



LÊ THỊ HOÀI CHÂU (Tổng Chủ biên)  
PHẠM THỊ THU THUYẾT (Chủ biên)  
TRẦN TRÍ DŨNG, LÊ ĐẠI DƯƠNG

# Toán 9

Bản mẫu

Tập 2



NHÀ XUẤT BẢN  
ĐẠI HỌC HUẾ



# HỘI ĐỒNG QUỐC GIA THẨM ĐỊNH SÁCH GIÁO KHOA

## Môn Toán - Lớp 9

(Theo Quyết định số 1551/QĐBGDDT ngày 05 tháng 6 năm 2023  
của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo)

Đoàn Quỳnh (Chủ tịch), Nguyễn Tiến Quang (Phó Chủ tịch), Phạm Đức Tài (Ủy viên, Thư kí),  
Vũ Thị Bình - Lê Thị Thu Hà - Tạ Minh Hiếu - Nguyễn Thị Hợp - Bùi Thị Hạnh Lâm  
Nguyễn Văn Ngự - Vũ Đình Phương - Tạ Công Sơn (Ủy viên).

BẢN MẪU SGK TOÁN 9 – CÙNG KHAI PHÁ



LÊ THỊ HOÀI CHÂU (Tổng Chủ biên)  
PHẠM THỊ THU THUYẾT (Chủ biên)  
TRẦN TRÍ DŨNG, LÊ ĐẠI DƯƠNG

# Toán 9

Bản mẫu

Tập 2

BẢN MẪU SGK TOÁN 9 – CÙNG KHÁM PHÁ



NHÀ XUẤT BẢN  
ĐẠI HỌC HUẾ



# LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh, quý thầy, cô giáo và phụ huynh thân mến!

Sách giáo khoa **Toán 9 – Cùng khám phá** được biên soạn nhằm đáp ứng những yêu cầu đổi mới về dạy và học Toán, đảm bảo kế thừa những yếu tố tích cực của các bộ sách giáo khoa Việt Nam thời kì trước đây, đồng thời khai thác có chọn lọc kinh nghiệm quốc tế về phát triển sách giáo khoa hiện đại.

Sách giáo khoa **Toán 9 – Cùng khám phá** đưa vào một hệ thống đa dạng các hoạt động trên lớp, các ví dụ, hình ảnh, các bài tập minh họa, qua đó giúp học sinh khám phá kiến thức, hiểu và có thể vận dụng được chúng vào việc giải quyết một số vấn đề của Toán học hay thực tiễn. Bằng việc chọn lựa một cách tiếp cận hợp lí các nội dung Toán học, sách giáo khoa **Toán 9 – Cùng khám phá** hướng đến mục tiêu tạo điều kiện thuận lợi cho học sinh tự học, cho giáo viên tổ chức các hoạt động dạy học, đánh giá, cho phụ huynh theo dõi, kiểm tra, từ đó từng bước hình thành ở học sinh phương pháp học tập tích cực.

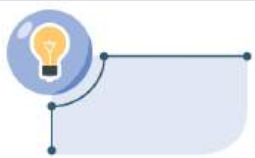
Bên cạnh đó, nội dung trong sách được biên soạn với độ mở thích hợp, tích hợp nhiều kiến thức thực tiễn, chú trọng sự liên môn, góp phần phát triển năng lực toàn diện cho học sinh. Ngoài ra, nguồn tài liệu số của sách được biên soạn và luôn có sẵn trên nền tảng Eduhome.

Mong muốn lớn nhất của nhóm tác giả là bộ sách sẽ góp phần vào việc giúp học sinh liên kết các khái niệm toán học với nhau, phát triển năng lực tư duy toán học, năng lực giải quyết vấn đề, năng lực giao tiếp bằng ngôn ngữ toán học, kết nối được Toán học với các môn học khác và với thế giới thực. Hi vọng với bộ sách này, học sinh sẽ cảm thấy hứng thú, tích cực, chủ động hơn khi học Toán và sẽ có những trải nghiệm thú vị khi vận dụng Toán học vào cuộc sống.

Chúc các em khám phá được nhiều điều thú vị của thế giới Toán học, nhận ra được sự có mặt của nó khắp nơi trong cuộc sống quanh ta.

Em hãy giữ gìn sách cẩn thận để sử dụng được lâu dài nhé!

## HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

<b>1. Mở đầu chương</b>	Giới thiệu chương thông qua việc thiết lập sự liên hệ giữa chủ đề của chương với thực tiễn. Mục tiêu học tập cũng được nêu rõ trong mục này.
<b>2. Các bài học: Mỗi bài học thường được thiết kế với các phần:</b>	
	<b>Khởi động</b> Thường là một câu hỏi hay một tình huống tạo động cơ học tập, từ đó nhận ra ứng dụng của kiến thức sẽ học trong bài.
<b>HOẠT ĐỘNG</b>	<b>Hoạt động</b> Thông qua trải nghiệm, khám phá, học sinh tham gia vào việc xây dựng kiến thức mới, nhận ra ứng dụng của nó trong những ngữ cảnh cụ thể.
	<b>Kiến thức trọng tâm</b> Kiến thức/nội dung được đặt trong khung màu với biểu tượng bóng đèn, trình bày những nội dung chủ chốt của bài học.
<b>VÍ DỤ</b>	<b>Ví dụ</b> Là những minh họa cho kiến thức mới và ứng dụng của nó, đồng thời luyện cho học sinh cách lập luận, diễn đạt rõ ràng, chính xác một ý tưởng bằng ngôn ngữ toán học.
<b>LUYỆN TẬP VẬN DỤNG</b>	<b>Luyện tập – Vận dụng</b> Tạo cơ hội cho học sinh sử dụng kiến thức vừa học vào việc giải quyết những vấn đề cụ thể của toán học hoặc của thực tiễn.
<b>BÀI TẬP</b>	<b>Bài tập</b> Gồm một hệ thống bài tập từ đơn giản – áp dụng trực tiếp các khái niệm toán học vừa được học, đến những bài đòi hỏi việc vận dụng kiến thức toán học ở mức độ cao hơn về tư duy lập luận, kĩ năng. Nhiều vấn đề thực tiễn được đưa vào, giúp học sinh nhận ra ý nghĩa của kiến thức vừa học.
<b>3. Ôn tập chương</b>	Qua hệ thống bài tập ôn tập, học sinh có thể kiểm tra lại hiểu biết của mình về các khái niệm và ý tưởng quan trọng được nghiên cứu trong chương, kết nối chúng với nhau trong việc giải quyết những vấn đề đa dạng.

Bên cạnh đó, trong các bài học còn có thêm một số đề mục hỗ trợ sau đây:

Ghi chú/Lưu ý	Em có biết (nhằm đọc thêm)
<b>Ghi chú/Lưu ý:</b> Nhấn mạnh hoặc mở rộng kiến thức, chú thích những thông tin quan trọng liên quan đến các kiến thức cốt lõi.	<b>?? EM CÓ BIẾT</b> Giới thiệu một số yếu tố thú vị về ứng dụng của toán học hay lịch sử toán học.

## Mục lục

### Phần ĐẠI SỐ

#### Chương 6 HÀM SỐ $y = ax^2$ ( $a \neq 0$ ). PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Bài 1	Hàm số $y = ax^2$ ( $a \neq 0$ ) và đồ thị	2
Bài 2	Phương trình bậc hai một ẩn	7
Bài 3	Định lí Viète và ứng dụng	16
Bài 4	Giải bài toán bằng cách lập phương trình bậc hai	20
	Ôn tập chương 6	23
	Hoạt động thực hành và trải nghiệm	26

### Phần HÌNH HỌC PHẪNG

#### Chương 7 ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP. ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

Bài 1	Đường tròn ngoại tiếp tam giác. Đường tròn nội tiếp tam giác	30
Bài 2	Tứ giác nội tiếp	35
	Ôn tập chương 7	39

#### Chương 8 ĐA GIÁC ĐỀU

Bài 1	Đa giác đều	42
Bài 2	Phép quay	50
	Ôn tập chương 8	55
	Hoạt động thực hành và trải nghiệm	57

### Phần HÌNH HỌC TRỰC QUAN

#### Chương 9 HÌNH TRỤ. HÌNH NÓN. HÌNH CẦU

Bài 1	Hình trụ	62
Bài 2	Hình nón	69
Bài 3	Hình cầu	77
	Ôn tập chương 9	85

### Phần THỐNG KÊ & XÁC SUẤT

#### Chương 10 MỘT SỐ YẾU TỐ VỀ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

Bài 1	Mô tả và biểu diễn dữ liệu	88
Bài 2	Tần số	97
Bài 3	Tần số tương đối	105
Bài 4	Tần số ghép nhóm. Tần số tương đối ghép nhóm	113
Bài 5	Phép thử ngẫu nhiên. Không gian mẫu	121
Bài 6	Cách tính xác suất của biến cố trong một số mô hình đơn giản	125
	Ôn tập chương 10	131
	Hoạt động thực hành và trải nghiệm	137

<b>Bảng tra cứu thuật ngữ</b>	<b>141</b>
-------------------------------	------------

<b>Bảng giải thích thuật ngữ</b>	<b>142</b>
----------------------------------	------------

# Phần

# ĐẠI SỐ

Chương

6

Hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ).

Phương trình bậc hai một ẩn



Lễ hội pháo hoa quốc tế Đà Nẵng 2019 (DIFF 2019) với chủ đề "Những dòng sông kể chuyện" đã mang đến những phần trình diễn pháo hoa đặc sắc từ nhiều đội thi đẳng cấp thế giới, góp phần khẳng định nơi đây là một trong những điểm đến sự kiện, lễ hội hàng đầu châu Á (nguồn: <https://www.danang.gov.vn/chinh-quyen/chi-tiet?id=36385&c=3>). Những đường cong tuyệt đẹp khi pháo hoa lên cao toả ra cho ta hình ảnh về đường parabol – đồ thị của các hàm số có dạng  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ).

## Cùng tìm hiểu

- ▶ Hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) và đồ thị;
- ▶ Một số vấn đề thực tiễn gắn với hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) và đồ thị;
- ▶ Phương trình bậc hai một ẩn và cách giải;
- ▶ Định lí Viète và ứng dụng;
- ▶ Cách vận dụng phương trình bậc hai vào giải quyết bài toán thực tiễn.

# Bài 1

## HÀM SỐ $y = ax^2$ ( $a \neq 0$ ) VÀ ĐỒ THỊ

Từ khoá: hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ), đường parabol.



Đường đi của quả bóng rổ và cầu vòm cho ta những hình ảnh trực quan về đồ thị hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ).



### 1 HÀM SỐ $y = ax^2$ ( $a \neq 0$ )

#### HOẠT ĐỘNG 1

Viết hàm số biểu thị diện tích  $S$  (cm<sup>2</sup>) của tam giác vuông cân có độ dài cạnh góc vuông bằng  $x$  (cm). Tính  $S$  khi  $x$  lần lượt bằng 2 cm; 2,5 cm; 6 cm.

Các hàm số biểu thị diện tích tam giác vuông cân, diện tích hình vuông hay diện tích hình tròn đều là các hàm số có dạng  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) với  $x$  lần lượt là độ dài cạnh góc vuông của tam giác vuông cân, độ dài cạnh hình vuông, độ dài bán kính hình tròn. Nhiều vấn đề trong khoa học và trong thực tiễn dẫn đến việc nghiên cứu các hàm số có dạng này.

#### VÍ DỤ 1

- Cho hàm số  $f(x) = 3x^2$ . Tính  $f(-2)$ ,  $f(-\frac{1}{3})$ ,  $f(0)$ ,  $f(3)$ .
- Cho hàm số  $y = ax^2$ . Tìm  $a$ , biết khi  $x = -1$  thì  $y = 4$ .

#### Bài giải

a) Ta có  $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 = 3 \cdot 4 = 12$ .

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

$$f(0) = 3 \cdot 0^2 = 3 \cdot 0 = 0.$$

$$f(3) = 3 \cdot 3^2 = 3 \cdot 9 = 27.$$

b) Khi  $x = -1$  thì  $y = 4$  nên  $a \cdot (-1)^2 = 4$  hay  $a \cdot 1 = 4$ . Suy ra  $a = 4$ .

#### LUYỆN TẬP 1

Cho hàm số  $y = ax^2$ .

- Tìm  $a$ , biết khi  $x = 2$  thì  $y = -1$ .
- Tính các giá trị tương ứng của hàm số trong Bảng 6.1.

Bảng 6.1

$x$	-2	-1	0	4
$y$	?	?	?	?

## VẬN DỤNG 1

Một vật rơi ở độ cao 80 m so với mặt đất. Quỹ đường chuyển động  $s$  (m) của vật rơi phụ thuộc vào thời gian  $t$  (s) bởi công thức  $s = 5t^2$ .

- Tính quỹ đường chuyển động của vật sau 2 giây.
- Hỏi sau bao lâu vật này tiếp đất?

## 2 ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax^2$ ( $a \neq 0$ )

### HOẠT ĐỘNG 2

- a) Cho hàm số  $y = \frac{1}{2}x^2$ . Tính các giá trị tương ứng của hàm số trong *Bảng 6.2*.

*Bảng 6.2*

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = \frac{1}{2}x^2$	?	?	?	?	?	?	?	?	?

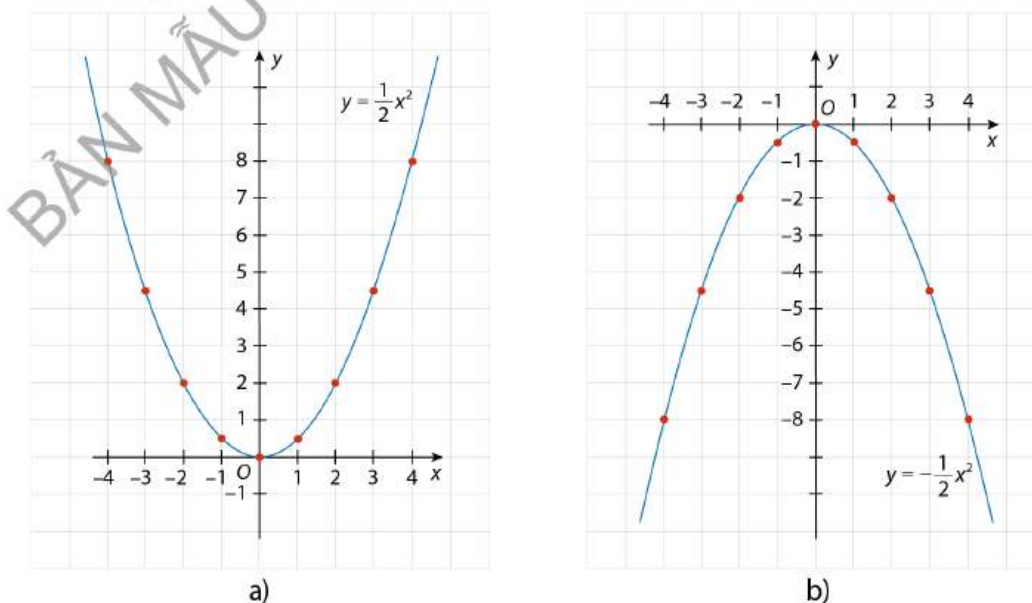
Đánh dấu các điểm  $(x; y)$  trong *Bảng 6.2* trên mặt phẳng tọa độ.

- b) Cho hàm số  $y = -\frac{1}{2}x^2$ . Tính các giá trị tương ứng của hàm số trong *Bảng 6.3*.

*Bảng 6.3*

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = -\frac{1}{2}x^2$	?	?	?	?	?	?	?	?	?

Ta đã biết đồ thị của hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) trên một mặt phẳng tọa độ là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng  $(x; ax^2)$  trên mặt phẳng đó. Đồ thị của hai hàm số  $y = \frac{1}{2}x^2$  và  $y = -\frac{1}{2}x^2$  lần lượt là các đường cong có dạng như *Hình 6.1a* và *Hình 6.1b*.



Hình 6.1

### HOẠT ĐỘNG 3

Quan sát đồ thị của hai hàm số  $y = \frac{1}{2}x^2$  (Hình 6.1a) và  $y = -\frac{1}{2}x^2$  (Hình 6.1b). Với mỗi đồ thị, hãy cho biết:

- Đồ thị nằm phía trên hay phía dưới trục hoành;
- Điểm thấp nhất hoặc điểm cao nhất của đồ thị;
- Mối liên hệ giữa tung độ của hai điểm có hoành độ đối nhau thuộc đồ thị;
- Nếu gấp giấy theo nếp gấp là đường thẳng chứa trục  $Oy$  thì phần đồ thị hàm số bên phải và bên trái trục  $Oy$  có trùng nhau không.

Từ Hoạt động 3, ta rút ra nhận xét:



- Đồ thị của hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) là một đường cong đi qua gốc tọa độ. Đường cong đó được gọi là một *parabol* với đỉnh  $O$  và nhận trục  $Oy$  làm trục đối xứng.
- Nếu  $a > 0$  thì đồ thị nằm phía trên trục hoành,  $O$  là điểm thấp nhất của đồ thị.
- Nếu  $a < 0$  thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành,  $O$  là điểm cao nhất của đồ thị.

#### Lưu ý:

- Cho hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ).
  - Nếu  $a > 0$  thì  $y > 0$  với mọi  $x \neq 0$ ;  $y = 0$  khi  $x = 0$ .
  - Nếu  $a < 0$  thì  $y < 0$  với mọi  $x \neq 0$ ;  $y = 0$  khi  $x = 0$ .
- Vì đồ thị hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) luôn đi qua gốc tọa độ  $O$  và nhận trục  $Oy$  làm trục đối xứng nên khi vẽ đồ thị của hàm số này, ta thường chọn những điểm có hoành độ đối nhau. Chỉ cần tính giá trị của hàm số tại  $x_0$ , ta suy ra được giá trị của hàm số tại  $-x_0$  vì  $a(-x_0)^2 = ax_0^2$ . Chẳng hạn, trong Hoạt động 2, giá trị của hàm số  $y = \frac{1}{2}x^2$  tại  $x = -1, x = -2$  lần lượt bằng giá trị của hàm số này tại  $x = 1, x = 2$ .

#### VÍ DỤ 2

Vẽ đồ thị hàm số  $y = x^2$ .

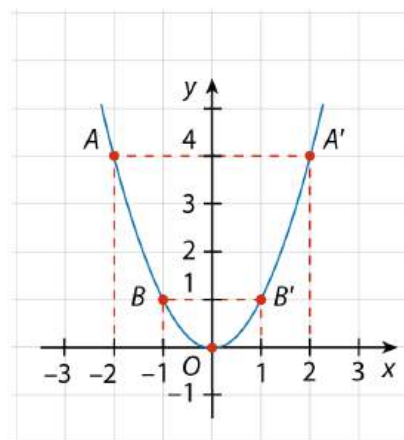
#### Bài giải

Bảng 6.4 cho một số giá trị tương ứng của  $x$  và  $y$ :

Bảng 6.4

$x$	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Trên mặt phẳng tọa độ, đánh dấu các điểm  $A(-2; 4)$ ,  $B(-1; 1)$ ,  $O(0; 0)$ ,  $B'(1; 1)$ ,  $A'(2; 4)$ . Đồ thị hàm số  $y = x^2$  là đường parabol đi qua năm điểm  $A, B, O, B', A'$  như Hình 6.2.



Hình 6.2

### Lưu ý:

Ta có thể vẽ đồ thị của hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) theo các bước sau:

- Vẽ hệ trục tọa độ  $Oxy$ ;
- Lập bảng một số giá trị tương ứng của  $x$  và  $y$ . Đánh dấu các điểm tương ứng trên mặt phẳng tọa độ. Ta thường lấy điểm  $O$  và những điểm có hoành độ đối nhau;
- Vẽ đường parabol đi qua các điểm vừa đánh dấu.

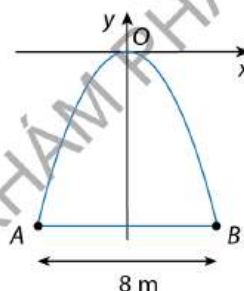
### LUYỆN TẬP 2

Vẽ đồ thị hàm số  $y = -2x^2$ .

### VẬN DỤNG 2

Một cổng chào được thiết kế theo hình parabol là một phần của đồ thị hàm số  $y = -\frac{x^2}{2}$ . Khoảng cách giữa hai chân cổng là  $AB = 8$  m (Hình 6.3).

- Tìm hoành độ của hai điểm  $A, B$ .
- Tính chiều cao của cổng.



Hình 6.3

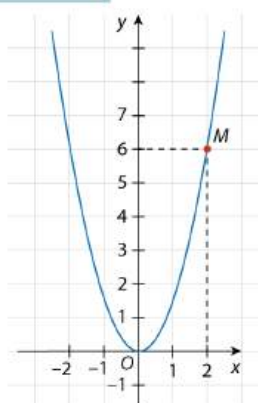
### BÀI TẬP

- 6.1. Tìm các giá trị tương ứng của hai hàm số  $y = 2x^2$ ,  $y = -3x^2$  trong Bảng 6.5 và vẽ đồ thị của mỗi hàm số.

Bảng 6.5

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2x^2$	?	?	?	?	?	?	?
$y = -3x^2$	?	?	?	?	?	?	?

- 6.2. Cho hàm số  $y = -x^2$ .
- Vẽ đồ thị hàm số.
  - Tìm trên đồ thị những điểm có tung độ bằng  $-4$ .
- 6.3. Cho hàm số  $y = ax^2$  có đồ thị là đường parabol như Hình 6.4.
- Tìm hệ số  $a$ .
  - Tìm tung độ của điểm thuộc đồ thị có hoành độ bằng  $-1$ .
  - Tìm các điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng  $\frac{2}{3}$ .



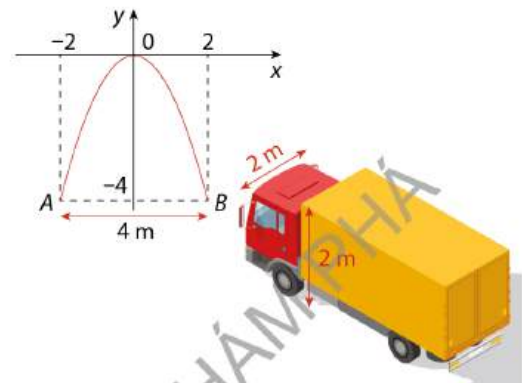
Hình 6.4

- 6.4. Viết hàm số biểu thị diện tích  $S$  ( $\text{cm}^2$ ) của tam giác đều có cạnh bằng  $a$  (cm). Tính  $S$  khi  $a$  lần lượt bằng 2 cm; 4 cm; 5 cm.
- 6.5. Động năng  $W_d$  (đơn vị: Jun, kí hiệu: J) của một vật có khối lượng  $m$  (kg) là năng lượng mà vật đó có được khi chuyển động với tốc độ  $v$  (m/s) và được tính theo công thức  $W_d = \frac{1}{2}mv^2$ . Cho biết khi vật chuyển động với tốc độ 4 m/s thì động năng sinh ra là 16 J, hãy xác định động năng của vật đó khi nó di chuyển với tốc độ 5 m/s.

**6.6.** Khối lượng tối đa  $L$  (tấn) mà một loại dây có thể chịu được phụ thuộc vào đường kính  $d$  (inch) của dây theo hàm số  $L = ad^2$  (1 inch  $\approx$  2,54 cm) (nguồn: <https://bizfluent.com/info-8665541-differences-dba-dbc.html>).

- Tìm hệ số  $a$ , biết sợi dây có đường kính 1,5 inch chịu được khối lượng tối đa 18 tấn.
- Một sợi dây có đường kính 26 mm sẽ chịu được khối lượng tối đa bao nhiêu tấn (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

**6.7.** Cổng của một hội chợ được thiết kế theo hình parabol là một phần của đồ thị của hàm số  $y = -x^2$ . Khoảng cách giữa hai chân cổng là 4 m (Hình 6.5). Hỏi một chiếc xe tải có chiều rộng 2 m và cao 2 m có thể đi qua cổng được không?



Hình 6.5

### ?? EM CÓ BIẾT

Trong đời sống, chúng ta gặp nhiều hình ảnh về đường parabol như khi quan sát các đài phun nước, xem trình diễn pháo hoa hay quan sát quỹ đạo chuyển động của một quả bóng,...



Ngoài ra, nhiều công trình kiến trúc, xây dựng có dáng dấp của đường parabol vừa làm tăng sức bền, tính chịu lực, vừa làm tăng tính thẩm mỹ cho công trình.



Cầu Garabit, Pháp



Cầu cảng Sydney, Úc

Trong khoa học, kĩ thuật, anten parabol giúp việc thu và phát sóng một cách hiệu quả.

## Bài 2

# PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Từ khoá: phương trình bậc hai một ẩn, biệt thức  $\Delta$ .



Độ cao so với mặt đất  $h$  (m) của một quả bóng sau  $t$  giây từ khi bắt đầu được ném lên theo phương thẳng đứng được cho bởi công thức  $h(t) = -5t^2 + 10t + 1$ . Sau bao lâu kể từ lúc được ném lên thì quả bóng chạm đất?

### 1 PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

#### HOẠT ĐỘNG 1

Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 2 m. Gọi  $x$  (m) là chiều rộng của khu vườn.

- Lập công thức tính diện tích khu vườn theo  $x$ .
- Biết diện tích khu vườn là  $48 \text{ m}^2$ , giá trị của  $x$  phải thoả mãn hệ thức nào?



Phương trình dạng  $ax^2 + bx + c = 0$  với  $a, b, c$  là ba số đã cho và  $a \neq 0$ , được gọi là *phương trình bậc hai một ẩn* (ẩn số là  $x$ ) hay nói gọn là *phương trình bậc hai*.

#### VÍ DỤ 1

Phương trình nào sau đây là phương trình bậc hai? Xác định các hệ số  $a, b, c$  của mỗi phương trình bậc hai đó.

- |                         |                            |
|-------------------------|----------------------------|
| a) $x^2 - 3x + 5 = 0$ ; | b) $-y^2 + 0,5y = 0$ ;     |
| c) $4x - 7 = 0$ ;       | d) $2t^2 - \sqrt{3} = 0$ . |

#### Bài giải

- $x^2 - 3x + 5 = 0$  là phương trình bậc hai (ẩn  $x$ ) với các hệ số  $a = 1, b = -3, c = 5$ .
- $-y^2 + 0,5y = 0$  là phương trình bậc hai (ẩn  $y$ ) với các hệ số  $a = -1, b = 0,5, c = 0$ .
- $4x - 7 = 0$  không phải là phương trình bậc hai.
- $2t^2 - \sqrt{3} = 0$  là phương trình bậc hai (ẩn  $t$ ) với các hệ số  $a = 2, b = 0, c = -\sqrt{3}$ .

#### LUYỆN TẬP 1

Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc hai? Chỉ rõ các hệ số  $a, b, c$  của mỗi phương trình ấy.

- |                         |                              |
|-------------------------|------------------------------|
| a) $3x^2 - x - 8 = 0$ ; | b) $y^2 - \frac{1}{9} = 0$ ; |
| c) $t^3 - t^2 = 0$ ;    | d) $2x - x^2 = 0$ .          |

## HOẠT ĐỘNG 2

Phân tích vế trái của các phương trình sau thành nhân tử rồi giải các phương trình đó:

a)  $2x - x^2 = 0$ ;

b)  $x^2 - 6x + 9 = \frac{1}{2}$ .

Ta có thể giải phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) theo các cách sau:

- Đưa về phương trình tích;
- Biến đổi vế trái của phương trình về dạng  $a(x + h)^2 = k$  với  $h, k$  là các hằng số.

## VÍ DỤ 2

Giải các phương trình sau:

a)  $x^2 - 5x = 0$ ;

b)  $2x^2 = 8$ .

**Bài giải**

a)  $x^2 - 5x = 0$

$x(x - 5) = 0$

$x = 0$  hoặc  $x - 5 = 0$

$x = 0$  hoặc  $x = 5$ .

Vậy phương trình có hai nghiệm  $x_1 = 0, x_2 = 5$ .

b)  $2x^2 = 8$

$x^2 = 4$

$x = 2$  hoặc  $x = -2$ .

Vậy phương trình có hai nghiệm  $x_1 = -2, x_2 = 2$ .

## LUYỆN TẬP 2

Giải các phương trình sau:

a)  $3x^2 = -4x$ ;

b)  $2x^2 - 3 = 0$ .

## VẬN DỤNG 1

Một con cá heo nhảy lên khỏi mặt nước. Sau  $t$  (s) kể từ khi nhảy lên, cá heo ở độ cao  $h = 6t - 5t^2$  (m) so với mặt nước. Sau bao lâu con cá heo ấy lại quay trở về mặt nước?

## VÍ DỤ 3

Giải phương trình  $2x^2 + 8x + 3 = 0$ .

### Bài giải

$$2x^2 + 8x + 3 = 0$$

$$2x^2 + 8x = -3$$

(Chuyển 3 sang về phải và đổi dấu)

$$x^2 + 4x = -\frac{3}{2}$$

(Chia cả hai vế cho 2)

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = -\frac{3}{2} + 2^2$$

(Cộng cả hai vế với  $2^2$  để về trái thành bình phương của một biểu thức)

$$(x + 2)^2 = \frac{5}{2}$$

$$x + 2 = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ hoặc } x + 2 = -\frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$x = -2 + \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ hoặc } x = -2 - \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm  $x_1 = \frac{-4 + \sqrt{10}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{-4 - \sqrt{10}}{2}$ .

### LUYỆN TẬP 3

Giải phương trình  $2x^2 - 5x + 2 = 0$ .

## 3 CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

### HOẠT ĐỘNG 3

Biến đổi phương trình tổng quát  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) theo các bước tương tự như Ví dụ 3, ta có:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$

(Chuyển  $c$  sang về phải và đổi dấu)

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

(Chia cả hai vế cho  $a \neq 0$ )

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

(Cộng cả hai vế với  $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$  để về trái thành bình phương của một biểu thức)

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Đặt  $\Delta = b^2 - 4ac$  và gọi là biệt thức của phương trình ( $\Delta$  là một chữ cái Hy Lạp, đọc là "denta"). Ta được  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ . (1)

Giải phương trình (1) theo các hệ số  $a, b, c$  trong mỗi trường hợp sau:

a)  $\Delta > 0$ ;

b)  $\Delta = 0$ ;

c)  $\Delta < 0$ .

Ta có kết luận sau:



Cho phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) và  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

• Nếu  $\Delta > 0$  thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

• Nếu  $\Delta = 0$  thì phương trình có nghiệm kép  $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ .

• Nếu  $\Delta < 0$  thì phương trình vô nghiệm.

#### VÍ DỤ 4

Giải các phương trình sau:

a)  $x^2 - 3x + 1 = 0$ ;

b)  $4t^2 + 5t + 1 = t$ ;

c)  $-2y^2 + y - 7 = 0$ .

##### Bài giải

a) Phương trình có  $a = 1, b = -3, c = 1$ .

$$\Delta = (-3)^2 - 4.1.1 = 5 > 0.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ .

b)  $4t^2 + 5t + 1 = t$

$$4t^2 + 5t - t + 1 = 0$$

$$4t^2 + 4t + 1 = 0$$

Phương trình có  $a = 4, b = 4, c = 1$ .

$$\Delta = 4^2 - 4.4.1 = 0.$$

Phương trình có nghiệm kép  $t_1 = t_2 = -\frac{1}{2}$ .

c) Phương trình có  $a = -2, b = 1, c = -7$ .

$$\Delta = 1^2 - 4.(-2).(-7) = -55 < 0.$$

Phương trình vô nghiệm.

#### LUYỆN TẬP 4

Giải các phương trình sau:

a)  $3x^2 - x + 2 = 0$ ;

b)  $-3t^2 + t + 6 = 0$ ;

c)  $3x^2 - 6x + 3 = 0$ .

**Lưu ý:** Nếu phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) có  $ac < 0$  ( $a$  và  $c$  trái dấu) thì  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ . Khi đó phương trình có hai nghiệm phân biệt.

#### VẬN DỤNG 2

Qua phân tích dữ liệu tại một cửa hàng tiện lợi, người ta thấy rằng nếu tăng giá bán của một loại nước ngọt thêm  $x$  (nghìn đồng) thì lợi nhuận  $P$  (nghìn đồng) thu về trong một tuần sau đó được tính theo công thức:

$$P = -20x^2 + 80x + 3\,300.$$



### Bài giải

a)  $x(x - 1) = 6x - 10$

$$x^2 - x = 6x - 10$$

$$x^2 - x - 6x + 10 = 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 9, \sqrt{\Delta} = 3, x_1 = 2, x_2 = 5.$$

Phương trình đã cho có nghiệm  $x_1 = 2, x_2 = 5$ .

b)  $x^2 - \frac{x+3}{2} = \frac{x^2-4}{3}$

$$\frac{6x^2}{6} - \frac{3(x+3)}{6} = \frac{2(x^2-4)}{6}$$

$$6x^2 - 3(x+3) = 2(x^2-4)$$

$$6x^2 - 3x - 9 = 2x^2 - 8$$

$$6x^2 - 2x^2 - 3x - 9 + 8 = 0$$

$$4x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1) = 25, \sqrt{\Delta} = 5, x_1 = -\frac{1}{4}, x_2 = 1.$$

Phương trình đã cho có nghiệm  $x_1 = -\frac{1}{4}, x_2 = 1$ .

### LUYỆN TẬP 6

Giải các phương trình sau:

a)  $2x^2 + 3x - 7 = x(x + 3)$ ;

b)  $\frac{x(x-1)}{3} + 2 = \frac{x+5}{4}$ .

### VẬN DỤNG 4

Một bức tranh được treo bởi một khung tranh có chiều dài 80 cm, chiều rộng 60 cm và viền khung rộng  $x$  (cm) như Hình 6.6.

a) Viết biểu thức biểu thị diện tích của bức tranh.

b) Tìm  $x$ , biết diện tích bức tranh là  $0,3996 \text{ m}^2$ .



Hình 6.6

## 4 SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY TÌM NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Ta có thể sử dụng máy tính cầm tay thích hợp để tính nghiệm của các phương trình bậc hai.

### VÍ DỤ 7

Dùng máy tính cầm tay tính nghiệm của các phương trình sau:

- a)  $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{7}x + 1 = 0$ ;                      b)  $3x^2 + 7,8x + 5,07 = 0$ .

#### Bài giải

a)

#### Kết quả:

Phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1 \approx 1,345162097$ ,  $x_2 \approx 0,5256665965$ .

b)

#### Kết quả:

Phương trình có nghiệm kép  $x_1 = x_2 = -\frac{13}{10}$ .

### LUYỆN TẬP 7

Dùng máy tính cầm tay tính nghiệm (nếu có) của các phương trình sau (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm):

- a)  $11x^2 + 4x - 189 = 0$ ;            b)  $2x^2 - 8\sqrt{2}x + 16 = 0$ ;            c)  $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x + 1 = 0$ .

## BÀI TẬP

**6.8.** Đưa các phương trình sau về dạng  $ax^2 + bx + c = 0$  và chỉ rõ các hệ số  $a, b, c$ :

a)  $x^2 - x = 3x + 1$ ;

b)  $3x^2 - 4x = \sqrt{2}x^2 - 2$ ;

c)  $(x + 1)^2 = 2(x - 1)$ ;

d)  $x^2 - m = 2(m + 1)x$ ,  $m$  là một hằng số.

**6.9.** Không giải phương trình, hãy xác định số nghiệm của mỗi phương trình sau:

a)  $6x^2 - 2x + 9 = 0$ ;

b)  $3x^2 - 2\sqrt{15}x + 5 = 0$ ;

c)  $\frac{1}{3}y^2 - 5y + \frac{3}{2} = 0$ ;

d)  $2,3t^2 + 1,15t - 6,4 = 0$ .

**6.10.** Giải các phương trình sau:

a)  $-2x^2 + x + 1 = 0$ ;

b)  $x^2 - x + 4 = 0$ ;

c)  $4x^2 - 4x + 1 = 0$ ;

d)  $-x^2 - 4x + 1 = 0$ ;

e)  $y^2 - y - 3 = 0$ ;

g)  $z^2 - 2\sqrt{5}z + 5 = 0$ .

**6.11.** Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình  $x^2 - (m + 3)x + m^2 = 0$  có nghiệm  $x = 1$ .

**6.12.** Giải các phương trình sau:

a)  $x^2 - x - 1 = 3x + 1$ ;

b)  $\frac{x^2 - 9}{3} + 2 = x(1 - x)$ ;

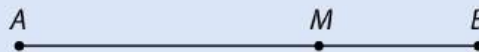
c)  $(x + 2)^2 - 3(x + 2) + 2 = 0$ ;

d)  $2x^4 + 3x^2 - 2 = 0$ .

**6.13.** Lượng nhiên liệu tiêu thụ  $y$  (l/100 km) của một số loại ô tô phụ thuộc vào tốc độ di chuyển  $x$  (km/h) theo hàm số  $y = \frac{1}{320}x^2 - \frac{3}{8}x + \frac{73}{4}$  với  $20 \leq x \leq 140$  (nguồn: [https://www.researchgate.net/publication/262182035\\_Reduction\\_of\\_Fuel\\_Consumption\\_and\\_Exhaust\\_Pollutant\\_Using\\_Intelligent\\_Transport\\_System](https://www.researchgate.net/publication/262182035_Reduction_of_Fuel_Consumption_and_Exhaust_Pollutant_Using_Intelligent_Transport_System)). Hỏi ô tô đi với tốc độ nào thì lượng nhiên liệu tiêu thụ là 7 l/100 km?

## ?? EM CÓ BIẾT

Cho đoạn thẳng  $AB$ . Gọi  $M$  là điểm nằm giữa  $A$  và  $B$  sao cho  $AM > MB$ .



Nếu  $\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB} = \varphi > 0$  (đọc là "phi") thì từ  $\frac{AM + MB}{AM} = \frac{AM}{MB}$  ta được  $1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$ .

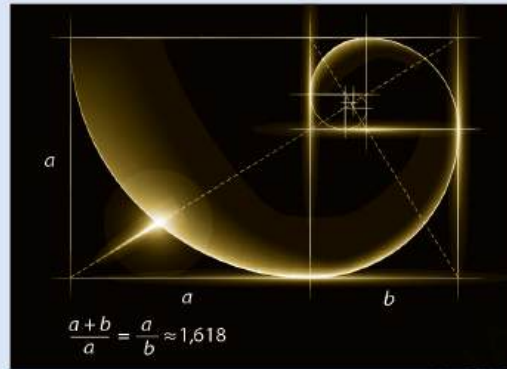
Từ đó ta có  $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ , suy ra  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Như vậy điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện chia

đoạn thẳng  $AB$  thành hai đoạn sao cho tỉ số giữa đoạn lớn và đoạn  $AB$  bằng tỉ số giữa đoạn nhỏ với đoạn lớn. Số  $\varphi$  này được gọi là tỉ số vàng, còn phép chia như trên được gọi là phép chia vàng hay phép chia hoàng kim.

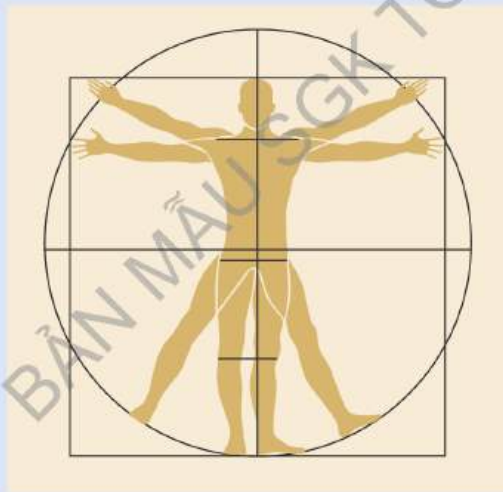
Tỉ số vàng xuất hiện nhiều trong kiến trúc, nghệ thuật,... Một hình chữ nhật được gọi là hình chữ nhật vàng nếu thoả mãn tính chất khi chia nó thành một hình vuông và một hình chữ nhật nhỏ thì hình chữ nhật nhỏ đồng dạng với hình chữ nhật ban đầu.

Trong tự nhiên và đời sống, các vật thể hay công trình kiến trúc liên quan đến

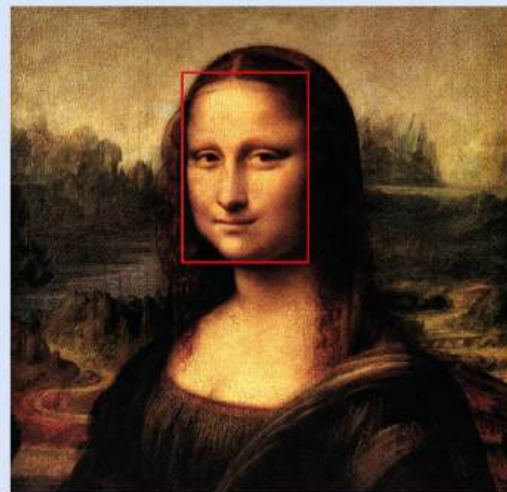
tỉ số vàng, hình chữ nhật vàng đều cho cảm giác ưa nhìn và được coi là hoàn mỹ. Một số bức tranh của Leonardo de Vinci cũng thể hiện rõ tư tưởng thẩm mỹ này.



Cầu thang xoắn ốc



Bức tranh Vitruvian Man của Leonardo de Vinci



Bức tranh Nàng Mona Lisa của Leonardo de Vinci

(Nguồn: <https://www.britannica.com/science/golden-ratio>,  
<http://mathcentral.uregina.ca/beyond/articles/Art/DaVinci.html>,  
<https://www.canva.com/learn/what-is-the-golden-ratio/>)

## Bài 3

# ĐỊNH LÍ VIÈTE VÀ ỨNG DỤNG

Từ khoá: định lí Viète.



Trong mảnh đất của mình, bác Thiện muốn dành một phần đất hình chữ nhật có diện tích  $24 \text{ m}^2$  để trồng hoa. Bác Thiện đang có 20 m lưới để rào xung quanh phần đất trồng hoa đó. Vậy bác Thiện nên chọn kích thước phần đất trồng hoa như thế nào để dùng vừa hết 20 m lưới?

### 1 ĐỊNH LÍ VIÈTE

#### HOẠT ĐỘNG 1

Xét phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ). Giả sử phương trình có nghiệm  $x_1, x_2$ , so sánh  $S = x_1 + x_2$  và  $-\frac{b}{a}$ ,  $P = x_1x_2$  và  $\frac{c}{a}$ .

Ta có *định lí Viète* sau đây liên quan đến việc xác định tổng và tích các nghiệm của một phương trình bậc hai theo các hệ số của nó:



Nếu  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) thì

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

#### VÍ DỤ 1

Không giải phương trình, chứng minh phương trình  $2x^2 - 7x + 6 = 0$  có hai nghiệm phân biệt và tính tổng, tích của các nghiệm đó.

#### Bài giải

Phương trình có  $a = 2, b = -7, c = 6$ .

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 1 > 0$  nên phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$ .

Theo định lí Viète, ta có  $S = x_1 + x_2 = \frac{7}{2}, P = x_1x_2 = 3$ .

#### LUYỆN TẬP 1

Không giải phương trình, chứng minh phương trình  $x^2 + 3x - 6 = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  và tính  $M = x_1 + x_2 - x_1x_2$ .

## LUYỆN TẬP 2

Cho phương trình  $x^2 - 2\sqrt{5}x + 3 = 0$ .

- Không giải phương trình, chứng minh phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$ .
- Tính  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}; x_1^2 + x_2^2$ .

## HOẠT ĐỘNG 2

- Cho phương trình  $3x^2 - 7x + 4 = 0$ .
  - Xác định các hệ số  $a, b, c$  rồi tính  $a + b + c$ .
  - Chứng minh  $x_1 = 1$  là một nghiệm của phương trình.
  - Áp dụng định lí Viète để tìm nghiệm  $x_2$ .
- Cho phương trình  $2x^2 + 5x + 3 = 0$ .
  - Chỉ rõ các hệ số  $a, b, c$  rồi tính  $a - b + c$ .
  - Chứng minh  $x_1 = -1$  là một nghiệm của phương trình.
  - Tìm nghiệm  $x_2$ .

