.

b) Trong một ngày xuân, khả năng cao nhất địa điểm này có chất lượng không khí ở mức nào?

Lời giải

a) Tổng số ngày quan sát là $n = 30$.

Số ngày có chất lượng không khí ở các mức M1, M2, M3, M4 tương ứng là $m_1 = 9, m_2 = 12, m_3 = 6, m_4 = 3$.

Do đó các tần số tương đối cho các mức M1, M2, M3, M4 lần lượt là:

$$f_1 = \frac{9}{30} \cdot 100\% = 30\%; f_2 = \frac{12}{30} \cdot 100\% = 40\%; f_3 = \frac{6}{30} \cdot 100\% = 20\%; f_4 = \frac{3}{30} \cdot 100\% = 10\%.$$

Ta có bảng tần số tương đối sau:

Chất lượng không khí	M1	M2	M3	M4
Tần số tương đối	30%	40%	20%	10%

b) Trong một ngày xuân, khả năng cao nhất là địa điểm này có chất lượng không khí ở mức M2, tức là mức Trung bình.

Nhận xét. Tần số tương đối của một giá trị là ước lượng cho xác suất xuất hiện giá trị đó.

2. BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

Tìm hiểu về biểu đồ tần số tương đối

- Biểu đồ biểu diễn bảng tần số tương đối được gọi là **biểu đồ tần số tương đối**. Dạng thường gặp của biểu đồ tần số tương đối là biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn.

- **Để vẽ biểu đồ hình quạt tròn ta thực hiện theo các bước sau:**

Bước 1. Xác định số đo cung tương ứng của các hình quạt dùng để biểu diễn tần số tương đối của các giá trị theo công thức $360^{\circ} \cdot f_i$ với $i = 1, \dots, k$.

Bước 2. Vẽ hình tròn và chia hình tròn thành các hình quạt có số đo cung tương ứng được xác định trong Bước 1.

Bước 3. Định dạng các hình quạt tròn (thường bằng cách tô màu), ghi tần số tương đối, chú giải và tiêu đề.

Ví dụ 2:

Cho bảng tần số tương đối về loại phim yêu thích của các học sinh trong lớp 9A như sau:

Loại phim	Hài	Khoa học viễn tưởng	Kinh dị
Tỉ lệ bạn yêu thích	50%	37,5%	12,5%

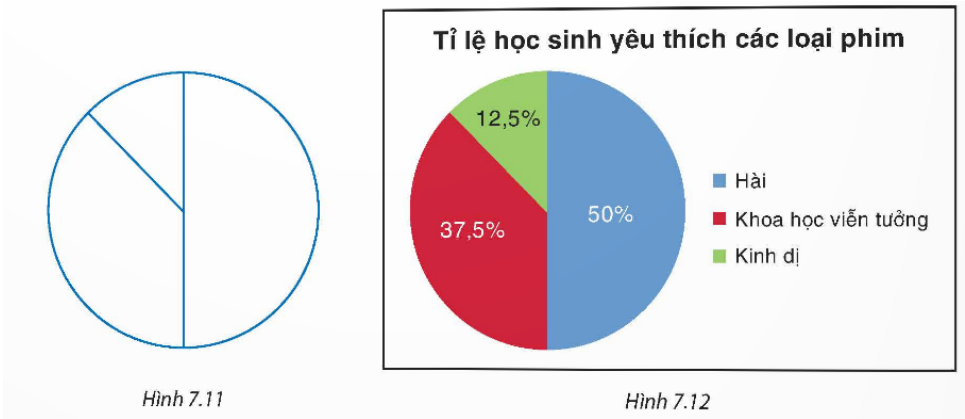
Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối trên.

Lời giải

Bước 1. Xác định số đo cung tương ứng của các hình quạt biểu diễn các tần số tương đối cho mỗi loại phim:

Hài: $360^{\circ} \cdot 50\% = 180^{\circ}$; Khoa học viễn tưởng: $360^{\circ} \cdot 37,5\% = 135^{\circ}$; Kinh dị: $360^{\circ} \cdot 12,5\% = 45^{\circ}$.

Bước 2. Vẽ hình tròn và chia hình tròn thành các hình quạt (H.7.11).



Bước 3. Định dạng các hình quạt tròn, ghi tỉ lệ phần trăm, chú giải và tiêu đề (H.7.12).

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tần số tương đối

Ví dụ 1. Sau bài thi môn Ngữ văn, cô giáo ghi lại số lỗi chính tả mà một học sinh mắc phải vào bảng thống kê sau:

2	5	2	2	1	3	4	0	5	2	5	1	2	1	3	5	1	0	4	1
4	2	1	4	3	3	2	0	4	5	4	5	1	4	1	1	0	3	1	4

- a) Mẫu số liệu trên gồm những giá trị khác nhau nào?
b) Hãy lập bảng tần số và bảng tần số tương đối của số lỗi chính tả mà học sinh mắc phải.

Lời giải

- a) Các giá trị khác nhau của mẫu số liệu là: 0;1;2;3;4;5 .
b) Cỡ mẫu $n = 40$.

Bảng tần số:

Số lỗi chính tả	0	1	2	3	4	5
Tần số	4	10	7	5	8	6

Vì tần số của giá trị 0 là 4 nên tần số tương đối của giá trị 0 là $\frac{4}{40} \cdot 100\% = 10,0\%$.

Vì tần số của giá trị 1 là 10 nên tần số tương đối của giá trị 1 là $\frac{10}{40} \cdot 100\% = 25,0\%$.

Tương tự, ta tính được tần số tương đối của các giá trị 2;3;4;5 lần lượt là 17,5%;12,5%;20,0%;15,0% .

Bảng tần số tương đối:

Số lỗi chính tả	0	1	2	3	4	5
Tần số	10%	25%	17,5%	12,5%	20%	15%

Ví dụ 2. Điều tra về “Loại nhạc cụ bạn muốn chơi nhất” đối với các bạn trong lớp, bạn Dương thu được ý kiến trả lời và ghi lại như dưới đây:

Đàn piano	Trống	Đàn bầu	Đàn piano	Đàn guitar
Đàn guitar	Sáo	Đàn guitar	Đàn guitar	Đàn piano
Sáo	Đàn guitar	Sáo	Kèn harmonica	Đàn violin
Trống	Đàn guitar	Đàn bầu	Đàn piano	Đàn piano
Đàn violin	Đàn piano	Đàn violin	Sáo	Trống
Kèn harmonica	Đàn violin	Đàn piano	Đàn piano	Đàn guitar

Lập bảng tần số tương đối của các loại nhạc cụ.

Hướng dẫn: Ta có thể lập bảng tần số và bảng tần số tương đối vào chung một hình vẽ.

Lời giải

Ta có: $n = 30$. Bảng tần số - tần số tương đối.

Nhạc cụ	Piano	Guitar	Đàn bầu	Violin	Harmonica	Sáo	Trống
Tần số	9	6	2	4	2	4	3
Tần số tương đối	30%	20%	6,7%	13,3%	6,7%	13,3%	10%

Ví dụ 3. Thu thập dữ liệu về chất lượng không khí tại một địa điểm trong 30 ngày mùa xuân cho kết quả như sau:

M1, M1, M2, M2, M2, M1, M2, M2, M2, M2, M2, M2, M2,
M4, M3, M3, M3, M3, M4, M4, M1, M1, M1, M1, M3, M3, M3, M1.
(M1: Tốt; M2: Trung bình; M3: Kém; M4: Xấu)

Lập bảng tần số tương đối.

Lời giải

Ta có: $n = 30$. Bảng tần số - tần số tương đối.

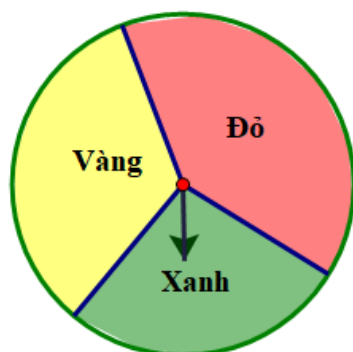
Chất lượng không khí	M1	M2	M3	M4
Tần số	8	12	7	3
Tần số tương đối	26,7%	40%	23,3%	10%

Ví dụ 4. Quay 50 lần một tấm bìa hình tròn được chia thành ba hình quạt với các màu xanh, đỏ, vàng. Quan sát và ghi lại mũi tên chỉ vào hình quạt có màu nào khi tấm bìa dừng lại. Kết quả thu được như sau:

Xanh: 

Đỏ: 

Vàng: 



a) Lập bảng tần số tương đối cho kết quả thu được.

Xanh

b) Ước lượng xác suất mũi tên chỉ vào hình quạt màu đỏ.

Lời giải

a) Bảng tần số - tần số tương đối.

Màu sắc	Xanh	Đỏ	Vàng
Tần số	15	25	10
Tần số tương đối	30%	50%	20%

b) 50%.

Dạng 2. Biểu đồ tần số tương đối

Ví dụ 1. Một doanh nghiệp thu thập mức độ yêu thích của người tiêu dùng về một loại sản phẩm theo các mức: 1, 2, 3, 4, 5. Mẫu số liệu thống kê sau phản ánh ý kiến của 50 người tiêu dùng như sau:

4	4	1	4	5	2	2	5	5	5	2	4	3	4	4	4	5
3	3	4	4	4	5	1	5	4	4	4	2	4	4	2	5	5
1	1	1	4	4	4	3	2	4	3	3	3	4	4	4	5	

a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.

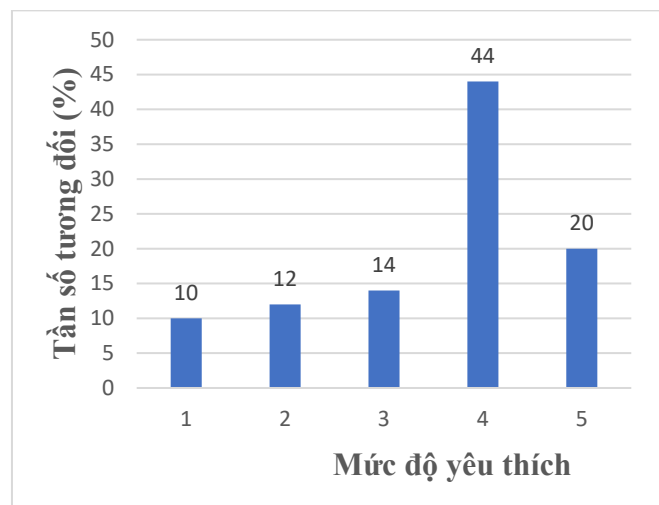
b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

Lời giải

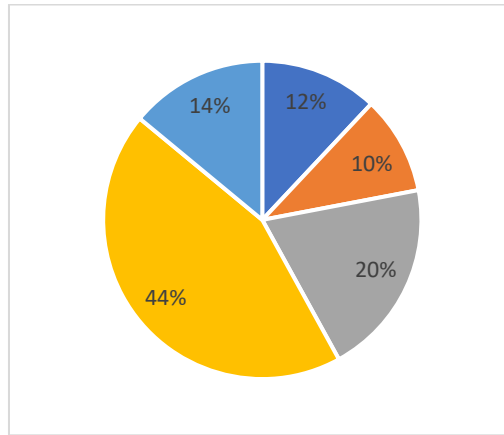
a) Ta có: $n = 50$. Bảng tần số - tần số tương đối.

Mức độ yêu thích	1	2	3	4	5
Tần số	5	6	7	22	10
Tần số tương đối	10%	12%	14%	44%	20%

b) Biểu đồ (xem hình vẽ)



Nhận xét: Ta có thể vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ hình quạt tròn của mẫu số liệu trên. Xem hình vẽ.



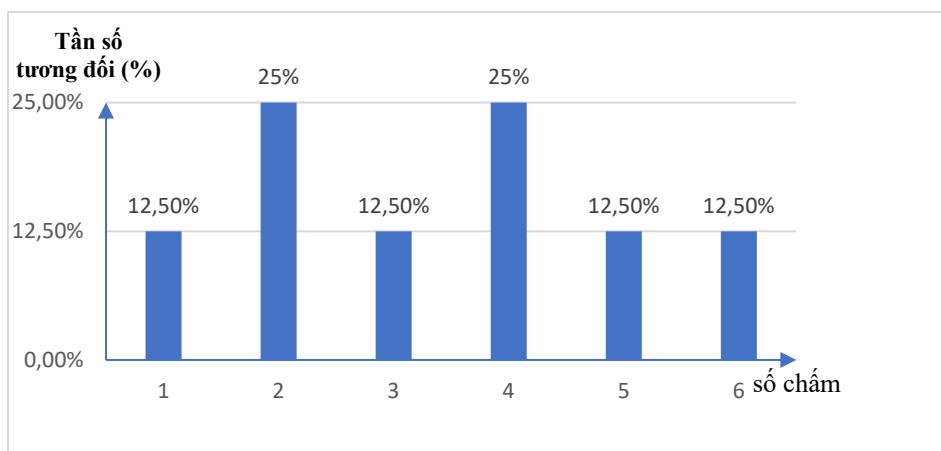
Ví dụ 2. Gieo một xúc xắc 32 lần liên tiếp, ghi lại số chấm trên mặt xuất hiện của xúc xắc, ta được mẫu số liệu thống kê như sau:

Lời giải

a) Ta có: $n = 32$. Bảng tần số - tần số tương đối.

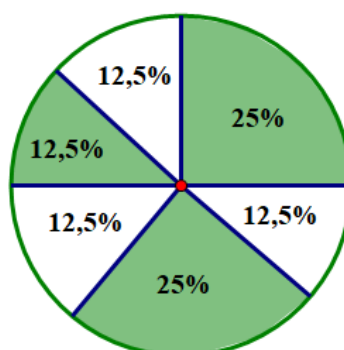
Số chấm	1	2	3	4	5	6
Tần số	4	8	4	8	4	4
Tần số tương đối	12,5%	25%	12,5%	25%	12,5%	12,5%

b) Biểu đồ cột.



Biểu đồ hình quạt tròn.

Hướng dẫn: Vẽ đường tròn, 12,5% ứng với hình quạt có góc ở tâm là 45° ; 25% ứng với hình quạt có góc ở tâm là 90° (Xem hình vẽ).



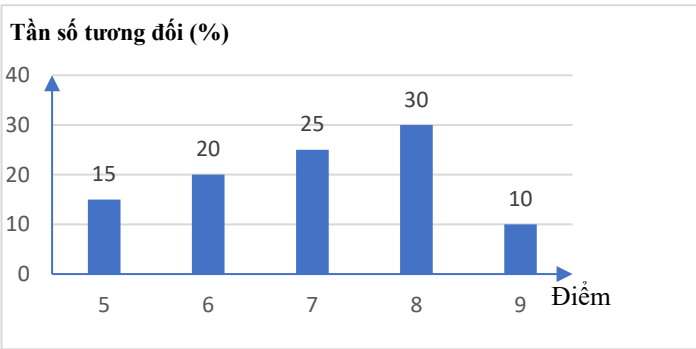
Ví dụ 3. Thống kê điểm kiểm tra môn Toán của 40 học sinh lớp 9C (Xem Ví dụ 5 – Bài 22 . Bảng tần số và biểu đồ tần số). Vẽ biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn các số liệu thống kê đó.

Lời giải

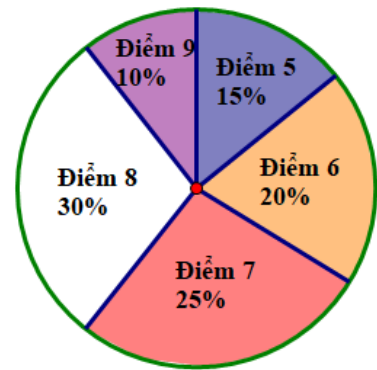
Bảng tần số - tần số tương đối.

Điểm	5	6	7	8	9
Tần số	6	8	10	12	4
Tần số tương đối	15%	20%	25%	30%	10%

Biểu đồ cột:



Biểu đồ hình quạt tròn:



Ví dụ 4. Câu lạc bộ mỹ thuật của nhà văn hoá thiếu nhi thống kê tuổi của các thành viên lớp hội hoạ và biểu diễn dữ liệu qua bảng sau:

Tuổi của các thành viên lớp hội hoạ

Tuổi	9	10	11	12	13	14	Tổng
Tần số	10	4	6	2	12	6	$N = 40$

- a) Tính tần số tương đối của mỗi giá trị và lập bảng tần số tương đối.
- b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn.

Lời giải

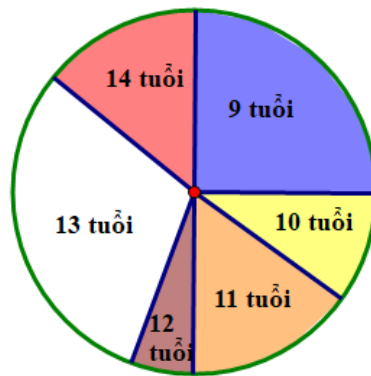
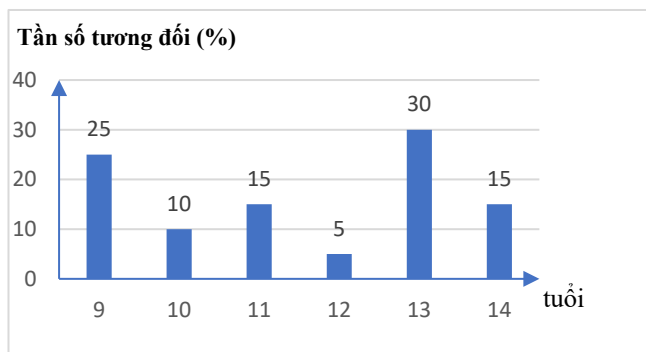
a) Bảng tần số - tần số tương đối.

Tuổi	9	10	11	12	13	14	Tổng
Tần số	10	4	6	2	12	6	$N = 40$
Tần số tương đối	25	10	15	5	30	15	100

b) Xem hình vẽ

Biểu đồ cột:

Biểu đồ tròn:



C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

7.6. Lớp 9A có 40 bạn, trong đó 20 bạn mặc áo cỡ M, 13 bạn mặc áo cỡ S, 7 bạn mặc áo cỡ L. Hãy lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu này.

Lời giải

Tổng số bạn là $n = 40$. Số bạn mặc áo cỡ S, cỡ M, cỡ L tương ứng là $m_1 = 13, m_2 = 20, m_3 = 7$. Do đó các tần số tương đối cho các cỡ S, M, L lần lượt là:

$$f_1 = \frac{13}{40} \cdot 100\% = 32,5\%; f_2 = \frac{20}{40} \cdot 100\% = 50\%; f_3 = \frac{7}{40} \cdot 100\% = 17,5\%.$$

Ta có bảng tần số tương đối như sau:

Cỡ áo	S	M	L
Tần số tương đối	32,5%	50%	17,5%.

7.7. Biểu đồ tranh sau đây biểu diễn số lượng học sinh lớp 9 B bình chọn phần mềm học trực tuyến được yêu thích nhất:

Skype	👤👤👤
Zoom	👤👤👤👤👤👤👤👤👤👤👤
Google Meet	👤👤👤👤👤👤

(Mỗi 👤 biểu diễn cho 2 học sinh)

Lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu được biểu diễn trong biểu đồ tranh trên.

Lời giải

Tổng số học sinh lớp 9B là $n = (3 + 11 + 6) \cdot 2 = 40$.

Số học sinh bình chọn phần mềm Skype, Zoom, Google Meet tương ứng là $m_1 = 6; m_2 = 22; m_3 = 12$.

Do đó các tần số tương đối cho các phần mềm Skype, Zoom, Google Meet lần lượt là:

$$f_1 = \frac{6}{40} \cdot 100\% = 15\%; f_2 = \frac{22}{40} \cdot 100\% = 55\%; f_3 = \frac{12}{40} \cdot 100\% = 30\%.$$

Ta có bảng tần số tương đối như sau:

Phần mềm học trực tuyến	Skype	Zoom	Google Meet
-------------------------	-------	------	-------------

Tần số tương đối	15%	55%	30%
-------------------------	-----	-----	-----

7.8. Quay 150 lần một tấm bìa hình tròn được chia thành bốn hình quạt với các màu xanh, đỏ, tím, vàng. Quan sát mũi tên chỉ vào hình quạt màu gì và ghi lại, thu được kết quả sau:

Màu	Xanh	Đỏ	Tím	Vàng
Số lần	60	30	40	20

- a) Lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu trên.
- b) Ước lượng các xác suất mũi tên chỉ vào hình quạt màu xanh, màu vàng.
- c) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a.

Lời giải

a) Tổng số lần quay là $n = 150$. Số lần quay vào hình quạt màu xanh, đỏ, tím, vàng tương ứng là $m_1 = 60; m_2 = 30; m_3 = 40, m_4 = 20$. Do đó các tần số tương đối cho các hình quạt màu xanh, đỏ, tím,

vàng lần lượt là: $f_1 = \frac{60}{150} \cdot 100\% = 40\%; f_2 = \frac{30}{150} \cdot 100\% = 20\%;$

$f_3 = \frac{40}{150} \cdot 100\% \approx 26,67\%; f_4 = \frac{20}{150} \cdot 100\% \approx 13,33\%.$

Ta có bảng tần số tương đối như sau:

Màu hình quạt	Xanh	Đỏ	Tím	Vàng
Tần số tương đối	40%	20%	26,67%	13,33%

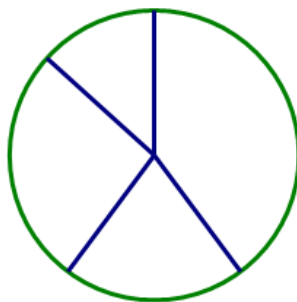
b) Xác suất mũi tên chỉ vào hình quạt màu xanh là $\frac{60}{150} = \frac{2}{5}$.

Xác suất mũi tên chỉ vào hình quạt màu vàng là $\frac{20}{150} = \frac{2}{15}$.

c) Bước 1. Xác định số đo cung tương ứng của các hình quạt biểu diễn các tần số tương đối cho mỗi màu của hình quạt: Xanh: $360^\circ \cdot 40\% = 144^\circ$; Đỏ: $360^\circ \cdot 20\% = 72^\circ$; Tím: $360^\circ \cdot 26,67\% = 96,012^\circ \approx 96^\circ$;

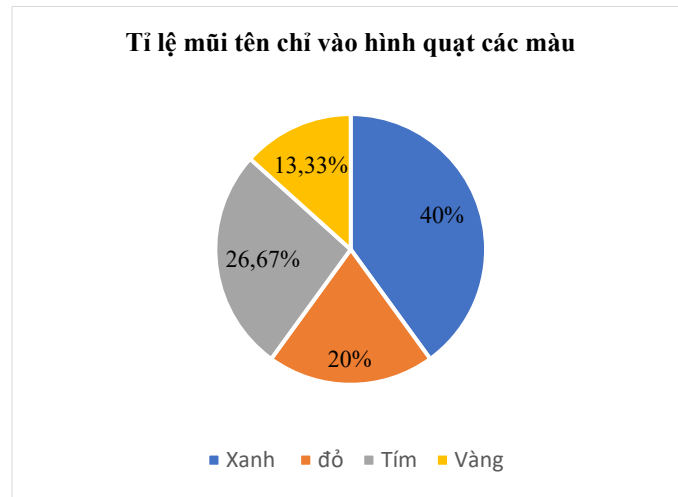
Vàng: $360^\circ \cdot 13,33\% = 47,988^\circ \approx 48^\circ$.

Bước 2. Vẽ hình tròn và chia hình tròn thành các hình quạt (Hình a).



Hình a

Bước 3. Định dạng các hình quạt tròn, ghi tỉ lệ phần trăm, chú giải và tiêu đề.



