CHUYÊN ĐỀ 12_BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CÁC CÂU TOÁN CỰC TRỊ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐỊNH NGHĨA

Bất đẳng thức là hai biểu thức nối với nhau bởi một trong các dấu > (lớn hơn), < (nhỏ hơn), ≥ (lớn hơn hoặc bằng), ≤ (nhỏ hơn hoặc bằng).

Ta có: $A > B \Leftrightarrow A - B > 0$

$A \ge B \Leftrightarrow A - B \ge 0$

□ Trong bất đẳng thức $A > B$ (hoặc $A < B, A \ge B, A \le B$), A gọi là vế trái, B gọi là vế phải của bất đẳng thức.

□ Các bất đẳng thức $A > B$ và $C > D$ gọi là hai bất đẳng thức cùng chiều. Các bất đẳng thức $A > B$ và $E < F$ gọi là hai bất đẳng thức trái chiều.

□ Nếu ta có $A > B \Rightarrow C > D$ ta nói bất đẳng thức $C > D$ là hệ quả của bất đẳng thức $A > B$.

□ Nếu ta có $A > B \Leftrightarrow E > F$ ta nói hai bất đẳng thức $A > B$ và $E > F$ là hai bất đẳng thức tương đương

□ $A > B$ (hoặc $A < B$) là bất đẳng thức ngặt: $A \ge B$ (hoặc $A \le B$) là bất đẳng thức không ngặt

□ $A \ge B$ là $A > B$ hoặc $A = B$

□ $A \ne B$ cũng là bất đẳng thức

□ Hai bất đẳng thức cùng chiều, hợp thành một dãy không mâu thuẫn gọi là bất đẳng thức kép.

Ví dụ: $A < B < C$

II. TÍNH CHẤT

□ Tính chất 1: *(tính chất bắc cầu)* $a > b$ và $b > c \Rightarrow a > c$

□ Tính chất 2: $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$

Hệ quả: $a > b + c \Leftrightarrow a - c > b$

□ Tính chất 3: $a > b$ và $c > d \Rightarrow a + c > b + d$

□ Tính chất 4: $a > b \Leftrightarrow \begin{cases} ac > bc \text{ neáu } c > 0 \\ ac < bc \text{ neáu } c < 0 \end{cases}$

□ Tính chất 5: $a > b > 0$ và $c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$

□ Tính chất 6: $a > b > 0$, n nguyên dương $\Rightarrow a^n > b^n$

□ Tính chất 7: $a > b > 0$, n nguyên dương $\Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

Hệ quả: $a, b \ge 0$

$a^2 \ge b^2 \Leftrightarrow a \ge b \Leftrightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$

□ Tính chất 8: $a > b, ab > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

□ Tính chất 9: $a > 1$, m và n nguyên dương, $m > n \Rightarrow a^m > a^n$;

$0 < a < 1$, m và n nguyên dương, $m > n \Rightarrow a^m < a^n$.

III. CHỨNG MINH BĐT

Muốn chứng minh một bất đẳng thức, ta phải dựa vào bất đẳng thức đúng đã biết.

Ghi nhớ: $\forall a$

1) $a^2 \ge 0; -a^2 \le 0$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$

2) $|a| \ge a \ge -|a|$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$

Có hai cách chứng minh bất đẳng thức:

□ *Cách 1:* Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh thành một bất đẳng thức tương đương mà ta đã biết là đúng.

□ *Cách 2:* Biến đổi tương đương bất đẳng thức đã biết thành bất đẳng thức cần chứng minh.

Sau đây là một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức. Khi giải một bài toán chứng minh bất đẳng thức, cần phải căn cứ vào đặc thù của bài toán mà chọn phương pháp thích hợp.

Mỗi bài toán có thể được giải bằng các phương pháp khác nhau, cũng có khi phải phối hợp nhiều phương pháp.

Phương pháp 1 (*Vận dụng định nghĩa và tính chất của bất đẳng thức*): Để chứng minh $A \ge B$, ta cần chứng minh $A - B \ge 0$

Phương pháp 2 (*Phương pháp biến đổi tương đương*): Để chứng minh $A \ge B$, ta dùng các tính chất của bất đẳng thức, biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh đến một bất đẳng thức đã biết là đúng.

Phương pháp giải 3: (Phương pháp làm trội) Để chứng minh $A \ge B$ nhiều khi ta phải chứng minh $A \ge C$ với C là biểu thức lớn hơn hoặc bằng B.

Từ đó ta có $A \ge B$, hoặc ta chứng minh $D \ge B$ với D là biểu thức nhỏ hơn hay bằng A: $D \le A$, từ đó ta có $A \ge B$.

Phương pháp giải 4: (*Phương pháp chứng minh phản chứng*) Để chứng minh $A \ge B$, ta giả sử $A < B$, từ đó lập luận để dẫn đến điều vô lí. Như vậy, ta đã dùng phương pháp chứng minh phản chứng.

Phương pháp giải 5: (*Phương pháp vận dụng các bài toán cơ bản về phân số)* Một số bài toán bất đẳng thức có dạng phân thức thường vận dụng các bài toán cơ bản về phân số.

Ta có hai bài toán cơ bản sau đây:

Bài toán 1. Với $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

a) Nếu $a < b$ thì $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+c}$

b) Nếu $a \ge b$ thì $\dfrac{a}{b} > \dfrac{a+c}{b+c}$

Hướng dẫn giải

a) $a < b \Rightarrow ac < bc \Rightarrow ab + ac < ab + bc \Rightarrow a(b+c) < b(a+c) \Rightarrow \dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+c}$.

b) Chứng minh tương tự.

Bài toán 2. Với $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng:

$$\textbf{a) } \frac{1}{xy} \ge \frac{4}{(x+y)^2}\textbf{; b) } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}\textbf{; c) } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \ge \frac{9}{x+y+z}$$

Hướng dẫn giải

a) $(x-y)^2 \ge 0 \Rightarrow (x-y)^2 + 4xy \ge 4xy \Rightarrow (x+y)^2 \ge 4xy \Rightarrow \dfrac{1}{xy} \ge \dfrac{4}{(x+y)^2}$

b) Từ a) ta có $(x+y)^2 \ge 4xy \Rightarrow \dfrac{x+y}{xy} \ge \dfrac{4}{x+y} \Rightarrow \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \ge \dfrac{4}{x+y}$.

c) $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) = 1 + 1 + 1 + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{x}{z} + \dfrac{z}{x}$

$= 9 + \left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} - 2\right) + \left(\dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{y} - 2\right) + \left(\dfrac{x}{z} + \dfrac{z}{x} - 2\right)$

$$=9+\frac{(x-y)^2}{xy}+\frac{(y-z)^2}{yz}+\frac{(x-z)^2}{xz}\ge 9 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge \frac{9}{x+y+z}$$

Các bài toán dạng “$>,<$” thường dùng bài toán 1, các bài toán dạng “$\ge,\le$ ” thường dùng bài toán 2. Khi dùng đến các bài toán này ta cần phải chứng minh rồi mới vận dụng.

Phương pháp giải 6: (*Phương pháp cơ bản về giá trị tuyệt đối*)Đối với một số bài toán bất đẳng thức có chứa giá trị tuyệt đối, ta có thể vận dụng các bài toán cơ bản về bất đẳng thức chứa giá trị tuyệt đối sau.

Bài toán 1. Chứng minh rằng:

a) $|a|+|b|\ge|a+b|$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow ab\ge 0$

b) $|a-b|\ge|a|-|b|$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow b(a-b)\ge 0$

Bài toán 2. Chứng minh rằng nếu $x,y\ne 0$ thì $\left|\frac{x}{y}\right|+\left|\frac{y}{x}\right|\ge\left|\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right|\ge 2$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x=\pm y$

Từ đó suy ra, nếu $m,n>0$, ta có:

1) $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\ge 2$ 2) $m+\frac{1}{m}\ge 2$.

Dùng biến đổi tương đương, ta dễ dàng chứng minh được các bài toán này.

Khi cần dùng đến các bài toán này, ta phải chứng minh rồi mới vận dụng.

Phương pháp giải 7: (*Phương pháp vận dụng BĐT liên hệ giữa tổng bình phương, bình phương của tổng, tích hai số*) Một số bài toán chứng minh bất đẳng thức có thể vận dụng các bất đẳng thức liên hệ giữa tổng bình phương, bình phương của tổng, tích hai số.

Bài toán 1. $2(x^2+y^2)\ge(x+y)^2\ge 4xy$

Bài toán 2. $3(x^2+y^2+z^2)\ge(x+y+z)^2\ge 3(xy+xz+yz)$.

Chú ý: Khi cần dùng đến các bài toán này, ta phải chứng minh rồi mới vận dụng.

Phương pháp giải 8: (*Phương pháp sử dụng các bài toán cơ bản về căn thức*)Khi giải một số bài toán bất đẳng thức có chứa căn thức bậc hai, ta có thể vận dụng các bài toán cơ bản về bất đẳng thức chứa căn thức.

Bài toán 1. Cho $a,\ b>0$. Chứng minh rằng: $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a=b$. (Bất đẳng thức Cô – si)

Bài toán 2. Chứng minh rằng $|ax+by|\le\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $ay=bx$. (Bất đẳng thức Bu – nhi – a– cop–xki).

Bài toán 3. Chứng minh rằng $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{x^2+y^2}\ge\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $ay=bx$. (Bất đẳng thức Min–cop–xki).

Khi cần dùng đến Bài toán 2 và 3, ta phải chứng minh rồi mới vận dụng.

Riêng Bài toán 1 (bát đẳng thức Cô–si), chúng ta được phép áp dụng mà không cần phải chứng

$x_1=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a},\ x_2=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$.

Phương pháp giải 8: (*Phương pháp vận dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai*) Một số bài toán chứng minh bất đẳng thức, có khi ta phải vận dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai.

Cần nhớ: Phương trình $ax^2+bx+c=0\ \ (a\ne 0)$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta < 0$: phương trình vô nghiệm

$\Delta = 0$: phương trình có nghiệm kép: $x = -\dfrac{b}{2a}$

$\Delta > 0$: phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Trường hợp $b = 2b'$ thì $\Delta' = b'^2 - ac$

$\Delta' < 0$: phương trình vô nghiệm

$\Delta' = 0$: phương trình có nghiệm kép: $x = -\dfrac{b'}{a}$

$\Delta' > 0$: phương trình có hai nghiệm phân biệt:

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Cho x, y, z, t là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+t}+\dfrac{z}{t+x}+\dfrac{t}{x+y} \ge 2$.

Câu 2: Cho *x, y, z* là 3 số thực dương thỏa mãn $x(x-z)+y(y-z)=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x^3}{x^2+z^2}+\dfrac{y^3}{y^2+z^2}+\dfrac{x^2+y^2+4}{x+y}$.

Câu 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}}{\sqrt{\dfrac{81}{x^2}-\dfrac{18}{x}+1}}$, với $x > 9$.

Câu 4: Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 2$. Chứng minh

$$\frac{x}{2x^2+y^2+5}+\frac{2y}{6y^2+z^2+6}+\frac{4z}{3z^2+4x^2+16} \le \frac{1}{2}.$$

Câu 5: Giả sử ba số thực a,b,c thỏa mãn điều kiện $a > 0$, $b = 3a^2$, $a+b+c = abc$. Chứng minh rằng: $a \ge \sqrt{\dfrac{1+2\sqrt{3}}{3}}$.

Câu 6: Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $\left(a^4+b^4\right)\left(b^4+c^4\right)\left(c^4+a^4\right)=8$. Chứng minh rằng

$$\left(a^2-ab+b^2\right)\left(b^2-bc+c^2\right)\left(c^2-ca+a^2\right) \ge 1.$$

Câu 7: Cho các số dương x, y, z thỏa mãn: $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}=2014$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}$.

Câu 8: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy+yz+xz=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2} \ge \frac{2}{3}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^3$$

Câu 9: Với x,y là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $4x^2+4y^2+17xy+5x+5y \ge 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 17x^2+17y^2+16xy$.

Câu 10: Cho a, b, c là ba số thực thỏa điều kiện $a+b+c=10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $M=a^2+b^2+c^2$.

Câu 11: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn: $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\frac{x}{1+y^2}+\frac{y}{1+z^2}+\frac{z}{1+x^2}$$

Câu 12: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=\frac{2}{1-x}+\frac{1}{x}$ với $0<x<1$.

Câu 13: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}+\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\ge 3$$

Câu 14: Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{350}{xy+yz+zx}+\frac{386}{x^2+y^2+z^2}>2015$$

Câu 15: Chứng minh rằng: $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+....+\frac{2014}{2^{2013}}+\frac{2015}{2^{2014}}<4$

Câu 16: Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện $(a+b)^3+4ab\le 12$. Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+2015ab\le 2016.$

Câu 17: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng: $a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{c^2+1}+c\sqrt{a^2+1}\ge 2$. Dấu "=" xảy ra khi nào?

Câu 18: Tìm GTNN của $\mathrm{A}=\frac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{x}+\mathrm{y}}+\frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{y}+\mathrm{z}}+\frac{\mathrm{z}^2}{\mathrm{z}+\mathrm{x}}$ biết x, y, z > 0, $\sqrt{\mathrm{xy}}+\sqrt{\mathrm{yz}}+\sqrt{\mathrm{zx}}=1$.

Câu 19:

a) Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh rằng $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$

b) Cho 3 số dương x, y, z thỏa điều kiện $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}$$

Câu 20: Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$

Câu 21: Cho x,y,z là ba số dương thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x+\sqrt{3x+yz}}+\frac{y}{y+\sqrt{3y+zx}}+\frac{z}{z+\sqrt{3z+xy}}\le 1$$

Câu 22: Cho x; y thỏa mãn $\begin{cases} x;y\in R \\ 0\le x;y\le \frac{1}{2}\end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{x}}{1+y}+\frac{\sqrt{y}}{1+x}\le \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 23: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 2xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x}{z(z+x)}+\frac{y}{x(x+y)}+\frac{z}{y(y+z)}$$

Câu 24: Cho a, b, c > 0 và a + b + c = 3. Chứng minh rằng $a^5 + b^5 + c^5 + \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 6$.

Câu 25: Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có ba góc nhọn. Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z ta luôn có: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}>\frac{2x^2+2y^2+2z^2}{a^2+b^2+c^2}$

Câu 26: Cho *a, b, c* là các số thực dương thỏa mãn $2ab+6bc+2ac=7abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C=\frac{4ab}{a+2b}+\frac{9ac}{a+4c}+\frac{4bc}{b+c}$.

Câu 27: Cho x, y là các số thực dương thoả mãn x + y = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B=\frac{1}{x^3+y^3}+\frac{1}{xy}$.

Câu 28: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{xy}{x^2+y^2}$.

Câu 29: Cho x; y thỏa mãn $\begin{cases} x;y\in R \\ 0\le x;y\le \frac{1}{2}\end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{x}}{1+y}+\frac{\sqrt{y}}{1+x}\le\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 30: Cho x, y là 2 số thực thoả mãn: $x^2 + 2y^2 + 2xy + 7x + 7y + 10 = 0$.
Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = x + y + 1$.

Câu 31: Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng: $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}$

Câu 32: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\frac{4x+3}{x^2+1}$

Câu 33: Cho a, b, c > 0 thỏa mãn a + b + c = 3. Chứng minh rằng: $\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\ge 3$

Câu 34: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q=\frac{2016x^2+2x+2016}{x^2+1}$

Câu 35: Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng: $1<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<2$

Câu 36: Cho tam giác ABC có chu vi 2p = a + b + c (a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác). Chứng minh rằng : $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\ge 2.\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

Câu 37: Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$

Câu 38: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa $ab+bc+ca=3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\frac{a^3}{c+a^2}+\frac{b^3}{a+b^2}+\frac{c^3}{b+c^2}$.

Câu 39: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng $abc + 2(1 + a + b + c + ab + ac + bc) \geq 0$.

Câu 40: Cho a, b,c là ba số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc}+\frac{a^2+b^2}{c^2+ab}+\frac{b^2+c^2}{a^2+bc}+\frac{c^2+a^2}{b^2+ca}.$$

Câu 41: Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a}{9a^3+3b^2+c}+\frac{b}{9b^3+3c^2+a}+\frac{c}{9c^3+3a^2+b}$$

Câu 42: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\leq xyz$$

Câu 43: Chứng minh với mọi số nguyên dương n lớn hơn 1 ta có $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4...\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}}<3$.

Câu 44: Cho ba số không âm x,y,z thỏa mãn $\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1+2y}+\frac{1}{1+2z}=2.$

Chứng minh rằng $xyz\leq\frac{1}{64}$.