Ta có kết luận sau:



Cho phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ).

- Nếu  $a + b + c = 0$  thì phương trình có nghiệm  $x_1 = 1$  và  $x_2 = \frac{c}{a}$ .
- Nếu  $a - b + c = 0$  thì phương trình có nghiệm  $x_1 = -1$  và  $x_2 = -\frac{c}{a}$ .

## VÍ DỤ 2

Tính nhẩm nghiệm của các phương trình sau:

- $x^2 - 9x + 8 = 0$ ;
- $43x^2 + 75x + 32 = 0$ .

### Bài giải

- Phương trình có  $a = 1, b = -9, c = 8$ .

Vì  $a + b + c = 1 + (-9) + 8 = 0$  nên phương trình có nghiệm  $x_1 = 1$  và  $x_2 = 8$ .

- Phương trình có  $a = 43, b = 75, c = 32$ .

Vì  $a - b + c = 43 - 75 + 32 = 0$  nên phương trình có nghiệm  $x_1 = -1$  và  $x_2 = -\frac{32}{43}$ .

## LUYỆN TẬP 3

Tính nhẩm nghiệm của các phương trình sau:

- $-5x^2 + 2x + 3 = 0$ ;
- $4x^2 + 27x + 23 = 0$ ;
- $6,8t^2 - 4,7t - 2,1 = 0$ .

## HOẠT ĐỘNG 3

Hiện nay, tổng số tuổi của hai em Trọng và Nhân là 13. Gọi  $x$  là số tuổi hiện nay của Nhân ( $x$  là số nguyên dương).

- Hãy biểu diễn số tuổi của Trọng và tích số tuổi của hai em hiện nay theo  $x$ .
- Biết tích số tuổi của hai em hiện nay là 40, hãy lập phương trình biểu thị thông tin này.

Ta rút ra kết luận sau:



Nếu hai số có tổng bằng  $S$  và tích bằng  $P$  thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình  $x^2 - Sx + P = 0$ . Điều kiện để có hai số đó là  $S^2 - 4P \geq 0$ .

## VÍ DỤ 3

Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 20 và tích của chúng bằng 96.

**Bài giải**

Hai số cần tìm là hai nghiệm của phương trình  $x^2 - 20x + 96 = 0$ .

Ta có  $\Delta' = (-10)^2 - 1 \cdot 96 = 100 - 96 = 4$ ,  $\sqrt{\Delta'} = \sqrt{4} = 2$ ,

$$x_1 = \frac{-(-10) + 2}{1} = 12, x_2 = \frac{-(-10) - 2}{1} = 8.$$

Vậy hai số cần tìm là 12 và 8.

## LUYỆN TẬP 4

Tìm hai số, biết tổng và tích của chúng lần lượt bằng:

- 2 và  $-15$ ;
- 3 và 5.

## VẬN DỤNG

Hãy trả lời câu hỏi ở phần Khởi động.

## BÀI TẬP

**6.14.** Với mỗi phương trình trong *Bảng 6.6*:

- Tìm các số thích hợp cho mỗi ô (?) ở cột  $\Delta$ .
- Nếu phương trình có nghiệm  $x_1$  và  $x_2$ , không giải phương trình, hãy tìm các số thích hợp cho mỗi ô (?) ở cột  $S$  và cột  $P$ .

Bảng 6.6

Phương trình	$\Delta$	$S = x_1 + x_2$	$P = x_1 x_2$
$3x^2 - x - 1 = 0$	?	?	?
$2x^2 + 7x + 3 = 0$	?	?	?
$9x^2 + 6x + 1 = 0$	?	?	?
$5x^2 - x + 1 = 0$	?	?	?

**6.15.** Cho phương trình  $3x^2 - 10x + 3 = 0$ .

a) Không giải phương trình, chứng minh phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$ .

b) Tính  $(2x_1 - 1)(2x_2 - 1); |x_1 - x_2|$ .

**6.16.** Tính nhằm nghiệm của các phương trình sau:

a)  $13,6x^2 - 15,8x + 2,2 = 0$ ;

b)  $\sqrt{2}x^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{3} = 0$ .

**6.17.** Tìm hai số  $u$  và  $v$  trong mỗi trường hợp sau:

a)  $u + v = 35, uv = 276$ ;

b)  $u + v = -13, uv = -68$ ;

c)  $u + v = 3, uv = 11$ .

**6.18.** Một tam giác vuông có diện tích bằng  $24 \text{ cm}^2$  và có tổng độ dài hai cạnh góc vuông bằng  $14 \text{ cm}$ . Tính chu vi tam giác vuông đó.

**6.19.** Một hình hộp chữ nhật có chiều cao là  $5 \text{ dm}$ , diện tích xung quanh bằng  $100 \text{ dm}^2$  và thể tích bằng  $120 \text{ dm}^3$ . Tính chiều dài và chiều rộng của hình hộp chữ nhật đã cho.

## ?? EM CÓ BIẾT

François Viète (1540 – 1603) là một nhà toán học, một luật sư và một chính trị gia nổi tiếng người Pháp. Ông là người khởi xướng việc dùng các chữ để đại diện cho các hệ số và ẩn của phương trình. Sáng kiến này của ông đã góp phần thúc đẩy đại số phát triển một cách mạnh mẽ. Viète tìm ra mối liên hệ giữa các nghiệm và các hệ số của phương trình. Cũng vì vậy, định lí Viète được đặt theo tên của ông. Ngoài những công trình nghiên cứu về đại số, ông còn có những đóng góp đáng kể về lượng giác, hình học.

Viète còn là một thành viên của Nghị viện hoàng gia Pháp, phục vụ dưới thời của vua Henry III và Henry IV. Với tài năng của mình, ông đã giúp vua Henry IV giải mật mã lấy được từ quân Tây Ban Nha trong cuộc chiến tranh giữa hai nước cuối thế kỉ XVI và phá được nhiều âm mưu của đối phương. Vua Philip II của Tây Ban Nha đã rất kinh ngạc vì ông tin rằng mật mã đó gần như không thể giải được.

(Nguồn: [https://www.researchgate.net/publication/364629229\\_Francois\\_Viete\\_and\\_his\\_contribution\\_to\\_mathematics](https://www.researchgate.net/publication/364629229_Francois_Viete_and_his_contribution_to_mathematics) và <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Viete/>)



## Bài 4

# GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

### HOẠT ĐỘNG

Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Người ta làm một lối đi quanh vườn có bề rộng 0,5 m, phần đất còn lại để trồng cây có diện tích 55 m<sup>2</sup>.

- Gọi chiều rộng mảnh vườn là  $x$  (m) ( $x > 0$ ). Hãy biểu diễn chiều dài mảnh vườn theo  $x$ .
- Hãy biểu diễn chiều dài và chiều rộng của phần đất trồng cây theo  $x$ . Lập phương trình biểu thị diện tích phần đất trồng cây.
- Hỏi chiều rộng và chiều dài của mảnh vườn là bao nhiêu mét?



Hình 6.7

Trong Hoạt động, ta đã kí hiệu  $x$  là chiều rộng của mảnh đất và biểu diễn các đại lượng khác theo  $x$  để lập một phương trình bậc hai, từ đó giải quyết được bài toán. Ta có thể vận dụng phương trình bậc hai để giải quyết nhiều vấn đề thực tiễn theo các bước sau:

**Bước 1** Lập phương trình:

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện cho ẩn số;
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết;
- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

**Bước 2** Giải phương trình.

**Bước 3** Kiểm tra xem nghiệm có thoả mãn điều kiện của ẩn hay không rồi kết luận.

### VÍ DỤ 1

Một ca nô xuất phát từ một nhà giàn và chuyển động thẳng theo hướng Đông. Cùng lúc đó, một tàu thủy rời nhà giàn và chuyển động thẳng theo hướng Nam với tốc độ lớn hơn tốc độ của ca nô 8 km/h. Tính tốc độ của ca nô, biết sau một giờ kể từ lúc xuất phát, khoảng cách giữa ca nô và tàu thủy là 40 km.

#### Bài giải

Gọi tốc độ của ca nô là  $x$  (km/h) ( $x > 0$ ).

Tốc độ của tàu thủy:  $x + 8$  (km/h).

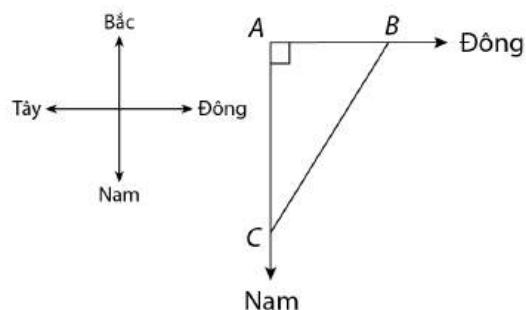
Gọi  $A$  là vị trí của nhà giàn, gọi  $B, C$  lần lượt là vị trí của ca nô và tàu thủy sau khi rời nhà giàn 1 giờ (Hình 6.8).

Quãng đường ca nô đã đi được sau 1 giờ:

$$AB = x \cdot 1 = x \text{ (km)}.$$

Quãng đường tàu thủy đã đi được sau 1 giờ:

$$AC = (x + 8) \cdot 1 = x + 8 \text{ (km)}.$$



Hình 6.8

Ca nô và tàu thủy chuyển động theo hai hướng vuông góc nhau nên  $\triangle ABC$  vuông tại A.

Ta có  $AB^2 + AC^2 = BC^2$  (định lý Pythagore).

$$x^2 + (x + 8)^2 = 40^2$$

$$x^2 + x^2 + 16x + 64 = 1600$$

$$2x^2 + 16x - 1536 = 0$$

$$x^2 + 8x - 768 = 0$$

$$x = 24 \text{ hoặc } x = -32.$$

Nghiệm  $x = -32$  không thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Vậy tốc độ của ca nô là 24 km/h.

### VẬN DỤNG 1

Một thửa ruộng hình chữ nhật có chiều dài gấp bốn lần chiều rộng. Tính độ dài các cạnh của thửa ruộng, biết nếu tăng chiều rộng thửa ruộng gấp đôi và giảm chiều dài thửa ruộng đi 5 m thì diện tích thửa ruộng sẽ tăng thêm 50 m<sup>2</sup>.

### VẬN DỤNG 2

Một hình thang có đáy lớn hơn đáy nhỏ 4 cm và chiều cao bằng đáy nhỏ. Tính độ dài đáy nhỏ, biết hình thang có diện tích 48 cm<sup>2</sup>.

### VÍ DỤ 2

Người ta đổ thêm 100 g nước vào một dung dịch chứa 30 g muối để pha loãng thì nồng độ của dung dịch giảm đi 5%. Hỏi trước khi pha loãng, dung dịch chứa bao nhiêu gam nước, biết dung dịch chỉ chứa một loại muối duy nhất?

#### Bài giải

Gọi khối lượng dung dịch ban đầu là  $x$  (g) ( $x > 0$ ).

Khối lượng dung dịch sau khi pha loãng:  $x + 100$  (g).

$$\text{Nồng độ dung dịch ban đầu: } \frac{30}{x} \cdot 100\% = \frac{30}{x}.$$

$$\text{Nồng độ dung dịch sau khi pha loãng: } \frac{30}{x+100} \cdot 100\% = \frac{30}{x+100}.$$

Sau khi pha loãng, nồng độ dung dịch giảm 5% =  $\frac{1}{20}$  nên ta có phương trình:

$$\frac{30}{x} - \frac{30}{x+100} = \frac{1}{20}$$

$$\frac{600(x+100)}{20x(x+100)} - \frac{600x}{20x(x+100)} = \frac{x(x+100)}{20x(x+100)}$$

$$x^2 + 100x - 60000 = 0$$

$$x = 200 \text{ hoặc } x = -300.$$

Nghiệm  $x = -300$  không thỏa mãn điều kiện của ẩn.

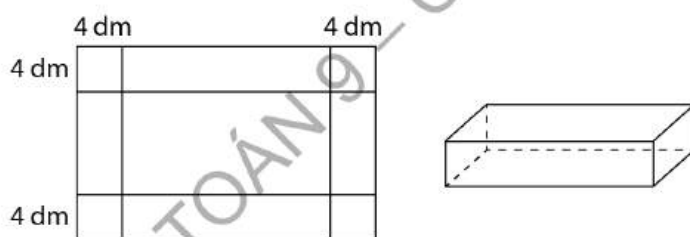
Vậy dung dịch ban đầu chứa  $200 - 30 = 170$  g nước.

### VẬN DỤNG 3

Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 1 100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

### BÀI TẬP

- 6.20.** Tích của hai số tự nhiên liên tiếp lớn hơn tổng của chúng là 181. Tìm hai số đó.
- 6.21.** Một tam giác vuông có độ dài ba cạnh là các số tự nhiên liên tiếp. Tìm chu vi tam giác vuông đó.
- 6.22.** Từ một miếng tôn hình chữ nhật, người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh bằng 4 dm để tạo thành một cái thùng hình hộp chữ nhật không nắp có dung tích bằng  $1\,536\text{ dm}^3$  (Hình 6.9). Tính kích thước của miếng tôn ban đầu, biết chiều dài của nó gấp đôi chiều rộng.



Hình 6.9

- 6.23.** Bác Trung gửi tiết kiệm 50 000 000 đồng vào ngân hàng với kì hạn 1 năm theo hình thức lãi kép (sau 1 năm, tiền lãi sẽ được gộp vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo). Tổng số tiền bác Trung nhận được sau 2 năm là 56 180 000 đồng. Hỏi lãi suất của ngân hàng bác Trung gửi là bao nhiêu phần trăm một năm, biết trong 2 năm gửi lãi suất không thay đổi và bác Trung không rút tiền ra?
- 6.24.** Khi nói đến tivi loại 32 inch, ta hiểu rằng đường chéo màn hình của chiếc tivi này dài 32 inch (1 inch  $\approx 2,54$  cm). Khi nói đến tỉ lệ khung hình 16 : 9, ta hiểu rằng chiều dài và chiều rộng của màn hình đó lần lượt tỉ lệ với 16; 9. Loại tỉ lệ khung hình này là phổ biến nhất hiện nay. Để sản xuất một chiếc tivi loại 32 inch với tỉ lệ khung hình 16 : 9 thì cần thiết kế chiều dài và chiều rộng màn hình bằng bao nhiêu centimét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

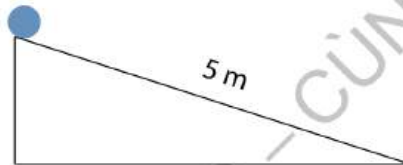
BÀI TẬP TỰ LUẬN

6.25. Cho hàm số  $y = ax^2$ .

- Tìm  $a$ , biết đồ thị hàm số đi qua điểm  $M(-4; 8)$ .
- Tìm trên đồ thị hàm số điểm  $D$  có hoành độ  $x = -2$ .

6.26. Nhiệt lượng toả ra  $Q$  (J) trong 1 giây trên một đoạn dây dẫn khi có dòng điện với cường độ  $I$  (A) chạy qua được tính theo công thức  $Q = aI^2$ . Biết khi  $I = 2$  (A) thì  $Q = 3,4$  (J). Hãy xác định  $Q$  khi  $I$  lần lượt bằng 0,5 A; 1 A; 1,2 A.

6.27. Một viên bi lăn từ vị trí cao nhất của một mặt phẳng nghiêng dài 5 m (Hình 6.10). Quãng đường  $s$  (m) viên bi lăn được sau  $t$  (s) kể từ khi bắt đầu chuyển động được cho bởi công thức  $s = 0,05t^2$ . Tính thời gian viên bi lăn hết chiều dài mặt phẳng nghiêng.



Hình 6.10

6.28. Giải các phương trình sau:

- $2x^2 - 3x - 2 = 0$ ;
- $3y^2 + 4 = y$ ;
- $z^2 + 2\sqrt{3}z + 2 = 0$ ;
- $-x^2 + 4\sqrt{3}x - 12 = 0$ .

6.29. Với mỗi trường hợp sau, đã cho biết một nghiệm  $x_1$  của phương trình, hãy tìm nghiệm còn lại:

- $2x^2 - 7x + 3 = 0$ ;  $x_1 = 3$ ;
- $3x^2 - 4x - 6 + 4\sqrt{2} = 0$ ;  $x_1 = \sqrt{2}$ ;
- $2x^2 + 7x + 3 = 0$ ;  $x_1 = -\frac{1}{2}$ ;
- $x^2 - 4mx + m + 2 = 0$ ;  $x_1 = 1$ .

6.30. Cho phương trình  $3x^2 - x - 1 = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$ . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của các biểu thức sau:

- $A = (3x_1 - 1)(3x_2 - 1)$ ;
- $B = x_1^2 + x_2^2$ .

**6.31.** Tìm hai số  $u, v$  trong mỗi trường hợp sau:

a)  $u + v = 14, uv = 45$  và  $u < v$ ;

b)  $u + v = 2, uv = 5$ .

**6.32.** Cạnh huyền của một tam giác vuông bằng 17 cm. Hai cạnh góc vuông có độ dài hơn kém nhau 7 cm. Tính diện tích của tam giác vuông đó.

**6.33.** Sau hai năm, số dân của một thành phố tăng từ 9 000 000 người lên 9 400 356 người. Tính tốc độ gia tăng dân số trung bình mỗi năm của thành phố đó.

**6.34.** Quãng đường từ A đến B dài 90 km. Một người đi xe máy từ A đến B. Khi đến B, người đó nghỉ 30 phút rồi quay trở về A với tốc độ lớn hơn tốc độ lúc đi 9 km/h. Thời gian kể từ lúc đi từ A đến lúc trở về A là 5 giờ. Tính tốc độ xe máy lúc đi từ A đến B.

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**6.35.** Cho hàm số  $f(x) = -3x^2$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $f(-1) = 3$ .

B.  $f(-2) = 12$ .

C.  $f(-3) = -27$ .

D.  $f(-4) = -24$ .

**6.36.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{4}x^2$  **không** đi qua điểm

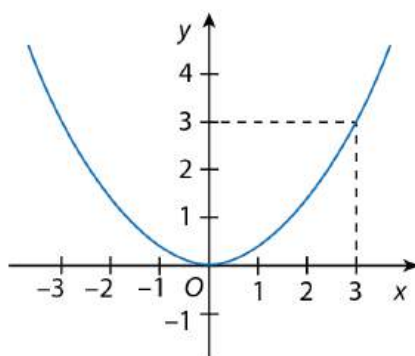
A.  $M(2; 1)$ .

B.  $N(-2; 1)$ .

C.  $P(-4; 4)$ .

D.  $Q(4; 1)$ .

**6.37.** Hình 6.11 là đồ thị hàm số  $y = f(x) = ax^2$  ( $a \neq 0$ ). Giá trị của  $a$  bằng



Hình 6.11

A. 3.

B.  $\frac{1}{3}$ .

C. 1.

D.  $\frac{1}{2}$ .

**6.38.** Phương trình nào sau đây là phương trình bậc hai?

A.  $\sqrt{2}x^2 - 1 = 0$ .

B.  $x^2 - \frac{3}{x} + 1 = 0$ .

C.  $t^2 - 2t^3 = 0$ .

D.  $3y + 7 = 0$ .

**6.39.** Phương trình nào sau đây có nghiệm  $x = 2$ ?

A.  $x^2 - 6x + 5 = 0$ .

B.  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .

C.  $2x^2 + 3x - 2 = 0$ .

D.  $3x^2 + 5x + 2 = 0$ .

**6.40.** Phương trình nào sau đây vô nghiệm?

A.  $x(2x + 1) = \sqrt{5}$ .

B.  $\frac{x^2 - 1}{2} = 2(x - 3)$ .

C.  $3x^2 = x(x - 5)$ .

D.  $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ .

**6.41.** Hai số  $u, v$  thoả mãn  $u + v = 19$  và  $uv = 48$  là các nghiệm của phương trình

A.  $t^2 + 19t + 48 = 0$ .

B.  $t^2 + 19t - 48 = 0$ .

C.  $t^2 - 19t + 48 = 0$ .

D.  $t^2 - 48t + 19 = 0$ .

# HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

## 1 DÙNG PHẦN MỀM GEOGEBRA VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = ax^2$ ( $a \neq 0$ )

### Mục tiêu:

Dùng phần mềm GeoGebra vẽ đồ thị hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) và tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số với đường thẳng  $y = mx + n$ .

### Yêu cầu chuẩn bị:

Máy tính hoặc điện thoại có cài đặt phần mềm GeoGebra Classic 5.0 hoặc kết nối Internet vào trang <https://www.geogebra.org/classic?lang=vi>.

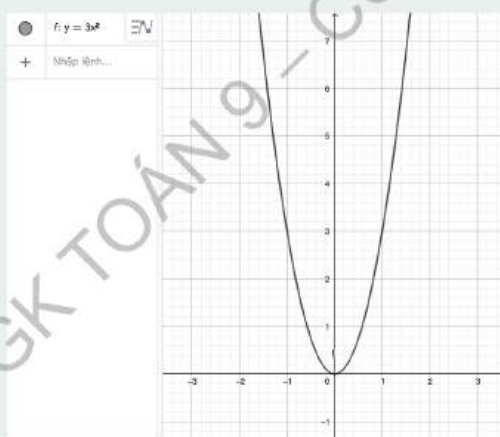
### Tổ chức hoạt động:

Chia lớp thành nhiều nhóm, mỗi nhóm gồm 5 bạn thực hành và ghi chép lại kết quả.

### HOẠT ĐỘNG 1

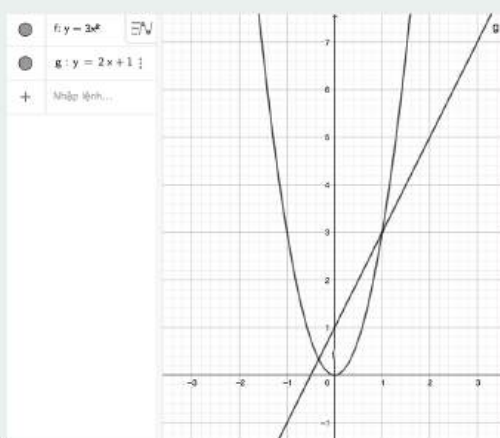
**Bước 1** Vẽ đồ thị hàm số  $y = 3x^2$ .

Nhập lệnh  $y = 3x^2$ .




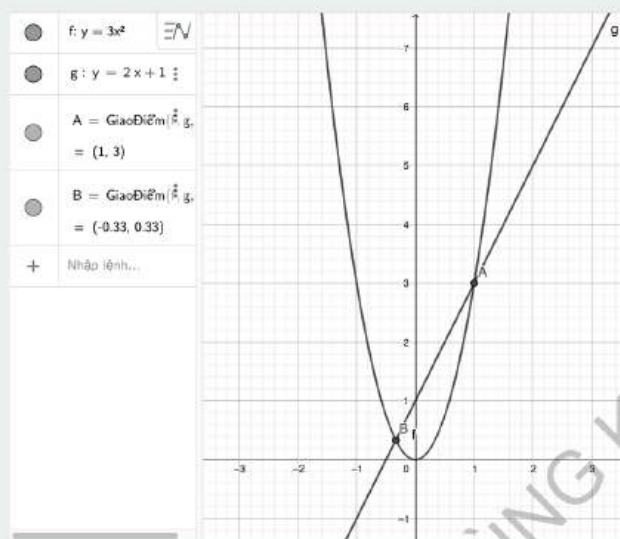
**Bước 2** Vẽ đồ thị hàm số  $y = 2x + 1$ .

Nhập lệnh  $y = 2x + 1$ .



**Bước 3** Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị.

Dùng  để tìm giao điểm của hai đồ thị.



**Bước 4** Kiểm tra kết quả bằng cách sử dụng máy tính cầm tay giải phương trình bậc hai.

**Thực hành:** Dùng phần mềm GeoGebra vẽ đồ thị của các hàm số sau và tìm tọa độ giao điểm (nếu có) của hai đồ thị:

1.  $y = \frac{1}{3}x^2$  và  $y = -x + \frac{1}{2}$ ;
2.  $y = \sqrt{2}x^2$  và  $y = 2x - \sqrt{3}$ ;
3.  $y = -1,2x^2$  và  $y = 0,6x + 0,075$ .

## 2 ĐƯỜNG PARABOL TRONG THỰC TIỄN

### Mục tiêu:

- Tìm kiếm các hình ảnh và video về đường parabol trong cuộc sống;
- Lập công thức của hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) ứng với một số hình ảnh sưu tầm được.

### Yêu cầu chuẩn bị:

- Hình in một số đường parabol trong thực tế;
- Máy tính cầm tay, thước thẳng.

### Tổ chức hoạt động:

Chia lớp thành nhiều nhóm, mỗi nhóm gồm 5 bạn thực hiện các công việc sưu tầm, tính toán và báo cáo theo yêu cầu.

## HOẠT ĐỘNG 2

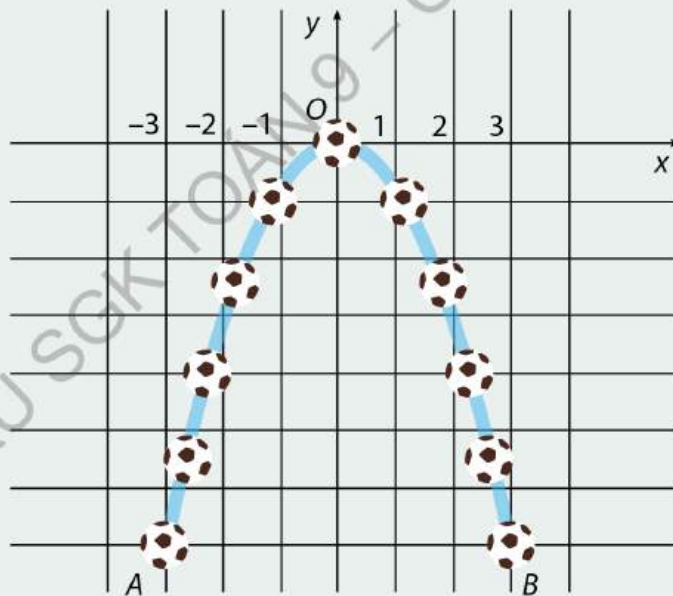
**Bước 1** Tìm kiếm một số hình ảnh và video về đường parabol trong thực tiễn.



Hình 6.12

**Bước 2** Chọn một số hình ảnh để lập hàm số tương ứng. Các hình ảnh được chọn cần rõ nét, cân đối và có góc chụp chính diện.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho gốc O là đỉnh của parabol, đơn vị trên mỗi trục là 1 cm.



Hình 6.13

Xác định tọa độ một điểm thuộc parabol (khác O, chẳng hạn điểm A hoặc điểm B trong Hình 6.13) và lập hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) có đồ thị là đường parabol trên.

**Bước 3** Thiết kế bài trình chiếu và báo cáo.

**Thực hành:** Chọn một điểm khác nằm trên parabol để lập công thức của hàm số tương ứng và so sánh với kết quả tìm được ở Bước 2.

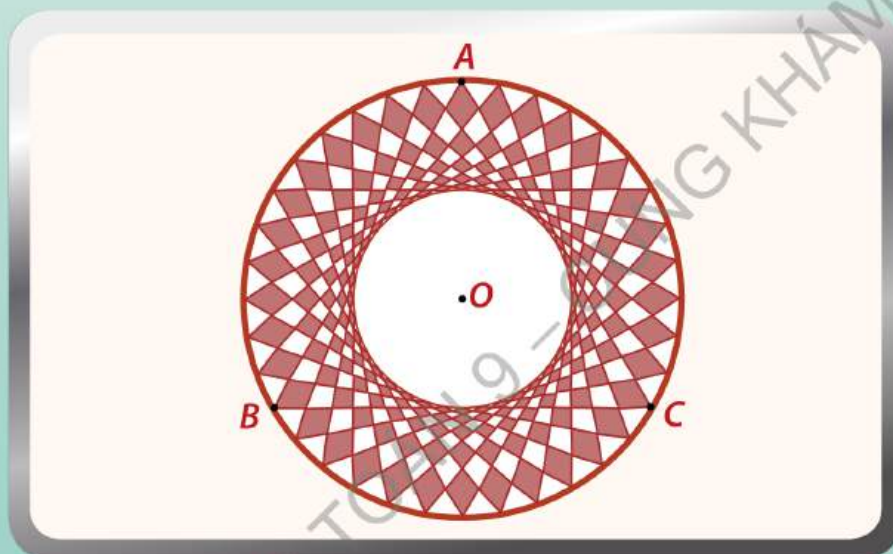
# Phần

# HÌNH HỌC PHẪNG

Chương

7

**Đường tròn ngoại tiếp.  
Đường tròn nội tiếp**



*Hoa văn trang trí trên vành chiếc đĩa được tạo hình chỉ bằng cách sử dụng các tam giác đều nội tiếp đường tròn lớn ở viền của đĩa. Các tam giác này cùng ngoại tiếp đường tròn nhỏ trong lòng của chiếc đĩa.*

## Cùng tìm hiểu

- ▶ Khái niệm đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp tam giác;
- ▶ Cách xác định được tâm, bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác nói chung và tam giác vuông, tam giác đều nói riêng;
- ▶ Cách xác định được tâm và bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác nói chung và tam giác đều nói riêng;
- ▶ Định lý về tổng hai góc đối của tứ giác nội tiếp;
- ▶ Cách xác định được tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật, hình vuông.

# Bài 1

## ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP TAM GIÁC. ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP TAM GIÁC

Từ khoá: đường tròn ngoại tiếp tam giác, đường tròn nội tiếp tam giác.



Bạn Uyên dùng một sợi thép để uốn thành mẫu hoạ tiết (Hình 7.1). Độ dài của sợi thép ít nhất là bao nhiêu để tam giác đều trong mẫu hoạ tiết có cạnh bằng 6 cm?



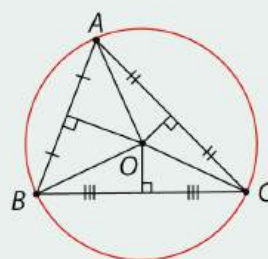
Hình 7.1

### 1 ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP TAM GIÁC

Ở lớp 7, ta đã biết rằng ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua một điểm và điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác đó.

#### HOẠT ĐỘNG 1

Vẽ tam giác  $ABC$ . Vẽ ba đường trung trực của  $\Delta ABC$  và xác định giao điểm  $O$  của chúng. Giải thích vì sao đường tròn tâm  $O$  bán kính  $OA$  đi qua cả ba đỉnh của  $\Delta ABC$  (Hình 7.2).



Hình 7.2

Đường tròn ( $O; OA$ ) trong Hình 7.2 cho ta một ví dụ của đường tròn ngoại tiếp của tam giác  $ABC$ . Ta có định nghĩa sau:



Đường tròn đi qua ba đỉnh của một tam giác được gọi là *đường tròn ngoại tiếp* của tam giác đó. Khi đó tam giác gọi là *nội tiếp* đường tròn.

**Lưu ý:** Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác đó. Bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác là khoảng cách từ giao điểm này đến một đỉnh bất kì của tam giác.

#### VÍ DỤ 1

Vẽ tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 4$  cm,  $AC = 3$  cm. Xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ .

### Bài giải

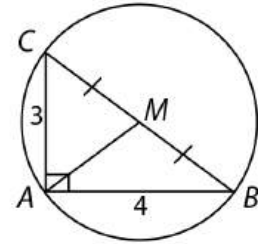
Gọi  $M$  là trung điểm cạnh huyền  $BC$  của  $\Delta ABC$  (Hình 7.3).

Theo tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền, ta có:

$$MA = \frac{1}{2} BC = MB = MC.$$

Do đó đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$  là đường tròn tâm  $M$

$$\text{bán kính } R = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 + AC^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 3^2} = 2,5 \text{ (cm)}.$$



Hình 7.3

### VÍ DỤ 2

Tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Xác định tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

### Bài giải

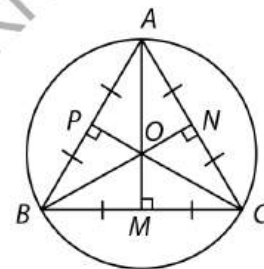
Vì  $\Delta ABC$  đều nên ba đường trung trực của  $\Delta ABC$  cũng là ba đường trung tuyến. Do đó tâm đường tròn ngoại tiếp của  $\Delta ABC$  cũng là giao điểm ba đường trung tuyến, hay trọng tâm  $O$ , của  $\Delta ABC$  (Hình 7.4).

Do đó bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$  là  $R = OA = \frac{2}{3} AM$ .

Mà  $\Delta ACM$  vuông tại  $M$  nên  $AM = AC \sin C$ .

$$\text{Do đó } R = \frac{2}{3} \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} a.$$

Vậy đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$  là  $(O; \frac{\sqrt{3}}{3} a)$  với  $O$  là trọng tâm  $\Delta ABC$ .



Hình 7.4

Từ Ví dụ 1 và Ví dụ 2, ta có định lí sau về đường tròn ngoại tiếp của tam giác vuông và tam giác đều:



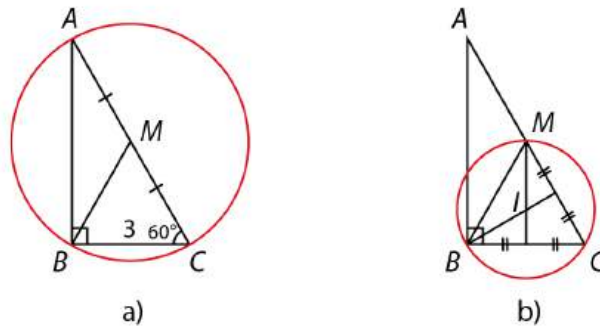
1. Đường tròn ngoại tiếp của tam giác vuông có tâm là trung điểm cạnh huyền và bán kính bằng nửa cạnh huyền.
2. Đường tròn ngoại tiếp của một tam giác đều cạnh  $a$  có tâm là trọng tâm của tam giác đều và có bán kính bằng  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

### VÍ DỤ 3

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$  có  $\widehat{C} = 60^\circ$ ,  $BC = 3$  cm và  $M$  là trung điểm  $AC$ . Xác định tâm, bán kính và vẽ đường tròn ngoại tiếp của:

- a)  $\Delta ABC$ ;
- b)  $\Delta BCM$ .

## Bài giải



Hình 7.5

- a) Vì  $\Delta ABC$  vuông tại  $B$  nên đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$  có tâm là trung điểm  $M$  của cạnh huyền  $AC$  và bán kính là:  $R = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{\cos C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\cos 60^\circ} = 3$  (Hình 7.5a).
- b) Vì  $BM = CM = BC = 3$  nên  $\Delta BCM$  là tam giác đều. Do đó đường tròn ngoại tiếp của  $\Delta BCM$  có tâm là trọng tâm  $I$  của  $\Delta BCM$  và bán kính là:  $r = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3 = \sqrt{3}$  (Hình 7.5b).

## LUYỆN TẬP 1

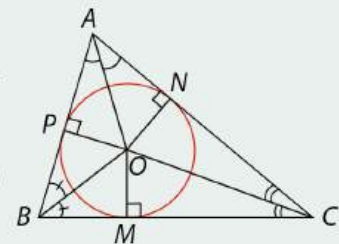
Tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng 4,  $M$  là trung điểm của  $BC$  và  $O$  là trọng tâm. Xác định tâm, bán kính và vẽ đường tròn ngoại tiếp của các tam giác  $ABC$  và  $AMC$ .

## 2 ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP TAM GIÁC

Ở lớp 7, ta đã biết ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm và điểm này cách đều ba cạnh của tam giác đó.

### HOẠT ĐỘNG 2

Trong Hình 7.6,  $O$  là giao điểm ba đường phân giác của  $\Delta ABC$  và  $OM, ON, OP$  là các đường vuông góc hạ từ  $O$  xuống ba cạnh của tam giác. Giải thích vì sao đường tròn tâm  $O$  bán kính  $OM$  tiếp xúc cả ba cạnh của  $\Delta ABC$ .



Hình 7.6

Đường tròn  $(O; OM)$  trong Hình 7.6 cho ta một ví dụ của đường tròn nội tiếp của tam giác  $ABC$ . Ta có định nghĩa sau:



Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác được gọi là *đường tròn nội tiếp* tam giác, còn tam giác được gọi là *ngoại tiếp* đường tròn.

**Lưu ý:** Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm ba đường phân giác của tam giác đó. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác là khoảng cách từ giao điểm ba đường phân giác đến ba cạnh của tam giác. Trong Hình 7.5, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  là  $r = OM = ON = OP$ .

#### VÍ DỤ 4

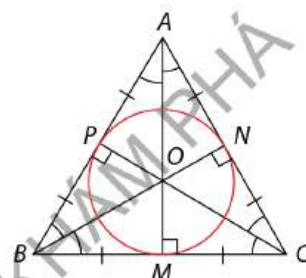
Xác định tâm và bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác đều có cạnh là  $a$ .

##### Bài giải

Vì  $\Delta ABC$  đều nên ba đường phân giác của  $\Delta ABC$  cũng đồng thời là ba đường trung tuyến và ba đường cao. Do đó tâm đường tròn nội tiếp  $\Delta ABC$  cũng là trọng tâm  $O$  của  $\Delta ABC$  và bán kính đường tròn nội tiếp  $\Delta ABC$  là  $OM$  (Hình 7.7).

$$r = OM = \frac{1}{3} AM = \frac{1}{3} AC \sin \widehat{ACB} = \frac{1}{3} \cdot a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{6} a.$$

Vậy đường tròn nội tiếp  $\Delta ABC$  là  $\left(O; \frac{\sqrt{3}}{6} a\right)$  với  $O$  là trọng tâm  $\Delta ABC$ .



Hình 7.7

Từ Ví dụ 4, ta có định lí sau về đường tròn nội tiếp của tam giác đều:



Đường tròn nội tiếp của một tam giác đều cạnh  $a$  có tâm là trọng tâm của tam giác đều và có bán kính bằng  $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ .

**Lưu ý:** Đường tròn nội tiếp của tam giác đều tiếp xúc ba cạnh của tam giác đều tại trung điểm của mỗi cạnh.

#### VÍ DỤ 5

Tính chu vi đường tròn nội tiếp tam giác đều  $ABC$  có cạnh là 12 cm.

##### Bài giải

Bán kính của đường tròn nội tiếp  $\Delta ABC$  là:  $r = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 12 = 2\sqrt{3}$  (cm).

Chu vi của đường tròn nội tiếp  $\Delta ABC$  là:  $S = 2\pi r = 2\pi \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\pi$  (cm).

#### LUYỆN TẬP 2

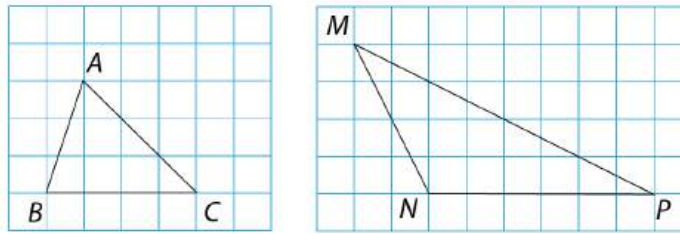
Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều  $ABC$  có cạnh là  $2\sqrt{3}$  cm.

#### VẬN DỤNG

Tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng 6 cm. Tính tổng chu vi của  $\Delta ABC$ , chu vi đường tròn nội tiếp và chu vi đường tròn ngoại tiếp của nó. Từ đó trả lời câu hỏi của bài toán ở phần Khởi động.

## BÀI TẬP

- 7.1. Vẽ các tam giác trong Hình 7.8 vào vở. Mỗi hình vuông trong lưới ô vuông đều có độ dài là 1. Hãy xác định tâm và vẽ đường tròn ngoại tiếp của mỗi tam giác.



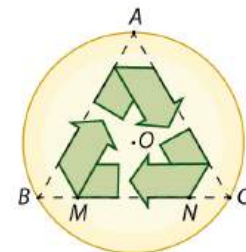
Hình 7.8

- 7.2. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông có hai cạnh góc vuông lần lượt bằng 5 cm và 12 cm.
- 7.3. Tính bán kính của đường tròn nội tiếp, đường tròn ngoại tiếp của tam giác đều có cạnh là:
- 3 cm;
  - $\sqrt{6}$  cm.
- 7.4. Chứng minh rằng nếu tâm đường tròn ngoại tiếp của  $\Delta ABC$  là trung điểm  $M$  của cạnh  $BC$  thì  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$ .
- 7.5. Chứng minh rằng nếu tam giác có tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp trùng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.
- 7.6. Mặt chiếc đồng hồ trong Hình 7.9 có đường viền là một đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của khung đồng hồ hình tam giác đều. Đường kính của đường viền mặt đồng hồ là 10 cm. Khung hình tam giác đều của đồng hồ có độ dài cạnh là bao nhiêu centimét (độ dày đường viền của khung không đáng kể)? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Hình 7.9

- 7.7. Biểu tượng tái chế trên thiết kế của huy hiệu hình tròn tâm  $O$  được bạn Minh dựng dựa trên tam giác đều  $ABC$  nội tiếp trong  $(O)$  như trong Hình 7.10. Độ dài cạnh  $MN$  của biểu tượng tái chế bằng  $\frac{3}{5}$  độ dài  $BC$ . Tính  $MN$  nếu đường kính huy hiệu là 4 cm. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười centimét.



Hình 7.10

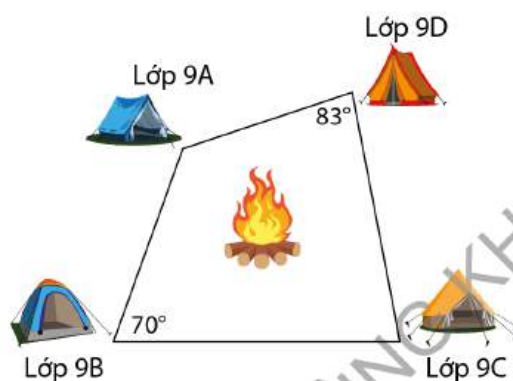
## Bài 2

# TỨ GIÁC NỘI TIẾP

Từ khoá: tứ giác nội tiếp, đường tròn ngoại tiếp, hai góc đối nhau.



Bốn lớp 9A, 9B, 9C và 9D cùng đi cắm trại. Sử dụng giác kế, các bạn có thể đo được góc tạo bởi các vị trí cắm trại của bốn lớp và vẽ được sơ đồ cắm trại như Hình 7.11. Hỏi có thể tìm được một vị trí cách đều cả bốn trại để đặt lửa trại không?

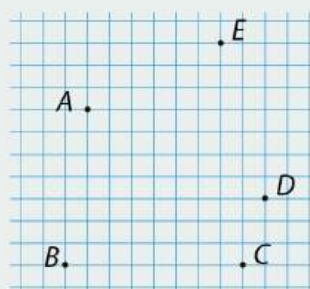


Hình 7.11

### 1 KHÁI NIỆM TỨ GIÁC NỘI TIẾP

#### HOẠT ĐỘNG 1

Với các điểm trong Hình 7.12, bạn An cho rằng có thể vẽ được một đường tròn đi qua cả bốn điểm  $A, B, C, D$  còn bạn Bình thì cho rằng có thể vẽ được một đường tròn đi qua cả bốn điểm  $A, B, C, E$ . Hãy vẽ đường tròn đi qua ba điểm  $A, B, C$  và cho biết bạn nào đúng.



Hình 7.12

Với mọi tam giác, ta luôn có thể vẽ được một đường tròn duy nhất đi qua cả ba đỉnh của nó. Tuy nhiên không phải lúc nào cũng có thể vẽ được một đường tròn đi qua bốn đỉnh của một tứ giác. Ta có định nghĩa sau:

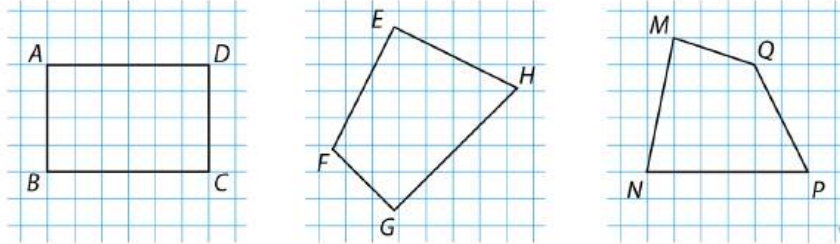


Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là một *tứ giác nội tiếp* đường tròn.