7.9. Theo Tổng cục Thống kê, vào năm 2021 trong số 50,5 triệu lao động Việt Nam từ 15 tuổi trở lên có 13,9 triệu lao động đang làm việc trong lĩnh vực nông nghiệp, lâm nghiệp và thủy sản; 16,9 triệu lao động đang làm việc trong lĩnh vực công nghiệp và xây dựng; 19,7 triệu lao động đang làm việc trong lĩnh vực dịch vụ.

- Lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu trên.
- Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a.
- Tính tỉ lệ lao động không làm việc trong lĩnh vực nông nghiệp, lâm nghiệp và thủy sản.

Lời giải

a) Tổng số triệu người lao động là $n = 50,5$. Số triệu người lao động làm việc trong lĩnh vực nông nghiệp, lâm nghiệp và thủy sản; công nghiệp và xây dựng; dịch vụ tương ứng là $m_1 = 13,9$; $m_2 = 16,9$; $m_3 = 19,7$. Do đó các tần số tương đối cho các lĩnh vực nông nghiệp, lâm nghiệp và thủy sản; công nghiệp và xây dựng; dịch vụ lần lượt là:

$$f_1 = \frac{13,9}{50,5} \cdot 100\% \approx 27,52\%; f_2 = \frac{16,9}{50,5} \cdot 100\% \approx 33,47\%; f_3 = \frac{19,7}{50,5} \cdot 100\% \approx 39,01\%$$

Ta có bảng tần số tương đối như sau:

Lĩnh vực	Nông nghiệp, lâm nghiệp và thủy sản	Công nghiệp và xây dựng	Dịch vụ
Tần số tương đối	27,52%	33,47%	39,01%

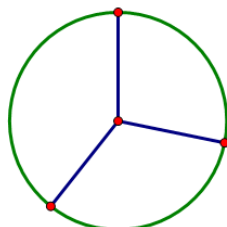
b) Bước 1. Xác định số đo cung tương ứng của các hình quạt biểu diễn các tần số tương đối cho mỗi lĩnh vực:

Nông nghiệp, lâm nghiệp và thủy sản: $360^\circ \cdot 27,52\% = 99,072^\circ \approx 99,1^\circ$;

Công nghiệp và xây dựng: $360^\circ \cdot 33,47\% = 120,492^\circ \approx 120,5^\circ$;

Dịch vụ: $360^\circ \cdot 39,01\% = 140,436^\circ \approx 140,4^\circ$.

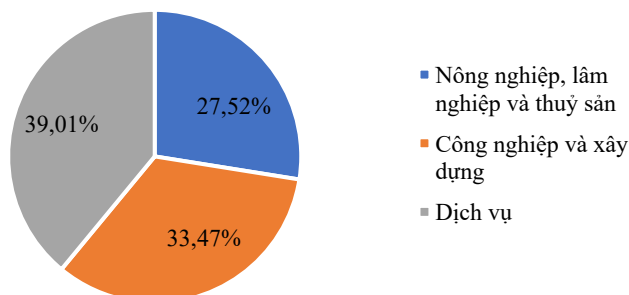
Bước 2. Vẽ hình tròn và chia hình tròn thành các hình quạt (Hình a).



Hình a

Bước 3. Định dạng các hình quạt tròn, ghi tỉ lệ phần trăm, chú giải và tiêu đề (Hình b).

Tỉ lệ lao động trong các lĩnh vực



c) Tỉ lệ lao động không làm việc trong lĩnh vực nông nghiệp, lâm nghiệp và thủy sản là:

$$100\% - 27,52\% = 72,48\%$$

7.10. Bảng thống kê sau cho biết tỉ lệ tăng trưởng GDP năm 2022 theo khu vực kinh tế.

Khu vực kinh tế	Nông nghiệp, lâm nghiệp và thủy sản	Công nghiệp và xây dựng	Dịch vụ
Mức tăng trưởng	3,36%	7,78%	9,99%

(Theo Tổng cục Thống kê)

a) Bảng thống kê trên có là bảng tần số tương đối hay không?

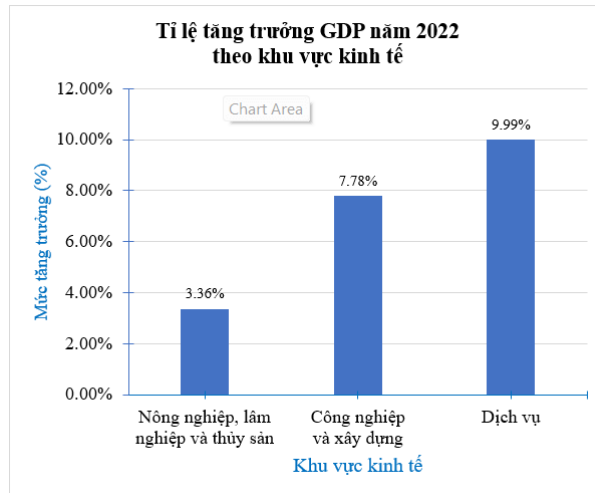
b) Lựa chọn loại biểu đồ thích hợp và biểu diễn bảng thống kê trên bằng loại biểu đồ đó.

Lời giải

a) Ta có $3,36\% + 7,78\% + 9,99\% = 21,13\% \neq 100\%$ nên bảng thống kê trên không là bảng tần số tương đối.

b) Loại biểu đồ thích hợp biểu diễn bảng thống kê trên là biểu đồ cột.

Ta vẽ biểu đồ cột biểu diễn bảng thống kê trên như sau:



D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Bảng sau cho biết kết quả khảo sát về hoạt động được yêu thích nhất trong kì nghỉ hè của học sinh khối lớp 9:

Hoạt động	Thể thao	Nghệ thuật	Du lịch	Khác
Số bạn bình chọn	80	50	30	40

Lập bảng tần số tương đối và vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được.

Lời giải

Tổng số học sinh bình chọn là $n = 80 + 50 + 30 + 40 = 200$.

Tỉ lệ bình chọn cho mỗi hoạt động là:

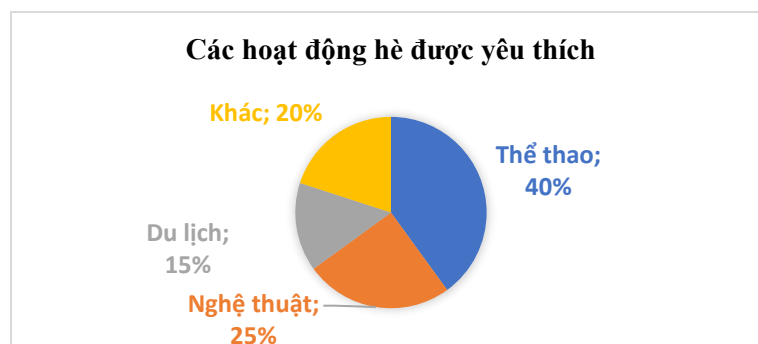
Thể thao: $\frac{80}{200} \cdot 100\% = 40\%$; Nghệ thuật: $\frac{50}{200} \cdot 100\% = 25\%$;

Du lịch: $\frac{30}{200} \cdot 100\% = 15\%$; Khác: $\frac{40}{200} \cdot 100\% = 20\%$.

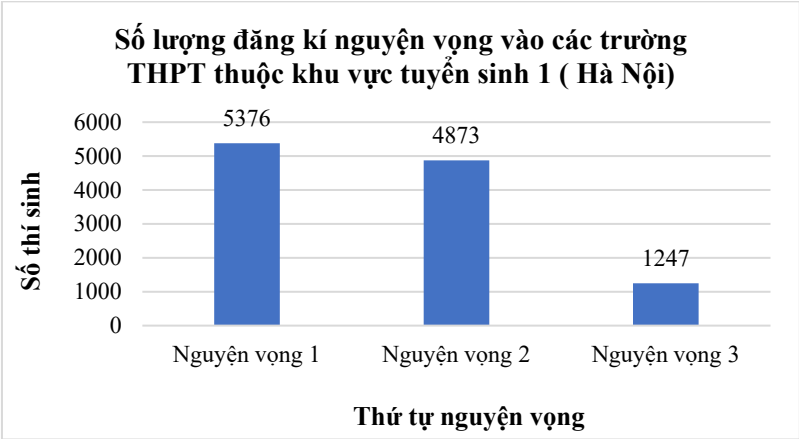
Bảng tần số tương đối:

Hoạt động	Thể thao	Nghệ thuật	Du lịch	Khác
Tần số tương đối	40%	25%	15%	20%

Biểu đồ hình quạt tròn:



Câu 2: Biểu đồ dưới đây cho biết số lượng thí sinh đăng kí dự tuyển sinh vào lớp 10 năm 2023 tại khu vực tuyển sinh 1 của thành phố Hà Nội (gồm các trường Trung học phổ thông trên địa bàn các quận Ba Đình và Tây Hồ).



(Theo Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội)

Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

Lời giải

Bảng tần số:

Nguyên vọng	1	2	3
Tần số	5376	4873	1247

Tổng số nguyện vọng là $n = 5376 + 4873 + 1247 = 11496$.

Tỉ lệ nguyện vọng 1: $\frac{5376}{11496} \cdot 100\% \approx 46,8\%$; tỉ lệ nguyện vọng 2 : $\frac{4873}{11496} \cdot 100\% \approx 42,4\%$;

tỉ lệ nguyện vọng 3: $\frac{1247}{11496} \cdot 100\% \approx 10,8\%$.

Bảng tần số tương đối:

Nguyên vọng	1	2	3
Tần số tương đối	46,8%	42,4%	10,8%

Câu 3. Một xạ thủ bắn 50 lần vào bia và ghi lại điểm của 50 lần bắn như sau:

Điểm	10	9	8	7
Tần số	15	25	7	3

- a) Lập bảng tần số tương đối cho kết quả thu được.
- b) Ước lượng cho xác suất xạ thủ được điểm lớn hơn hoặc bằng 9 khi bắn vào bia.

Lời giải

a) Tổng số lần bắn là $n = 15 + 25 + 7 + 3 = 50$. Tần số tương đối của các điểm số 10,9,8,7 lần lượt là

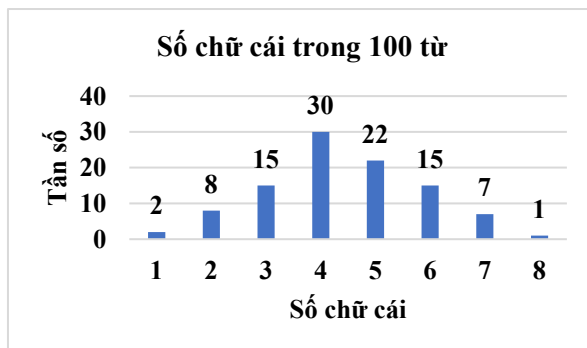
$$\frac{15}{50} \cdot 100\% = 30\%; \frac{25}{50} \cdot 100\% = 50\%; \frac{7}{50} \cdot 100\% = 14\%; \frac{3}{50} \cdot 100\% = 6\%.$$

Ta có bảng tần số tương đối:

Điểm	10	9	8	7
Tần số tương đối	30%	50%	14%	6%

b) Ước lượng cho xác suất xạ thủ được điểm lớn hơn hoặc bằng 9 là: $30\% + 50\% = 80\%$.

Câu 4. Bạn Giang chọn một đoạn văn gồm 100 từ và đếm số chữ cái trong mỗi từ của đoạn văn này cho kết quả như trong biểu đồ sau:



a) Lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

b) Tìm ước lượng cho xác suất một từ có nhiều hơn 5 chữ cái.

Lời giải

a) Bảng tần số tương đối

Số chữ cái	1	2	3	4	5	6	7	8
Tần số tương đối	2%	8%	15%	30%	22%	15%	7%	1%

b) 23%

Câu 5. Kết quả bình chọn của khán giả cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất giải bóng đá học sinh trường Trung học cơ sở Chu Văn An năm học vừa qua đối với năm cầu thủ được ban tổ chức đề cử như sau:

Cầu thủ	An	Tân	Việt	Bình	Lê
Số lượng bình chọn	55	135	100	70	40

a) Lập bảng tần số tương đối cho bảng dữ liệu trên.

b) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a.

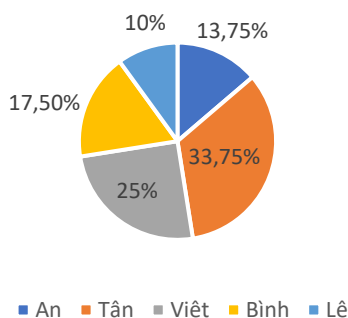
Lời giải

a) Tổng số bình chọn là $n = 400$. Các tần số tương đối của An,..., Lê lần lượt là

$$\frac{55}{400} \cdot 100\% = 13,75\%; \dots; \frac{40}{400} \cdot 100\% = 10\%. \text{ Từ đó lập bảng tần số tương đối.}$$

b) Biểu đồ hình quạt tròn:

Kết quả bình chọn cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất



Câu 6. Bảng sau là kết quả đánh giá của khách hàng về chất lượng phục vụ của một lái xe công nghệ, mỗi gạch biểu diễn một lần đánh giá:

★★	
★★★	
★★★★	
★★★★★	

a) Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối cho dữ liệu trên.

b) Ước lượng cho xác suất một khách hàng đánh giá ở mức từ ba sao trở xuống.

Lời giải

a) Bảng tần số

Mức đánh giá	★★	★★★	★★★★	★★★★★
Tần số	8	9	17	6

Tổng số đánh giá là $n = 8 + 9 + 17 + 6 = 40$. Các tần số tương đối lần lượt là:

$$\frac{8}{40} \cdot 100\% = 20\%; \quad \frac{9}{40} \cdot 100\% = 22,5\%; \quad \frac{17}{40} \cdot 100\% = 42,5\%; \quad \frac{6}{40} \cdot 100\% = 15\%$$

Bảng tần số tương đối:

Mức đánh giá	★★	★★★	★★★★	★★★★★
Tần số tương đối	20%	22,5%	42,5%	15%

b) Ước lượng cho xác suất một khách hàng đánh giá ở mức từ ba sao trở xuống là $22,5\% + 20\% = 42,5\%$.

Câu 7. Bảng tần số tương đối sau cho biết kết quả tập luyện của một vận động viên bắn súng:

Điểm	7	8	9	10
Tần số tương đối	5%	15%	55%	$x\%$

a) Xác định giá trị của x .

b) Ước lượng xác suất bắn trúng vòng 9 điểm hoặc vòng 10 điểm của vận động viên này.

c) Biết rằng vận động viên đã bắn 200 viên đạn trong quá trình luyện tập. Tính số lần bắn trúng vòng 9 điểm

hoặc vòng 10 điểm của vận động viên này.

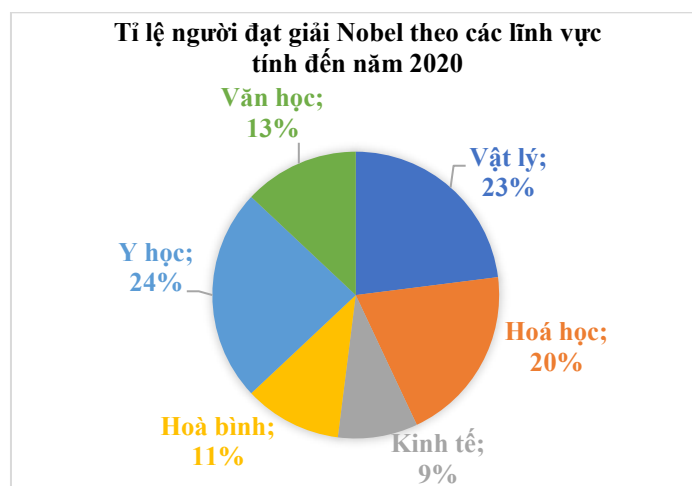
Lời giải

a) $x = 25$.

b) 80%.

c) 160 lần bắn trúng vòng 9 điểm hoặc 10 điểm.

Câu 8. Cho biểu đồ hình quạt tròn sau:



a) Giải thích các số liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

b) Lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

Lời giải

a) Trong số những người đạt giải Nobel tính đến năm 2020, số người đạt giải Nobel về Vật lý, Hoá học, Kinh tế, Hoà bình, Y học, Văn học chiếm các tỉ lệ tương ứng là 23%, 20%, 9%, 11%, 24%, 13%.

b) Bảng tần số tương đối:

Lĩnh vực	Vật lý	Hóa học	Kinh tế	Hoà bình	Y học	Văn học
Tần số tương đối	23%	20%	9%	11%	24%	13%

Câu 9. Cho bảng thống kê sau về số lượng học sinh tại một trường tham gia các câu lạc bộ (CLB):

	CLB tiếng Anh	CLB Toán	CLB Khoa học	Tổng
Nam	40	60	50	150
Nữ	70	30	65	165
Tổng	110	90	115	315

a) Lập các bảng tần số tương đối biểu diễn tỉ lệ học sinh nam, nữ tham gia các câu lạc bộ.

b) Vẽ các biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn các bảng tần số tương đối thu được ở câu a.

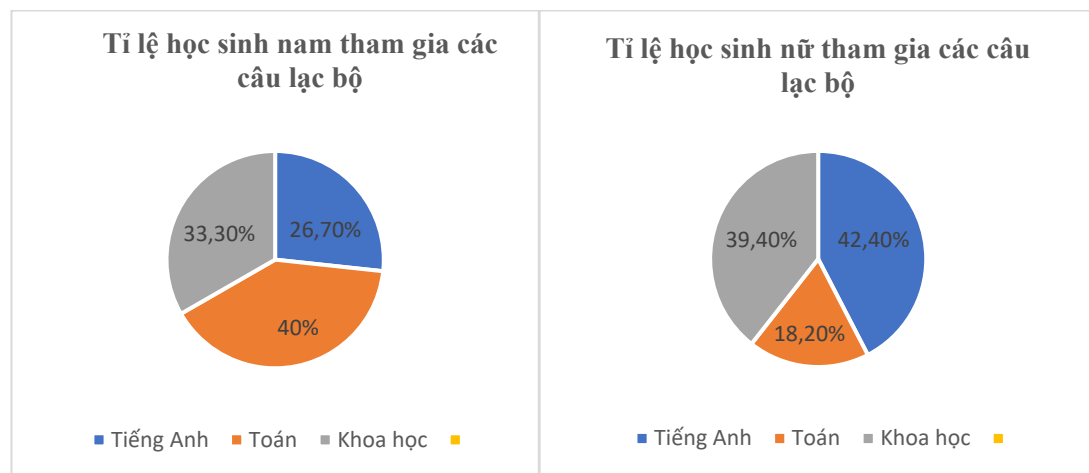
Lời giải

a) Lập hai bảng tần số tương đối. Với học sinh nam, các tần số tương đối biểu diễn tỉ lệ tham gia CLB tiếng Anh, Toán, Khoa học lần lượt là $\frac{40}{150} \cdot 100\% \approx 26,7\%$; $\frac{60}{150} \cdot 100\% = 40\%$; $\frac{50}{150} \cdot 100\% \approx 33,3\%$.

Với học sinh nữ, các tần số tương đối biểu diễn tỉ lệ tham gia CLB tiếng Anh, Toán, Khoa học lần lượt là:

$$\frac{70}{165} \cdot 100\% \approx 42,4\%; \frac{30}{165} \cdot 100\% \approx 18,2\%; \frac{65}{165} \cdot 100\% \approx 39,4\%$$

b) Các biểu đồ hình quạt tròn



Câu 10. Với số liệu cho trong bài tập 7.15, hãy:

a) Lập bảng tần số tương đối cho tỉ lệ học sinh tham gia các câu lạc bộ.

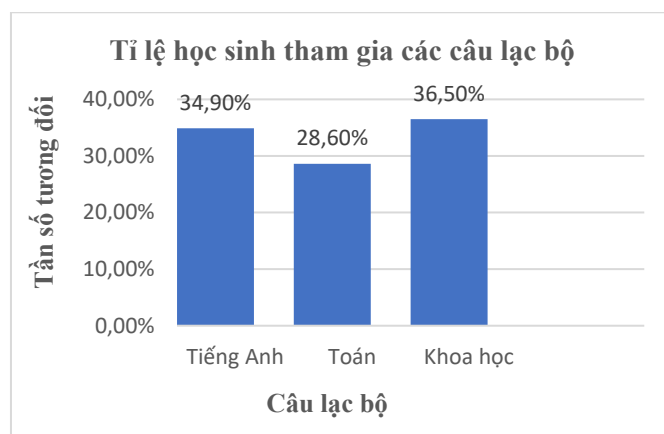
b) Vẽ biểu đồ cột biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a.

Lời giải

a) Các tần số tương đối biểu diễn tỉ lệ học sinh tham gia CLB tiếng Anh, Toán, Khoa học lần lượt là:

$$\frac{110}{315} \cdot 100\% \approx 34,9\%; \frac{90}{315} \cdot 100\% \approx 28,6\%; \frac{115}{315} \cdot 100\% \approx 36,5\%.$$

b) Biểu đồ cột:



LUYỆN TẬP CHUNG

PHẦN 1. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

A. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1 Một vận động viên bắn 30 viên đạn vào bia với các điểm số thu được như sau:

10,8,9,9,10,9,9,9,8,7,10,10,9,8,7,10,9,8,7,9,9,9,10,9,10,8,9,8,8,10

- Lập bảng tần số và tần số tương đối cho dãy dữ liệu trên.
- Vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng cho bảng tần số thu được ở câu a.

Lời giải

a) Số lần vận động viên được 10,9,8,7 điểm tương ứng là 8,12,7,3. Ta có bảng tần số sau:

Điểm	10	9	8	7
Tần số	8	12	7	3

Tổng số lần bắn là $n = 30$.

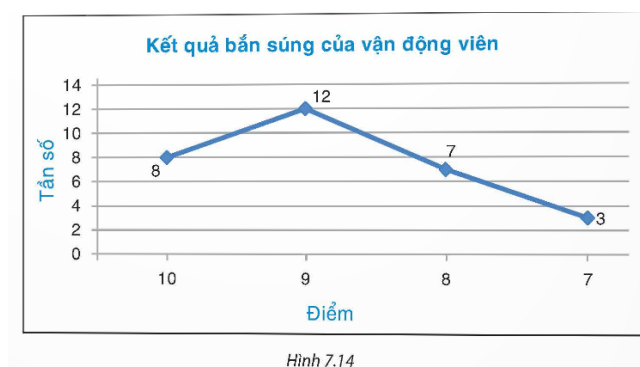
Tỉ lệ được 10,9,8,7 điểm tương ứng là

$$\frac{8}{30} \cdot 100\% \approx 26,7\%; \frac{12}{30} \cdot 100\% = 40\%; \frac{7}{30} \cdot 100\% \approx 23,3\%; \frac{3}{30} \cdot 100\% = 10\%.$$

Ta có bảng tần số tương đối sau:

Điểm	10	9	8	7
Tần số tương đối	26,7%	40%	23,3%	10%

b) Vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng (H.7.14).



Ví dụ 2 Bảng thống kê sau cho biết số lượt mượn các loại sách trong một tuần tại thư viện của một trường Trung học cơ sở.

Loại sách	Sách giáo khoa	Sách tham khảo	Truyện ngắn	Tiểu thuyết
Số lượt	20	80	70	30

- Lập bảng tần số tương đối cho bảng thống kê trên.
- Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a.

Lời giải

a) Tổng số lượt mượn sách là $20 + 80 + 70 + 30 = 200$.