Câu 45: Chứng minh $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{b+a}}>2$, với a, b, c>0

Câu 46: Cho a, b, c là 3 cạnh một tam giác. Chứng minh: $\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Câu 47:

a/ Cho hai số dương x, y thoả mãn x + y = 1.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(y^2+\frac{1}{x^2}\right)$

b/ Cho x, y, z là các số dương thoả mãn $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}=6$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{3x+3y+2z}+\frac{1}{3x+2y+3z}+\frac{1}{2x+3y+3z}\leq\frac{3}{2}$.

Câu 48: Cho tam giác ABC có chu vi bằng 2. Ký hiệu a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\frac{a}{b+c-a}+\frac{9b}{c+a-b}+\frac{16c}{a+b-c}$

Câu 49: Cho ba số dương a,b và c thoả mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3}\leq\frac{1}{2}.$$

Câu 50: Các số thực dương x, y, z thoả mãn điều kiện: x + y +z = 1.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$F=\frac{x^4}{(x^2+y^2)(x+y)}+\frac{y^4}{(y^2+z^2)(y+z)}+\frac{z^4}{(z^2+x^2)(z+x)}$$

Câu 51: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} a\neq 0 \\ \frac{2b}{a}\geq \frac{c}{a}+4 \end{cases}$.

Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm.

Câu 52: Cho x, y, z > 0 thoả mãn x + y + z = 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$

Câu 53: Với x, y là hai số thực thỏa mãn $y^3+3y^2+5y+3=11\sqrt{9-x^2}-\sqrt{9x^4-x^6}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x-y+2018$.

Câu 54: Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c}\geq 2(a+b+c)$.

Câu 55: Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 3 thì $3a^2+3b^2+3c^2+4abc\geq 13$.

Câu 56: minh bất đẳng thức $\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{c-1}+\frac{c^2}{d-1}+\frac{d^2}{a-1}\geq 16$.

Câu 57: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $(a+c)(b+c)=4c^2$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a}{b+3c}+\frac{b}{a+3c}+\frac{ab}{bc+ca}$.

Câu 58: Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$

Chứng minh rằng $a\sqrt{b^3+1}+b\sqrt{c^3+1}+c\sqrt{a^3+1}\leq 5$

Câu 59: Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$.

Chứng minh $\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}\geq\frac{3}{4}$.

Câu 60: Chứng minh rằng: $\frac{x}{x^2-yz+2019}+\frac{y}{y^2-zx+2019}+\frac{z}{z^2-xy+2019}\geq\frac{1}{x+y+z}$

Câu 61: Cho $a>0$, $b>0$. Chứng minh $\sqrt{a}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-1\right)\geq\sqrt{b}\left(1-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$. Dấu "=" xảy ra khi nào?

Câu 62: Cho x; y; z là các số thực dương thoả mãn: xyz = 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A=\frac{1}{x^3+y^3+1}+\frac{1}{y^3+z^3+1}+\frac{1}{z^3+x^3+1}$

Câu 63: Cho x, y, z là ba số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+xz}+\frac{1}{z^2+xy}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)$$

Câu 64: Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x\ge z$. Chứng minh rằng

$$\frac{xz}{y^2+yz}+\frac{y^2}{xz+yz}+\frac{x+2z}{x+z}\ge\frac{5}{2}.$$

Câu 65: Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2+c^2\le 12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=4\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)$

Câu 66: Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 67: Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$.

Câu 68: Cho $x,y,z>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T=\frac{x}{3\sqrt{x+2y-1}-4}+\frac{y}{3\sqrt{y+2z-1}-4}+\frac{z}{3\sqrt{z+2x-1}-4}$$

Câu 69: Cho ba số dương a,b,c thoả mãn: $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}=\sqrt{2011}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2011}{2}}$.

Câu 70: Cho *x, y, z* là các số thực dương thỏa mãn $\mathrm{x+y+z=xyz}$.

Chứng minh rằng: $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\le xyz$

Câu 71: Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $0\le \mathrm{a}\le \mathrm{b}\le \mathrm{c}\le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B=(a+b+c+3)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)$.

Câu 72: Cho x, y là các số thực dương thoả mãn: $\frac{1}{\mathrm{x}}+\frac{2}{\mathrm{y}}=2$. Chứng minh rằng:

$$5\mathrm{x}^2+\mathrm{y}-4\mathrm{xy}+\mathrm{y}^2\ge 3$$

Câu 73: Cho a,b,c là các số thực dương. CMR: $\frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{b+3c+2a}+\frac{ca}{c+3a+2b}\le\frac{a+b+c}{6}$

Câu 74: Chứng minh rằng: Với mọi số nguyên dương n, ta có: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}}<3.$

Câu 75: Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x^2+xy+y^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=x^3y+xy^3$.

Câu 76: Chứng minh rằng $(a+b+c)\left[\frac{3a-b}{a^2+ab}+\frac{3b-c}{b^2+bc}+\frac{3c-a}{c^2+ca}\right]\le 9$ với a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Suy ra $\Leftrightarrow \frac{5x-1}{x-x^2}+\frac{5y-1}{y-y^2}+\frac{5y-1}{z-z^2}\le 18\left(x+y+z\right)-9 \Leftrightarrow \frac{5x-1}{x-x^2}+\frac{5y-1}{y-y^2}+\frac{5y-1}{z-z^2}\le 9$

Câu 77: Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $2\sqrt{y}+\sqrt{z}=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Chứng minh rằng $\frac{3yz}{x}+\frac{4zx}{y}+\frac{5xy}{z}\ge 4$

CHUYÊN ĐỀ 12_BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CÁC CÂU TOÁN CỰC TRỊ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐỊNH NGHĨA

Bất đẳng thức là hai biểu thức nối với nhau bởi một trong các dấu > (lớn hơn), < (nhỏ hơn), ≥ (lớn hơn hoặc bằng), ≤ (nhỏ hơn hoặc bằng).

Ta có: $A > B \Leftrightarrow A - B > 0$

$A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0$

□ Trong bất đẳng thức $A > B$ (hoặc $A < B, A \geq B, A \leq B$), A gọi là vế trái, B gọi là vế phải của bất đẳng thức.

□ Các bất đẳng thức $A > B$ và $C > D$ gọi là hai bất đẳng thức cùng chiều. Các bất đẳng thức $A > B$ và $E < F$ gọi là hai bất đẳng thức trái chiều.

□ Nếu ta có $A > B \Rightarrow C > D$ ta nói bất đẳng thức $C > D$ là hệ quả của bất đẳng thức $A > B$.

□ Nếu ta có $A > B \Leftrightarrow E > F$ ta nói hai bất đẳng thức $A > B$ và $E > F$ là hai bất đẳng thức tương đương

□ $A > B$ (hoặc $A < B$) là bất đẳng thức ngặt: $A \geq B$ (hoặc $A \leq B$) là bất đẳng thức không ngặt

□ $A \geq B$ là $A > B$ hoặc $A = B$

□ $A \neq B$ cũng là bất đẳng thức

□ Hai bất đẳng thức cùng chiều, hợp thành một dãy không mâu thuẫn gọi là bất đẳng thức kép.

Ví dụ: $A < B < C$

II. TÍNH CHẤT

□ Tính chất 1: *(tính chất bắc cầu)* $a > b$ và $b > c \Rightarrow a > c$

□ Tính chất 2: $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$

Hệ quả: $a > b + c \Leftrightarrow a - c > b$

□ Tính chất 3: $a > b$ và $c > d \Rightarrow a + c > b + d$

□ Tính chất 4: $a > b \Leftrightarrow \begin{cases} ac > bc \text{ neáu } c > 0 \\ ac < bc \text{ neáu } c < 0 \end{cases}$

□ Tính chất 5: $a > b > 0$ và $c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$

□ Tính chất 6: $a > b > 0$, n nguyên dương $\Rightarrow a^n > b^n$

□ Tính chất 7: $a > b > 0$, n nguyên dương $\Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

Hệ quả: $a, b \geq 0$

$a^2 \geq b^2 \Leftrightarrow a \geq b \Leftrightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$

□ Tính chất 8: $a > b, ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

□ Tính chất 9: $a > 1$, m và n nguyên dương, $m > n \Rightarrow a^m > a^n$;

$0 < a < 1$, m và n nguyên dương, $m > n \Rightarrow a^m < a^n$.

III. CHỨNG MINH BĐT

Muốn chứng minh một bất đẳng thức, ta phải dựa vào bất đẳng thức đúng đã biết.

Ghi nhớ: $\forall a$

1) $a^2 \geq 0; -a^2 \leq 0$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$

2) $|a| \ge a \ge -|a|$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$

Có hai cách chứng minh bất đẳng thức:

□ *Cách 1:* Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh thành một bất đẳng thức tương đương mà ta đã biết là đúng.

□ *Cách 2:* Biến đổi tương đương bất đẳng thức đã biết thành bất đẳng thức cần chứng minh.

Sau đây là một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức. Khi giải một bài toán chứng minh bất đẳng thức, cần phải căn cứ vào đặc thù của bài toán mà chọn phương pháp thích hợp.

Mỗi bài toán có thể được giải bằng các phương pháp khác nhau, cũng có khi phải phối hợp nhiều phương pháp.

Phương pháp 1 (*Vận dụng định nghĩa và tính chất của bất đẳng thức*): Để chứng minh $A \ge B$, ta cần chứng minh $A - B \ge 0$

Phương pháp 2 (*Phương pháp biến đổi tương đương*): Để chứng minh $A \ge B$, ta dùng các tính chất của bất đẳng thức, biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh đến một bất đẳng thức đã biết là đúng.

Phương pháp giải 3: (Phương pháp làm trội) Để chứng minh $A \ge B$ nhiều khi ta phải chứng minh $A \ge C$ với C là biểu thức lớn hơn hoặc bằng B.

Từ đó ta có $A \ge B$, hoặc ta chứng minh $D \ge B$ với D là biểu thức nhỏ hơn hay bằng A: $D \le A$, từ đó ta có $A \ge B$.

Phương pháp giải 4: (*Phương pháp chứng minh phản chứng*) Để chứng minh $A \ge B$, ta giả sử $A < B$, từ đó lập luận để dẫn đến điều vô lí. Như vậy, ta đã dùng phương pháp chứng minh phản chứng.

Phương pháp giải 5: (*Phương pháp vận dụng các bài toán cơ bản về phân số)* Một số bài toán bất đẳng thức có dạng phân thức thường vận dụng các bài toán cơ bản về phân số.

Ta có hai bài toán cơ bản sau đây:

Bài toán 1. Với $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

a) Nếu $a < b$ thì $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+c}$

b) Nếu $a \ge b$ thì $\dfrac{a}{b} > \dfrac{a+c}{b+c}$

Hướng dẫn giải

a) $a < b \Rightarrow ac < bc \Rightarrow ab + ac < ab + bc \Rightarrow a(b+c) < b(a+c) \Rightarrow \dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+c}$.

b) Chứng minh tương tự.

Bài toán 2. Với $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng:

$$\textbf{a)}\ \frac{1}{xy} \ge \frac{4}{(x+y)^2}\textbf{; b)}\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}\textbf{; c)}\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge \frac{9}{x+y+z}$$

Hướng dẫn giải

a) $(x-y)^2 \ge 0 \Rightarrow (x-y)^2 + 4xy \ge 4xy \Rightarrow (x+y)^2 \ge 4xy \Rightarrow \dfrac{1}{xy} \ge \dfrac{4}{(x+y)^2}$

b) Từ a) ta có $(x+y)^2 \ge 4xy \Rightarrow \dfrac{x+y}{xy} \ge \dfrac{4}{x+y} \Rightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \ge \dfrac{4}{x+y}$.

c) $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right) = 1+1+1+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}$

$= 9 + \left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-2\right)+\left(\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}-2\right)+\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}-2\right)$

$$=9+\frac{(x-y)^2}{xy}+\frac{(y-z)^2}{yz}+\frac{(x-z)^2}{xz}\ge 9\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge \frac{9}{x+y+z}$$

Các bài toán dạng “$>,<$” thường dùng bài toán 1, các bài toán dạng “$\ge,\le$ ” thường dùng bài toán 2. Khi dùng đến các bài toán này ta cần phải chứng minh rồi mới vận dụng.

Phương pháp giải 6: (*Phương pháp cơ bản về giá trị tuyệt đối*)Đối với một số bài toán bất đẳng thức có chứa giá trị tuyệt đối, ta có thể vận dụng các bài toán cơ bản về bất đẳng thức chứa giá trị tuyệt đối sau.

Bài toán 1. Chứng minh rằng:

a) $|a|+|b|\ge |a+b|$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow ab\ge 0$

b) $|a-b|\ge |a|-|b|$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow b(a-b)\ge 0$

Bài toán 2. Chứng minh rằng nếu $x,y\ne 0$ thì $\left|\frac{x}{y}\right|+\left|\frac{y}{x}\right|\ge\left|\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right|\ge 2$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x=\pm y$

Từ đó suy ra, nếu $m,n>0$, ta có:

1) $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\ge 2$ 2) $m+\frac{1}{m}\ge 2$.

Dùng biến đổi tương đương, ta dễ dàng chứng minh được các bài toán này.

Khi cần dùng đến các bài toán này, ta phải chứng minh rồi mới vận dụng.

Phương pháp giải 7: (*Phương pháp vận dụng BĐT liên hệ giữa tổng bình phương, bình phương của tổng, tích hai số*) Một số bài toán chứng minh bất đẳng thức có thể vận dụng các bất đẳng thức liên hệ giữa tổng bình phương, bình phương của tổng, tích hai số.

Bài toán 1. $2\left(x^2+y^2\right)\ge (x+y)^2\ge 4xy$

Bài toán 2. $3\left(x^2+y^2+z^2\right)\ge (x+y+z)^2\ge 3(xy+xz+yz)$.

Chú ý: Khi cần dùng đến các bài toán này, ta phải chứng minh rồi mới vận dụng.

Phương pháp giải 8: (*Phương pháp sử dụng các bài toán cơ bản về căn thức*)Khi giải một số bài toán bất đẳng thức có chứa căn thức bậc hai, ta có thể vận dụng các bài toán cơ bản về bất đẳng thức chứa căn thức.

Bài toán 1. Cho $a,\ b>0$. Chứng minh rằng: $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a=b$. (Bất đẳng thức Cô – si)

Bài toán 2. Chứng minh rằng $|ax+by|\le\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $ay=bx$. (Bất đẳng thức Bu – nhi – a– cop–xki).

Bài toán 3. Chứng minh rằng $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{x^2+y^2}\ge\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $ay=bx$. (Bất đẳng thức Min–cop–xki).

Khi cần dùng đến Bài toán 2 và 3, ta phải chứng minh rối mới vận dụng.

Riêng Bài toán 1 (bát đẳng thức Cô–si), chúng ta được phép áp dụng mà không cần phải chứng

$$x_1=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a},\ x_2=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}.$$

Phương pháp giải 8: (*Phương pháp vận dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai*) Một số bài toán chứng minh bất đẳng thức, có khi ta phải vận dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai.

Cần nhớ: Phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\ne 0)$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta < 0$: phương trình vô nghiệm

$\Delta = 0$: phương trình có nghiệm kép: $x = -\dfrac{b}{2a}$

$\Delta > 0$: phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Trường hợp $b = 2b'$ thì $\Delta' = b'^2 - ac$

$\Delta' < 0$: phương trình vô nghiệm

$\Delta' = 0$: phương trình có nghiệm kép: $x = -\dfrac{b'}{a}$

$\Delta' > 0$: phương trình có hai nghiệm phân biệt:

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Cho x, y, z, t là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{z+t} + \dfrac{z}{t+x} + \dfrac{t}{x+y} \geq 2$.

Lời giải

Đặt:

$$A = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+t} + \frac{z}{t+x} + \frac{t}{x+y}$$

$$M = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+t} + \frac{t}{t+x}$$

$$N = \frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{t}{z+t} + \frac{x}{t+x}$$

$$\Rightarrow M + N = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+t} + \frac{t}{t+x} + \frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{t}{z+t} + \frac{x}{t+x} = 4.$$

Ta có:

$$N + A = \frac{y+t}{x+y} + \frac{x+z}{y+z} + \frac{y+t}{z+t} + \frac{x+z}{t+x}$$

$$= (y+t)\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z+t}\right) + (x+z)\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{t+x}\right) \geq \frac{4(y+t)}{x+y+z+t} + \frac{4(x+z)}{x+y+z+t} = 4.$$

Chứng minh tương tự ta cũng có: $A + M \geq 4$.

$\Rightarrow A + M + A + N \geq 8 \Rightarrow A \geq 2.$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = t > 0$.