Đường tròn đi qua cả bốn đỉnh của tứ giác nội tiếp được gọi là *đường tròn ngoại tiếp* của tứ giác đó.

## VÍ DỤ 1

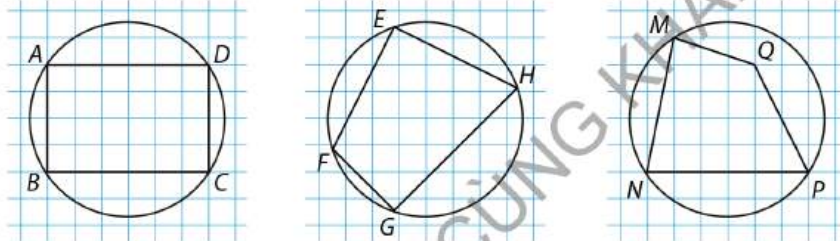
Bằng cách vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác thích hợp, hãy chỉ ra các tứ giác nội tiếp trong Hình 7.13.



Hình 7.13

### Bài giải

Vẽ các đường tròn ngoại tiếp của  $\triangle ABC$ ,  $\triangle EFG$ ,  $\triangle MNP$  (Hình 7.14).



Hình 7.14

Ta thấy:

- Đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$  đi qua điểm  $D$  nên tứ giác  $ABCD$  là tứ giác nội tiếp;
- Đường tròn ngoại tiếp  $\triangle EFG$  đi qua điểm  $H$  nên tứ giác  $EFGH$  là tứ giác nội tiếp;
- Đường tròn ngoại tiếp  $\triangle MNP$  không đi qua điểm  $Q$  nên tứ giác  $MNPQ$  không là tứ giác nội tiếp.

## LUYỆN TẬP 1

Vẽ một tứ giác nội tiếp và một tứ giác không là tứ giác nội tiếp.

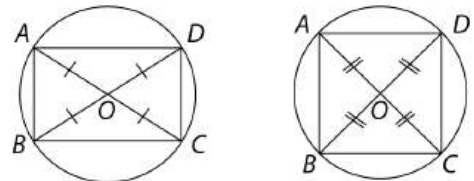
## HOẠT ĐỘNG 2

Giải thích vì sao giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật và hình vuông cách đều bốn đỉnh của chúng.

Từ Hoạt động 2, ta có định lí sau:



Hình chữ nhật và hình vuông là các tứ giác nội tiếp. Đường tròn ngoại tiếp của hình chữ nhật và hình vuông có tâm là giao điểm của hai đường chéo và bán kính là nửa đường chéo.



Hình 7.15

## VÍ DỤ 2

Xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 5$  cm và  $BC = 12$  cm.

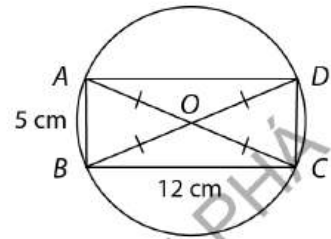
### Bài giải

Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ . Khi đó, đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật  $ABCD$  có tâm là  $O$  và bán kính  $R = \frac{1}{2}AC$  (Hình 7.16).

Vì  $\triangle ABC$  vuông tại  $B$  nên:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ (cm)}.$$

$$\text{Do đó } R = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 13 = 6,5 \text{ (cm)}.$$



Hình 7.16

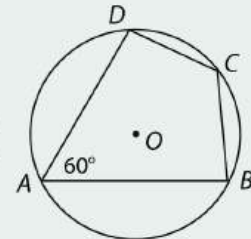
## LUYỆN TẬP 2

Xác định tâm và đường kính của đường tròn ngoại tiếp hình vuông có cạnh là 3 cm.

## 2 TÍNH CHẤT TỨ GIÁC NỘI TIẾP

### HOẠT ĐỘNG 3

Trong Hình 7.17, tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Hãy tính số đo cung nhỏ  $BD$ , cung lớn  $BD$ , từ đó suy ra số đo góc  $C$ . Em có nhận xét gì về tổng hai góc  $A$  và  $C$ ?



Hình 7.17

Tổng quát, ta có định lí sau:



Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối nhau bằng  $180^\circ$ .

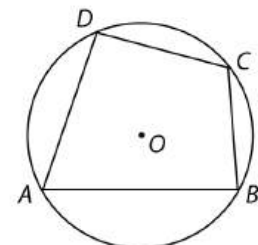
Chứng minh (Hình 7.18)

Giả sử tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ .

Khi đó:  $\widehat{A}$  là góc nội tiếp chắn cung  $BCD$  nên  $\widehat{A} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{BCD}$ .

$\widehat{C}$  là góc nội tiếp chắn cung  $BAD$  nên  $\widehat{C} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{BAD}$ .

Suy ra  $\widehat{A} + \widehat{C} = \frac{1}{2} (\text{sđ} \widehat{BCD} + \text{sđ} \widehat{BAD}) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$ .



Hình 7.18

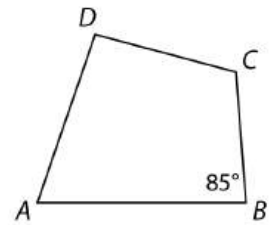
### VÍ DỤ 3

Tứ giác  $ABCD$  trong Hình 7.19 là tứ giác nội tiếp. Tính số đo góc  $D$ .

#### Bài giải

Vì  $ABCD$  là tứ giác nội tiếp nên  $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$ .

Suy ra  $\widehat{D} = 180^\circ - \widehat{B} = 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$ .

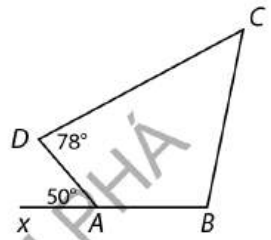


Hình 7.19

### LUYỆN TẬP 3

Tính số đo các góc  $B$  và  $C$  của tứ giác  $ABCD$  trong Hình 7.20.

Biết tứ giác  $ABCD$  nội tiếp được trong đường tròn.



Hình 7.20

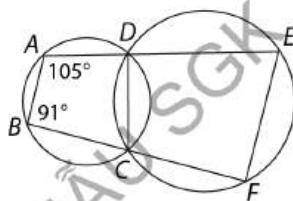
### VẬN DỤNG

Quay lại phần Khởi động, em hãy sử dụng kiến thức được học về tứ giác nội tiếp để giải thích vì sao không thể tìm được vị trí đặt lửa trại phù hợp.

### BÀI TẬP

7.8. Cho  $ABCD$  là tứ giác nội tiếp có  $\widehat{A} = 83^\circ$ ,  $\widehat{B} = 74^\circ$ . Tính số đo các góc còn lại của tứ giác  $ABCD$ .

7.9. Tính số đo các góc của tứ giác nội tiếp  $CDEF$  trong Hình 7.21.



Hình 7.21

7.10. Cho đường tròn tâm  $O$  có bán kính  $R = 5$  cm.

- Tính độ dài cạnh của hình vuông nội tiếp trong  $(O)$ .
- Một hình chữ nhật nội tiếp trong  $(O)$  có chu vi 28 cm. Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật đó.

7.11. Cho  $ABCD$  là tứ giác nội tiếp.

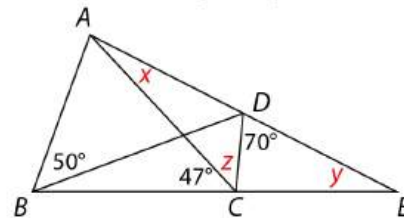
- Chứng minh rằng  $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ .
- $AC$  cắt  $BD$  tại  $M$ . Chứng minh rằng  $MA \cdot MC = MB \cdot MD$ .

7.12. Cho tam giác nhọn  $ABC$  có  $AD, BE, CF$  là đường cao và  $H$  là trực tâm.

Chứng minh rằng:

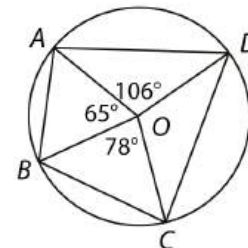
- Tứ giác  $AEHF, BDHF$  và  $CDHE$  là các tứ giác nội tiếp;
- $DA$  là đường phân giác của góc  $FDE$ .

7.13. Trong Hình 7.22,  $ABCD$  là tứ giác nội tiếp. Tính số đo các góc  $x, y, z$ .



Hình 7.22

7.14. Tính số đo các góc của tứ giác nội tiếp  $ABCD$  trong Hình 7.23.



Hình 7.23

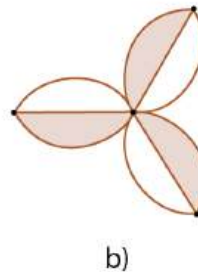
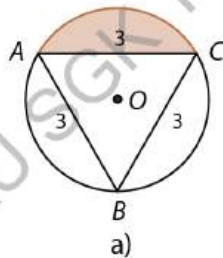
BÀI TẬP TỰ LUẬN

- 7.15.** Tính chu vi của đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $3\sqrt{2}$  cm. Diện tích của các hình tròn này là bao nhiêu?
- 7.16.** Một tam giác vuông có hiệu độ dài hai cạnh góc vuông là 7 cm. Tính diện tích của tam giác vuông đó biết nó nội tiếp trong đường tròn đường kính 13 cm.
- 7.17.** Bạn Tú muốn đặt một chiếc bánh hình tròn vào chính giữa một chiếc hộp có mặt là hình tam giác đều như trong Hình 7.24. Đường kính tối đa của chiếc bánh là bao nhiêu centimét nếu cạnh của đáy hộp là 8 cm? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Hình 7.24

- 7.18.** Bạn An sử dụng các hình viên phân như trong Hình 7.25a để ghép thành mẫu hoa văn trang trí như trong Hình 7.25b. Tính diện tích của mẫu hoa văn.

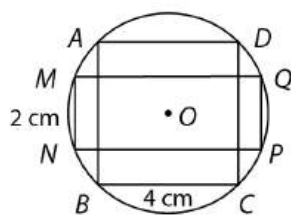


Hình 7.25

- 7.19.** Cho đường tròn  $(O; R)$ . Từ điểm  $M$  nằm ngoài đường tròn, vẽ hai tiếp tuyến tiếp xúc  $(O)$  tại  $A$  và  $B$ . Chứng minh rằng tứ giác  $MAOB$  là tứ giác nội tiếp.
- 7.20.** Tam giác  $ABC$  có  $\widehat{B} = 76^\circ$ ,  $\widehat{C} = 40^\circ$ . Đường tròn  $(O)$  nội tiếp  $\Delta ABC$  tiếp xúc với các cạnh  $AB, BC, AC$  lần lượt tại các điểm  $M, N, P$ .
- Chứng minh rằng  $AMOP, BMON$  và  $CNOP$  là các tứ giác nội tiếp.
  - Tính số đo các cung nhỏ  $MN, NP$  và  $MP$ .
  - Tính các góc của  $\Delta MNP$ .

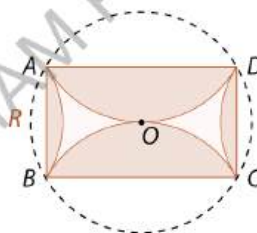
**7.21.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ ,  $AD$  là đường kính của  $(O)$  và  $H$  là trực tâm của  $\Delta ABC$ . Chứng minh rằng  $BHCD$  là hình bình hành.

**7.22.** Hình vuông  $ABCD$  có cạnh 4 cm và hình chữ nhật  $MNPQ$  có chiều rộng 2 cm cùng nội tiếp trong đường tròn  $(O)$  (Hình 7.26). Tính chiều dài  $MQ$  của hình chữ nhật.



Hình 7.26

**7.23.** Từ một mảnh giấy có dạng hình tròn bán kính  $R$ , bạn Vy gấp lại thành một hình chữ nhật  $ABCD$  với chiều rộng  $AB = R$  như trong Hình 7.27. Tính tỉ số diện tích của hình chữ nhật gấp được với diện tích mảnh giấy ban đầu. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Hình 7.27

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**7.24.** Đường tròn nội tiếp của một tam giác đều có đường kính  $20\sqrt{3}$  cm. Độ dài cạnh của tam giác đều bằng

- A. 45 cm.      B. 60 cm.      C. 90 cm.      D. 120 cm.

**7.25.** Tam giác vuông  $ABC$  có hai cạnh góc vuông lần lượt bằng 6 cm và 8 cm. Diện tích đường tròn ngoại tiếp của  $\Delta ABC$  bằng

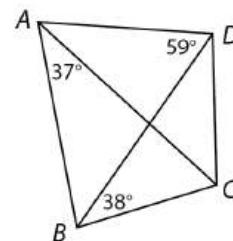
- A.  $10\pi$  cm<sup>2</sup>.      B.  $20\pi$  cm<sup>2</sup>.      C.  $25\pi$  cm<sup>2</sup>.      D.  $100\pi$  cm<sup>2</sup>.

**7.26.** Cho  $ABCD$  là một tứ giác nội tiếp có  $\widehat{A} = 60^\circ$ . Số đo của góc  $C$  bằng

- A.  $30^\circ$ .      B.  $60^\circ$ .      C.  $90^\circ$ .      D.  $120^\circ$ .

**7.27.** Cho  $ABCD$  là tứ giác nội tiếp có  $\widehat{BAC} = 37^\circ$ ,  $\widehat{ADB} = 59^\circ$  và  $\widehat{CBD} = 38^\circ$  (Hình 7.28). Số đo góc  $ADC$  bằng

- A.  $75^\circ$ .  
B.  $96^\circ$ .  
C.  $97^\circ$ .  
D.  $87^\circ$ .



Hình 7.28

**7.28.** Hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng nội tiếp trong đường tròn  $(O; R)$ . Diện tích hình tròn  $(O; R)$  là  $5\pi$  cm<sup>2</sup>. Chiều rộng của hình chữ nhật là

- A. 2 cm.      B. 3 cm.      C. 4 cm.      D. 5 cm.



Lâu đài Castel del Monte tọa lạc tại Apulia miền Đông Nam nước Ý. Lâu đài được Hoàng đế La Mã Frederick II cho xây dựng vào thế kỉ XIII với kiến trúc độc đáo, kết hợp nhiều trường phái và được đánh giá là một kiệt tác quân sự thời trung cổ. Phần đế của lâu đài và giếng trời cũng như tám tháp canh có dạng hình bát giác đều. Lâu đài gồm hai tầng, mỗi tầng có tám phòng. Năm 1996, lâu đài Castel del Monte được UNESCO công nhận là di sản văn hoá thế giới.

(Nguồn: <https://www.budowle.pl/building/castel-del-monte>)

## Cùng tìm hiểu

- ▶ Đa giác đều;
- ▶ Phép quay và các phép quay giữ nguyên hình đa giác đều;
- ▶ Những hình phẳng đều trong tự nhiên, nghệ thuật, kiến trúc, công nghệ chế tạo,...;
- ▶ Vẻ đẹp của thế giới tự nhiên biểu hiện qua tính đều.

# Bài 1

## ĐA GIÁC ĐỀU

Từ khoá: đa giác, đa giác lồi, đa giác đều.



Pháo đài Fort Jefferson tại Vườn quốc gia Dry Tortugas, bang Florida, Mỹ được xây dựng từ hơn 16 triệu viên gạch. Đây là một địa điểm du lịch thu hút nhiều khách tham quan (nguồn: <https://www.drytortugas.com/fort-jefferson-facts/>). Kiến trúc sư đã dựa trên dạng hình học nào để thiết kế nên pháo đài này?

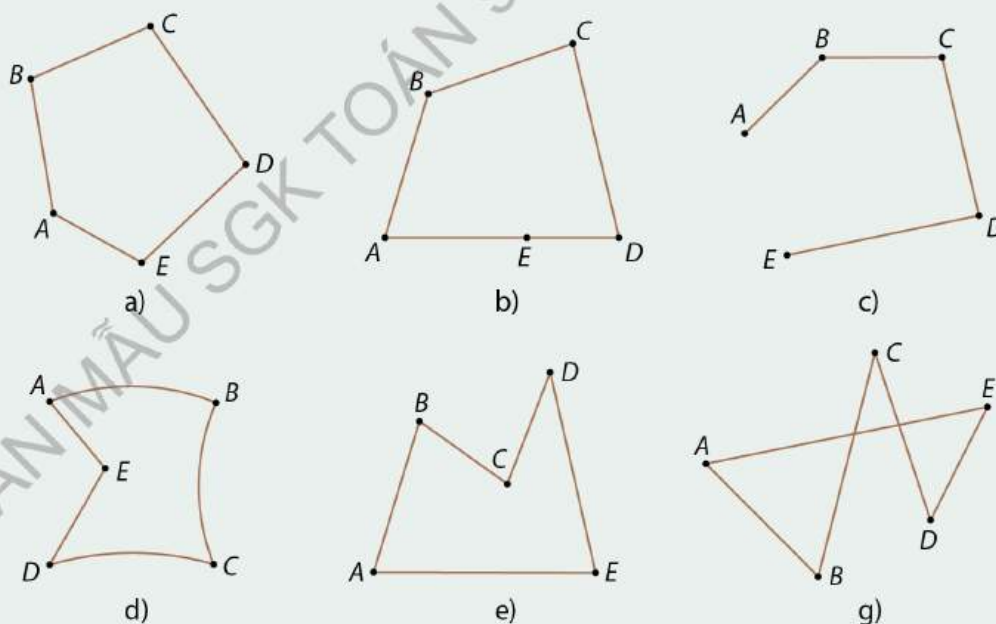


### 1 ĐA GIÁC

#### HOẠT ĐỘNG 1

Trong Hình 8.1, hãy cho biết những hình nào có các tính chất:

- Tạo bởi các đoạn thẳng  $AB, BC, CD, DE, EA$ ;
- Bất kì hai đoạn thẳng nào có một điểm chung cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.



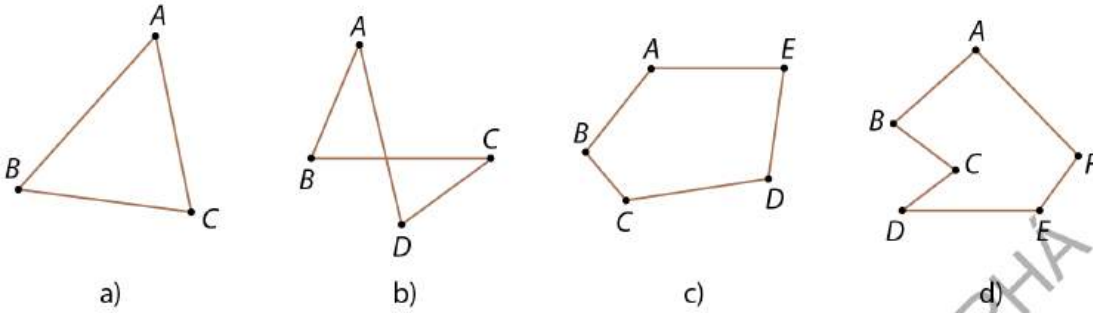
Hình 8.1

Ở các Hình 8.1a, e, g, bất kì hai đoạn thẳng nào có một điểm chung cũng không cùng nằm trên một đường thẳng. Mỗi hình này là một đa giác.

Đa giác  $ABCDE$  (Hình 8.1a, e, g) có các đỉnh là các điểm  $A, B, C, D, E$  và các cạnh là các đoạn thẳng  $AB, BC, CD, DE, EA$ .

### VÍ DỤ 1

Mỗi trường hợp của Hình 8.2 là một đa giác.



Hình 8.2

### HOẠT ĐỘNG 2

Đa giác nào trong Hình 8.2 luôn nằm về một phía của đường thẳng chứa một cạnh bất kì của nó?

Đa giác lồi là đa giác luôn nằm về một phía của đường thẳng chứa một cạnh bất kì của nó.

### VÍ DỤ 2

Các đa giác trong Hình 8.2a và Hình 8.2c là các đa giác lồi.

Đa giác trong Hình 8.2b không là đa giác lồi vì không cùng nằm về một phía so với đường thẳng  $AD$ .

Đa giác trong Hình 8.2d không là đa giác lồi vì không cùng nằm về một phía so với đường thẳng  $BC$ .

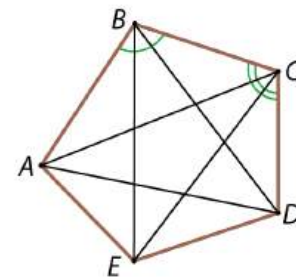
### LUYỆN TẬP 1

Tìm các đa giác lồi trong Hình 8.1.

**Lưu ý:** Từ nay, khi nói đến đa giác mà không chú thích gì thêm, ta hiểu đó là đa giác lồi.

Trong đa giác  $ABCDE$  ở Hình 8.3:

- Các đỉnh là các điểm:  $A, B, C, D, E$ ;
- Các cạnh là các đoạn thẳng:  $AB, BC, CD, DE, EA$ ;
- Các cặp đỉnh kề nhau là:  $A$  và  $B, B$  và  $C, C$  và  $D, D$  và  $E, E$  và  $A$ ;
- Các đường chéo là các đoạn thẳng nối hai đỉnh không kề nhau:  $AC, AD, BD, BE, CE$ ;
- Các góc là:  $\widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDE}, \widehat{DEA}, \widehat{EAB}$ .



Hình 8.3

Đa giác có  $n$  đỉnh ( $n \geq 3$ ) được gọi là hình  $n$  – giác hay hình  $n$  cạnh.

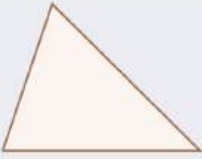

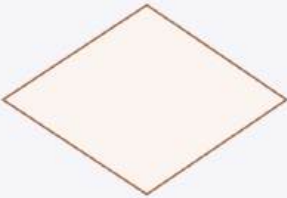


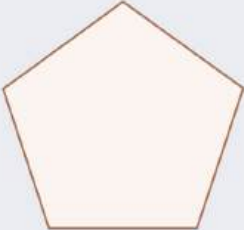
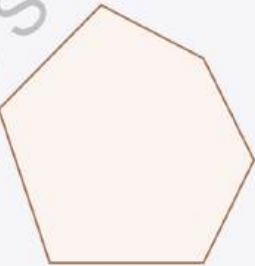
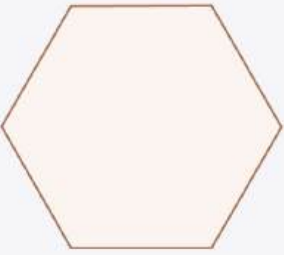
Ta thường gọi các đa giác có 3, 4, 5, 6, 8 đỉnh là tam giác, tứ giác, ngũ giác, lục giác, bát giác.

## 2 ĐA GIÁC ĐỀU

### HOẠT ĐỘNG 3

Cho các đa giác trong *Bảng 8.1*. So sánh các cạnh và các góc của mỗi đa giác, cho biết các đa giác ở cột B có đặc điểm gì khác so với các đa giác tương ứng ở cột A.

*Bảng 8.1*

A	B
	
	
	
	

Các đa giác ở cột B trong *Bảng 8.1* được gọi là các *đa giác đều*.



*Đa giác đều* là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.

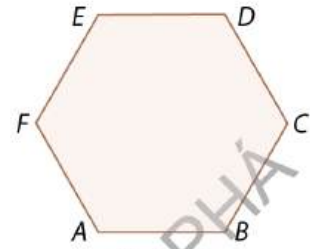
### VÍ DỤ 3

Trong *Bảng 8.1*, các đa giác đều ở dòng thứ hai, thứ ba, thứ tư, thứ năm của cột B lần lượt là tam giác đều, tứ giác đều (hình vuông), ngũ giác đều, lục giác đều.

### VÍ DỤ 4

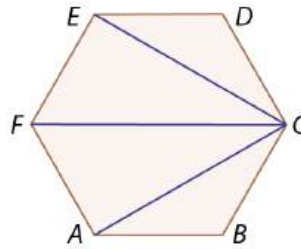
Cho lục giác đều  $ABCDEF$  có  $AB = 3$  cm như *Hình 8.4*.

- Tìm độ dài các cạnh  $CD, DE$ .
- Kể tên các đường chéo kẻ từ đỉnh  $C$  của lục giác đều.



Hình 8.4

#### Bài giải



Hình 8.5

- Ta có  $CD = DE = AB = 3$  cm.
- Các đường chéo kẻ từ đỉnh  $C$  của lục giác đều:  $CA, CE, CF$ .

### LUYỆN TẬP 2

Tính số đo các góc  $B$  và  $E$  của lục giác đều trong *Hình 8.4*, biết  $\widehat{A} = 120^\circ$ .

### VẬN DỤNG

Gọi tên các loại đa giác đều có trong *Hình 8.6*.



a)



b)



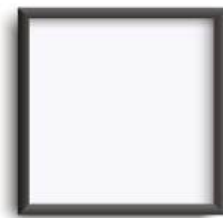
c)



d)



e)



g)

Hình 8.6

### 3 MỘT SỐ HÌNH PHẪNG ĐỀU TRONG THỰC TIỄN

Trong cuộc sống hằng ngày, ta gặp nhiều hình phẳng đều.



Một số biển báo giao thông có dạng hình đa giác đều

Hình 8.7

Trong tự nhiên, ta cũng bắt gặp những hình ảnh tương tự.



Tổ ong



Các mặt đá ở bờ biển Giant's Causeway, Ireland

Hình 8.8

Trong xây dựng, kiến trúc, có những công trình ấn tượng với hình ảnh của các hình phẳng đều.



Lầu Năm Góc (Ngũ Giác Đài) là trụ sở của Bộ Quốc phòng Hoa Kỳ



Giếng trời của một toà nhà ở Saint Petersburg, Nga

Hình 8.9

Hình phẳng đều là một nguồn cảm hứng trong hội họa, thiết kế đồ họa, quảng cáo.



Các họa tiết và các thiết kế sử dụng các hình phẳng đều

Hình 8.10

Trong sản xuất và công nghệ chế tạo, nhiều chi tiết, sản phẩm có dạng đa giác đều.



Mũ của đinh vít



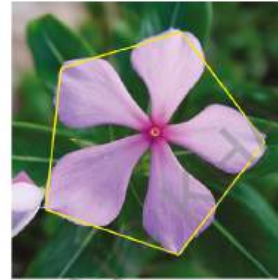
Nội thất

Hình 8.11

Tính đều luôn hiện hữu và đa dạng trong thế giới tự nhiên. Dưới đây là một số ví dụ.



Cỏ bốn lá có sự hài hòa, đẹp mắt



Bông hoa có các cánh mọc toả đều xung quanh cho cảm giác sức sống mãnh liệt



Mạng nhện được giăng xung quanh tổng hợp sức bền từ từng sợi tơ

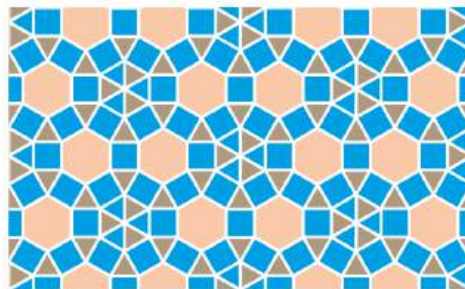


Ảnh chụp tinh thể nước cho thấy vẻ đẹp bí ẩn được khám phá thông qua kính hiển vi

Hình 8.12

### LUYỆN TẬP 3

Kể tên các loại đa giác đều trong họa tiết ở Hình 8.13.



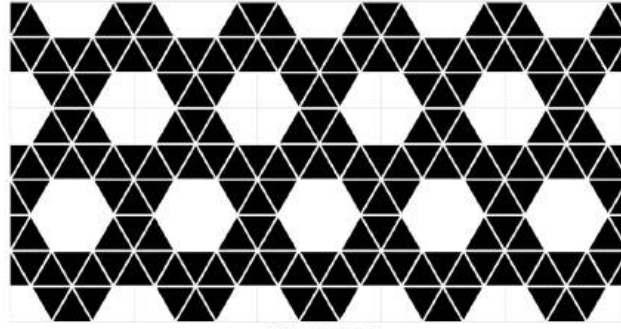
Hình 8.13

### LUYỆN TẬP 4

Hãy tìm thêm một số hình phẳng đều khác trong thực tiễn.

## BÀI TẬP

8.1. Kể tên các loại đa giác đều có trong Hình 8.14.



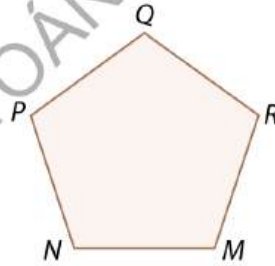
Hình 8.14

8.2. Tìm các số thích hợp cho các ô (?) trong Bảng 8.2:

Bảng 8.2

Tên đa giác đều	Số đỉnh	Số cạnh	Số đường chéo
Hình vuông	(?)	(?)	(?)
Ngũ giác đều	(?)	(?)	(?)
Lục giác đều	(?)	(?)	(?)

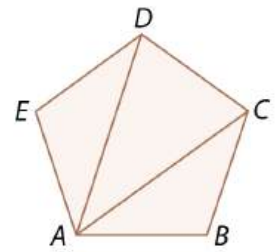
8.3. Cho ngũ giác đều  $MNPQR$  như Hình 8.15. Kể tên các đỉnh, các góc, các cạnh và đường chéo của ngũ giác đều.



Hình 8.15

8.4. Cho ngũ giác đều  $ABCDE$  như Hình 8.16.

- Tính tổng các góc trong các tam giác  $ABC$ ,  $ACD$ ,  $ADE$ , từ đó suy ra tổng các góc trong ngũ giác đều  $ABCDE$ .
- Tính số đo góc  $E$ .



Hình 8.16

8.5. Kể tên các loại đa giác đều trong mỗi trường hợp ở Hình 8.17.



Gạch lát sân



Gạch lát vỉa hè



Sao biển

Hình 8.17

## ?? EM CÓ BIẾT

Hàng chục triệu đến hàng trăm triệu năm trước, do hoạt động của núi lửa, dòng dung nham phun trào bị co lại khi gặp nước biển tại một số vùng tạo nên các gềnh đá. Điều tuyệt diệu dưới bàn tay của tạo hoá là nhiều gềnh đá như được sắp đặt hài hoà với những phiến đá hình lục giác đều, hình vuông, hình tròn,... tạo nên cảnh quan kì vĩ. Một số gềnh đá nổi tiếng trên thế giới như Giant's Causeway ở bờ biển Đông Bắc Ireland; vách đá Los Órganos ở đảo La Gomera của Tây Ban Nha; hang động Fingal ở đảo Staffa, Scotland; gềnh Đá Đĩa ở Phú Yên, Việt Nam;... Năm 1986, UNESCO công nhận Giant's Causeway là di sản văn hoá thế giới (nguồn: <https://www.vietnamtourism.gov.vn/post/20989> và <https://www.daera-ni.gov.uk/articles/giants-causeway-world-heritage-site>).



*Giant's Causeway, Ireland*



*Gềnh Đá Đĩa, Phú Yên, Việt Nam*

*Hình 8.18*

## Bài 2

# PHÉP QUAY

Từ khoá: phép quay.



Toạ lạc trên đảo nhân tạo Bluewaters (Dubai), vòng quay Ain Dubai với chiều cao khoảng 250 m được đưa vào hoạt động ngày 21/10/2021. Đây là vòng quay lớn nhất và cao nhất thế giới với 48 cabin, sức chứa mỗi cabin là 40 người. Thời gian một vòng quay dài 38 phút (nguồn: [https://www.guinnessworldrecords.com/world-records/largest-observation-\(ferris\)-wheel](https://www.guinnessworldrecords.com/world-records/largest-observation-(ferris)-wheel)).

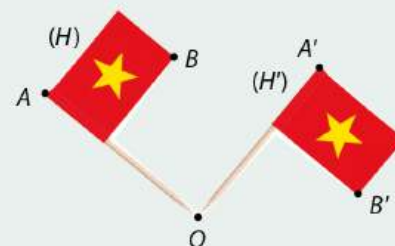


Trong toán học, người ta dùng khái niệm nào để mô tả chuyển động của một cabin trên vòng quay từ vị trí này đến vị trí khác?

### HOẠT ĐỘNG

Trong Hình 8.19, lá cờ (H) được quay quanh điểm O theo chiều kim đồng hồ đến vị trí mới (H').

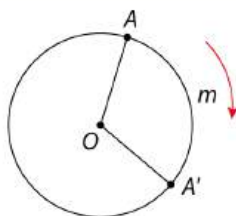
- So sánh độ dài OA và OA', OB và OB'.
- So sánh số đo  $\widehat{AOA'}$  và  $\widehat{BOB'}$ .



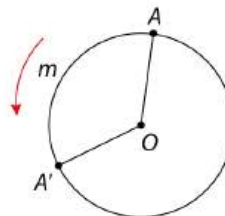
Hình 8.19



- Phép quay thuận chiều  $\alpha^\circ$  ( $0^\circ < \alpha^\circ < 360^\circ$ ) tâm O giữ nguyên điểm O, biến điểm A khác điểm O thành điểm A' thuộc đường tròn (O; OA) sao cho tia OA quay thuận chiều kim đồng hồ đến tia OA' thì điểm A tạo nên cung  $\overset{m}{\text{AmA'}}$  có số đo  $\alpha^\circ$  (Định nghĩa tương tự cho phép quay ngược chiều  $\alpha^\circ$  tâm O).
- Phép quay  $0^\circ$  và phép quay  $360^\circ$  giữ nguyên mọi điểm.



a)



b)

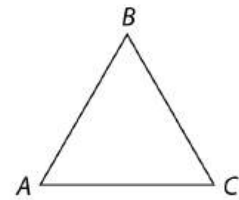
Hình 8.20

Nếu phép quay  $\alpha^\circ$  tâm O biến điểm A thành điểm A' thì điểm A' được gọi là ảnh của điểm A qua phép quay này.

### VÍ DỤ 1

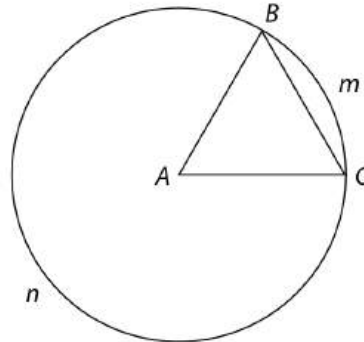
Cho tam giác  $ABC$  đều như Hình 8.21. Tìm ảnh của điểm  $B$  qua:

- Phép quay thuận chiều  $60^\circ$  tâm  $A$ ;
- Phép quay ngược chiều  $300^\circ$  tâm  $A$ .



Hình 8.21

**Bài giải**



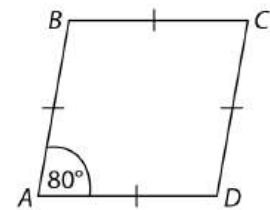
Hình 8.22

- Vì  $AB = AC$  nên  $C$  thuộc đường tròn  $(A; AB)$  (Hình 8.22). Xét đường tròn  $(A; AB)$ , ta có  $\widehat{BAC} = 60^\circ$  nên số đo  $\widehat{BmC} = 60^\circ$ , suy ra  $C$  là ảnh của  $B$  qua phép quay thuận chiều  $60^\circ$  tâm  $A$ .
- Vì số đo  $\widehat{BnC} = 360^\circ - \widehat{BmC} = 300^\circ$  nên  $C$  là ảnh của điểm  $B$  qua phép quay ngược chiều  $300^\circ$  tâm  $A$ .

### LUYỆN TẬP 1

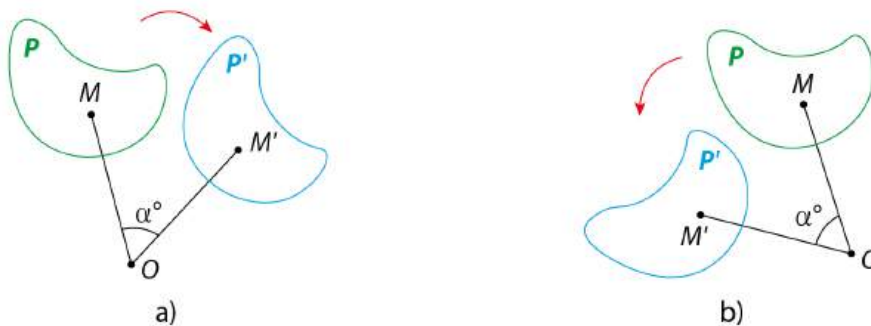
Cho hình thoi  $ABCD$  có  $\widehat{A} = 80^\circ$  như Hình 8.23.

- Tìm ảnh của điểm  $D$  qua phép quay ngược chiều  $80^\circ$  tâm  $A$ .
- Phép quay thuận chiều  $100^\circ$  tâm  $B$  biến điểm  $C$  thành điểm nào?



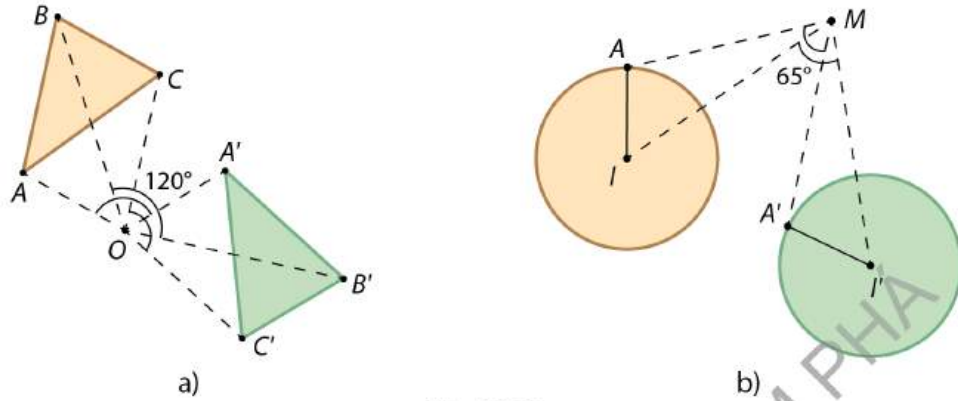
Hình 8.23

Cho hình  $P$ . Với mỗi điểm  $M$  thuộc hình  $P$ , ta xác định được điểm  $M'$  là ảnh của  $M$  qua phép quay  $\alpha^\circ$  tâm  $O$ . Tất cả các điểm  $M'$  tạo thành hình  $P'$ . Ta gọi hình  $P'$  là ảnh của hình  $P$  qua phép quay  $\alpha^\circ$  tâm  $O$ . Ta cũng nói phép quay  $\alpha^\circ$  tâm  $O$  biến hình  $P$  thành hình  $P'$ .



Hình 8.24

### VÍ DỤ 2



Hình 8.25

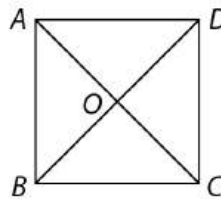
Trong Hình 8.25a:

- Các điểm  $A', B', C'$  lần lượt là ảnh của  $A, B, C$  qua phép quay thuận chiều  $120^\circ$  tâm  $O$ ;
- Tam giác  $A'B'C'$  là ảnh của tam giác  $ABC$  qua phép quay thuận chiều  $120^\circ$  tâm  $O$ .

Trong Hình 8.25b, đường tròn tâm  $I'$  bán kính  $I'A'$  là ảnh của đường tròn tâm  $I$  bán kính  $IA$  qua phép quay ngược chiều  $65^\circ$  tâm  $M$ .

### VÍ DỤ 3

Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$  (Hình 8.26). Tìm ảnh của các đỉnh  $A, B, C, D$  qua phép quay thuận chiều  $90^\circ$  tâm  $O$ . Từ đó, hãy cho biết ảnh của hình vuông  $ABCD$  qua phép quay này.



Hình 8.26

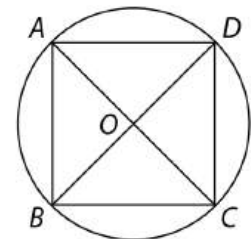
#### Bài giải

Ta có  $ABCD$  là hình vuông tâm  $O$  nên  $AC \perp BD$  và  $OA = OB = OC = OD$ . Suy ra  $A, B, C, D$  thuộc đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AC$ .

Vì  $\widehat{AOD} = 90^\circ$  nên số đo cung nhỏ  $AD$  bằng  $90^\circ$ . Suy ra ảnh của  $A$  qua phép quay thuận chiều  $90^\circ$  tâm  $O$  là  $D$ .

Tương tự, ảnh của các đỉnh  $B, C, D$  qua phép quay thuận chiều  $90^\circ$  tâm  $O$  lần lượt là các đỉnh  $A, B, C$ .

Từ đó, ảnh của hình vuông  $ABCD$  qua phép quay thuận chiều  $90^\circ$  tâm  $O$  là hình vuông  $DABC$ .



Hình 8.27

Trong Ví dụ 3, phép quay thuận chiều  $90^\circ$  tâm  $O$  biến hình vuông  $ABCD$  thành chính nó. Ta nói phép quay thuận chiều  $90^\circ$  tâm  $O$  giữ nguyên hình vuông  $ABCD$ .



Nếu phép quay  $\alpha^\circ$  tâm  $O$  biến mỗi điểm  $M$  thuộc đa giác đều  $P$  thành điểm  $M'$  thuộc  $P$  thì ta nói phép quay  $\alpha^\circ$  tâm  $O$  giữ nguyên đa giác đều  $P$ .

**Lưu ý:** Người ta chứng minh được rằng mỗi đa giác đều có thể nội tiếp được một đường tròn. Cho đa giác đều  $P$  có  $n$  cạnh ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ ) nội tiếp đường tròn  $(O)$ , phép quay  $\frac{k360^\circ}{n}$  tâm  $O$  với  $k \in \{0; 1; \dots; n\}$  giữ nguyên đa giác đều  $P$ .

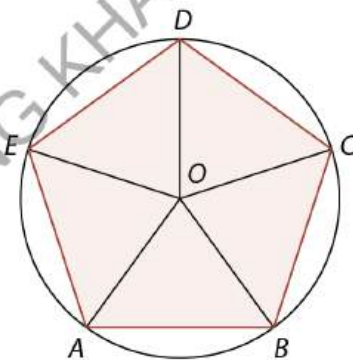
#### VÍ DỤ 4

Cho ngũ giác đều  $ABCDE$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  (Hình 8.28). Tìm ba phép quay  $\alpha^\circ$  tâm  $O$  với  $\alpha$  khác nhau giữ nguyên ngũ giác đều  $ABCDE$ .

#### Bài giải

Ta có  $AB = BC = CD = DE = AE$  nên số đo các cung nhỏ  $AB, BC, CD, DE, AE$  đều bằng  $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ .

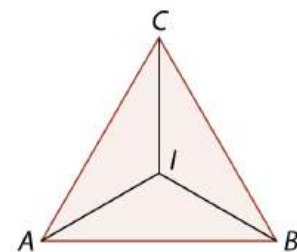
Các phép quay thuận chiều (hoặc ngược chiều)  $72^\circ, 144^\circ, 216^\circ$  tâm  $O$  giữ nguyên ngũ giác đều  $ABCDE$ .



Hình 8.28

#### LUYỆN TẬP 2

Trong Hình 8.29, tam giác  $ABC$  đều và  $\widehat{AIB} = \widehat{BIC} = \widehat{AIC} = 120^\circ$ . Tìm hai phép quay tâm  $I$  giữ nguyên tam giác đều  $ABC$ .