Tỉ lệ lượt mượn sách giáo khoa, sách tham khảo, truyện ngắn, tiểu thuyết tương ứng là

$$\frac{20}{200} \cdot 100\% = 10\%; \frac{80}{200} \cdot 100\% = 40\%; \frac{70}{200} \cdot 100\% = 35\%; \frac{30}{200} \cdot 100\% = 15\%.$$

Ta có bảng tần số tương đối như sau:

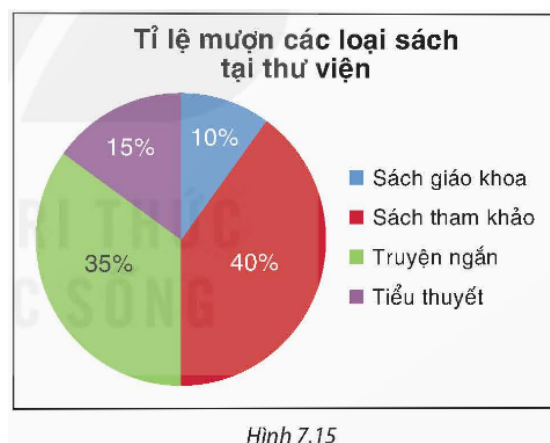
Loại sách	Sách giáo khoa	Sách tham khảo	Truyện ngắn	Tiểu thuyết
Tần số tương đối	10%	40%	35%	15%

b) Số đo cung tương ứng của các hình quạt biểu diễn tỉ lệ các loại sách được mượn là:

Sách giáo khoa: $360^\circ \cdot 10\% = 36^\circ$; Sách tham khảo: $360^\circ \cdot 40\% = 144^\circ$;

Truyện ngắn: $360^\circ \cdot 35\% = 126^\circ$; Tiểu thuyết: $360^\circ \cdot 15\% = 54^\circ$.

Biểu đồ hình quạt tròn như Hình 7.15.



B. BÀI TẬP

7.11. Bảng thống kê sau cho biết số lượng học sinh của lớp 9B theo mức độ cạnh thi.

Mức độ	Không cạnh thi	Cạnh thi nhẹ	Cạnh thi vừa	Cạnh thi nặng
Số học sinh	10	13	12	5

a) Lập bảng tần số tương đối cho bảng thống kê trên.

b) Đa số học sinh của lớp 9B cạnh thi hay không cạnh thi?

Lời giải

a) Tổng số học sinh là $n = 10 + 13 + 12 + 5 = 40$.

Số học sinh không cạnh thi, cạnh thi nhẹ, cạnh thi vừa, cạnh thi nặng tương ứng là

$m_1 = 10; m_2 = 13; m_3 = 12, m_4 = 5$. Do đó các tần số tương đối cho các mức độ không cạnh thi, cạnh thi nhẹ, cạnh thi vừa, cạnh thi nặng lần lượt là:

$f_1 = \frac{10}{40} \cdot 100\% = 25\%; f_2 = \frac{13}{40} \cdot 100\% = 32,5\%; f_3 = \frac{12}{40} \cdot 100\% = 30\%; f_4 = \frac{5}{40} \cdot 100\% = 12,5\%$

Ta có bảng tần số tương đối như sau:

Mức độ	Không cận thị	Cận thị nhẹ	Cận thị vừa	Cận thị nặng
Tần số tương đối	25%	32,5%	30%	12,5%

b) Tỷ lệ học sinh lớp 9B bị cận thị là: $100\% - 25\% = 75\%$.

Do $75\% > 25\%$ nên đa số học sinh của lớp 9B cận thị.

7.12. Tỷ lệ bình chọn các tiết mục văn nghệ của các lớp 9A, 9B, 9C, 9D tham gia hội diễn văn nghệ khối lớp 9 như sau:

Lớp	9 A	9 B	9 C	9 D
Tỷ lệ học sinh bình chọn	35%	25%	30%	10%

Biết rằng có 300 học sinh tham gia bình chọn. Lập bảng tần số biểu diễn số học sinh bình chọn cho tiết mục văn nghệ của mỗi lớp.

Lời giải

Số học sinh lớp 9A là: $300 \cdot 35\% = 105$ (học sinh).

Số học sinh lớp 9B là: $300 \cdot 25\% = 75$ (học sinh).

Số học sinh lớp 9C là: $300 \cdot 30\% = 90$ (học sinh).

Số học sinh lớp 9D là: $300 \cdot 10\% = 30$ (học sinh).

Vậy ta có bảng tần số biểu diễn số học sinh bình chọn cho tiết mục văn nghệ của mỗi lớp như sau:

Lớp	9 A	9 B	9 C	9 D
Số học sinh bình chọn	105	75	90	30

7.13. Bạn Hoàng khảo sát ý kiến của các bạn trong tổ về chất lượng phục vụ của căng tin trường thu được kết quả sau:

A, B, C, B, A, A, B, A, B, A,

trong đó A là mức Tốt, B là mức Trung bình, C là mức Kém.

Hãy lập bảng tần số và bảng tần số tương đối biểu diễn kết quả bạn Hoàng thu được.

Lời giải

Số bạn bình chọn chất lượng phục vụ của căng tin trường mức Tốt, Trung bình, Kém tương ứng là 5 ; 4 ; 1. Ta có bảng tần số biểu diễn kết quả bạn Hoàng thu được như sau:

Chất lượng phục vụ	Tốt	Trung bình	Kém
--------------------	-----	------------	-----

Tần số	5	4	1
--------	---	---	---

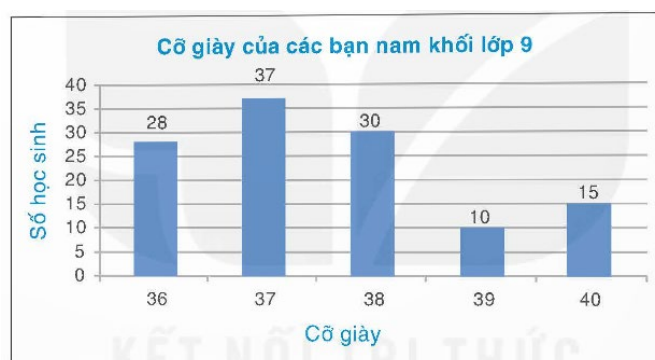
Tổng số bạn tham gia bình chọn là: $n = 5 + 4 + 1 = 10$.

Số học sinh bình chọn chất lượng phục vụ của căng tin trường mức Tốt, Trung bình, Kém tương ứng là $m_1 = 5; m_2 = 4; m_3 = 1$. Do đó các tần số tương đối cho các mức độ chất lượng phục vụ Tốt, Trung bình, Kém lần lượt là: $f_1 = \frac{5}{10} \cdot 100\% = 50\%; f_2 = \frac{4}{10} \cdot 100\% = 40\%; f_3 = \frac{1}{10} \cdot 100\% = 10\%$.

Ta có bảng tần số tương đối biểu diễn kết quả bạn Hoàng thu được như sau:

Chất lượng phục vụ	Tốt	Trung bình	Kém
Tần số tương đối	50%	40%	10%

7.14. Biểu đồ cột Hình 7.16 cho biết cỡ giày của các bạn nam khối lớp 9 trong trường.



Hình 7.16

Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

Lời giải

Từ biểu đồ cột Hình 7.16, ta có số bạn nam mang cỡ giày 36, 37, 38, 39, 40 tương ứng là: 28; 37; 30; 10; 15.

Ta có bảng tần số biểu diễn dữ liệu trên biểu đồ như sau:

Cỡ giày	36	37	38	39	40
Tần số	28	37	30	10	15

Tổng số bạn nam là: $n = 28 + 37 + 30 + 10 + 15 = 120$.

Số bạn nam mang cỡ giày 36, 37, 38, 39, 40 tương ứng là: $m_1 = 28; m_2 = 37; m_3 = 30; m_4 = 10; m_5 = 15$. Do đó các tần số tương đối cho các cỡ giày 36, 37, 38, 39, 40 lần lượt là:

$$f_1 = \frac{28}{120} \cdot 100\% \approx 23,33\%; f_2 = \frac{37}{120} \cdot 100\% \approx 30,83\%; f_3 = \frac{30}{120} \cdot 100\% = 25\%$$

$$f_4 = \frac{10}{120} \cdot 100\% \approx 8,34\%; f_5 = \frac{15}{120} \cdot 100\% = 12,5\%$$

Ta có bảng tần số tương đối biểu diễn dữ liệu trên biểu đồ như sau:

Cỡ giày	36	37	38	39	40
Tần số tương đối	23,33%	30,83%	25%	8,34%	12,5%

7.15. Cho bảng tần số sau:

Điểm thi môn Toán	6	7	8	9	10
Số học sinh	5	8	12	10	4

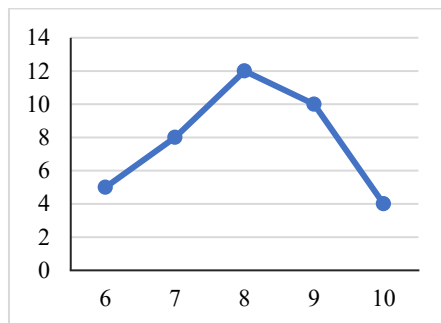
Vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng cho bảng tần số trên.

Lời giải

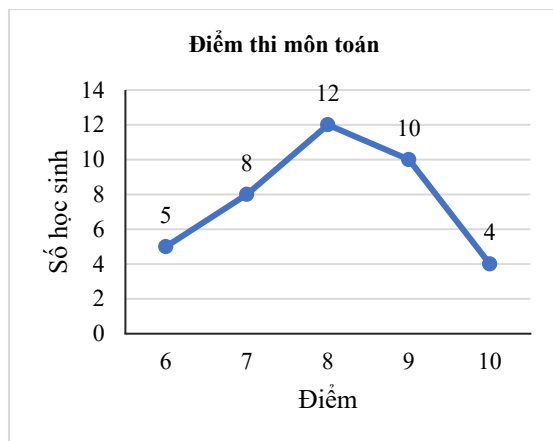
Vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng.

Bước 1. Vẽ các trục (Hình b).

Bước 2. Xác định các điểm và nối các điểm liên tiếp với nhau .



Bước 3. Ghi chú giải cho các trục, các điểm và tiêu đề của biểu đồ .



7.16. Theo dõi thời tiết tại một điểm du lịch trong 30 ngày người ta thu được bảng sau:

Thời tiết	Không mưa	Mưa nhỏ	Mưa to
Số ngày	10	8	12

a) Lập bảng tần số tương đối và vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được.

b) Ước lượng xác suất để một ngày trời có mưa ở điểm du lịch này.

Lời giải

a) Tổng số ngày là $n = 30$. Số ngày có thời tiết không mưa, mưa nhỏ, mưa to tương ứng là $m_1 = 10; m_2 = 8; m_3 = 12$. Do đó tần số tương đối cho thời tiết không mưa, mưa nhỏ, mưa to lần lượt là:

$$f_1 = \frac{10}{30} \cdot 100\% \approx 33,33\%; f_2 = \frac{8}{30} \cdot 100\% \approx 26,67\%; f_3 = \frac{12}{30} \cdot 100\% = 40\%.$$

Ta có bảng tần số tương đối biểu diễn dữ liệu trên như sau:

Thời tiết	Không mưa	Mưa nhỏ	Mưa to
Tần số tương đối	33,33%	26,67%	40%

- Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối trên như sau:

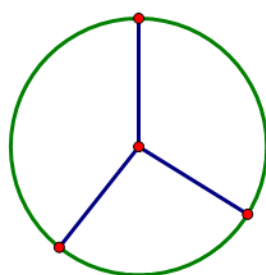
Bước 1. Xác định số đo cung tương ứng của các hình quạt biểu diễn các tần số tương đối cho mỗi loại thời tiết:

Không mưa: $360^\circ \cdot 33,33\% = 119,988^\circ \approx 120^\circ$;

Mưa nhỏ: $360^\circ \cdot 26,67\% = 96,012^\circ \approx 96^\circ$;

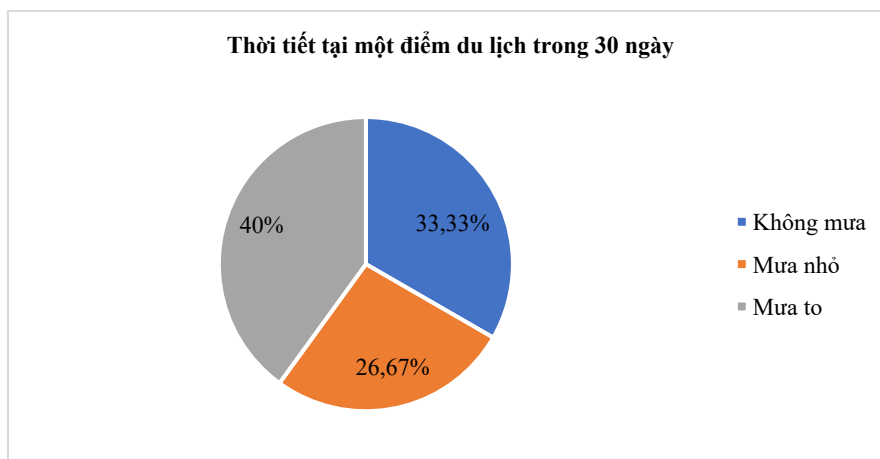
Mưa to: $360^\circ \cdot 40\% = 144^\circ$.

Bước 2. Vẽ hình tròn và chia hình tròn thành các hình quạt (Hình a).



Hình a

Bước 3. Định dạng các hình quạt tròn, ghi tỉ lệ phần trăm, chú giải và tiêu đề.



b) Xác suất để một ngày trời có mưa ở địa điểm du lịch này là: $\frac{8+12}{30} = \frac{2}{3}$.

PHẦN 2. BÀI TẬP THÊM

Bài 1. Thống kê khối lượng rau thu hoạch một vụ (đơn vị: tạ) của mỗi hộ gia đình trong 38 hộ gia đình tham gia chương trình trồng rau theo tiêu chuẩn VIETGAP như sau:

5 5 6 6 6 7 4 4 5 5 7 8 8
9 4 5 7 4 10 7 7 7 6 6 5 7
8 9 8 8 9 9 9 8 7 5 10 8

- Trong 38 số liệu thống kê ở trên có bao nhiêu giá trị khác nhau?
- Tìm tần số của mỗi giá trị đó.
- Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê trên.

Giải

- Trong 38 số liệu thống kê ở trên có 7 giá trị khác nhau là:

$$x_1 = 4; x_2 = 5; x_3 = 6; x_4 = 7; x_5 = 8; x_6 = 9; x_7 = 10$$

- Tần số của giá trị $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ lần lượt là:

$$n_1 = 4; n_2 = 7; n_3 = 5; n_4 = 8; n_5 = 7; n_6 = 5; n_7 = 2$$

- Bảng tần số của mẫu số liệu thống kê trên như Bảng 19 sau:

Số tạ (x)	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số (n)	4	7	5	8	7	5	2	$N = 38$

Bảng 19

Bài 2. Tuổi nghề (đơn vị: năm) của 32 giáo viên ở một trường trung học cơ sở được ghi lại như sau:

7 7 10 3 4 4 9 3 3 7 7 10 9 7 10 4
12 4 3 12 9 12 9 10 7 7 12 9 7 10 10 4

- Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó.
- Vẽ biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

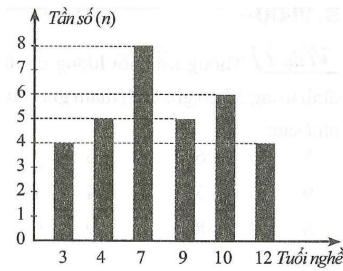
Giải

- Bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó như Bảng 20 sau:

Tuổi nghề (x)	3	4	7	9	10	12	Cộng
Tần số (n)	4	5	8	5	6	4	$N = 32$

Bảng 20

- Biểu đồ tần số của mẫu số liệu thống kê đó như Hình 12.



Hình 12

Bài 3. Trong bài thơ "Quê hương" của tác giả Đỗ Trung Quân có hai câu thơ:

"Quê hương nếu ai không nhớ
Sẽ không lớn nổi thành người".

Mẫu dữ liệu thống kê các chữ cái H; N; G; L lần lượt xuất hiện trong hai câu thơ trên là: H; N; G; N; H; N; G; N; H; H; N; G; L; N; N; H; N; H; N; G. Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.

Giải

Mẫu dữ liệu thống kê đó có 20 dữ liệu ($N = 20$) và có 4 giá trị khác nhau là H; N;

G; L. Các giá trị H; N; G; L lần lượt có tần số, tần số tương đối là:

$$n_1 = 6; n_2 = 9; n_3 = 4; n_4 = 1;$$

$$f_1 = \frac{6 \cdot 100}{20} \% = 30\%; f_2 = \frac{9 \cdot 100}{20} \% = 45\%;$$

$$f_3 = \frac{4 \cdot 100}{20} \% = 20\%; f_4 = \frac{1 \cdot 100}{20} \% = 5\%.$$

Bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó như Bảng 21 sau:

Chữ cái (x)	H	N	G	L	Cộng
Tần số tương đối (%)	30	45	20	5	100

Bảng 21

Bài 4. Một công ty nông sản xuất khẩu 4 mặt hàng chủ lực là Chè (C), Hạt điều (Đ), Hạt tiêu (T), Sắn (S). 40 container hàng xuất khẩu của công ty được thông quan qua cửa khẩu quốc tế Móng Cái vào tháng 5 năm 2023 như sau:

C C C Đ Đ Đ Đ C C C T T S S S C C C Đ T
T T S Đ Đ C S S S C T T Đ D T T T C C T

a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

Giải

a) Mẫu dữ liệu thống kê đó có 40 dữ liệu ($N = 40$) và có 4 giá trị khác nhau là C, D, T, S.

Các giá trị C, D, T, S lần lượt có tần số, tần số tương đối là:

$$n_1 = 13; n_2 = 9; n_3 = 11; n_4 = 7$$

$$f_1 = \frac{13 \cdot 100}{40} \% = 32,5\%; f_2 = \frac{9 \cdot 100}{40} \% = 22,5\%$$

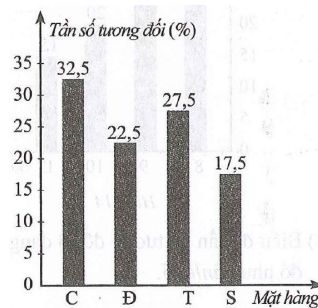
$$f_3 = \frac{11 \cdot 100}{40} \% = 27,5\%; f_4 = \frac{7 \cdot 100}{40} \% = 17,5\%$$

Bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó như Bảng 22 sau:

Mặt hàng (x)	C	D	T	S	Cộng
Tần số tương đối (%)	32,5	22,5	27,5	17,5	100

Bảng 22

b) Biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó như Hình 13.



Hình 13

Bài 5. Một trường trung học cơ sở thống kê số giờ (trung bình) chơi thể thao trong một tuần của 420 học sinh. Kết quả mẫu số liệu thống kê đó được cho ở bảng tần số sau (Bảng 23):

Số giờ chơi thể thao (x)	8	9	10	12	Cộng
Tần số (n)	147	126	84	63	$N = 420$

Bảng 23

- Lập bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê đó.
- Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.
- Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ hình quạt tròn của mẫu số liệu thống kê đó.

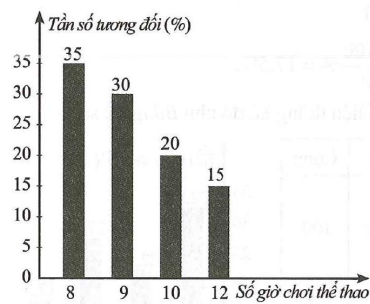
Giải

a) Bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê đó như Bảng 24 sau:

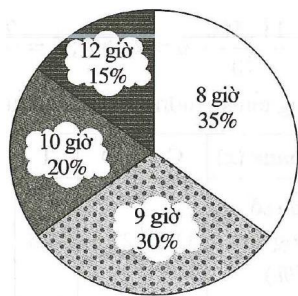
Số giờ chơi thể thao (x)	8	9	10	12	Cộng
Tần số tương đối (%)	35	30	20	15	100

Bảng 24

b) Biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó như Hình 14.



Hình 14



Hình 15

c) Biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ hình quạt tròn của mẫu số liệu thống kê đó như Hình 15 .

Bài 6. Điều tra phương tiện đi lại thích nhất của hai đối tượng người lớn và thiếu niên, ta có bảng sau:

Đối tượng	Xe đạp	Ô tô	Xe buýt	Cộng
Thiếu niên	25	3	12	40
Người lớn	5	28	12	45

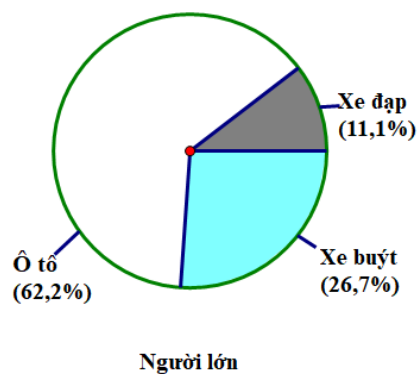
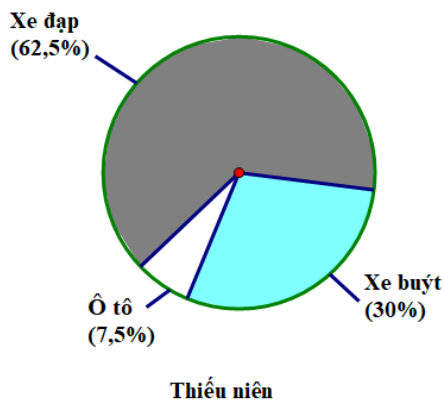
Lập biểu đồ tần số tương đối dạng hình quạt tròn thể hiện kết quả điều tra trên.

Lời giải

Tính tỉ số phần trăm số người thích từng loại phương tiện so với tổng số (người lớn hoặc thiếu niên) ta có:

Đối tượng	Xe đạp	Ô tô	Xe buýt
Thiếu niên	$\frac{25}{40} = 62,5\%$	$\frac{3}{40} = 7,5\%$	$\frac{12}{40} = 30\%$
Người lớn	$\frac{5}{45} = 11,1\%$	$\frac{28}{45} = 62,2\%$	$\frac{12}{45} = 26,7\%$

Lập biểu đồ tần số tương đối: hình 9 .



Hình 9

Bài 7. Bảng dưới đây thống kê loại quả thích nhất của một số học sinh lớp 9A và lớp 9B.

Đối tượng	Táo	Cam	Chuối	Cộng
Lớp 9A	18	10	22	...
Lớp 9B	20	...	12	40
Cộng	...	18	...	90

a) Hãy điền tiếp số liệu vào các chỗ trống của bảng.

b) Dùng tần số tương đối, cho biết mỗi loại quả được lớp nào thích hơn.

Lời giải

a) Xem bảng dưới.

Đối tượng	Táo	Cam	Chuối	Cộng
Lớp 9A	18	10	22	50
Lớp 9B	20	8	12	40
Cộng	38	18	34	90

b) ở lớp 9A:

Số học sinh thích táo chiếm $\frac{18}{50} = 0,36$.

Số học sinh thích cam chiếm $\frac{10}{50} = 0,2$.

Số học sinh thích chuối chiếm $\frac{22}{50} = 0,44$.

ở lớp 9B:

Số học sinh thích táo chiếm $\frac{20}{40} = 0,5$.

Số học sinh thích cam chiếm $\frac{8}{40} = 0,2$.

Số học sinh thích chuối chiếm $\frac{12}{40} = 0,3$.

Ta thấy:

$0,36 < 0,5$ nên táo được lớp 9B thích hơn.

$0,2 = 0,2$ nên cam được hai lớp thích như nhau.

$0,44 > 0,3$ nên chuối được lớp 9 A thích hơn.

Bài 8. Tổng điểm mà các thành viên đội tuyển Olympic Toán quốc tế (IMO - hình thức thi trực tiếp) của Việt Nam đạt được trong các năm 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2022, 2023 được thống kê lần lượt như sau: 159; 161; 133; 113; 148; 180; 157; 151; 151; 155; 148; 177; 150; 196; 180.

- a) Nêu các đối tượng thống kê và cho biết có bao nhiêu số liệu thống kê ở trên.
- b) Trong các số liệu thống kê ở trên có bao nhiêu giá trị khác nhau?

