SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÁI BÌNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

*Đề gồm 01 trang*

**ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2025 – 2026**
**MÔN THI: TOÁN**
**(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán, Tin học)**
*Thời gian làm bài: **150 phút** (Không kể thời gian giao đề)*

**Câu 1.** ***(2,0 điểm)***

1) Cho biểu thức $A=\dfrac{x-3\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}}+\dfrac{x+5\sqrt{x}+12}{\sqrt{x}+3}$ (điều kiện $x>0$). Tìm $x$ để $A=2x$.

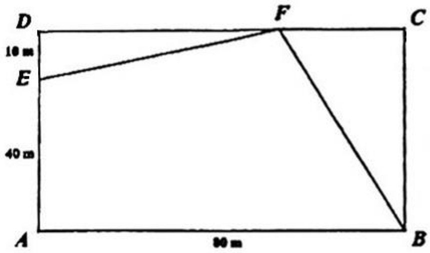
2) Cho $a$, $b$ là các số thực thỏa mãn $a\ge 2025, b\ge 2025$ và $2025(a+b)=ab$.

Tính giá trị của biểu thức $P=\sqrt{a-2025}+\sqrt{b-2025}-\dfrac{1}{45}\sqrt{ab}$.

**Câu 2.** ***(2,0 điểm)***

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+x+y=xy+2\\2x+\sqrt{3y-8}+\sqrt{y+1}=5\end{cases}$

2) Một sân trường hình chữ nhật $ABCD$ *(hình minh họa bên)*. Nhà trường muốn thiết kế hai nhà vệ sinh dành cho giáo viên và học sinh ở hai vị trí $E$ và $B$ sao cho $AE=40\,m$, $DE=10\,m$, $AB=80\,m$. Trên cạnh $CD$ người ta muốn chọn một vị trí $F$ để khoan giếng cấp nước cho hai nhà vệ sinh. Hỏi tổng đoạn đường ống nước ngắn nhất từ giếng khoan đến hai nhà vệ sinh là bao nhiêu mét?




**Câu 3.** ***(3,0 điểm)***

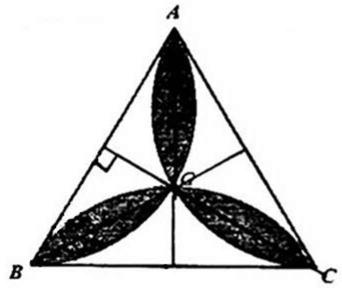
1) Cho tam giác $ABC$ nhọn, không cân $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn $(O)$. Kẻ các đường cao $AD$, $BE$, $CF$ ($D$, $E$, $F$ là chân các đường cao) cắt nhau tại điểm $H$. Đường thẳng $EF$ cắt đường tròn $(O)$ tại $P$, $Q$ ($F$ nằm giữa $P$ và $E$), đường thẳng $EF$ cắt $BC$ tại điểm $M$.

a) Chứng minh: $MP.MQ=ME.MF$.

b) Gọi $N$ là điểm đối xứng của $O$ qua đường thẳng $BC$. Chứng minh: $N$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $HBC$.

c) Đường thẳng đi qua $H$, song song với $AB$ và cắt $AC$ tại điểm $X$. Đường thẳng đi qua $H$, song song với $AC$ và cắt $AB$ tại điểm $Y$. Chứng minh: Đường trung trực của đoạn thẳng $XY$ đi qua điểm $O$.

2) Một Logo như hình vẽ bên. Phần tô đậm là giao của các cặp hình tròn ngoại tiếp các tam giác: $\Delta ABG$, $\Delta ACG$ và $\Delta BCG$. Tính diện tích phần tô đậm *(theo đơn vị cm²)*, biết rằng tam giác $ABC$ đều có cạnh bằng 20 cm, $G$ là trọng tâm của tam giác $ABC$ *(lấy $\pi=3,14$, kết quả làm tròn đến hàng phần chục)*.




**Câu 4.** ***(2,0 điểm)***

1) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $3x^2-y^2-2xy-2x-2y+8=0$.

2) Cho số nguyên dương $n$ và biểu thức $A=1^2+2^2+...+n^2$. Chứng minh: $3A$ chia hết cho $2n+1$ và $\dfrac{24A+2n+1}{2n+1}$ là một số chính phương.

