SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HẢI DƯƠNG

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2025-2026
Môn thi: TOÁN (CHUYÊN)
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1. (2 điểm)

1) Cho biểu thức: $P=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}+3}+\frac{6}{4x-9}\right):\left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{2}{\sqrt{x}-1}\right)$, với $x\ge 0, x\ne 1, x\ne \frac{9}{4}$.

Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

2) Cho đa thức $P(x)=x^5-3x^4+4x^3+ax^2+3x-3$, trong đó a là số thực. Tính $P(1)$ biết $P(1+\sqrt[3]{2})=0$.

Câu 2. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $x^2-5x+4\sqrt{3x+1}-4=0$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-2xy+2y^2+2=4y \\ y(x-y)^2+3x^2-7y=-6 \end{cases}$.

Câu 3. (2,0 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn phương trình

$$x^4-6x^3+18x^2-y^2-22x+2y+8=0.$$

2) Cho 3 số tự nhiên, biết tổng của hai số bất kỳ trong 3 số đó là một số chính phương. Chứng minh rằng trong 3 số đã cho có không quá một số lẻ.

Câu 4. (3,0 điểm)

1) Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$ và các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I là giao điểm của EF và AH. Kẻ IJ song song với BC (J thuộc HE). Đường thẳng AJ cắt BC tại M.

a) Chứng minh $\angle AEF=\angle AMB$.

b) Gọi L là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC. Chứng minh $AC.LE=AB.LC$.

2) Cho đường tròn $(O;R)$ cố định. Tam giác ABC thay đổi ngoại tiếp đường tròn $(O;R)$, có $\angle BAC=60^\circ$. Đường thẳng (d) thay đổi và luôn đi qua tâm O, (d) cắt các canh AB, AC lần lượt tại M, N. Tính giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN theo R.

Câu 5. (1,0 điểm)

1) Trên mặt phẳng cho 2 x 2026 điểm phân biệt, trong đó không có bất kỳ ba điểm nào thẳng hàng. Người ta tô 2026 điểm trong các điểm đã cho bằng màu đỏ và tô 2026 điểm còn lại bằng màu xanh. Chứng minh rằng, bao giờ cũng tồn tại 2026 đoạn thẳng mà mỗi đoạn thẳng có 2 điểm đầu mút là một cặp điểm đỏ - xanh và 2 đoạn thẳng bất kỳ trong số các đoạn thẳng đó không có điểm chung.

2) Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn $a+b+c=ab+bc+ca.$ Chứng minh

$$\frac{3}{1+a}+\frac{3}{1+b}+\frac{3}{1+c}-\frac{4}{(1+a)(1+b)(1+c)}\geq 4.$$

-----HẾT-----

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHUYÊN TOÁN
TỈNH HẢI DƯƠNG NĂM HỌC 2025 - 2026

Câu 1.

1) Với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq \frac{9}{4}$. Ta có:

$$P=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}+3}+\frac{6}{4x-9}\right):\left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{2}{\sqrt{x}-1}\right)$$
$$=\left(\frac{2\sqrt{x}-3}{(2\sqrt{x}-3)(2\sqrt{x}+3)}+\frac{6}{(2\sqrt{x}-3)(2\sqrt{x}+3)}\right):\left(\frac{2+\sqrt{x}-1-2(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\right)$$
$$=\frac{2\sqrt{x}+3}{(2\sqrt{x}-3)(2\sqrt{x}+3)}:\left(\frac{-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\right)$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x}-3}.(1-\sqrt{x})=\frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-3}.$$

Giả sử tồn tại x nguyên sao cho P nhận giá trị nguyên. Ta có:

$$2P=\frac{2-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-3}=-\frac{1}{2\sqrt{x}-3}-1.$$

Vì $2P+1$ nguyên nên $\frac{1}{2\sqrt{x}-3}$ nguyên hay $2\sqrt{x}-3 \in \{1;-1\}$. Hay $\sqrt{x} \in \{2;1\} \Leftrightarrow x \in \{4;1\}$.