Lời giải

a) - Các đối tượng thống kê là: Tổng điểm mà các thành viên đội tuyển Olympic Toán quốc tế (IMO) của Việt Nam đạt được trong các năm 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2022, 2023.

□ Có 15 số liệu thống kê.

b) Các số liệu thống kê đó có 12 giá trị khác nhau là:

$x_1 = 113; x_2 = 133; x_3 = 148; x_4 = 150; x_5 = 151; x_6 = 155;$
 $x_7 = 157; x_8 = 159; x_9 = 161; x_{10} = 177; x_{11} = 180; x_{12} = 196$

Bài 9. Thống kê lượng hàng bán được (đơn vị: chiếc) của 39 mặt hàng ở một siêu thị điện máy như sau:

4	7	4	5	7	9	5	10	4	8	5	8	9
9	5	10	8	4	5	7	5	10	9	4	7	4
8	9	8	4	9	8	9	5	10	5	7	10	9

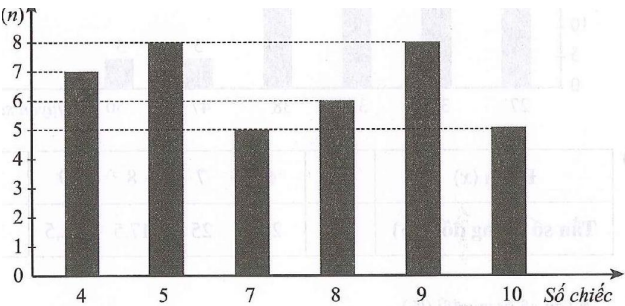
- a) Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó.
- b) Vẽ biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

Lời giải

a)

Số chiếc (x)	4	5	7	8	9	10	Cộng
Tần số (n)	7	8	5	6	8	5	$N = 39$

b) Tần số (n)



Bài 10. Bác An ghi lại số cuộc điện thoại bác đã gọi trong mỗi ngày của tháng 2 năm 2023 như sau:

5 5 8 7 8 7 9 10 10 7 7 5 9 5
10 8 8 7 9 7 5 10 8 8 10 9 7 10

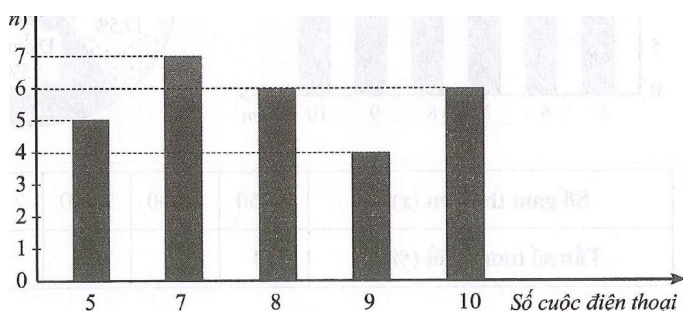
- a) Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó.
b) Vẽ biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

Lời giải

a)

Số cuộc điện thoại (x)	5	7	8	9	10	Cộng
Tần số (n)	5	7	6	4	6	$N = 28$

b) Tần số (n)



Bài 11. Thống kê số quyển sách quyên góp ủng hộ thư viện nhà trường của 100 học sinh khối 9 như sau:

50 38 35 38 50 38 27 38 47 27 27 35 38 32 38 32 35 32 35 32
38 38 35 32 35 38 38 50 32 47 27 38 35 27 47 35 38 38 32 35
35 35 27 32 38 35 32 32 38 32 38 35 27 38 27 38 27 32 38 38
38 32 38 32 35 27 35 38 32 27 50 32 27 35 47 32 38 27 32 32
38 27 35 38 35 47 35 38 35 38 35 35 35 35 35 27 50 38 32 38

- a) Trong 100 số liệu thống kê ở trên, có bao nhiêu giá trị khác nhau?
b) Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.
c) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

Lời giải

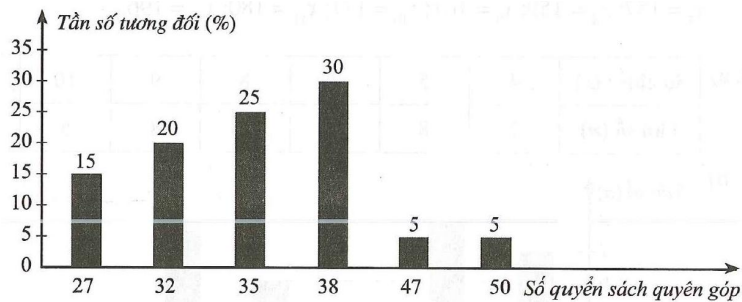
a) Trong 100 số liệu thống kê ở trên có 6 giá trị khác nhau là:

$$x_1 = 27; x_2 = 32; x_3 = 35; x_4 = 38; x_5 = 47; x_6 = 50$$

b)

Số quyển sách quyên góp (x)	27	32	35	38	47	50	Cộng
Tần số tương đối (%)	15	20	25	30	5	5	100

c)



Bài 12. Điểm kiểm tra môn Toán của 200 học sinh khối 9 được thống kê như Bảng 25 sau:

Điểm	5	6	7	8	9	10
Số học sinh	30	40	50	35	25	20

Bảng 25

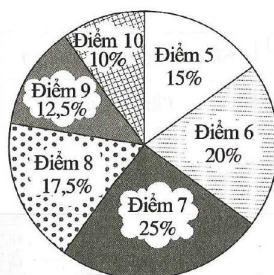
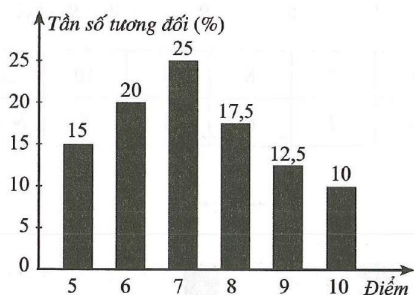
- a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.
b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối (ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn) của mẫu số liệu thống kê đó.

Lời giải

a)

Điểm (x)	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số tương đối (%)	15	20	25	17,5	12,5	10	100

b)



Bài 13. Khối lượng thức ăn trung bình (đơn vị: gam) trong một ngày cho mỗi con lợn 50 kg của một số hộ gia đình được thống kê như sau:

2200 2100 2150 2100 2100 2150 2200 2100 2100 2050
2100 2200 2050 2050 2100 2100 2150 2200 2150 2200
2200 2050 2150 2100 2200 2200 2150 2100 2150 2100
2100 2200 2150 2150 2100 2200 2050 2100 2100 2150
2100 2100 2200 2150 2200 2050 2050 2200 2100 2150

- a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.

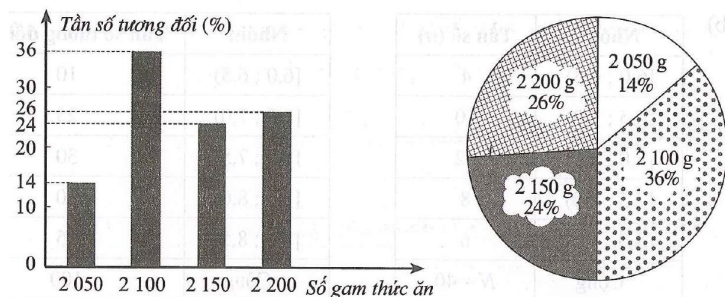
b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối (ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn) của mẫu số liệu thống kê đó.

Lời giải

a)

Số gam thức ăn (x)	2050	2100	2150	2200	Cộng
Tần số tương đối (%)	14	36	24	26	100

b)



Bài 14. Trong bài thơ "Lượm" nổi tiếng của nhà thơ Tố Hữu có những câu thơ:

"Chú bé loắt choắt

Cái xác xinh xinh

Cái chân thoăn thoắt

Cái đầu nghênh nghênh..."

Mẫu dữ liệu thống kê các chữ cái C; N; H; T; L lần lượt xuất hiện trong những câu thơ trên là:

C; H; L; T; C; H; T; C; C; N; H;

N; H; C; C; H; N; T; H; N; T; H;

T; C; N; H; N; H; N; H; N; H.

a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê đó.

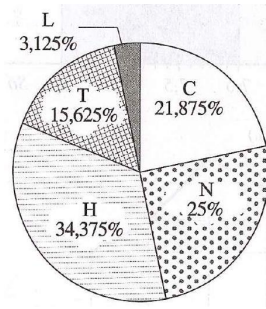
b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ hình quạt tròn của mẫu dữ liệu thống kê đó.

Lời giải

a) C; N; H; T; L lần lượt có tần số là: $n_1 = 7; n_2 = 8; n_3 = 11; n_4 = 5; n_5 = 1$.

Chữ cái (x)	C	N	H	T	L	Cộng
Tần số tương đối (%)	21,875	25	34,375	15,625	3,125	100

b)



Bài 15. Bảng sau cho kết quả loại màu thích nhất đối với một số học sinh nam và nữ.

Đối tượng	Xanh lục	Xanh lơ	Màu khác
Nam	15	5	10
Nữ	3	16	6

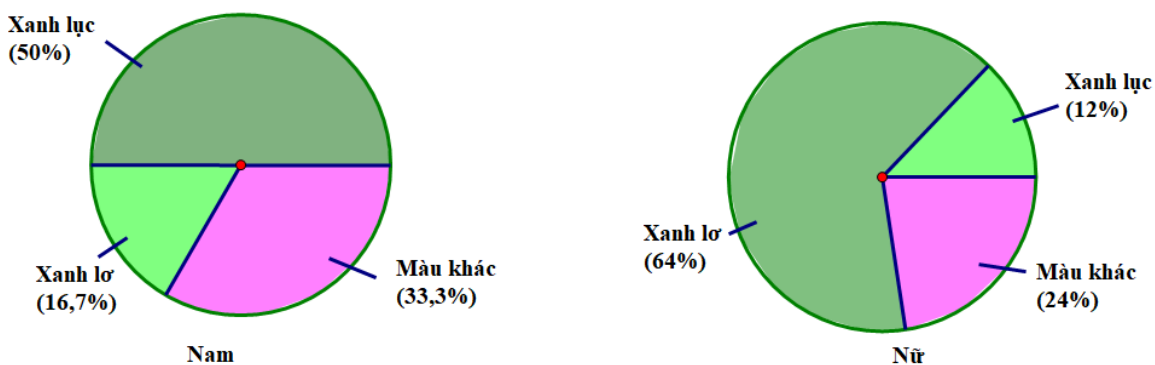
Lập biểu đồ tần số tương đối dạng hình quạt tròn thể hiện các thông tin trên.

Lời giải

Tính tỉ số phần trăm số học sinh thích từng loại màu so với tổng số (nam và nữ), ta có:

Đối tượng	Xanh lục	Xanh lơ	Màu khác
Nam	$\frac{15}{30} = 50\%$	$\frac{5}{30} = 16,7\%$	$\frac{10}{30} = 33,3\%$
Nữ	$\frac{3}{25} = 12\%$	$\frac{16}{25} = 64\%$	$\frac{6}{25} = 24\%$

Lập biểu đồ tần số tương đối: hình.



Bài 16. Thống kê loại nhạc thích nhất của một số học sinh lớp 6 và lớp 9 , kết quả được ghi ở bảng sau.

Đối tượng	Nhạc truyền thống	Nhạc hiện đại	Nhạc khác	Cộng
Lớp 6	...	13	23	...
Lớp 9	7	22	...	44
Cộng	25	...	38	98

a) Hãy điền tiếp số liệu vào các chỗ trống trong bảng.

b) Dùng tần số tương đối, cho biết mỗi loại nhạc được lớp nào thích hơn.

Lời giải

a) Ta có bảng sau:

Đối tượng	Nhạc truyền thống	Nhạc hiện đại	Nhạc khác	Cộng
Lớp 6	18	13	23	54
Lớp 9	7	22	15	44
Cộng	25	35	38	98

b) Tính tỉ số phần trăm số học sinh thích từng loại nhạc so với tổng số (lớp 6 hoặc lớp 9), ta có:

Đối tượng	Nhạc truyền thống	Nhạc hiện đại	Nhạc khác
Lớp 6	$\frac{18}{54} = 33,3\%$	$\frac{13}{54} = 24,1\%$	$\frac{23}{54} = 42,6\%$
Lớp 9	$\frac{7}{44} = 15,9\%$	$\frac{22}{44} = 50\%$	$\frac{15}{44} = 34,1\%$

$33,3 > 15,9$ nên nhạc truyền thống được lớp 6 thích hơn.

$24,1 < 50$ nên nhạc hiện đại được lớp 9 thích hơn.

$42,6 > 34,1$ nên nhạc khác được lớp 6 thích hơn.

BÀI 24. BẢNG TẦN SỐ, TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHEP NHÓM VÀ BIỂU ĐỒ.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. BẢNG TẦN SỐ, TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHEP NHÓM

Tìm hiểu bảng tần số ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm

Bảng tần số ghép nhóm là bảng tần số của các nhóm số liệu:

Nhóm	$[a_1; a_2)$	$[a_2; a_3)$	...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số	m_1	m_2	...	m_k

Bảng 7.3. Bảng tần số ghép nhóm

Tần số m_i của nhóm $[a_i; a_{i+1})$ là số giá trị của mẫu số liệu lớn hơn hoặc bằng a_i và nhỏ hơn a_{i+1} .

Bảng tần số tương đối ghép nhóm là bảng tần số tương đối của các nhóm số liệu:

Nhóm	$[a_1; a_2)$	$[a_2; a_3)$	...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số tương đối	f_1	f_2	...	f_k

Bảng 7.4. Bảng tần số tương đối ghép nhóm

trong đó $n = m_1 + \dots + m_k$ và

$f_1 = \frac{m_1}{n} \cdot 100\%$ là tần số tương đối của nhóm $[a_1; a_2)$, ...,

$f_k = \frac{m_k}{n} \cdot 100\%$ là tần số tương đối của nhóm $[a_k; a_{k+1})$.

Ví dụ 1 Đo chiều cao (đơn vị là cm) của học sinh lớp 9C cho kết quả như sau:

156 157 164 166 166 165 157 154 155 158 160 163 163
161 162 159 159 160 160 160 159 158 160 160 158 163
162 162 162 161 162 161 163 161 163 161 164 166 165 165.

Lập bảng tần số ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm cho mẫu số liệu này với các nhóm $[155; 158)$, $[158; 161)$, $[161; 164)$, $[164; 167)$.

Lời giải

Số học sinh có chiều cao từ 150 cm đến dưới 158 cm là 5 học sinh; từ 158 cm đến dưới 161 cm là 12 học sinh; từ 161 cm đến dưới 164 cm là 15 học sinh; từ 164 cm đến dưới 167 cm là 8 học sinh. Do đó, tần số tương ứng với các nhóm là $m_1 = 5$, $m_2 = 12$, $m_3 = 15$, $m_4 = 8$. Ta có bảng tần số ghép nhóm như sau:

Chiều cao (cm)	$[150; 158)$	$[158; 161)$	$[161; 164)$	$[164; 167)$
Số học sinh	5	12	15	8

Tổng số học sinh trong lớp là $n = 5 + 12 + 15 + 8 = 40$.

Tỉ lệ học sinh có chiều cao từ 150 cm đến dưới 158 cm là $\frac{5}{40} \cdot 100\% = 12,5\%$; từ 158 cm đến dưới 161 cm là

$\frac{12}{40} \cdot 100\% = 30\%$; từ 161 cm đến dưới 164 cm là $\frac{15}{40} \cdot 100\% = 37,5\%$; từ 164 cm đến dưới 167 cm là

$\frac{8}{40} \cdot 100\% = 20\%$. Ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm như sau:

Chiều cao (cm)	[150;158)	[158;161)	[161;164)	[164;167)
Tần số tương đối	12,5%	30%	37,5%	20%

Ví dụ 2 Chỉ số chất lượng không khí (AQI) cho biết tình trạng chất lượng không khí và mức độ ảnh hưởng đến sức khỏe con người. Chất lượng không khí là Tốt nếu AQI từ 0 đến dưới 50 ; là Trung bình nếu AQI từ 50 đến dưới 100 ; là Kém nếu AQI từ 100 đến dưới 150; là Xấu nếu AQI từ 150 đến dưới 200. Chất lượng không khí

tại Hà Nội từ ngày 4-2-2023 đến 5-3-2023 được cho như sau:

Trung bình, Trung bình, Trung bình, Trung bình, Trung bình, Trung bình,
Trung bình, Trung bình, Kém, Kém, Kém, Kém, Xấu, Xấu, Kém, Xấu,
Xấu, Xấu, Kém, Kém, Kém, Kém, Kém, Xấu, Kém, Xấu, Xấu, Xấu, Xấu, Xấu.

(Theo iqair.com)

Lập bảng tần số ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm theo chỉ số AQI cho dãy dữ liệu trên.

Lời giải

Có 8 ngày chất lượng không khí ở mức Trung bình tương ứng với chỉ số AQI từ 50 đến dưới 100; có 11 ngày chất lượng không khí ở mức Kém tương ứng với chỉ số AQI từ 100 đến dưới 150; có 11 ngày chất lượng không khí ở mức Xấu tương ứng với chỉ số AQI từ 150 đến dưới 200. Ta có bảng tần số ghép nhóm sau:

Chỉ số AQI	[50;100)	[100;150)	[150;200)
Tần số	8	11	11

Tỉ lệ ngày có chất lượng không khí ở mức Trung bình là $\frac{8}{30} \cdot 100\% \approx 26,6\%$; ở mức Kém là

$\frac{11}{30} \cdot 100\% \approx 36,7\%$; ở mức Xấu là $\frac{11}{30} \cdot 100\% \approx 36,7\%$. Ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm sau:

Chỉ số AQI	[50;100)	[100;150)	[150;200)
Tần số tương đối	26,6%	36,7%	36,7%

2. BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHEP NHÓM DẠNG CỘT

Tìm hiểu về biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột

- **Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột** là biểu đồ gồm các cột liền nhau để biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm. Trong biểu đồ này, chiều cao mỗi cột biểu diễn tần số tương đối của nhóm số liệu.

- Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm với các nhóm số liệu có độ dài bằng nhau ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Vẽ trục đứng, trục ngang. Trên trục đứng xác định đơn vị độ dài phù hợp với các tần số tương đối. Trên trục ngang xác định các nhóm số liệu cần biểu diễn.

Bước 2. Dựng các hình cột (kề nhau) ứng với các nhóm dữ liệu, mỗi hình cột có chiều cao bằng tần số tương đối của nhóm số liệu.

Bước 3. Ghi chú giải cho các trục, các cột và tiêu đề cho biểu đồ.

- Biểu đồ tần số tương đối (tần số) ghép nhóm dạng cột còn gọi là tổ chức đồ (histogram).

Chú ý. Trong biểu đồ trên, nếu chiều cao mỗi cột biểu diễn tần số của nhóm số liệu thì ta có biểu đồ tần số ghép nhóm dạng cột.

Ví dụ 3: Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê sau về thời gian đi từ nhà tới

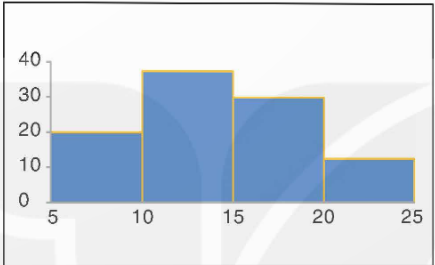
trường của một số bạn trong lớp 9D.

Thời gian (phút)	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)
Tần số tương đối	20%	37,5%	30%	12,5%

Lời giải

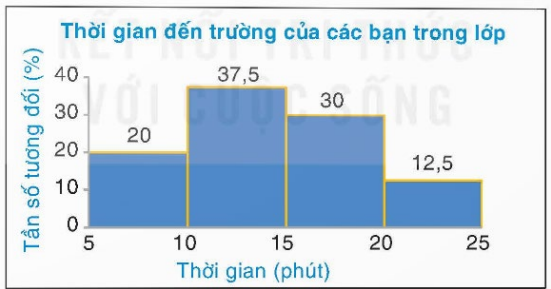
Bước 1. Vẽ các trục của biểu đồ, xác định đơn vị độ dài trên trục đứng, các nhóm trên trục ngang (H.7.18).

Bước 2. Dựng các hình cột kề nhau ứng với các nhóm số liệu (H.7.18).



Hình 7.18

Bước 3. Ghi chú giải cho các trục, các cột và tiêu đề của biểu đồ (H.7.19).



Hình 7.19

3. BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM DẠNG ĐOẠN THẲNG

Cách vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng

Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho mẫu số liệu ghép nhóm, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Chọn giá trị $x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$ đại diện cho nhóm số liệu $[a_i; a_{i+1})$ với $i = 1, 2, \dots, k$.

Bước 2. Vẽ trục ngang để biểu diễn các giá trị đại diện cho các nhóm số liệu, vẽ trục đứng thể hiện tần số tương đối.

Bước 3. Với mỗi giá trị đại diện x_i trên trục ngang và tần số tương đối f_i tương ứng, ta xác định một điểm $M_i(x_i; f_i)$. Nối các điểm liên tiếp với nhau.

Bước 4. Ghi chú giải cho các trục, các điểm và tiêu đề của biểu đồ.

Chú ý. Trong cách vẽ biểu đồ trên, nếu thay tần số tương đối bằng tần số thì ta có biểu đồ tần số ghép nhóm dạng đoạn thẳng.

Ví dụ 4 Cho bảng tần số tương đối ghép nhóm sau về tuổi thọ của một loại bóng đèn.

Tuổi thọ (năm)	$[1; 1,5)$	$[1,5; 2)$	$[2; 2,5)$	$[2,5; 3)$	$[3; 3,5)$
Tần số tương đối	15%	20%	30%	25%	10%

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho bảng thống kê trên.

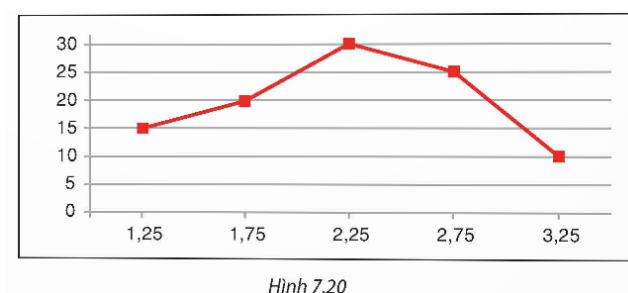
Lời giải

Bước 1. Chọn giá trị đại diện cho các nhóm số liệu ta có bảng sau:

Tuổi thọ (năm)	1,25	1,75	2,25	2,75	3,25
Tần số tương đối	15%	20%	30%	25%	10%

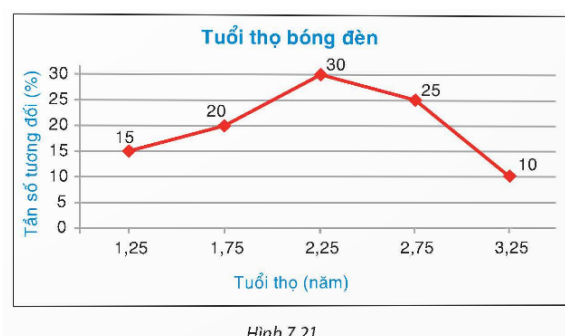
Bước 2. Vẽ các trục (H.7.20).

Bước 3. Xác định các điểm, nối các điểm liên tiếp với nhau (H.7.20).



Hình 7.20

Bước 4. Ghi chú giải cho các trục, các điểm và tiêu đề của biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm (H.7.21).