Câu 2: Cho x, y, z là 3 số thực dương thỏa mãn $x(x-z) + y(y-z) = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x^3}{x^2+z^2} + \dfrac{y^3}{y^2+z^2} + \dfrac{x^2+y^2+4}{x+y}$.

Lời giải

Áp dụng bất bằng thức Côsi $\dfrac{x^3}{x^2+z^2} = x - \dfrac{xz^2}{x^2+z^2} \geq x - \dfrac{xz^2}{2xz} = x - \dfrac{z}{2}$.

Tương tự $\frac{y^3}{y^2+z^2} \ge y - \frac{z}{2}$. Suy ra $P \ge x+y-z+\frac{x^2+y^2+4}{x+y}$.

Theo gt $z=\frac{x^2+y^2}{x+y} \Rightarrow P \ge x+y+\frac{4}{x+y} \ge 4$.

Vậy $P_{\min}=4 \Leftrightarrow x=y=z=1$.

Câu 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\frac{\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}}{\sqrt{\frac{81}{x^2}-\frac{18}{x}+1}}$, với $x>9$.

Lời giải

Ta có $\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}=\sqrt{x-9}+3$; $\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}=\left|\sqrt{x-9}-3\right|$

Và $\sqrt{\frac{81}{x^2}-\frac{18}{x}+1}=\left|\frac{9}{x}-1\right|=\frac{x-9}{x} \quad \Rightarrow \quad A=x.\frac{\sqrt{x-9}+3+\left|\sqrt{x-9}-3\right|}{x-9}$

Khi $x \ge 18$ thì $A=\frac{2x}{\sqrt{x-9}}=2\sqrt{x-9}+\frac{18}{\sqrt{x-9}} \ge 12$, dấu bằng xảy ra khi x = 18 (1).

Khi $9<x<18$ thì $A=\frac{6x}{x-9}=6+\frac{54}{x-9}>6+\frac{54}{9}=12$ (2)

Suy ra $A_{\min}=12$.

Câu 4: Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $xyz=2$. Chứng minh

$$\frac{x}{2x^2+y^2+5}+\frac{2y}{6y^2+z^2+6}+\frac{4z}{3z^2+4x^2+16} \le \frac{1}{2}.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm, ta có

$2x^2+y^2+5=(x^2+y^2)+(x^2+1)+4 \ge 2xy+2x+4=2(xy+x+2)$,

$6y^2+z^2+6=(4y^2+z^2)+2(y^2+1)+4 \ge 4yz+4y+4=4(yz+y+1)$,

$3z^2+4x^2+16=(z^2+4x^2)+2(z^2+4)+8 \ge 4zx+8z+8=4(zx+2z+2)$.

Suy ra $\frac{x}{2x^2+y^2+5} \le \frac{x}{2(xy+x+2)}$, $\frac{2y}{6x^2+z^2+6} \le \frac{y}{2(yz+y+1)}$,

$\frac{4z}{3z^2+4x^2+16} \le \frac{z}{zx+2z+2)}$.

Cộng các bất đẳng thức theo vế, ta được

$$P \le \frac{x}{2(xy+x+2)}+\frac{y}{2(yz+y+1)}+\frac{z}{zx+2z+2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{xy+x+2}+\frac{y}{yz+y+1}+\frac{2z}{zx+2z+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{xy+x+2}+\frac{xy}{xyz+xy+x}+\frac{2z}{zx+2z+xyz}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{xy+x+2}+\frac{xy}{xy+x+2}+\frac{2}{x+xy+2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Câu 5: Giả sử ba số thực a,b,c thỏa mãn điều kiện $a>0$, $b=3a^2$, $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng: $a\ge\sqrt{\dfrac{1+2\sqrt{3}}{3}}$.

Lời giải

Ta thấy $3a^2=bc\Rightarrow 3a^3=abc\Rightarrow a^3=\dfrac{abc}{3}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si:

$$3a^2=bc\le\left(\frac{b+c}{2}\right)^2=\left(\frac{3a^3-a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 3a^2\le\frac{\left(3a^3-a\right)^2}{4}$$

$$\Rightarrow 12a^2\le\left(3a^3-a\right)^2$$

$$\Rightarrow a^2\left(3a^2-1\right)^2\ge 12a^2$$

$$\Rightarrow \left(3a^2-1\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2\ge 0$$

$$\Rightarrow \left(3a^2-1+2\sqrt{3}\right)\left(3a^2-1-2\sqrt{3}\right)\ge 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3a^2-1-2\sqrt{3}\ge 0\\3a^2-1+2\sqrt{3}\ge 0\end{cases}\\\begin{cases}3a^2-1-2\sqrt{3}\le 0\\3a^2-1+2\sqrt{3}\le 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2\ge\dfrac{1-2\sqrt{3}}{3}\\a^2\ge\dfrac{1+2\sqrt{3}}{3}\end{cases}\\\begin{cases}a^2\le\dfrac{1-2\sqrt{3}}{3}\\a^2\le\dfrac{1+2\sqrt{3}}{3}\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow a^2\ge\frac{1+2\sqrt{3}}{3}$$

$\Rightarrow a\ge\sqrt{\dfrac{1+2\sqrt{3}}{3}}$ (Do $a>0$).

Câu 6: Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $\left(a^4+b^4\right)\left(b^4+c^4\right)\left(c^4+a^4\right)=8$. Chứng minh rằng

$$\left(a^2-ab+b^2\right)\left(b^2-bc+c^2\right)\left(c^2-ca+a^2\right)\ge 1.$$

Lời giải

+ Ta chứng minh kết quả $2\left(a^2-ab+b^2\right)^2\ge a^4+b^4$ (1).

Thật vậy, (1) $\Leftrightarrow$ $2\left(a^4+b^4+a^2b^2+2a^2b^2-2ab\left(a^2+b^2\right)\right)\ge a^4+b^4$

$\Leftrightarrow \ \left(a^2+b^2-2ab\right)^2 \geq 0$.

$\Leftrightarrow \ \left(a-b\right)^4 \geq 0$, bất đẳng thức đúng, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b

+ Tương tự có (2): $2\left(b^2-bc+c^2\right)^2 \geq b^4+c^4$, (3): $2\left(c^2-ca+a^2\right)^2 \geq c^4+a^4$.

+ Thấy các vế của (1), (2), (3) đều không âm, nhân theo vế các bất đẳng thức này ta được

$8\left(a^2-ab+b^2\right)^2\left(b^2-bc+c^2\right)^2\left(c^2-ca+a^2\right)^2 \geq \left(a^4+b^4\right)\left(b^2+c^4\right)\left(c^4+a^4\right)=8$

Hay $\left(a^2-ab+b^2\right)^2\left(b^2-bc+c^2\right)^2\left(c^2-ca+a^2\right)^2 \geq 1$ (*).

Do a^2-ab+b^2, $b^2-bc+c^2, c^2-ca+a^2 \geq 0$ nên từ (*) suy ra

$\left(a^2-ab+b^2\right)^2\left(b^2-bc+c^2\right)^2\left(c^2-ca+a^2\right)^2 \geq 1$, có đpcm.

Câu 7: Cho các số dương x, y, z thỏa mãn: $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}=2014$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}$.

Lời giải

Đặt $a=\sqrt{x^2+y^2}$; $b=\sqrt{y^2+z^2}$; $c=\sqrt{z^2+x^2}$ $\left(a;b;c>0\right)$

$\Rightarrow a+b+c=2014$

$a=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow a^2=x^2+y^2$

$b=\sqrt{y^2+z^2} \Rightarrow b^2=y^2+z^2$

$c=\sqrt{z^2+x^2} \Rightarrow c^2=z^2+x^2$

$\Rightarrow x^2=\dfrac{a^2-b^2+c^2}{2}$; $y^2=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$; $z^2=\dfrac{-a^2+b^2+c^2}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – sy, ta có:

$y+z \leq \sqrt{2\left(y^2+z^2\right)}=b\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{x^2}{y+z} \geq \dfrac{x^2}{b\sqrt{2}}$

$z+x \leq \sqrt{2\left(z^2+x^2\right)}=c\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{y^2}{z+x} \geq \dfrac{y^2}{c\sqrt{2}}$

$x+y \leq \sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}=a\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{z^2}{x+y} \geq \dfrac{z^2}{a\sqrt{2}}$

$T=\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y} \geq \dfrac{x^2}{b\sqrt{2}}+\dfrac{y^2}{c\sqrt{2}}+\dfrac{z^2}{a\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{x^2}{b}+\dfrac{y^2}{c}+\dfrac{z^2}{a}\right)$

$T \geq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{a^2-b^2+c^2}{b}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{c}+\dfrac{-a^2+b^2+c^2}{a}\right)$

$T \geq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{c^2}{b}+\dfrac{a^2}{c}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{c^2}{a}-a-b-c\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – sy, ta có:

$\dfrac{a^2}{b}+b \geq 2a$; $\dfrac{b^2}{a}+a \geq 2b$; $\dfrac{c^2}{a}+a \geq 2c$

$\dfrac{a^2}{c}+c \geq 2a$; $\dfrac{b^2}{c}+c \geq 2b$; $\dfrac{c^2}{b}+b \geq 2c$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{a} \ge 4(a+b+c)-2(a+b+c)=2(a+b+c)=2.2014=4028$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{a}-a-b-c \ge 2(a+b+c)-(a+b+c)=a+b+c=2014$$

$$\Rightarrow T \ge \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot 2014=\frac{1007}{\sqrt{2}}$$

Dấu " = " xảy ra khi $a=b=c=\frac{2014}{3}$

Vậy $MinT=\frac{1007}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{2014}{3\sqrt{2}}$

Câu 8: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy+yz+xz=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2} \ge \frac{2}{3}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^3$$

Lời giải

$$1+x^2=xy+yz+xz+x^2=(x+y)(x+z)$$

$$1+y^2=xy+yz+xz+y^2=(x+y)(y+z)$$

$$1+z^2=xy+yz+xz+z^2=(z+y)(x+z)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}=\frac{2(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Ta có: $\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2 \le (x+y+z)\left(\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}\right)$

$$=(x+y+z)\left[\frac{x}{(x+y)(x+z)}+\frac{y}{(x+y)(y+z)}+\frac{z}{(z+y)(x+z)}\right]$$

$$=\frac{2(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2} \ge \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2$$

Do đó:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^3=\frac{4(x+y+z)}{3(x+y)(y+z)(z+x)}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)$$

Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \le \frac{3}{2}$$

Ta có:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{x+z}\right)$$

$$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{(x+y)(y+z)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x+y}+\frac{y}{y+z}\right)$$

$$\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{z}{\sqrt{(x+z)(y+z)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{z}{x+z}+\frac{z}{y+z}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\le\frac{3}{2}$$

Dấu " = " xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 9: Với x,y là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $4x^2+4y^2+17xy+5x+5y\ge 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=17x^2+17y^2+16xy$.

Lời giải

Đặt $a=x+y$. Áp dụng bất đẳng thức Cô – sy, ta có:

$xy\le\frac{(x+y)^2}{4}=\frac{a^2}{4}$ hay $\left(\frac{5}{2}a+1\right)^2\ge 2$

Từ đó, ta có $a\ge\frac{2}{5}\left(\sqrt{2}-1\right)$. Suy ra

$$P=17x^2+17y^2+16xy=17a^2-18xy\ge 17a^2-\frac{9}{2}a^2\ge 2\left(\sqrt{2}-1\right)^2=6-4\sqrt{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\frac{\sqrt{2}-1}{5}$.

Câu 10: Cho a, b, c là ba số thực thỏa điều kiện $a+b+c=10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $M=a^2+b^2+c^2$.

Lời giải

$$M=a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=100-2(ab+bc+ca)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – sy, ta có:

$ab\le\frac{a^2+2ab+b^2}{4}$; $bc\le\frac{b^2+2bc+c^2}{4}$; $ca\le\frac{c^2+2ca+a^2}{4}$

$\Rightarrow ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2$

$\Rightarrow M\ge ab+bc+ca$

$\Rightarrow M\ge\frac{100-M}{2}$

$\Rightarrow M\ge\frac{100}{3}$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=c\\a+b+c=10\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{10}{3}$

Vậy $Min\,M=\frac{100}{3}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{10}{3}$

Câu 11: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn: $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\frac{x}{1+y^2}+\frac{y}{1+z^2}+\frac{z}{1+x^2}$$

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{1+y^2}+\frac{xy^2}{1+y^2}=x$; $\frac{y}{1+z^2}+\frac{yz^2}{1+z^2}=y$; $\frac{z}{1+x^2}+\frac{zx^2}{1+x^2}=z$

$\Rightarrow S=\frac{x}{1+y^2}+\frac{y}{1+z^2}+\frac{z}{1+x^2}=(x+y+z)-\left(\frac{xy^2}{1+y^2}+\frac{yz^2}{1+z^2}+\frac{zx^2}{1+x^2}\right)$

$\Rightarrow S=3-\left(\frac{xy^2}{1+y^2}+\frac{yz^2}{1+z^2}+\frac{zx^2}{1+x^2}\right)$

Ta có: $\frac{xy^2}{1+y^2}\le\frac{xy^2}{2y}=\frac{xy}{2}$; $\frac{yz^2}{1+z^2}\le\frac{yz^2}{2z}=\frac{yz}{2}$; $\frac{zx^2}{1+x^2}\le\frac{zx^2}{2x}=\frac{zx}{2}$

$\Rightarrow \frac{xy^2}{1+y^2}+\frac{yz^2}{1+z^2}+\frac{zx^2}{1+x^2}\le\frac{xy+yz+zx}{2}$

$\Rightarrow S\ge 3-\frac{xy+yz+zx}{2}$

Do $(x+y+z)^2\ge 2(xy+yz+zx)\Rightarrow xy+yz+zx\le 3$

$\Rightarrow S\ge 3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

Vậy $Min\,S=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=y=z=1$

Câu 12: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=\frac{2}{1-x}+\frac{1}{x}$ với $0<x<1$.

Lời giải

$y=\frac{2}{1-x}+\frac{1}{x}=\frac{2}{1-x}-2+\frac{1}{x}-1+3=\frac{2x}{1-x}+\frac{1-x}{x}+3$

Vì $0<x<1\Rightarrow\begin{cases}\frac{2x}{1-x}>0\\ \frac{1-x}{x}>0\end{cases}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – sy, ta có:

$\frac{2x}{1-x}+\frac{1-x}{x}\ge 2\sqrt{\frac{2x}{1-x}\cdot\frac{1-x}{x}}=2\sqrt{2}\ \Rightarrow y\ge 2\sqrt{2}+3$

Dấu "=" xảy ra khi: $\frac{2x}{1-x}=\frac{1-x}{x}\Leftrightarrow 2x^2=x^2-2x+1\Leftrightarrow x^2+2x-1=0$

$\Leftrightarrow x=-1+\sqrt{2}$ (nhận) hoặc $x=-1-\sqrt{2}$ (loại)

Vậy $Min\,y=2\sqrt{2}+3\Leftrightarrow x=\sqrt{2}-1$

Câu 13: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}+\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\ge 3$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô – sy cho 2 số dương, ta có:

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$; $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\ge 2$; $\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\ge 2$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\ge 6$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+3\ge 6+3$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1\right)\ge 9$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)\ge 9$$

$$\Rightarrow \frac{9}{a+b+c}\le \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 3$$

$$\Rightarrow a+b+c\ge 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – sy cho 2 số dương, ta có:

$$1+b^2\ge 2b\Rightarrow \frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$$

Tương tự, ta có: $\dfrac{b}{1+c^2}\ge b-\dfrac{bc}{2}$; $\dfrac{c}{1+a^2}\ge c-\dfrac{ca}{2}$

$$\Rightarrow \frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge a+b+c-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}+\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\ge a+b+c\ge 3$$

Dấu “ = ” xảy ra khi $a=b=c$

Câu 14: Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{350}{xy+yz+zx}+\frac{386}{x^2+y^2+z^2}>2015$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô – sy cho 2 số dương, ta có:

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 2\sqrt{ab}.2\sqrt{\frac{1}{a}.\frac{1}{b}}=4\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge \frac{4}{a+b}$$

$$\left(x^2+y^2\right)+\left(y^2+z^2\right)+\left(z^2+x^2\right)\ge 2xy+2yz+2zx$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\ge 3(xy+yz+zx)$$

$$\Rightarrow xy+yz+zx\le \frac{(x+y+z)^2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$P=\frac{350}{xy+yz+zx}+\frac{386}{x^2+y^2+z^2}=386\left(\frac{1}{2xy+2yz+2zx}+\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)+\frac{157}{xy+yz+zx}$$

$$\ge 386\cdot\frac{4}{2xy+2yz+2zx+x^2+y^2+z^2}+\frac{157}{xy+yz+zx}$$

$$=\frac{1544}{(x+y+z)^2}+\frac{157}{xy+yz+zx}=1544+\frac{157}{xy+yz+zx}\ge 1544+\frac{157}{\frac{1}{3}}=2015$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x=y=z \\ x+y+z=1 \\ 2xy+2yz+2zx=x^2+y^2+z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=z=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$ (không xảy ra)

Vậy $P>2015$

Câu 15: Chứng minh rằng: $1+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{4}{2^3}+....+\dfrac{2014}{2^{2013}}+\dfrac{2015}{2^{2014}}<4$

Lời giải

Đặt $S=\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{4}{2^3}+....+\dfrac{2014}{2^{2013}}+\dfrac{2015}{2^{2014}}$, ta có:

$$2S=\dfrac{3}{2}+\dfrac{4}{2^2}+....+\dfrac{2014}{2^{2012}}+\dfrac{2015}{2^{2013}}$$

$$\Rightarrow 2S-S=\dfrac{3}{2}+\dfrac{4-3}{2^2}+\dfrac{5-4}{2^3}+....+\dfrac{2015-2014}{2^{2013}}-\dfrac{2015}{2^{2014}}$$

$$\Rightarrow S=\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+....+\dfrac{1}{2^{2013}}\right)-\dfrac{2015}{2^{2014}}$$

Mà $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+....+\dfrac{1}{2^{2013}}=\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2014}}{1-\dfrac{1}{2}}=2-\dfrac{1}{2^{2013}}$

Do đó: $S=2-\dfrac{1}{2^{2013}}-\dfrac{2015}{2^{2014}}<2$

$$\Rightarrow 1+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{4}{2^3}+....+\dfrac{2014}{2^{2013}}+\dfrac{2015}{2^{2014}}<4$$

Câu 16: Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện $(a+b)^3+4ab\le 12$. Chứng minh bất đẳng thức: $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+2015ab\le 2016$.