**Câu 5.** ***(1,0 điểm)***

1) Cho $a, b, c$ là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}+\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}+\frac{c+a}{c^2+ca+a^2}.$$

2) Cho đa giác đều 2025 cạnh. Người ta sơn các đỉnh của đa giác bằng hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh tồn tại ba đỉnh được sơn cùng một màu tạo thành một tam giác cân.

------------- **HẾT** -------------

# LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO 10 25-26

**Câu 1. (2,0 điểm)**

1) Cho biểu thức $A = \dfrac{x-3\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}} + \dfrac{x+5\sqrt{x}+12}{\sqrt{x}+3}$ (điều kiện $x > 0$). Tìm $x$ để $A = 2x$.

2) Cho $a, b$ là các số thực thỏa mãn $a \geq 2025$, $b \geq 2025$ và $2025(a+b) = ab$. Tính giá trị của biểu thức $P = \sqrt{a-2025} + \sqrt{b-2025} - \dfrac{1}{45}\sqrt{ab}$.

**Lời Giải**

**1)** $A = \dfrac{x-3\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}} + \dfrac{x+5\sqrt{x}+12}{\sqrt{x}+3}$ ĐK: $x > 0$

Rút gọn ta được: $A = \sqrt{x} + 3$.

Để $A = 2x$ thì $\sqrt{x} + 3 = 2x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2x - 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ 4x^2 - 13x + 9 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{9}{4}$

Vậy $x = \dfrac{9}{4}$ là giá trị cần tìm

**2)** Có $\sqrt{a-2025} = \sqrt{a - \dfrac{ab}{a+b}} = \sqrt{\dfrac{a^2}{a+b}} = \dfrac{a}{\sqrt{a+b}}$

Với $2025(a+b) = ab;\quad a, b \geq 2025$

Tương tự

$\sqrt{b-2025} = \dfrac{b}{\sqrt{a+b}}$

$\dfrac{1}{45}\sqrt{ab} = \dfrac{1}{45}\sqrt{2025(a+b)} = \sqrt{a+b}$

Suy ra được $P = 0$

**Câu 2. (2,0 điểm)**

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+x+y=xy+2 \\ 2x+\sqrt{3y-8}+\sqrt{y+1}=5 \end{cases}$

2) Một sân trường hình chữ nhật $ABCD$ (hình minh họa bên). Nhà trường muốn thiết kế hai nhà vệ sinh dành cho giáo viên và học sinh ở hai vị trí $E$ và $B$ sao cho $AE=40m$, $DE=10m$, $AB=80m$. Trên cạnh $CD$ người ta muốn chọn một vị trí $F$ để khoan giếng cấp nước cho hai nhà vệ sinh. Hỏi tổng đoạn đường ống nước ngắn nhất từ giếng khoan đến hai nhà vệ sinh là bao nhiêu mét?

**Lời Giải**

**1)** $\begin{cases} x^2+x+y=xy+2 & (1) \\ 2x+\sqrt{3y-8}+\sqrt{y+1}=5 & (2) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow (x^2-1)+(x-xy)+(y-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)-x(y-1)+(y-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-y+2)=0$

$\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=y-2$

• Nếu $x=1$ thay vào (2) ta có

$\sqrt{3y-8}+\sqrt{y+1}=3$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3y-8}-1)+(\sqrt{y+1}-2)=0$

$\Leftrightarrow (y-3)\left(\dfrac{3}{\sqrt{3y-8}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{y+1}+2}\right)=0$

$\Leftrightarrow y=3$ hoặc $\dfrac{3}{\sqrt{3y-8}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{y+1}+2}$=0 ( loại vì luôn >0 $\forall y \geq \dfrac{8}{3}$)

• Nếu $x=y-2$ ta có $\sqrt{3y-8}+\sqrt{y+1}=5-2x=9-2y$

Đặt $\sqrt{3y-8}=a, \sqrt{y+1}=b \Rightarrow b^2-a^2=9-2y$ $(a,b\geq 0)$

$\Rightarrow a+b=b^2-a^2$

$\Leftrightarrow a+b=(b+a)(b-a)$

$\Leftrightarrow a+b=0$ hoặc $b-a=1$

$\star$ Nếu $a+b=0$ mà $a,b\geq 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$