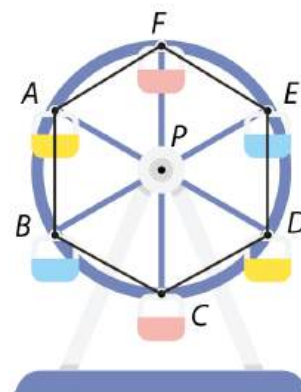


Hình 8.29

#### VẬN DỤNG

Một vòng quay có 6 cabin tại vị trí các đỉnh của một lục giác đều  $ABCDEF$  như Hình 8.30. Vòng quay này quay theo chiều quay kim đồng hồ. Tìm một phép quay tâm  $P$  ( $P$  là vị trí trục của vòng quay) để:

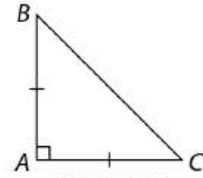
- Cabin ở vị trí  $A$  di chuyển đến vị trí  $E$ . Khi đó cabin ở vị trí  $E$  di chuyển đến vị trí nào?
- Cabin ở vị trí  $A$  di chuyển đến vị trí  $D$ . Tìm ảnh của các đỉnh còn lại của lục giác đều  $ABCDEF$  qua phép quay này và rút ra nhận xét.



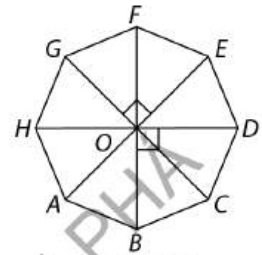
Hình 8.30

## BÀI TẬP

- 8.6.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  như *Hình 8.31*. Tìm ảnh của cạnh  $AB$  qua phép quay thuận chiều  $90^\circ$  tâm  $A$ .
- 8.7.** Cho bát giác đều  $ABCDEFGH$  như *Hình 8.32*. Biết điểm  $O$  cách đều các đỉnh của bát giác đều.
- Tìm ảnh của tam giác  $OAB$  qua phép quay ngược chiều  $180^\circ$  tâm  $O$ .
  - Tìm ảnh của bát giác đều qua phép quay thuận chiều  $90^\circ$  tâm  $O$  và nhận xét.
  - Tìm ba phép quay tâm  $O$  giữ nguyên bát giác đều này.
- 8.8.** Từ 3 giờ chiều đến 3 giờ 20 phút chiều, kim phút của đồng hồ thực hiện một phép quay thuận chiều  $\alpha^\circ$  tâm  $O$ . Tìm  $\alpha$ .



Hình 8.31



Hình 8.32



Hình 8.33

## ?? EM CÓ BIẾT

Thực tế, phép quay hiện hữu nhiều trong đời sống hằng ngày của chúng ta. Các chuyển động tròn đều liên quan đến phép quay. Chẳng hạn cánh quạt quay, sự quay của guồng nước hay turbine, sự chuyển động của các bánh răng nối khớp nhau, của bánh lái hay đơn giản là sự chuyển động của bánh xe,...



Hình 8.34



Trong kiến trúc và nghệ thuật, người ta ứng dụng phép quay để tạo ra các họa tiết trang trí đẹp mắt và ấn tượng. Trong tự nhiên, ta cũng bắt gặp nhiều hình ảnh liên quan đến phép quay như cách mọc của các lá, cánh hoa,...



Họa tiết trên cửa kính của nhà thờ Đức Bà, Paris

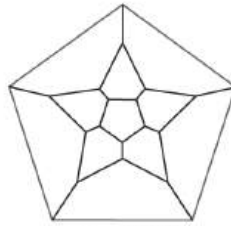


Hình ảnh bông hoa với các cánh cân đối, hài hòa

Hình 8.35

BÀI TẬP TỰ LUẬN

8.9. Có bao nhiêu đa giác đều trong Hình 8.36?



Hình 8.36

8.10. Tính số đo mỗi góc của khung gỗ trang trí có hình bát giác đều như Hình 8.37.



Hình 8.37

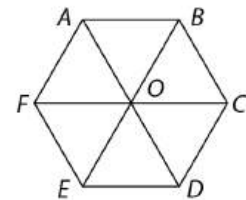
8.11. Lâu đài Castel del Monte ở Ý có kiến trúc độc đáo với đáy và giếng trời đều là bát giác đều. Tính chu vi đáy của lâu đài (không tính các tháp canh), biết cạnh đáy dài khoảng 16,5 m (nguồn: <https://www.budowle.pl/building/castel-del-monte>).



Hình 8.38

8.12. Cho lục giác đều  $ABCDEF$  như Hình 8.39.

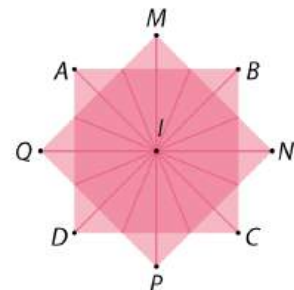
- Tìm ảnh của hình bình hành  $OABC$  qua phép quay thuận chiều  $60^\circ$  tâm  $O$ .
- Tìm ba phép quay ngược chiều tâm  $O$  giữ nguyên lục giác đều  $ABCDEF$ .



Hình 8.39

8.13. Trong Hình 8.40, phần chung của hai hình vuông  $ABCD$  và  $MNPQ$  là một hình bát giác đều.

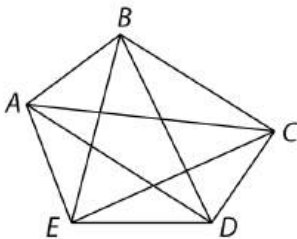
- Các phép quay nào giữ nguyên cả hai hình vuông  $ABCD$  và  $MNPQ$ ?
- Tìm hai phép quay giữ nguyên hình bát giác đều.



Hình 8.40

## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**8.14.** Ngũ giác  $ABCDE$  (Hình 8.41) có tất cả bao nhiêu đường chéo?



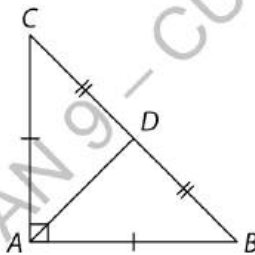
Hình 8.41

- A. 5.                      B. 6.                      C. 8.                      D. 10.

**8.15.** Chu vi của lục giác đều có độ dài cạnh 2 cm bằng

- A. 8 cm.                      B. 10 cm.                      C. 12 cm.                      D. 16 cm.

**8.16.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  có  $D$  là trung điểm của cạnh  $BC$  (Hình 8.42).



Hình 8.42

Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Phép quay thuận chiều  $90^\circ$  tâm  $A$  biến điểm  $C$  thành điểm  $B$ .  
B. Phép quay ngược chiều  $90^\circ$  tâm  $D$  biến điểm  $C$  thành điểm  $A$ .  
C. Phép quay ngược chiều  $90^\circ$  tâm  $D$  biến điểm  $A$  thành điểm  $B$ .  
D. Phép quay thuận chiều  $45^\circ$  tâm  $A$  biến điểm  $B$  thành điểm  $D$ .

**8.17.** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$ . Phép quay giữ nguyên hình vuông  $ABCD$  là

- A. Phép quay thuận chiều  $45^\circ$  tâm  $O$ .  
B. Phép quay thuận chiều  $270^\circ$  tâm  $O$ .  
C. Phép quay ngược chiều  $90^\circ$  tâm  $A$ .  
D. Phép quay ngược chiều  $180^\circ$  tâm  $A$ .

# HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

## Mục tiêu:

Vẽ được các đa giác đều và kết hợp sử dụng phép quay để tạo ra các họa tiết trang trí.

## Yêu cầu chuẩn bị:

Máy tính có cài đặt phần mềm GeoGebra Classic 5.0 hoặc kết nối Internet, truy cập trang <https://www.geogebra.org/classic?lang=vi>.


## Tổ chức hoạt động:

### HOẠT ĐỘNG 1

#### Vẽ họa tiết trang trí từ một loại đa giác đều

a) Họa tiết trang trí từ hình vuông


##### Bước 1

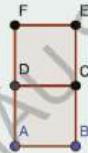
Dùng  để vẽ đa giác đều. Khi đó xuất hiện hộp thoại số cạnh của đa giác đều với số cạnh mặc định là 4.




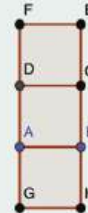
Giữ nguyên số cạnh là 4 để vẽ hình vuông.


##### Bước 2

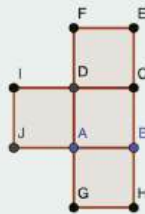
Dùng  để vẽ đa giác đều. Lần lượt chọn các điểm  $D, C$ . Khi đó xuất hiện hộp thoại số cạnh của đa giác đều với số cạnh mặc định là 4. Giữ nguyên số cạnh là 4 để vẽ hình vuông  $DCEF$ .




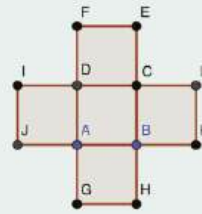
Dùng  để vẽ đa giác đều. Lần lượt chọn các điểm  $B, A$ . Khi đó xuất hiện hộp thoại số cạnh của đa giác đều với số cạnh mặc định là 4. Giữ nguyên số cạnh là 4 để vẽ hình vuông  $BAGH$ .



Dùng  để vẽ đa giác đều. Lần lượt chọn các điểm  $A, D$ . Khi đó xuất hiện hộp thoại số cạnh của đa giác đều với số cạnh mặc định là 4. Giữ nguyên số cạnh là 4 để vẽ hình vuông  $ADIJ$ .



Dùng  để vẽ đa giác đều. Lần lượt chọn các điểm  $C, B$ . Khi đó xuất hiện hộp thoại số cạnh của đa giác đều với số cạnh mặc định là 4. Giữ nguyên số cạnh là 4 để vẽ hình vuông  $CBKL$ .



Tương tự, vẽ liên tiếp các hình vuông xung quanh bằng cách chọn cạnh của hình vuông đã cho.

### Bước 3

Để đổi màu hình vuông  $ABCD$  ta làm như sau: chọn hình vuông  $ABCD$ , bấm chuột phải và chọn **Thiết lập** rồi chọn **Màu sắc** rồi tùy chọn màu.

Tương tự, đổi màu nền của các hình vuông. Ta có thể chọn đồng thời nhiều hình vuông và đổi màu cùng một lúc (các hình vuông này cùng màu).

### Bước 4

Chọn tất cả các hình vuông. Ở góc trên bên phải của vùng làm việc, chọn **—** rồi chỉnh độ dày của các cạnh về 0.



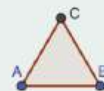
Chọn tất cả các điểm, bấm chuột phải và chọn **Thiết lập** rồi bỏ chọn **Hiển thị đối tượng** để ẩn các đỉnh của hình vuông.

b) Hoạ tiết trang trí từ tam giác đều

### Bước 1

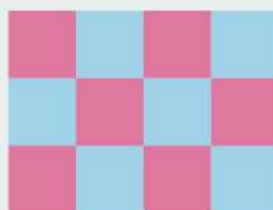
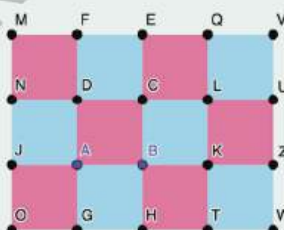
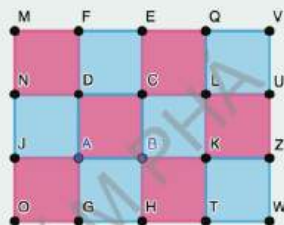
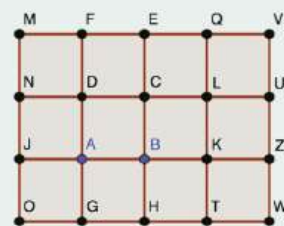
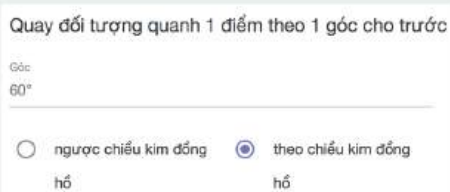
Dùng **Đa giác đều** để vẽ đa giác đều. Khi đó xuất hiện hộp thoại số cạnh của đa giác đều với số cạnh mặc định là 4.

Đổi số cạnh là 3 để vẽ tam giác đều.

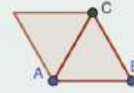


### Bước 2

Dùng **Quay** để vẽ các tam giác đều tiếp theo bằng phép quay. Chọn tam giác  $ABC$ , chọn đỉnh  $C$ , chọn chiều quay và chọn góc quay  $60^\circ$ .

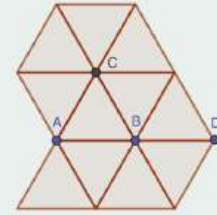


Ta vẽ được tam giác đều mới.



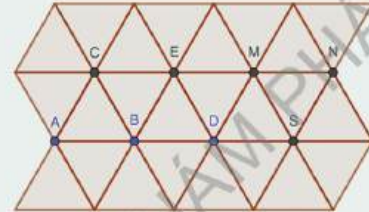
### Bước 3

Tiếp tục sử dụng phép quay để vẽ thêm các tam giác đều khác.




### Bước 4

Chọn thêm các điểm mới, chẳng hạn các điểm  $D, E, M, S, N$  và vẽ thêm các tam giác đều.



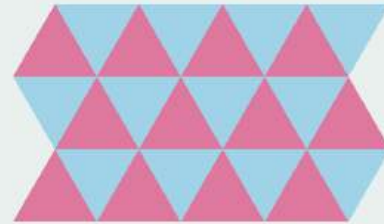
### Bước 5

Chọn các tam giác đều, bấm chuột phải và chọn **Thiết lập** rồi chọn **Màu sắc** để đổi màu nền các tam giác ấy.

Chọn tất cả các tam giác đều. Ở góc trên bên phải của vùng làm việc, chọn  rồi chỉnh độ dày của các cạnh về 0.

Chọn tất cả các đỉnh, bấm chuột phải và chọn **Thiết lập** rồi bỏ chọn  **Hiển thị đối tượng** để ẩn các điểm.

**Yêu cầu:** Hãy cho biết các tam giác đều vẽ thêm được trong Bước 2 và Bước 3 có bằng nhau không. Giải thích.

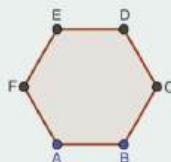


## HOẠT ĐỘNG 2

### Vẽ họa tiết trang trí từ nhiều loại đa giác đều

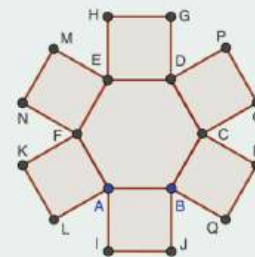
#### Bước 1

Vẽ lục giác đều  $ABCDEF$ .



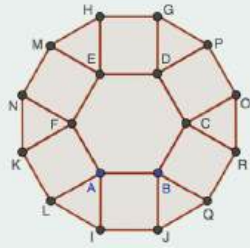
#### Bước 2

Vẽ các hình vuông có cạnh là cạnh của lục giác đều  $ABCDEF$  về phía ngoài của lục giác đều.

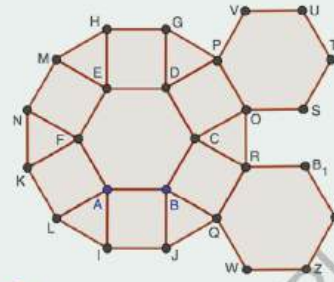


**Bước 3**

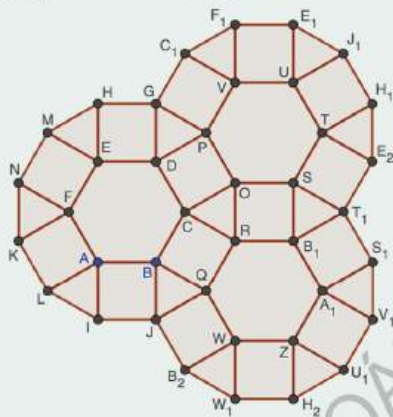
Vẽ các tam giác tạo bởi hai cạnh của các hình vuông kề nhau.

**Bước 4**

Vẽ thêm các lục giác đều mới có cạnh là cạnh của hình vuông.

**Bước 5**

Vẽ thêm các hình vuông và tam giác xung quanh hai lục giác đều vừa vẽ.

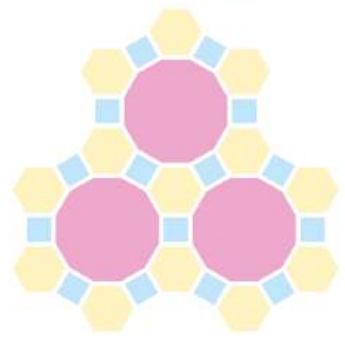
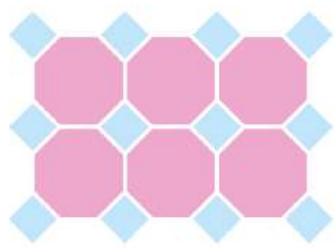
**Bước 6**

Hoàn thiện họa tiết trang trí.



**Yêu cầu:** Hãy kiểm tra xem các tam giác vẽ trong họa tiết có phải là tam giác đều hay không.

**Thực hành:** Dùng phần mềm GeoGebra để vẽ các họa tiết trang trí sau:



# Phần

# HÌNH HỌC TRỰC QUAN

Chương

9

Hình trụ. Hình nón. Hình cầu



Trên thế giới, nhiều công trình kiến trúc có thiết kế được lấy cảm hứng từ những hình khối đặc biệt như hình trụ, hình nón, hình cầu và từ đó tạo nên nét riêng độc đáo.

## Cùng tìm hiểu

- ▶ Cách mô tả và tạo lập hình trụ, hình nón, hình cầu và mặt cầu;
- ▶ Phần chung của mặt phẳng và hình cầu;
- ▶ Cách tính diện tích xung quanh của hình trụ, hình nón, diện tích mặt cầu và thể tích của hình trụ, hình nón, hình cầu;
- ▶ Cách giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với việc tính diện tích xung quanh, thể tích của hình trụ, hình nón, hình cầu.

# Bài 1

## HÌNH TRỤ

Từ khoá: hình trụ, bán kính đáy, đường sinh, chiều cao của hình trụ.



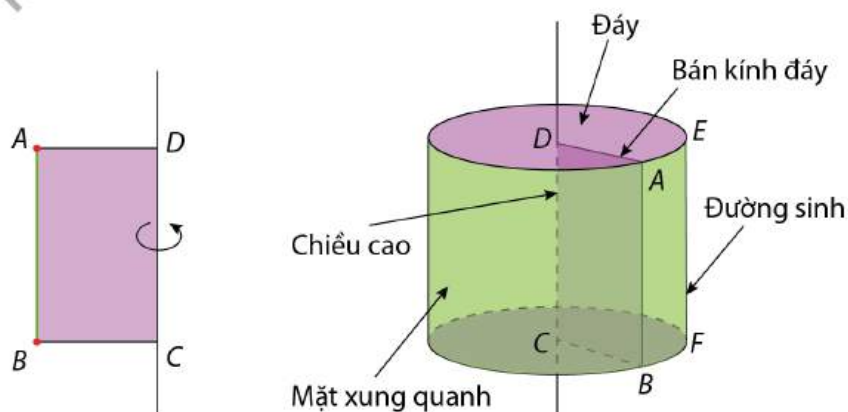
Các thùng phuy chứa xăng dầu và hoá chất có thiết kế hình trụ, giúp giảm áp lực lên thành của thùng do chất lỏng sinh ra khi bị lắc trong quá trình vận chuyển.

### 1 HÌNH TRỤ

#### HOẠT ĐỘNG 1

- Bước 1** Vẽ và cắt một hình chữ nhật  $ABCD$  bằng bìa cứng. Đánh dấu hai điểm  $A$  và  $B$  trên hình chữ nhật bằng màu đỏ và tô đậm đoạn thẳng  $AB$  bằng màu xanh.
- Bước 2** Dùng băng dính hai mặt để dán mép hình chữ nhật này vào một nẹp gỗ dọc theo cạnh  $CD$ .
- Bước 3** Giữ cố định vị trí nẹp gỗ và quay hình chữ nhật  $ABCD$  quanh nẹp gỗ. Khi hình chữ nhật  $ABCD$  quay quanh nẹp gỗ, hai điểm màu đỏ  $A$  và  $B$  chuyển động theo đường gì? Đoạn thẳng màu xanh  $AB$  quét tạo thành bề mặt của hình gì?

Khi quay hình chữ nhật  $ABCD$  một vòng quanh cạnh  $CD$  cố định, ta được một hình trụ (Hình 9.1).



Hình 9.1

Khi đó:

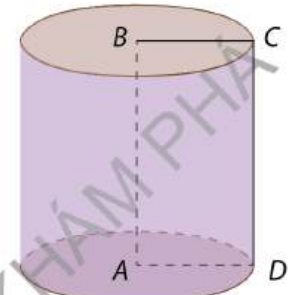
- $DA$  và  $CB$  quét nên hai đường tròn bằng nhau có tâm  $D$  và  $C$ , được gọi là *hai đáy* của hình trụ. Bán kính và đường kính của đường tròn đáy lần lượt là bán kính đáy và đường kính đáy hình trụ.
- Cạnh  $AB$  quét nên *mặt xung quanh* của hình trụ. Mỗi vị trí của  $AB$  được gọi là một *đường sinh*. Chẳng hạn  $EF$  là một đường sinh. Độ dài  $CD$  là *chiều cao* của hình trụ và bằng độ dài đường sinh.

### VÍ DỤ 1

Tính chiều cao và bán kính đáy của hình trụ tạo thành khi quay hình chữ nhật  $ABCD$  có  $CD = 3$  cm,  $AD = 2$  cm quanh cạnh  $AB$  (Hình 9.2).

#### Bài giải

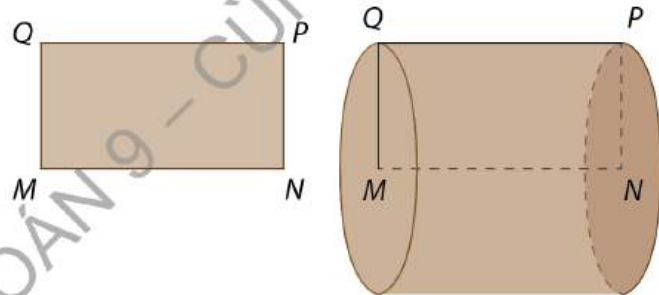
Khi quay hình chữ nhật  $ABCD$  quanh cạnh  $AB$ , ta được hình trụ có chiều cao  $CD = 3$  cm và bán kính đáy  $AD = 2$  cm.



Hình 9.2

### LUYỆN TẬP 1

Cho hình chữ nhật  $MNPQ$  có  $PQ = 4$  cm,  $NP = 2,5$  cm quay quanh cạnh  $MN$ . Chỉ ra mặt đáy, đường sinh và tính chiều cao, bán kính đáy của hình trụ tạo thành.

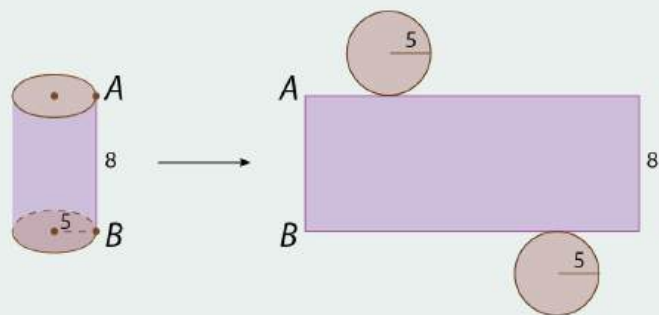


Hình 9.3

## 2 DIỆN TÍCH XUNG QUANH CỦA HÌNH TRỤ

### HOẠT ĐỘNG 2

Một hộp hình trụ làm bằng thiếc có bán kính đáy 5 cm, chiều cao 8 cm (Hình 9.4a). Nếu cắt rời hai đáy và cắt dọc theo đường sinh  $AB$  của hộp, rồi trải phẳng ra, ta được hình khai triển của hình trụ (Hình 9.4b).



Hình 9.4

- Tính chu vi mỗi đáy của hình trụ.
- Tính diện tích miếng thiếc hình chữ nhật để làm thành mặt xung quanh của hộp (diện tích các mối nối không đáng kể).

**Lưu ý:** Người ta coi diện tích hình chữ nhật trong hình khai triển của hình trụ (Hình 9.4) là diện tích xung quanh của hình trụ đó.

Ta có công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ như sau:



Diện tích xung quanh, kí hiệu là  $S_{xq}$ , của hình trụ được tính theo công thức:

$$S_{xq} = 2\pi rh$$

với  $r$  là bán kính đáy và  $h$  là chiều cao của hình trụ.

### VÍ DỤ 2

- Tính diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính đáy 3 cm và chiều cao 7 cm.
- Một hình trụ có diện tích xung quanh  $32\pi \text{ cm}^2$  và độ dài đường sinh là 4 cm. Tìm bán kính đáy.

#### Bài giải

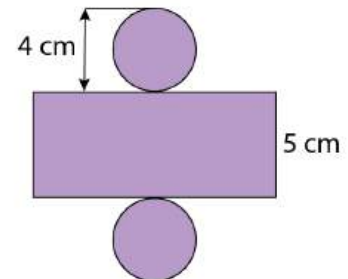
- Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho:  $S_{xq} = 2\pi \cdot 3 \cdot 7 = 42\pi \text{ (cm}^2\text{)}$ .
- Chiều cao của hình trụ bằng 4 cm.

$$\text{Bán kính đáy của hình trụ: } r = \frac{32\pi}{2\pi \cdot 4} = 4 \text{ (cm)}.$$

**Lưu ý:** Tổng diện tích xung quanh và diện tích hai đáy của hình trụ được gọi là diện tích toàn phần của hình trụ, kí hiệu là  $S_{tp}$ . Ta có  $S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2$ .

### LUYỆN TẬP 2

Tính diện tích xung quanh của hình trụ có hình khai triển như Hình 9.5.



Hình 9.5

### VẬN DỤNG 1

Diện tích giấy tối thiểu để quấn quanh một hộp đào ngâm có dạng hình trụ (Hình 9.6) là bao nhiêu centimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm), biết rằng người ta chỉ quấn một lớp giấy quanh hộp đào?

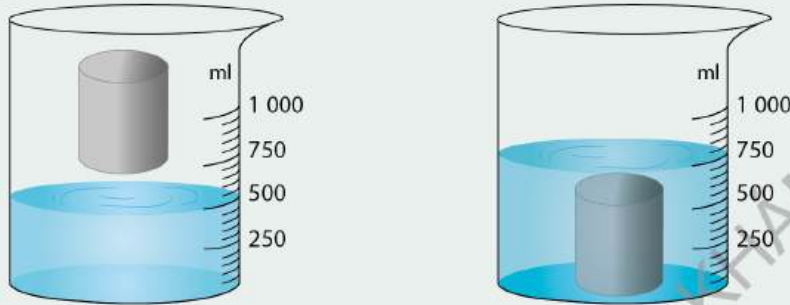


Hình 9.6

### 3 THỂ TÍCH CỦA HÌNH TRỤ

#### HOẠT ĐỘNG 3

Trong một thí nghiệm, bạn Mai thả một khối sắt hình trụ có chiều cao  $h = 6,5$  cm, bán kính đáy  $r = 3,5$  cm vào một bình chia độ đang chứa 500 ml nước. Sau khi khối sắt chìm hẳn xuống, bạn Mai thấy mực nước trong bình tăng lên vạch 750 ml. Biết  $1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$ .



Hình 9.7

- Dựa vào mực nước tăng lên trong bình, hãy tính thể tích của khối sắt.
- Gọi  $S$  là diện tích đáy của khối sắt. So sánh tích  $S.h$  với kết quả ở câu a và rút ra nhận xét.

Ta có công thức tính thể tích của hình trụ như sau:



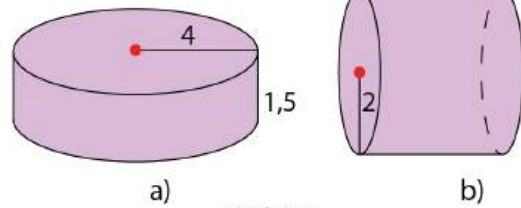
Thể tích, kí hiệu là  $V$ , của hình trụ được tính theo công thức:

$$V = \pi r^2 h$$

với  $r$  là bán kính đáy và  $h$  là chiều cao của hình trụ.

#### VÍ DỤ 3

Một khối sắt hình trụ có bán kính đáy 4 cm và chiều cao 1,5 cm (Hình 9.8a) được nung chảy và đúc thành một khối sắt hình trụ mới với bán kính đáy 2 cm (Hình 9.8b).



Hình 9.8

- Tính thể tích của khối sắt ban đầu.
- Tính chiều cao của khối sắt mới, bỏ qua sự hao hụt trong quá trình đúc.

#### Bài giải

a) Thể tích khối sắt ban đầu:  $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 1,5 = 24\pi$  (cm<sup>3</sup>).

b) Thể tích khối sắt mới bằng thể tích khối sắt ban đầu.

Gọi  $h$  (cm) là chiều cao của khối sắt mới.

Thể tích của khối sắt mới:  $V = \pi \cdot 2^2 \cdot h$  (cm<sup>3</sup>). Ta có  $\pi \cdot 2^2 \cdot h = 24\pi$ .

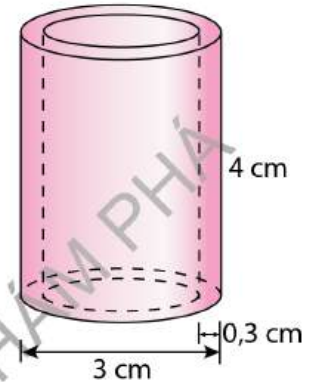
Chiều cao của khối sắt mới:  $h = \frac{24\pi}{\pi \cdot 2^2} = 6$  (cm).

### LUYỆN TẬP 3

Tính chiều cao và thể tích của một hình trụ có bán kính đáy bằng 5 cm và diện tích xung quanh bằng  $30\pi$  cm<sup>2</sup>.

### VẬN DỤNG 2

Tính thể tích nhựa cần dùng để sản xuất đoạn ống nhựa có kích thước như Hình 9.9.



Hình 9.9

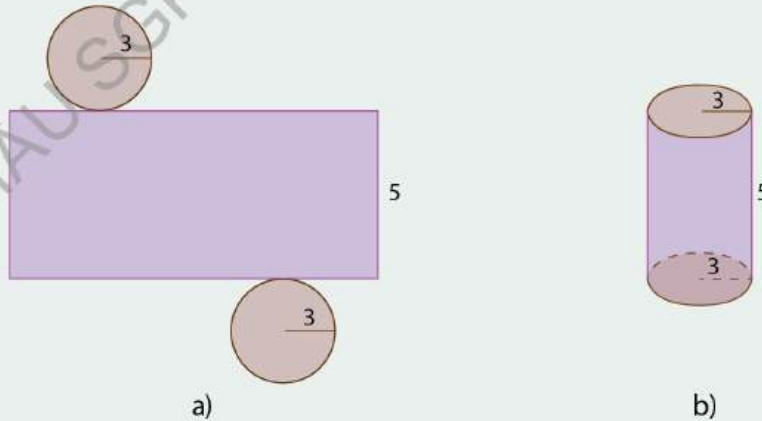
## 4 TẠO LẬP HÌNH TRỤ

### HOẠT ĐỘNG 4

Tạo lập hình trụ có bán kính đáy 3 cm và chiều cao 5 cm theo các bước sau:

**Bước 1** Cắt hai miếng bìa hình tròn có bán kính bằng 3 cm và một miếng bìa hình chữ nhật có chiều rộng 5 cm, chiều dài bằng chu vi của miếng bìa hình tròn vừa cắt (Hình 9.10a).

**Bước 2** Dùng băng dính để dán các miếng bìa lại để được một hình trụ (Hình 9.10b).



Hình 9.10

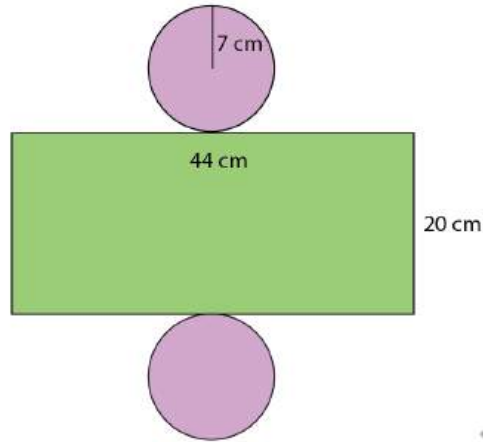
Ta có thể tạo lập hình trụ từ hình khai triển.

### LUYỆN TẬP 4

Tạo lập hình trụ có bán kính đáy 2,5 cm và chiều cao 4 cm.

### VẬN DỤNG 3

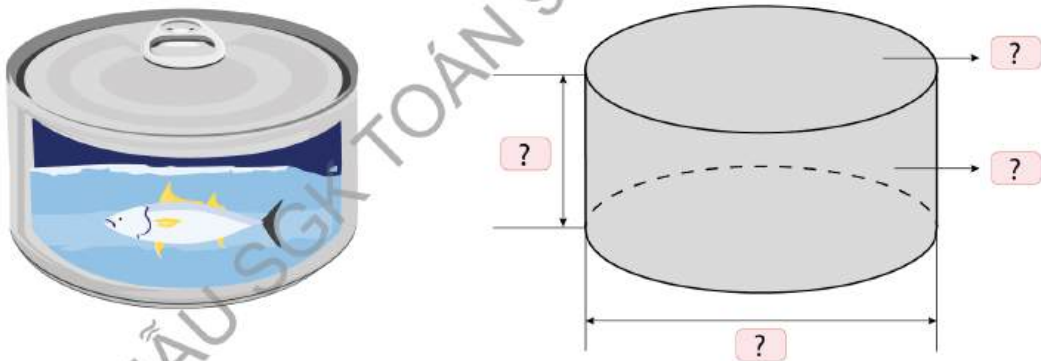
Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ có hình khai triển như Hình 9.11.  
Lấy  $\pi \approx \frac{22}{7}$ .



Hình 9.11

### BÀI TẬP

9.1. Tìm tên gọi thích hợp cho các ô  trong Hình 9.12.



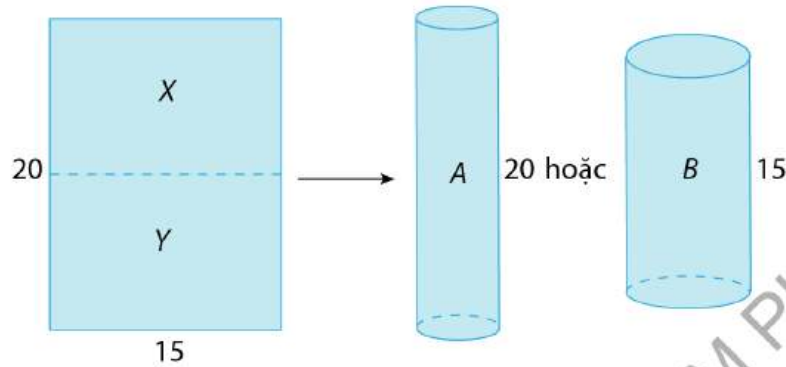
Hình 9.12

9.2. Tìm các số và đơn vị thích hợp trong các ô  để hoàn thành Bảng 9.1.

Bảng 9.1

Chiều cao của hình trụ	25 mm	<input type="text"/>	3 dm
Bán kính đáy của hình trụ	8 mm	5 cm	<input type="text"/>
Diện tích xung quanh của hình trụ	<input type="text"/>	$60\pi \text{ cm}^2$	<input type="text"/>
Diện tích toàn phần của hình trụ	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
Thể tích của hình trụ	<input type="text"/>	<input type="text"/>	$48\pi \text{ dm}^3$

- 9.3.** Từ một tấm bìa hình chữ nhật với độ dài hai cạnh là 20 cm, 15 cm có thể cuộn lại và dùng băng dính dán thành hình trụ *A* hoặc hình trụ *B* (không có nắp) như *Hình 9.13*.



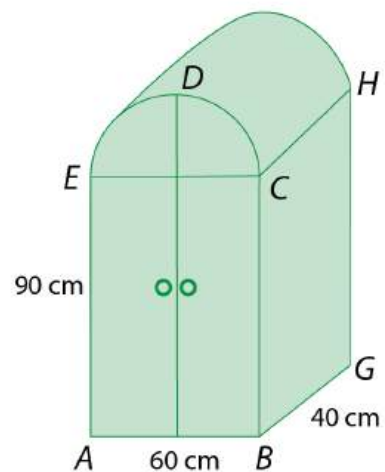
*Hình 9.13*

- a) Hãy so sánh thể tích của hai hình trụ *A* và *B*. Giải thích câu trả lời của em.  
 b) Nếu cắt tấm bìa thành hai phần *X*, *Y* bằng nhau và tạo thành hai hình trụ (không có nắp) cùng chiều cao 15 cm thì tổng thể tích của hai hình trụ này có lớn hơn thể tích của hình trụ *B* không? Vì sao?
- 9.4.** Một cái thớt gỗ hình trụ có đường kính đáy 40 cm, dày 5 cm như *Hình 9.14*.
- a) Tính thể tích gỗ cần dùng để làm thớt.  
 b) Khối lượng riêng của gỗ làm thớt là  $D = 500 \text{ kg/m}^3$ . Hỏi cái thớt nặng bao nhiêu gam (làm tròn kết quả đến hàng phần mười), biết khối lượng  $m$  (kg) của một vật có thể tích  $V$  ( $\text{m}^3$ ) là  $m = D.V$ ?



*Hình 9.14*

- 9.5.** *Hình 9.15* là một tủ chứa đồ. Biết cung *CDE* là nửa đường tròn.
- a) Tính thể tích của tủ đồ.  
 b) Người ta muốn sơn tất cả các mặt ngoài của tủ (kể cả đáy). Hỏi diện tích cần sơn là bao nhiêu mét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



*Hình 9.15*

## Bài 2

# HÌNH NÓN

**Từ khoá:** hình nón, đỉnh, bán kính đáy, đường sinh, chiều cao của hình nón.



Nón lá và áo dài là những biểu tượng gắn liền với hình ảnh của người phụ nữ Việt Nam. Chiếc nón lá thân thuộc cũng là sản phẩm thủ công mỹ nghệ đầu tiên được Cục Sở hữu trí tuệ (Bộ Khoa học và Công nghệ) cấp chứng nhận bảo hộ chỉ dẫn địa lí vào tháng 8/2010 (nguồn: <https://moit.gov.vn/tu-hao-hang-viet-nam/non-hue-san-pham-noi-tieng-cua-vung-dat-co-do.html>).



Hình 9.16

### 1 HÌNH NÓN

#### HOẠT ĐỘNG 1

Trong Hình 9.17, những vật thể nào có hình dáng giống nhau?



a)



b)



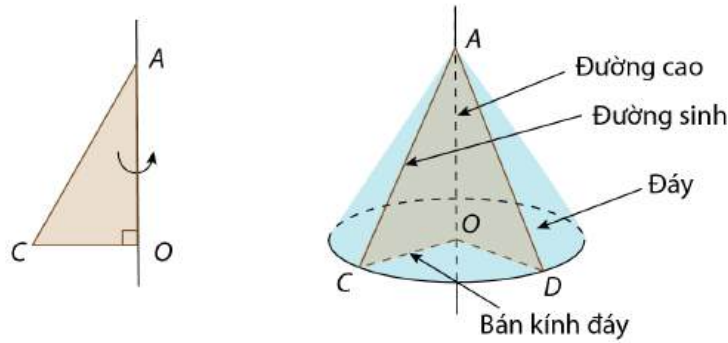
c)



d)

Hình 9.17

Khi quay tam giác  $AOC$  vuông tại  $O$  một vòng quanh cạnh góc vuông  $OA$  cố định, ta được một hình nón (Hình 9.18). Khi đó:



Hình 9.18

- Cạnh  $OC$  quét nên đáy của hình nón là một hình tròn tâm  $O$ . Bán kính của hình tròn đáy được gọi là bán kính đáy của hình nón.
- Cạnh  $AC$  quét nên mặt xung quanh của hình nón, mỗi vị trí của  $AC$  được gọi là một đường sinh, chẳng hạn  $AD$  là một đường sinh.
- $A$  được gọi là đỉnh và  $AO$  được gọi là chiều cao của hình nón.

### VÍ DỤ 1

Chỉ ra đỉnh, chiều cao, bán kính đáy và tính đường sinh của hình nón tạo thành khi quay tam giác  $AOM$  vuông tại  $O$  có  $OA = 4$  cm,  $OM = 3$  cm quanh cạnh  $OA$  cố định (Hình 9.19).

#### Bài giải

Hình nón tạo thành có đỉnh  $A$ , chiều cao  $OA = 4$  cm, bán kính đáy  $OM = 3$  cm.

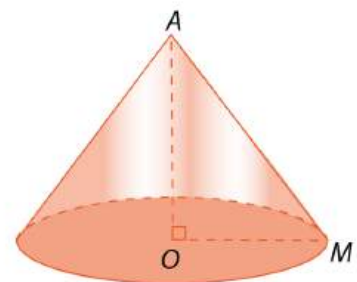
Tam giác  $AOM$  vuông tại  $O$  có:

$$AM^2 = OA^2 + OM^2 \text{ (định lí Pythagore)}$$

$$AM^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$

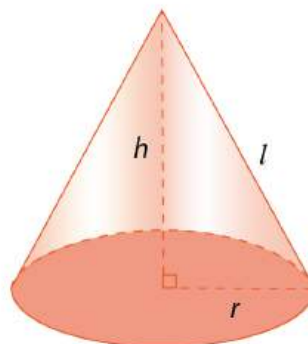
$$AM = \sqrt{25} = 5 \text{ (cm)}.$$

Vậy hình nón có đường sinh  $AM = 5$  cm.



Hình 9.19

Lưu ý:

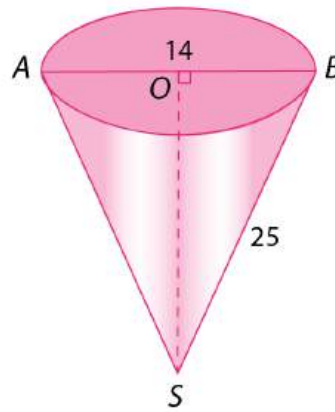


Hình 9.20

Cho hình nón có bán kính đáy  $r$ , chiều cao  $h$  và đường sinh  $l$  (Hình 9.20). Khi đó  $h^2 + r^2 = l^2$ .

## LUYỆN TẬP 1

Tính bán kính đáy và chiều cao của hình nón trong Hình 9.21.



Hình 9.21

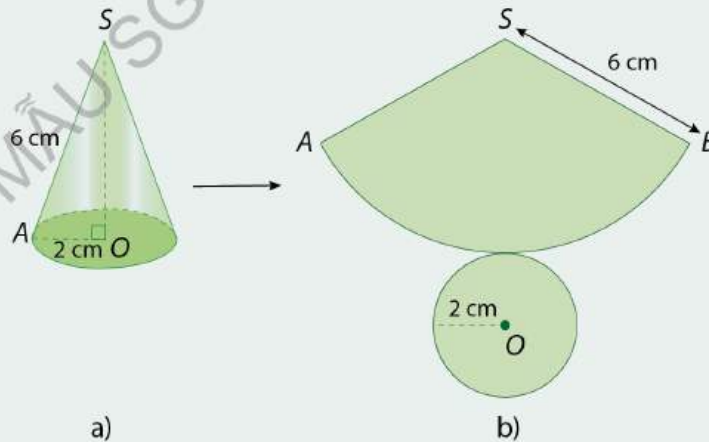
## VẬN DỤNG 1

Em hãy tìm một số đồ vật có dạng hình nón trong cuộc sống.

## 2 DIỆN TÍCH XUNG QUANH CỦA HÌNH NÓN

### HOẠT ĐỘNG 2

Cắt mặt xung quanh của một hình nón có đường sinh dài 6 cm, bán kính đáy 2 cm (Hình 9.22a) dọc theo đường sinh SA của nó rồi trải phẳng ra, ta được hình khai triển của hình nón đó (Hình 9.22b).



Hình 9.22

- Tính chu vi đáy của hình nón, từ đó cho biết độ dài cung ứng với hình quạt tròn ở Hình 9.22b.
- Tính diện tích của hình quạt tròn khai triển trong Hình 9.22b.