Lời giải

Ta có: $12\ge (a+b)^3+4ab\ge \left(2\sqrt{ab}\right)^3+4ab$

Đặt $t=\sqrt{ab}$ $(t>0)$, ta có:

$$12\ge 8t^3+4t^2 \Leftrightarrow 2t^3+t^2-3\le 0\Leftrightarrow (t-1)\left(2t^2+3t+3\right)\le 0$$

Do $2t^2+3t+3>0$ với mọi t

Nên $t-1\le 0\Leftrightarrow t\le 1$

$\Rightarrow 0<ab\le 1$

Chứng minh được: $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}\le \dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}, \forall a,b>0$ thỏa mãn $ab\le 1$

Thật vậy, BĐT $\dfrac{1}{1+a}-\dfrac{1}{1+\sqrt{ab}}+\dfrac{1}{1+b}-\dfrac{1}{1+\sqrt{ab}}\le 0$

$$\dfrac{\sqrt{ab}-a}{(1+a)\left(1+\sqrt{ab}\right)}+\dfrac{\sqrt{ab}-b}{(1+b)\left(1+\sqrt{ab}\right)}\le 0\Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{1+\sqrt{ab}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{a}}{1+a}-\dfrac{\sqrt{b}}{1+b}\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2\left(\sqrt{ab}-1\right)}{\left(1+\sqrt{ab}\right)(1+a)(1+b)} \le 0.$$ Do $0 < ab \le 1$ nên BĐT này đúng

Tiếp theo ta sẽ CM $\frac{2}{1+\sqrt{ab}} + 2015ab \le 2016, \forall a,b > 0$ thỏa mãn $ab \le 1$

Đặt $t = \sqrt{ab}, 0 < t \le t$ ta được $\frac{2}{1+t} + 2015t^2 \le 2016$

$2015t^3 + 2015t^2 - 2016t - 2014 \le 0$

$\Leftrightarrow (t-1)\left(2015t^2 + 4030t + 2014\right) \le 0.$ BĐT này đúng $\forall t : 0 < t \le 1$

Vậy $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + 2015ab \le 2016.$ Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$

Câu 17: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng: $a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{c^2+1}+c\sqrt{a^2+1} \ge 2$. Dấu “=” xảy ra khi nào?

Lời giải

$a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{c^2+1}+c\sqrt{a^2+1} \ge 2$

$$\Leftrightarrow a\left(b^2+1\right)+b\left(c^2+1\right)+c\left(a^2+1\right)+2ab\sqrt{\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)}+2bc\sqrt{\left(c^2+1\right)\left(a^2+1\right)}$$
$$+2ca\sqrt{\left(b^2+1\right)\left(a^2+1\right)} \ge 4$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$\sqrt{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)} = \sqrt{a^2b^2+a^2+b^2+1} \ge \sqrt{a^2b^2+2ab+1} = ab+1$

Đặt

$$S = a\left(b^2+1\right)+b\left(c^2+1\right)+c\left(a^2+1\right)+2ab\sqrt{\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)}+2bc\sqrt{\left(c^2+1\right)\left(a^2+1\right)}$$
$$+2ca\sqrt{\left(b^2+1\right)\left(a^2+1\right)}$$

$$\Rightarrow S \ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2+b^2+c^2+2ab(bc+1)+2bc(ca+1)+2ca(ab+1)$$
$$=(ab+bc+ca)^2+(a+b+c)^2$$
$$\ge (ab+bc+ca)^2+3(ab+bc+ca)=4$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a=b=c>0 \\ ab+1=bc+1=ca+1 \Leftrightarrow a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ ab+bc+ca=1 \end{cases}$

Câu 18: Tìm GTNN của $A = \frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}$ biết x, y, z > 0, $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1$.

Lời giải

$\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x} \ge \frac{x+y+z}{2}$.

Theo bất đẳng thức Cauchy:

$$\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy};\ \frac{y+z}{2} \ge \sqrt{yz};\ \frac{z+x}{2} \ge \sqrt{zx} \text{ nên } \frac{x+y+z}{2} \ge \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}{2} = \frac{1}{2}$$

Min A = $\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$.

Câu 19:

a) Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh rằng $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$

b) Cho 3 số dương x, y, z thỏa điều kiện $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$P=\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}$

Lời giải

a) Ta có:

$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$ (1)

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a.b.c}}$ (2)

(1) nhân (2) vế theo vế, ta được $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$

b) P=$\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}$

$P=1-\frac{1}{x+1}+1-\frac{1}{y+1}+1-\frac{1}{z+1}=3-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right)$

Ta có: $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq\frac{9}{a+b+c}$ (theo câu a)

Nên $\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right)\geq\frac{9}{x+1+y+1+z+1}=\frac{9}{4}$

$P\leq 3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$

Vậy GTLN của P là $\frac{3}{4}$ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

Câu 20: Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$

Lời giải

Áp dung Côsi : $\sqrt{\frac{b+c}{a}}.1\leq\frac{1}{2}(\frac{b+c}{a}+1)=\frac{a+b+c}{2a}$

Suy ra : $\sqrt{\frac{a}{b+c}}\geq\frac{2a}{a+b+c}$ (dấu " = " khi a = b + c)

Tương tự : $\sqrt{\frac{b}{a+c}}\geq\frac{2b}{a+b+c}$ (dấu " = " khi b = c + a)

$\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq\frac{2c}{a+b+c}$ (dấu " = " khi c = a + b)

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên, ta được : $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq 2$

Dấu " =" không xảy ra $\Rightarrow\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$

Câu 21: Cho x,y,z là ba số dương thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x+\sqrt{3x+yz}}+\frac{y}{y+\sqrt{3y+zx}}+\frac{z}{z+\sqrt{3z+xy}}\le 1$$

Lời giải

Từ $\left(x-\sqrt{yz}\right)^2\ge 0\Leftrightarrow x^2+yz\ge 2x\sqrt{yz}$ (*) Dấu "=" $\Leftrightarrow x^2=yz$

Chỉ ra : $3x+yz=(x+y+z)x+yz=x^2+yz+x(y+z)\ge 2x\sqrt{yz}+x(y+z)$

Suy ra : $\sqrt{3x+yz}\ge\sqrt{2x\sqrt{yz}+x(y+z)}=\sqrt{x}(\sqrt{y}+\sqrt{z})$ (Áp dụng (*))

$x+\sqrt{3x+yz}\ge\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})\Rightarrow\frac{x}{x+\sqrt{3x+yz}}\le\frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})}$ (1)

Tương tự : $\frac{y}{y+\sqrt{3y+xz}}\le\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$ (2); $\frac{z}{z+\sqrt{3z+xy}}\le\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow\frac{x}{x+\sqrt{3x+yz}}+\frac{y}{y+\sqrt{3y+xz}}+\frac{z}{z+\sqrt{3z+xy}}\le 1$

Dấu "=" xảy ra khi x = y = z = 1.

Câu 22: Cho x; y thỏa mãn $\begin{cases}x;y\in R\\ 0\le x;y\le\frac{1}{2}\end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{x}}{1+y}+\frac{\sqrt{y}}{1+x}\le\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra:

+) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{y}\right)\ge 0\Leftrightarrow\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\sqrt{xy}$ (1)

+) $x\sqrt{x}\le x.\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\quad y\sqrt{y}\le y.\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\Rightarrow x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\le\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$ (2)

Lại có:

$$\begin{cases}\sqrt{xy}\le xy+\frac{1}{4}\\ \sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{xy}\le\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(xy+\frac{1}{4}\right) & (3)\\ \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{xy}\le\frac{\sqrt{2}}{6}(x+y) & (4)\end{cases}$$

Từ (1), (2), (3) và (4) ta có:

$$x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(xy+\frac{1}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{6}(x+y)$$

$$\le\frac{2\sqrt{2}}{3}(1+x+y+xy)$$

Suy ra: $VT=\frac{\sqrt{x}}{1+y}+\frac{\sqrt{y}}{1+x}=\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+\sqrt{x}+\sqrt{y}}{1+x+y+xy}\le\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (đpcm)

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $x=y=\frac{1}{2}$

Câu 23: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy+yz+zx=2xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x}{z(z+x)}+\frac{y}{x(x+y)}+\frac{z}{y(y+z)}$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cô–si cho hai số dương, ta có:

$$\frac{2x^2y}{z+x}+\frac{y(z+x)}{2}\ge 2\sqrt{\frac{2x^2y}{z+x}.\frac{y(z+x)}{2}}=2xy(1)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{2y^2z}{x+y}+\frac{z(x+y)}{2}\ge 2yz(2)$$

$$\frac{2z^2x}{y+z}+\frac{x(y+z)}{2}\ge 2zx(3)$$

Cộng từng vế của (1), (2) và (3), ta có:

$$\frac{2x^2y}{z+x}+\frac{2y^2z}{x+y}+\frac{2z^2x}{y+z}+xy+yz+zx\ge 2(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2y}{z+x}+\frac{2y^2z}{x+y}+\frac{2z^2x}{y+z}\ge xy+yz+zx$$

Chia cả hai vế của BĐT cho 2xyz, ta có:

$$P=\frac{x}{z(z+x)}+\frac{y}{x(x+y)}+\frac{z}{y(y+z)}\ge\frac{xy+yz+zx}{2xyz}=1$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\frac{3}{2}$

Vậy GTNN của P là 1 khi $x=y=z=\frac{3}{2}$.

Câu 24: Cho a, b, c > 0 và a + b + c = 3. Chứng minh rằng $a^5+b^5+c^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 6$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$a^5+\frac{1}{a}\ge 2a^2$$

$$b^5+\frac{1}{b}\ge 2b^2$$

$$c^5+\frac{1}{c}\ge 2c^2$$

Suy ra $a^5+b^5+c^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 2(a^2+b^2+c^2)$

Mặt khác $a^2+1\ge 2a$; $b^2+1\ge 2b$; $c^2+1\ge 2c$

Suy ra $a^2+b^2+c^2\ge 2a+2b+2c-3=3$

Vậy $a^5+b^5+c^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 6$ (đpcm).

Câu 25: Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có ba góc nhọn. Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z ta luôn có: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}>\frac{2x^2+2y^2+2z^2}{a^2+b^2+c^2}$

Lời giải

Vì $a^2+b^2+c^2>0$ ta có:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)$$

$$=x^2\left(2+\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2}\right)+y^2\left(2+\frac{a^2+c^2-b^2}{b^2}\right)+z^2\left(2+\frac{a^2+b^2-c^2}{c^2}\right)$$

$$=2x^2+2y^2+2z^2+x^2\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2}\right)+y^2\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{b^2}\right)+z^2\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{c^2}\right)\ (*)$$

Giả sử $a \le b \le c$ thì $c^2-a^2 \ge 0; c^2-b^2 \ge 0$. Với cạnh c lớn nhất, $\angle ACB$ nhọn (gt) do vậy kẻ đường cao BH ta có $c^2 = BH^2 + HA^2 \le BC^2 + CA^2 = a^2 + b^2$ từ đó suy ra biểu thức (*) là không âm suy ra điều phải chứng minh.

Câu 26: Cho *a, b, c* là các số thực dương thỏa mãn $2ab+6bc+2ac=7abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C=\frac{4ab}{a+2b}+\frac{9ac}{a+4c}+\frac{4bc}{b+c}$.

Lời giải

Từ gt: $2ab+6bc+2ac=7abc$ và a,b,c > 0

Chia cả hai vế cho abc > 0 $\Rightarrow \frac{2}{c}+\frac{6}{a}+\frac{2}{b}=7$

đặt $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c} \Rightarrow \begin{cases} x,y,z>0 \\ 2z+6x+2y=7 \end{cases}$

Khi đó $C=\frac{4ab}{a+2b}+\frac{9ac}{a+4c}+\frac{4bc}{b+c}=\frac{4}{2x+y}+\frac{9}{4x+z}+\frac{4}{y+z}$

$$\Rightarrow C=\frac{4}{2x+y}+2x+y+\frac{9}{4x+z}+4x+z+\frac{4}{y+z}+y+z-(2x+y+4x+z+y+z)$$

$$=\left(\frac{2}{\sqrt{x+2y}}-\sqrt{x+2y}\right)^2+\left(\frac{3}{\sqrt{4x+z}}-\sqrt{4x+z}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{y+z}}-\sqrt{y+z}\right)^2+17 \ge 17$$

Khi $\mathrm{x}=\frac{1}{2}, \mathrm{y}=\mathrm{z}=1$ thì C = 7

Vậy GTNN của C là 7 khi a =2; b =1; c = 1

Câu 27: Cho x, y là các số thực dương thoả mãn x + y = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\mathrm{B}=\frac{1}{\mathrm{x}^3+\mathrm{y}^3}+\frac{1}{\mathrm{xy}}$.

Lời giải

Ta có: $\mathrm{B}=\frac{1}{(\mathrm{x}+\mathrm{y})^3-3\mathrm{xy}(\mathrm{x}+\mathrm{y})}+\frac{1}{\mathrm{xy}}=\frac{1}{1-3\mathrm{xy}}+\frac{1}{\mathrm{xy}}=\frac{1-2\mathrm{xy}}{\mathrm{xy}(1-3\mathrm{xy})}$.

Theo Côsi: $\mathrm{xy} \le \frac{(\mathrm{x}+\mathrm{y})^2}{4}=\frac{1}{4}$.

Gọi B_o là một giá trị của B, khi đó, tồn tại x, y để: $\mathrm{B_o}=\frac{1-2\mathrm{xy}}{\mathrm{xy}(1-3\mathrm{xy})} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3B_o(xy)^2 - (2 + B_o)xy + 1 = 0$ (1)

Để tồn tại x, y thì (1) phải có nghiệm xy $\Leftrightarrow \Delta = B_o^2 - 8B_o + 4 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{B_o} \ge 4+2\sqrt{3} \\ \mathrm{B_o} \le 4-2\sqrt{3} \end{array}\right.$

Để ý rằng với giả thiết Câu toán thì B > 0. Do đó ta có: $B_o \ge 4+2\sqrt{3}$.

Với $B_o = 4+2\sqrt{3} \Rightarrow xy = \dfrac{2+B_o}{6B_o} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6\left(2+\sqrt{3}\right)} \Rightarrow x(1-x) = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6\left(2+\sqrt{3}\right)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{3+\sqrt{3}}{6\left(2+\sqrt{3}\right)} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}, x = \frac{1-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}.$$

Vậy, $B_{min} = 4+2\sqrt{3}$, đạt được khi $x = \dfrac{1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}$, $y = \dfrac{1-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}$ hoặc

$x = \dfrac{1-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}$, $y = \dfrac{1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}$.