Hình 7.21

Chú ý. Trên trục ngang ta cũng có thể điền các nhóm số liệu thay cho các giá trị đại diện.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

Dạng 1. Tần số ghép nhóm, tần số tương đối ghép nhóm

Ví dụ 1. Giáo viên chủ nhiệm lớp 9 C đã thu được kết quả như sau: Thời gian tự học dưới 1 giờ có 10 bạn; từ 1 giờ đến dưới 2 giờ có 15 bạn; từ 2 giờ đến dưới 3 giờ có 8 bạn; từ 3 giờ đến dưới 4 giờ có 7 bạn. Dựa vào dữ liệu dưới, hãy hoàn thiện các bảng sau vào vở:
Bảng 1

Thời gian (giờ)	[0;1)	[1;2)	[2;3)	[3;4)
Tần số	?	?	?	?

Bảng 2

Thời gian (giờ)	[0;1)	[1;2)	[2;3)	[3;4)
Tần số tương đối	?	?	?	?

Hướng dẫn: Nhóm số liệu [a; b) là nhóm gồm các số liệu lớn hơn hoặc bằng a và nhỏ hơn b .

Lời giải

Bảng 1.

Thời gian (giờ)	[0;1)	[1;2)	[2;3)	[3;4)
Tần số	10	15	8	7

Bảng 2 .

Thời gian (giờ)	[0;1)	[1;2)	[2;3)	[3;4)
Tần số tương đối	25%	37,5%	20%	17,5%

Nhận xét:

- 1. Bảng 1 gọi là bảng tần số ghép nhóm. Bảng 2 gọi là bảng tần số tương đối ghép nhóm. (Kết quả viết dưới dạng phần trăm).
- 2. Ta có thể ghi chung trong một bảng.

Bảng tần số - Tần số tương đối ghép nhóm

Thời gian (giờ)	[0;1)	[1;2)	[2;3)	[3;4)
Tần số	10	15	8	7
Tần số tương đối	25%	37,5%	20%	17,5%

Ví dụ 2. Cho bảng tần số ghép nhóm về tuổi thọ của một số ong mật cái như sau:

Tuổi thọ (ngày)	[30;40)	[40;50)	[50;60)
Tần số	12	23	15

- a) Đọc và giải thích bảng thống kê trên.
- b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho bảng thống kê này.

Lời giải

a) Tuổi thọ từ 30 ngày đến dưới 40 ngày là 12 con; tuổi thọ từ 40 ngày đến dưới 50 ngày là 23 con; tuổi thọ từ 50 ngày đến dưới 60 ngày là 15 con.

b) Ta có: $n = 12 + 23 + 15 = 50$. $\frac{12}{50} \% = 24\%$; $\frac{23}{50} \% = 46\%$; $\frac{15}{50} \% = 30\%$

b) Bảng tần số tương đối ghép nhóm.

Tuổi thọ (ngày)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)
Tần số tương đối	24%	46%	30%

Ví dụ 3. Nhà may Hưng Thịnh tặng áo phong cho 40 học sinh lớp 9A. Nhà may đo chiều cao (đơn vị: centimét) của cả lớp để quyết định chọn các cỡ áo khi may, kết quả như sau:

161	159	168	153	150	157	172	165	161	158
169	153	164	167	172	174	163	156	166	166
161	152	165	169	160	152	165	163	174	168
159	168	164	169	156	172	167	158	161	160

Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu trên.

Hướng dẫn: Ta có thể ghép các số liệu thành 5 nhóm, có độ dài bằng nhau.

Vì $174 < 175$, ta có: $175 - 150 = 25$ và $25 : 5 = 5 \Rightarrow [150; 155), [155; 160), [160; 165), [165; 170), [170; 175)$.

Lời giải

Nhóm	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Tần số (n)	5	7	10	13	5
Tần số tương đối	12,5%	17,5%	25%	32,5%	12,5%

Ví dụ 4. Mẫu số liệu dưới đây ghi lại tốc độ (đơn vị: km / h) của 44 ô tô khi đi qua một trạm đo tốc độ:

48,5	43	50	55	45	60	53	55,5	44	65	54,5
51	62,5	41	44,5	57	57	68	49	46,5	53,5	49
61	49,5	54	62	59	56	47	50	59,5	61	46,5
49,5	52,5	57	47	59	55	45	47,5	48	61,5	48,5

a) Ghép các số liệu thành 6 nhóm.

b) Lập bảng tần số ghép nhóm.

Hướng dẫn:

a) Ta có số liệu có giá trị nhỏ nhất là 41 ; số liệu có giá trị lớn nhất là 68 .

Ta có $40 < 41, 68 < 70$. $70 - 40 = 30; 30 : 6 = 5$

b) Xem Ví dụ 3 .

Lời giải

a) Ta có 6 nhóm: $[40; 45)$, $[45; 50)$, $[50; 55)$, $[55; 60)$, $[60; 65)$, $[65; 70)$.

b) Bảng tần số ghép nhóm.

Tổ c độ	$[40; 45)$	$[45; 50)$	$[50; 55)$	$[55; 60)$	$[60; 65)$	$[65; 70)$
Tầ n số	4	14	8	10	6	2

Ví dụ tương tự.

Thống kê số lần truy cập Internet của 30 người trong một tuần là:

85	81	65	58	47	30	51	89	85	42
55	37	31	82	63	33	44	88	77	57
44	74	63	67	46	73	52	53	47	35

Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu đó sau khi được ghép nhóm theo sáu nhóm.

Hướng dẫn: Ta có $89 < 90$, $90 - 30 = 60$. Ta ghép thành 6 nhóm

$[30; 40)$, $[40; 50)$, $[50; 60)$, $[60; 70)$, $[70; 80)$, $[80; 90)$.

Ví dụ 5. Chỉ số phát triển con người (HDI) là chỉ tiêu tổng hợp phản ánh các mặt thu nhập, sức khỏe, giáo dục của người dân trong một quốc gia. Các nước và vùng lãnh thổ trên thế giới được chia thành bốn nhóm theo HDI: Nhóm 1 (rất cao) có HDI từ 0,8 trở lên; Nhóm 2 (cao) có HDI từ 0,7 đến dưới 0,8; Nhóm 3 (trung bình) có HDI từ 0,55 đến dưới 0,7; Nhóm 4 (thấp) có HDI dưới 0,55. Năm 2021, chỉ số HDI của 11 quốc gia Đông Nam Á như sau:

0,939	0,829	0,803	0,8	0,705	0,703	0,699	0,607	0,607	0,593	0,585
-------	-------	-------	-----	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Dựa vào dữ liệu trên, hãy hoàn thành bảng tần số ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm:

Chỉ số HDI	$[0; 0,55)$	$[0,55; 0,7)$	$[0,7; 0,8)$	$[0,8; 1,0)$
Tần số				
Tần số tương đối				

Hướng dẫn: Tần số tương đối tính theo số phần trăm. Ta có: $n = 11$.

Tần số ghép nhóm của nhóm 1: $[0,8; 1,0)$ là 4. Ta có tần số tương đối ghép nhóm của nhóm 1 là:

$$\frac{4}{11} = 36\%.$$

Lời giải

Chỉ số HDI	$[0; 0,55)$	$[0,55; 0,7)$	$[0,7; 0,8)$	$[0,8; 1,0)$
------------	-------------	---------------	--------------	--------------

Tần số	0	5	2	4
Tần số tương đối	0%	45,46%	18,18%	36,36%

Ví dụ 6. Bác Quảng ghi lại thời gian truy cập Internet của mình mỗi ngày (đơn vị: giờ) trong vòng 1 tháng như sau:

1,2	3,2	2,4	2,7	0,5	2,6	4,8	2,4	4,2	2,4
3,7	2,3	3,5	4,9	0,4	0,6	1,5	4,6	1,7	3,4
3,9	2,1	3,4	2,7	1,5	1,8	2,9	3,5	3,9	1,6

a) Lập bảng tần số ghép nhóm theo 5 nhóm: $[0;1)$, $[1;2)$, $[2;3)$, $[3;4)$, $[4;5)$.

b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm.

Lời giải

a) Bảng tần số ghép nhóm

Thời gian (giờ)	$[0;1)$	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;4)$	$[4;5)$
Tần số	3	6	9	8	4

b) Bảng tần số tương đối ghép nhóm.

Thời gian (giờ)	$[0;1)$	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;4)$	$[4;5)$
Tần số tương đối	10,0%	20,0%	30,0%	26,7%	13,3%

Chú ý: Tương tự như bảng tần số - tần số tương đối, ta có thể ghép được Bảng tần số ghép nhóm - tần số tương đối ghép nhóm như sau:

Thời gian (giờ)	$[0;1)$	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;4)$	$[4;5)$
Tần số	3	6	9	8	4
Tần số tương đối	10,0%	20,0%	30,0%	26,7%	13,3%

Ví dụ tương tự.

Cô Loan ghi lại chiều cao (đơn vị: cm) của các cây bạch đàn giống vừa được chuyển đến nông trường ở bảng sau:

16,4	19	29,6	18,3	21,8	20,6	22,2	27,1	23,3	19,5
21,2	15,9	28,6	18	29,8	27,2	18,1	28,4	18,8	23,5
29,2	23,8	29,6	25	24,4	15,4	23,8	16	17,2	23,5
23,2	17	17,8	19,8	16,8	18,4	21,9	24,3	27,3	21

Hướng dẫn:

Bảng tần số ghép nhóm - tần số tương đối ghép: ($n = 40$)

Chiều cao	[15;18)	[18;21)	[21;24)	[24;27)	[27;30)
Tần số	8	9	11	3	9
Tần số tương đối	20%	22,5%	27,5%	7,5%	22,5%

Ví dụ 7. Kết quả đo chiều cao của 40 học sinh được thống kê trong bảng sau:

146	148	148	150	150	151	151	152	152	152
153	154	154	155	155	155	155	155	155	156
156	156	156	157	157	159	159	160	162	163
163	163	163	163	164	165	167	168	168	170

Theo quy định của công ty may mặc, cỡ S tương ứng với chiều cao từ 146 cm đến dưới 152 cm . Cỡ M tương ứng với chiều cao từ 152 cm đến dưới 158 cm. Cỡ L tương ứng với chiều cao từ 158 cm đến dưới 164cm . Cỡ XL tương ứng với chiều cao từ 164cm đến 170cm . Đối với 40 học sinh này, làm thế nào để xác định số quần áo cần may ở mỗi kích cỡ?

Hướng dẫn:

Cỡ S: [146; 152), Cỡ M: [152; 158), Cỡ L: [158; 164), Cỡ XL: [164; 170). Ta có $n = 40$.

Lời giải

a) Bảng tần số ghép nhóm - tần số tương đối ghép nhóm.

Chiều cao	[146;152)	[152;158)	[158;164)	[164;170)
Tần số	7	18	9	6
Tần số tương đối	17,5%	45%	22,5%	15%

Dạng 2. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột

Ví dụ 1. Thủy thống kê lại độ dài quãng đường (đơn vị: km) mình đi bộ mỗi ngày trong tháng Sáu ở bảng sau:

Quãng đường (km)	[4;5)	[5;6)	[6;7)	[7;8)	[8;9)
Tần số (số ngày)	6	12	8	3	1

Hãy vẽ biểu đồ tần số ghép nhóm dạng cột biểu diễn mẫu số liệu trên.

Hướng dẫn:

Trước hết, ta lập bảng tần số tương đối ghép nhóm (tính theo tỉ lệ phần trăm).

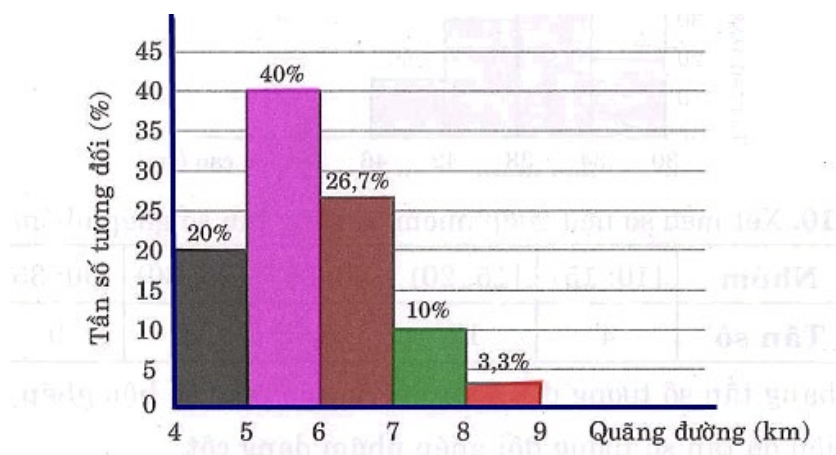
Lời giải

Bảng tần số tương đối ghép nhóm: (tháng Sáu có 30 ngày: $n = 30$).

Quãng đường (km)	[4;5)	[5;6)	[6;7)	[7;8)	[8;9)
Tần số (số ngày)	20,0%	40,0%	26,7%	10,0%	3,3%

Biểu đồ tần số ghép nhóm dạng cột biểu diễn mẫu số liệu:

Tần số tương đối của số ngày theo độ dài quãng đường đi được mỗi ngày



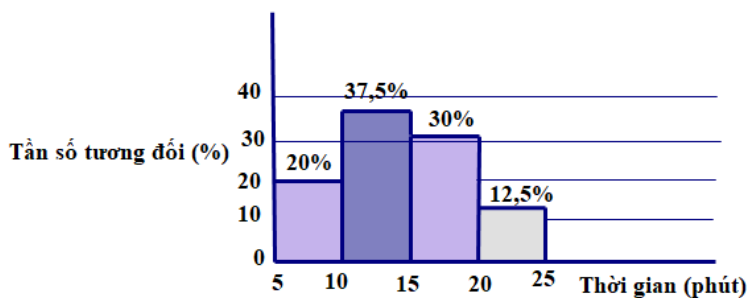
Ví dụ tương tự.

Vẽ biểu đồ tần số ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê sau về thời gian đi từ nhà tới trường của một số bạn trong lớp 9D.

Thời gian (phút)	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)
Tần số tương đối	20%	37,5%	30%	12,5%

Hướng dẫn: (Xem hình vẽ).

Thời gian đến trường của các bạn trong lớp

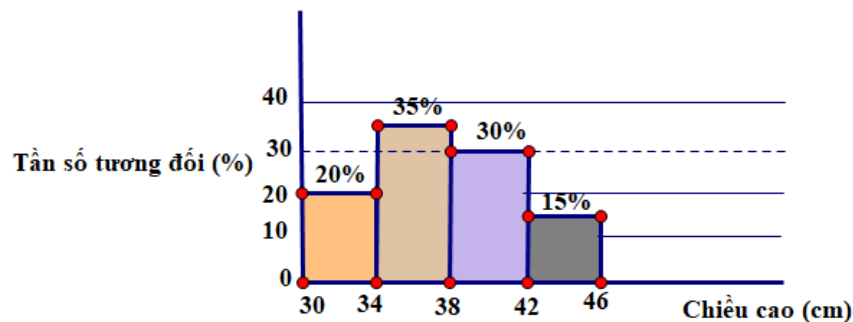


Ví dụ 2. Vẽ biểu đồ tần số ghép nhóm dạng cột cho bảng sau về chiều cao của một số cây chà là giống 3 tháng tuổi.

Quãng đường (km)	[38;42)	[42;46)
Tần số tương đối (%)	70%	30%

Lời giải

Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột:



Ví dụ 3. Xét mẫu số liệu ghép nhóm có bảng tần số ghép nhóm sau đây:

Nhóm	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)	[30;35)
Tần số	4	12	7	8	9

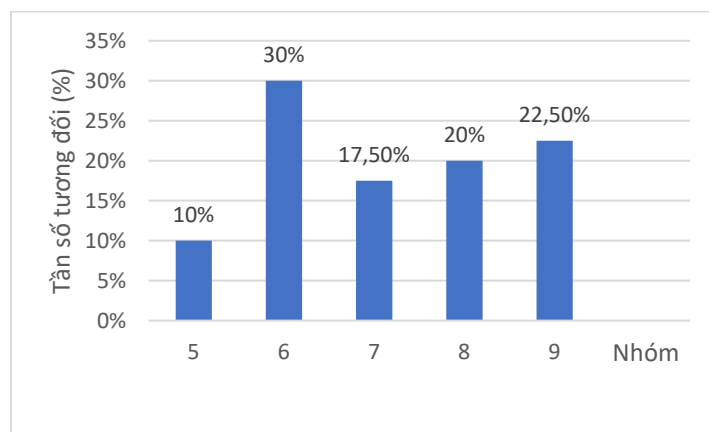
- a) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.
b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột.

Lời giải

a) Bảng tần số ghép nhóm - tần số tương đối ghép nhóm: ($n = 40$)

Nhóm	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)	[30;35)
Tần số	4	12	7	8	9
Tần số tương đối	10%	30%	17,5%	20%	22,5%

b) Xem hình vẽ.



Ví dụ 4. Sau khi thống kê độ dài (đơn vị: centimét) của 50 lá dương xỉ trưởng thành, người ta có bảng tần số ghép nhóm như sau:

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng biểu đồ cột.

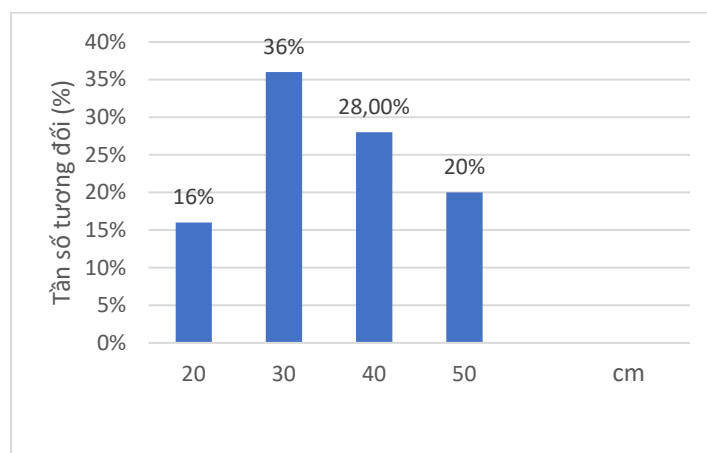
Hướng dẫn: Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm, tính theo phần trăm.

Lời giải

Bảng tần số ghép nhóm – tần số tương đối ghép nhóm: ($n = 50$)

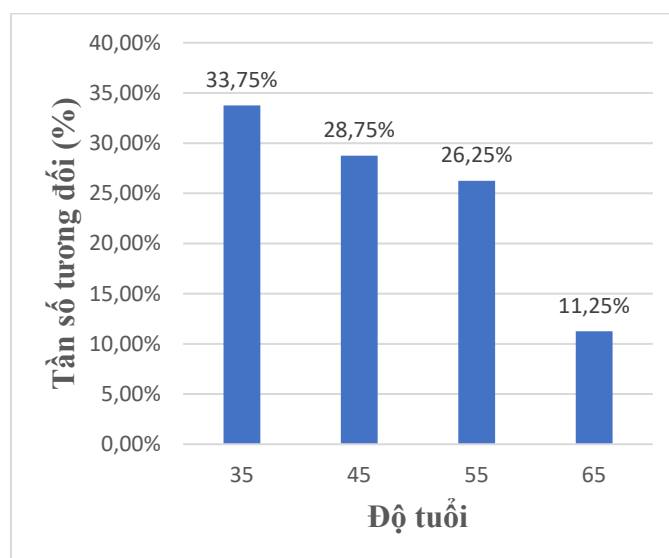
Nhóm	[10;20)	[20;30)	[30;40)	[40;50)
Tần số	8	18	14	10

Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột.



Ví dụ 5. Biểu đồ bên biểu diễn tỉ lệ đại biểu tham dự hội nghị theo độ tuổi. Biết rằng có 54 đại biểu từ 25 đến 35 tuổi.

- Có bao nhiêu đại biểu tham dự hội nghị?
- Lập bảng tần số ghép nhóm tương ứng.
- Một người cho rằng có trên 50% số đại biểu tham dự hội nghị dưới 45 tuổi. Nhận định đó đúng hay sai? Tại sao?



Hướng dẫn: Nhóm [25;35) chiếm 33,75% so với tổng số đại biểu và có 54 người.

Ta có: $54 : 33,75\% = 160$ (người).

Lời giải

a) Ta có: $54 : 33,75\% = 160$ (người)

Tổng số đại biểu tham dự hội nghị là 160 người.

b) Từ câu a, ta tìm được số người tham dự của các nhóm. Ta có bảng tần số ghép nhóm như sau:

Nhóm	[25;35)	[35;45)	[45;55)	[55;65)
Tần số	54	46	42	18

c) $33,75\% + 28,75\% = 62,5\% > 50\%$.

Nhận định trên là đúng.

Chú ý: Các Ví dụ 8 ; 9 ; 10 ; 11, em hãy đặt ra Ví dụ mới, khi biết biểu đồ tần số ghép nhóm tương đối và bổ sung số lượng n trong mỗi bài.

Dạng 3. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng

Ví dụ 1. Cho bảng tần số tương đối ghép nhóm sau về tuổi thọ của một bóng đèn.

Tuổi thọ (năm)	[1;1,5)	[1,5;2)	[2;2,5)	[2,5;3)	[3;3,5)
Tần số tương đối	15%	20%	30%	25%	10%

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho bảng thống kê trên.

Hướng dẫn: Chọn giá trị đại diện cho các nhóm.

$$\frac{1+1,5}{2} = 1,25; \frac{1,5+2}{2} = 1,75; \frac{2+2,5}{2} = 2,25; \frac{2,5+3}{2} = 2,75; \frac{3+3,5}{2} = 3,25$$

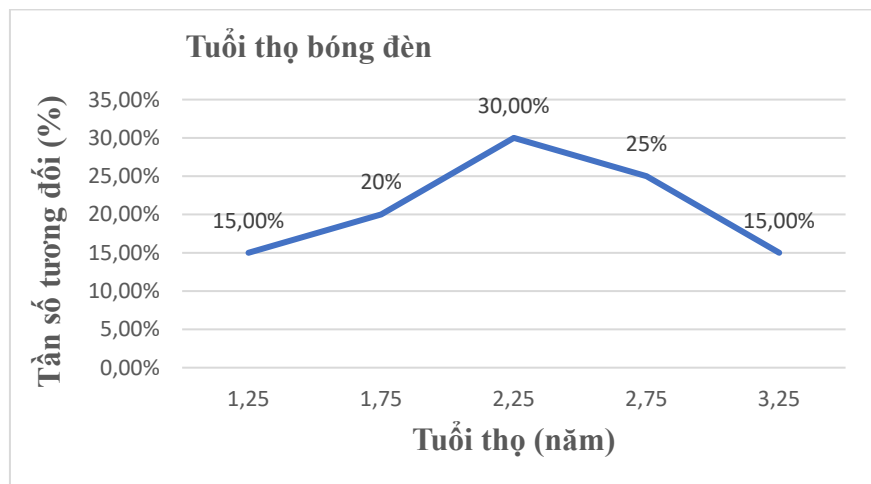
Xem phần A. Kiến thức cần nhớ.

Lời giải

Ta có bảng sau:

Tuổi thọ (năm)	1,25	1,75	2,25	2,75	3,25
Tần số tương đối	15%	20%	30%	25%	10%

Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng



Ví dụ 2. Bảng sau thống kê chiều cao (đơn vị: mét) của các cây keo 3 năm tuổi ở một nông trường.

Chiều cao (m)	[8,5;8,7)	[8,7;8,9)	[8,9;9,1)	[9,1;9,3)	[9,3;9,5)
Tần số tương đối	15%	25%	25%	20%	15%

Hãy vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng biểu diễn số liệu trên.

Hướng dẫn: Chọn giá trị đại diện cho các nhóm.