**Lưu ý:** Người ta coi diện tích hình quạt tròn trong hình khai triển của hình nón (Hình 9.22b) là diện tích xung quanh của hình nón đó.

Ta có công thức tính diện tích xung quanh của hình nón như sau:



Diện tích xung quanh, kí hiệu là  $S_{xq}$ , của hình nón được tính theo công thức:

$$S_{xq} = \pi r l$$

với  $r$  là bán kính đáy và  $l$  là đường sinh của hình nón.

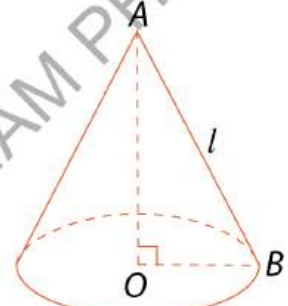
### VÍ DỤ 2

Tính diện tích xung quanh của hình nón trong Hình 9.23, biết  $OA = 15$  cm,  $OB = 8$  cm.

#### Bài giải

Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác  $AOB$  vuông tại  $O$ , ta có đường sinh của hình nón:  $l = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$  (cm).

Diện tích xung quanh của hình nón:  $S_{xq} = \pi \cdot 8 \cdot 17 = 136\pi$  (cm<sup>2</sup>).



Hình 9.23

**Lưu ý:** Tổng của diện tích xung quanh và diện tích đáy của hình nón được gọi là diện tích toàn phần của hình nón, kí hiệu là  $S_{tp}$ . Ta có  $S_{tp} = \pi r l + \pi r^2$ .

### LUYỆN TẬP 2

Tính chiều cao của một hình nón có đường sinh dài 20 cm và diện tích xung quanh bằng  $240\pi$  cm<sup>2</sup>.

### VẬN DỤNG 2

Nón lá phổ biến ở cả ba miền của nước ta nhưng nón lá Huế từ lâu đã trở thành nguồn cảm hứng cho thi ca. Nón Huế thường có màu trắng xanh, thanh tao, mỏng, nhẹ, mềm mại. Nón lá Huế có khung gồm 16 vòng cách đều nhau (khung nón còn được gọi là khung chằm) và được lợp bằng nhiều lớp lá của cây lá nón trồng ở huyện A Lưới và huyện Nam Đông, thuộc tỉnh Thừa Thiên Huế (nguồn: [https://www.ipvietnam.gov.vn/hoat-ong-so-huu-cong-nghiep-tai-ia-phuong/-/asset\\_publisher/7x5jBfqhCDAV/content/bao-ho-chi-dan-ia-ly-hue-cho-san-pham-non-la](https://www.ipvietnam.gov.vn/hoat-ong-so-huu-cong-nghiep-tai-ia-phuong/-/asset_publisher/7x5jBfqhCDAV/content/bao-ho-chi-dan-ia-ly-hue-cho-san-pham-non-la)). Tính diện tích bề mặt ngoài (theo centimét vuông) của một chiếc nón lá có đường kính đáy 41 cm và chiều cao 18 cm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



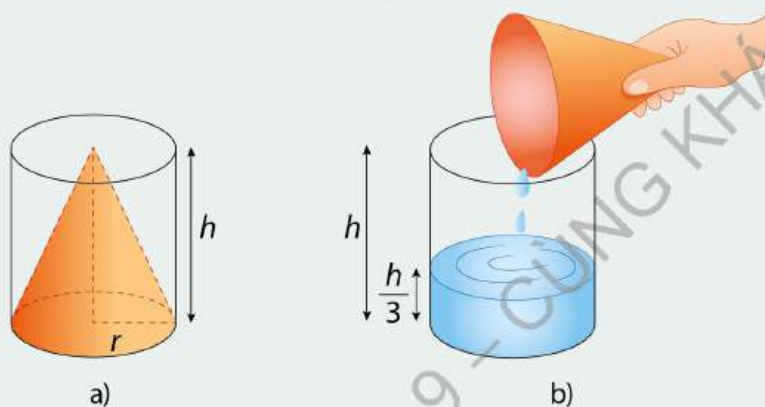
Hình 9.24

### 3 THỂ TÍCH CỦA HÌNH NÓN

#### HOẠT ĐỘNG 3

Bạn Thiện có một phễu đồng dạng hình nón (Hình 9.25a) và một thùng không chứa nước dạng hình trụ (Hình 9.25b) với cùng bán kính đáy  $r$  và chiều cao  $h$ . Thiện dùng phễu đồng mức đầy nước rồi đổ vào thùng chứa thì thấy rằng mực nước bằng  $\frac{1}{3}$  chiều cao của thùng.

- Tính thể tích  $V$  của phần nước trong thùng chứa theo  $r$  và  $h$ .
- Hãy dự đoán thể tích của phễu đồng.



Hình 9.25

Ta chứng minh được rằng:



Thể tích, kí hiệu là  $V$ , của hình nón được tính theo công thức:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

với  $r$  là bán kính đáy và  $h$  là chiều cao của hình nón.

#### VÍ DỤ 3

Tính thể tích của một hình nón có đường kính đáy 10 cm và chiều cao 6 cm.

#### Bài giải

Bán kính đáy của hình nón:  $r = \frac{10}{2} = 5$  (cm).

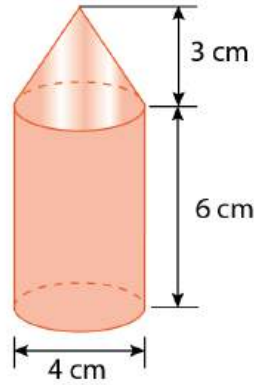
Thể tích của hình nón:  $V = \frac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 6 = 50\pi$  (cm<sup>3</sup>).

#### LUYỆN TẬP 3

Một hình nón có đường sinh bằng 10 cm và chiều cao bằng 8 cm. Tính thể tích của hình nón.

### VẬN DỤNG 3

Tính thể tích của mô hình tên lửa trong Hình 9.26.

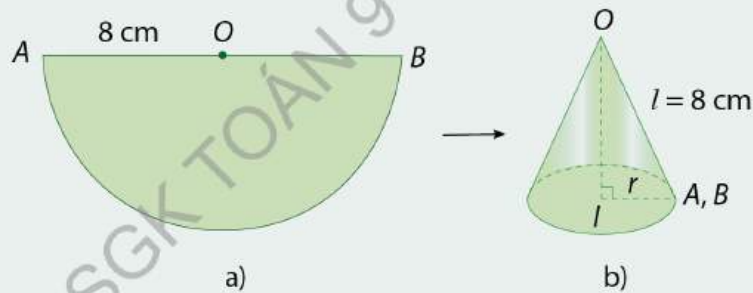


Hình 9.26

## 4 TẠO LẬP HÌNH NÓN

### HOẠT ĐỘNG 4

**Bước 1** Cắt miếng bìa như Hình 9.27a rồi uốn miếng bìa lại và dán hai mép OA, OB sao cho chúng chồng khít lên nhau để tạo thành mặt xung quanh của hình nón đỉnh O (không có đáy) như Hình 9.27b.



Hình 9.27

**Bước 2** Tính bán kính đáy  $r$  của hình nón tạo thành và cắt miếng bìa hình tròn bán kính  $r$ . Dùng băng dính dán miếng bìa này với mặt xung quanh của hình nón ở Bước 1 để tạo lập thành một hình nón.

### VÍ DỤ 4

Tạo lập hình nón có bán kính đáy 1,5 cm và đường sinh 6 cm.

#### Bài giải

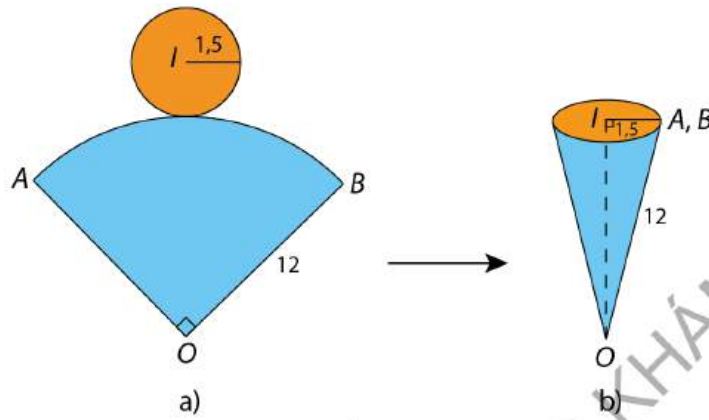
Diện tích xung quanh của hình nón:  $S_{xq} = \pi \cdot 1,5 \cdot 6 = 9\pi$  (cm<sup>2</sup>).

Mặt xung quanh của hình nón trên là hình quạt tròn bán kính 6 cm giới hạn bởi cung  $n^\circ$ .

Ta có  $\frac{\pi \cdot 6^2 \cdot n}{360} = 9\pi$  hay  $\frac{n}{10} = 9$ . Suy ra  $n = 90$ .

Từ đó, ta có thể tạo lập hình nón trên theo các bước sau:

- Cắt một miếng bìa hình quạt tròn bán kính 6 cm giới hạn bởi cung  $90^\circ$  (một phần tư hình tròn bán kính 6 cm) và uốn miếng bìa tạo thành mặt xung quanh của hình nón.
- Cắt một miếng bìa hình tròn bán kính 1,5 cm và dùng băng dính dán miếng bìa này với mặt xung quanh của hình nón vừa tạo.



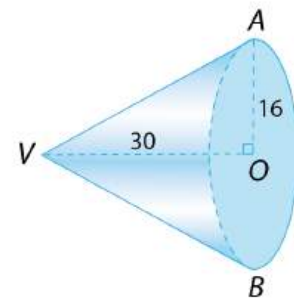
Hình 9.28

#### LUYỆN TẬP 4

Tạo lập hình nón có bán kính đáy 5 cm và đường sinh 12 cm. Tính thể tích của hình nón vừa tạo lập.

#### BÀI TẬP

9.6. Kể tên đỉnh, chiều cao, đường sinh, bán kính đáy và tính diện tích xung quanh, thể tích của hình nón ở Hình 9.29.



Hình 9.29

9.7. Tìm các số và đơn vị thích hợp để hoàn thành Bảng 9.2.

Bảng 9.2

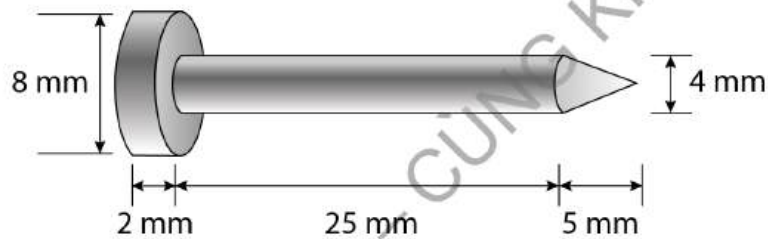
Chiều cao của hình nón	?	8 cm	15 mm
Bán kính đáy của hình nón	3 dm	?	20 mm
Đường sinh của hình nón	5 dm	?	?
Diện tích xung quanh của hình nón	?	?	?
Diện tích toàn phần của hình nón	?	?	?
Thể tích của hình nón	?	$96\pi \text{ cm}^3$	?

- 9.8. Tính diện tích bìa cần dùng (theo centimét vuông) để làm một chiếc mũ sinh nhật có dạng hình nón như Hình 9.30 với đường kính đáy 22 cm và chiều cao 18 cm (bỏ qua các mép nối và phần thừa, làm tròn kết quả đến centimét vuông).



Hình 9.30

- 9.9. Thả 10 chiếc đinh có kích thước như Hình 9.31 vào một cốc nước thủy tinh. Đinh chìm hẳn xuống và nước trong cốc không bị tràn ra ngoài. Hỏi thể tích nước trong cốc tăng thêm bao nhiêu mililít (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Hình 9.31

### ?? EM CÓ BIẾT

Nhà hát Cao Văn Lầu ở thành phố Bạc Liêu, tỉnh Bạc Liêu được xây dựng theo mô hình ba chiếc nón lá gắn liền với hình ảnh của người phụ nữ Việt Nam. Đây còn là biểu tượng thể hiện sự đoàn kết của ba dân tộc anh em sinh sống trên địa bàn tỉnh là Kinh, Hoa, Khmer, đồng thời mang ý nghĩa gắn kết ba miền Bắc, Trung, Nam của đất nước. Công trình được đặt theo tên của cố nhạc sĩ Cao Văn Lầu – cha đẻ của bản Dạ cổ Hoài lang. Khi nhắc đến ông, người ta thường nhớ đến Đờn ca tài tử Nam Bộ.



Hình 9.32

Đờn ca tài tử Nam Bộ của Việt Nam được UNESCO công nhận là Di sản Văn hoá phi vật thể đại diện của nhân loại năm 2013.

(Nguồn: <https://tpbl.baclieu.gov.vn/-/nh%C3%A0-h%C3%A1t-cau-v%C4%83n-l%C3%A0u-%C4%91i-%E1%BB%83m-%C4%91%E1%BA%BFn-%C4%91%E1%BB%99c-%C4%91%C3%A1o-c%E1%BB%A7a-b%E1%BA%A1c-li%C3%AAu> và <https://ich.unesco.org/en/RL/art-of-n-ca-ti-t-music-and-song-in-southern-viet-nam-00733>)

## Bài 3

# HÌNH CẦU

Từ khoá: hình cầu, mặt cầu, tâm, bán kính của hình cầu.



Bán kính Sao Mộc gấp khoảng 11 lần bán kính Trái Đất (nguồn: <https://solar.system.nasa.gov/resources/686/solar-system-sizes/>). Vậy thể tích Sao Mộc gấp bao nhiêu lần thể tích Trái Đất?

### 1 HÌNH CẦU

#### HOẠT ĐỘNG 1

Hãy chỉ ra các vật thể có dạng hình cầu trong Hình 9.33.



a)



b)



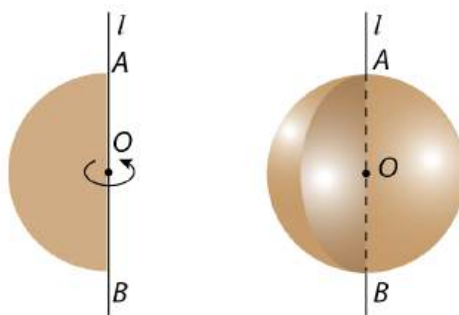
c)



d)

Hình 9.33

Khi quay nửa hình tròn tâm  $O$ , bán kính  $R$  một vòng quanh đường kính  $AB$  cố định, ta được một hình cầu (Hình 9.34).

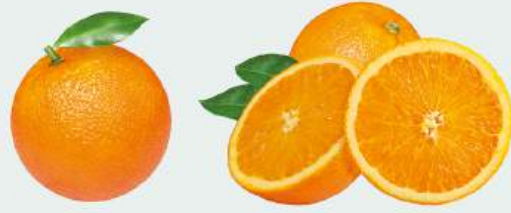


Hình 9.34

- Nửa đường tròn  $AB$  quét nên mặt cầu.
- Điểm  $O$  được gọi là tâm,  $R$  là bán kính của hình cầu hay mặt cầu đó.

## HOẠT ĐỘNG 2

Quan sát Hình 9.35, hãy cho biết khi bóc một quả cam có dạng hình cầu thì mặt cắt của quả cam có dạng hình gì.



Hình 9.35

Ta có kết luận sau:

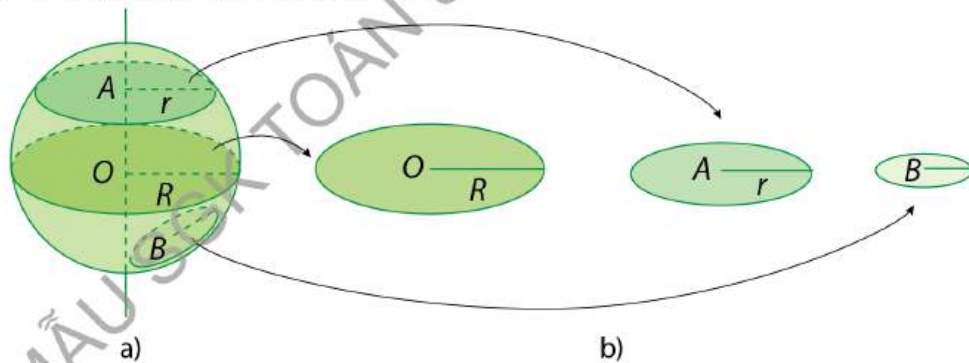


Khi cắt hình cầu bởi một mặt phẳng, ta được một hình tròn.

Khi cắt mặt cầu bởi một mặt phẳng, ta được một đường tròn. Nếu mặt phẳng đi qua tâm của mặt cầu thì đường tròn đó có bán kính  $R$  và được gọi là đường tròn lớn. Nếu mặt phẳng không đi qua tâm của mặt cầu thì đường tròn đó có bán kính bé hơn  $R$ .

### VÍ DỤ 1

Khi cắt hình cầu ở Hình 9.36a bởi các mặt phẳng khác nhau, ta được các đường tròn có bán kính khác nhau như Hình 9.36b.



Hình 9.36

### VÍ DỤ 2

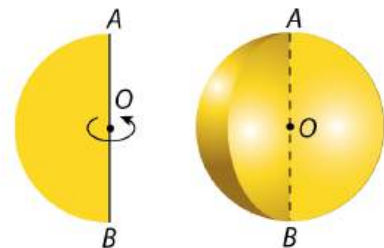
Xác định tâm và bán kính của hình cầu tạo thành khi quay nửa hình tròn đường kính  $AB = 6$  cm quanh  $AB$  cố định.

#### Bài giải

Tâm  $O$  của hình cầu tạo thành là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ .

Bán kính của hình cầu đó là:

$$R = OA = OB = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ (cm)}.$$



Hình 9.37

### VÍ DỤ 3

Tính chu vi đường tròn thu được khi cắt mặt cầu tâm  $O$  bán kính 2,5 cm bởi một mặt phẳng đi qua  $O$ .

#### Bài giải

Khi cắt mặt cầu tâm  $O$  bán kính 2,5 cm bởi mặt phẳng đi qua  $O$ , ta được một đường tròn có bán kính 2,5 cm.

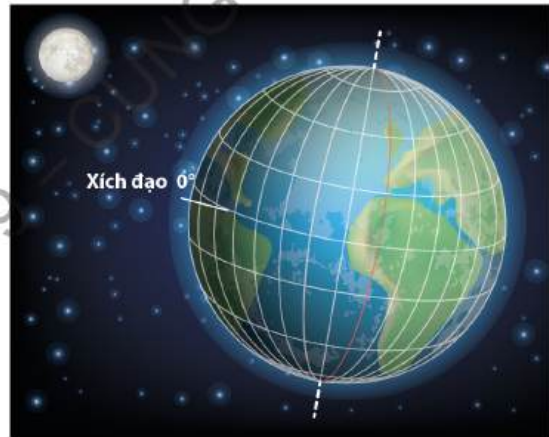
Chu vi đường tròn thu được:  $2\pi \cdot 2,5 = 5\pi$  (cm).

### LUYỆN TẬP 1

Cho hình cầu tâm  $I$  đường kính 1 dm. Khi cắt hình cầu trên bởi một mặt phẳng, ta được một hình tròn có chu vi  $\frac{\pi}{2}$  dm. Mặt phẳng đó có đi qua tâm  $I$  của mặt cầu không? Vì sao?

### VẬN DỤNG 1

Trái Đất được xem như một hình cầu với bán kính khoảng 6 371 km. Nếu coi xích đạo là đường tròn lớn của hình cầu này thì độ dài đường xích đạo là bao nhiêu kilômét?

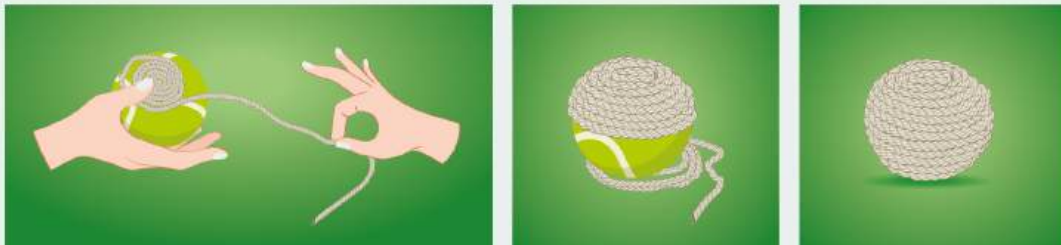


Hình 9.38

## 2 DIỆN TÍCH MẶT CẦU

### HOẠT ĐỘNG 3

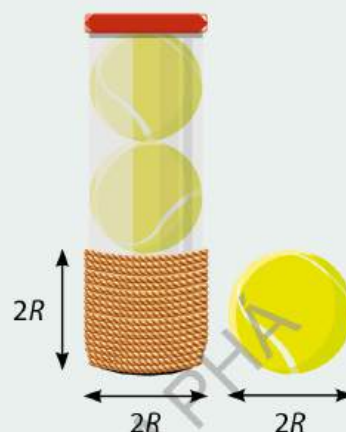
Bạn An dùng một sợi dây dù dài và mỏng cuốn quanh một quả bóng đến khi bọc kín quả bóng đó bằng các vòng cuốn sát nhau và không chồng lên nhau (Hình 9.39).



Hình 9.39

Bạn An cắt sợi dây dù tại điểm kết thúc quá trình cuốn dây quanh quả bóng, rồi lấy đoạn dây này cuốn từng vòng sát nhau quanh hộp hình trụ đựng quả bóng đó (Hình 9.40). Bạn An thấy rằng đoạn dây cuốn quanh hộp đựng bóng tạo thành một hình trụ có đường kính và chiều cao cùng bằng đường kính quả bóng.

- So sánh diện tích bề mặt quả bóng với phần diện tích của hộp đựng bị quấn bởi sợi dây dù.
- Gọi  $R$  là bán kính của quả bóng. Viết công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ do đoạn dây cuốn quanh hộp đựng bóng tạo thành theo  $R$ , từ đó suy ra diện tích bề mặt của quả bóng.



Hình 9.40

Người ta chứng minh được rằng:



Diện tích, kí hiệu là  $S$ , của mặt cầu được tính theo công thức:

$$S = 4\pi R^2 = \pi d^2$$

với  $R$  là bán kính và  $d$  là đường kính của mặt cầu.

#### VÍ DỤ 4

Tính diện tích của một mặt cầu có bán kính bằng 5 cm.

##### Bài giải

Diện tích của mặt cầu:

$$S = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

#### LUYỆN TẬP 2

Một mặt cầu có diện tích là  $36 \text{ cm}^2$ . Hỏi đường kính của mặt cầu này là bao nhiêu centimét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

#### VẬN DỤNG 2

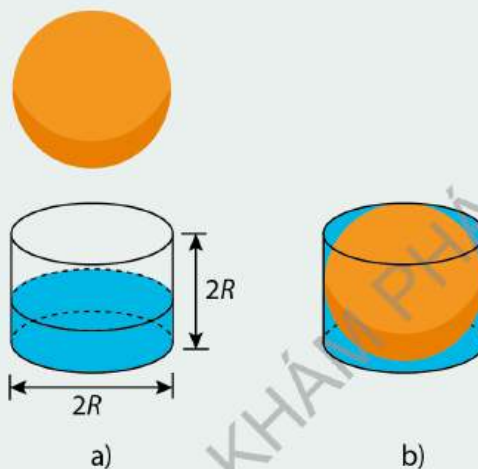
Đại dương bao phủ khoảng 71% bề mặt Trái Đất (nguồn: <https://www.usgs.gov/special-topics/water-science-school/science/>). Hãy ước tính diện tích của đại dương theo kilômét vuông, biết bán kính Trái Đất khoảng 6 371 km (làm tròn kết quả đến hàng triệu).

### 3 THỂ TÍCH HÌNH CẦU

#### HOẠT ĐỘNG 4

Bạn Mai thả từ từ một quả cầu bán kính  $R$  vào một chiếc cốc thủy tinh hình trụ chứa sẵn nước đến  $\frac{1}{3}$  chiều cao cốc (Hình 9.41a) thì thấy nước dâng lên vừa miệng cốc (Hình 9.41b). Dựa vào kết quả thí nghiệm của bạn Mai, viết công thức tính:

- Thể tích của chiếc cốc hình trụ theo  $R$ ;
- Thể tích của quả cầu.



Hình 9.41

Người ta chứng minh được rằng:



Thể tích, kí hiệu là  $V$ , của hình cầu được tính theo công thức:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

với  $R$  là bán kính hình cầu.

#### VÍ DỤ 5

Tính thể tích một quả bóng nhựa có dạng hình cầu với đường kính 10 cm.

##### Bài giải

Bán kính quả bóng nhựa:  $R = \frac{10}{2} = 5$  (cm).

Thể tích quả bóng nhựa:  $V = \frac{4}{3} \pi \cdot 5^3 = \frac{500\pi}{3}$  (cm<sup>3</sup>).

#### LUYỆN TẬP 3

Tính bán kính của một quả địa cầu có thể tích 14 130 cm<sup>3</sup>, lấy  $\pi \approx 3,14$ .



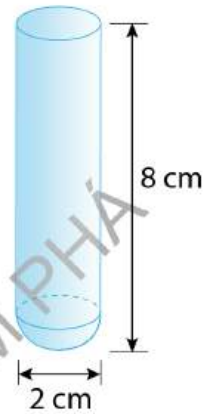
Hình 9.42

### VẬN DỤNG 3

Hãy trả lời câu hỏi ở phần Khởi động.

### VẬN DỤNG 4

Tính diện tích mặt ngoài và thể tích của một ống nghiệm có phần thân hình trụ và đáy là nửa hình cầu với kích thước như Hình 9.43.



Hình 9.43

## 4 TẠO LẬP HÌNH CẦU, MẶT CẦU

### HOẠT ĐỘNG 5

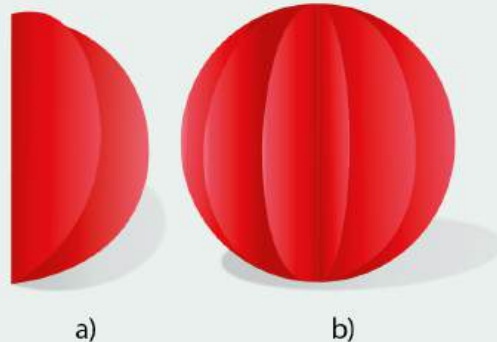
Ta có thể làm một quả cầu để trang trí theo các bước sau:

#### Bước 1

Cắt 16 miếng bìa hình tròn có bán kính 4 cm và gấp đôi lại theo nếp gấp là đường kính bất kì (Hình 9.44a).

#### Bước 2

Dùng keo dán hoặc băng dính dính hai mặt để dán các miếng bìa trên với nhau tạo thành quả cầu (Hình 9.44b).



Hình 9.44

### VẬN DỤNG 5

Người ta dùng các vòng tròn bằng kẽm có bán kính 12,5 cm làm khung cho đèn treo hình cầu (Hình 9.45). Các vòng kẽm đều là các đường tròn lớn của hình cầu này. Tính thể tích của đèn treo.



Hình 9.45

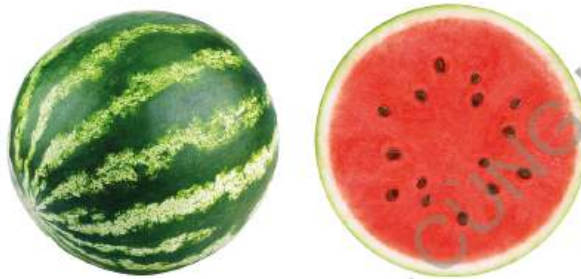
**BÀI TẬP**

9.10. Tìm các số và đơn vị thích hợp ở ô **?** để hoàn thành *Bảng 9.3*.

*Bảng 9.3*

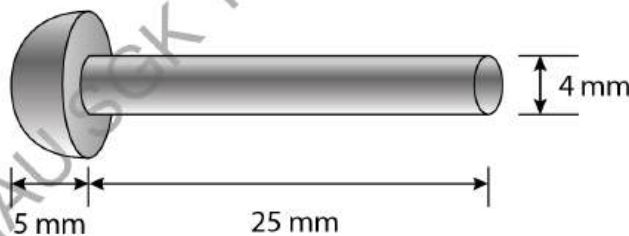
Bán kính hình cầu	4,5 mm	?	?
Diện tích mặt cầu	?	$144\pi \text{ dm}^2$	?
Thể tích hình cầu	?	?	$36\pi \text{ m}^3$

9.11. Một quả dưa hấu có dạng hình cầu với bán kính 12 cm và vỏ dày 1 cm (*Hình 9.46*). Tính diện tích bề mặt quả dưa hấu và thể tích vỏ dưa.



*Hình 9.46*

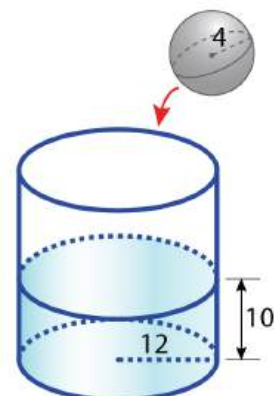
9.12. Tính khối lượng thép cần dùng để sản xuất 1 000 chiếc đinh tán có thân hình trụ và đầu là nửa hình cầu với kích thước như *Hình 9.47*, biết khối lượng riêng của thép là  $7\,850 \text{ kg/m}^3$ .



*Hình 9.47*

9.13. Một chiếc cốc hình trụ có phần đáy bên trong là một hình tròn bán kính bằng 12 cm. Chiều cao của mực nước trong cốc là 10 cm (*Hình 9.48*).

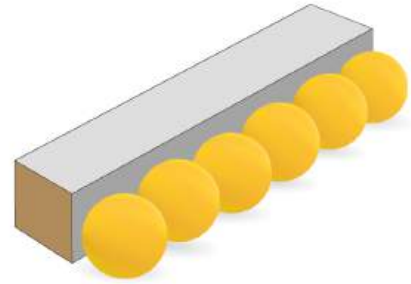
- Tính thể tích nước trong cốc.
- Thả một quả cầu bằng kim loại có bán kính 4 cm vào cốc cho đến khi quả cầu chìm hẳn xuống đáy cốc và mực nước đứng yên. Hỏi mực nước trong cốc tăng thêm bao nhiêu centimét?



*Hình 9.48*

**9.14.** Một công ty thiết kế mẫu hộp làm từ bìa mỏng dạng hình hộp chữ nhật để đóng gói 6 quả bóng bàn có thông số kĩ thuật  $\Phi 40$  (đường kính bóng là 40 mm) (Hình 9.49).

- Tính diện tích xung quanh của hộp, biết rằng đáy hộp là hình vuông cạnh 40 mm và chiều cao của hộp vừa đủ để xếp khít 6 quả bóng bàn.
- Tính thể tích phần không gian trống của hộp khi chứa 6 quả bóng bàn.



Hình 9.49

### ?? EM CÓ BIẾT

Từ thời cổ đại, con người đã có những hiểu biết đáng nể về Trái Đất. Khoảng 500 năm trước Công nguyên, nhiều học giả đã cho rằng Trái Đất có dạng hình cầu. Vào thế kỉ thứ III trước Công nguyên, nhà toán học và triết gia Hy Lạp – Eratosthenes, bằng các phép đo và tính toán của mình đã chỉ ra bán kính Trái Đất khoảng 6 366 km.

(Nguồn: [https://oceanservice.noaa.gov/education/tutorial\\_geodesy/](https://oceanservice.noaa.gov/education/tutorial_geodesy/) và <https://imagine.gsfc.nasa.gov/features/cosmic/>)

Nói đến các nghiên cứu về thiên văn, không thể không nhắc đến Galileo Galilei (1564 – 1642), ông là một nhà toán học, vật lí, thiên văn học người Ý sinh ra tại Pisa. Ông là người cải tiến kính thiên văn, phát hiện bốn vệ tinh lớn nhất của Sao Mộc và quỹ đạo của Sao Thổ. Từ những quan sát của mình, ông là người đưa ra các bằng chứng thuyết phục khẳng định học thuyết của Nicolaus Copernicus, cho rằng Trái Đất và các hành tinh quay quanh Mặt Trời. Điều này đi ngược lại với tư tưởng của Giáo hội Công giáo tại Ý lúc bấy giờ nên ông đã bị đưa ra xét xử trước tòa án Giáo hội và tuyên án dị giáo. Ngày nay, chúng ta biết rằng những lập luận của ông đều xác đáng. Năm 1992, Giáo hoàng John Paul II đã thể hiện sự hối tiếc về bản án của Galileo.

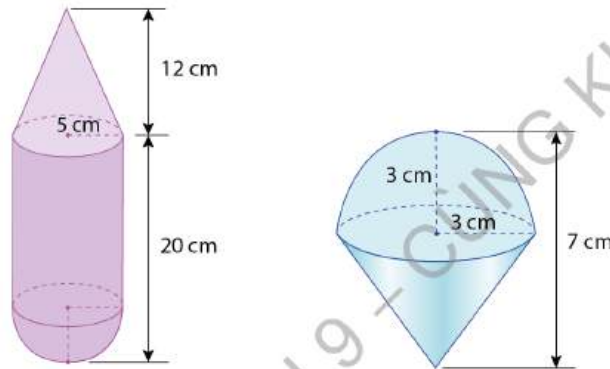
(Nguồn: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC2564400/> và [https://starchild.gsfc.nasa.gov/docs/StarChild/whos\\_who\\_level2/galileo.html](https://starchild.gsfc.nasa.gov/docs/StarChild/whos_who_level2/galileo.html))



BÀI TẬP TỰ LUẬN

- 9.15. a) Diện tích xung quanh của hình nón, hình trụ sẽ thay đổi như thế nào nếu bán kính đáy không đổi còn độ dài đường sinh tăng gấp ba lần?  
 b) Thể tích của hình nón, hình trụ sẽ thay đổi như thế nào nếu bán kính đáy tăng gấp đôi còn chiều cao không đổi?  
 c) Diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu sẽ thay đổi như thế nào nếu bán kính hình cầu giảm một nửa?

9.16. Tính thể tích của mỗi hình ở Hình 9.50.



Hình 9.50

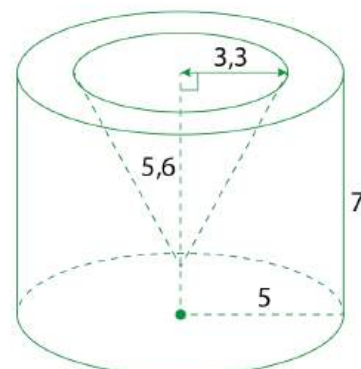
9.17. Người ta xếp 6 lon nước ngọt vừa khí trong một thùng carton có dạng hình hộp chữ nhật như Hình 9.51. Mỗi lon nước ngọt có thể xem là một hình trụ với đường kính 6,4 cm và cao 12 cm.

- a) Tính tổng thể tích của 6 lon nước ngọt.  
 b) Các lon nước ngọt chiếm khoảng bao nhiêu phần trăm không gian trong thùng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Hình 9.51

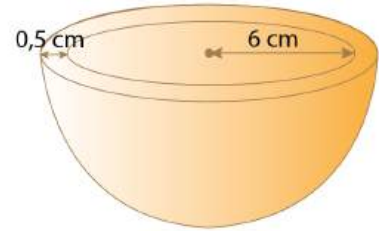
9.18. Từ một khối gỗ hình trụ bán kính đáy 5 cm và cao 7 cm, người ta khoét đi một phần gỗ hình nón có bán kính đáy 3,3 cm và chiều cao 5,6 cm (Hình 9.52). Tính thể tích phần còn lại của khối gỗ.



Hình 9.52

**9.19.** Một cái gáo nước có dạng nửa hình cầu làm từ đất sét có kích thước như Hình 9.53.

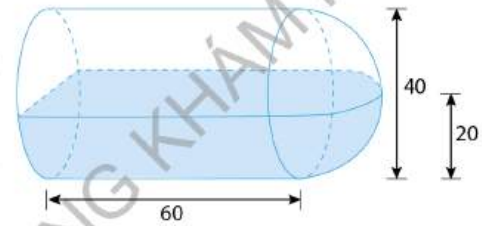
- Hỏi gáo nước này chứa được tối đa bao nhiêu mililit nước?
- Người ta muốn tráng men toàn bộ cái gáo nước (cả mặt trong, mặt ngoài và miệng gáo nước). Tính diện tích cần tráng men.



Hình 9.53

**9.20.** Một bình nước có dạng hình trụ kết hợp với nửa hình cầu có kích thước như Hình 9.54. Khi bình nước nằm ngang, mực nước trong bình cao 20 cm.

- Tính thể tích nước trong bình.
- Nếu đặt bình nước thẳng đứng sao cho phần nửa hình cầu ở trên thì chiều cao mực nước trong bình là bao nhiêu?



Hình 9.54

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**9.21.** Tính diện tích xung quanh của hình trụ tạo thành khi quay hình chữ nhật  $ABCD$  có  $BC = 3$  cm,  $CD = 4$  cm quanh cạnh  $AB$ .

- |                              |                              |
|------------------------------|------------------------------|
| A. $12\pi$ cm <sup>2</sup> . | B. $21\pi$ cm <sup>2</sup> . |
| C. $24\pi$ cm <sup>2</sup> . | D. $42\pi$ cm <sup>2</sup> . |

**9.22.** Tính bán kính đáy của hình nón có chiều cao 12 cm, đường sinh dài 13 cm.

- |           |            |
|-----------|------------|
| A. 5 cm.  | B. 6 cm.   |
| C. 10 cm. | D. 6,5 cm. |

**9.23.** Khi cắt mặt cầu bán kính  $R$  bởi một mặt phẳng không đi qua tâm của mặt cầu, ta được

- Một tam giác.
- Một hình vuông.
- Một hình tròn có bán kính  $R$ .
- Một hình tròn có bán kính bé hơn  $R$ .

**9.24.** Thể tích của hình cầu có bán kính 6 dm bằng

- |                            |                               |
|----------------------------|-------------------------------|
| A. $288$ dm <sup>3</sup> . | B. $288\pi$ dm <sup>3</sup> . |
| C. $144$ dm <sup>3</sup> . | D. $144\pi$ dm <sup>3</sup> . |

# Phần

# THỐNG KÊ & XÁC SUẤT

## Chương 10

## Một số yếu tố về thống kê và xác suất



Trong thời đại mà khoa học, công nghệ phát triển như ngày nay, khi thu thập dữ liệu để tìm hiểu một vấn đề nào đó, ta có thể nhận được lượng thông tin "khổng lồ". Kiến thức về Thống kê và Xác suất sẽ rất hữu ích cho chúng ta trong việc tổng hợp, trình bày, khai thác các thông tin này để từ đó có thể giải thích một cách khoa học các sự kiện, xem xét tính hợp lí của các nhận định, các dự đoán, hay đưa ra giải pháp cho một vấn đề,...

### Cùng tìm hiểu

- ▶ Vấn đề mô tả, biểu diễn dữ liệu: lí giải và biểu diễn dữ liệu ở những dạng thích hợp;
- ▶ Vấn đề phân tích dữ liệu với các bảng và biểu đồ tần số, bảng và biểu đồ tần số tương đối của các mẫu số liệu ghép nhóm hoặc không;
- ▶ Vấn đề tính xác suất của một biến cố: phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu, xác suất của biến cố trong một số mô hình xác suất đơn giản.



Sau 4 tuần phát sóng một chương trình giải trí mới, đài truyền hình X thăm dò ý kiến khán giả để quyết định có tiếp tục duy trì nó hay không. Họ nên trình bày dữ liệu như thế nào để thuận tiện cho việc đưa ra quyết định?

## 1 MÔ TẢ VÀ BIỂU DIỄN DỮ LIỆU BẰNG BẢNG

### HOẠT ĐỘNG 1

Về diễn biến của dịch bệnh sốt xuất huyết trong 8 tháng đầu năm 2023, thông tin bạn Khang thu được cho thấy số ca mắc tập trung chủ yếu tại Hà Nội (5 190 ca) và một số tỉnh thành thuộc khu vực miền Trung, miền Nam như Thành phố Hồ Chí Minh (8 628 ca), An Giang (3 161 ca), Đồng Nai (3 114 ca), Bình Dương (2 482 ca), Bình Thuận (3 118 ca), Sóc Trăng (2 481 ca) (nguồn: [https://moh.gov.vn/tin-lien-quan/-/asset\\_publisher/vjYyM7O9aWnX/content/hon-66-000-ca-mac-14-benh-nhan-tu-vong-do-sot-xuat-huyet-tuyp-virus-nao-gay-benh-nay-nam-nay-](https://moh.gov.vn/tin-lien-quan/-/asset_publisher/vjYyM7O9aWnX/content/hon-66-000-ca-mac-14-benh-nhan-tu-vong-do-sot-xuat-huyet-tuyp-virus-nao-gay-benh-nay-nam-nay-)).

Lập bảng biểu diễn dữ liệu mà bạn Khang thu thập được.

Từ bảng đã lập, hãy sắp xếp các địa phương theo số ca mắc từ nhiều đến ít.

Bảng thống kê (gọi tắt là bảng) giúp ta biểu diễn dữ liệu một cách gọn gàng và thuận tiện cho việc phân tích dữ liệu.

Nếu chỉ cần phân tích một đặc tính (còn gọi là tiêu chí) của dữ liệu, ta dùng bảng có 2 dòng (hoặc 2 cột), gọi là *bảng đơn*. Nếu cần phân tích nhiều đặc tính của dữ liệu, ta phải dùng những bảng nhiều hơn 2 dòng và nhiều hơn 2 cột, gọi là *bảng hai chiều*.

### VÍ DỤ 1

Tiếp tục tìm hiểu về dịch sốt xuất huyết ở địa phương X, nơi mình sinh sống, bạn Khang thu được dữ liệu sau: Quý I có 415 ca mắc, trong đó có 220 trẻ dưới 15 tuổi. Số ca mắc ở quý II là 530, với 285 trẻ dưới 15 tuổi. Số ca mắc ở quý III là 580, trong đó có 327 trẻ dưới 15 tuổi.

Hãy dùng một bảng thống kê để biểu diễn dữ liệu mà bạn Khang thu thập được về tình hình dịch bệnh sốt xuất huyết ở địa phương bạn Khang sinh sống.

### Bài giải

Dữ liệu bạn Khang thu thập được có hai đặc tính – số ca mắc phân theo lứa tuổi và theo thời gian nên ta cần lập bảng hai chiều (Bảng 10.1) để biểu diễn.

Bảng 10.1. Số ca mắc bệnh sốt xuất huyết ở địa phương X trong 3 quý đầu năm 2023

Số ca \ Quý	I	II	III
Dưới 15 tuổi	220	285	327
Tổng số	415	530	580

### LUYỆN TẬP 1

Để chuẩn bị cho cuộc triển lãm mỹ thuật đầu xuân, ban tổ chức căn cứ vào thông tin đăng kí của các tác giả và thống kê được những dữ liệu sau:

- Về thể loại tác phẩm, có:
  - 65 tranh sơn mài;
  - 40 tranh lụa;
  - 65 tranh thủy mặc;
  - 30 tranh khảm màu;
  - 42 tranh khắc (gỗ, đồng);
  - 18 tượng (đá, thạch cao).
- Về tác giả, có:
  - 6 tác giả nam và 4 tác giả nữ đăng kí tham gia triển lãm tranh sơn mài;
  - 4 tác giả nam và 5 tác giả nữ đăng kí tham gia triển lãm tranh lụa;
  - 5 tác giả nam và 4 tác giả nữ đăng kí tham gia triển lãm tranh thủy mặc;
  - 4 tác giả nam và 4 tác giả nữ đăng kí tham gia triển lãm tranh khảm màu;
  - 6 tác giả nam và 3 tác giả nữ đăng kí tham gia triển lãm tranh khắc;
  - 4 tác giả nam đăng kí tham gia triển lãm tượng.

Em hãy sử dụng hai bảng thống kê để trình bày hai loại dữ liệu do ban tổ chức triển lãm đưa ra.