Câu 28: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Lời giải

Đặt $a = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$, ta có $M = a + \dfrac{1}{a} = \dfrac{3a}{4} + \dfrac{a}{4} + \dfrac{1}{a}$

Vì $a = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \ge 2$ nên $\dfrac{3a}{4} \ge \dfrac{3}{2}$;

Ta có $\dfrac{a}{4} + \dfrac{1}{a} \ge 2\sqrt{\dfrac{a}{4}.\dfrac{1}{a}} = 2.\dfrac{1}{2} = 1$

Do đó $M = a + \dfrac{1}{a} = \dfrac{3a}{4} + \dfrac{a}{4} + \dfrac{1}{a} \ge \dfrac{3}{2} + 1 = \dfrac{5}{2}$; $M = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow a = 2 \Leftrightarrow x = y$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M bằng $\dfrac{5}{2}$ khi và chỉ khi

$$\Rightarrow C = \frac{4}{2x+y} + 2x + y + \frac{9}{4x+z} + 4x + z + \frac{4}{y+z} + y + z - (2x+y+4x+z+y+z).$$

Câu 29: Cho x; y thỏa mãn $\begin{cases} x; y \in R \\ 0 \le x; y \le \dfrac{1}{2} \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\dfrac{\sqrt{x}}{1+y} + \dfrac{\sqrt{y}}{1+x} \le \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra:

+) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{x}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{y}\right) \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \le \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\sqrt{xy}$ (1)

+) $x\sqrt{x} \le x.\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\quad y\sqrt{y} \le y.\dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow x\sqrt{x} + y\sqrt{y} \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$ (2)

Lại có:

$$\begin{cases}\sqrt{xy} \le xy + \frac{1}{4} \\ \sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{xy} \le \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(xy + \frac{1}{4}\right) & (3) \\ \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{xy} \le \frac{\sqrt{2}}{6}(x+y) & (4)\end{cases}$$

Từ (1), (2), (3) và (4) ta có:

$$x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + \sqrt{x} + \sqrt{y} \le \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(xy + \frac{1}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{6}(x+y)$$

$$\le \frac{2\sqrt{2}}{3}(1 + x + y + xy)$$

Suy ra: $VT = \frac{\sqrt{x}}{1+y} + \frac{\sqrt{y}}{1+x} = \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + \sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 + x + y + xy} \le \frac{2\sqrt{2}}{3}$ (đpcm)

Câu 30: Cho x, y là 2 số thực thoả mãn: $x^2 + 2y^2 + 2xy + 7x + 7y + 10 = 0$.
Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = x + y + 1$.

Lời giải

$x^2 + 2y^2 + 2xy + 7x + 7y + 10 = 0$.

$\Leftrightarrow (x+y)^2 + 7(x+y) + 10 = -y^2$

$\Leftrightarrow (x+y+2)(x+y+5) = -y^2 \le 0$

$\Leftrightarrow -4 \le x + y + 1 \le -1$

* $x + y + 1 = -4$ khi $x = -5$; $y = 0$
* $x + y + 1 = -1$ khi $x = -2$; $y = 0$

Vậy $A_{min} = -4$ khi $x = -5$; $y = 0$

$A_{max} = -1$ khi $x = -2$; $y = 0$

Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng:

Câu 31: Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng: $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$

Lời giải

Vì a, b, c > 0 nên $\frac{a}{a+b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}$.

Tương tự: $\frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{a+b+c}$; $\quad \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c}$

$\Rightarrow \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$ (1)

* Ta có: $\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}$

Vì a, b, c > 0 nên theo bất đẳng thức Cô- si ta có:

$\frac{a + (b+c)}{2} \ge \sqrt{a(b+c)} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{2}{a+b+c} \le \frac{1}{\sqrt{a(b+c)}}$

$$\Leftrightarrow \frac{2a}{a+b+c} \le \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} \Leftrightarrow \frac{2a}{a+b+c} \le \sqrt{\frac{a}{b+c}}$$

Tương tự: $\frac{2b}{a+b+c} \le \sqrt{\frac{b}{a+c}}$; $\frac{2c}{a+b+c} \le \sqrt{\frac{c}{b+a}}$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \ge 2$$

Dấu ‘ =” xảy ra khi a = b + c; b = c + a; c = a +b

tức là a = b = c (vô lý).

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2 \ (2)$$

Từ (1) (2) ta có đpcm.

Câu 32: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{4x+3}{x^2+1}$

Lời giải

Ta có: $A = \frac{4x+3}{x^2+1} = -1 + \frac{x^2+4x+4}{x^2+1}$

$$A = -1 + \frac{(x+2)^2}{x^2+1} \ge -1$$

$A = \frac{4x+3}{x^2+1}$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

Vậy $A_{\min} = -1$ khi x = -2

Câu 33: Cho a, b, c > 0 thỏa mãn a + b + c = 3. Chứng minh rằng: $\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \ge 3$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Cô si

Ta có: $\frac{a+1}{b^2+1} = a+1-\frac{b^2(a+1)}{b^2+1} \ge a+1-\frac{b^2(a+1)}{2b} = a+1-\frac{b+ab}{2}$ (1)

Tương tự: $\frac{b+1}{c^2+1} \ge b+1-\frac{c+bc}{2}$ (1)

và $\frac{c+1}{a^2+1} \ge c+1-\frac{a+ca}{2}$ (3)

Từ (1); (2) và (3) suy ra:

$$\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \ge \frac{a+b+c}{2} + 3 - \frac{ab+bc+ca}{2}$$

Mặt khác $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$

hay $3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2 = 9$

$$Q = \frac{2016x^2+2x+2016}{x^2+1} = \frac{(2017x^2+2017)-(x^2-2x+1)}{x^2+1}$$
$$= \frac{2017(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{(x-1)^2}{x^2+1} = 2017 - \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \quad (*)$$

Do đó: $\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \ge \frac{a+b+c}{2} + 3 - \frac{ab+bc+ca}{2}$

$= \frac{3}{2} + 3 - \frac{9}{6} = 3$

Vậy $\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq 3$. Dấu bằng xảy ra khi a = b = c = 1

Câu 34: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q = \frac{2016x^2 + 2x + 2016}{x^2+1}$

Lời giải

Ta có:

Vì $\frac{(x-1)^2}{x^2+1} \geq 0$ nên từ (*) $\Rightarrow Q \leq 2017$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy max Q = 2017 $\Leftrightarrow x = 1$

Câu 35: Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng: $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$

Lời giải

Vì a, b, c là các số dương (gt) nên ta có:

$$\frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c} \quad (1)$$

$$\frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{b+c+a} \quad (2)$$

$$\frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{c+a+b} \quad (3)$$

Cộng từng vế (1), (2) và (3), ta có: $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$

Câu 36: Cho tam giác ABC có chu vi 2p = a + b + c (a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác). Chứng minh rằng : $\frac{1}{\mathrm{p-a}} + \frac{1}{\mathrm{p-b}} + \frac{1}{\mathrm{p-c}} \geq 2.\left(\frac{1}{\mathrm{a}} + \frac{1}{\mathrm{b}} + \frac{1}{\mathrm{c}}\right)$.

Lời giải

Chỉ ra được: $p - a = \frac{b+c-a}{2} > 0; p - b > 0; p - c > 0$

Áp dụng BĐT Cô si ta có :

$$[(p-a)+(p-b)]\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b}\right) \geq 2\sqrt{(p-a)(p-b)}.\frac{2}{\sqrt{(p-a)(p-b)}} = 4$$

Suy được: $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{p-a+p-b} = \frac{4}{c}$

Tương tự: $\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{a}; \frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-a} \geq \frac{4}{b}$

Suy được: $2.\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right) \geq 4.\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

Suy được đpcm và

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

Câu 37: Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cauchy ta có $a+b+c\ge 2\sqrt{a(b+c)}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{a}{b+c}}\ge\frac{2a}{a+b+c}$

Chứng minh tương tự ta được

$\sqrt{\frac{b}{c+a}}\ge\frac{2b}{a+b+c};\sqrt{\frac{c}{a+b}}\ge\frac{2c}{a+b+c}$

Suy ra $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\ge\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+c\\b=c+a\\c=a+b\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=0$ (Trái với giả thiết)

Vậy dấu = không xảy ra suy ra đpcm.

Câu 38: Cho ba số thực dương a,b,c thỏa $ab+bc+ca=3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\frac{a^3}{c+a^2}+\frac{b^3}{a+b^2}+\frac{c^3}{b+c^2}$.

Lời giải

Cách 1: Theo đề : $ab+bc+ca=3abc\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$

$\frac{a^3}{c+a^2}=\frac{(a^3+ac)-ac}{c+a^2}=a-\frac{ac}{c+a^2}$

$c+a^2\ge 2a\sqrt{c}\Rightarrow\frac{ac}{c+a^2}\le\frac{1}{2}\sqrt{c}\le\frac{c+1}{4}$

Suy ra $\frac{a^3}{c+a^2}\ge a-\frac{c+1}{4}$.

Tương tự : $\frac{b^3}{a+b^2}\ge b-\frac{a+1}{4}$, $\frac{c^3}{b+c^2}\ge c-\frac{b+1}{4}$.

Suy ra $A\ge\frac{3}{4}(a+b+c)-\frac{3}{4}$

Dùng BĐT Cô Si chứng minh được: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$

$\Rightarrow(a+b+c)3\ge 9\Rightarrow a+b+c\ge 3$

Suy ra $A\ge\frac{3}{2}$, dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$.

Vậy $\min A=\frac{3}{2}$ khi $a=b=c=1$.

Cách 2 :Ta có: $ab+bc+ca=3abc\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$

Đặt $x=\frac{1}{a},\ y=\frac{1}{b},\ z=\frac{1}{c}$, khi đó: $\begin{cases}x,y,z>0\\x+y+z=3\end{cases}$.

Biểu thức A được viết lại: $A=\dfrac{x}{y(x+y^2)}+\dfrac{y}{z(y+z^2)}+\dfrac{z}{x(z+x^2)}$

Ta có : $\dfrac{x}{y(x+y^2)}=\dfrac{(x+y^2)-y^2}{y(x+y^2)}=\dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{x+y^2}$;

mà $x+y^2\ge 2y\sqrt{x}\Rightarrow \dfrac{y}{x+y^2}\le\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ nên $\dfrac{x}{y(x+y^2)}\ge\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

mà $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{4}.2\sqrt{1.\dfrac{1}{x}}\le\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ nên $\dfrac{x}{y(x+y^2)}\ge\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

(dấu bằng xảy ra khi $x=y=1$)

Tương tự : $\dfrac{y}{z(y+z^2)}\ge\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)$, $\dfrac{z}{x(z+x^2)}\ge\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)$

Suy ra $A=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)-\dfrac{3}{4}$.

Dùng BĐT Cô Si chứng minh được: $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\ge 9$.

$\Leftrightarrow 3\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\ge 9\Leftrightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\ge 3$ (vì $z+y+z=3$).

Do đó $A\ge\dfrac{3}{2}$, dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$ hay $a=b=c=1$.

Vậy $\min A=\dfrac{3}{2}$ khi $a=b=c=1$.

Câu 39: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng $abc + 2(1 + a + b + c + ab + ac + bc) \ge 0$.

Lời giải

Ta có : $a^2+b^2+c^2=1\Rightarrow a^2=1-b^2-c^2\le 1$

$\Leftrightarrow -1\le a\le 1\Rightarrow 1+a\ge 0$

Tương tự :

$\Rightarrow (1 + a)(1 + b)(1 + c) \ge 0$

$\Leftrightarrow 1 + a + b + c + ab + ac + bc + abc \ge 0$ (1)

Mặt khác: $(1 + a + b + c)^2 = (1 + a)^2 + (b + c)^2 + 2(1 + a)(b + c)$

$= 1 + a^2 + b^2 + c^2 + 2a + 2b + 2c + 2ab + 2ab + 2bc$

$= (a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2 + c^2) + 2a + 2b + 2c + 2ab + 2ab + 2bc$

$= 2(a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c + ab + ac + bc)$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c + ab + ac + bc = \dfrac{1}{2}(1 + a + b + c)^2 \ge 0$ (2)

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được:

$abc + a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 2a + 2b + 2c + 2ab + 2ab + 2bc \ge 0$

$\Leftrightarrow abc + 2(1 + a + b + c + ab + ac + bc) \ge 0$

Câu 40: Cho a, b,c là ba số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{2abc}+\dfrac{a^2+b^2}{c^2+ab}+\dfrac{b^2+c^2}{a^2+bc}+\dfrac{c^2+a^2}{b^2+ca}$.

Lời giải

$P=\dfrac{a^2}{2bc}+\dfrac{b^2}{2ca}+\dfrac{c^2}{2ab}+\dfrac{2ab}{c^2+ab}+\dfrac{2bc}{a^2+bc}+\dfrac{2ac}{b^2+ac}$

Mà $\dfrac{a^2}{2bc}=\dfrac{a^2+bc}{2bc}-\dfrac{1}{2};\dfrac{b^2}{2ac}=\dfrac{b^2+ac}{2ac}-\dfrac{1}{2};\dfrac{c^2}{2ab}=\dfrac{c^2+ab}{2ab}-\dfrac{1}{2}$ nên

Với các số dương x, y ta có $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\ge 2\Leftrightarrow (x-y)^2\ge 0$ luôn đúng, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x = y.

Áp dụng ta có:

$P=\left(\dfrac{c^2+ab}{2ab}+\dfrac{2ab}{c^2+ab}\right)+\left(\dfrac{a^2+bc}{2bc}+\dfrac{2bc}{a^2+bc}\right)+\left(\dfrac{b^2+ac}{2ac}+\dfrac{2ac}{b^2+ac}\right)-\dfrac{3}{2}\ge$ 2+2+2 - $\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b = c

Kết luận:giá trị nhỏ nhất của $P=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{2abc}+\dfrac{a^2+b^2}{c^2+ab}+\dfrac{b^2+c^2}{a^2+bc}+\dfrac{c^2+a^2}{b^2+ca}$ bằng $\dfrac{9}{2}$ khi a = b = c

Câu 41: Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\dfrac{a}{9a^3+3b^2+c}+\dfrac{b}{9b^3+3c^2+a}+\dfrac{c}{9c^3+3a^2+b}$

Lời giải

Chứng minh:

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\ge (ax+by+cz)^2$, $\forall a,b,c,x,y,z\in R$. (1)

Thật vậy: (1) $\Leftrightarrow (a^2y^2-2abxy+b^2x^2)+(a^2z^2-2acxz+c^2z^2)+(b^2y^2-2bcyz+c^2z^2)\ge 0$

$\Leftrightarrow (ay-bx)^2+(az-cx)^2+(by-cz)^2\ge 0$ (đúng)

Dấu $"="\Leftrightarrow \begin{cases} ay=bx \\ az=cx \\ by=cz \end{cases}$

Áp dụng BĐT (1) ta có: $(9a^3+3b^2+c)(\dfrac{1}{9a}+\dfrac{1}{3}+c)\ge (a+b+c)^2=1$

Dấu $"="\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

$\Rightarrow 9a^3+3b^2+c\ge \dfrac{1}{\dfrac{1}{9a}+\dfrac{1}{3}+c}$ $\Rightarrow \dfrac{a}{9a^3+3b^2+c}\le a(\dfrac{1}{9a}+\dfrac{1}{3}+c)$

Tương tự có: $\dfrac{b}{9b^3+3c^2+a}\le b(\dfrac{1}{9b}+\dfrac{1}{3}+a);\dfrac{c}{9c^3+3a^2+b}\le c(\dfrac{1}{9c}+\dfrac{1}{3}+b)$

$\Rightarrow P\le 3.\dfrac{1}{9}+\dfrac{a+b+c}{3}+(ab+bc+ca)$

$\Rightarrow P\le \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{(a+b+c)^2}{3}=1$. Do $ab+bc+ca\le \dfrac{(a+b+c)^2}{3}$

Vậy $P_{max}=1\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Câu 42: Cho *x, y, z* là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=xyz$. Chứng minh rằng:
$$\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\le xyz$$

Lời giải

Cho *x, y, z* là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=xyz$.

Chứng minh rằng: $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\le xyz$

Từ Gt suy ra: $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=1$.

Nên ta có: $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}}=\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)}\le\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right);"="\Leftrightarrow y=z$

Vậy $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\le\frac{1}{2}\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$.

Tương tự ta có $\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{1}{z}\right)$; $\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{4}{z}\right)$

Vậy ta có $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\le 3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right);"="\Leftrightarrow x=y=z$

Ta có $(x+y+x)^2-3(xy+yz+xx)=....=\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2\right]\ge 0$

Nên $(x+y+x)^2\ge 3(xy+yz+xx)$

$\Rightarrow (xyz)^2\ge 3(xy+yz+xz)\Rightarrow 3\frac{xy+yz+xz}{xyz}\le xyz\Rightarrow 3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\le xyz$

Vậy $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\le xyz$; $"="\Leftrightarrow x=y=z$

Câu 43: Chứng minh với mọi số nguyên dương *n* lớn hơn 1 ta có $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4...\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}}<3$.