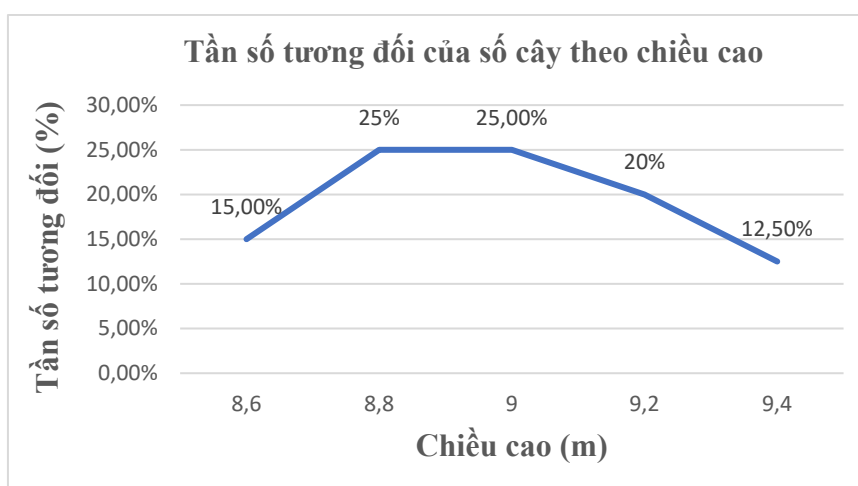
$$\frac{8,5+8,7}{2} = 8,6; \frac{8,7+8,9}{2} = 8,8; \frac{8,9+9,1}{2} = 9,0; \frac{9,1+9,3}{2} = 9,2; \frac{9,3+9,5}{2} = 9,4$$

Lời giải

Ta có bảng sau:

Chiều cao (m)	[8,5;8,7)	[8,7;8,9)	[8,9;9,1)	[9,1;9,3)	[9,3;9,5)
Tần số tương đối	8,6	8,8	9,0	9,2	9,4

Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng.



Ví dụ 3. Bảng dưới đây được lấy từ dữ liệu do một trọng tài ghi lại về thành tích của các vận động viên nam trong cuộc thi bơi tự do dài 50 m được một trung tâm thể dục thể thao tổ chức.

Thành tích bơi tự do 50m nam

Thời gian (giây)	[24;26)	[26;28)	[28;30)	[30;32)	[32;34)
Tần số	2	8	10	8	4

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng biểu diễn số liệu trên.

Hướng dẫn: - Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm.

- Chọn các giá trị đại diện cho nhóm số liệu.

- Vẽ biểu đồ.

- Tần số tương đối của nhóm $[24; 26)$ là $f_1 = \frac{2}{32} = 0,0625 = 6,25\%$.

- Tần số tương đối của nhóm $[26; 28)$ là $f_2 = \frac{8}{32} = 0,25 = 25\%$.

- Tương tự với các nhóm tiếp theo: $f_3 = \frac{10}{32} = 0,3125 = 31,25\%$.

$f_4 = \frac{10}{32} = 0,3125 = 31,25\%$; $f_5 = \frac{4}{32} = 0,125 = 12,5\%$

Ta lập được bảng tần số tương đối ghép nhóm dưới đây:

Bảng tần số tương đối ghép nhóm thành tích bơi tự do 50m nam

<i>Thời gian (giây)</i>	$[24; 26)$	$[26; 28)$	$[28; 30)$	$[30; 32)$	$[32; 34)$
<i>Tần số tương đối</i>	6,25	25	31,25	25	12,5

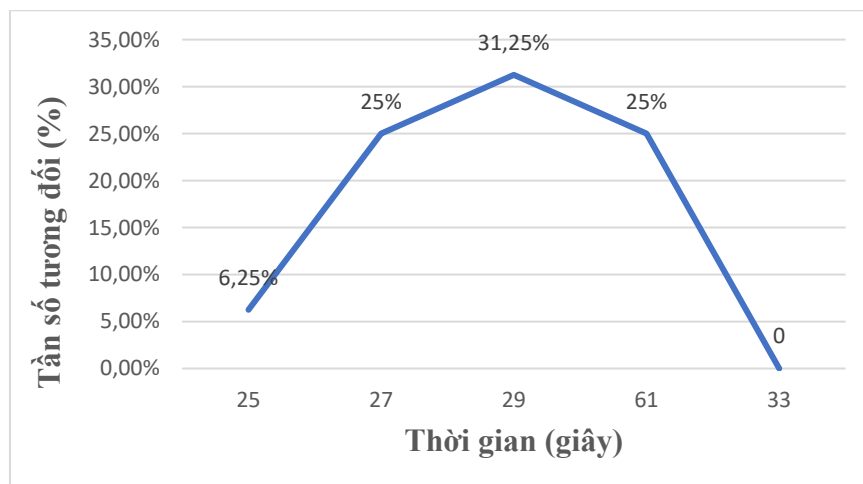
Lời giải

Ta có: $\frac{24+26}{2} = 25$; $\frac{26+28}{2} = 27$; $\frac{28+30}{2} = 29$; $\frac{30+32}{2} = 31$; $\frac{32+34}{2} = 33$.

Bảng tần số tương đối ghép nhóm:

<i>Thời gian (giây)</i>	25	27	29	31	33
<i>Tần số tương đối (%)</i>	6,25	25	31,25	25	12,5

Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng:



C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

7.17. Một cuộc điều tra về thời gian dùng mạng Internet trong ngày của học sinh lớp 9 tại một thành phố cho kết quả như sau:

Thời gian (giờ)	$[0; 0,5)$	$[0,5; 1,0)$	$[1,0; 1,5)$	$[1,5; 2,0)$	$[2,0; 2,5)$
Tỉ lệ	15%	27%	23%	18%	17%

a) Đọc và giải thích bảng thống kê trên.

b) Để thu được bảng thống kê trên, người ta đã lập phiếu điều tra và thu về tổng cộng 2000 phiếu trả lời. Lập bảng tần số ghép nhóm cho kết quả thu được.

Lời giải

a) Bảng thống kê trên cho biết thông tin về thời gian dùng mạng Internet trong ngày của học sinh lớp 9 tại một thành phố: Thời gian dùng mạng Internet trong ngày của học sinh lớp 9 từ 0 đến dưới 0,5 giờ chiếm tỉ lệ 15% , từ 0,5 giờ đến dưới 1 giờ chiếm 27% , từ 1 giờ đến dưới 1,5 giờ chiếm 23% , từ 1,5 giờ đến dưới 2 giờ chiếm 18% , từ 2 giờ đến dưới 2,5 giờ chiếm 17% .

b) Số phiếu điều tra học sinh lớp 9 dùng mạng Internet trong ngày trong thời gian từ 0 giờ đến dưới 0,5 giờ là: $2000 \cdot 15\% = 300$ (phiếu).

Số phiếu điều tra học sinh lớp 9 dùng mạng Internet trong ngày trong thời gian từ 0,5 giờ đến dưới 1 giờ là: $2000 \cdot 27\% = 540$ (phiếu).

Số phiếu điều tra học sinh lớp 9 dùng mạng Internet trong ngày trong thời gian từ 1 giờ đến dưới 1,5 giờ là: $2000 \cdot 23\% = 460$ (phiếu).

Số phiếu điều tra học sinh lớp 9 dùng mạng Internet trong ngày trong thời gian từ 1,5 giờ đến dưới 2 giờ là: $2000 \cdot 18\% = 360$ (phiếu).

Số phiếu điều tra học sinh lớp 9 dùng mạng Internet trong ngày trong thời gian từ 2 giờ đến dưới 2,5 giờ là: $2000 \cdot 17\% = 340$ (phiếu).

Ta có bảng tần số ghép nhóm như sau:

Thời gian (giờ)	$[0; 0,5)$	$[0,5; 1,0)$	$[1,0; 1,5)$	$[1,5; 2,0)$	$[2,0; 2,5)$
Tần số	300	540	460	360	340

7.18. Ghi lại cấp độ động đất của các trận động đất xảy ra tại một vùng trong 10 năm người ta thu được kết quả sau:

I, V, II, III, VI, V, IV, II, III, V, VI, VII, VIII, I, I, II, VI, VII, IV.

Biết rằng theo thang Richter thì trận động đất cấp I có độ lớn từ 1 đến dưới 3 ; cấp II và III có độ lớn từ 3 đến dưới 4 ; cấp IV và V có độ lớn từ 4 đến dưới 5 ; cấp VI và VII có độ lớn từ 5 đến dưới 6 ; cấp VIII có độ lớn từ 6 đến dưới 6,9.

Lập bảng tần số ghép nhóm cho độ lớn các trận động đất xảy ra ở vùng này theo thang Richter.

Lời giải

Có 3 trận động đất cấp I có độ lớn từ 1 đến dưới 3; 5 trận động đất cấp II và cấp III có độ lớn từ 3 đến dưới 4; 5 trận động đất cấp IV và V có độ lớn từ 4 đến dưới 5; 5 trận động đất cấp VI và VII có độ lớn từ 5 đến dưới 6; 1 trận động đất cấp VIII có độ lớn từ 6 đến dưới 6,9.

Ta có bảng tần số ghép nhóm cho độ lớn các trận động đất xảy ra ở vùng này theo thang Richter như sau:

Độ lớn động đất (Richter)	[1;3)	[3;4)	[4;5)	[5;6)	[6;6,9)
Tần số	3	5	5	5	1

7.19. Giáo viên ghi lại thời gian chạy cự li 100 mét của các học sinh lớp 9 A cho kết quả như sau:

Thời gian (giây)	[13;15)	[15;17)	[17;19)	[19;21)
Số học sinh	5	20	13	2

a) Nêu các nhóm số liệu và tần số tương ứng.

b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm.

Lời giải

a) Nhóm [13;15) có tần số tương ứng là 5 ;

Nhóm [15;17) có tần số tương ứng là 20 ;

Nhóm [17;19) có tần số tương ứng là 13 ;

Nhóm [19;21) có tần số tương ứng là 2 .

b) Tổng số học sinh là: $n = 5 + 20 + 13 + 2 = 40$.

Tỉ lệ học sinh chạy được từ 13 giây đến dưới 15 giây là $\frac{5}{40} \cdot 100\% = 12,5\%$;

Tỉ lệ học sinh chạy được từ 15 giây đến dưới 17 giây là $\frac{20}{40} \cdot 100\% = 50\%$;

Tỉ lệ học sinh chạy được từ 17 giây đến dưới 19 giây là $\frac{13}{40} \cdot 100\% = 32,5\%$;

Tỉ lệ học sinh chạy được từ 19 giây đến dưới 21 giây là $\frac{2}{40} \cdot 100\% = 5\%$.

Ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm như sau:

Thời gian (giây)	[13;15)	[15;17)	[17;19)	[19;21)
Tần số tương đối	12,5%	50%	32,5%	5%

7.20. Người ta trồng cà rốt và thử nghiệm một loại phân bón mới. Khi thu hoạch người ta đo chiều dài các củ cà rốt thu được kết quả sau:

Chiều dài (cm)	[15;16)	[16;17)	[17;18)	[18;19)	[19;20)	[20;21)
Số củ cà rốt	8	17	30	28	12	5

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê trên.

Lời giải

- Tổng số củ cà rốt là: $n = 8 + 17 + 30 + 28 + 12 + 5 = 100$.

Tỉ lệ số củ cà rốt có chiều dài từ 15 cm đến dưới 16 cm là $\frac{8}{100} \cdot 100\% = 8\%$;

Tỉ lệ số củ cà rốt có chiều dài từ 16 cm đến dưới 17 cm là $\frac{17}{100} \cdot 100\% = 17\%$;

Tỉ lệ số củ cà rốt có chiều dài từ 17 cm đến dưới 18 cm là $\frac{30}{100} \cdot 100\% = 30\%$;

Tỉ lệ số củ cà rốt có chiều dài từ 18 cm đến dưới 19 cm là $\frac{28}{100} \cdot 100\% = 28\%$;

Tỉ lệ số củ cà rốt có chiều dài từ 19 cm đến dưới 20 cm là $\frac{12}{100} \cdot 100\% = 12\%$;

Tỉ lệ số củ cà rốt có chiều dài từ 20 cm đến dưới 21 cm là $\frac{5}{100} \cdot 100\% = 5\%$.

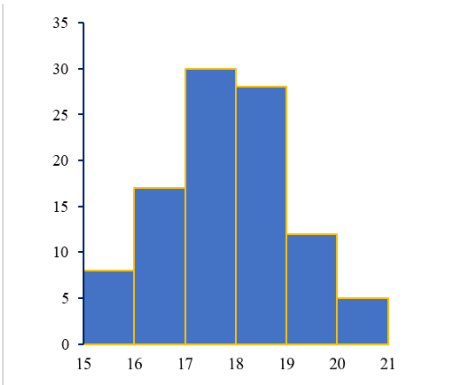
Ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm sau:

Chiều dài (cm)	[15;16)	[16;17)	[17;18)	[18;19)	[19;20)	[20;21)
Tần số tương đối	8%	17%	30%	28%	12%	5%

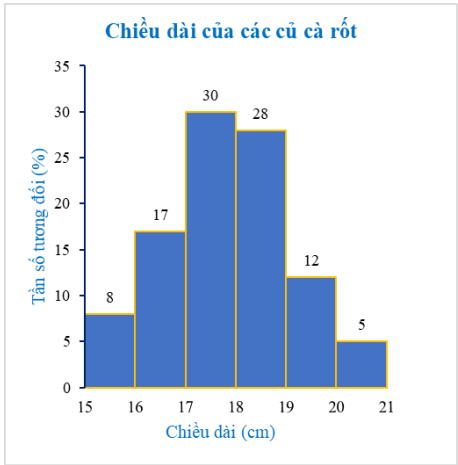
Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho dữ liệu trên.

Bước 1. Vẽ các trục của biểu đồ, xác định đơn vị độ dài trên trục đứng, các nhóm trên trục ngang (Hình a).

Bước 2. Dựng các hình cột kề nhau ứng với các nhóm số liệu.



Bước 3. Ghi chú giải cho các trục, các cột và tiêu đề của biểu đồ.



7.21. Thời gian chờ mua vé xem bóng đá của một số cổ động viên được cho như sau:

Thời gian (phút)	[0;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Số cổ động viên	15	38	50	27	20	10

a) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho bảng thống kê thu được ở câu a.

Lời giải

Tổng số cổ động viên là: $n = 15 + 38 + 50 + 27 + 20 + 10 = 160$.

Tỉ lệ số cổ động viên có thời gian chờ từ 0 phút đến dưới 5 phút là $\frac{15}{160} \cdot 100\% = 9,375\%$;

Tỉ lệ số cổ động viên có thời gian chờ từ 5 phút đến dưới 10 phút là $\frac{38}{160} \cdot 100\% = 23,75\%$;

Tỉ lệ số cổ động viên có thời gian chờ từ 10 phút đến dưới 15 phút là $\frac{50}{160} \cdot 100\% = 31,25\%$;

Tỉ lệ số cổ động viên có thời gian chờ từ 15 phút đến dưới 20 phút là $\frac{27}{160} \cdot 100\% = 16,875\%$;

Tỉ lệ số cổ động viên có thời gian chờ từ 20 phút đến dưới 25 phút là $\frac{20}{160} \cdot 100\% = 12,5\%$;

Tỉ lệ số cổ động viên có thời gian chờ từ 25 phút đến dưới 30 phút là $\frac{10}{160} \cdot 100\% = 6,25\%$.

Ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[0;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Tần số tương đối	9,375%	23,75%	31,25%	16,875%	12,5%	6,25%

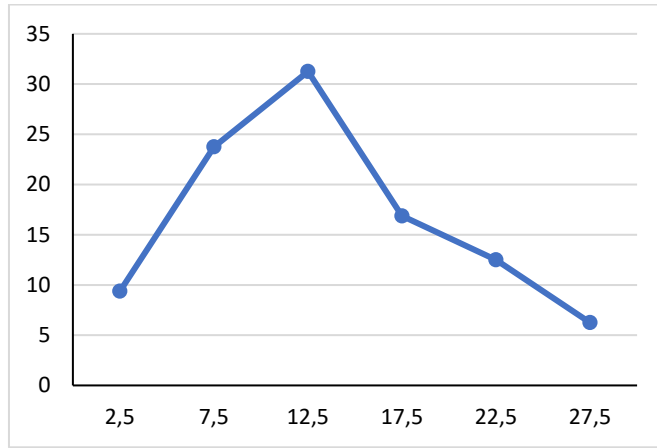
Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho dữ liệu trên như sau:

Bước 1. Chọn giá trị đại diện cho các nhóm số liệu ta có bảng sau:

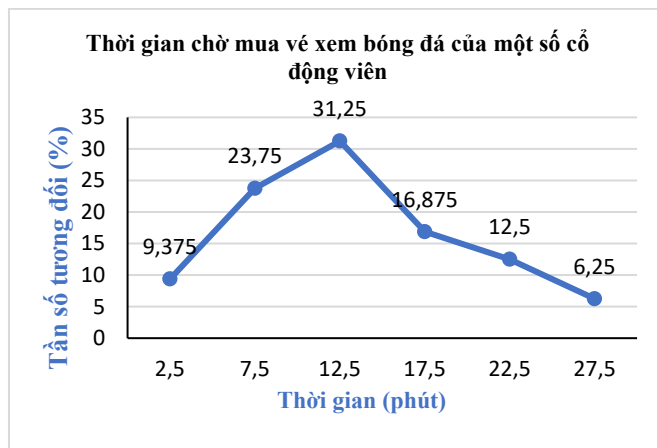
Thời gian (phút)	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
Tần số tương đối	9,375%	23,75%	31,25%	16,875%	12,5%	6,25%

Bước 2. Vẽ các trục .

Bước 3. Xác định các điểm, nối các điểm liên tiếp với nhau.



Bước 4. Ghi chú cho các trục, các điểm và tiêu đề của biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm.



D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Thống kê thời gian đi từ nhà đến cơ quan (đơn vị tính là phút) của 40 nhân viên một công ty được kết quả như sau:

9	12	59	47	53	5	14	32	35	40	35	10	10	4	8	20	28	23	42	44
33	39	18	20	16	25	29	27	18	17	20	23	27	29	31	41	40	40	55	50

a) Hoàn thiện bảng tần số ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	$[0;15)$	$[15;30)$	$[30;45)$	$[45;60)$
Tần số	?	?	?	?

b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho bảng tần số ghép nhóm thu được.

Lời giải

a) Có 8 nhân viên của công ty đi làm hết dưới 15 phút; 15 nhân viên đi làm hết từ 15 phút đến dưới 30 phút; 12 nhân viên đi làm hết từ 30 phút đến dưới 45 phút; 5 nhân viên đi làm hết từ 45 phút đến dưới 60 phút.

Ta có bảng tần số ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	$[0;15)$	$[15;30)$	$[30;45)$	$[45;60)$
Tần số	8	15	12	5

b) Số nhân viên của công ty là $n = 40$. Các tần số tương đối tương ứng là:

$$f_1 = \frac{8}{40} \cdot 100\% = 20\%; f_2 = \frac{15}{40} \cdot 100\% = 37,5\%; f_3 = \frac{12}{40} \cdot 100\% = 30\%; f_4 = \frac{5}{40} \cdot 100\% = 12,5\%$$

Ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[0;15)	[15;30)	[30;45)	[45;60)
Tần số tương đối	20%	37,5%	30%	12,5%

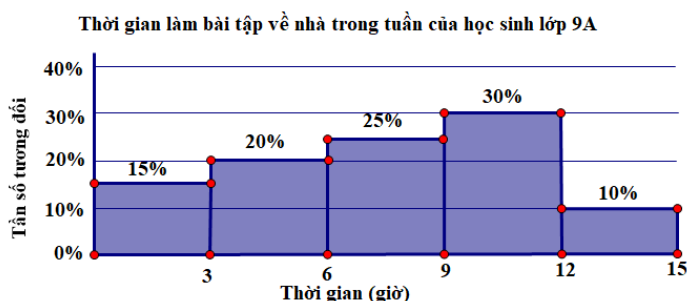
Câu 2: Cho bảng tần số tương đối ghép nhóm về thời gian làm bài tập về nhà trong tuần (đơn vị tính là giờ) của 40 bạn học sinh lớp 9A.

Thời gian (giờ)	[0;3)	[3;6)	[6;9)	[9;12)	[12;15)
Tần số tương đối	15%	20%	25%	30%	10%

- Tính tỉ lệ học sinh trong lớp dành ít nhất 6 giờ trong tuần để làm bài tập về nhà.
- Có bao nhiêu học sinh lớp 9 A dành ít nhất 6 giờ trong tuần để làm bài tập về nhà?
- Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm trên.

Lời giải

- Tỉ lệ học sinh trong lớp dành ít nhất 6 giờ trong tuần để làm bài tập về nhà là:
 $25\% + 30\% + 10\% = 65\%$.
- Số học sinh lớp 9 A dành ít nhất 6 giờ trong tuần để làm bài tập về nhà là: $40 \cdot 65\% = 26$ (học sinh).
- Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột:



Câu 3. Bảng tần số ghép nhóm sau cho biết cân nặng của một số con voi khi vừa sinh ra (đơn vị tính là kg):

Cân nặng (kg)	[110;115)	[115;120)	[120;125)	[125;130)
Tần số	8	15	17	10

- Đọc và giải thích dữ liệu cho bởi bảng tần số ghép nhóm trên.
- Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm.

Lời giải

- Khi mới sinh, có 8 con voi có cân nặng từ 110 kg đến dưới 115kg; 15 con có cân nặng từ 115 kg đến dưới 120kg; 17 con có cân nặng từ 120 kg đến dưới 125kg; 10 con có cân nặng từ 125 kg đến dưới 130 kg.

b) Tổng số con voi là $n = 8 + 15 + 17 + 10 = 50$. Các tần số tương đối tương ứng là:

$$\frac{8}{50} \cdot 100\% = 16\%; \frac{15}{50} \cdot 100\% = 30\%; \frac{17}{50} \cdot 100\% = 34\%; \frac{10}{50} \cdot 100\% = 20\%$$

Ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm sau:

Cân nặng (kg)	[110;115)	[115;120)	[120;125)	[125;130)
Tần số tương đối	16%	30%	34%	20%

Câu 4. Một nhóm học sinh lớp 9B thực hiện 20 lần đo hiệu điện thế và cường độ dòng điện để xác định công suất của một chiếc quạt điện và thu được bảng tần số tương đối ghép nhóm sau:

Công suất (W)	[72;73)	[73;74)	[74;75)	[75;76)	[76;77)
Tần số tương đối	10%	20%	30%	25%	15%

a) Đọc và giải thích thông tin của hai nhóm dữ liệu cho bởi bảng tần số tương đối ghép nhóm trên.

b) Lập bảng tần số ghép nhóm cho kết quả 20 lần đo của nhóm học sinh.

Lời giải

a) Nhóm [72;73) có tần số tương đối là 10% tức là có 10% số lần đo cho kết quả có giá trị từ 72 W đến dưới 73 W. Nhóm [73;74) có tần số tương đối là 20% tức là có 20% số lần đo cho kết quả có giá trị từ 73 W đến dưới 74 W.

b) Các tần số tương ứng là $20 \cdot 10\% = 2$; $20 \cdot 20\% = 4$; $20 \cdot 30\% = 6$; $20 \cdot 25\% = 5$; $20 \cdot 15\% = 3$.

Ta có bảng tần số ghép nhóm sau:

Công suất (W)	[72;73)	[73;74)	[74;75)	[75;76)	[76;77)
Tần số	2	4	6	5	3

Câu 5. Một phòng khám đo và ghi lại huyết áp tâm thu (đơn vị tính là mmHg) của một số người đến khám bệnh thu được kết quả như sau:

118 100 107 135 127 158 179 95 127 130 135 116 182 166 164
99 112 129 134 144 158 97 175 110 99 128 134 192 149 135 90

Theo Hiệp hội Tim mạch Hoa Kỳ, người bình thường có huyết áp tâm thu từ 90mmHg đến dưới 120mmHg, người ở dạng tiền tăng huyết áp có huyết áp tâm thu từ 120mmHg đến dưới 140mmHg; người bị tăng huyết áp có huyết áp tâm thu lớn hơn hoặc bằng 140mmHg.

