SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH BÀ RỊA-VŨNG TÀU

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2024 – 2025

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang)

MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài thi: 150 phút
Ngày thi: 04/3/2025

Câu 1 (3,0 điểm):

a) Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{x}-10}{x-4}+\dfrac{x+3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-6}-\dfrac{x+2\sqrt{x}+1}{x+3\sqrt{x}+2}$ với $x\ge 0$ và $x\ne 4$.

b) Tính giá trị của biểu thức $Q=\sqrt{13+4\sqrt{10}}-\sqrt[3]{17\sqrt{2}+11\sqrt{5}}$.

Câu 2 (4,0 điểm):

a) Giải phương trình $\sqrt{4x^2+13x+10}-2\sqrt{x^2+x+1}=9x+6$

b) Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+m^2+4=0$ (1).

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^2+2(m+1)x_2-3m^2-16\le 0$.

Câu 3 (4,0 điểm):

a) Tìm tất cả số nguyên tố p và cặp số tự nhiên $(x;y)$ sao cho $\dfrac{2^{p-2}}{p}=\dfrac{x^2+3}{2y^2+3x+5}$.

b) Cho hai hộp kín, hộp thứ nhất chứa 8 cái thẻ được đánh số từ 1 đến 8, hộp thứ hai chứa 12 cái thẻ được đánh số từ 1 đến 12. Các thẻ có kích thước như nhau. Chọn ngẫu nhiên từ mỗi hộp một thẻ. Tính xác suất chọn được hai thẻ mà tích của hai số trên thẻ là một số chia hết cho 7.

Câu 4 (5,0 điểm):

Cho tam giác nhọn ABC có $AB<AC$, đường tròn (O) đường kính BC cắt AB tại F, cắt AC tại E. Gọi K là giao điểm của EF và BC, gọi H là giao điểm của BE và CF, đường thẳng AH cắt BC tại D, đường thẳng FD cắt đường tròn (O) tại M $(M\ne F)$.

a) Chứng minh $ABDE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh BC là đường phân giác của $\widehat{EBM}$ và $KF.DM=KM.DF$.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt AK tại P $(P\ne A)$, cắt ED tại Q $(Q\ne E)$. Chứng minh ba điểm $P,\ Q,\ C$ thẳng hàng.

Câu 5 (4,0 điểm):

a) Xét các số thực x,y,z thỏa mãn $x\ge 0, y\ge 0,$ $z\ge -2$ và $2x+2y+2z+1=0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=x+10xy+4xyz$.

b) Cho tập hợp $X=\{1;2;3;...;2025\}$. Tìm số tự nhiên k nhỏ nhất sao cho với mọi cách lấy k phần tử bất kỳ thuộc X thì luôn tồn tại hai phần tử $a,\ b$ $(a>b)$ trong k phần tử được lấy mà $a+b$ chia hết cho $a-b$.

------- HẾT -------

Họ và tên thí sinh:.. Chữ ký giám thị số 1:...............................
Số báo danh:...

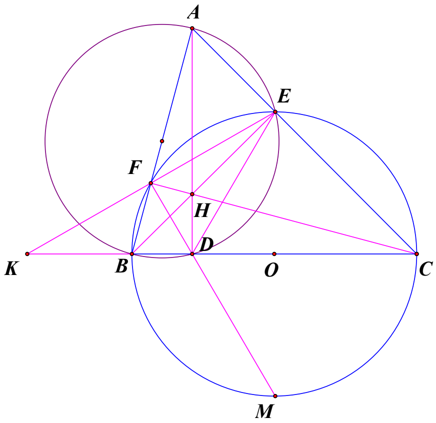
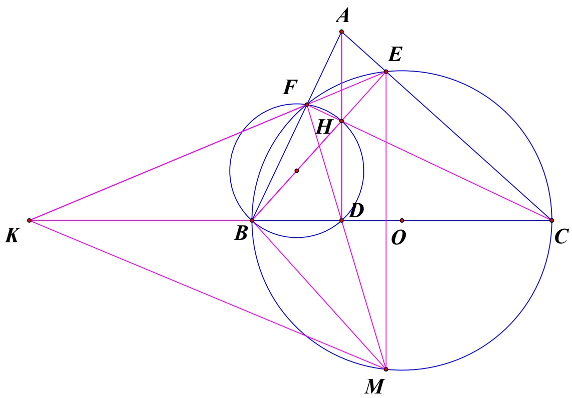
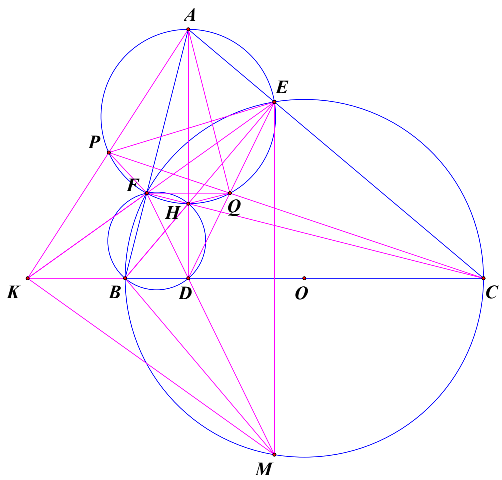
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH BÀ RỊA – VŨNG TÀU