Lời giải

Với mỗi số nguyên dương *k* ta có $k=\sqrt{k^2}=\sqrt{1+(k^2-1)}=\sqrt{1+(k-1)(k+1)}$.

Sử dụng đẳng thức trên liên tiếp với $k=3,4,...,n$ ta được

$3=\sqrt{1+2.4}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3.5}}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4.6}}}=\cdots$

$=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+(n-1)(n+1)}}}}$

$=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{(n+1)^2}}}}}>\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4...\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}}$

Ta có điều phải chứng minh.

Câu 44: Cho ba số không âm x,y,z thỏa mãn $\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1+2y}+\frac{1}{1+2z}=2$.

Chứng minh rằng $xyz \le \frac{1}{64}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{1+2x} = 1 - \frac{1}{1+2y} + 1 - \frac{1}{1+2z} = \frac{2y}{1+2y} + \frac{2z}{1+2z} \ge 2\sqrt{\frac{4yz}{(1+2y)(1+2z)}}$

Tương tự ta có: $\frac{1}{1+2y} \ge 2\sqrt{\frac{4xz}{(1+2x)(1+2z)}}, \frac{1}{1+2z} \ge 2\sqrt{\frac{4xy}{(1+2x)(1+2y)}}$

$$\frac{1}{1+2x}.\frac{1}{1+2y}.\frac{1}{1+2z} \ge 8.\sqrt{\frac{64x^2y^2z^2}{(1+2x)^2(1+2y)^2(1+2z)^2}}$$

Khi đó: $\Leftrightarrow \frac{1}{(1+2x)(1+2y)(1+2z)} \ge 8.\frac{8xyz}{(1+2x)(1+2y)(1+2z)}$

$\Leftrightarrow 1 \ge 64xyz$

$\Leftrightarrow xyz \le \frac{1}{64}$

Câu 45: Chứng minh $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{b+a}} > 2$, với a, b, c>0

Lời giải

Ta có $\frac{b+c+a}{2} \ge \sqrt{(b+c)a} \Leftrightarrow \frac{b+c+a}{2a} \ge \frac{\sqrt{(b+c)a}}{a}$

$\Leftrightarrow \frac{b+c+a}{2a} \ge \sqrt{\frac{b+c}{a}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} \ge \frac{2a}{a+b+c}$

Tương tự: $\sqrt{\frac{b}{a+c}} \ge \frac{2b}{a+b+c}, \sqrt{\frac{c}{b+a}} \ge \frac{2a}{a+b+c}$

$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{b+a}} \ge \frac{2(a+b+c)}{(a+b+c)} = 2$

Dấu bằng xảy ra khi b+c =a, c + a =b, a+ b= c (Điều này không có)

Vậy $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{b+a}} > 2$

Câu 46: Cho a, b, c là 3 cạnh một tam giác. Chứng minh: $\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Lời giải

Với $x > 0, y > 0$ ta có $(x+y)^2 \ge 4xy \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}$

$\Rightarrow \frac{1}{x+y} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ (I)

a, b, c là 3 cạnh của một tam giác nên a+b-c >0, a+c -b >0, c +b- a >0,

Áp dụng bđt(I) với các số x= a+b-c, y= a+c -b dương ta có:

$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a+c-b} \ge \frac{4}{a+b-c+a+c-b} = \frac{2}{a}$

Tương tự: $\frac{1}{b+a-c} + \frac{1}{b+c-a} \ge \frac{4}{c+b-a+a+b-c} = \frac{2}{b}$

$$\frac{1}{c+b-a}+\frac{1}{c+a-b}\ge\frac{4}{c+b-a+c+a-b}=\frac{2}{c}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ \text{(đpcm)}$$

Câu 47:

a/ Cho hai số dương x, y thoả mãn x + y = 1.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(y^2+\frac{1}{x^2}\right)$

b/ Cho x, y, z là các số dương thoả mãn $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}=6$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{3x+3y+2z}+\frac{1}{3x+2y+3z}+\frac{1}{2x+3y+3z}\le\frac{3}{2}$.

Lời giải

a) M = $\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(y^2+\frac{1}{x^2}\right)=x^2y^2+1+1+\frac{1}{x^2y^2}=\frac{x^4y^4+2x^2y^2+1}{x^2y^2}$

$=\frac{\left(x^2y^2+1\right)^2}{x^2y^2}=\left(\frac{x^2y^2+1}{xy}\right)^2=\left(xy+\frac{1}{xy}\right)^2$

Ta có: $xy+\frac{1}{xy}=\left(xy+\frac{1}{16xy}\right)+\frac{15}{16xy}$

* Ta có: $xy+\frac{1}{16xy}\ge 2\sqrt{xy.\frac{1}{16xy}}=2.\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ (1)

* $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow xy\le\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{xy}\ge 4\Rightarrow\frac{1}{16xy}\ge\frac{4}{16}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{15}{16xy}\ge\frac{15}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\left(xy+\frac{1}{xy}\right)=\left(xy+\frac{1}{16xy}\right)+\frac{15}{16xy}\ge\frac{1}{2}+\frac{15}{4}=\frac{17}{4}$

Vậy M = $\left(xy+\frac{1}{xy}\right)^2\ge\left(\frac{17}{4}\right)^2=\frac{289}{16}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}xy=\frac{1}{16xy}\\ x=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=\frac{1}{4}\\ x=y\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$ (Vì x, y > 0)

Vậy min M = $\frac{289}{16}$ tại x = y = $\frac{1}{2}$

b) Áp dụng BĐT $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ (với a, b > 0)

$\Rightarrow\frac{1}{a+b}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

Ta có:

$$\frac{1}{3x+3y+2z}=\frac{1}{(2x+y+z)+(x+2y+z)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}\right)$$
$$\le\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(x+y)+(x+z)}+\frac{1}{(x+y)+(y+z)}\right]\le\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}\right)\right]$$

$$\le \frac{1}{16}\left(\frac{2}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}\right)$$

Tương tự: $\frac{1}{3x+2y+3z} \le \frac{1}{16}\left(\frac{2}{x+z}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}\right)$

$$\frac{1}{2x+3y+3z} \le \frac{1}{16}\left(\frac{2}{y+z}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right)$$

cộng vế theo vế, ta có:

$$\frac{1}{3x+3y+2z}+\frac{1}{3x+2y+3z}+\frac{1}{2x+3y+3z} \le \frac{1}{16}\left(\frac{4}{x+y}+\frac{4}{x+z}+\frac{4}{y+z}\right)$$

$$\le \frac{4}{16}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}\right)=\frac{1}{4}.6=\frac{3}{2}$$

Câu 48: Cho tam giác ABC có chu vi bằng 2. Ký hiệu a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\frac{a}{b+c-a}+\frac{9b}{c+a-b}+\frac{16c}{a+b-c}$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} b+c-a=x \\ c+a-b=y \\ a+b-c=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a=y+z \\ 2b=z+x \\ 2c=z+y \end{cases}$

Ta có

$$S=\frac{y+z}{2x}+\frac{9(z+x)}{2y}+\frac{16(x+y)}{2z}=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{9x}{y}+\frac{z}{x}+\frac{16x}{z}+\frac{9z}{y}+\frac{16y}{z}\right)\ge \frac{1}{2}.\left(2.3+2.4+2.3.4\right)=19$$

Giá trị nhỏ nhất của S là 19. Đạt được khi và chỉ khi $a=\frac{7}{8};b=\frac{5}{8};c=\frac{1}{2}$

Câu 49: Cho ba số dương a,b và c thoả mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3} \le \frac{1}{2}.$$

Lời giải

Ta có: $a^2+2b^2+3=(a^2+b^2)+(b^2+1)+2 \ge 2ab+2b+2$

Tương tự: $b^2+2c^2+3 \ge 2bc+2c+2$, $c^2+2a^2+3 \ge 2ac+2a+2$

Suy ra:

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3} \le \frac{1}{2}(\frac{1}{ab+b+1}+\frac{1}{bc+c+1}+\frac{1}{ac+a+1})$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{ab+b+1}+\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{ab}+1}+\frac{1}{\frac{1}{b}+a+1})=\frac{1}{2}.$$

Câu 50: Các số thực dương x, y, z thoả mãn điều kiện: x + y +z = 1.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$F=\frac{x^4}{(x^2+y^2)(x+y)}+\frac{y^4}{(y^2+z^2)(y+z)}+\frac{z^4}{(z^2+x^2)(z+x)}$$

Lời giải

Ta có $(a-b)^2 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \ge \left(a+b\right)^2$ (dấu “=” xảy ra khi a = b)

Ta có: $\dfrac{x^4}{(x^2+y^2)(x+y)}-\dfrac{y^4}{(x^2+y^2)(x+y)}=x-y$;

Tương tự: $\dfrac{y^4}{(y^2+z^2)(y+z)}-\dfrac{z^4}{(y^2+z^2)(y+z)}=y-z;\dfrac{z^4}{(z^2+x^2)(z+x)}-\dfrac{x^4}{(z^2+x^2)(z+x)}=z-x$

Do đó $F=\dfrac{x^4}{(x^2+y^2)(x+y)}+\dfrac{y^4}{(y^2+z^2)(y+z)}+\dfrac{z^4}{(z^2+x^2)(z+x)}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)(x+y)}+\frac{y^4+z^4}{(y^2+z^2)(y+z)}+\frac{z^4+x^4}{(z^2+x^2)(z+x)}\right)$$

$$\geq\frac{1}{4}\left(\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{(x^2+y^2)(x+y)}+\frac{\left(y^2+z^2\right)^2}{(y^2+z^2)(y+z)}+\frac{\left(z^2+x^2\right)^2}{(z^2+x^2)(z+x)}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\left(x^2+y^2\right)}{(x+y)}+\frac{\left(y^2+z^2\right)}{(y+z)}+\frac{\left(z^2+x^2\right)}{(z+x)}\right)$$

$$\geq\frac{1}{8}\left(\frac{(x+y)^2}{(x+y)}+\frac{(y+z)^2}{(y+z)}+\frac{(z+x)^2}{(z+x)}\right)=\frac{1}{4}(x+y+z)=\frac{1}{4}$$

Do đó F đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{1}{4}$ khi x = y = z = $\dfrac{1}{3}$

Câu 51: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} a\neq 0 \\ \dfrac{2b}{a}\geq\dfrac{c}{a}+4 \end{cases}$.

Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm.

Lời giải

+) Nếu ac $\leq$ 0 $\Rightarrow$ phương trình có nghiệm.

+) Nếu ac > 0 $\Rightarrow$ a và c cùng dấu, từ $\dfrac{2b}{a}\geq\dfrac{c}{a}+4>0$ $\Rightarrow$ b và a cùng dấu

$\Rightarrow$ a, b, c cùng dấu. Vì thế ta chỉ cần xét a, b và c cùng dương là đủ

Với a, b, c cùng dương ta có :

$$\frac{2b}{a}\geq\frac{c}{a}+4\Leftrightarrow b\geq\frac{c+4a}{2}\Leftrightarrow b^2\geq\frac{c^2+8ac+16a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow b^2-4ac\geq\frac{c^2-8ac+16a^2}{4}=\frac{(c-4a)^2}{4}\geq 0$$ $\Rightarrow$ đpcm

Câu 52: Cho x, y, z > 0 thoả mãn x + y + z = 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = $\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}$

Lời giải

Vì x, y, z > 0 ta có:

Áp dụng BĐT Côsi đối với 2 số dương $\dfrac{x^2}{y+z}$ và $\dfrac{y+z}{4}$ ta được:

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y+z}{4}\ge 2\sqrt{\frac{x^2}{y+z}.\frac{y+z}{4}}=2.\frac{x}{2}=x$$ (1). Tương tự ta có:

$$\frac{y^2}{x+z}+\frac{x+z}{4}\ge y(2)$$

$$\frac{z^2}{x+y}+\frac{x+y}{4}\ge z(3)$$

Cộng (1) + (2) + (3) ta được:

$$P\ge\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\right)+\frac{x+y+z}{2}$$

$$\Rightarrow P\ge(x+y+z)-\frac{x+y+z}{2}=1$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{2}{3}$

Vậy min P = 1 $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{2}{3}$

Câu 53: Với x, y là hai số thực thỏa mãn $y^3+3y^2+5y+3=11\sqrt{9-x^2}-\sqrt{9x^4-x^6}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x-y+2018$.

Lời giải

Điều kiện $-3\le x\le 3$.

$$y^3+3y^2+5y+3=11\sqrt{9-x^2}-\sqrt{9x^4-x^6}\Leftrightarrow(y+1)^3+2(y+1)=\left(\sqrt{9-x^2}\right)^3+2\sqrt{9-x^2}$$

$$\Leftrightarrow a^3+2a=b^3+2b,\left(a=y+1;b=\sqrt{9-x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(a^3-b^3\right)+2(a-b)=0\Leftrightarrow(a-b)\left(a^2+ab+b^2+2\right)=0$$

Do $a^2+ab+b^2+2=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2+2>0$.

Suy ra

$$a-b=0\Leftrightarrow y+1-\sqrt{9-x^2}=0\Leftrightarrow y=\sqrt{9-x^2}-1\Leftrightarrow x-y=x-\sqrt{9-x^2}+1=4-\left(3-x+\sqrt{9-x^2}\right)\le 4$$

Đẳng thức xảy ra khi $\Leftrightarrow\begin{cases}3-x=0\\9-x^2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=3\Rightarrow y=-1$. Vậy giá trị lớn nhất của T là 2022 tại x = 3; y=-1.

Ta lại có

$$x-y\ge 1-3\sqrt{2}\Leftrightarrow x-\sqrt{9-x^2}+1\ge 1-3\sqrt{2}\Leftrightarrow x+3\sqrt{2}\ge\sqrt{9-x^2}\Leftrightarrow x^2+6\sqrt{2}x+18\ge 9-x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+6\sqrt{2}x+9\ge 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}x+3\right)^2\ge 0$$ (Đúng).

Suy ra $T = x - y + 2018 \ge 1 - 3\sqrt{2} + 2018 = 2019 - 3\sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra khi chỉ khi $\sqrt{2}x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (thỏa mãn). Suy ra $y = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \left(1 - 3\sqrt{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}-2}{2}$.

Vậy GTNN T là $2019 - 3\sqrt{2}$ tại $x = \frac{-3\sqrt{2}}{2}; y = \frac{3\sqrt{2}-2}{2}$.

Câu 54: Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{b^2+c^2}{a} + \frac{c^2+a^2}{b} + \frac{a^2+b^2}{c} \ge 2\left(a+b+c\right)$.

Lời giải

Áp dụng bất đăngt thức Cauchy ta có $\frac{b^2+c^2}{a} + \frac{c^2+a^2}{b} + \frac{a^2+b^2}{c} \ge 2\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right)$

$= \left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right) + \left(\frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right) + \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a}\right) \ge 2\left(a+b+c\right)$.

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

Câu 55: Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 3 thì $3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4abc \ge 13$.

Lời giải

Đặt $T = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4abc$. Do vai trò của $a,\ b,\ c$ bình đẳng nên không giảm tổng quát, ta có thể giả sử $0 < a \le b \le c$.

Từ $a+b+c=3$ và $a+b>c$ suy ra $1 \le c < \frac{3}{2}$

$T = 3\left(a^2+b^2\right) + 3c^2 + 4abc = 3\left[(a+b)^2 - 2ab\right] + 3c^2 + 4abc$

$= 3(3-c)^2 + 3c^2 - 2ab(3-2c)$

Do $3 - 2c > 0$ và $ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{3-c}{2}\right)^2$, suy ra

$T \ge 3(3-c)^2 + 3c^2 - \frac{1}{2}(a+b)^2(3-2c)$

$= 3\left(c^2 - 6c + 9\right) + 3c^2 - \frac{1}{2}(3-c)^2(3-2c)$

$= c^2 - \frac{3}{2}c^2 + \frac{27}{2} = c(c-1)^2 + \frac{1}{2}(c-1)^2 + 13 \ge 13$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Câu 56: Cho các số thực dương $a,\ b,\ c,\ d$ thoả mãn $a>1,\ b>1,\ c>1,\ d>1$. Chứng minh bất đẳng thức $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{c-1} + \frac{c^2}{d-1} + \frac{d^2}{a-1} \ge 16$.