Lập bảng tần số ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm cho dãy số liệu trên theo các mức bệnh huyết áp.

Lời giải

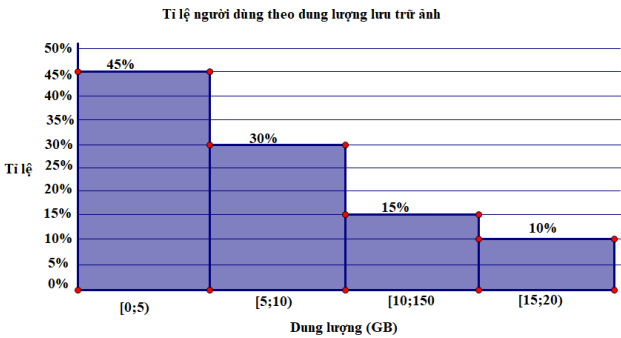
Bảng tần số ghép nhóm:

Mức huyết áp (mmHg)	[90;120) Bình thường	[120;140) Tiền tăng huyết áp	Từ 140 trở lên Tăng huyết áp
Tần số	11	11	9

Bảng tần số tương đối ghép nhóm:

Mức huyết áp (mmHg)	[90;120)	[120;140)	Từ 140 trở lên
	Bình thường	Tiền tăng huyết áp	Tăng huyết áp
Tần số	35,5%	35,5%	29%

Câu 6. Một công ty quản lý phần mềm ứng dụng trực tuyến đã thống kê tỉ lệ người dùng phần mềm này theo dung lượng bộ nhớ dành cho lưu trữ ảnh và biểu diễn dưới dạng biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột như sau:



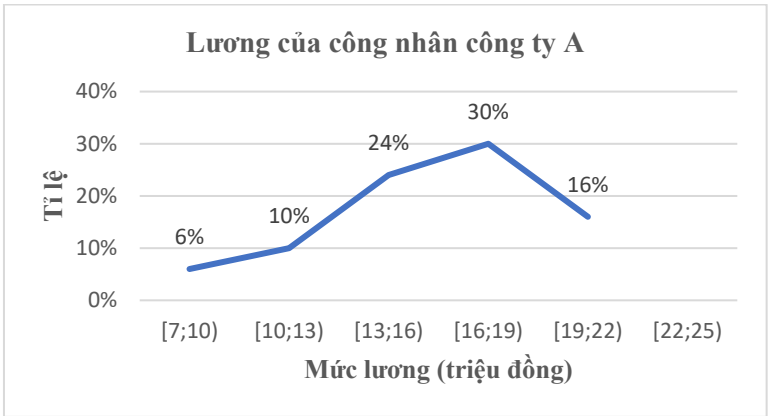
Lời giải

a) Nhóm [0;5) có tỉ lệ là 45% nghĩa là có 45% người dùng phần mềm ứng dụng có dung lượng bộ nhớ dùng để lưu trữ ảnh dưới 5 GB.

b) Bảng tần số tương đối ghép nhóm:

Dung lượng (GB)	[0;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20)
Tần số tương đối	45%	30%	15%	10%

Câu 7. Cho biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng sau:



- a) Đọc và giải thích thông tin về hai nhóm dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.
- b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.
- c) Biết rằng công ty A có 300 người, lập bảng tần số ghép nhóm cho lương của công nhân công ty này.

Lời giải

a).b) Bảng tần số tương đối ghép nhóm:

Mức lương	[7;10)	[10;13)	[13;16)	[16;19)	[19;22)	[22;25)
-----------	--------	---------	---------	---------	---------	---------

(triệu đồng)						
Tần số tương đối	6%	10%	24%	30%	16%	14%

c) Bảng tần số ghép nhóm:

Mức lương (triệu đồng)	[7;10)	[10;13)	[13;16)	[16;19)	[19;22)	[22;25)
Tần số	18	30	72	90	48	42

Câu 8. Bảng thống kê sau cho biết thời gian học tiếng Anh (đơn vị là năm, tính từ lúc bắt đầu học tiếng Anh đến thời điểm khảo sát) của một số học sinh lớp 9.

Thời gian (năm)	[0;2)	[2;4)	[4;6)	[6;8)	[8;10)
Số học sinh	8	12	15	10	5

a) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho bảng thống kê trên.

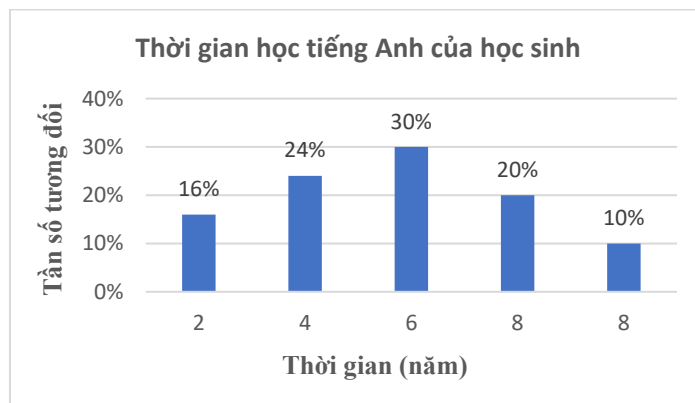
b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm thu được ở câu a.

Lời giải

a) Tổng số học sinh $n = 50$. Các tần số tương đối tương ứng là:

$$\frac{8}{50} \cdot 100\% = 16\%; \frac{12}{50} \cdot 100\% = 24\%; \frac{15}{50} \cdot 100\% = 30\%; \frac{10}{50} \cdot 100\% = 20\%; \frac{5}{50} \cdot 100\% = 10\%$$

b) Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột là



Câu 9. Bảng tần số ghép nhóm sau cho biết thành tích luyện tập của một vận động viên nghiệp dư chạy marathon 42 km.

Thời gian (giờ)	[6;6,5)	[6,5;7)	[7;7,5)	[7,5;8)	[8;8,5)
Số lần	2	6	7	4	1

a) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho bảng thống kê trên.

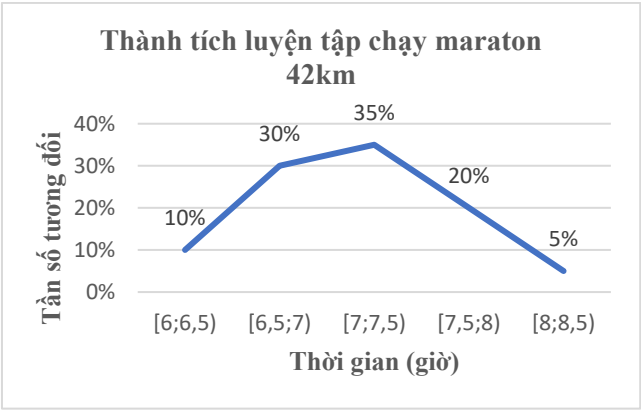
b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm thu được.

Lời giải

a) Số vận động viên là $n = 20$. Các tần số tương đối tương ứng là:

$\frac{2}{20} \cdot 100\% = 10\%; \frac{6}{20} \cdot 100\% = 30\%; \frac{7}{20} \cdot 100\% = 35\%; \frac{4}{20} \cdot 100\% = 20\%; \frac{1}{20} \cdot 100\% = 5\%$

b) Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng:



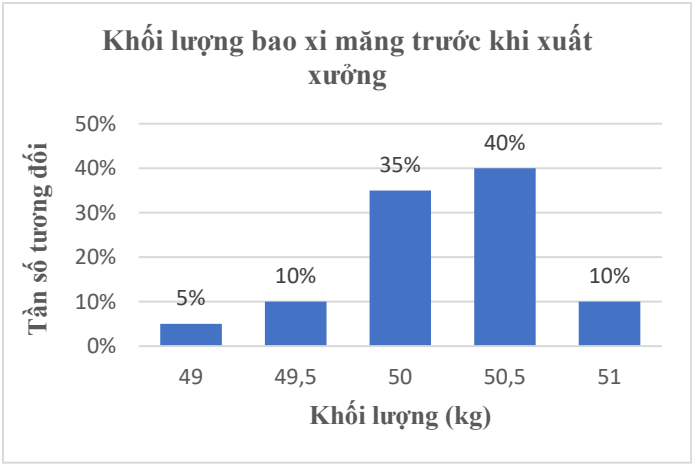
Câu 10. Kiểm tra khối lượng của một số bao xi măng trước khi xuất xưởng cho kết quả như sau:

Khối lượng (kg)	[48,5;49)	[49;49,5)	[49,5;50)	[50;50,5)	[50,5;51)
Tỉ lệ	5%	10%	35%	40%	10%

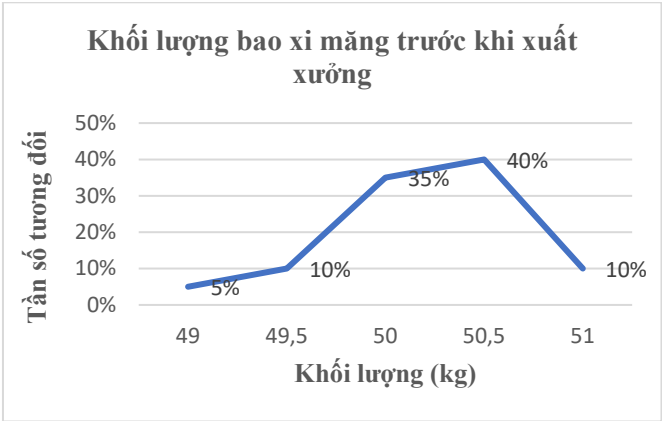
Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột và dạng đoạn thẳng biểu diễn dữ liệu trên.

Lời giải

Biểu đồ tần số ghép nhóm dạng cột:



Bảng tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng:



D. 30 .

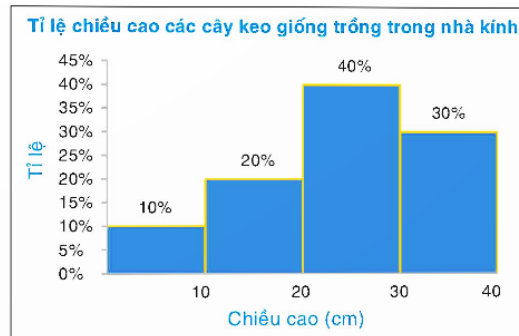
Lời giải

Chọn B

Giá trị nào đại diện cho nhóm số liệu $[10; 20)$ là: $\frac{10+20}{2} = 15$.

B. TỰ LUẬN

7.26. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm Hình 7.22 cho biết tỉ lệ chiều cao của các cây keo giống do một kĩ sư lâm nghiệp đã trồng trong nhà kính.



Hình 7.22

Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

Lời giải

Từ biểu đồ Hình 7.22, ta thấy tỉ lệ cây có chiều cao từ 0 cm đến dưới 10 cm chiếm 10%; tỉ lệ cây có chiều cao từ 10 cm đến dưới 20 cm chiếm 20%; tỉ lệ cây có chiều cao từ 20 cm đến dưới 30 cm chiếm 40%; tỉ lệ cây có chiều cao từ 30 cm đến dưới 40 cm chiếm 30%.

Ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ như sau:

Chiều cao (cm)	$[0;10)$	$[10;20)$	$[20;30)$	$[30;40)$
Tần số tương đối	10%	20%	40%	30%

7.27. Kĩ sư lâm nghiệp trên cũng trồng một số cây keo giống khác ngoài trời và thu được kết quả như sau:

Chiều cao (cm)	$[0;10)$	$[10;20)$	$[20;30)$	$[30;40)$
Số cây	5	9	4	2

a) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê trên.

b) Từ biểu đồ vừa vẽ và biểu đồ cho trong bài tập 7.26, hãy so sánh chiều cao của các cây keo giống được trồng trong nhà kính và trồng ngoài trời.

Lời giải

a) Tổng số cây là: $n = 5 + 9 + 4 + 2 = 20$.

Tỉ lệ cây có chiều cao từ 0 cm đến dưới 10 cm là $\frac{5}{20} \cdot 100\% = 25\%$;

Tỉ lệ cây có chiều cao từ 10 cm đến dưới 20 cm là $\frac{9}{20} \cdot 100\% = 45\%$;

Tỉ lệ cây có chiều cao từ 20 cm đến dưới 30 cm là $\frac{4}{20} \cdot 100\% = 20\%$;

Tỉ lệ cây có chiều cao từ 30 cm đến dưới 40 cm là $\frac{2}{20} \cdot 100\% = 10\%$.

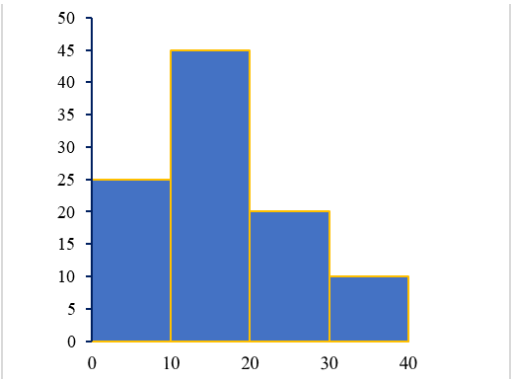
Ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm như sau:

Chiều cao (cm)	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40)
Tần số tương đối	25%	45%	20%	10%

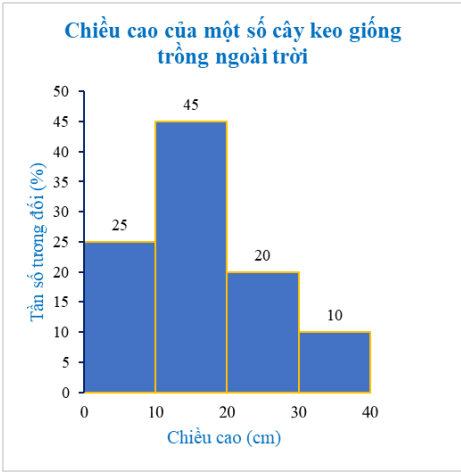
- Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê:

Bước 1. Vẽ các trục của biểu đồ, xác định đơn vị độ dài trên trục đứng, các nhóm trên trục ngang (Hình a).

Bước 2. Dựng các hình cột kề nhau ứng với các nhóm số liệu



Bước 3. Ghi chú giải cho các trục, các cột và tiêu đề của biểu đồ



b) Từ biểu đồ vừa vẽ và biểu đồ cho trong bài tập 7.26 , ta thấy các cây keo giống được trồng trong nhà kính sinh trưởng tốt hơn, cụ thể đạt được chiều cao tốt hơn các cây keo giống trồng ngoài trời. Tỉ lệ cây keo giống đạt được độ cao [20;30) và [30;40) khi trồng trong nhà kính đều lớn hơn khi trồng ngoài trời.

7.28. Tỉ lệ học sinh bình chọn cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất trong giải bóng đá của trường được cho trong bảng sau:

Cầu thủ	Huy	Minh	An	Thảo
---------	-----	------	----	------

Tỉ lệ học sinh bình chọn	30%	25%	10%	35%
--------------------------	-----	-----	-----	-----

Biết rằng có 500 học sinh tham gia bình chọn.

- a) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối trên.
- b) Lập bảng tần số biểu diễn số học sinh bình chọn cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất trong giải bóng đá của trường.

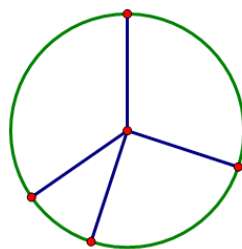
Lời giải

- a) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối trên:

Bước 1. Xác định số đo cung tương ứng của các hình quạt biểu diễn các tần số tương đối cho mỗi cầu thủ

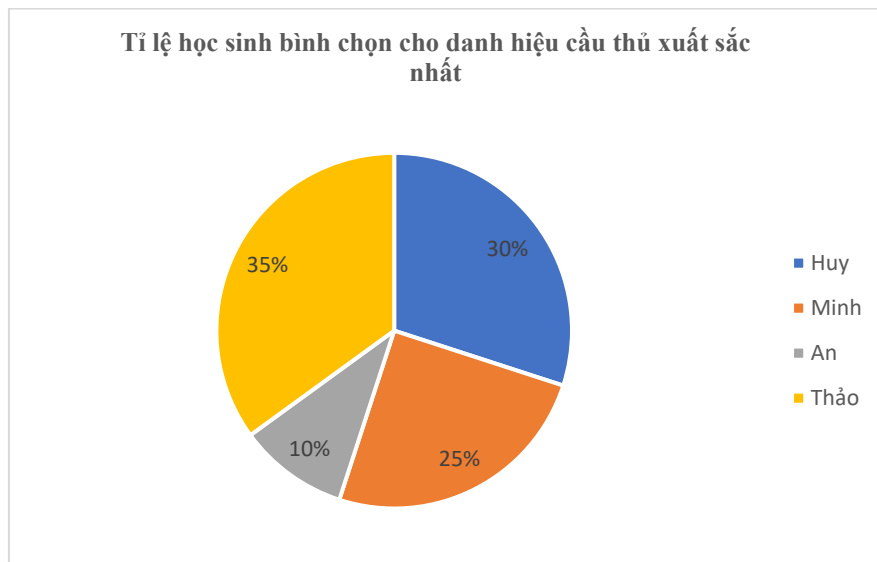
Huy: $360^\circ \cdot 30\% = 108^\circ$; Minh: $360^\circ \cdot 25\% = 90^\circ$; An: $360^\circ \cdot 10\% = 36^\circ$; Thảo: $360^\circ \cdot 35\% = 126^\circ$.

Bước 2. Vẽ hình tròn và chia hình tròn thành các hình quạt.



Hình a

Bước 3. Định dạng các hình quạt tròn, ghi tỉ lệ phần trăm, chú giải và tiêu đề.



- b) Số học sinh bình chọn Huy là cầu thủ xuất sắc nhất là: $500 \cdot 30\% = 150$

Số học sinh bình chọn Minh là cầu thủ xuất sắc nhất là: $500 \cdot 25\% = 125$

Số học sinh bình chọn An là cầu thủ xuất sắc nhất là: $500 \cdot 10\% = 50$

Số học sinh bình chọn Thảo là cầu thủ xuất sắc nhất là: $500 \cdot 35\% = 175$

Ta có bảng tần số biểu diễn số học sinh bình chọn cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất trong giải bóng đá của trường như sau:

Cầu thủ	Huy	Minh	An	Thảo
Số học sinh bình chọn	150	125	50	175

7.29. Qua đợt khám mắt, lớp 9A có 20 học sinh bị cận thị trong đó có 10 học sinh cận thị nhẹ, 8 học sinh cận thị vừa và 2 học sinh cận thị nặng. Biết rằng cận thị có số đo từ 0,25 đến dưới 3,25 dioptrơ là cận thị nhẹ; từ 3,25 đến dưới 6,25 dioptrơ là cận thị vừa; từ 6,25 đến dưới 10,25 dioptrơ là cận thị nặng.

- a) Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối ghép nhóm theo độ cận thị của các học sinh này.
- b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho bảng tần số tương đối ghép nhóm thu được ở câu a.

Lời giải

a) - Vì có 10 học sinh có số đo từ 0,25 đến dưới 3,25 dioptrơ (cận thị nhẹ); 8 học sinh có số đo từ 3,25 đến dưới 6,25 dioptrơ (cận thị vừa) và 2 học sinh có số đo từ 6,25 đến dưới 10,25 dioptrơ (cận thị nặng) nên ta có bảng tần số ghép nhóm theo độ cận thị của các học sinh này như sau:

Độ cận thị	[0,25;3,25)	[3,25;6,25)	[6,25;10,25)
Tần số	10	8	2

- Ta có $n = 20$.

Tỉ lệ học sinh có độ cận thị từ 0,25 đến dưới 3,25 dioptrơ là: $\frac{10}{20} \cdot 100\% = 50\%$.

Tỉ lệ học sinh có độ cận thị từ 3,25 đến dưới 6,25 dioptrơ là: $\frac{8}{20} \cdot 100\% = 40\%$.

Tỉ lệ học sinh có độ cận thị từ 6,25 đến dưới 10,25 dioptrơ là: $\frac{2}{20} \cdot 100\% = 10\%$.

Ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm theo độ cận thị của các học sinh này như sau:

Độ cận thị	[0,25;3,25)	[3,25;6,25)	[6,25;10,25)
Tần số tương đối	50%	40%	10%

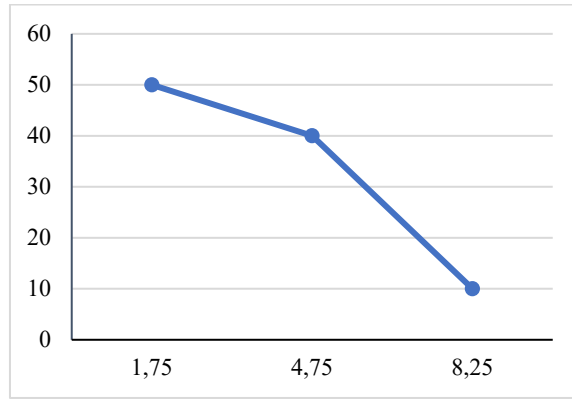
b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho dữ liệu trên như sau:

Bước 1. Chọn giá trị đại diện cho các nhóm số liệu ta có bảng sau:

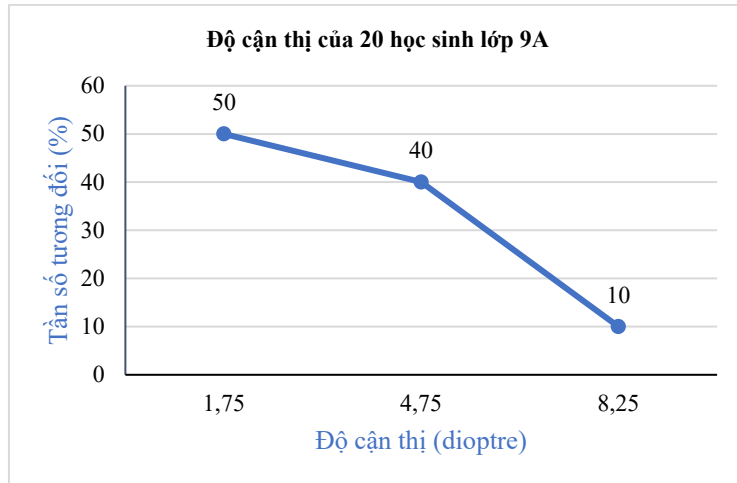
Độ cận thị	1,75	4,75	8,25
Tần số tương đối	50%	40%	10%

Bước 2. Vẽ các trục.

Bước 3. Xác định các điểm, nối các điểm liên tiếp với nhau.



Bước 4. Ghi chú cho các trục, các điểm và tiêu đề của biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm.



7.30. Lương của các công nhân một nhà máy được cho trong bảng sau:

Lương (triệu đồng)	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)
Số công nhân	20	50	70	40	20

a) Nêu các nhóm số liệu và tần số. Giải thích ý nghĩa cho một nhóm số liệu và tần số của nó.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê trên.

Lời giải

a) Nhóm số liệu [5; 7) có tần số là 20 . Nghĩa là: Mức lương từ 5 triệu đồng đến dưới 7 triệu đồng có 20 công nhân. Nhóm số liệu [7; 9) có tần số là 50 . Nghĩa là: Mức lương từ 7 triệu đồng đến dưới 9 triệu đồng có 50 công nhân. Nhóm số liệu [9 ; 11) có tần số là 70 . Nghĩa là: Mức lương từ 9 triệu đồng đến dưới 11 triệu đồng có 70 công nhân. Nhóm số liệu [11; 13) có tần số là 40 . Nghĩa là: Mức lương từ 11 triệu đồng đến dưới 13 triệu đồng có 40 công nhân. Nhóm số liệu [13; 15) có tần số là 20. Nghĩa là: Mức lương từ 13 triệu đồng đến dưới 16 triệu đồng có 20 công nhân.

b) Tổng số công nhân là: $n = 20 + 50 + 70 + 40 + 20 = 200$.