## 2 MÔ TẢ VÀ BIỂU DIỄN DỮ LIỆU BẰNG BIỂU ĐỒ

So với bảng thống kê, nhiều khi ta có thể nắm bắt thông tin nhanh chóng hơn qua quan sát một biểu đồ.

Cùng một dãy dữ liệu có thể được biểu diễn bằng những biểu đồ khác nhau (như biểu đồ tranh, biểu đồ cột, cột kép, biểu đồ hình quạt tròn, biểu đồ đoạn thẳng). Mỗi loại biểu đồ đều có những ưu điểm và hạn chế riêng của nó nên trong nhiều trường hợp ta phải chuyển từ dạng biểu diễn này sang dạng biểu diễn kia. Để chuyển như vậy, ta cần lựa chọn dạng biểu diễn phù hợp với dữ liệu và mục đích phân tích dữ liệu.

## HOẠT ĐỘNG 2

Tham khảo website của Tổng cục Thống kê (<https://www.gso.gov.vn/>), bạn Phong lập được bảng dưới đây (Bảng 10.2) về diện tích trồng lúa hằng năm trên toàn quốc giai đoạn 2017 – 2021. Trong bảng, bạn làm tròn số liệu thu được đến hàng đơn vị và phân theo ba vùng: đồng bằng sông Hồng, đồng bằng sông Cửu Long và các tỉnh còn lại.

Bảng 10.2. Diện tích trồng lúa hằng năm (đơn vị: nghìn ha)

Diện tích lúa theo vùng	Năm				
	2017	2018	2019	2020	2021
Đồng bằng sông Hồng	1 071	1 040	1 012	983	970
Đồng bằng sông Cửu Long	4 185	4 107	4 069	3 964	3 890
Các tỉnh còn lại	2 519	2 423	2 389	2 333	2 379
Toàn quốc	7 775	7 570	7 470	7 280	7 239

- a) Có nên lựa chọn biểu đồ tranh để biểu diễn số liệu ở Bảng 10.2 không? Vì sao?  
b) Đối với mỗi mục đích sau, bạn Phong nên chọn loại biểu đồ nào để biểu diễn dữ liệu? Vì sao?

- So sánh diện tích trồng lúa hằng năm (giai đoạn 2017 – 2021) của vùng đồng bằng sông Hồng;
- So sánh diện tích trồng lúa ở vùng đồng bằng sông Hồng và vùng đồng bằng sông Cửu Long trong từng năm, giai đoạn 2017 – 2021;
- Phân tích xu hướng biến đổi diện tích trồng lúa của vùng đồng bằng sông Cửu Long qua các năm thuộc giai đoạn 2017 – 2021;
- So sánh tỉ số diện tích trồng lúa của mỗi vùng so với diện tích trồng lúa toàn quốc năm 2021.

- Biểu đồ tranh chỉ phù hợp với những dãy số liệu đơn giản, không quá lớn, được biểu diễn bằng các bảng đơn.
- Đối với những dãy số liệu phức tạp hơn (chẳng hạn như có số thập phân hay số liệu lớn) thì biểu đồ cột thuận tiện cho việc so sánh các số liệu.
- Nếu cần so sánh từng cặp số liệu (thường được thống kê bằng một bảng hai chiều hoặc bằng hai bảng đơn) thì biểu đồ cột kép là phương tiện biểu diễn phù hợp.
- Để biểu thị tỉ lệ số liệu về từng bộ phận so với số liệu về toàn thể thì ta dùng biểu đồ hình quạt tròn.
- Nếu muốn biểu thị sự thay đổi số lượng của một đối tượng theo thời gian thì ta dùng biểu đồ đoạn thẳng. Với loại biểu đồ này, trong một số trường hợp, ta còn có thể đưa ra dự đoán sự thay đổi của số liệu trong tương lai gần.

## VÍ DỤ 2

Trường Trung học cơ sở X thống kê trong *Bảng 10.3* số học sinh của trường đạt trên 7 điểm các môn Toán, Ngữ văn, Tiếng Anh trong kì thi tuyển sinh lớp 10 hằng năm ở địa phương.

*Bảng 10.3. Số học sinh đạt trên 7 điểm*

Số học sinh tính theo môn	Năm				
	2018	2019	2020	2021	2022
Toán	40	28	35	56	62
Ngữ văn	25	28	30	42	68
Tiếng Anh	40	25	46	40	54

Đối với mỗi mục đích phân tích dữ liệu dưới đây, hãy đề xuất loại biểu đồ phù hợp nhất. Giải thích sự lựa chọn đó và vẽ biểu đồ.

- So sánh số học sinh đạt trên 7 điểm ở các môn Toán và Ngữ văn mỗi năm, giai đoạn 2018 – 2022;
- So sánh số học sinh đạt trên 7 điểm ở từng môn vào năm 2022;
- Phân tích xu hướng biến đổi số học sinh đạt trên 7 điểm môn Tiếng Anh qua các năm, giai đoạn 2018 – 2022.

### Bài giải

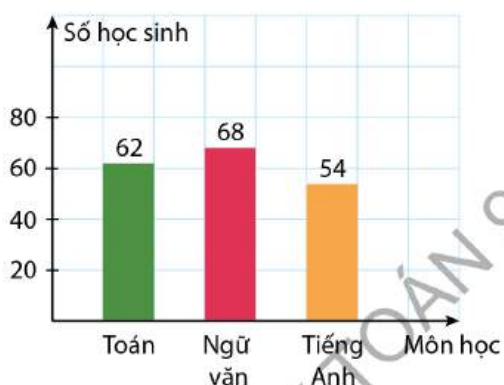
- Ở đây ta cần so sánh từng cặp số liệu (số học sinh đạt trên 7 điểm môn Toán và số học sinh đạt trên 7 điểm môn Ngữ văn) theo từng năm. Như vậy biểu đồ phải thể hiện được hai đặc tính của số liệu là "năm" và "số học sinh đạt trên 7 điểm" mỗi môn trong từng năm. Dữ liệu đó được trình bày bằng một bảng hai chiều (thu được từ *Bảng 10.3* sau khi bỏ đi dòng cuối). Trong trường hợp này, biểu đồ cột kép là sự lựa chọn phù hợp nhất (*Hình 10.1a*).
- Do thời gian đã cố định là năm 2022 nên để so sánh các số liệu trong năm đó thì ta chỉ cần thể hiện một đặc tính (số học sinh đạt trên 7 điểm ở từng môn). Đối với trường hợp chỉ mô tả một đặc tính của dữ liệu thì biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn đều có thể sử dụng. Tuy nhiên vì mục đích ở đây không phải là so sánh tỉ lệ giữa bộ phận với tổng thể nên biểu đồ cột là sự lựa chọn phù hợp nhất (*Hình 10.1b*).
- Xu hướng thay đổi số liệu qua các mốc thời gian sẽ được thể hiện rõ nhất trên biểu đồ đoạn thẳng. Nhìn vào biểu đồ, ta thấy ngay số học sinh đạt loại giỏi môn Tiếng Anh tăng – giảm qua các năm ra sao (*Hình 10.1c*).

### Số học sinh đạt trên 7 điểm môn Toán và Ngữ văn



Hình 10.1a

### Số học sinh đạt trên 7 điểm năm 2022



Hình 10.1b

### Số học sinh đạt trên 7 điểm môn Tiếng Anh

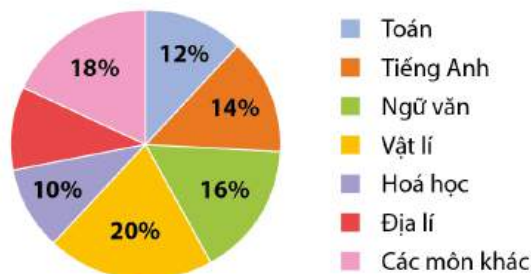


Hình 10.1c

## LUYỆN TẬP 2

Biểu đồ ở Hình 10.2 biểu diễn kết quả điều tra 150 học sinh lớp 9 về môn học mà mỗi bạn yêu thích nhất.

### Tỉ lệ học sinh thích mỗi môn học



Hình 10.2

- Tính số liệu còn thiếu trong biểu đồ.
- Lập bảng thống kê số học sinh thích mỗi môn học.
- Vẽ một biểu đồ biểu diễn số liệu trong bảng lập được ở câu b. Căn cứ vào biểu đồ đó, em có nhận xét gì về sự chênh lệch giữa các nhóm học sinh thích mỗi môn học?

### Lưu ý:

Ngoài việc chọn dạng biểu diễn phù hợp, ta phải chú ý đến tính hợp lí của dữ liệu. Nhiều yếu tố cần được quan tâm, chẳng hạn như:

- Dữ liệu có đúng định dạng không? Có phù hợp với thực tế không? Có sai sót gì không? Biểu đồ có thể hiện chính xác dữ liệu không?
- Dữ liệu có đại diện được cho tổng thể những đối tượng mà ta quan tâm hay không? Kết luận đưa ra từ bảng hay biểu đồ có hợp lí hay không?

### VÍ DỤ 3

Bạn Hoàng muốn tìm hiểu chiều cao của học sinh lớp 9 của trường. Bạn điều tra chiều cao của học sinh tổ 1 lớp 9A và ghi lại kết quả trong bảng dưới đây:

Bảng 10.4. Chiều cao của các bạn trong tổ

Số thứ tự	Chiều cao (cm)	Số thứ tự	Chiều cao (cm)
1	150	5	1,52
2	145	6	152
3	152	7	150
4	Thấp	8	148

Dựa vào bảng dữ liệu đó, bạn Hoàng kết luận: "Chiều cao của học sinh lớp 9 không vượt quá 1,52 m."

Em có nhận xét gì về bảng dữ liệu và kết luận của bạn Hoàng?

### Bài giải

Bảng dữ liệu có hai điểm bất hợp lí:

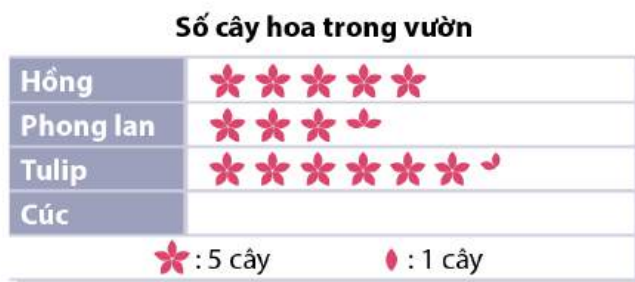
- Số đo chiều cao là dữ liệu định lượng nhưng ô ở dòng thứ năm, cột thứ hai lại ghi "Thấp" (là dữ liệu định tính);
- Số 1,52 ở dòng thứ hai, cột thứ tư không phù hợp với chiều cao thực tế của học sinh lớp 9 (có thể do sai sót lúc ghi chép).

Kết luận của bạn Hoàng không hợp lí, vì:

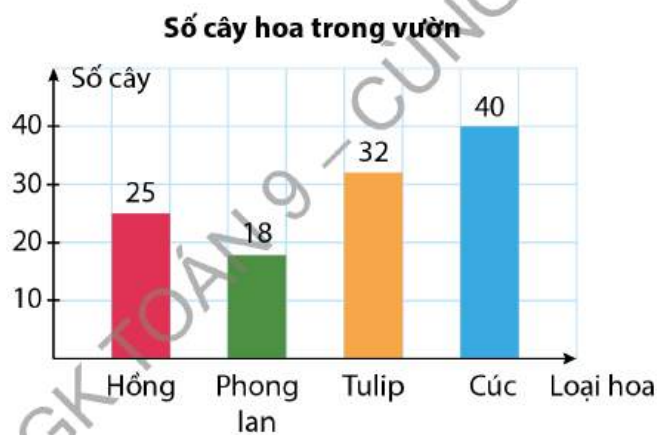
- Bảng dữ liệu có hai sai sót nên không đủ cơ sở để đưa ra khẳng định về chiều cao tối đa của 8 học sinh tổ 1;
- Đặc biệt, một tổ 8 bạn không đại diện được cho toàn thể học sinh lớp 9 của trường nên không thể lấy làm căn cứ để đưa ra kết luận chung cho học sinh toàn khối 9.

### LUYỆN TẬP 3

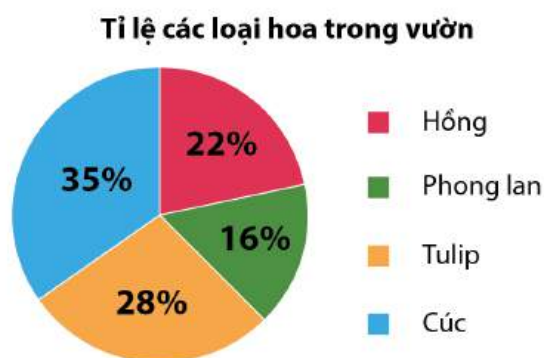
Bác Bảy thống kê số cây mỗi loại hoa trong vườn bằng biểu đồ tranh dưới đây. Biểu đồ chưa hoàn thiện thì bác phải dùng để ra vườn tưới nước cho hoa.



Được bác Bảy cho biết vườn hoa có 114 cây, bạn Mai căn cứ vào biểu đồ tranh bác đang vẽ dở để tính số cây cúc, sau đó dùng một biểu đồ cột (Hình 10.3a) để biểu diễn số cây hoa mỗi loại và dùng một biểu đồ hình quạt tròn (Hình 10.3b) để biểu diễn tỉ lệ mỗi loại hoa trong vườn (các tỉ lệ phần trăm đã được làm tròn đến hàng đơn vị).



Hình 10.3a



Hình 10.3b

Em hãy kiểm tra xem biểu đồ bạn vẽ có chính xác không. Giải thích vì sao chính xác hoặc vì sao không.

## VẬN DỤNG

Trở lại với tình huống nêu ở đầu bài.

Đài truyền hình đã phát phiếu điều tra 1 000 khán giả. Dữ liệu thu được là:

- Số khán giả rất thích chương trình: 50 người từ 18 đến 29 tuổi, 80 người từ 30 đến 50 tuổi, 50 người trên 50 tuổi;
- Số khán giả thích chương trình: 190 người từ 19 đến 29 tuổi, 230 người từ 30 đến 50 tuổi, 210 người trên 50 tuổi;
- Số khán giả không thích chương trình: 30 người từ 19 đến 29 tuổi, 60 người từ 30 đến 50 tuổi, 100 người trên 50 tuổi.

Hãy dùng một bảng để biểu diễn dữ liệu gọn hơn và dễ phân tích hơn.

Anh Tùng – người thiết kế chương trình – muốn bảo vệ việc duy trì nó theo hướng cải tiến để thu hút khán giả nhiều hơn. Anh ấy nên chọn cách biểu diễn dữ liệu nào và sử dụng nó trong lập luận ra sao để thuyết phục lãnh đạo đài truyền hình?

## BÀI TẬP

**10.1.** Người ta đã phỏng vấn 40 diễn viên múa ba-lê về một vở diễn mà họ yêu thích nhất.

Kết quả thu được là:

- Hai vở Hồ thiên nga và Người đẹp ngủ trong rừng có số diễn viên thích bằng nhau.
  - 20% diễn viên được hỏi thích vở Romeo và Juliet.
  - 6 diễn viên thích vở Nàng tiên gió.
- a) Lập bảng thống kê biểu diễn số lượng diễn viên yêu thích mỗi vở diễn.
  - b) Vẽ biểu đồ cột biểu diễn số liệu thu được trong bảng lập ở câu a.
  - c) Có nên dùng biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn số liệu trong bảng đó không? Vì sao?

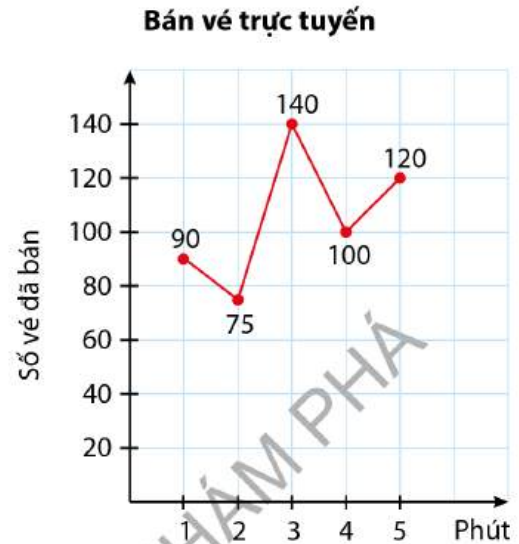
**10.2.** Bảng dưới thống kê số học sinh khối lớp 9 của trường đăng kí học các môn thể thao tự chọn:

Môn thể thao	Số học sinh		
	Nam	Nữ	Tổng số
Bơi lội	55	65	120
Cầu lông	35	25	60
Bóng chuyền	54	36	90
Bóng đá	52	8	60

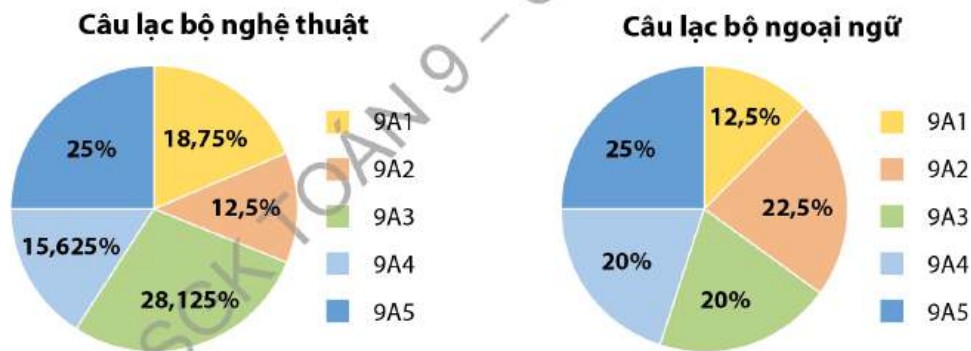
- a) Vẽ một biểu đồ biểu diễn số liệu ở cột thứ tư của bảng. Từ biểu đồ đã vẽ, có thể đưa ra nhận xét gì về số học sinh đăng kí các môn thể thao?
- b) Vẽ một biểu đồ biểu diễn dữ liệu ở hai cột thứ hai và thứ ba của bảng. Dùng biểu đồ đã vẽ để nhận xét về sự chênh lệch giữa số học sinh nam và nữ đăng kí mỗi môn thể thao.

**10.3.** Ban tổ chức thông báo bán vé trên mạng cho buổi biểu diễn của một nhóm ngôi sao ca nhạc. Biểu đồ bên biểu diễn số lượng vé bán ra trong 5 phút đầu tiên (theo từng phút) kể từ khi bắt đầu bán.

- Số vé bán được nhiều nhất vào thời điểm nào?
- Số vé bán được ít nhất vào thời điểm nào?
- Chọn và vẽ một biểu đồ khác để biểu diễn dữ liệu đã cho trên biểu đồ đoạn thẳng. Lí giải sự lựa chọn và cách vẽ của em.



**10.4.** Khối lớp 9 có 64 bạn tham gia câu lạc bộ nghệ thuật và 80 bạn tham gia câu lạc bộ ngoại ngữ do trường tổ chức. Tỷ lệ học sinh các lớp trong mỗi câu lạc bộ được biểu diễn bằng hai biểu đồ hình quạt tròn dưới đây:



- Quan sát biểu đồ, bạn Hoa nói: "Trong lớp 9A5, số học sinh tham gia câu lạc bộ nghệ thuật bằng số học sinh tham gia câu lạc bộ ngoại ngữ". Em có đồng ý với ý kiến của bạn Hoa không? Vì sao?
- Tính số học sinh mỗi lớp trong từng câu lạc bộ và trình bày kết quả trong một bảng theo mẫu dưới đây:

Câu lạc bộ \ Lớp	Lớp				
	9A1	9A2	9A3	9A4	9A5
<b>Nghệ thuật</b>	?	?	?	?	?
<b>Ngoại ngữ</b>	?	?	?	?	?

- Chọn và vẽ loại biểu đồ phù hợp để biểu diễn bảng dữ liệu lập được ở câu b sao cho dễ quan sát trên biểu đồ số lượng học sinh chênh lệch giữa hai câu lạc bộ trong mỗi lớp.

## Bài 2

# TẦN SỐ

Từ khoá: tần số của một giá trị, bảng tần số, biểu đồ tần số.



Bác Hải muốn nghiên cứu tác dụng của loại phân hữu cơ X đối với cây đậu Hà Lan. Bác chia khu vườn nhỏ thành hai lô và trồng nhiều đậu Hà Lan trên mỗi lô. Cây ở cả hai lô đều được chăm sóc tương tự như nhau, ngoại trừ việc phân bón hữu cơ X chỉ được sử dụng cho lô A. Đến mùa thu hoạch, bác Hải lấy ngẫu nhiên từ mỗi lô 150 quả được hái vào cùng một lúc và đếm số hạt đậu trong mỗi quả rồi ghi lại như sau:

Lô A: 5 4 5 7 6 5 5 ...

Lô B: 4 6 7 6 4 5 6 ...

Bác Hải nên biểu diễn dữ liệu thu được như thế nào để có thể đánh giá hiệu quả của loại phân bón hữu cơ X?



### 1 TẦN SỐ. BẢNG TẦN SỐ

#### HOẠT ĐỘNG 1

Kết quả điều tra cân nặng của một số học sinh lớp 9 được ghi lại trong bảng sau:

Bảng 10.5. Cân nặng của một số học sinh lớp 9

Cân nặng (kg)	47	48	49	50	52
Số học sinh	2	7	4	6	1

Quan sát *Bảng 10.5* và cho biết:

- Số đo cân nặng của các học sinh được điều tra có những giá trị nào?
- Bao nhiêu học sinh cân nặng 47 kg? Bao nhiêu học sinh cân nặng 48 kg?
- Tổng số học sinh được điều tra là bao nhiêu? Giải thích cách tìm kết quả.

Quan sát *Bảng 10.5*, ta thấy: Dòng thứ nhất của bảng liệt kê các giá trị là số đo cân nặng của học sinh. Dòng thứ hai của bảng cho biết ứng với mỗi giá trị có bao nhiêu học sinh. Chẳng hạn, chỉ có 1 học sinh cân nặng 52 kg, có 6 học sinh cân nặng 50 kg. Số 1 được gọi là tần số của giá trị 52, số 6 được gọi là tần số của giá trị 50. Tổng các số ở dòng thứ hai bằng 20, cho biết số lượng học sinh được điều tra.

Tập hợp các dữ liệu thu thập được khi điều tra thống kê về một dấu hiệu nào đó được gọi là *mẫu dữ liệu*. Số giá trị (có thể lặp lại) của mẫu dữ liệu được gọi là *kích thước mẫu* (hay cỡ mẫu).



- Số lần xuất hiện một giá trị trong mẫu dữ liệu của dấu hiệu điều tra được gọi là *tần số của giá trị* đó.
- *Bảng tần số* là bảng biểu diễn dữ liệu, trong đó:
  - Dòng (cột) thứ nhất ghi các giá trị khác nhau của dấu hiệu điều tra;
  - Dòng (cột) thứ hai ghi tần số của giá trị tương ứng ở dòng (cột) thứ nhất.

### Lưu ý:

Trong bảng tần số với dữ liệu là số, người ta thường sắp xếp các giá trị từ nhỏ đến lớn (hoặc từ lớn đến nhỏ) và viết thêm tổng các tần số (tổng đó chính là kích thước mẫu).

## HOẠT ĐỘNG 2

Để quyết định định mức năng suất và chế độ khen thưởng, lãnh đạo nhà máy theo dõi thời gian hoàn thành một sản phẩm của một số công nhân và thống kê kết quả điều tra trong bảng sau:

Bảng 10.6. Thời gian hoàn thành một sản phẩm của một số công nhân

Thời gian (phút)	38	42	43	44	45	52	55	Tổng
Tần số	5	20	40	57	30	5	3	$N = 160$

- Đa số công nhân hoàn thành sản phẩm với thời gian bao nhiêu phút?
- Nhà máy nên đề ra định mức thời gian hoàn thành sản phẩm trong khoảng bao nhiêu phút? Để xét khen thưởng, nhà máy nên đặt điều kiện thời gian hoàn thành sản phẩm là bao nhiêu phút?

### Nhận xét: Ý nghĩa và vai trò của tần số

Tần số cho ta biết mỗi giá trị xuất hiện nhiều hay ít trong mẫu. Bảng tần số biểu diễn dữ liệu gọn gàng và thuận tiện cho việc so sánh, xác định những giá trị phổ biến hoặc rất ít xuất hiện để từ đó ta có thể đưa ra kết luận hợp lí.

### VÍ DỤ 1

Công ty giống cây trồng đang nghiên cứu một giống lúa mới. Chỉ tiêu đặt ra là năng suất phải đạt tối thiểu 60 tạ/ha. Sau một vụ, thông qua báo cáo của từng địa phương tham gia trồng thử nghiệm giống lúa mới, công ty thu thập được bảng số liệu sau:

Bảng 10.7a. Năng suất lúa (tạ/ha)

60	54	61	62	58	61	62	60	61	60
61	58	61	60	58	60	60	61	60	62
54	58	60	61	61	60	61	61	62	61

- a) Hãy lập bảng tần số năng suất lúa của các địa phương.  
 b) Công ty nên triển khai trồng đại trà giống lúa mới này ở bao nhiêu địa phương đã tham gia trồng thử nghiệm?

### Bài giải

- a) Để lập bảng tần số, ta thực hiện các bước sau:
- Xác định các giá trị của dấu hiệu điều tra:  
 Trong *Bảng 10.7a*, ta thấy có 5 giá trị khác nhau là 54, 58, 60, 61, 62. Đây chính là 5 giá trị của dấu hiệu điều tra.
  - Xác định tần số của mỗi giá trị:  
 Đếm số lần xuất hiện giá trị 54 trong *Bảng 10.7a*, ta có tần số của giá trị 54 là 2. Đếm số lần xuất hiện giá trị 58 trong *Bảng 10.7a*, ta có tần số của giá trị này là 4. Tương tự, ta xác định được tần số của các giá trị 60, 61 và 62 tương ứng là 9, 11 và 4.
  - Lập bảng tần số:  
 Bảng có hai dòng. Dòng thứ nhất dành để ghi 5 giá trị của dấu hiệu điều tra. Như vậy trong bảng phải có 5 cột để ghi 5 giá trị. Ngoài ra, còn phải cộng thêm 1 cột phía trước để ghi tiêu đề "năng suất" (dấu hiệu điều tra) và 1 cột phía sau để ghi tổng các tần số. Dòng thứ hai ghi tần số tương ứng của các giá trị. Vậy ta có bảng tần số dưới đây:

*Bảng 10.7b. Năng suất lúa của các địa phương trồng thử nghiệm*

Năng suất (tạ/ha)	54	58	60	61	62	Tổng
Tần số	2	4	9	11	4	$N = 30$

- b) Bảng tần số cho thấy năng suất tập trung ở mức 60 và 61 (tạ/ha). Nếu tính năng suất tối thiểu là 60 (tạ/ha) thì có 24 (trên 30) địa phương đạt được. Như thế, công ty có thể triển khai trồng đại trà giống lúa mới ở 24 địa phương này.

### LUYỆN TẬP 1

Tổ dân phố điều tra diện tích nhà ở (đơn vị:  $m^2$ ) của một số hộ gia đình và thống kê trong bảng sau:

*Bảng 10.8. Diện tích nhà ở của một số hộ dân*

180	140	120	160	150	80	120	150
160	120	80	120	80	140	140	150
120	80	150	150	120	140	150	160

- a) Lập bảng tần số diện tích nhà ở của các hộ dân được điều tra.  
 b) Từ bảng đã lập, cho biết: Diện tích nhà ở nhỏ nhất và lớn nhất của các hộ dân là bao nhiêu? Bao nhiêu gia đình có diện tích nhỏ nhất? Diện tích nào chiếm số đông nhất trong các hộ gia đình?

## 2 BIỂU ĐỒ TẦN SỐ

### HOẠT ĐỘNG 3

Bảng dưới biểu diễn kết quả điều tra của phường An Bình về số người trong độ tuổi lao động có trình độ đại học:

Bảng 10.9. Số lao động độ tuổi 20 – 60 có trình độ đại học

Năm	2016	2017	2018	2019	2020	Tổng
Tần số	21	30	25	42	62	$N = 180$

Đối với mỗi câu hỏi sau, hãy vẽ loại biểu đồ phù hợp thể hiện rõ câu trả lời:

- Số người lao động đạt trình độ đại học của phường An Bình nhiều nhất vào năm nào?
- Số người lao động đạt trình độ đại học biến đổi theo xu hướng nào qua các năm?



Bảng tần số có thể được biểu thị bởi biểu đồ cột hoặc biểu đồ đoạn thẳng. Các biểu đồ này được gọi là *biểu đồ tần số dạng cột* và *biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng*.

### VÍ DỤ 2

Một công ty xuất khẩu các mặt hàng nông hải sản thống kê lại trong bảng sau số đơn đặt hàng trong mỗi năm thuộc giai đoạn 2018 – 2022:

Bảng 10.10. Số đơn hàng mỗi năm

Năm	2018	2019	2020	2021	2022	Tổng
Tần số	16	26	20	6	12	$N = 80$

- Hãy chọn loại biểu đồ thuận tiện cho việc so sánh số đơn đặt hàng của các năm. Vẽ biểu đồ đó. Số đơn đặt hàng tập trung nhiều nhất vào năm nào? Số đơn đặt hàng của năm nào ít nhất?
- Hãy chọn loại biểu đồ thể hiện rõ xu hướng thay đổi số đơn hàng qua các năm. Vẽ biểu đồ đó. Dựa vào biểu đồ này, cho biết vào những năm nào số đơn đặt hàng giảm sút so với năm trước đó? Năm nào giảm nhiều nhất?

### Bài giải

- Để so sánh số đơn hàng trong các năm thì biểu đồ tần số dạng cột là loại biểu đồ phù hợp. Biểu đồ được vẽ ở Hình 10.4a, trong đó trục ngang biểu thị các năm và trục đứng biểu thị tần số ứng với mỗi năm.

**Số đơn hàng các năm**



Hình 10.4a

Biểu đồ cho thấy rõ là số đơn hàng tập trung vào năm 2019. Năm 2021 có số đơn hàng ít nhất và chênh lệch khá nhiều so với các năm còn lại (chẳng hạn, chỉ bằng một nửa số đơn hàng của năm 2022 hay chưa đến một phần tư số đơn hàng của năm 2019).

- b) Để thể hiện rõ xu hướng thay đổi qua các năm thì ta vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng (Hình 10.4b).

**Số đơn hàng các năm**



Hình 10.4b

Quan sát biểu đồ, ta thấy năm 2020 và năm 2021 đều có số đơn hàng giảm so với năm trước đó. Đoạn thẳng đi xuống "dốc" hơn là đoạn chuyển từ năm 2020 sang năm 2021, chứng tỏ năm 2021 có số đơn đặt hàng giảm nhiều nhất so với năm trước đó.

### Nhận xét: Ý nghĩa thực tiễn của biểu đồ tần số

- Biểu đồ tần số dạng cột biểu diễn một cách trực quan sự phân bố của dữ liệu. Nó cho ta biết dữ liệu tập trung nhiều nhất ở giá trị nào, ít xuất hiện nhất ở giá trị nào. Nó thuận tiện cho việc so sánh tần số của các giá trị hoặc xác định những giá trị đặc biệt trong mẫu dữ liệu.
- Biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng biểu thị rõ xu hướng thay đổi tần số các giá trị theo thời gian, giúp ta so sánh mức độ biến động của tần số.

## LUYỆN TẬP 2

Bảng 10.11 trình bày kết quả điều tra thời gian dành cho hoạt động thể dục thể thao mỗi ngày của một số người:

Bảng 10.11. Thời gian dành cho hoạt động thể dục thể thao

Thời gian (giờ)	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	Tổng
Tần số	55	50	95	150	95	55	$N = 500$

- Hãy dùng biểu đồ tần số dạng cột để biểu diễn dữ liệu đã cho. Biểu đồ cho thấy nhóm đông nhất là nhóm nào? Nhóm ít nhất là nhóm nào? Số lượng người của hai nhóm này chênh lệch nhau bao nhiêu lần? Những nhóm nào có số lượng người như nhau?
- Có thể dùng biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng để biểu diễn bảng số liệu đã cho không? Vì sao?

## VẬN DỤNG

Trở lại với dữ liệu thống kê của bác Hải về số hạt trong mỗi quả đậu Hà Lan. Với hai mẫu dữ liệu (về đậu trồng ở hai lô đất), mỗi mẫu 150 số liệu, thì dựa vào cách ghi chép ban đầu bác Hải sẽ rất khó đánh giá hiệu quả của loại phân bón hữu cơ X.

Bác Hải đã tổng hợp lại kết quả đếm hạt trong 300 quả đậu của mình theo từng lô. Đối với lô A, kết quả bác thu được là: 25 quả 8 hạt; 65 quả 7 hạt; 45 quả 6 hạt; 10 quả 5 hạt; 5 quả 4 hạt.

- Hãy dùng bảng tần số để biểu diễn dữ liệu về đậu trồng ở lô A do bác Hải cung cấp.
- Vẽ biểu đồ tần số biểu diễn bảng dữ liệu lập được. Dựa vào đó, cho biết: Phần lớn quả có bao nhiêu hạt trở lên? Loại ít hạt nhất có bao nhiêu quả?

### Lưu ý:

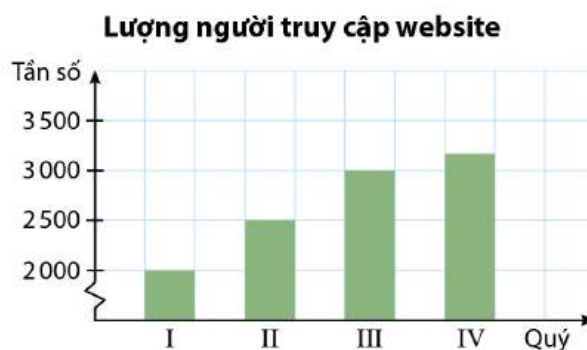
Khi biểu diễn bảng tần số bằng một biểu đồ hay khi đọc và phân tích dữ liệu trên các biểu đồ, ta phải chú ý đến đơn vị của trục tung, tránh đưa ra những kết luận không chính xác do chỉ căn cứ vào hình vẽ.

### VÍ DỤ 3

Biểu đồ ở Hình 10.5a được đưa ra để quảng cáo cho một website.

Quan sát biểu đồ, bạn Vân nhận xét: "Lượng người truy cập quý II tăng gấp đôi so với quý I. Sang quý III, lượng người truy cập lại tăng gấp 3 so với quý I".

Ý kiến của bạn Vân có đúng không? Giải thích vì sao.



Hình 10.5a

### Bài giải

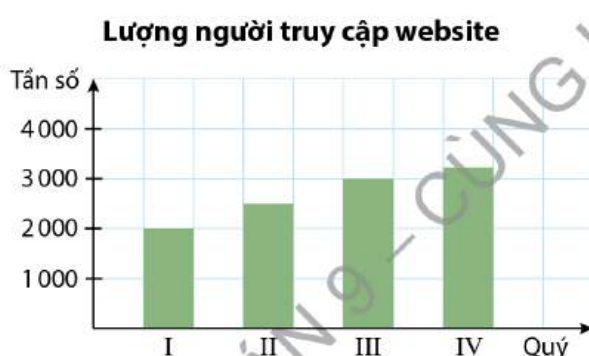
Trong Hình 10.5a, người ta đã thu gọn đoạn ứng với số 2 000 trên trục tung. Mỗi đơn vị tiếp theo ứng với 500 (người). Như vậy từ quý I sang quý II chỉ tăng 500 người chứ không phải tăng gấp đôi (từ 2 000 lên 4 000). Tương tự, lượng người truy cập từ quý I sang quý III chỉ tăng 1 000 chứ không phải tăng gấp 3 (từ 2 000 lên 6 000).

Như vậy ý kiến của bạn Vân không đúng vì chỉ nhìn chiều cao của các cột mà không để ý đến số liệu trên trục tần số.

### Lưu ý:

Khi vẽ biểu đồ, ta nên chọn đơn vị phù hợp cho trục tần số để có thể bắt đầu từ số 0, không gây nhầm lẫn về thị giác.

Chẳng hạn, biểu đồ ở Hình 10.5a có thể vẽ lại như sau:



Hình 10.5b

### BÀI TẬP

**10.5.** Tuổi của nhân viên bộ phận hành chính của một công ty được ghi lại trong bảng sau:

30	43	32	30	43	44	32	44	32	43	31
32	43	44	25	32	44	30	31	32	25	44
31	32	25	44	25	25	32	32	44	44	

- Lập bảng tần số trình bày mẫu dữ liệu đã cho.
- Vẽ biểu đồ tần số biểu diễn bảng lập được ở câu a.
- Tuổi của nhân viên bộ phận hành chính tập trung nhiều nhất ở những giá trị nào?

**10.6.** Nhà máy kiểm tra 100 sản phẩm của một dây chuyền đóng gói kẹo đang trong thời gian chạy thử nghiệm. Tiêu chuẩn là mỗi gói nặng 500 gam. Những gói kẹo có khối lượng chênh lệch không quá 10 gam so với tiêu chuẩn được xem là đạt yêu cầu. Kết quả kiểm tra được thống kê trong bảng sau:

<b>Khối lượng (g)</b>	480	490	495	500	505	520	Tổng
<b>Tần số</b>	2	2	30	46	15	5	$N = 100$

- Trong 100 gói được kiểm tra, có bao nhiêu gói đạt yêu cầu?
- Vẽ biểu đồ tần số biểu diễn dữ liệu cho trong bảng.

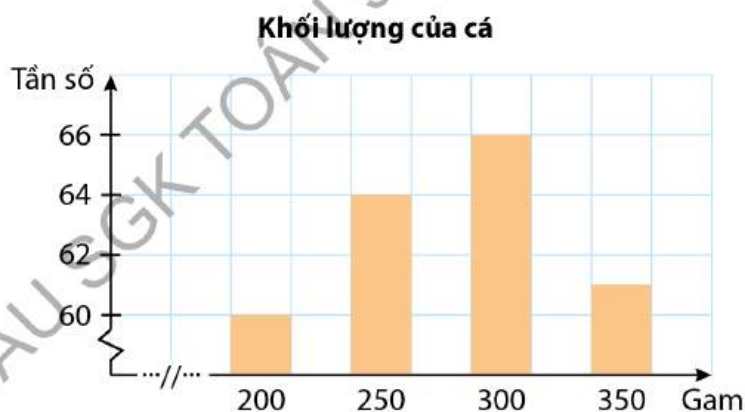
**10.7.** Một trường đại học thống kê trong bảng sau số sinh viên tốt nghiệp loại xuất sắc hằng năm của trường:

<b>Năm</b>	2015	2016	2017	2018	2019	2020
<b>Tần số</b>	25	65	90	87	75	49

Đối với mỗi câu hỏi dưới đây, hãy chọn loại biểu đồ tần số phù hợp sao cho dễ tìm thấy câu trả lời. Vẽ biểu đồ đó và dùng nó để trả lời câu hỏi.

- Năm nào có nhiều sinh viên tốt nghiệp loại xuất sắc nhất?
- Năm nào số sinh viên tốt nghiệp loại xuất sắc tăng nhiều nhất so với năm trước đó? Giảm nhiều nhất so với năm trước đó?

**10.8.** Biểu đồ bên dưới trình bày kết quả đo khối lượng của lúa cá đã nuôi được 2 tháng theo phương pháp mới do một trung tâm nuôi trồng thủy sản đang nghiên cứu:



- Bạn Quân nói: "Quan sát biểu đồ thì thấy số cá nặng 250 g nhiều gấp ba số cá nặng 200 g nhưng chỉ bằng ba phần tư số cá nặng 300 g". Nhận xét của bạn Quân có đúng không? Vì sao?
- Hãy lập bảng tần số biểu diễn số liệu về khối lượng của cá.
- Có thể dùng biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng để biểu diễn dữ liệu đã cho không? Vì sao?
- Phương pháp mới chỉ được triển khai áp dụng đại trà nếu ba phần tư số cá đạt khối lượng trên 250 g sau 2 tháng nuôi. Vậy với kết quả nuôi thử nghiệm trên thì phương pháp nuôi này có thể được triển khai đại trà không?

## Bài 3

# TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

Từ khóa: tần số tương đối của một giá trị, biểu đồ tần số tương đối.



Công ty sản xuất giống và nuôi trồng thủy sản nuôi thử nghiệm một giống cá mới ở hai ao, trong hai điều kiện chăm sóc khác nhau. Sau một thời gian chăm sóc, người ta bắt ngẫu nhiên ở mỗi ao một số cá và kiểm tra cân nặng từng con.

Ta sẽ phân tích dữ liệu thu được ra sao để biết điều kiện chăm sóc nào hiệu quả hơn?

## 1 TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI CỦA MỘT GIÁ TRỊ. BẢNG TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

### HOẠT ĐỘNG 1

Dưới đây là hai bảng thống kê kết quả kiểm tra cân nặng của cá nuôi ở hai ao với hai điều kiện chăm sóc A, B:

Bảng 10.12a. Cá nuôi ở điều kiện A

Cân nặng (g)	Tần số
500	20
600	30
700	30
800	80
900	40
	$N = 200$

Bảng 10.12b. Cá nuôi ở điều kiện B

Cân nặng (g)	Tần số
500	5
600	7
700	25
800	75
900	38
	$N = 150$

Cá được xem là đảm bảo chất lượng nếu đạt khối lượng không dưới 700 g. Vậy cá nuôi ở điều kiện A hay B cho kết quả tốt hơn?

Để trả lời câu hỏi này, bạn Nam phân tích: Đối chiếu hai bảng thì thấy:

- Loại 700 g: nuôi ở điều kiện A đạt 30 con, nuôi ở điều kiện B đạt ít hơn (25 con);
- Loại 800 g: nuôi ở điều kiện A đạt 80 con, nuôi ở điều kiện B đạt ít hơn (75 con);
- Loại 900 g: nuôi ở điều kiện A đạt 40 con, nuôi ở điều kiện B đạt ít hơn (38 con).

Suy ra cá nuôi ở điều kiện A cho kết quả tốt hơn.

Em có tán thành cách phân tích của Nam không? Vì sao? Nếu không tán thành thì hãy thử đề xuất một cách phân tích khác.

Đối với một giá trị của dấu hiệu điều tra, khi muốn so sánh sự có mặt nhiều hay ít của nó trong các mẫu dữ liệu có kích thước khác nhau thì ta phải dựa vào tỉ số giữa số lần xuất hiện giá trị đó trong mỗi mẫu với kích thước mẫu. Tỉ số này được gọi là *tần số tương đối của giá trị* đang nói đến.

Như vậy:

$$\text{Tần số tương đối của một giá trị} = \frac{\text{Tần số của giá trị}}{\text{Tổng các tần số}}$$



Giả sử dấu hiệu điều tra có các giá trị  $x_1, x_2, \dots, x_k$  ( $k$  là một số nguyên dương) và tần số tương ứng của chúng trong mẫu dữ liệu là  $n_1, n_2, \dots, n_k$ . Tần số tương đối của giá trị  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), kí hiệu  $f_i$ , là số được tính theo công thức:

$$f_i = \frac{n_i}{N}$$

trong đó  $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$  là tổng các tần số (tức là kích thước mẫu).

Bảng tần số tương đối là bảng gồm hai dòng (cột), trong đó dòng (cột) thứ nhất ghi các giá trị của dấu hiệu điều tra, dòng (cột) thứ hai ghi tần số tương đối ứng với mỗi giá trị.

Người ta thường viết các tần số tương đối ở dạng % để không phải quy đồng mẫu số mỗi khi so sánh chúng và để thuận tiện cho việc đưa ra dự đoán về một vấn đề, một hiện tượng nào đó liên quan đến mẫu dữ liệu. Khi đó công thức tính tần số tương đối được viết là:

$$f_i = \frac{n_i}{N} \cdot 100\%.$$

### VÍ DỤ 1

Câu lạc bộ mỹ thuật của nhà văn hoá thiếu nhi thống kê tuổi của các thành viên lớp hội họa và biểu diễn dữ liệu qua bảng sau:

Bảng 10.13a. Tuổi của các thành viên lớp hội họa

Tuổi	9	10	11	12	13	14	Tổng
Tần số	10	4	6	2	12	6	$N = 40$

Tính tần số tương đối của mỗi giá trị và lập bảng tần số tương đối.