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2024 – 2025

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC
MÔN: TOÁN LỚP 9
(Hướng dẫn chấm có 04 trang)

Câu	Nội dung	Điểm
1.a	**Rút gọn biểu thức** $P=\dfrac{\sqrt{x}-10}{x-4}+\dfrac{x+3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-6}-\dfrac{x+2\sqrt{x}+1}{x+3\sqrt{x}+2}$ **với** $x\ge 0$ **và** $x\ne 4$**.**	**1,5**
	$=\dfrac{\sqrt{x}-10}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}+\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}-\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$	0,5
	$=\dfrac{\sqrt{x}-10}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ $=\dfrac{\sqrt{x}-10+\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)-\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$	0,5
	$=\dfrac{4\sqrt{x}-8}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{4}{\sqrt{x}+2}$	0,5
1.b	**Tính giá trị của biểu thức** $Q=\sqrt{13+4\sqrt{10}}-\sqrt[3]{17\sqrt{2}+11\sqrt{5}}$ **.**	**1,5**
	$\sqrt{13+4\sqrt{10}}=\sqrt{5+4\sqrt{10}+8}=\sqrt{\left(\sqrt{5}+2\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{5}+2\sqrt{2}$	0,75
	$\sqrt[3]{17\sqrt{2}+11\sqrt{5}}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}+6\sqrt{5}+15\sqrt{2}+5\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^3}=\sqrt{2}+\sqrt{5}$	0,5
	$Q=\sqrt{13+4\sqrt{10}}-\sqrt[3]{17\sqrt{2}+11\sqrt{5}}=\sqrt{2}$	0,25
2.a	**Giải phương trình** $\sqrt{4x^2+13x+10}-2\sqrt{x^2+x+1}=9x+6$	**2,0**
	Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{4x^2+13x+10}\\ v=\sqrt{x^2+x+1}\end{cases}$ điều kiện $u,v\ge 0$	0,25
	Tính được $u^2-4v^2=9x+6$	0,25
	Đưa PT về dạng $u-2v=u^2-4v^2\Leftrightarrow\left(u-2v\right)\left(u+2v-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=2v\\ u+2v=1\end{array}\right.$	0,5
	Giải PT $u=2v$ tìm được nghiệm $x=-\dfrac{2}{3}$	0,5
	Giải PT $u+2v=1\Leftrightarrow\sqrt{4x^2+13x+10}+2\sqrt{x^2+x+1}=1$ (1) Chứng minh $2\sqrt{x^2+x+1}=2\sqrt{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}\ge\sqrt{3}$ suy ra PT (1) vô nghiệm	0,5
2.b	**Cho phương trình** $x^2-2\left(m+1\right)x+m^2+4=0$ **(1).** **Tìm tất cả các giá trị của tham số** m **để phương trình (1) có hai nghiệm** x_1,x_2 **thỏa mãn** $x_1^2+2\left(m+1\right)x_2-3m^2-16\le 0$**.**	**2,0**
	Tính được $\Delta'=2m-3$	0,25

	Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' \ge 0 \Leftrightarrow m \ge \frac{3}{2}$	0,5
	Tính được $x_1 + x_2 = 2(m+1)$	0,25
	$x_1^2 - 2(m+1)x_1 + m^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = 2(m+1)x_1 - m^2 - 4$	0,25
	$x_1^2 + 2(m+1)x_2 - 3m^2 - 16 \le 0 \Leftrightarrow 2(m+1)x_1 - m^2 - 4 + 2(m+1)x_2 - 3m^2 - 16 \le 0$ $\Leftrightarrow 2(m+1)(x_1 + x_2) - 4m^2 - 20 \le 0$	0,25
	$\Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 4m^2 - 20 \le 0 \Leftrightarrow m \le 2$. Kết luận $\frac{3}{2} \le m \le 2$	0,5
3.a	**Tìm tất cả số nguyên tố p và cặp số tự nhiên $(x;y)$ sao cho $\frac{2^{p-2}}{p} = \frac{x^2+3}{2y^2+3x+5}$.**	**2,0**
	Xét $p = 2$, ta có: $2y^2 + 3x + 5 = 2(x^2+3) \Leftrightarrow 2y^2 = 2x^2 - 3x + 1$ (1)	0,25
	Nếu x chẵn thì PT (1) VN nên x là số lẻ, đặt $x = 2n+1, n \in \mathbb{N}$. Suy ra: $y^2 = 4n^2 + n \Leftrightarrow y^2 = n(4n+1)$. (2)	0,25
	Vì y^2 là số chính phương và $(n, 4n+1) = 1$ nên (2) có nghiệm duy nhất $n = 0, y = 0 \Rightarrow x = 1; y = 0$.	0,25
	Xét $p = 3$, ta có: $2(2y^2 + 3x + 5) = 3(x^2+3) \Leftrightarrow 4y^2 = 3x^2 - 6x - 1$ (3)	0,25
	Vì $4y^2 \equiv 0 \pmod 3$ hoặc $4y^2 \equiv 1 \pmod 3$ mà $3x^2 - 6x - 1 \equiv 2 \pmod 3$ nên phương trình (3) vô nghiệm.	0,25
	Xét $p \ge 5$ là số nguyên tố lẻ. PT đã cho $\Leftrightarrow 2^{p-2}(2y^2 + 3x + 5) = p(x^2+3)$ (4) Nếu x chẵn: $p(x^2+3)$ lẻ mà vế trái luôn chẵn nên (4) vô nghiệm.	0,25
	Nếu x lẻ: đặt $x = 2n+1, n \in \mathbb{N}$ (4) $\Leftrightarrow 2^{p-3}(y^2 + 3n + 4) = p[n(n+1)+1]$. Vế phải luôn lẻ vì $n(n+1)$ chẵn, mà vế trái luôn chẵn nên (4) vô nghiệm.	0,25
	Kết luận $p = 2; x = 1; y = 0$	0,25
3.b	**Cho hai hộp kín, hộp thứ nhất chứa 8 cái thẻ được đánh số từ 1 đến 8 và hộp thứ hai chứa 12 cái thẻ được đánh số từ 1 đến 12. Các thẻ có kích thước như nhau. Chọn ngẫu nhiên từ mỗi hộp một thẻ. Tính xác suất chọn được hai thẻ mà tích của hai số trên thẻ là một số chia hết cho 7.**	**2,0**
	Hộp thứ nhất có 8 cách chọn thẻ và hộp thứ hai có 12 cách chọn thẻ nên có tất cả $8\text{x}12 = 96$ cách chọn.	0,5
	Tích của hai số chia hết cho 7 nên có ít nhất một số chia hết cho 7	0,5
	Tổng số cách chọn thuận lợi là $1\text{x}8 + 1\text{x}12 - 1 = 19$	0,5
	Vậy xác suất chọn được hai thẻ mà tích của hai số trên thẻ là một số chia hết cho 7 là $\frac{19}{96}$.	0,5
4.a	**Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$, đường tròn (O) đường kính BC cắt AB tại F, cắt AC tại E. Gọi K là giao điểm của EF và BC, gọi H là giao điểm của BE và CF, đường thẳng AH cắt BC tại D, đường thẳng FD cắt đường tròn (O) tại $M\,(M \ne F)$.** **a) Chứng minh $ABDE$ là tứ giác nội tiếp.**	**2,0**

		
	Ta có $\widehat{BEC}=90^\circ \Rightarrow BE\perp AC$; $\widehat{BFC}=90^\circ \Rightarrow CF\perp AB$ do đó H là trực tâm tam giác ABC suy ra $AH\perp BC$.	1,0
	Xét tứ giác $ABDE$ có $\widehat{AEB}=\widehat{ADB}=90^\circ$ suy ra tứ giác $ABDE$ nội tiếp.	1,0
4.b	**b) Chứng minh BC là đường phân giác của $\widehat{EBM}$ và $KF.DM=KM.DF$.**	**1,5**
		
	Tứ giác $BDHF$ có $\widehat{BDH}=\widehat{BFH}=90^\circ$ suy ra tứ giác $BDHF$ nội tiếp.	0,5
	Do đó $\widehat{CFM}=\widehat{EBC}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{HD}$)	0,25
	Mà $\widehat{CFM}=\widehat{CBM}$ do vậy $\widehat{EBC}=\widehat{CBM}$ suy ra BC là đường phân giác của $\widehat{EBM}$.	0,25
	Từ đây có $\overset{\frown}{EC}=\overset{\frown}{MC}$ suy ra $\overset{\frown}{EB}=\overset{\frown}{MB}$ do đó $\begin{cases} CE=CM \\ BE=BM \end{cases}$ suy ra BC là đường thẳng trung trực của EM suy ra ΔKEM cân tại K, do đó KD là phân giác của $\widehat{FKM}$	0,25
	Trong tam giác FKM có $\dfrac{DF}{DM}=\dfrac{KF}{KM}$ hay $KF.DM=KM.DF$.	0,25
4.c	**c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt AK tại $P(P\neq A)$, cắt ED tại $Q(Q\neq E)$. Chứng minh ba điểm P, Q, C thẳng hàng.**	**1,5**
		