Dẫn đến loại vì xảy ra đồng thời 2 giá trị của y khác nhau

$\star$ Nếu $b-a=1 \Leftrightarrow \sqrt{y+1}=\sqrt{3y-8}+1$

$\Leftrightarrow y+1=3y-7+2\sqrt{3y-8}$

$\Leftrightarrow 8-2y=2\sqrt{3y-8}$

$\Leftrightarrow 4-y=\sqrt{3y-8}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 4 \\ 3y - 8 = y^2 - 8y + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 4 \\ y^2 - 11y + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 3$

suy ra $x = 1$

Thử lại ta thấy thỏa mãn

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x, y) = (1, 3)$

**b)**

Lấy $G \in$ đường thẳng $AD$ sao cho $GD = 10$

$\Rightarrow GD = DE$

mà $FD \perp GE \Rightarrow \triangle FEG$ cân tại $F$

$\Rightarrow FE = FG$

Lại có $EF + FB = GF + FB \geq GB$

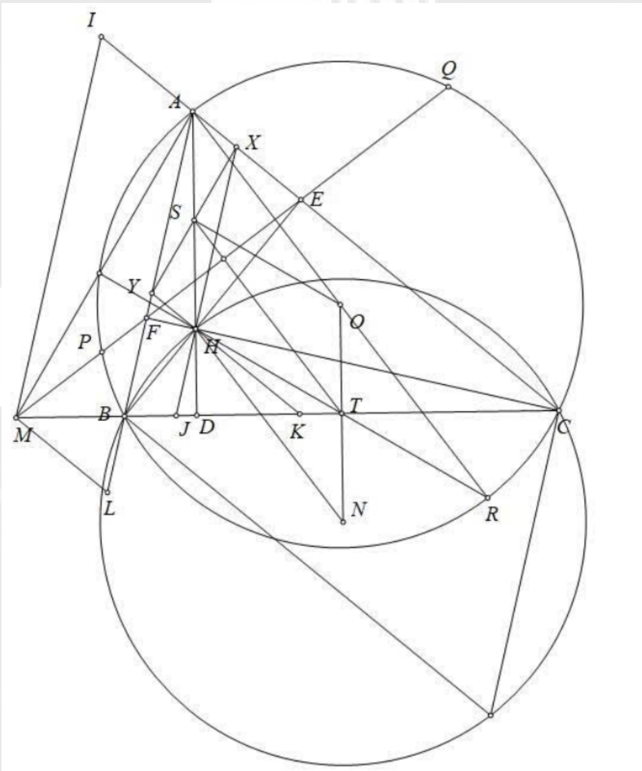
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\Leftrightarrow G, F, B$ thẳng hàng

$\Rightarrow EF + FB_{\min} = GB_{\min} = \sqrt{AG^2 + AB^2} = \sqrt{60^2 + 80^2} = \sqrt{3600 + 6400} = 100$

**Câu 3. (3,0 điểm)**
1) Cho tam giác $ABC$ nhọn, không cân $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn $(O)$. Kẻ các đường cao $AD, BE, CF$ $(D, E, F$ là chân các đường cao) cắt nhau tại điểm $H$. Đường thẳng $EF$ cắt đường tròn $(O)$ tại $P, Q$ ($F$ nằm giữa $P$ và $E$), đường thẳng $EF$ cắt $BC$ tại điểm $M$.

a)Chứng minh: $MP.MQ = ME.MF$.
b)Gọi $N$ là điểm đối xứng của $O$ qua đường thẳng $BC$. Chứng minh: $N$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $HBC$.
c)Đường thẳng đi qua $H$, song song với $AB$ và cắt $AC$ tại điểm $X$. Đường thẳng đi qua $H$, song song với $AC$ và cắt $AB$ tại điểm $Y$. Chứng minh: Đường trung trực của đoạn thẳng $XY$ đi qua điểm $O$.

2) Một logo như hình vẽ bên .Phần tô đậm là giao của các cặp hình tròn ngoại tiếp các tam giác $\triangle ABG, \triangle ACG, \triangle BCG$ .tính diện tích phần tô đậm ( *theo đơn vị* $cm^2$) , biết rằng tam giác *ABC* đều có cạnh bằng 20cm , $G$ là trọng tâm của tam giác *ABC*




**a)** . Ta có tứ giác $BCFE$ nội tiếp. Do đó, $\angle MFB = \angle ECM$

Tức là $\triangle MFB \sim \triangle MCE$.

nên suy ra $\dfrac{MF}{MC} = \dfrac{MB}{ME}$ hay ta có $MB \cdot MC = MF \cdot ME$.

Lại có từ tứ giác $BCQP$ nội tiếp, do đó $\triangle MPB \sim \triangle MCQ$ . Do đó $\dfrac{MB}{MQ} = \dfrac{MP}{MC}$ có $MB \cdot MC = MP \cdot MQ$.