Lời giải

Vì $a>1,\ b>1,\ c>1,\ d>1$ nên $a-1>0$; $b-1>0$; $c-1>0$; $d-1>0$.

Áp dụng BĐT ta có

$\frac{a^2}{b-1} + 4(b-1) \ge 2\sqrt{\frac{a^2}{b-1}\cdot 4(b-1)} = 4a$ (1)

$$\frac{b^2}{c-1}+4(c-1)\ge 2\sqrt{\frac{b^2}{c-1}\cdot 4(c-1)}=4b\ \ (2)$$

$$\frac{c^2}{d-1}+4(d-1)\ge 2\sqrt{\frac{c^2}{d-1}\cdot 4(d-1)}=4c\ \ (3)$$

$$\frac{d^2}{a-1}+4(a-1)\ge 2\sqrt{\frac{d^2}{a-1}\cdot 4(a-1)}=4d\ \ (4)$$

Từ (1); (2); (3); (4) ta có

$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{c-1}+\frac{c^2}{d-1}+\frac{d^2}{a-1}+4(a+b+c+d)-16\ge 4(a+b+c+d)$$

$\Rightarrow \frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{c-1}+\frac{c^2}{d-1}+\frac{d^2}{a-1}\ge 16$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=d=2$

Câu 57: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $(a+c)(b+c)=4c^2$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a}{b+3c}+\frac{b}{a+3c}+\frac{ab}{bc+ca}$.

Lời giải

Đặt $a=xc;b=yc\ (x,y>0)$. Từ điều kiện suy ra: $(x+1)(y+1)=4$

Khi đó $P=\frac{x}{y+3}+\frac{y}{x+3}+\frac{xy}{x+y}=\frac{x^2+y^2+3(x+y)}{xy+3(x+y)+9}+\frac{xy}{x+y}$

$=\frac{(x+y)^2+3(x+y)-2xy}{xy+3(x+y)+9}+\frac{xy}{x+y}$

Do $(x+1)(y+1)=4\Rightarrow xy=3-(x+y)$

Đặt $t=x+y\ (0<t<3)\Rightarrow xy=3-t$

Và $3-t=xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{t^2}{4}\Leftrightarrow t^2+4t-12\ge 0\Rightarrow t\ge 2$ (do t > 0)

Khi đó $P=\frac{t^2+3t-2(3-t)}{3-t+3t+9}+\frac{3-t}{t}=\frac{t}{2}+\frac{3}{t}-\frac{3}{2}$ với $2\le t<3$

Ta có: $P\ge 2\sqrt{\frac{t}{2}.\frac{3}{t}}-\frac{3}{2}=\sqrt{6}-\frac{3}{2}$

Do đó $P_{\min}=\sqrt{6}-\frac{3}{2}$ khi $t=\sqrt{6}$ hay $(x;y)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}x+y=\sqrt{6}\\ xy=3-\sqrt{6}\end{cases}$

Ta lại có $P=\frac{t^2-3t+6}{2t}=\frac{t^2-5t+6+2t}{2t}=\frac{(t-2)(t-3)}{2t}+1\le 1$ (do $2\le t<3$)

Do đó $P_{\max}=1$ khi $t=2$ hay $(x;y)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}x+y=2\\ xy=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$

Câu 58: Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$

Chứng minh rằng $a\sqrt{b^3+1}+b\sqrt{c^3+1}+c\sqrt{a^3+1}\le 5$

Lời giải

Đặt $P=a\sqrt{b^3+1}+b\sqrt{c^3+1}+c\sqrt{a^3+1}$ suy ra

$2P = 2a\sqrt{b^3+1} + 2b\sqrt{c^3+1} + 2c\sqrt{a^3+1} =$

$2a\sqrt{(b+1)(b^2-b+1)} + 2b\sqrt{(c+1)(c^2-c+1)} + 2c\sqrt{(a+1)(a^2-a+1)}$

$\le a(b^2+2) + b(c^2+2) + c(a^2+2) = ab^2 + bc^2 + ca^2 + 6 = Q + 6$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $b \le c \le a$ ta có

$b(a-c)(c-b) \ge 0 \Leftrightarrow abc + b^2c \ge ab^2 + bc^2 \Leftrightarrow ab^2 + bc^2 + ca^2 \le abc + b^2c + ca^2$

Do đó $Q \le abc + b^2c + ca^2 \le 2abc + b^2c + ca^2 = c(a+b)^2 = 4c\dfrac{a+b}{2}.\dfrac{a+b}{2}$

$\le \dfrac{4}{27}\left(c + \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a+b}{2}\right)^3 = \dfrac{4(a+b+c)^2}{27} = \dfrac{4.3^3}{27} = 4$

Do đó $2P \le 10 \Leftrightarrow P \le 5$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a+b+c=3,\ b \le c \le a,\ 2c = a+b,\ abc = 2abc$

$\Leftrightarrow b = 0,\ c = 1,\ a = 2.$

Câu 59: Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$.

Chứng minh $\dfrac{a}{(a+1)(b+1)} + \dfrac{b}{(b+1)(c+1)} + \dfrac{c}{(c+1)(a+1)} \ge \dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Dự đoán: với điều kiện ràng buộc của các số thực dương a,b,c có $abc=1$, ta có thể dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Từ đó ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$\dfrac{a(c+1)+b(a+1)+c(b+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)} \ge \dfrac{3}{4}\ (1)$

Nhận thấy rằng:

$(a+1)(b+1)(c+1) = (ab+b+c+1)(c+1)$

$= abc + ab + ac + a + bc + b + c + 1 = 2 + (ab+bc+ac) + (a+b+c)$

Và: $a(c+1)+b(a+1)+c(b+1) = (ac+bc+ab)+(a+b+c)$

Vậy $(1) \Leftrightarrow \dfrac{(ab+bc+ac)+(a+b+c)}{2+(ab+bc+ac)+(a+b+c)} \ge \dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow 4\left[(ab+bc+ac)+(a+b+c)\right] \ge 6 + 3\left[(ab+bc+ac)+(a+b+c)\right]$

$\Leftrightarrow (ab+bc+ac)+(a+b+c) \ge 6(*)$

Lại có: $a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc} = 3$

$ab+bc+ca \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3$

Nên $(*)$ luôn đúng.

Vậy $\dfrac{a}{(a+1)(b+1)} + \dfrac{b}{(b+1)(c+1)} + \dfrac{c}{(c+1)(a+1)} \ge \dfrac{3}{4}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 60: Chứng minh rằng: $\dfrac{x}{x^2-yz+2019} + \dfrac{y}{y^2-zx+2019} + \dfrac{z}{z^2-xy+2019} \ge \dfrac{1}{x+y+z}$

Lời giải

Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}\ (*) \text{ với } a,\ b,\ c\in\mathbb{R} \text{ và } x,\ y,\ z>0.$$

Với $a,\ b\in\mathbb{R}$ và $x,\ y>0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}\ (**)$$

$\Leftrightarrow (a^2y+b^2x)(x+y)\ge xy(a+b)^2 \Leftrightarrow (bx-ay)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Áp dụng bất đẳng thức (**), ta có: $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$.

Vì: $xy+yz+zx=673$ nên $x\left(x^2-yz+2019\right)=x\left(x^2+xy+zx+1346\right)>0$.

Tương tự: $y\left(y^2-zx+2019\right)>0$ và $z\left(z^2-xy+2019\right)>0$.

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có:

$$\frac{x}{x^2-yz+2019}+\frac{y}{y^2-zx+2019}+\frac{z}{z^2-xy+2019}$$

$$=\frac{x^2}{x\left(x^2-yz+2019\right)}+\frac{y^2}{y\left(y^2-zx+2019\right)}+\frac{z^2}{z\left(z^2-xy+2019\right)}$$

$$\ge\frac{(x+y+z)^2}{x^3+y^3+z^3-3xyz+2019(x+y+z)}\ (1)$$

Biến đổi:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y)^3-3xy(x+y)+z^3-3xyz$$

$$=(x+y+z)\left[(x+y)^2-(x+y)z+z^2\right]-3xy(x+y+z)$$

$$=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$$

Từ đó suy ra:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz+2019(x+y+z)=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx+3.673\right)$$

$$=(x+y+z)\left[x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx+3.(xy+yz+zx)\right]$$

$$=(x+y+z)(x+y+z)^2=(x+y+z)^3\ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{x}{x^2-yz+2019}+\frac{y}{y^2-zx+2019}+\frac{z}{z^2-xy+2019}\ge\frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^3}=\frac{1}{x+y+z}\ \text{(đpcm).}$$

$$\ge 2\sum_{cyc}\sqrt{\frac{(c+a)(a+b)}{bc}}=2\left(\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy}\right).$$

Câu 61: Cho $a>0$, $b>0$. Chứng minh $\sqrt{a}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-1\right)\ge\sqrt{b}\left(1-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$. Dấu "=" xảy ra khi nào?

Lời giải

Với $a>0$; $b>0$ ta có:

Phương trình (1) tương đương: $\sqrt{\frac{a}{b}}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-1\right)\ge\left(1-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$ (2)

Đặt $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=X\;\;(X>0)$. Thay vào phương trình (2) ta có: $X(X-1)\ge\left(1-\dfrac{1}{X}\right)$

$\Leftrightarrow X(X-1)\ge\dfrac{X-1}{X}\Leftrightarrow\dfrac{X^2(X-1)-(X-1)}{X}\ge 0$

$\Leftrightarrow\dfrac{(X-1)(X^2-1)}{X}\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{(X-1)(X-1)(X+1)}{X}\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{(X-1)^2(X+1)}{X}\ge 0$

Do $X>0$ nên $X+1>0$ mà $(X-1)^2\ge 0$.

Suy ra với $a>0$, $b>0$ thì $\sqrt{a}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-1\right)\ge\sqrt{b}\left(1-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$.

Vậy dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow X=1\Leftrightarrow a=b$.

Câu 62: Cho x; y; z là các số thực dương thoả mãn: xyz = 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A=\dfrac{1}{x^3+y^3+1}+\dfrac{1}{y^3+z^3+1}+\dfrac{1}{z^3+x^3+1}$

Lời giải

Ta có $(x-y)^2\ge 0\quad\forall x;y$

$\Leftrightarrow x^2-xy+y^2\ge xy$

Mà x; y > 0 =>x+y>0

Ta có: $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$\Rightarrow x^3+y^3\ge(x+y)xy$

$\Rightarrow x^3+y^3+1=x^3+y^3+xyz\ge(x+y)xy+xyz$

$\Rightarrow x^3+y^3+1\ge xy(x+y+z)>0$

Tương tự: $y^3+z^3+1\ge yz(x+y+z)>0$

$z^3+x^3+1\ge zx(x+y+z)>0$

$\Rightarrow A\le\dfrac{1}{xy(x+y+z)}+\dfrac{1}{yz(x+y+z)}+\dfrac{1}{xz(x+y+z)}$

$\Rightarrow A\le\dfrac{x+y+z}{xyz(x+y+z)}$

$\Rightarrow A\le\dfrac{1}{xyz}=1$

Vậy giá trị lớn nhất của A là 1 $\Leftrightarrow x=y=z=1$

Câu 63: Cho x, y, z là ba số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+xz}+\frac{1}{z^2+xy}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cô si cho các số dương x^2 và yz, ta có:

$x^2+yz\ge 2\sqrt{x^2yz}=2x\sqrt{yz}\;\Rightarrow\dfrac{1}{x^2+yz}\le\dfrac{1}{2x\sqrt{yz}}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{x\sqrt{yz}}$

Tương tự, ta có: $\dfrac{1}{y^2+xz}\le\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{y\sqrt{xz}}$ và $\dfrac{1}{z^2+xy}\le\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{z\sqrt{xy}}$

Suy ra: $\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+xz}+\frac{1}{z^2+xy}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x\sqrt{yz}}+\frac{1}{y\sqrt{xz}}+\frac{1}{z\sqrt{xy}}\right)$ (1)

Ta có: $\frac{1}{x\sqrt{yz}}+\frac{1}{y\sqrt{xz}}+\frac{1}{z\sqrt{xy}}=\frac{\sqrt{yz}+\sqrt{xz}+\sqrt{xy}}{xyz}$ (2)

Ta có: $\sqrt{yz}+\sqrt{xz}+\sqrt{xy}\le x+y+z$ (3)

Thật vậy: (*) $\Leftrightarrow 2\sqrt{yz}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{xy}\le 2x+2y+2z$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{z}-\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)^2\ge 0$ (BĐT đúng)

Dấu "=" xảy ra khi x = y = z

Từ (2) và (3) suy ra: $\frac{1}{x\sqrt{yz}}+\frac{1}{y\sqrt{xz}}+\frac{1}{z\sqrt{xy}}\le\frac{x+y+z}{xyz}=\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra: $\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+xz}+\frac{1}{z^2+xy}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)$

Câu 64: Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x\ge z$. Chứng minh rằng

$$\frac{xz}{y^2+yz}+\frac{y^2}{xz+yz}+\frac{x+2z}{x+z}\ge\frac{5}{2}.$$

Lời giải

Ta có $P=\frac{xz}{y^2+yz}+\frac{y^2}{xz+yz}+\frac{x+2z}{x+z}=\frac{\frac{xz}{yz}}{\frac{y^2}{yz}+1}+\frac{\frac{y^2}{yz}}{\frac{xz}{yz}+1}+\frac{1+\frac{2z}{x}}{1+\frac{z}{x}}$

$$=\frac{\frac{x}{y}}{\frac{y}{z}+1}+\frac{\frac{y}{z}}{\frac{x}{y}+1}+\frac{1+\frac{2z}{x}}{1+\frac{z}{x}}=\frac{a^2}{b^2+1}+\frac{b^2}{a^2+1}+\frac{1+2c^2}{1+c^2},$$

trong đó $a^2=\frac{x}{y},\ b^2=\frac{y}{z},\ c^2=\frac{z}{x}\ \left(a,b,c>0\right)$

Nhận xét rằng $a^2.\,b^2=\frac{x}{z}=\frac{1}{c^2}\ge 1\ \left(do\ x\ge z\right)$.

Xét $\frac{a^2}{b^2+1}+\frac{b^2}{a^2+1}-\frac{2ab}{ab+1}=\frac{a^2\left(a^2+1\right)\left(ab+1\right)+b^2\left(b^2+1\right)\left(ab+1\right)-2aba^2\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)}{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(ab+1\right)}$

$$=\frac{ab\left(a^2-b^2\right)^2+\left(a-b\right)\left(a^3-b^3\right)+\left(a-b\right)^2}{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(ab+1\right)}\ge 0$$

Do đó $\frac{a^2}{b^2+1}+\frac{b^2}{a^2+1}\ge\frac{2ab}{ab+1}=\frac{\frac{2}{c}}{\frac{1}{c}+1}=\frac{2}{1+c}$ $\left(1\right)$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

Khi đó $\frac{2}{1+c}+\frac{1+2c^2}{c^2+1}-\frac{5}{2}=\frac{2\left(2\left(1+c^2\right)+\left(1+c\right)\left(1+2c^2\right)\right)-5\left(1+c\right)\left(1+c^2\right)}{2\left(1+c\right)\left(1+c^2\right)}$

$$=\frac{1-3c+3c^2-c^3}{2(1+c)(1+c^2)}=\frac{(1-c)^3}{2(1+c)(1+c^2)}\ge 0\ \ (do\ c\le 1)\ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.Đẳng thức xảy ra khi $a=b,\ c=1 \Leftrightarrow x=y=z$.

Câu 65: Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2+c^2\le 12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=4(a^3+b^3+c^3)-(a^4+b^4+c^4)$

Lời giải

Ta có

$S=4(a^3+b^3+c^3)-(a^4+b^4+c^4)=(4a^3-a^4)+(4b^3-b^4)+(4c^3-c^4)$

Ta chứng minh: $(4a^3-a^4)\le 4a^2$ thật vậy

$(4a^3-a^4)\le 4a^2 \Leftrightarrow a^4-4a^3+4a^2\ge 0 \Leftrightarrow a^2(a-2)^2\ge 0$

Tương tự ta có $(4b^3-b^4)\le 4b^2;(4c^3-c^4)\le 4c^2$

Vậy ta có:

$S=4(a^3+b^3+c^3)-(a^4+b^4+c^4)$

$=(4a^3-a^4)+(4b^3-b^4)+(4c^3-c^4)\le 4(a^2+b^2+c^2)\le 48$

Vậy giá trị lớn nhất bằng 48 xảy ra khi $(a,b,c)=(2,2,2)$

Câu 66: Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải

Trường hợp 1: Nếu tồn tại một trong ba số a, b, c thuộc nửa khoảng $\left(0;\frac{1}{3}\right]$ thì ta có

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge 9=(a+b+c)^2>a^2+b^2+c^2$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh đúng.