	$\widehat{AEH}=\widehat{AFH}=90^\circ$ suy ra tứ giác $AEHF$ nội tiếp, $DHEC$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{FCB}=\widehat{HED}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{HD}$), mặt khác $\widehat{FCB}=\widehat{FEB}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{FB}$) do đó $\widehat{HED}=\widehat{FEB}$ suy ra $\overset{\frown}{FH}=\overset{\frown}{HQ}$ do vậy $\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{AQ}$ suy ra ΔAFQ cân tại A suy ra $AH\perp FQ$, do vậy $FQ//BC$.	0,5
	Ta có $\widehat{APF}=\widehat{FEC}=\widehat{FBK}$ suy ra $PFBK$ là tứ giác nội tiếp.	0,25
	Chứng minh được $PKCE$ là tứ giác nội tiếp.	0,25
	Ta có $\widehat{EKC}=\widehat{EPC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{EC}$), mà $\widehat{EKC}=\widehat{EFQ}$ (đồng vị) suy ra $\widehat{EFQ}=\widehat{EPC}$.	0,25
	Mặt khác $\widehat{EFQ}=\widehat{EPQ}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{EQ}$) do đó $\widehat{EPC}=\widehat{EPQ}$ hay ba điểm $P,\ Q,\ C$ thẳng hàng.	0,25
5.a	**Xét các số thực $x,\ y,\ z$ thỏa mãn $x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge -2$ và $2x+2y+2z+1=0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=x+10xy+4xyz$.**	**2,0**
	Đặt $\begin{cases}a=2x\\b=2y\\c=2z+4\end{cases}$ ta có được $\begin{cases}a,b,c\ge 0\\a+b+c=3\end{cases}$ (*).	0,25
	$2T=2x+20xy+8xyz=a+5ab+ab(c-4)=a+ab+abc$	0,5
	Đánh giá $ab+abc=ab(1+c)\le\dfrac{a}{4}(b+1+c)^2=\dfrac{a}{4}(a-4)^2$	0,25
	Suy ra $2T\le a+\dfrac{a}{4}(a-4)^2$ hay $2T\le a-4+\dfrac{a}{4}(a-4)^2+4=\dfrac{1}{4}(a-4)(a-2)^2+4$	0,25
	Nhận xét từ (*) suy ra $a-4<0$ do đó $2T\le 4\Leftrightarrow T\le 2$	0,25
	Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}a+b+c=3\\a=2\\b=1+c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\\c=0\end{cases}$ hay $\begin{cases}x=1\\y=\dfrac{1}{2}\\z=-2\end{cases}$. Vậy $T_{\max}=2$ khi $\begin{cases}x=1\\y=\dfrac{1}{2}\\z=-2\end{cases}$.	0,5
5.b	**Cho tập hợp $X=\{1;2;3;...;2025\}$. Tìm số tự nhiên k nhỏ nhất sao cho với mọi cách lấy k phần tử bất kỳ thuộc X thì luôn tồn tại hai phần tử $a,\ b$ $(a>b)$ trong k phần tử được lấy mà $a+b$ chia hết cho $a-b$.**	**2,0**
	Xét tập $A=\{1;4;7;...;2023\}$ có 675 phần tử mà mọi cặp số $x,y\in A$ đều có $x+y$ không phải là bội của 3, nhưng $x-y$ là bội của 3 do đó $x+y$ không chia hết cho $x-y$. Suy ra $k>675$.	0,5
	Xét mỗi cách lấy ra 676 phần tử bất kỳ của tập X, giả sử ta xếp được trật tự $a_1<a_2<a_3<...<a_{676}$, lúc đó $a_{676}-a_1\le 2025-1=2024$	0,25
	Ta biểu diễn $a_{676}-a_1=(a_{676}-a_{675})+(a_{675}-a_{674})+...+(a_2-a_1)$ vế phải có 675 số hạng và $675\text{x}3=2025>2024$ suy ra có một số hạng $a_{i+1}-a_i<3$ với $i=\overline{1;675}$	0,25
	Giả sử 2 phần tử đó là $a,\ b$ $(a>b)$ khi đó $a-b=1$ hoặc $a-b=2$	0,25
	Nếu $a-b=1$ hiển nhiên $(a+b)\vdots(a-b)$	0,25
	Nếu $a-b=2$ thì a,b là hai số cùng tính chẵn lẻ nên $(a+b)\vdots 2$	0,25
	Kết luận số k nhỏ nhất là 676.	0,25

***Ghi chú:** Nếu học sinh làm cách khác đúng, giám khảo căn cứ vào điểm của từng phần để chấm cho phù hợp.*