#### Bài giải

Tần số tương đối của giá trị  $x_1 = 9$  là  $f_1 = \frac{10}{40} = 0,25 = 25\%$ .

Tần số tương đối của giá trị  $x_2 = 10$  là  $f_2 = \frac{4}{40} = 0,1 = 10\%$ .

Tương tự, ta tính được:

$$f_3 = \frac{6}{40} = 0,15 = 15\%; f_4 = \frac{2}{40} = 0,05 = 5\%; f_5 = \frac{12}{40} = 0,3 = 30\%; f_6 = \frac{6}{40} = 0,15 = 15\%.$$

Từ đó, ta lập được bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu đã cho:

Bảng 10.13b. Tuổi của các thành viên lớp hội họa

Tuổi	9	10	11	12	13	14	Tổng
Tần số tương đối (%)	25	10	15	5	30	15	100

### Lưu ý:

- Trong một mẫu dữ liệu, tổng các tần số tương đối luôn bằng 1 nếu chúng được viết ở dạng thương của  $n_i$  với  $N$ , và luôn luôn bằng 100% nếu chúng được viết ở dạng phần trăm.
- Bảng có cả dòng (cột) tần số và dòng (cột) tần số tương đối được gọi là *bảng tần số – tần số tương đối*. Chẳng hạn, bảng tần số – tần số tương đối của *Bảng 10.13a* là:

Tuổi	9	10	11	12	13	14	Tổng
Tần số	10	4	6	2	12	6	$N = 40$
Tần số tương đối (%)	25	10	15	5	30	15	100

### LUYỆN TẬP 1

- a) Điểm kiểm tra môn Ngữ văn của học sinh lớp 9A1 được thống kê trong *Bảng 10.14a*.

*Bảng 10.14a. Điểm kiểm tra môn Ngữ văn của lớp 9A1*

Điểm	5	6	7	8	9	Tổng
Tần số	8	14	11	7	4	$N = 44$

Lập bảng tần số tương đối của bảng điểm đã cho (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

- b) Cũng với bài kiểm tra này, căn cứ vào bảng điểm của lớp 9A2, bạn Tùng lập bảng tần số tương đối dưới đây:

*Bảng 10.14b. Điểm kiểm tra môn Ngữ văn của lớp 9A2*

Điểm	5	6	7	8	9
Tần số tương đối (%)	11,9	31,1	26,2	19,1	11,9

Hãy kiểm tra xem bảng của bạn Tùng lập có chính xác không. Giải thích cách kiểm tra của em.

### Nhận xét: Ý nghĩa của tần số tương đối

- Tần số tương đối giúp ta hiểu rõ tỉ lệ xuất hiện nhiều hay ít của mỗi giá trị trong mẫu dữ liệu. Nếu như tần số chỉ cho phép so sánh phân bố của dữ liệu trong cùng một mẫu hay trong hai mẫu có kích thước bằng nhau thì tần số tương đối là công cụ để so sánh phân bố của dữ liệu trong những mẫu không cùng kích thước.
- Trong thực tiễn, nếu mẫu dữ liệu đại diện được cho tổng thể thì có thể sử dụng tần số tương đối của mẫu để đưa ra một kết luận hay một quyết định cho tổng thể. Điều này không thể làm được nếu chỉ dựa vào tần số.

### VÍ DỤ 2

Trung tâm ngoại ngữ Ánh Dương đang triển khai dạy tiếng Anh theo hai giáo trình mới với mục đích nâng cao năng lực giao tiếp cho học viên. Cuối học kì, toàn thể học viên cùng làm một đề kiểm tra chung. Kết quả kiểm tra được thống kê trong hai bảng dưới đây, với 5 mức xếp hạng từ thấp nhất đến cao nhất, kí hiệu là A1, A2, A3, A4, A5:

Bảng 10.15a. Kết quả học tập theo giáo trình X

Xếp loại	Tần số
A1	19
A2	39
A3	52
A4	70
A5	20
	$N = 200$

Bảng 10.15b. Kết quả học tập theo giáo trình Y

Xếp loại	Tần số
A1	12
A2	20
A3	44
A4	65
A5	19
	$N = 160$

Có thể nói là học theo giáo trình nào thì kết quả tốt hơn?

### Bài giải

Hai mẫu dữ liệu có kích thước khác nhau nên ta không thể dùng tần số để so sánh kết quả kiểm tra của học viên. Lập bảng tần số tương đối (làm tròn kết quả đến hàng phần mười), ta có:

Bảng 10.15c. Kết quả học tập theo giáo trình X

Xếp loại	Tần số tương đối (%)
A1	9,5
A2	19,5
A3	26,0
A4	35,0
A5	10,0
	100

Bảng 10.15d. Kết quả học tập theo giáo trình Y

Xếp loại	Tần số tương đối (%)
A1	7,5
A2	12,5
A3	27,5
A4	40,6
A5	11,9
	100

Quan sát hai bảng tần số tương đối, ta nhận thấy so với kết quả học tập theo giáo trình X thì kết quả học tập theo giáo trình Y có:

- Tỷ lệ học viên đạt các mức thấp (A1, A2) đều nhỏ hơn;
- Tỷ lệ học viên đạt mức A3 nhiều hơn;
- Tỷ lệ học viên đạt các mức cao (A4, A5) cũng nhiều hơn.

Vậy có thể nói là giáo trình Y mang lại kết quả cao hơn. Tuy nhiên kết quả khác biệt không nhiều.

## LUYỆN TẬP 2

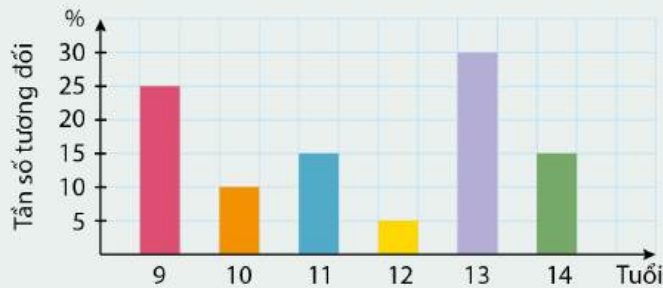
Trở lại với hai mẫu số liệu cho ở các Bảng 10.12a và Bảng 10.12b trong Hoạt động 1.

- Lập bảng tần số tương đối ứng với hai bảng dữ liệu đã cho.
- Nếu số cá bắt lên để kiểm tra đại diện được cho cá trong mỗi ao thì có thể dự kiến số cá đạt yêu cầu trong mỗi ao là bao nhiêu phần trăm? Giữa hai điều kiện chăm sóc A và B, có thể nói là điều kiện nào đạt hiệu quả tốt hơn?

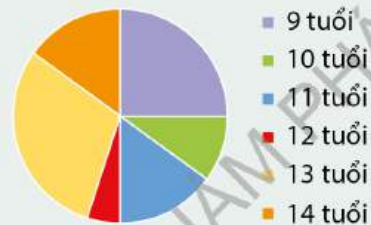
## 2 BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

### HOẠT ĐỘNG 2

Xét bảng tần số tương đối đã lập ở Ví dụ 1 về tuổi của các thành viên trong lớp hội họa (Bảng 10.13b). Hai biểu đồ sau biểu diễn dữ liệu cho trong bảng đó:



Hình 10.6a



Hình 10.6b

Sử dụng các biểu đồ đã cho để trả lời hai câu hỏi dưới đây. Đối với mỗi câu hỏi, hãy cho biết em đã chọn biểu đồ nào và giải thích sự lựa chọn đó.

- Nhóm học sinh ở độ tuổi nào chiếm số đông nhất trong lớp? Tần số tương đối ứng với nhóm đó gấp bao nhiêu lần tần số tương đối của nhóm có ít học sinh nhất?
- Nhóm nào có số học sinh chiếm một phần tư sĩ số lớp? Tổng số học sinh những nhóm nào chiếm nửa sĩ số lớp?



Bảng tần số tương đối có thể được biểu thị bởi biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn. Các biểu đồ này được gọi là *biểu đồ tần số tương đối (dạng cột và dạng hình quạt tròn)*.

### Cách vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng hình quạt tròn

Trong biểu đồ hình quạt tròn, cả hình tròn biểu diễn cho tổng thể, ứng với 100% dữ liệu. Mỗi hình quạt tròn biểu diễn cho một bộ phận của tổng thể ứng với tần số tương đối  $f$  xác định.

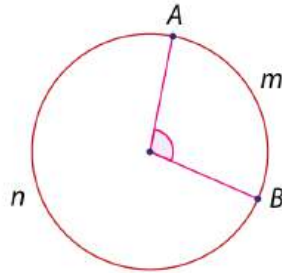
Vì đường tròn là cung  $360^\circ$  nên hình quạt tròn biểu diễn 1% dữ liệu ứng với cung có số đo  $\frac{360^\circ}{100} = 3,6^\circ$ . Suy ra hình quạt tròn biểu diễn  $f\%$  ứng với cung có số đo là  $f \cdot 3,6^\circ$ .



Để vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng hình quạt tròn, ta vẽ một hình tròn rồi chia nó thành các hình quạt biểu diễn các tần số tương đối. Hình quạt tròn biểu diễn tần số tương đối  $f_i = a_i\%$  ứng với cung có số đo  $a_i \cdot 3,6^\circ$ .

**Lưu ý:**

- Vì  $f_i = \frac{n_i}{N} \cdot 100\%$  nên khi có bảng tần số thì ta có thể xác định hình quạt biểu diễn tần số tương đối  $f_i$  qua cung có số đo  $\frac{n_i}{N} \cdot 360^\circ$ .
- Để xác định cung khi biết số đo của nó, ta dựa vào tính chất sau: Trong đường tròn, số đo cung nhỏ  $\widehat{AmB}$  bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó, số đo cung lớn  $\widehat{AnB}$  bằng hiệu giữa  $360^\circ$  và số đo cung  $\widehat{AmB}$  (Hình 10.7).



Hình 10.7

**VÍ DỤ 3**

Một đại lí xe đạp bán ra trong tháng vừa qua được 60 chiếc xe thuộc nhiều thương hiệu khác nhau. Dưới đây là bảng thống kê của đại lí:

Bảng 10.16. Số xe đạp bán được

Thương hiệu	X	Y	Z	V	W	Tổng
Tần số	9	10	15	20	6	60

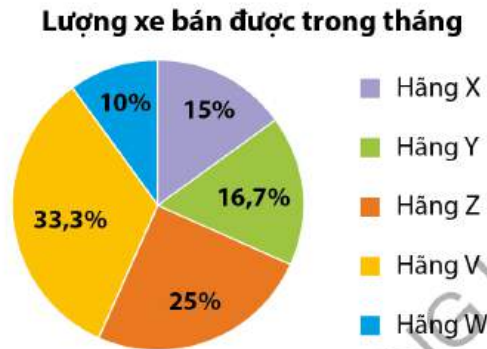
Vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng hình quạt biểu diễn bảng dữ liệu đã cho.

**Bài giải**

- Lập bảng để tính tần số tương đối và số đo cung của các hình quạt tương ứng. Từ bảng thống kê của đại lí, ta có  $N = 60$ . Áp dụng công thức tính tần số và số đo cung, ta có bảng sau:

Thương hiệu	Tần số	Tần số tương đối (%)	Số đo cung
X	9	$\frac{9}{60} \cdot 100 = 15$	$15 \cdot 3,6^\circ = 54^\circ$
Y	10	$\frac{10}{60} \cdot 100 \approx 16,7$	$16,7 \cdot 3,6^\circ \approx 60^\circ$
Z	15	$\frac{15}{60} \cdot 100 = 25$	$25 \cdot 3,6^\circ = 90^\circ$
V	20	$\frac{20}{60} \cdot 100 \approx 33,3$	$33,3 \cdot 3,6^\circ \approx 120^\circ$
W	6	$\frac{6}{60} \cdot 100 = 10$	$10 \cdot 3,6^\circ = 36^\circ$
	$N = 60$	100	$360^\circ$

- Vẽ một đường tròn. Lấy một điểm bất kì trên đường tròn, gọi là điểm đầu.
- Trên đường tròn, lần lượt lấy 5 điểm khác theo cùng một chiều kể từ điểm đầu (chẳng hạn theo chiều quay của kim đồng hồ) sao cho cung tạo bởi hai điểm liên tiếp (kể từ điểm đầu) lần lượt có số đo  $54^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ . Ta có 4 hình quạt biểu diễn 4 giá trị đầu trong cột tần số tương đối. Để dàng tính được số đo của cung tạo bởi điểm cuối cùng và điểm đầu chính là  $36^\circ$ . Suy ra hình quạt cuối cùng biểu diễn giá trị thứ năm của cột tần số tương đối. Biểu đồ cần vẽ là:



Hình 10.8

### Lưu ý:

Ta quy ước là từ nay, đối với các bài toán vẽ biểu đồ hình quạt tròn, chỉ cần lập bảng tính các số đo cung rồi vẽ biểu đồ mà không cần giải thích cách lấy các điểm.

### LUYỆN TẬP 3

Ban chấp hành Công đoàn điều tra lương của một số công nhân trong nhà máy và thống kê trong bảng sau:

Bảng 10.17. Lương của một số công nhân trong nhà máy

Mức lương (triệu đồng)	Dưới 6	6	7	8	9	Tổng
Tần số tương đối (%)	12,5	25	33,75	22,5	6,25	100

- Vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng cột và dạng hình quạt tròn biểu diễn bảng thống kê do Công đoàn nhà máy cung cấp.
- Từ biểu đồ cột, có nhận xét gì về sự chênh lệch tỉ lệ công nhân giữa nhóm lương thấp nhất và nhóm lương cao nhất?
- Nếu số công nhân này đại diện được cho toàn nhà máy thì có thể nói số công nhân của nhà máy hưởng mức lương dưới 8 triệu đồng chiếm tỉ lệ bao nhiêu?
- Ban chấp hành Công đoàn định đề nghị nhà máy trợ cấp cho nhóm công nhân có mức lương dưới 6 triệu đồng. Hỏi có bao nhiêu người được đề nghị hưởng trợ cấp, biết rằng nhà máy có 640 công nhân?

**BÀI TẬP**

**10.9.** a) Hoàn thiện bảng tần số – tần số tương đối dưới đây về chiều cao của 120 cây thông.

Chiều cao (m)	7	7,5	8	8,5	
Tần số	?	18	?	?	$N = 120$
Tần số tương đối (%)	15	?	?	40	?

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng hình cột và dạng hình quạt tròn biểu diễn dữ liệu trong bảng lập ở câu a.

**10.10.** Bạn Hùng điều tra thời gian tự học ở nhà của một số học sinh lớp 9 và trình bày kết quả trong bảng thống kê sau:

Thời gian (phút)	60	90	120	150	180	
Tần số	2	7	16	5	2	$N = 32$

- a) Lập bảng tần số tương đối ứng với bảng số liệu đã cho.  
 b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng hình cột và dạng hình quạt tròn biểu diễn bảng lập được ở câu a.  
 c) Sử dụng hai biểu đồ đã vẽ để trả lời các câu hỏi dưới đây. Đối với mỗi câu hỏi, hãy cho biết em đã dùng biểu đồ nào để tìm câu trả lời. Giải thích vì sao.
- Đồng nhất là nhóm học sinh tự học mỗi ngày bao nhiêu phút?
  - Bao nhiêu phần trăm học sinh tự học nhiều hơn 120 phút mỗi ngày?

**10.11.** Kiểm tra khối lượng một số hộp sữa chua được lấy ngẫu nhiên từ thành phẩm của máy đóng hộp X, nhà máy chế biến sữa thu được bảng sau:

Khối lượng (g)	92	96	100	105	110	
Tần số	7	18	38	9	8	$N = 80$

- a) Lập bảng tần số tương đối và vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng hình quạt tròn biểu diễn dữ liệu đã cho.  
 b) Những hộp cân nặng từ 95 g đến 105 g được xem là đạt yêu cầu về khối lượng. Vậy trong 80 hộp sữa chua được kiểm tra có bao nhiêu phần trăm hộp đạt yêu cầu?  
 c) Máy đóng hộp được xem là vận hành tốt nếu trên 90% sản phẩm của nó đạt yêu cầu. Nếu 80 hộp sữa chua này đại diện được cho sản phẩm đóng hộp của máy X thì có thể xem là máy này vận hành tốt hay không?

## Bài 4

### TẦN SỐ GHÉP NHÓM. TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM

**Từ khoá:** tần số ghép nhóm, tần số tương đối ghép nhóm, biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm.

Đối với các khái niệm đề cập trong bài này, ta chỉ xét những mẫu dữ liệu định lượng.



Để đặt may đồng phục thể dục, nhà trường đã đo chiều cao của 40 học sinh. Công ty may đồng phục theo các kích cỡ S (Small – Nhỏ), M (Medium – Vừa), L (Large – Lớn), XL (Extra large – Rất lớn).

Vậy bảng thống kê chiều cao nên ghi thế nào cho gọn và dễ xác định lượng quần áo cần đặt ở mỗi kích cỡ?

#### 1 MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM. TẦN SỐ GHÉP NHÓM

##### HOẠT ĐỘNG 1

Kết quả đo chiều cao của 40 học sinh được thống kê trong bảng sau:

Bảng 10.18. Chiều cao của 40 học sinh (đơn vị: cm)

146	148	148	150	150	151	151	152	152	152
153	154	154	154	155	155	155	155	155	156
156	156	156	157	157	159	159	160	162	163
163	163	163	163	164	165	167	168	168	170

Theo quy định của công ty may mặc, cỡ S tương ứng với chiều cao từ 146 cm đến dưới 152 cm. Cỡ M ứng với chiều cao từ 152 cm đến dưới 158 cm. Cỡ L tương ứng với chiều cao từ 158 cm đến dưới 164 cm. Cỡ XL ứng với chiều cao từ 164 cm đến 170 cm.

Đối với 40 học sinh này, làm thế nào để xác định số quần áo cần may ở mỗi kích cỡ?

Để xác định số quần áo cần may ở mỗi kích cỡ, ta phải căn cứ vào tiêu chuẩn của công ty may mặc. Như vậy ta sẽ phân số liệu trong *Bảng 10.18* thành các nhóm sau:

- Nhóm 1 gồm những số đo chiều cao từ 146 cm đến dưới 152 cm, kí hiệu là [146; 152);
- Nhóm 2 gồm những số đo chiều cao từ 152 cm đến dưới 158 cm, kí hiệu là [152; 158);
- Nhóm 3 gồm những số đo chiều cao từ 158 cm đến dưới 164 cm, kí hiệu là [158; 164);
- Nhóm 4 gồm những số đo chiều cao từ 164 cm đến 170 cm, kí hiệu là [164; 170].

Ta thấy:

Có 7 số liệu thuộc vào nhóm 1. Suy ra phải đặt may 7 bộ đồng phục cỡ S. Ta gọi  $n_1 = 7$  là tần số của nhóm 1.

Tương tự, căn cứ vào số giá trị xuất hiện trong mỗi nhóm 2, 3, 4, ta xác định được số bộ đồng phục cần may mỗi cỡ M, L, XL và gọi chúng là tần số của các nhóm này.

Với cách phân nhóm các số liệu như vậy, ta có thể thu gọn *Bảng 10.18* thành bảng sau:

*Bảng 10.19. Chiều cao của 40 học sinh*

<b>Chiều cao (cm)</b>	[146; 152)	[152; 158)	[158; 164)	[164; 170]	Tổng
<b>Tần số</b>	7	18	9	6	$N = 40$



*Mẫu số liệu ghép nhóm* là một mẫu mà các số liệu đã được ghép với nhau thành từng nhóm, theo một tiêu chí xác định.

Các nhóm thường có dạng  $[a; b)$ , hoặc  $(a; b]$ , hoặc  $[a; b]$ . Hai số  $a, b$  được gọi là các mút của nhóm. Nhóm  $[a; b)$  (tương ứng:  $(a; b]$  hoặc  $[a; b]$ ) gồm những giá trị  $x$  thoả mãn điều kiện  $a \leq x < b$  (tương ứng:  $a < x \leq b$  hoặc  $a \leq x \leq b$ ).

Số lần xuất hiện các giá trị thuộc một nhóm được gọi là *tần số ghép nhóm* của nhóm đó.

Mẫu số liệu ghép nhóm có thể được biểu diễn bởi một bảng gồm hai dòng (cột). Dòng (cột) thứ nhất dành cho việc viết các nhóm. Dòng (cột) thứ hai ghi tần số của nhóm tương ứng. Bảng này được gọi là *bảng tần số ghép nhóm*.

### Nhận xét:

Việc ghép nhóm số liệu giúp ta trình bày mẫu số liệu được gọn gàng, nhất là với các dãy số liệu liên tục, có nhiều giá trị mà sự phân biệt các giá trị gần bằng nhau lại không cần thiết. Lúc quan sát mẫu số liệu ghép nhóm, thông tin về tần số của mỗi nhóm là yếu tố quan trọng.

### Lưu ý:

Trong nhiều bảng thống kê trên báo chí hoặc Internet, ta có thể gặp cách ghi các nhóm ghép bằng bất đẳng thức. Chẳng hạn, các nhóm  $[146; 152)$ ,  $[164; 170]$  trong *Bảng 10.19* có thể được viết là  $146 \leq h < 152$ ,  $164 \leq h \leq 170$  (với  $h$  là chiều cao).

### VÍ DỤ 1

Công ty quản lí các phương tiện giao thông công cộng của thành phố thống kê trong *Bảng 10.20* chiều dài quãng đường (từ bến đầu tiên đến bến cuối cùng) của từng tuyến xe buýt.

*Bảng 10.20. Chiều dài quãng đường của các tuyến xe buýt (đơn vị: km)*

5	8	8	8,5	10,2	11	12	12	13	13
13,5	14	14	14,5	14,5	15	15	16	16,5	17
17	18	18	19	21	22	24	24	24,5	25

Lập bảng tần số ghép nhóm theo các quãng đường từ 5 km đến dưới 10 km, từ 10 km đến dưới 15 km, từ 15 km đến dưới 20 km, từ 20 km đến 25 km.

### Bài giải

Gọi  $s$  là chiều dài quãng đường của mỗi tuyến xe buýt. Ta cần phân dữ liệu theo các nhóm  $5 \leq s < 10$ ,  $10 \leq s < 15$ ,  $15 \leq s < 20$ ,  $20 \leq s \leq 25$ . Đếm số lần xuất hiện các giá trị trong từng nhóm, ta lập được bảng tần số ghép nhóm dưới đây:

Bảng 10.21. Bảng tần số ghép nhóm chiều dài quãng đường các tuyến xe buýt (đơn vị: km)

Quãng đường ( $s$ )	$5 \leq s < 10$	$10 \leq s < 15$	$15 \leq s < 20$	$20 \leq s \leq 25$	Tổng
Tần số	4	11	9	6	$N = 30$

## LUYỆN TẬP 1

Bảng 10.22 ghi lại lượng khách hằng ngày đến tham quan một viện bảo tàng nghệ thuật trong 20 ngày.

Bảng 10.22. Lượng khách tham quan

32	25	50	48	35	22	58	24	50	52
49	59	34	36	42	55	52	54	45	60

- Lập bảng tần số ghép nhóm với các nhóm  $[20; 30)$ ,  $[30; 40)$ ,  $[40; 50)$ ,  $[50; 60]$ .
- Để lập kế hoạch chuẩn bị thuyết minh viên cho khách tham quan trong tuần tới, người ta cần biết lượng khách phổ biến hằng ngày. Hãy cho biết: Bao nhiêu ngày có lượng khách tham quan:
  - Dưới 30 người?
  - Dưới 40 người?
  - Từ 40 người trở lên?
  - Lượng khách phổ biến hằng ngày nằm trong khoảng bao nhiêu người?

## 2 TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM

### HOẠT ĐỘNG 2

Ta chép lại dưới đây Bảng 10.19 về chiều cao của 40 học sinh. Nhóm mặc đồng phục cỡ  $M$  chiếm bao nhiêu phần trăm trong tổng số 40 học sinh? Hãy trình bày cách tìm kết quả.

Chiều cao của 40 học sinh

Chiều cao (cm)	[146; 152)	[152; 158)	[158; 164)	[164; 170]	Tổng
Tần số	7	18	9	6	$N = 40$



Nếu mẫu số liệu gồm  $k$  nhóm ( $k$  là một số nguyên dương) và  $n_1, n_2, \dots, n_k$  là tần số của các nhóm thì tỉ số

$$f_i = \frac{n_i}{N}, i = 1, 2, \dots, k$$

trong đó  $N$  là kích thước mẫu, được gọi là *tần số tương đối của nhóm thứ  $i$* .

Mẫu số liệu ghép nhóm có thể được biểu diễn bởi một bảng gồm hai dòng (cột), trong đó:

- Dòng (cột) thứ nhất viết các nhóm;
  - Dòng (cột) thứ hai viết tần số tương đối của nhóm tương ứng.
- Người ta gọi đó là *bảng tần số tương đối ghép nhóm*.

Một bảng có cả tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm được gọi là *bảng tần số – tần số tương đối ghép nhóm*.

## VÍ DỤ 2

Bảng dưới đây được lấy từ dữ liệu do một trọng tài ghi lại về thành tích của các vận động viên nam trong cuộc thi bơi tự do dài 50 m được một trung tâm thể dục thể thao tổ chức:

Bảng 10.23. Thành tích bơi tự do 50 m nam

Thời gian (giây)	[24; 26)	[26; 28)	[28; 30)	[30; 32)	[32; 34]	Tổng
Tần số	2	8	10	8	4	$N = 32$

- Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm ứng với Bảng 10.23.
- Dựa vào bảng lập được, cho biết tỉ lệ phần trăm của nhóm có thành tích bơi thấp nhất và nhóm có thành tích bơi cao nhất. Nhóm đông nhất là nhóm nào và nhóm đó chiếm bao nhiêu phần trăm?

### Bài giải

- Sử dụng công thức  $f_i = \frac{n_i}{N}$  để tính tần số tương đối của từng nhóm. Chẳng hạn:

- Tần số tương đối của nhóm [24; 26) là  $f_1 = \frac{2}{32} = 0,0625 = 6,25\%$ .

- Tần số tương đối của nhóm [26; 28) là  $f_2 = \frac{8}{32} = 0,25 = 25\%$ .

- Tương tự với các nhóm ghép tiếp theo:  $f_3 = \frac{10}{32} = 0,3125 = 31,25\%$ ;

$$f_4 = \frac{8}{32} = 0,25 = 25\%; f_5 = \frac{4}{32} = 0,125 = 12,5\%.$$

Ta lập được bảng tần số tương đối ghép nhóm dưới đây:

Bảng 10.24. Bảng tần số tương đối ghép nhóm thành tích bơi tự do 50 m nam

Thời gian (giây)	[24; 26)	[26; 28)	[28; 30)	[30; 32)	[32; 34]
Tần số tương đối (%)	6,25	25	31,25	25	12,5

- b) Quan sát các tần số tương đối, ta có thể đưa ra nhiều nhận xét. Chẳng hạn, ta thấy:
- Nhóm có thành tích bơi thấp nhất (thời gian bơi từ 32 đến 34 giây) chiếm 12,5%.
  - Có 6,25% vận động viên đạt thành tích từ 24 đến dưới 26 giây. Đây là nhóm có thành tích bơi cao nhất.
  - Nhóm có thành tích bơi từ 28 đến dưới 30 giây là nhóm đông nhất, chiếm 31,25%.

## LUYỆN TẬP 2

Một cửa hàng điện máy ghi lại lợi nhuận thu được trong một số ngày ở bảng sau:

Bảng 10.25. Lợi nhuận (đơn vị tính: triệu đồng/ngày)

5,3	5,43	5,8	6,2	6,4	6,5	6,5	6,7	6,8	7
7,2	7,2	7,2	7,5	7,8	7,8	8	8,2	8,5	8,8

- a) Lập bảng tần số – tần số tương đối ghép nhóm với các nhóm ghép [5; 6), [6; 7), [7; 8), [8; 9).
- b) Dựa vào bảng lập được, hãy đưa ra nhận xét về lợi nhuận hằng ngày của cửa hàng.

## VẬN DỤNG

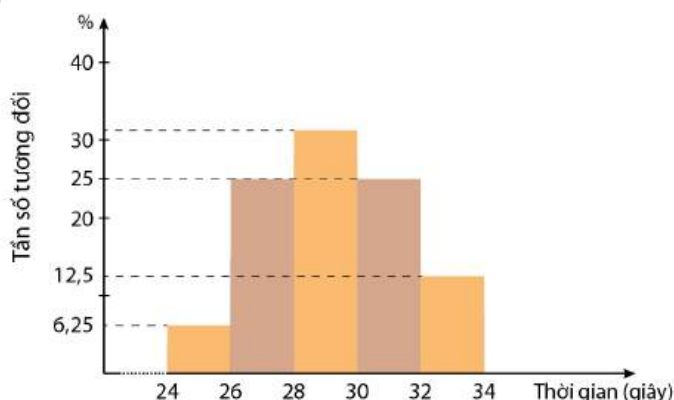
Trở lại với tình huống đo chiều cao của 40 học sinh để đặt may quần áo thể thao cho toàn trường (Hoạt động 1).

Nếu 40 học sinh có chiều cao đại diện được cho học sinh toàn trường thì số quần áo cần may ở mỗi kích cỡ cho toàn thể học sinh của trường là bao nhiêu, biết rằng trường có 1 200 học sinh?

## 3 BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHEP NHÓM DẠNG CỘT

Để mô tả các bảng tần số tương đối ghép nhóm, ta có thể dùng *biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột (histogram)*.

Chẳng hạn, Hình 10.9 ở dưới là biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột biểu diễn Bảng 10.24 về thành tích của các vận động viên bơi (Ví dụ 2).



Hình 10.9. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột về thành tích bơi của 32 vận động viên

Cách vẽ:

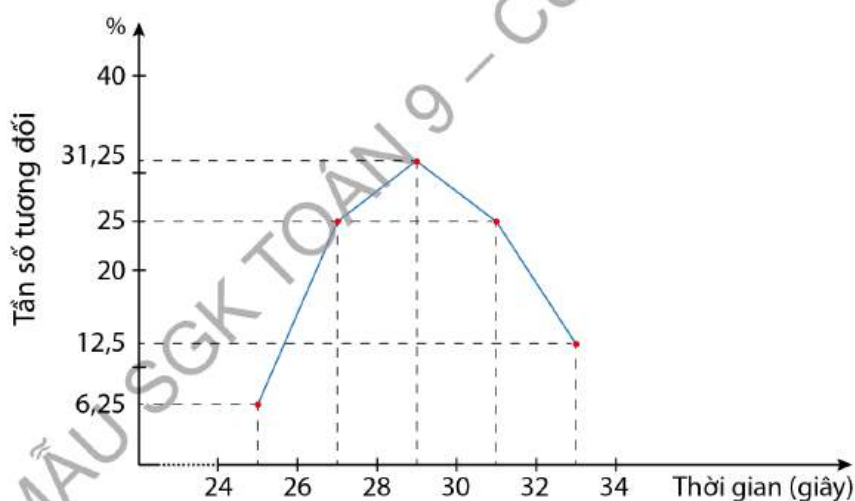
- Vẽ hệ trục tọa độ Oxy;
- Trên trục Ox, đánh dấu hai đầu mút của từng nhóm, từ đó xác định được các đoạn thẳng ứng với các nhóm, bắt đầu từ nhóm [24; 26] cho tới [32; 34];
- Tại mỗi đoạn thẳng, dựng một hình chữ nhật có chiều cao biểu diễn tần số tương đối của nhóm tương ứng.

### LUYỆN TẬP 3

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột của bảng tần số tương đối ghép nhóm lập được ở Luyện tập 2 (về lợi nhuận của cửa hàng điện máy).

## 4 BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHEP NHÓM DẠNG ĐOẠN THẲNG

Bảng 10.24 cũng có thể được biểu diễn bởi một biểu đồ dạng khác như hình vẽ dưới đây (Hình 10.10), gọi là **biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng**.



Hình 10.10. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng về thành tích bơi của 32 vận động viên

Cách vẽ:

- Vẽ hệ trục tọa độ Oxy. Trên trục Ox, đánh dấu hai đầu mút của từng nhóm, từ đó xác định được các đoạn ứng với các nhóm, từ nhóm [24; 26] cho tới nhóm [32; 34];
- Lấy các điểm  $(c_i; f_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ; trong đó  $c_i$  là trung bình cộng hai mút của nhóm thứ  $i$  và  $f_i$  là tần số tương đối của nhóm đó. Người ta gọi  $c_i$  là giá trị đại diện của nhóm thứ  $i$ ;
- Vẽ các đoạn thẳng nối hai điểm  $(c_i; f_i)$  và  $(c_{i+1}; f_{i+1})$  với  $i = 1, 2, 3, 4$ ; ta thu được **biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng** biểu diễn dữ liệu cho trong Bảng 10.24.

## LUYỆN TẬP 4

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng của bảng tần số tương đối ghép nhóm lập được ở Luyện tập 2 (về lợi nhuận của cửa hàng điện máy).

### Lưu ý:

Các bảng tần số ghép nhóm cũng có thể được biểu diễn bởi *biểu đồ tần số ghép nhóm dạng cột* hoặc *biểu đồ tần số ghép nhóm dạng đoạn thẳng*. Cách vẽ hoàn toàn tương tự như đối với hai loại biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm, trong đó thay trục tần số tương đối bởi trục tần số.

### BÀI TẬP

**10.12.** Trong 1 giờ, cửa hàng xăng dầu ghi lại số lít xăng mà mỗi khách hàng mua.

4	5	5	6	7	7	8	10	10	10
12	12	15	15	16	17	17	18	18	19
19	20	22	22	23	25	28	30	34	34
35	38	38	39	39					

- Hãy lập bảng tần số ghép nhóm gồm 4 nhóm  $[0; 10)$ ,  $[10; 20)$ ,  $[20; 30)$ ,  $[30; 40)$ .
- Dựa vào bảng đã lập, hãy nói rõ:
  - Bao nhiêu khách hàng mua dưới 10 lít xăng?
  - Nhóm khách hàng đông nhất là nhóm mua bao nhiêu lít xăng?

**10.13.** Bảng dưới đây ghi lại kết quả điều tra do một ngân hàng thực hiện về thời gian (tính theo phút) mà khách hàng phải chờ để được phục vụ:

2	4	4	5	5	7	8	8	9	10
10	12	13	14	15	15	15	16	17	18
18	18	19	19	21	22	22	24	24	24
24	25	28	28	30	32	32	34	34	35

- Lập bảng tần số – tần số tương đối ghép nhóm với các nhóm ghép  $[0; 5)$ ,  $[5; 10)$ ,  $[10; 15)$ ,  $[15; 20)$ ,  $[20; 25)$ ,  $[25; 30)$ ,  $[30; 35)$ .
- Dựa vào kết quả của câu a, hãy cho biết trong 40 người được khảo sát:
  - Bao nhiêu người phải chờ dưới 15 phút?
  - Số người phải chờ từ 20 đến 35 phút chiếm bao nhiêu phần trăm?

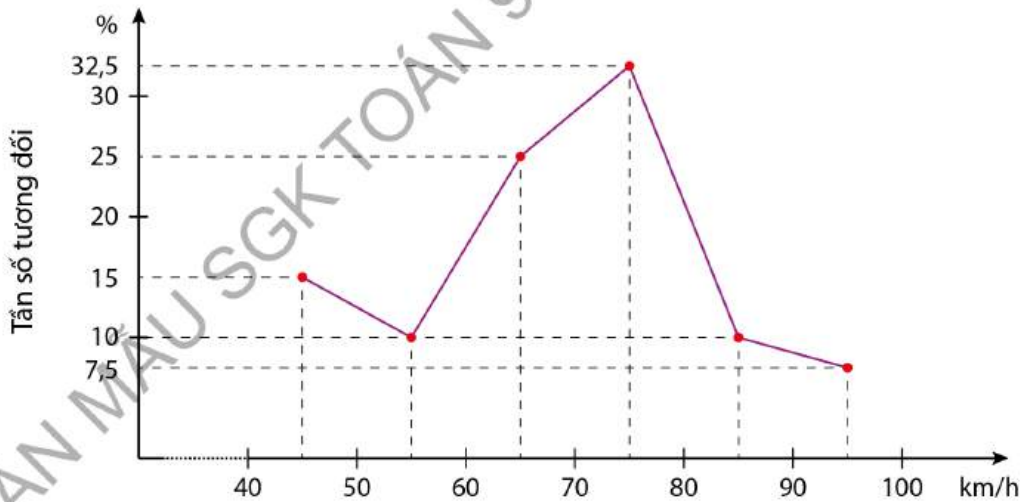
**10.14.** Bảng dưới thống kê doanh thu trong một tuần của 50 cửa hàng thuộc công ty X:

Doanh thu của các cửa hàng

Doanh thu (triệu đồng)	Tần số
$30 \leq S < 50$	3
$50 \leq S < 70$	12
$70 \leq S < 90$	22
$90 \leq S < 110$	8
$110 \leq S < 130$	5
Tổng	$N = 50$

- Lập bảng tần số tương đối thu được từ bảng số liệu đã cho. Hãy cho biết:
  - Nhóm cửa hàng có doanh thu cao nhất chiếm bao nhiêu phần trăm?
  - Nhóm chiếm tỉ số phần trăm cao nhất là nhóm có doanh thu bao nhiêu?
- Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột và biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng.

**10.15.** Dưới đây là biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng biểu diễn dữ liệu về tốc độ của 80 xe ô tô lưu thông trên một đoạn đường:



- Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột ứng với biểu đồ đã cho.
- Có bao nhiêu xe chạy với tốc độ từ 70 km/h đến dưới 80 km/h? Từ 90 km/h đến 100 km/h?

## Bài 5

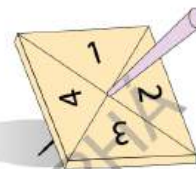
# PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN. KHÔNG GIAN MẪU

Từ khóa: phép thử ngẫu nhiên, không gian mẫu.



Bạn Minh Phong chơi trò quay một con quay dạng hình vuông mà bốn phần được đánh số như ở hình bên và quan sát cạnh song song với mặt đất khi con quay dừng. Khi con quay có cạnh của hình vuông thuộc phần ghi số 4 song song với mặt đất thì Minh Phong thắng.

Trước khi quay con quay, Minh Phong có biết chắc là mình sẽ thắng không?



## 1 PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN

### HOẠT ĐỘNG 1

- a) Khi tung một con xúc xắc có 6 mặt, ta có biết trước là chắc chắn sẽ nhận được mặt 6 chấm không?



- b) Trong hộp có 6 viên bi vàng, 1 viên bi đỏ giống hệt nhau về kích thước, khối lượng. Không nhìn vào hộp và lấy ngẫu nhiên 1 viên bi. Trước khi lấy, ta có chắc chắn sẽ được viên bi đỏ không?

Nếu lần thứ nhất lấy được viên bi đỏ, bỏ lại viên bi vào hộp, trộn đều, rồi lấy lần thứ hai thì có chắc là lần thứ hai cũng lấy được viên bi đỏ không?



Một thí nghiệm, một hành động được gọi là *phép thử ngẫu nhiên* (gọi tắt là *phép thử*) nếu ta không đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra.

### Nhận xét:

Các phép thử ngẫu nhiên có thể được lặp lại nhiều lần, và dù lặp lại trong những điều kiện giống hệt nhau thì cũng không chắc là sẽ cho cùng kết quả.

## VÍ DỤ 1

Mỗi hành động sau có phải là phép thử ngẫu nhiên không? Giải thích vì sao.

- Trên bàn có 5 phiếu giống hệt nhau. Trên 2 phiếu có vẽ hoa mai. Trên 3 phiếu còn lại vẽ hoa đào. Bạn Hà Mi lấy một phiếu bất kì và quan sát hình vẽ trên đó.
- "Để mèn phiếu lưu kí" là quyển sách duy nhất có trên bàn. Bạn Minh Khang lấy một quyển sách trên bàn để đọc.



### Bài giải

- Trước khi thực hiện hành động, bạn Hà Mi đã biết là có 2 kết quả có thể xảy ra: Lấy được phiếu vẽ hoa mai hoặc phiếu vẽ hoa đào. Tuy nhiên Hà Mi không đoán trước được là sẽ lấy trúng phiếu vẽ hoa gì. Vậy đây là một phép thử ngẫu nhiên.
- Khi bạn Minh Khang lấy một quyển sách trên bàn để đọc thì kết quả chắc chắn xảy ra là sẽ lấy được quyển "Để mèn phiếu lưu kí" (vì trên bàn chỉ có quyển sách này). Như vậy ta đã biết trước được kết quả của hành động lấy sách trên bàn. Suy ra hành động lấy sách trên bàn trong trường hợp này không phải là một phép thử ngẫu nhiên.

## LUYỆN TẬP 1

Hãy cho một ví dụ về phép thử ngẫu nhiên.

## 2 KHÔNG GIAN MẪU

### HOẠT ĐỘNG 2

Trong hộp có 4 thẻ màu đỏ được đánh số 1, 2, 3, 4 và 3 thẻ màu xanh được đánh số là 1, 2, 3. Lấy ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Hãy liệt kê các kết quả có thể xảy ra khi thực hiện hành động này. Có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra?



Tập hợp các kết quả có thể xảy ra của một phép thử được gọi là *không gian mẫu* của phép thử đó và kí hiệu là  $\Omega$ .

Tổng số kết quả có thể xảy ra gọi là số kết quả (hay số phần tử) của không gian mẫu.

## VÍ DỤ 2

Trên giá sách có 4 quyển thuộc thể loại Văn học, 3 quyển thuộc thể loại Lịch sử, 2 quyển thuộc thể loại Khoa học viễn tưởng. Bạn Minh Anh rút ngẫu nhiên một quyển. Có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra? Không gian mẫu của phép thử này gồm những phần tử nào?

### Bài giải

Kí hiệu:

- 4 quyển thuộc thể loại Văn học là V1, V2, V3, V4;
- 3 quyển thuộc thể loại Lịch sử là L1, L2, L3;
- 2 quyển thuộc thể loại Khoa học viễn tưởng là K1, K2.

Trên giá có 9 quyển sách nên khi rút ngẫu nhiên một quyển thì có 9 kết quả có thể xảy ra. Như vậy không gian mẫu có 9 kết quả. Cụ thể, các kết quả của không gian mẫu được liệt kê như sau:  $\Omega = \{V1, V2, V3, V4, L1, L2, L3, K1, K2\}$ .

## VÍ DỤ 3

Trong hộp thứ nhất có 5 thẻ được đánh số 1, 2, 3, 4, 5. Trong hộp thứ hai có 4 chữ cái tạo thành từ TOÁN. Lấy ngẫu nhiên một thẻ trong hộp thứ nhất và một chữ cái trong hộp thứ hai. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử đó.

### Bài giải

Để tìm các phần tử của không gian mẫu, ta có thể lập bảng mô tả các kết quả có thể xảy ra của hành động lấy thẻ trong hộp thứ nhất và lấy chữ trong hộp thứ hai như sau:

Thẻ số \ Chữ	T	O	A	N
1	1T	1O	1A	1N
2	2T	2O	2A	2N
3	3T	3O	3A	3N
4	4T	4O	4A	4N
5	5T	5O	5A	5N

Quan sát bảng, ta suy ra không gian mẫu có 20 phần tử. Các phần tử của không gian mẫu là 20 kết quả viết bằng màu xanh trong bảng.

## LUYỆN TẬP 2

Xét trò chơi quay con quay ở phần Khởi động.

- Hãy giải thích rằng đây là một phép thử ngẫu nhiên.
- Liệt kê các phần tử của không gian mẫu của phép thử này.