Thử lại và kết hợp với điều kiện xác định thì $x = 4$ thỏa mãn.

Vậy $x = 4$ thì biểu thức P nhận giá trị nguyên.

2) Đặt $t=1+\sqrt[3]{2}$. Khi đó $2=(t-1)^3$ hay $t^3-3t^2+3t-3=0$.

Như vậy t là nghiệm của phương trình $x^3-3x^2+3x-3=0.$ (1)

Ta có: $P(x)=(x^2+1)(x^3-3x^2+3x-3)+(a+6)x^2.$ (2)

Thay $x=t$ vào (2) và kết hợp với (1) thì $0=P(t)=(a+6)t^2$.

Suy ra $a+6=0 \Leftrightarrow a=-6$. Do đó $P(x)=x^5-3x^4+4x^3-6x^2+3x-3$ thì $P(1)=-4$.

Vậy $P(1)=-4$.

Câu 2.

1) Điều kiện xác định: $x \geq -\frac{1}{3}$. Ta có:

$$x^2 - 5x + 4\sqrt{3x+1} - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 4(x + 1 - \sqrt{3x+1})$$

Khi đó ta liên hợp vế phải thì $x^2 - x = 4.\frac{x^2 - x}{x + 1 + \sqrt{3x+1}}$ (chú ý $x + 1 + \sqrt{3x+1} > 0$).

Trường hợp 1. $x^2 - x = 0$ thì $x = 0$ hoặc $x = 1$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2. $x + 1 + \sqrt{3x+1} = 4$ thì $3 - x = \sqrt{3x+1}$ (1)

Với $3 \geq x \geq -\frac{1}{3}$, ta bình phương hai vế của (1) thì có:

$$x^2 - 6x + 9 = 3x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 8 = 0.$$

Suy ra $x = 8$ (loại) hoặc $x = 1$.

Như vậy phương trình ban đầu có tập nghiệm là: $\{0;1\}$.

2) Ta có: $\begin{cases} x^2 - 2xy + 2y^2 + 2 = 4y \\ y(x-y)^2 + 3x^2 - 7y = -6 \end{cases}$ (*).

- Nếu $y = 0$ thì từ (1) ta có: $x^2 + 2 = 0$, vô nghiệm.

- Nếu $y \neq 0$, khi đó $x^2 - 2xy + 2y^2 + 2 = 4y \Leftrightarrow \frac{x^2+2}{y} - 2(x-y) = 4$

Và $y(x-y)^2 + 3x^2 - 7y = -6 \Leftrightarrow (x-y)^2 + 3\frac{x^2+2}{y} = 7.$

Đặt $a = x - y, b = \frac{x^2+2}{y}$. Khi đó hệ phương trình trở thành $\begin{cases} -2a + b = 4 \\ a^2 + 3b = 7 \end{cases}$.

Suy ra $7 = a^2 + 3b = a^2 + 3(4 + 2a) = a^2 + 6a + 12$ hay $(a+1)(a+5) = 0.$

Trường hợp 1: $a = -1 \Rightarrow b = 2$, tức là

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ \frac{x^2+2}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 1 = x \\ x^2 = 2y - 2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = 1 \\ x = 2, y = 3 \end{array}\right.$$

Trường hợp 2: $a=-5 \Rightarrow b=-6$, tức là

$$\begin{cases} x-y=-5 \\ \dfrac{x^2+2}{y}=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+5 \\ x^2=-6y-2=-6x-32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+5 \\ x^2+6x+32=0\,(VN) \end{cases}.$$

Như vậy nghiệm (x,y) của hệ phương trình đã cho là $(0,1),(2,3)$.

Câu 3.