Từ đây ta có điều phải chứng minh.

**b)**. Gọi $T$ là trung điểm $BC$, khi này ta có bổ đề cơ bản $AH = 2OT$.

Do đó $AH = ON$

mà $AH$ // $ON$ (do cùng vuông góc với $BC$ )

nên tứ giác $AONH$ là hình bình hành.

Do đó $AO = HN = OB = OC = NB = NC$.

Vậy ta có $N$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $HBC$.

**c)**.Ta có tứ giác $AYHX$ là hình bình hành,

do đó trung điểm $AH$ trùng với trung điểm $XY$

Gọi giao điểm của $AO$ với $(O)$ là $R$

khi đó ta có $H, R, T$ thẳng hàng.

Gọi trung điểm $AH$ là $S$ khi đó $OS$ song song với $HR$ theo tính chất đường trung bình.

Kẻ $ML$ song song $AC$, $L$ thuộc $AB$

$YH$ cắt $BC$ tại $K$.

Khi này ta có $\dfrac{ML}{BK} = \dfrac{MB}{YK}$, lại có $\dfrac{YK}{YH} = \dfrac{AC}{AE}$.

Do đó

$\dfrac{ML}{YH} = \dfrac{MB.AC}{BK.AE}$. Kẻ $MI$ song song $AB$, $I$ thuộc $AC$, $XH$ cắt $BC$ tại $J$.

Khi này ta có $\dfrac{IM}{XJ} = \dfrac{CM}{CJ}$.

$\dfrac{XJ}{XH} = \dfrac{AB}{AF}$ do đó $\dfrac{IM}{XH} = \dfrac{AB.CM}{AF.CJ}$.

Do đó $\dfrac{YH}{AF} = \dfrac{XH}{AE} \cdot \dfrac{AF}{AC}$.

Từ đây, ta chứng minh $\dfrac{AB \cdot CM}{AF \cdot CJ} = \dfrac{MB \cdot AC}{BK \cdot AE}$ ta lại có $\dfrac{BK}{BC} = \dfrac{BH}{BE}$ và $\dfrac{CJ}{CB} = \dfrac{CH}{CF}$

thì có được điều phải chứng minh.

Khi đó $\triangle\, HXY \sim \triangle\, LAM$ mà $HX$ song song

$AL$, $HY$ song song $ML$ nên $HY//ML$ nên $XY//AM$. Mặt khác theo định lý Brocard cho ta $HT \perp AM$ nên

$OS \perp XY$. Ta có điều phải chứng minh.

**2)**

Tính diện tích mỗi hình viên phân (tô đậm) $JG = JA = JB = GA = GB = \dfrac{20\sqrt{3}}{3} = R$

$\Rightarrow \widehat{AJG} = 60^o$

Diện tích hình quạt chứa cung $AG$ nhỏ là $\dfrac{60.\pi.R^2}{360} = \dfrac{1}{6}\pi R^2 = \dfrac{200}{9}\pi$

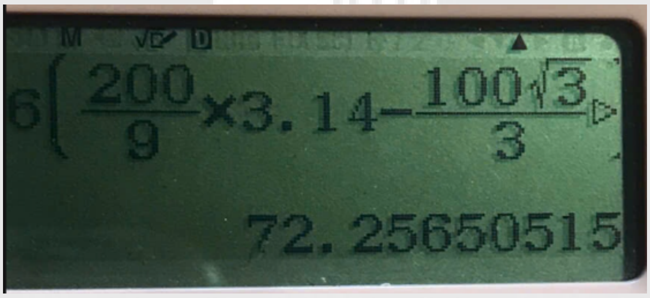
$S_{\triangle AGJ} = \dfrac{AH.GJ}{2}$ $(H = GJ \cap AB$

mà $AH = \dfrac{AJ.\sqrt{3}}{2} = 10$

(Áp dụng pytago )

Nên $S_{1\text{ hình viên phân (tô đậm )}} = \dfrac{200}{9}\pi = \dfrac{100\sqrt{3}}{3}$

$\Leftrightarrow S_{\text{tô đậm}} = S_{6\text{ hình vp}} = 6\left(\dfrac{200\pi}{9} - \dfrac{100\sqrt{3}}{3}\right)$




**Câu 4. (2,0 điểm)**

1) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $3x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 8 = 0$.