Tỉ lệ số công nhân có lương từ 5 triệu đồng đến dưới 7 triệu đồng là $\frac{20}{200} \cdot 100\% = 10\%$;

Tỉ lệ số công nhân có lương từ 7 triệu đồng đến dưới 9 triệu đồng là $\frac{50}{200} \cdot 100\% = 25\%$;

Tỉ lệ số công nhân có lương từ 9 triệu đồng đến dưới 11 triệu đồng là $\frac{70}{200} \cdot 100\% = 35\%$;

Tỉ lệ số công nhân có lương từ 11 triệu đồng đến dưới 13 triệu đồng là $\frac{40}{200} \cdot 100\% = 20\%$;

Tỉ lệ số công nhân có lương từ 13 triệu đồng đến dưới 15 triệu đồng là $\frac{20}{200} \cdot 100\% = 10\%$.

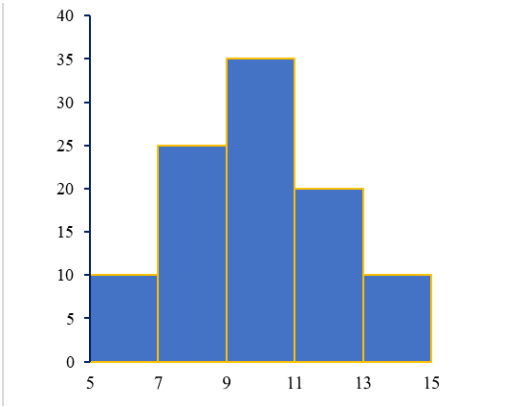
Ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm như sau:

Lương (triệu đồng)	[5;7)	[7;9)	[9;11)	[11;13)	[13;15)
Tần số tương đối	10%	25%	35%	20%	10%

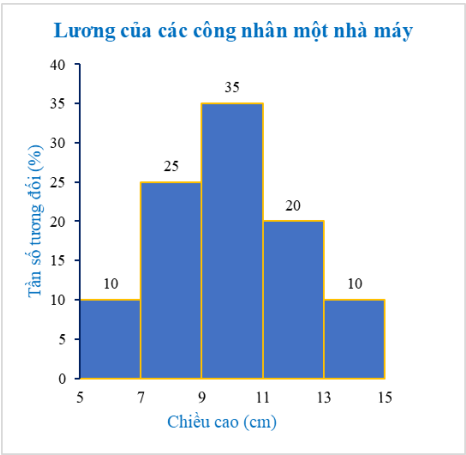
- Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê:

Bước 1. Vẽ các trục của biểu đồ, xác định đơn vị độ dài trên trục đứng, các nhóm trên trục ngang.

Bước 2. Dựng các hình cột kề nhau ứng với các nhóm số liệu.



Bước 3. Ghi chú giải cho các trục, các cột và tiêu đề của biểu đồ.



PHẦN 2. BÀI TẬP THÊM

A. TRẮC NGHIỆM

Sử dụng dữ liệu sau để trả lời các bài tập từ 1 đến 3.

Gieo một con xúc xắc 50 lần cho kết quả như sau:

Số chấm xuất hiện	1	2	3	4	5	6
Tần số tương đối	8	7	?	8	6	11

1. Tần số xuất hiện của mặt 3 chấm là:

- A. 9. B. 10. C. 11. D. 12.

Lời giải

Chọn C

Ta có $50 - (8 + 7 + 8 + 6 + 1) = 10$.

2. Tần số tương đối xuất hiện của mặt 5 chấm là:

- A. 6%. B. 8%. C. 12%. D. 14%.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\frac{6}{50}\% = 12\%$

3. Để biểu diễn bảng thống kê trên, không thể cùng loại biểu đồ nào sau đây?

- A. Biểu đồ tranh. B. Biểu đồ tần số dạng cột.
C. Biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng. D. Biểu đồ cột kép.

Lời giải

Chọn D

4. Cho bảng tần số tương đối ghép nhóm về thời gian đi từ nhà đến trường của học sinh lớp 9A như sau:

Thời gian đến trường (phút)	$[0;10)$	$[10;20)$	$[20;30)$
Tần số tương đối	20%	55%	25%

Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng, ta dùng giá trị nào đại diện cho nhóm số liệu $[10;20)$?

- A. 10. B. 15. C. 20. D. 30.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\frac{10+20}{2} = 15$

Sử dụng dữ liệu sau để trả lời các câu hỏi từ câu 5 đến câu 7.

Dữ liệu về điểm thi học kì môn Toán của 40 học sinh lớp 9D được cho như sau:

8 7 9 8 7 6 5 3 10 9 8 7 7 8 8 9 6 5 7 10
9 8 6 8 9 10 6 7 2 8 7 6 9 10 8 8 6 5 9 7

5. Tần số xuất hiện của điểm 8 trong dãy dữ liệu trên là

- A. 8. B. 9. C. 10. D. 11.

Lời giải

Chọn C

6. Tần số tương đối của điểm 10 trong dãy dữ liệu trên là

- A. 5%. B. 10% . C. 15% . D. 20% .

Lời giải

Chọn B

7. Để biểu diễn số lượng học sinh theo điểm thi môn Toán đạt được thì ta không thể dùng biểu đồ nào?

- A. Biểu đồ cột kép. B. Biểu đồ tần số dạng cột.
C. Biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng. D. Biểu đồ tranh.

Lời giải

Chọn A

Sử dụng dữ liệu sau để trả lời các câu hỏi từ câu 4 đến câu 6.

Bảng tần số tương đối ghép nhóm sau cho biết thông tin về tỉ lệ học sinh lớp 9A theo khoảng cách từ nhà đến trường:

Khoảng cách (km)	$[0;1)$	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;4)$
Tần số tương đối	25%	50%	$x\%$	10%

8. Giá trị của x là

- A. 10. B. 15. C. 20. D. 25.

Lời giải

Chọn B

9. Muốn biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm trên ta có thể dùng biểu đồ nào sau đây?

- A. Biểu đồ tần số ghép nhóm. B. Biểu đồ tần số dạng cột.
C. Biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng. D. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm.

Lời giải

Chọn D

10. Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng biểu diễn bảng thống kê trên ta chọn giá trị nào làm giá trị đại diện cho nhóm $[2;3)$?

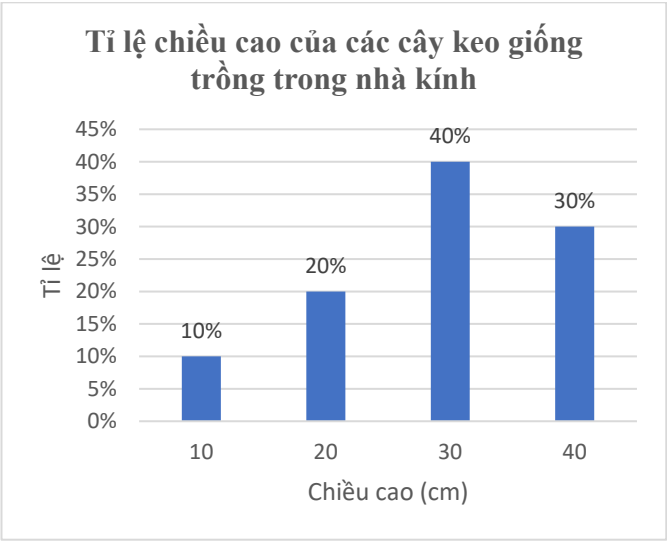
- A. 0,5 . B. 1,5 . C. 2,5 . D. 3,5 .

Lời giải

Chọn C

B. TỰ LUẬN

Câu 1. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm (hình vẽ) cho biết tỉ lệ chiều cao của các cây keo giống do một kỹ sư lâm nghiệp đã trồng trong nhà kính.



Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

Lời giải

Bảng tần số tương đối ghép nhóm:

Nhóm	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40)
Tần số tương đối	10%	20%	40%	30%

Câu 2. Kỹ sư lâm nghiệp trên cũng trồng một số cây keo giống khác ngoài trời thu được kết quả như sau:

Chiều cao (cm)	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40)
Số cây	5	9	4	2

- a) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê trên.
- b) Từ biểu đồ vừa vẽ và biểu đồ cho trong bài 1, hãy so sánh chiều cao của các cây keo giống được trồng trong nhà kính và trồng ngoài trời.

Lời giải

a) Bảng tần số tương đối ghép nhóm:

Chiều cao (cm)	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40)
Tần số tương đối	25%	45%	20%	10%

Dựa vào bảng trên, học sinh tự vẽ biểu đồ dạng cột. (Xem Ví dụ 8).

b) Trồng trong nhà kính cây lớn nhanh hơn.

Câu 3. Tỉ lệ học sinh bình chọn cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất trong giải bóng đá của trường được ghi trong bảng sau:

Cầu thủ	Huy	Minh	An	Thảo
---------	-----	------	----	------

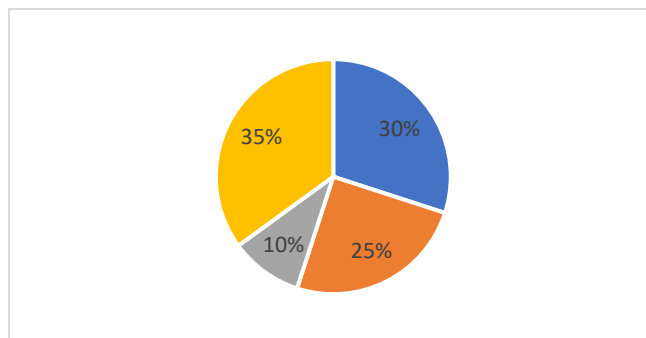
Tỉ lệ học sinh bình chọn	30%	25%	10%	35%
--------------------------	-----	-----	-----	-----

Biết rằng có 500 học sinh tham gia bình chọn.

- a) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối trên.
- b) Lập bảng tần số biểu diễn số học sinh bình chọn cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất trong giải bóng đá của trường.

Lời giải

- a) Xem hình vẽ.



Hình quạt tròn tương ứng với 30%; 25%; 10%; 35%. Có góc ở tâm là 108° ; 90° ; 36° ; 126°

- b) Bảng tần số: $500.30\% = 150$; $500.25\% = 125$; $500.10\% = 50$; $500.35\% = 175$

Cầu thủ	Huy	Minh	An	Thảo
Tỉ lệ học sinh bình chọn	150	125	50	175

Câu 4. Qua đợt khám mắt, lớp 9 A có 20 học sinh bị cận thị trong đó có 10 học sinh cận thị nhẹ, 8 học sinh cận thị vừa và 2 học sinh cận thị nặng. Biết rằng cận thị có số đo từ 0,25 đến dưới 3,25 dioptrơ là cận thị nhẹ; từ 3,25 đến dưới 6,25 dioptrơ là cận thị vừa; từ 6,25 đến dưới 10,25 dioptrơ là cận thị nặng.

- a) Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối ghép nhóm theo độ cận thị của các học sinh này.
- b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho bảng tần số tương đối ghép nhóm thu được ở câu a.

Lời giải

- a) Bảng tần số ghép nhóm - tần số tương đối ghép nhóm:

Ta có: $\frac{10}{20}\% = 50\%$; $\frac{8}{20}\% = 40\%$; $\frac{2}{20}\% = 10\%$;

Độ cận thị	$[0,25;3,25)$	$[3,25;6,25)$	$[6,25;10,25)$
Tần số	10	8	2
Tần số tương đối	50%	40%	10%

- b) Em tự vẽ hình (Xem Ví dụ 13).

Câu 5. Lương của các công nhân một nhà máy được cho trong bảng sau:

Lương (triệu đồng)	$[5;7)$	$[7;9)$	$[9;11)$	$[11;13)$	$[13;15)$
Số công nhân	20	50	70	40	20

- a) Nêu các nhóm số liệu và tần số. Giải thích ý nghĩa cho một nhóm số liệu và tần số của nó.
- b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê trên.

Lời giải

- a) Số người có lương từ 5 triệu đồng đến dưới 7 triệu đồng là 20 người;
 Số người có lương từ 7 triệu đồng đến dưới 9 triệu đồng là 50 người;
 Số người có lương từ 9 triệu đồng đến dưới 11 triệu đồng là 70 người;
 Số người có lương từ 11 triệu đồng đến dưới 13 triệu đồng là 40 người;
 Số người có lương từ 13 triệu đồng đến dưới 15 triệu đồng là 20 người.
 Các số ở dòng thứ hai chỉ tần số của bảng thống kê.

- b) Xem Ví dụ 13. Học sinh tự vẽ hình.

Câu 6. Kết thúc vòng tứ kết giải bóng đá của một trường Trung học cơ sở, có 4 đội lọt vào bán kết là các đội bóng lớp 9A, 9C, 8B và 7D. Ban tổ chức đã khảo sát học sinh trong trường với câu hỏi “Theo bạn, đội bóng nào sẽ vô địch?” với 4 phương án trả lời:

1. Đội bóng lớp 9A, 2. Đội bóng lớp 9C,
 3. Đội bóng lớp 8B, 4. Đội bóng lớp 7D,

và thu được 500 phản hồi với 150 lựa chọn phương án 1, 200 lựa chọn phương án 2, 50 lựa chọn phương án 3 và 100 lựa chọn phương án 4.

- a) Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối cho kết quả thu được.
- b) Tìm tỉ lệ học sinh không dự đoán hai đội bóng của khối lớp 9 vô địch giải bóng đá trường.
- c) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn tỉ lệ học sinh dự đoán mỗi đội vô địch.

Lời giải

- a) Bảng tần số

Đội bóng	9A	9C	8B	7D
Tần số	150	200	50	100

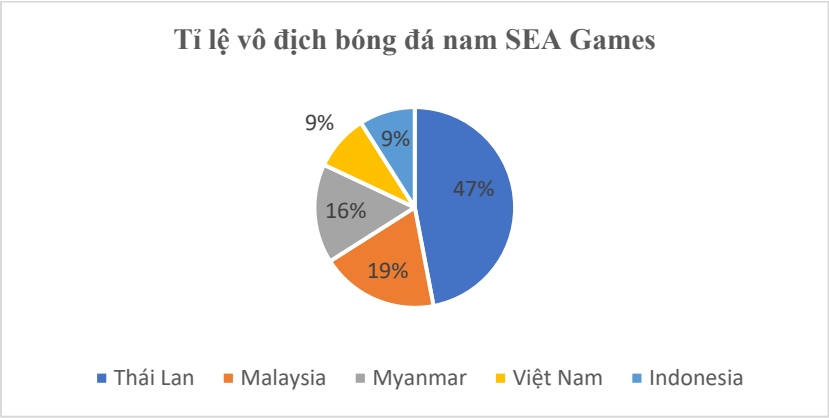
Bảng tần số tương đối:

Đội bóng	9A	9C	8B	7D
Tần số tương đối	30%	40%	10%	20%

- b) 30%

- c) Vẽ biểu đồ hình quạt theo các bước đã học.

Câu 7. Biểu đồ hình quạt tròn sau đây cho biết tỉ lệ vô địch bóng đá nam SEA Games của các đội bóng trong khu vực tính đến năm 2023.



(Theo Liên đoàn Bóng đá Đông Nam Á)

- a) Lập bảng tần số tương đối cho biết tỉ lệ vô địch bóng đá nam SEA Games của các quốc gia trong khu vực.
- b) Biết rằng tính đến năm 2023 môn Bóng đá nam đã được tổ chức ở 32 kì SEA Games. Lập bảng tần số cho số lần vô địch của các đội tuyển (làm tròn số liệu đến số nguyên gần nhất).
- c) Vẽ biểu đồ tần số dạng cột biểu diễn bảng tần số thu được ở câu b.
- d) Đội tuyển quốc gia nào có số lần vô địch bóng đá nam SEA Games nhiều nhất, với bao nhiêu lần?

Lời giải

a) Bảng tần số tương đối:

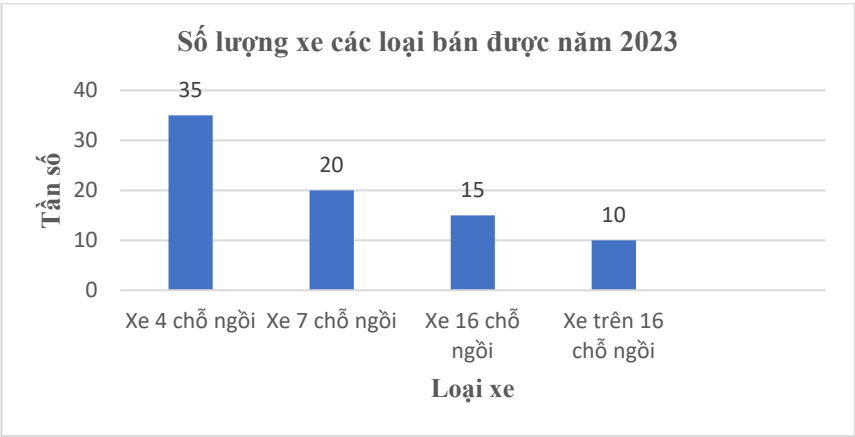
Đội tuyển	Thái Lan	Malaysia	Myanmar	Việt Nam	Indonesia
Tần số tương đối	47%	19%	16%	9%	9%

b) Bảng tần số:

Đội tuyển	Thái Lan	Malaysia	Myanmar	Việt Nam	Indonesia
Tần số	15	6	5	3	3

- c) Vẽ biểu đồ tần số dạng cột biểu diễn bảng tần số thu được ở câu b theo các bước đã học.
- d) Thái Lan là đội vô địch bóng đá nam SEA Games nhiều lần nhất, với 15 lần.

Câu 8. Biểu đồ sau cho biết số lượng các loại ô tô một cửa hàng bán được trong năm 2023:



- a) Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.
- b) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a.
- c) Giả sử tỉ lệ các loại xe bán được không đổi và cửa hàng bán được tổng số 200 ô tô các loại trong năm 2024. Hãy ước lượng số ô tô 7 chỗ cửa hàng bán được.

Lời giải

a) Bảng tần số:

Loại xe	4 chỗ	7 chỗ	16 chỗ	trên 16 chỗ
Tần số	35	20	15	10

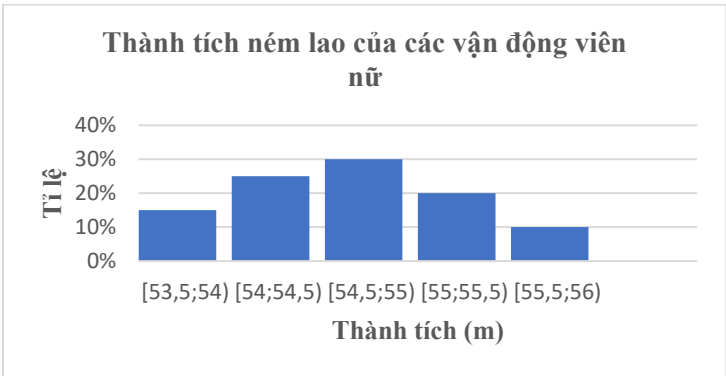
Bảng tần số tương đối:

Loại xe	4 chỗ	7 chỗ	16 chỗ	trên 16 chỗ
Tần số tương đối	43,75%	25%	18,75%	12,5%

b) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a theo các bước đã học.

c) 50 xe.

Câu 9. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm sau cho biết thành tích ném lao của các vận động viên nữ tại một giải đấu:



- a) Đọc và giải thích thông tin cho hai nhóm dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.
- b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho dữ liệu này.
- c) Biết rằng có 40 vận động viên nữ tham dự giải. Lập bảng tần số ghép nhóm (các tần số làm tròn đến số nguyên gần nhất).

Lời giải

a) Nhóm $[53,5;54)$ có tỉ lệ là 15% nghĩa là có 15% số vận động viên nữ có thành tích ném lao từ 53,5 m đến dưới 54 m. Nhóm $[54;54,5)$ có tỉ lệ 25% nghĩa là có 25% số vận động viên nữ có thành tích ném lao từ 54 m đến dưới 54,5 m.

b) Bảng tần số tương đối ghép nhóm:

Thành tích (m)	$[53,5;54)$	$[54;54,5)$	$[54,5;55)$	$[55;55,5)$	$[55,5;56)$
----------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------

Tần số tương đối	15%	25%	30%	20%	10%
------------------	-----	-----	-----	-----	-----

c) Các tần số tương ứng với các nhóm là: $40.15\% = 6$; $40.25\% = 10$;
 $40.30\% = 12$; $40.20\% = 8$; $40.10\% = 4$. Bảng tần số ghép nhóm:

Thành tích (m)	[53,5;54)	[54;54,5)	[54,5;55)	[55;55,5)	[55,5;56)
Tần số	6	10	12	8	4

Câu 10. Thành tích ném lao của 40 vận động viên nam trong giải thể thao trên được cho như sau:

Thành tích (m)	[70,5; 71)	[71; 71,5)	[71,5; 72)	[72; 72,5)	[72,5; 73)	[73; 73,5)
Số vận động viên	2	5	7	15	8	3

- a) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm.
b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm thu được ở câu a.
c) Từ biểu đồ thu được ở câu b và biểu đồ cho trong bài tập 7.28, hãy nhận xét về thành tích ném lao của các vận động viên nam và nữ.

Lời giải

a) Bảng tần số tương đối ghép nhóm:

Thành tích (m)	[70,5; 71)	[71; 71,5)	[71,5; 72)	[72; 72,5)	[72,5; 73)	[73; 73,5)
Tần số tương đối	5%	12,5%	17,5%	37,5%	20%	7,5%

- b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm thu được ở câu a theo các bước đã học.
c) Thành tích ném lao của vận động viên nam cao hơn của vận động viên nữ.

Câu 11. Dữ liệu dưới đây cho biết cỡ giày của một nhóm 30 học sinh tại trường Trung học cơ sở C:

32 33 36 34 33 32 36 34 35 34 32 33 34 36 35
34 34 34 34 34 35 34 35 33 34 34 34 35 33 34

- a) Lập bảng tần số cho dãy dữ liệu trên. Cỡ giày nào phù hợp với nhiều bạn nhất?
b) Lập bảng tần số tương đối cho dãy dữ liệu trên. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trường Trung học cơ sở C, hãy ước lượng xác suất để học sinh này đi giày cỡ 34 .
c) Bảng sau quy định cỡ giày theo chiều dài của bàn chân:

Chiều dài bàn chân (cm)	[19;19,4)	[19,4;19,7)	[19,7;20,6)	[20,6;21,6)	[21,6;22,2)
Cỡ giày	32	33	34	35	36

Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối ghép nhóm theo chiều dài bàn chân của nhóm học sinh trên.

Lời giải

a) Bảng tần số:

Cỡ giày	32	33	34	35	36
Tần số	3	5	13	6	3

Cỡ giày 34 phù hợp với nhiều bạn nhất.

b) Bảng tần số tương đối:

Cỡ giày	32	33	34	35	36
Tần số tương đối	10%	16,7%	43,3%	20%	10%

Ước lượng xác suất để một học sinh đi giày cỡ 34 là 43,3%.

c) Bảng tần số ghép nhóm theo chiều dài bàn chân là:

Chiều dài bàn chân (cm)	[19;19,4)	[19,4;19,7)	[19,7;20,6)	[20,6;21,6)	[21,6;22,2)
Tần số	3	5	13	6	3

Bảng tần số tương đối ghép nhóm theo chiều dài bàn chân:

Chiều dài bàn chân (cm)	[19;19,4)	[19,4;19,7)	[19,7;20,6)	[20,6;21,6)	[21,6;22,2)
Tần số tương đối	10%	16,7%	43,3%	20%	10%