Trường hợp 2: $a>\frac{1}{3}$; $b>\frac{1}{3}$; $c>\frac{1}{3}$ ta có $a+b+c=3>a+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\Rightarrow a<\frac{7}{3}$ tương tự $b<\frac{7}{3}$; $c<\frac{7}{3}$. Vậy $a;b;c\in\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Ta chứng minh $\frac{1}{x^2}-x^2\ge -4x+4\quad \forall x\in\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$. (*).

Thật vậy

(*) $\Leftrightarrow 1-x^4\ge -4x^3+4x^2 \Leftrightarrow x^4-4x^3+4x^2-1\le 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2-2x-1)\le 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left((x-1)^2-2\right)\le 0$ luôn đúng với $\forall x\in\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Vậy $\frac{1}{a^2}-a^2\ge -4a+4$; $\frac{1}{b^2}-b^2\ge -4b+4$; $\frac{1}{c^2}-c^2\ge -4c+4$.

Từ đó suy ra $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-a^2-b^2-c^2\ge -4(a+b+c)+12=0\Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2$ (đpcm). Dấu "$\frac{a}{a+\sqrt{2013a+bc}}+\frac{b}{b+\sqrt{2013b+ca}}+\frac{c}{c+\sqrt{2013c+ab}}\le 1$" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 67: Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$.

Lời giải

Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$.

Áp dụng BĐT Cauchy ta có $a+b+c\ge 2\sqrt{a(b+c)}\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}}\ge \frac{2a}{a+b+c}$

Chứng minh tương tự ta được

$\sqrt{\frac{b}{c+a}}\ge \frac{2b}{a+b+c};\sqrt{\frac{c}{a+b}}\ge \frac{2c}{a+b+c}$

Suy ra $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\ge \frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b+c \\ b=c+a \\ c=a+b \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=0$ (Trái với giả thiết)

Vậy dấu = không xảy ra suy ra đpcm.

Câu 68: Cho $x,y,z>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T=\frac{x}{3\sqrt{x+2y-1}-4}+\frac{y}{3\sqrt{y+2z-1}-4}+\frac{z}{3\sqrt{z+2x-1}-4}$$

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}(*)$ với $x,y,z>0$, a,b,c bất kì.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

Chứng minh: Trước hết ta chứng minh $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge \frac{(a+b)^2}{x+y}$,

Thật vậy quy đồng hai vế lên ta được bất đẳng thức tương đương $(ay-bx)^2\ge 0$, luôn đúng.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ay=bx\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}$

Áp dụng ta được $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge \frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}\ge \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} \\ \dfrac{a+b}{x+y} = \dfrac{c}{z} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z}$ (đpcm)

Bất đẳng thức thức (*) được chứng minh.

Áp dụng bất đẳng thức cô- si cho hai số không âm 3 và $\sqrt{x+2y-1}$ ta có:

$$3\sqrt{x+2y-1} \le \frac{9+x+2y-1}{2} = \frac{x}{2} + y + 4$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{x+2y-1} - 4 \le \frac{x}{2} + y$$

Suy ra $\dfrac{x}{3\sqrt{x+2y-1}-4} \ge \dfrac{x}{\dfrac{x}{2}+y} = \dfrac{2x}{x+2y} = \dfrac{2x^2}{x^2+2xy}$

Tương tự $\dfrac{y}{3\sqrt{y+2z-1}-4} \ge \dfrac{2y^2}{y^2+2yz}; \dfrac{z}{3\sqrt{z+2x-1}-4} \ge \dfrac{2z^2}{z^2+2zx}$

Cộng vế với vế tương ứng của các bất đẳng thức trên ta được

$$T \ge \frac{2x^2}{x^2+2xy} + \frac{2y^2}{y^2+2yz} + \frac{2z^2}{z^2+2zx}$$

Lại áp dụng bất đẳng thức (*) ta có

$$\frac{2x^2}{x^2+2xy} + \frac{2y^2}{y^2+2yz} + \frac{2z^2}{z^2+2zx} \ge 2\left(\frac{(x+y+z)^2}{x^2+2xy+y^2+2yz+z^2+2zx}\right) = 2$$

Do đó $T \ge 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-1=9 \\ y+2z-1=9 \\ z+2x-1=9 \\ \dfrac{x}{x^2+2xy} = \dfrac{y}{y^2+2yz} = \dfrac{z}{z^2+2zx} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \dfrac{10}{3}$ (TMĐK)

Vậy Min $T = 2$ khi $x = y = z = \dfrac{10}{3}$

Câu 69: Cho ba số dương a, b, c thoả mãn: $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} = \sqrt{2011}$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b} \ge \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2011}{2}}$.

Lời giải

Ta có $2(a^2+b^2) \ge (a+b)^2$.

Suy ra $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b} \ge \dfrac{a^2}{\sqrt{2(b^2+c^2)}} + \dfrac{b^2}{\sqrt{2(c^2+a^2)}} + \dfrac{c^2}{\sqrt{2(c^2+a^2)}}$

Đặt $x = \sqrt{b^2+c^2}$, $y = \sqrt{c^2+a^2}$, $z = \sqrt{a^2+b^2}$,

suy ra $VT \ge \dfrac{y^2+z^2-x^2}{2\sqrt{2}x} + \dfrac{z^2+x^2-y^2}{2\sqrt{2}y} + \dfrac{x^2+y^2-z^2}{2\sqrt{2}z}$

$$\geq \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x}-x\right)+\left(\frac{(z+x)^2}{2y}-y\right)+\left(\frac{(x+y)^2}{2z}-z\right)\right]$$

$$\geq \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x}+2x-3x\right)+\left(\frac{(z+x)^2}{2y}+2y-3y\right)+\left(\frac{(x+y)^2}{2z}+2z-3z\right)\right]$$

$$\geq \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(2(y+z)-3x\right)+\left(2(z+x)-3y\right)+\left(2(x+y-3z\right)\right]$$

Suy ra $VT \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}(x+y+z)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2011}{2}}$

Câu 70: Cho *x, y, z* là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=xyz$.

Chứng minh rằng: $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\leq xyz$

Lời giải

Từ Gt suy ra: $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=1$.

Nên ta có: $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}}=\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$;"=" $\Leftrightarrow y=z$

Vậy $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$.

Tương tự ta có $\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{1}{z}\right)$; $\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{4}{z}\right)$

Vậy ta có $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\leq 3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$;"=" $\Leftrightarrow x=y=z$

Ta có $(x+y+x)^2-3(xy+yz+xx)=....=\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2\right]\geq 0$

Nên $(x+y+x)^2\geq 3(xy+yz+xx)$

$\Rightarrow(xyz)^2\geq 3(xy+yz+xz)\Rightarrow 3\frac{xy+yz+xz}{xyz}\leq xyz\Rightarrow 3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\leq xyz$

Vậy $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\leq xyz$; "=" $\Leftrightarrow x=y=z$

Câu 71: Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $0\leq a\leq b\leq c\leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B=(a+b+c+3)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)$.

Lời giải

Đặt x=1+c, y=1+b, z=1+a do $0\leq a\leq b\leq c\leq 1$ => $1\leq z\leq y\leq x\leq 2$

Khi đó A=

(x+y+z)($\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$)=3+3$+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}$

$$\left(1-\frac{x}{y}\right)\left(1-\frac{y}{z}\right)\ge 0\Leftrightarrow 1-\frac{x}{y}-\frac{y}{z}+\frac{x.y}{y.z}\ge 0\Leftrightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{z}\le \frac{x}{z}+1$$

$$\left(1-\frac{z}{y}\right)\left(1-\frac{y}{x}\right)\ge 0\Leftrightarrow 1-\frac{z}{y}-\frac{y}{x}+\frac{z.y}{y.x}\ge 0\Leftrightarrow \frac{z}{y}+\frac{y}{x}\le \frac{z}{x}+1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\le \frac{x}{z}+\frac{z}{x}+2\Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}\le 2\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+2$$

Đặt $\frac{x}{z}$ = t =>$1\le t\le 2$

$$\frac{x}{z}+\frac{z}{x}=t+\frac{1}{t}=\frac{t^2+1}{t}=\frac{2t^2-5t+2}{2t}+\frac{5}{2}=\frac{(2t-1)(t-2)}{2t}+\frac{5}{2}$$

Do $1\le t\le 2\ \Rightarrow \frac{(2t-1)(t-2)}{2t}\le 0\ \Rightarrow \frac{x}{z}+\frac{z}{x}\le \frac{5}{2}$

$\Rightarrow$A $\le 3+2.\frac{5}{2}+2=10$ Ta thấy khi a=b=0 và c=1 thì A=10 nên giá trị lớn nhất của A là 10

Câu 72: Cho x, y là các số thực dương thoả mãn: $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=2$. Chứng minh rằng:

$$5x^2+y-4xy+y^2\ge 3$$

Lời giải

* Ta có:

$$5x^2+y-4xy+y^2\ge 3$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-4xy+y^2+x^2+y-3\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (2x-y)^2+x^2+y-3\ge 0$$

* $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=2\Leftrightarrow \frac{2}{y}=2-\frac{1}{x}\Leftrightarrow \frac{2}{y}=\frac{2x-1}{x}\Leftrightarrow y=\frac{2x}{2x-1}$

Vì: y > 0; x > 0 $\Rightarrow$ 2x - 1 > 0 $\Rightarrow$ x > 1/2 Thay $y=\frac{2x}{2x-1}$ vào $x^2+y-3\ge 0$

Ta có: $x^2+y-3\ge 0\Leftrightarrow x^2+\frac{2x}{2x-1}-3\ge 0\Leftrightarrow \frac{2x^3-x^2+2x-6x+3}{2x-1}\ge 0$ (1)

Vì 2x - 1 > 0 $\Rightarrow$ (1) $\Leftrightarrow$ $2x^3-x^2+2x-6x+3\ge 0\Leftrightarrow 2x^3-x^2-4x+3\ge 0$

Mà

$$2x^3-x^2-4x+3=2x^3-2x^2+x^2-x-3x+3=(x-1)(2x^2+x-3)$$

$=(x-1)^2(2x+3)\ge 0\quad \forall x>0$ Vậy $(2x-y)^2+x^2+y-3\ge 0\quad \forall x>0;y>0$

Câu 73: Cho a,b,c là các số thực dương. CMR: $\frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{b+3c+2a}+\frac{ca}{c+3a+2b}\le\frac{a+b+c}{6}$

Lời giải

Dự đoán a=b=c tách mẫu để a+c=b+c=2b

Tacó áp dụng BĐT $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9\Leftrightarrow\frac{1}{x+y+z}\le\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

$$\frac{ab}{a+3b+2c}=\frac{ab}{(a+c)+(b+c)+2b}\le\frac{ab}{9}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{2b}\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{a}{2}\right)(1)$$

Tương tự

$$\frac{bc}{2a+b+3c}=\frac{bc}{(a+b)+(a+c)+2c}\le\frac{bc}{9}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{2b}\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{b}{2}\right)(2)$$

$$\frac{ac}{3a+2b+c}=\frac{ac}{(a+b)+(b+c)+2a}\le\frac{ac}{9}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{2a}\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{ac}{a+b}+\frac{ac}{b+c}+\frac{c}{2}\right)(2)$$

Từ (1) (2) (3) suy ra $P\le\frac{1}{9}\left(\frac{ac+bc}{a+b}+\frac{ab+ac}{b+c}+\frac{bc+ab}{a+c}+\frac{a+b+c}{2}\right)=\frac{a+b+c}{6}$

Dấu “=” xảy ra khi a=b=c

Câu 74: Chứng minh rằng: Với mọi số nguyên dương n, ta có: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}}<3.$

Lời giải

Ta có $1 = n+1-n=\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^3-\left(\sqrt[3]{n}\right)^3=\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{(n+1)n}+\sqrt[3]{n^2}\right).$

Mà $\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{(n+1)n}+\sqrt[3]{n^2}<3\sqrt[3]{(n+1)^2}\Rightarrow 1<3\sqrt[3]{(n+1)^2}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right).$

Từ đó suy ra $\frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}}<\frac{3\sqrt[3]{(n+1)^2}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)}{(n+1)\sqrt[3]{n}}=3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}-\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right)$

Nên $\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}}<3\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)+3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)+...+3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}-\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right)$

$\Rightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}}< 3\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right)<3$

$\Rightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}}<3.$

Câu 75: Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x^2+xy+y^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=x^3y+xy^3$.

Lời giải

Áp dụng BĐT Côsi cho 2 số không âm ta có:

$$x^2+y^2\ge 2\sqrt{x^2y^2}=2|xy|\ge 2xy\ \Rightarrow x^2+y^2+xy\ge 2xy+xy=3xy\Rightarrow xy\le\frac{1}{3}.$$

Ta có $(a-b)^2 \ge 0 \Leftrightarrow 2ab \le a^2+b^2 \Leftrightarrow 4ab \le (a+b)^2 \Leftrightarrow ab \le \dfrac{(a+b)^2}{4}$ (1).

$P = x^3y + xy^3 = xy(x^2+y^2) = xy(1-xy)$ vì $x^2+xy+y^2=1$

Áp dụng BĐT (1) ta có $2P = 2xy.(1-xy) \le \dfrac{(2xy+1-xy)^2}{4} = \dfrac{(1+xy)^2}{4} \le \left(1+\dfrac{1}{3}\right)^2 : 4 = \dfrac{4}{9}$

$\Rightarrow P \le \dfrac{2}{9}$. Vậy P có giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{2}{9}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$xy = \dfrac{1}{3}$ và $|x| = |y| \Rightarrow x = y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ hoặc $x = y = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$.

Câu 76: Chứng minh rằng $(a+b+c)\left[\dfrac{3a-b}{a^2+ab} + \dfrac{3b-c}{b^2+bc} + \dfrac{3c-a}{c^2+ca}\right] \le 9$ với a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Lời giải

Giả sử $a+b+c=t$ và đặt $a = tx; b = ty; c = tz \Rightarrow x+y+z=1$.

Ta chứng minh $t(x+y+z)\left[\dfrac{t(3x-y)}{t^2(x^2+xy)} + \dfrac{t(3y-z)}{t^2(y^2+yz)} + \dfrac{t(3z-x)}{t^2(z^2+zx)}\right] \le 9$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x-y}{x^2+xy} + \dfrac{3y-z}{y^2+yz} + \dfrac{3z-x}{z^2+zx} \le 9.$

$\Leftrightarrow \dfrac{4x-(x+y)}{x(x+y)} + \dfrac{4y-(y+z)}{y(y+z)} + \dfrac{4z-(z+x)}{z(z+x)} \le 9 \Leftrightarrow \dfrac{4}{1-z} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{1-x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{4}{1-y} - \dfrac{1}{z} \le 9$

$\Leftrightarrow \dfrac{5x-1}{x-x^2} + \dfrac{5y-1}{y-y^2} + \dfrac{5y-1}{z-z^2} \le 9$ Vì a,b,c là ba cạnh của một tam giác nên $a+b>c \Rightarrow x,y,z \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Ta có: $\dfrac{5x-1}{x-x^2} \le 18x-3 \Leftrightarrow (3x-1)^2(2x-1) \le 0$ đúng $\forall x \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$

$\dfrac{5y-1}{y-y^2} \le 18y-3 \Leftrightarrow (3y-1)^2(2y-1) \le 0$ đúng $\forall y \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$

$\dfrac{5z-1}{z-z^2} \le 18z-3 \Leftrightarrow (3z-1)^2(2z-1) \le 0$ đúng $\forall z \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$

Suy ra $\Leftrightarrow \dfrac{5x-1}{x-x^2} + \dfrac{5y-1}{y-y^2} + \dfrac{5y-1}{z-z^2} \le 18(x+y+z) - 9 \Leftrightarrow \dfrac{5x-1}{x-x^2} + \dfrac{5y-1}{y-y^2} + \dfrac{5y-1}{z-z^2} \le 9$

Câu 77: Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $2\sqrt{y}+\sqrt{z} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Chứng minh rằng $\dfrac{3yz}{x} + \dfrac{4zx}{y} + \dfrac{5xy}{z} \ge 4$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức CauChy ta có

$$\frac{3yz}{x}+\frac{4zx}{y}+\frac{5xy}{z}=\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)+2\left(\frac{zy}{x}+\frac{xy}{z}\right)+3\left(\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right)\geq 2z+4y+6x$$

$$=4\left(x+y\right)+2(z+x)\geq 8\sqrt{xy}+4\sqrt{xz}=4\sqrt{x}(2\sqrt{y}+\sqrt{z})=4\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}=4.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$x=y=z=\frac{1}{3}$.