1) Giả sử tồn tại cặp số nguyên *(x;y)* thoả mãn phương trình

$$x^4-6x^3+18x^2-y^2-22x+2y+8=0.$$

Khi đó $y^2-2y+1=x^4-6x^3+18x^2-22x+9=(x^2-2x+1)(x^2-4x+9)$

Hay $(y-1)^2=(x-1)^2(x^2-4x+9).\,(*)$

Nếu $y=1$ từ (*) kéo theo $x=1$.

Nếu y khác 1, do $(y-1)^2,(x-1)^2$ đều là số chính phương, dẫn tới x^2-4x+9 là số chính phương.

Đặt $x^2-4x+9=a^2$, với a là số nguyên dương. Khi đó: $5=a^2-(x-2)^2=(a-x+2)(a+x-2)$.

Chú ý $(a-x+2)+(a+x-2)=2a>0$ nên ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: $\begin{cases} a-x+2=1 \\ a+x-2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ x=4 \end{cases}.$

Khi $x=4$ thì từ (*) ta có: $(y-1)^2=81$ hay $y=10 \vee y=-8$.

Trường hợp 2: $\begin{cases} a-x+2=5 \\ a+x-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ x=0 \end{cases}.$

Khi $x=0$ thì từ (*) ta có: $(y-1)^2=9$ hay $y=4 \vee y=-2$.

Vậy các cặp số nguyên *(x,y)* thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $(1,1),(4,10),(4,-8),(0,4),(0,-2)$.

2) Giả sử có ít nhất hai số lẻ trong ba số tự nhiên đã cho.

Trường hợp 1: Nếu cả ba số đó đều lẻ có dạng $2x+1, 2y+1, 2z+1$, trong đó *x, y, z* là số tự nhiên.

Từ giả thiết đề bài thì $a^2 = 2x+1+2y+1, b^2 = 2y+1+2z+1, c^2 = 2z+1+2x+1$.

Suy ra *a, b, c* chẵn suy ra $a^2+b^2+c^2$ chia hết cho 4. (1)

Mặt khác $a^2+b^2+c^2 = 4x+4y+4z+6$ chia cho 4 dư 2. (2)

Từ (1) và (2), ta dẫn đến điều mâu thuẫn.

Trường hợp 2: Nếu có hai số lẻ dạng $2x+1, 2y+1$ và một số chẵn dạng $2z$, trong đó *x, y, z* là số tự nhiên. Từ giả thiết đề bài thì $a^2 = 2x+1+2y+1, b^2 = 2y+1+2z, c^2 = 2z+2x+1$.

Suy ra *a* chẵn và *b, c* lẻ suy ra $a^2+b^2+c^2$ chia cho 4 dư 2. (3)

Mặt khác $a^2+b^2+c^2 = 4(x+y+z+1)$ chia hết cho 4. (4)

Từ (3) và (4), ta dẫn đến điều mâu thuẫn.

Câu 4.

1)

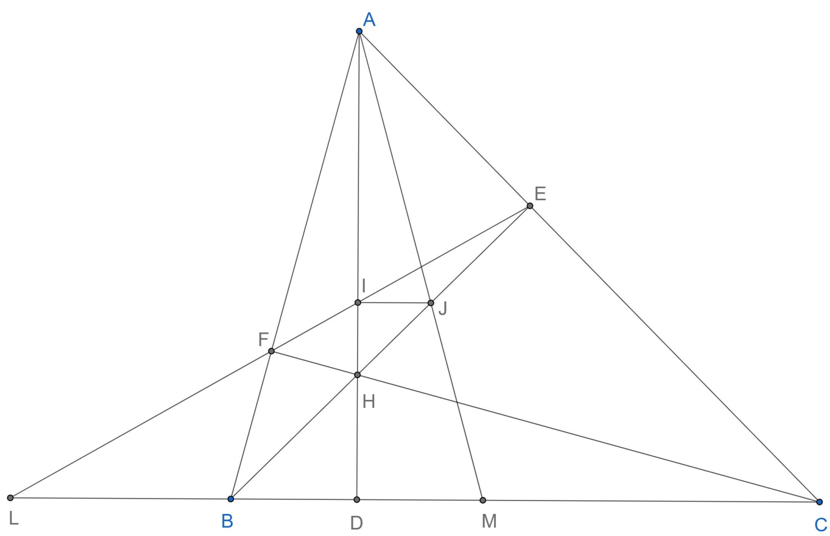
a) Ta chú ý $\angle AIJ = \angle AEJ = 90^\circ$. Suy ra *I, E* thuộc đường tròn đường kính *AJ*.