2) Cho số nguyên dương $n$ và biểu thức $A = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$. Chứng minh: $3A$ chia hết cho $2n+1$ và $\dfrac{24A + 2n + 1}{2n+1}$ là một số chính phương.

**Lời Giải**

**1)** $3x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 8 = 0$

$\Leftrightarrow y^2 + 2xy - 3x^2 + 2x + 2y - 8 = 0$

$\Leftrightarrow (y+x)^2 - 4x^2 + 2(x+y) + 1 - 9 = 0$

$\Leftrightarrow (x+y+1)^2 = 4x^2 + 9$

$\Leftrightarrow (y - x + 1)(3x + y + 1) = 9$

Do $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $(y - x + 1, 3x + y + 1)$ đều là số nguyên

Đến đây chia các trường hợp giải hệ phương trình ta được

$(x, y) \in \{(2; 2), (-2; 6), (0; 2), (-2; 4), (2; -8), (0; -4)\}$

Kết luận

**2)**

$A = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$

$= 1(2-1) + 2(3-1) + \cdots + n(n+1-1)$

$= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) - (1+2+3+\cdots+n)$

Đặt $B = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1)$

$\Rightarrow 3B = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot (4-1) + \cdots + n(n+1)(n+2-n+1)$

$= n(n+1)(n+2)$

$\Rightarrow B = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$\Rightarrow A = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3} - \dfrac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 3A = n(n+1)\left(n + 2 - \dfrac{3}{2}\right)$

$= n(n+1) \cdot \dfrac{2n+1}{2} \; \vdots \; 2n+1$ do $3A \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 3A \; \vdots \; 2n+1$ (đpcm)

Ta có: $\dfrac{24A + 2n + 1}{2n+1} = \dfrac{8 \cdot 3A + 2n + 1}{2n+1}$

$= \dfrac{4n(n+1)(2n+1) + 2n + 1}{2n+1}$

$= \dfrac{4n^2 + 4n + 1}{1} = (2n+1)^2$ là số chính phương

do $n \in \mathbb{Z}^+$

$\Rightarrow \dfrac{24A + 2n + 1}{2n+1}$ là số chính phương (đpcm).

**Câu 5. (1,0 điểm)**
1) Cho $a, b, c$ là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \dfrac{a+b}{a^2+ab+b^2} + \dfrac{b+c}{b^2+bc+c^2} + \dfrac{c+a}{c^2+ca+a^2}$.

2) Cho đa giác đều 2025 cạnh. Người ta sơn các đỉnh của đa giác bằng hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh tồn tại ba đỉnh được sơn cùng một màu tạo thành một tam giác cân.

**Lời Giải**

**1)** Với $a, b, c > 0$, ta có: $ab + bc + ac = 3abc \Rightarrow \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 3$

$P = \dfrac{a+b}{a^2+ab+b^2} + \dfrac{b+c}{b^2+bc+c^2} + \dfrac{a+c}{a^2+ac+c^2}$

Xét $\dfrac{a+b}{a^2+ab+b^2} = \dfrac{a+b}{(a-b)^2+3ab} \le \dfrac{a+b}{3ab} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{a}\right)$

Chứng minh tương tự:

$\dfrac{b+c}{b^2+bc+c^2} \leq \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{b}\right)$ $\dfrac{a+c}{a^2+ac+c^2} \leq \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)$

$\Rightarrow P \leq \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) = \dfrac{2}{3} \cdot 3 = 2$

DBXR $\Leftrightarrow a = b = c = 1$

**2)**

1) Đa giác đều có 2025 cạnh nên có 2025 đỉnh (số lẻ đỉnh)

$\Rightarrow$ Tồn tại 2 đỉnh kề nhau là A và B được sơn cùng một màu (nguyên lý Dirichlet)

giả sử 2 đỉnh ấy được sơn màu đỏ

Do số đỉnh lẻ nên tồn tại 1 điểm thuộc

đường trung trực cạnh AB gọi là điểm C

$\star$ Nếu C sơn màu đỏ

$\Rightarrow \triangle ABC$ cân và sơn cũng màu đỏ

$\star$ Nếu C sơn màu xanh

Lúc đó gọi D, E là các đỉnh khác nhaucủa đa giác kề với A và B

•Nếu D, E cùng sơn màu xanh

$\Rightarrow \triangle CDE$ cân và cùng sơn xanh

• Nếu D, E có 1 đỉnh tô màu đỏ

thì $\triangle DAB$ hoặc $\triangle EAB$ là tam giác cân cùng sơn đỏ

đpcm