### LUYỆN TẬP 3

Xét phép thử tung một đồng xu và một con xúc xắc 6 mặt. Hãy liệt kê các phần tử của không gian mẫu.



### BÀI TẬP

**10.16.** Trong các hành động dưới đây, hành động nào là phép thử ngẫu nhiên? Giải thích vì sao.

- Lấy một viên bi bất kì trong hộp kín đựng những viên bi có màu khác nhau;
- Tìm kết quả của một dãy phép tính;
- Lấy trên giá của siêu thị một chùm nho, cân và ghi lại khối lượng của nó.

**10.17.** Xét phép thử quay bánh xe ở hình dưới để quan sát xem khi bánh xe dừng thì mũi kim (được gắn cố định) chỉ vào ô ghi số mấy. Hãy liệt kê các phần tử của không gian mẫu.



**10.18.** Trong bể cá có 15 con gồm ba màu đỏ, trắng và vàng. Số cá màu đỏ gấp hai lần số cá màu vàng. Số cá màu vàng nhiều hơn 1 con so với số cá màu trắng. Bắt một con cá bất kì trong bể. Hãy liệt kê các phần tử của không gian mẫu của phép thử bắt cá.

**10.19.** Xét phép thử tung hai lần một con xúc xắc 4 mặt có ghi các số từ 1 đến 4 và tính tổng hai số ghi trên mặt úp qua hai lần tung. Hãy liệt kê các phần tử của không gian mẫu.



## Bài 6

# CÁCH TÍNH XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ TRONG MỘT SỐ MÔ HÌNH ĐƠN GIẢN

Từ khóa: kết quả thuận lợi, xác suất của biến cố.



### Trò chơi "rút thẻ"

Trong hộp có 10 thẻ giống hệt nhau. Trên mỗi thẻ có ghi một trong các số từ 1 đến 10 (không có thẻ nào trùng số). Bạn Trung rút ngẫu nhiên một thẻ, xác định số ghi trên thẻ rồi bỏ lại vào hộp. Nếu lấy được thẻ có ghi một số chia hết cho 3 thì Trung được 1 điểm thưởng và có quyền rút thẻ lần nữa. Nếu rút được thẻ ghi số không chia hết cho 3 thì Trung phải nhường lượt chơi cho đối thủ. Kết thúc trò chơi, ai nhiều điểm thưởng hơn thì người đó thắng.

Trong mỗi lần bạn Trung rút thẻ, xác suất để bạn ấy được điểm thưởng là bao nhiêu?

## 1 KẾT QUẢ THUẬN LỢI CHO MỘT BIẾN CỐ

### HOẠT ĐỘNG 1

Xét trò chơi "rút thẻ" nói trên. Gọi  $A$  là biến cố "Bạn Trung được 1 điểm thưởng". Trong mỗi lần bạn Trung rút thẻ, có những kết quả nào dẫn đến việc biến cố  $A$  xảy ra?

Ta nói  $A$  là một biến cố liên quan đến phép thử ngẫu nhiên  $T$  nếu việc  $A$  xảy ra hay không xảy ra phụ thuộc vào kết quả nhận được khi thực hiện phép thử  $T$ .



Cho  $A$  là một biến cố liên quan đến phép thử ngẫu nhiên  $T$ . Một kết quả của  $T$  dẫn đến việc xảy ra biến cố  $A$  được gọi là *kết quả thuận lợi cho biến cố  $A$* .

### VÍ DỤ 1

Xét phép thử tung một con xúc xắc cân đối và đồng chất có 6 mặt. Gọi  $A$  là biến cố "Nhận được mặt có số chấm là số nguyên tố". Hãy liệt kê những kết quả thuận lợi cho biến cố  $A$ .



### Bài giải

Khi tung xúc xắc 6 mặt thì các kết quả có thể xảy ra là: nhận được mặt 1 chấm, 2 chấm, ..., 6 chấm. Trong các số từ 1 đến 6 có ba số nguyên tố là 2, 3 và 5. Vậy có ba kết quả thuận lợi cho biến cố  $A$ , đó là:

- Nhận được mặt 2 chấm;
- Nhận được mặt 3 chấm;
- Nhận được mặt 5 chấm.

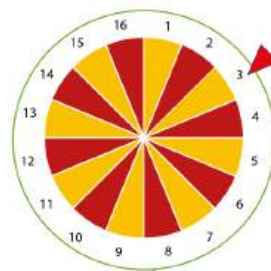
## LUYỆN TẬP 1

Bánh xe được chia thành 16 hình quạt bằng nhau, đánh số thứ tự từ 1 đến 16. Quay bánh xe và quan sát xem khi nó dừng thì mũi kim (được gắn cố định) chỉ vào hình quạt số mấy (ta nói ngắn gọn là "kim chỉ vào số mấy").

Hãy liệt kê các kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố sau:

A: "Kim chỉ vào số là bội của 5";

B: "Kim chỉ vào số là ước của 14".



## VÍ DỤ 2

Bảng 10.26 thống kê tuổi các thành viên tham gia câu lạc bộ bơi lội của một nhà văn hoá thiếu nhi.

Bảng 10.26. Tuổi của các thành viên câu lạc bộ bơi lội

	10 tuổi	12 tuổi	13 tuổi	14 tuổi	Tổng số
Nam	3	5	7	15	30
Nữ	5	6	10	6	27
Tổng số	8	11	17	21	57

Lấy ngẫu nhiên một bạn trong danh sách để kiểm tra sức khỏe. Xét các biến cố:

- A: "Chọn được một bạn nữ 10 tuổi";
- B: "Chọn được một bạn nữ";
- C: "Chọn được một bạn nam 13 tuổi hoặc 14 tuổi".

Hãy xác định số kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố A, B, C.

### Bài giải

- Trong câu lạc bộ có 5 bạn nữ 10 tuổi nên khi lấy ngẫu nhiên một người thì có 5 kết quả thuận lợi cho biến cố A xảy ra.
- Tổng số thành viên nữ là 27 nên có 27 kết quả thuận lợi để biến cố B xảy ra.
- Có 7 bạn nam 13 tuổi và 15 bạn nam 14 tuổi. Như vậy tổng số bạn nam 13 tuổi hoặc 14 tuổi là 22. Suy ra có 22 kết quả thuận lợi cho biến cố C.

## LUYỆN TẬP 2

Bảng 10.27 biểu diễn kết quả thống kê của một bệnh viện về cân nặng của một số trẻ sơ sinh.

Bảng 10.27. Cân nặng của một số trẻ sơ sinh

Cân nặng (g)		[2 800; 3 000)	[3 000; 3 200)	[3 200; 3 400)	[3 400; 3 600]	Tổng số
Tần số	Bé gái	4	17	10	5	36
	Bé trai	3	18	8	3	32

Chọn ngẫu nhiên một trẻ sơ sinh trong số này. Xác định số kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố sau:

- $M$ : "Chọn được một bé gái thuộc nhóm có cân nặng trong khoảng  $[3\ 200; 3\ 400)$  (g)";
- $N$ : "Chọn được một bé cân nặng dưới 3 000 g";
- $O$ : "Chọn được một bé trai cân nặng không dưới 3 200 g".

## 2 TÍNH XÁC SUẤT CỦA MỘT BIẾN CỐ

### HOẠT ĐỘNG 2

Bạn Mai tạo danh sách gồm những bài hát mình yêu thích trên một ứng dụng nghe nhạc. Danh sách của Mai gồm có 7 bài hát tiếng Việt, 4 bài hát tiếng Anh, 6 bài hát tiếng Pháp. Mỗi lần nghe nhạc, Mai mở danh sách và chọn chế độ phát ngẫu nhiên. Theo chế độ này, ứng dụng nghe nhạc sẽ bắt đầu từ một bài chọn ngẫu nhiên trong danh sách.

- Xác định không gian mẫu của phép thử chọn ngẫu nhiên một bài hát.
- Khả năng mỗi bài được chọn có như nhau không?
- Liệt kê các kết quả thuận lợi cho biến cố  $A$ : "Bài bắt đầu là một bài hát tiếng Pháp".
- Chép lại câu sau và tìm số thích hợp cho các ô  $?$ :  
"Có  $?$  trên  $?$  kết quả để biến cố  $A$  xảy ra".

Vì khả năng xảy ra các kết quả trong phép thử "chọn ngẫu nhiên một bài hát" đều như nhau nên người ta nói đó là các *kết quả đồng khả năng*. Trong 17 kết quả của không gian mẫu, có 6 kết quả thuận lợi cho biến cố  $A$  nên tỉ số  $\frac{6}{17}$  phản ánh khả năng xảy ra biến cố  $A$ . Như ta đã biết, khả năng này được gọi là xác suất  $P(A)$  của biến cố  $A$ . Như vậy:

$$P(A) = \frac{\text{Số kết quả thuận lợi cho biến cố } A}{\text{Số phần tử của không gian mẫu}}$$



Cho  $A$  là một biến cố liên quan đến phép thử  $T$ . Nếu phép thử  $T$  có  $n$  kết quả đồng khả năng xảy ra, trong đó có  $k$  kết quả thuận lợi cho biến cố  $A$ , thì xác suất của biến cố  $A$  được tính theo công thức:

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

### Nhận xét:

Từ công thức trên, suy ra việc tính xác suất của biến cố  $A$  liên quan đến phép thử ngẫu nhiên  $T$  được thực hiện qua các bước:

**Bước 1** Tìm  $n$  (số kết quả có thể xảy ra).

- Bước 2** Chỉ ra sự đồng khả năng của các kết quả.  
**Bước 3** Tìm  $k$  (số kết quả thuận lợi cho biến cố  $A$ ).  
**Bước 4** Lập tỉ số  $\frac{k}{n}$ .

### VÍ DỤ 3

Tung một con xúc xắc cân đối và đồng chất có 6 mặt được đánh số 1, 2, 3, 4, 5, 6. Tính xác suất của biến cố "Nhận được mặt ghi số chẵn".



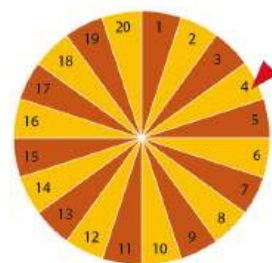
#### Bài giải

Xúc xắc có 6 mặt nên khi tung thì có 6 kết quả có thể xảy ra (nhận được mặt ghi số 1, 2, ..., 6). Con xúc xắc cân đối và đồng chất nên đây là 6 kết quả đồng khả năng. Gọi  $A$  là biến cố "Nhận được mặt ghi số chẵn". Có 3 kết quả thuận lợi cho  $A$ , đó là nhận được mặt ghi số 2, hoặc số 4, hoặc số 6. Vậy  $P(A) = \frac{3}{6}$  hay  $P(A) = \frac{1}{2}$ .

### LUYỆN TẬP 3

Xét phép thử quay bánh xe và quan sát xem khi nó dừng thì mũi kim (được gắn cố định) chỉ vào ô số mấy. Tính xác suất của các biến cố:

- X: "Kim chỉ ô số lẻ";
- Y: "Kim chỉ ô có số là bội của 4";
- Z: "Kim chỉ ô có số là ước lớn hơn 1 của 18".



### VÍ DỤ 4

Xét bảng thống kê tuổi các thành viên câu lạc bộ bơi lội cho trong Ví dụ 2.

Tuổi của các thành viên câu lạc bộ bơi lội

	10 tuổi	12 tuổi	13 tuổi	14 tuổi	Tổng số
Nam	3	5	7	15	30
Nữ	5	6	10	6	27
Tổng số	8	11	17	21	57

Chọn ngẫu nhiên một bạn trong danh sách câu lạc bộ để kiểm tra thành tích bơi 50 m. Tính xác suất của các biến cố:

- L: "Chọn được một bạn nam 10 tuổi";
- M: "Chọn được một bạn nữ chưa đến 13 tuổi";
- N: "Chọn được một bạn 13 hoặc 14 tuổi".

#### Bài giải

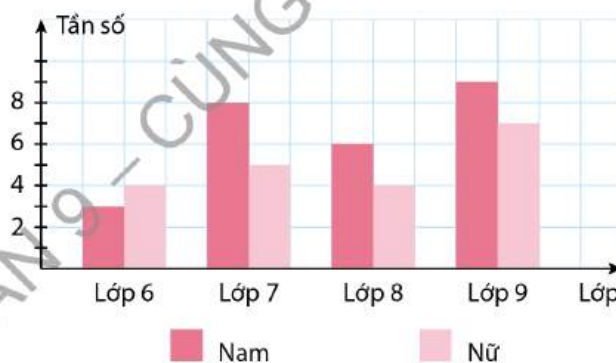
Theo bảng đã cho thì tổng số thành viên của câu lạc bộ bơi lội là 57. Do đó nếu phép thử là chọn ngẫu nhiên một người trong danh sách thì có 57 kết quả có thể xảy ra. Suy ra không gian mẫu của phép thử có 57 kết quả. Các kết quả này đồng khả năng (khả năng chọn được người nào trong danh sách cũng như nhau).

- a) Xét biến cố  $L$ : "Chọn được một bạn nam 10 tuổi".  
 Trong câu lạc bộ có 3 bạn nam 10 tuổi, nên khi lấy ngẫu nhiên một người thì có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố  $L$ . Vậy  $P(L) = \frac{3}{57}$  hay  $P(L) = \frac{1}{19}$ .
- b) Xét biến cố  $M$ : "Chọn được một bạn nữ chưa đến 13 tuổi".  
 Trong câu lạc bộ không có bạn nào 11 tuổi. Có 5 bạn nữ 10 tuổi và 6 bạn nữ 12 tuổi. Vậy có 11 bạn nữ chưa đến 13 tuổi. Do đó khi lấy ngẫu nhiên một người thì có 11 kết quả thuận lợi cho biến cố  $M$ . Suy ra  $P(M) = \frac{11}{57}$ .
- c) Xét biến cố  $N$ : "Chọn được một bạn 13 hoặc 14 tuổi".  
 Trong câu lạc bộ có 17 bạn 13 tuổi và 21 bạn 14 tuổi nên khi lấy ngẫu nhiên một người thì có  $17 + 21 = 38$  kết quả thuận lợi cho biến cố  $N$ . Vậy  $P(N) = \frac{38}{57}$ .

#### LUYỆN TẬP 4

Hình 10.11 là biểu đồ thống kê số học sinh tham gia câu lạc bộ cờ vua. Lấy ngẫu nhiên một học sinh trong số này. Tính xác suất của các biến cố:

- a) Lấy được một học sinh nữ lớp 9;  
 b) Lấy được một học sinh lớp 6;  
 c) Lấy được một học sinh nam lớp 7 hoặc lớp 8.



Hình 10.11

#### VẬN DỤNG 1

Trở lại với tình huống ở phần Khởi động. Hãy tính xác suất của biến cố "Bạn Trung được điểm thưởng" trong mỗi lần rút thẻ.

#### VẬN DỤNG 2

Chuẩn bị cho ngày Hội xuân được tổ chức hằng năm, khối 9 chịu trách nhiệm tổ chức một số gian hàng và trò chơi. Khối 9 của trường có 16 lớp nên ban tổ chức chuẩn bị 16 phiếu để các lớp bốc thăm. Các phiếu được đánh số thứ tự từ 1 đến 16 và trên đó có ghi một trong ba nhiệm vụ "tổ chức gian hàng ẩm thực", "tổ chức gian hàng quà lưu niệm", "tổ chức trò chơi dân gian". Biết rằng trường dự định tổ chức 7 gian "ẩm thực" và số gian "trò chơi dân gian" nhiều gấp hai lần số gian "quà lưu niệm". Lớp 9A1 được mời lên bốc thăm đầu tiên. Tính xác suất để lớp 9A1 bốc được phiếu "tổ chức trò chơi dân gian".

## BÀI TẬP

**10.20.** Phân xưởng H của nhà máy có 2 kĩ sư, 25 kĩ thuật viên và 7 thợ học việc. Người ta chọn ngẫu nhiên một người trong số này để phỏng vấn về chế độ đãi ngộ của nhà máy. Hãy tính xác suất của các biến cố:

- Chọn được một thợ học việc;
- Chọn được một kĩ sư hoặc kĩ thuật viên.

**10.21.** Tung hai lần con xúc xắc bốn mặt được đánh số 1, 2, 3, 4 và tính tổng của hai số được ghi trên mặt úp xuống. Tìm xác suất của biến cố:

- A: "Tổng hai số bằng 5";
- B: "Tổng hai số không phải là ước của 8".



**10.22.** Nhà máy đã kiểm tra chất lượng sản phẩm do hai dây chuyền Y, Z sản xuất và thống kê số sản phẩm đạt, không đạt chất lượng trong bảng sau:

Chất lượng sản phẩm		Đạt	Không đạt	Tổng
Số sản phẩm	Dây chuyền Y	250	14	264
	Dây chuyền Z	270	18	288
Tổng		520	32	552

Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm trong số những sản phẩm này. Tính xác suất của biến cố:

- C: "Lấy được một phế phẩm (sản phẩm không đạt chất lượng)";
- D: "Lấy được một sản phẩm đạt chất lượng do dây chuyền Z sản xuất";
- E: "Lấy được một sản phẩm do dây chuyền Y sản xuất".

**10.23.** Trong hộp có các chữ cái vừa đủ để xếp thành từ CÙNG KHÁM PHÁ. Lấy ngẫu nhiên một chữ cái trong hộp. Tìm xác suất của biến cố A: "Lấy được một phụ âm".

**10.24.** Phòng thí nghiệm của một nhà máy sản xuất bóng đèn thông báo: Trong số những bóng đèn sợi đốt đã kiểm tra, 26% bóng có tuổi thọ tối thiểu 1 200 giờ, còn lại là số bóng đạt tuổi thọ dưới 1 200 giờ. Hỏi xác suất để một khách hàng mua được một bóng đèn có tuổi thọ tối thiểu 1 200 giờ là bao nhiêu?

**10.25.** Một hộp đựng 20 viên bi đỏ và xanh có cùng kích thước, khối lượng. Tìm số viên bi mỗi màu, biết rằng xác suất của biến cố A: "Lấy được bi đỏ" khi thực hiện phép thử lấy ngẫu nhiên một viên bi là  $P(A) = 0,6$ .

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**10.26.** Thủ kho kiểm kê số hộp sơn màu trắng dùng để sơn gỗ và nhận thấy còn có 221 hộp loại 0,5 kg; 272 hộp loại 1 kg; 170 hộp loại 2 kg; 187 hộp loại 5 kg.

a) Hoàn thiện bảng sau:

*Sơn gỗ màu trắng còn lại trong kho*

Loại hộp (theo kg)	0,5	1	2	5	Tổng số
Tần số	221	272	170	187	?
Tần số tương đối	?	?	?	?	1
Tần số tương đối (%)	?	?	?	?	100

- b) Trong kho còn bao nhiêu hộp sơn gỗ màu trắng? Loại hộp nặng trên 1 kg có chiếm 50% số hộp còn lại trong kho không?
- c) Hãy vẽ một biểu đồ biểu diễn số liệu ở dòng thứ hai của bảng lập được ở câu a.
- d) Đối với dòng thứ tư của bảng, có thể sử dụng những loại biểu đồ nào? Vẽ các biểu đồ thuộc những loại đó và cho biết mỗi biểu đồ minh họa rõ nhất đặc điểm gì của số liệu.

**10.27.** Người quản lí cửa hàng bánh mì ghi lại số bánh bán được theo ngày trong bảng dưới đây:

125	112	145	137	137	125	160	145	125	145
160	145	160	125	137	145	145	137	160	145

- a) Lập bảng tần số – tần số tương đối của dữ liệu do người quản lí cửa hàng ghi lại.
- b) Dựa vào bảng đó, cho biết:
  - Mỗi ngày cửa hàng bán được nhiều nhất là bao nhiêu bánh?
  - Lượng bánh mà nhiều ngày bán được nhất là bao nhiêu?
  - Số ngày bán được ít bánh nhất chiếm bao nhiêu phần trăm?

**10.28.** Trường Trung học cơ sở Hoà Bình tổ chức kiểm tra cuối học kì 1 cho học sinh toàn khối lớp 9. Bảng dưới biểu diễn số liệu về điểm từ 7 đến 10 môn Tiếng Anh của học sinh lớp 9A1:

*Lớp 9A1: Thống kê điểm kiểm tra cuối học kì 1 môn Tiếng Anh (từ điểm 7 trở lên)*

Điểm	7	8	9	10	Tổng số
Tần số	?	?	3	?	?
Tần số tương đối (%)	40	35	?	10	?

- Hãy kẻ lại bảng và hoàn thiện nó, biết rằng lớp 9A1 có 20 bạn đạt từ 7 điểm trở lên.
- Vẽ biểu đồ tần số dạng cột. Dùng biểu đồ đó để nhận xét về số học sinh đạt điểm 7 và 8 của lớp 9A1.
- Vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng hình quạt biểu diễn số liệu đã cho. Nếu kết quả của lớp 9A1 đại diện được cho toàn khối 9 thì có thể nói gì về tỉ lệ học sinh của khối đạt điểm 9 hoặc 10?

**10.29.** Để điều tra sức mua của thị trường, siêu thị U tìm hiểu số tiền ghi trên hoá đơn của một số khách hàng được chọn ngẫu nhiên. Kết quả thống kê được ghi lại trong bảng sau:

Tiền trả của khách hàng (đơn vị: nghìn đồng)

125	135	150	168	175	225	230	230	250	255
260	260	270	285	290	310	320	320	325	325
350	350	382	400	420	440	475	505	540	580

- Lập bảng tần số – tần số tương đối ghép nhóm, với các nhóm ghép  $[100; 200)$ ,  $[200; 300)$ ,  $[300; 400)$ ,  $[400; 500)$ ,  $[500; 600]$  (làm tròn kết quả đến hàng phần chục nghìn trước khi chuyển sang viết tần số tương đối ở dạng phần trăm).
- Dựa vào kết quả của câu a, hãy cho biết nhóm khách hàng nào đông nhất và nhóm khách hàng nào ít nhất. Tỉ lệ khách hàng chi tiêu ở mức tối thiểu là 400 nghìn đồng chiếm bao nhiêu phần trăm?
- Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột và dạng đoạn thẳng biểu diễn mẫu số liệu.

**10.30.** Bảng dưới được thiết lập để biểu diễn kết quả cuộc điều tra 1 200 người về thời gian họ dành cho bữa ăn trưa hằng ngày:

Thời gian $t$ (phút)	Tần số	Tần số tương đối (%)
$15 \leq t < 30$	144	12
$30 \leq t < 45$	?	42
$45 \leq t < 60$	?	20
$60 \leq t < 75$	?	22
$75 \leq t \leq 90$	48	5
Tổng số	1 200	

- Trong bảng có một lỗi tính toán. Hãy kiểm tra xem là lỗi nào.
- Kẻ lại bảng và sửa lỗi, đồng thời bổ sung những kết quả tính toán còn chưa được thực hiện.

- c) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột biểu diễn bảng số liệu lập ở câu b. Từ biểu đồ, em có nhận xét gì về thời gian dành cho bữa ăn trưa của những người được điều tra?

**10.31.** Xét các hành động sau:

- Chọn ngẫu nhiên một người trong danh sách có 10 người;
  - Lấy một viên bi trong hộp khi biết rằng trong đó chỉ có một viên bi vàng;
  - Lấy ngẫu nhiên một bình hoa trong thùng có sáu bình để kiểm tra chất lượng.
- a) Trong các hành động đó, hành động nào là phép thử ngẫu nhiên? Vì sao?  
b) Đối với những hành động là phép thử ngẫu nhiên, hãy liệt kê các phần tử của không gian mẫu.

**10.32.** Túi kẹo trái cây có 60 viên, trong đó có 20 viên kẹo vị sầu riêng, 15 viên kẹo vị cam, 7 viên kẹo vị dâu, 10 viên kẹo vị chanh, 8 viên kẹo vị mít. Bạn Toàn lấy ngẫu nhiên một viên kẹo trong túi. Tính xác suất của các biến cố:

- a)  $E$ : "Bạn Toàn lấy được kẹo vị sầu riêng";  
b)  $F$ : "Bạn Toàn lấy được kẹo vị cam hoặc chanh";  
c)  $G$ : "Bạn Toàn không lấy được kẹo vị dâu".

**10.33.** Đài truyền hình điều tra ý kiến của một số khán giả về một chương trình giải trí. Kết quả điều tra được thống kê trong bảng bên.

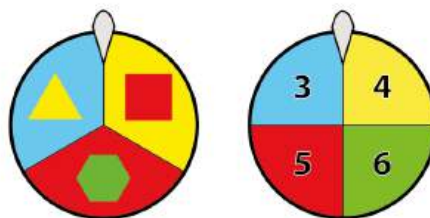
	Thích	Không thích
Nam	523	154
Nữ	147	68

Chọn ngẫu nhiên một trong số những người được điều tra. Tính xác suất của các biến cố:

- a)  $A$ : "Chọn được 1 khán giả nữ không thích chương trình";  
b)  $B$ : "Chọn được 1 khán giả nam";  
c)  $C$ : "Chọn được 1 khán giả thích chương trình".

**10.34.** Bạn Huệ quay hai vòng tròn như hình dưới và ghi lại kết quả nhận được.

- a) Hãy cho biết các phần tử của không gian mẫu.  
b) Bạn Huệ quan tâm đến biến cố  $A$ : "Số cạnh của đa giác nhận được ở bánh xe thứ nhất bằng số tự nhiên nhận được từ bánh xe thứ hai". Hỏi trong mỗi lần bạn Huệ quay hai bánh xe, xác suất để biến cố  $A$  xảy ra là bao nhiêu?



## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Điểm kiểm tra môn Lịch sử của 25 học sinh khối 9 có kết quả cao được ghi lại như sau:

9	7	8	10	8	9	7	8	10	8
9	8	10	9	7	7	8	9	7	7
7	8	8	7	7					

Sử dụng dữ liệu đã cho để chọn đáp án cho các bài **10.35** và **10.36**.

**10.35.** Bảng tần số biểu diễn số liệu đã cho là

A.

Điểm	Tần số
7	6
8	8
9	8
10	3

B.

Điểm	Tần số
7	9
8	7
9	7
10	3

C.

Điểm	Tần số
7	9
8	8
9	6
10	3

D.

Điểm	Tần số
7	9
8	8
9	5
10	3

**10.36.** Bảng tần số tương đối biểu diễn số liệu đã cho là

A.

Điểm	7	8	9	10
Tần số tương đối (%)	35	30	20	16

B.

Điểm	7	8	9	10
Tần số tương đối (%)	36	32	22	9

C.

Điểm	7	8	9	10
Tần số tương đối (%)	31	29	20	20

D.

Điểm	7	8	9	10
Tần số tương đối (%)	36	32	20	12



**10.39.** Tổng đài của một hãng taxi thống kê lại số chuyến theo quãng đường của các tài xế trong 1 giờ và có bảng số liệu sau:

Quãng đường $s$ (km)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25]	Tổng số
Tần số	8	50	12	10	80

Tổng các tần số tương đối của hai nhóm [5; 10) và [15; 20) là

- A. 20%.
- B. 25%.
- C. 30%.
- D. 35%.

**10.40.** Trong hộp có 8 thẻ xanh, 5 thẻ đỏ, 12 thẻ vàng. Xét phép thử rút ngẫu nhiên 1 thẻ. Không gian mẫu của phép thử này có

- A. 8 phần tử.
- B. 5 phần tử.
- C. 12 phần tử.
- D. 25 phần tử.

**10.41.** Viết ngẫu nhiên một số có hai chữ số. Xét biến cố A: "Số nhận được là số chia hết cho 9". Số trường hợp thuận lợi cho biến cố A là

- A. 9.
- B. 10.
- C. 11.
- D. 12.

**10.42.** Trong hộp có 100 thẻ được đánh số từ 1 đến 100. Lấy ngẫu nhiên một thẻ. Xét biến cố A: "Số trên thẻ lấy ra có chữ số 1". Xác suất của biến cố A là

- A.  $P(A) = \frac{19}{100}$ .
- B.  $P(A) = \frac{11}{100}$ .
- C.  $P(A) = \frac{1}{5}$ .
- D.  $P(A) = \frac{1}{10}$ .

# HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

**Mục tiêu:** Tìm hiểu và thực hành sử dụng phần mềm Microsoft Excel vào việc:

- Lập bảng tần số, tần số tương đối cho mẫu số liệu không ghép nhóm từ một bảng dữ liệu thống kê ban đầu (gọi là bảng dữ liệu thô);
- Lập bảng tần số, tần số tương đối ghép nhóm từ một bảng dữ liệu thô, chưa ghép nhóm.

**Yêu cầu chuẩn bị:**

- Máy tính có cài đặt phần mềm Microsoft Excel 365;
- Một bảng số liệu về số người trong gia đình của một số học sinh;

*Số người trong gia đình của một số học sinh*

5	4	6	5	7	4	3	4	4	6
6	7	4	5	4	3	3	4	5	4
4	5	3	4	6	4	4	6	3	5

- Một bảng số liệu về cân nặng của một số học sinh lớp 9.

*Cân nặng của học sinh (đơn vị: kg)*

46	48	48	52	50	51	50	42	42	53
53	54	49	54	55	47	55	46	45	56
56	49	56	43	44	53	45	47	52	57

**Tổ chức hoạt động:** Lớp học chia thành nhiều nhóm, mỗi nhóm gồm 4 – 5 bạn thực hành và lưu kết quả trên máy.

**Hoạt động 1: Lập bảng tần số, tần số tương đối cho mẫu số liệu không ghép nhóm**

Lập bảng tần số và tần số tương đối cho bảng dữ liệu dưới đây:

*Bảng 10.28. Năng suất lúa (tạ/ha)*

50	49	51	51	48	51	52	50	48
51	52	49	50	48	50	50	49	50

**Bước 1** Nhập dữ liệu vào bảng tính

Sau khi mở phần mềm Microsoft Excel, nhập các số liệu từ *Bảng 10.28* vào các ô của cùng một hàng, chẳng hạn nhập các số liệu vào các ô từ A1 đến R1 (*Hình 10.12*).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	50	51	49	52	51	49	51	50	48	48	51	50	52	50	50	49	48	50

*Hình 10.12*

**Bước 2** Lập bảng tần số

Viết "Năng suất (tạ/ha)" vào ô A3 và "Tần số" vào ô A4.

Tại ô B3, ta nhập **=SORT(UNIQUE(A1:R1, TRUE), 1, 1, TRUE)**. Ở đây:

- **UNIQUE** là hàm lọc ra các giá trị trong một danh sách;
- **SORT** là hàm sắp xếp dữ liệu theo thứ tự tăng dần hoặc giảm dần.

Khi đó, phần mềm sẽ tự động tìm các giá trị khác nhau từ vùng A1:R1 và sắp xếp chúng theo thứ tự tăng dần từ ô B3 đến ô F3 (Hình 10.13). Viết "Tổng" vào ô G3.

=SORT(UNIQUE(A1:R1, TRUE), 1, 1, TRUE)

	A	B	C	D	E	F	G
3	Năng suất (tạ/ha)	48	49	50	51	52	Tổng
4	Tần số						

Hình 10.13

Tại ô B4, nhập =COUNTIF(\$A\$1:\$R\$1, B3) (Hình 10.14). Ở đây:

- COUNTIF là hàm đếm số lượng thoả mãn điều kiện;
- \$A\$1:\$R\$1 là vùng dữ liệu ta đã nhập ở Bước 1;
- B3 là ô có giá trị ta muốn tìm tần số.

**Lưu ý:**

Ngoài cách nhập \$A\$1:\$R\$1 ta có thể dùng chuột quét vùng dữ liệu A1:R1 rồi nhấn phím F4.

	A	B	C	D	E	F	G
3	Năng suất (tạ/ha)	48	49	50	51	52	Tổng
4	Tần số	=COUNTIF(\$A\$1:\$R\$1, B3)					

Hình 10.14

Làm tương tự cho các ô C4, D4, E4, F4 (có thể sao chép ô B4 dán cho các ô còn lại). Tại ô G4, nhập =SUM(B4:F4) để tính tổng. Khi đó ta được bảng tần số (Hình 10.15).

	A	B	C	D	E	F	G
3	Năng suất (tạ/ha)	48	49	50	51	52	Tổng
4	Tần số	3	3	6	4	2	18

Hình 10.15

### Bước 3 Lập bảng tần số tương đối

Viết "Tần số tương đối (%)" vào ô A5. Tại ô B5, nhập =B4/\$G\$4\*100 (Hình 10.16).

	A	B	C	D	E	F	G
3	Năng suất (tạ/ha)	48	49	50	51	52	Tổng
4	Tần số	3	3	6	4	2	18
5	Tần số tương đối (%)	=B4/\$G\$4*100					

Hình 10.16

Làm tương tự cho các ô C5, D5, E5, F5, G5 (có thể sao chép ô B5 dán cho các ô còn lại) ta được bảng tần số – tần số tương đối (Hình 10.17).

	A	B	C	D	E	F	G
3	<b>Năng suất (tạ/ha)</b>	48	49	50	51	52	Tổng
4	<b>Tần số</b>	3	3	6	4	2	18
5	<b>Tần số tương đối (%)</b>	16.67	16.67	33.33	22.22	11.11	100

Hình 10.17

**Thực hành:** Dùng phần mềm Excel để lập bảng tần số, tần số tương đối cho bảng dữ liệu về số người trong gia đình của mỗi bạn trong lớp. Giả sử bảng đó là:

Bảng 10.29. Số người trong gia đình của một số học sinh

5	4	6	5	7	4	3	4	4	6
6	7	4	5	4	3	3	4	5	4
4	5	3	4	6	4	4	6	3	5

### Hoạt động 2: Lập bảng tần số, tần số tương đối cho mẫu số liệu ghép nhóm

Lập bảng tần số, tần số tương đối ghép nhóm cho bảng dữ liệu về chiều cao của học sinh.

Bảng 10.30. Chiều cao của học sinh (đơn vị: cm)

146	148	148	150	150	151	151	152	152	152
153	154	154	154	155	155	155	155	155	156
156	156	156	157	157	159	159	160	162	163
163	163	163	163	164	165	167	168	168	170

#### Bước 1 Nhập dữ liệu vào bảng tính

Sau khi mở phần mềm Microsoft Excel, ta nhập các số liệu từ Bảng 10.30 vào các ô A1 đến J4 của bảng tính (Hình 10.18).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	146	148	148	150	150	151	151	152	152	152
2	153	154	154	154	155	155	155	155	155	156
3	156	156	156	157	157	159	159	160	162	163
4	163	163	163	163	164	165	167	168	168	170

Hình 10.18

#### Bước 2 Lập bảng tần số

Viết "Chiều cao (cm)" vào ô L1 và "Tần số" vào ô L2.

Giả sử ta chia số liệu theo các nhóm ghép [146; 152], [152; 158], [158; 164], [164; 170]. Khi đó, ta nhập vào các ô M1 đến P1 như Hình 10.19. Viết "Tổng" vào ô Q1.

	L	M	N	O	P	Q
1	<b>Chiều cao (cm)</b>	[146; 152]	[152; 158]	[158; 164]	[164; 170]	Tổng
2	<b>Tần số</b>					

Hình 10.19

Tại ô M2, ta nhập hàm **=COUNTIFS(\$A\$1:\$J\$4,">=146",\$A\$1:\$J\$4,"<152")** (Hình 10.20). Ở đây:

- **COUNTIFS** là hàm đếm số lượng thoả mãn nhiều điều kiện;
- **\$A\$1:\$J\$4** là vùng dữ liệu ta đã nhập ở Bước 1;
- **">=146"** và **"<152"** là điều kiện đếm số số liệu thuộc nhóm ghép [146; 152).

	L	M	N	O	P	Q
1	Chiều cao (cm)	[146; 152]	[152; 158]	[158; 164]	[164; 170]	Tổng
2	Tần số	=COUNTIFS(\$A\$1:\$J\$4,">=146",\$A\$1:\$J\$4,"<152")				

Hình 10.20

Làm tương tự ở các ô N2 đến P2 (có thể sao chép ô M2 dán cho các ô còn lại nhưng phải **đổi điều kiện cho phù hợp** với từng nhóm ghép). Tại ô Q2, ta nhập **=SUM(M2:P2)** để tính tổng. Khi đó ta được bảng tần số (Hình 10.21).

	L	M	N	O	P	Q
1	Chiều cao (cm)	[146; 152]	[152; 158]	[158; 164]	[164; 170]	Tổng
2	Tần số	7	18	9	6	40

Hình 10.21

### Bước 3 Lập bảng tần số tương đối

Thực hiện tương tự như Bước 3 của Hoạt động 1 (nhập **=M2/\$Q\$2\*100** ở ô M3, sao chép ô M3 dán cho các ô N3 đến Q3) ta được bảng tần số và tần số tương đối ghép nhóm (Hình 10.22).

	L	M	N	O	P	Q
1	Chiều cao (cm)	[146; 152]	[152; 158]	[158; 164]	[164; 170]	Tổng
2	Tần số	7	18	9	6	40
3	Tần số tương đối (%)	17.5	45	22.5	15	100

↑  
=M2/\$Q\$2\*100

Hình 10.22

**Thực hành:** Lập bảng tần số, tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu về cân nặng của một số học sinh theo các nhóm ghép [42; 45), [45; 48), [48; 51), [51; 54), [54; 57].

Bảng 10.31. Cân nặng của học sinh (đơn vị: kg)

46	48	48	52	50	51	50	42	42	53
53	54	49	54	55	47	55	46	45	56
56	49	56	43	44	53	45	47	52	57

## BẢNG TRA CỨU THUẬT NGỮ

### B

Bán kính của hình cầu	77
Bảng tần số	98
Bảng tần số ghép nhóm	114
Bảng tần số tương đối	106
Bảng tần số tương đối ghép nhóm	116
Biểu đồ tần số	100
Biểu đồ tần số tương đối (dạng cột và dạng hình quạt tròn)	109
Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột	117
Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng	118

### C

Cạnh của đa giác	42
Cạnh của đa giác lồi	43
Chiều cao của hình nón	70
Chiều cao của hình trụ	63
Công thức nghiệm của phương trình bậc hai	9
Công thức nghiệm thu gọn của phương trình bậc hai	11

### D

Diện tích mặt cầu	80
Diện tích xung quanh của hình nón	72
Diện tích xung quanh của hình trụ	64

### Đ

Đa giác	42
Đa giác đều	44
Đa giác lồi	43
Đáy của hình nón	70
Đỉnh của đa giác	42

### Đ

Đỉnh của đa giác lồi	43
Đỉnh của hình nón	70
Định lí Viète	16
Đường chéo của đa giác lồi	43
Đường sinh của hình nón	70
Đường sinh của hình trụ	63
Đường tròn ngoại tiếp tam giác	30
Đường tròn ngoại tiếp tứ giác	35
Đường tròn nội tiếp tam giác	32

### G

Góc của đa giác lồi	43
---------------------	----

### H

Hai đáy của hình trụ	63
Hình cầu	77
Hình $n$ cạnh	43
Hình $n$ – giác	43

### K

Kết quả thuận lợi cho một biến cố	125
Không gian mẫu	122
Kích thước mẫu	97

### M

Mặt xung quanh của hình nón	70
Mặt xung quanh của hình trụ	63
Mẫu dữ liệu	97
Mẫu số liệu ghép nhóm	114

**P**

Parabol	4
Phép quay	50
Phép thử ngẫu nhiên	121
Phương trình bậc hai một ẩn	7

**T**

Tam giác ngoại tiếp đường tròn	32
Tam giác nội tiếp đường tròn	30

**T**

Tâm của hình cầu	77
Tần số của một giá trị	98
Tần số ghép nhóm	114
Tần số tương đối của một giá trị	106
Tần số tương đối của nhóm	116
Thể tích của hình cầu	81
Thể tích của hình nón	73
Thể tích của hình trụ	65
Tứ giác nội tiếp	35

**BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ**

Thuật ngữ	Giải thích
Đa giác đều	Đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.
Đa giác lồi	Đa giác luôn nằm về một phía của đường thẳng chứa một cạnh bất kì của nó.
Đường tròn ngoại tiếp tam giác	Đường tròn đi qua ba đỉnh của một tam giác.
Đường tròn ngoại tiếp tứ giác	Đường tròn đi qua cả bốn đỉnh của tứ giác.
Đường tròn nội tiếp tam giác	Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác.
Kết quả thuận lợi cho một biến cố	Kết quả của phép thử dẫn đến việc xảy ra biến cố đó.
Không gian mẫu	Tập hợp các kết quả có thể xảy ra của một phép thử.
Kích thước mẫu	Số giá trị hay sự kiện (có thể lặp lại) của mẫu dữ liệu.

Phép thử ngẫu nhiên	Một thí nghiệm, hoạt động mà ta không đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra.
Phương trình bậc hai một ẩn	Phương trình dạng $ax^2 + bx + c = 0$ với $a, b, c$ là ba số đã cho và $a \neq 0$ .
Tam giác ngoại tiếp đường tròn	Tam giác có ba cạnh tiếp xúc với đường tròn.
Tam giác nội tiếp đường tròn	Tam giác có ba đỉnh nằm trên đường tròn.
Tần số của một giá trị	Số lần xuất hiện của giá trị đó trong dãy giá trị của dấu hiệu điều tra.
Tần số ghép nhóm	Số lần xuất hiện các giá trị thuộc một nhóm.
Tần số tương đối	Tỉ số $f = \frac{n}{N}$ , trong đó $n$ là tần số của giá trị đó, $N$ là kích thước của mẫu dữ liệu.
Tần số tương đối của nhóm	Tỉ số $f = \frac{n}{N}$ , trong đó $n$ là tần số của nhóm ghép, $N$ là kích thước của mẫu số liệu.
Tứ giác nội tiếp	Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn.

**NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC HUẾ**

07 Hà Nội, Phường Vĩnh Ninh, Thành phố Huế, Tỉnh Thừa Thiên Huế

Điện thoại: (0234) 3834486

Email: nxbdhue@hueuni.edu.vn - Website: http://huph.hueuni.edu.vn

**TOÁN 9\_TẬP 2 (Bản mẫu)**

**LÊ THỊ HOÀI CHÂU** (Tổng Chủ biên), **PHẠM THỊ THU THUY** (Chủ biên), **TRẦN TRÍ DŨNG, LÊ ĐẠI DƯƠNG**

**Chịu trách nhiệm xuất bản:** Giám đốc Trần Bình Tuyên  
**Chịu trách nhiệm nội dung:** Quyền Tổng biên tập Nguyễn Chí Bảo  
**Biên tập viên:** Trương Thị Mỹ Vân  
**Trình bày bìa:** Nguyễn Diễm Quỳnh, Trần Thị Thuý  
**Sửa bản in:** Lại Thị Kiều Vi, Trịnh Thái Phương, Đàm Huỳnh Phương Thảo, Chương Ái Đào, Nguyễn Hương Quỳnh, Trịnh Khánh Vy, Nguyễn Đoan Trang, Nguyễn Văn Vĩnh, Nguyễn Vũ Khánh Linh, Trần Thị Thu Nguyệt  
**Đối tác liên kết:** Công ty TNHH Education Solutions Việt Nam  
**Địa chỉ:** Tầng 1, toà nhà Vietphone Building, 64 Nguyễn Đình Chiểu, Phường Đa Kao, Quận 1, Thành phố Hồ Chí Minh  
Bản quyền hình ảnh từ Shutterstock.

In cuốn, khổ 19 x 26.5 (cm) tại

**Địa chỉ:**

Số xác nhận đăng kí xuất bản:

**Quyết định xuất bản số:**

Kí ngày / /2023

In và nộp lưu chiểu năm 2023.

**Mã số sách tiêu chuẩn quốc tế - ISBN:**

BẢN MẪU SGK TOÁN 9 – CÙNG KHÁM PHÁ

# Toán 9

Tập 2



Một số yếu tố về  
thống kê và xác suất



Hình trụ. Hình nón.  
Hình cầu



Đa giác đều

Đường tròn ngoại tiếp.  
Đường tròn nội tiếp



Hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ).  
Phương trình bậc hai một ẩn