Như vậy tứ giác *AEJI* nội tiếp nên $\angle AJI = \angle AEF$ (1).

Mặt khác $\angle AJI = \angle AMB$ (do *IJ* song song với *BC*) (2).

Từ (1) (2) suy ra $\angle AMB = \angle AEF$.

b) Ta có biến đổi góc sau: $\angle AMC = 180^\circ - \angle AML = 180^\circ - \angle AEF = \angle CEL$.



Khi đó ta có: $\Delta ACM \sim \Delta LCE(g.g)$ suy ra $\dfrac{CA}{AM} = \dfrac{LC}{LE}.(3)$

Ta chú ý $\angle AFH = \angle AEH = 90^{\circ}$. Suy ra *E,F* thuộc đường tròn đường kính *AH*.

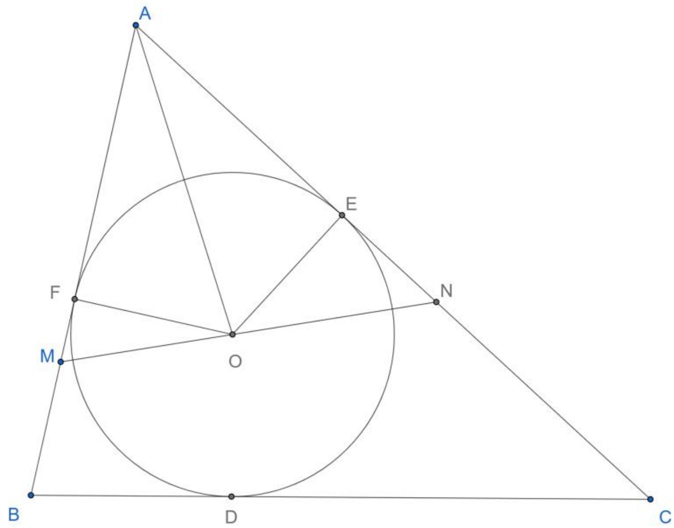
Như vậy tứ giác *AEHF* nội tiếp thì có $\angle FAH = \angle FEH = \angle IAJ$.

Do đó *AD* là phân giác của góc *BAM*.

Mặt khác *AD* vuông góc *BM* nên tam giác *BAM* cân tại *A* hay *AB = AM*.

Từ (3) thì $\dfrac{CA}{AB} = \dfrac{LC}{LE}$ hay $CA.LE = LC.AB$.

2) Ta kí hiệu S_{ABC} là diện tích của tam giác *ABC*.



Ta gọi giao điểm (*O,R*) với *BC, AC, AB* lần lượt là *D, E, F.*

Khi đó *OE* vuông góc *AC* và *OF* vuông góc *AM*.

Ta có: $S_{AMN} = S_{AON} + S_{AMO} = \dfrac{1}{2}OE.AN + \dfrac{1}{2}OF.AM = \dfrac{1}{2}R(AN + AM).(*)$

Mặt khác: $S_{AMN} = \dfrac{1}{2}AM.AN.\sin 60^{\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}AM.AN$ suy ra $AM.AN = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}S_{AMN}$.

Từ (*) thì $(S_{AMN})^2 = \dfrac{R^2}{4}(AM + AN)^2 \geq R^2.AM.AN = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}R^2.S_{AMN}$.

Do đó $S_{AMN} \geq \dfrac{4\sqrt{3}}{3}R^2$.

Vậy $\min S_{AMN} = \frac{4\sqrt{3}}{3} R^2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} AM = AN \\ \angle MAN = 60^\circ \end{cases}$ hay tam giác AMN đều.

Câu 5.

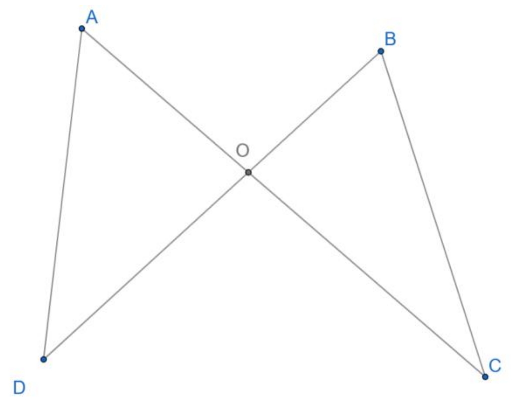
Ta thấy luôn tồn tại cách nối 2026 cặp điểm đỏ - xanh bằng 2026 đoạn thẳng.

Mặt khác do chỉ có 2 x 2026 điểm nên số cách nối như vậy là hữu hạn.

Khi đó tồn tại cách nối "*tốt*" mà tổng độ dài các đoạn thẳng là nhỏ nhất.

Ta chứng minh cách nối "*tốt*" này thì với hai đoạn thẳng bất kỳ trong số các đoạn thẳng đó không có điểm chung.

Thật vậy, giả sử tồn hai đoạn thẳng *AC, BD* cắt nhau tại *O*, trong đó *A, B* được tô đỏ và *C, D* được tô xanh. Ta thấy $AD + BC < AO + OD + BO + OC = AC + BD.$



Khi đó ta chỉ đổi cách nối từ (*AC,BD*) thành (*AD,BC*) thì có cách nối mới mà tổng các đoạn thẳng là nhỏ nhất.

Như vậy cách nối mà tổng độ dài các đoạn thẳng nhỏ nhất là cách nối mà không có 2 đoạn thẳng nào có điểm chung.

Câu 6.

Ta thấy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} &3(a+1)(b+1)+3(b+1)(c+1)+3(c+1)(a+1)-4 \ge 4(a+1)(b+1)(c+1) \\ &\Leftrightarrow 3(ab+bc+ca)+6(a+b+c)+5 \ge 4abc+4(ab+bc+ca)+4(a+b+c)+4 \\ &\Leftrightarrow 2(a+b+c)+1 \ge 4abc+ab+bc+ca \\ &\Leftrightarrow a+b+c+1 \ge 4abc.(*) \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c.$

- Nếu $a \geq b \geq c > 1$ thì $ab+bc+ca > a+b+c$ (vô lý), suy ra $1 \geq c$.

- Nếu $1 > a \geq b \geq c$ thì $ab+bc+ca < a+b+c$ (vô lý), suy ra $a \geq 1$.

Khi đó $a \geq 1 \geq c \Rightarrow a+c-1 > 0$. Theo giả thiết thì

$$b(a+c-1) = a+c-ac \Rightarrow b = \frac{a+c-ac}{a+c-1}.$$

Thay vào (*) thì $a+c+1+\frac{a+c-ac}{a+c-1} \geq 4ac.\frac{a+c-ac}{a+c-1}$ hay

$$\begin{aligned}
&(a+c)^2 - 1 + a + c - ac \geq 4ac(a+c-ac) \\
&\Leftrightarrow \left[(a+c)^2 - 4ac(a+c) + 4a^2c^2\right] + (a-1)(1-c) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (a+c-2ac)^2 + (a-1)(1-c) \geq 0.(**)
\end{aligned}$$

Ta thấy (**) đúng, như vậy bất đẳng thức (*) đúng.

Vậy Dấu bằng xảy rả khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.