UBND TỈNH THÁI NGUYÊN
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2025 - 2026
MÔN: TOÁN
(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán)
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề
(Đề thi gồm 01 trang)

Câu 1 (2,0 điểm). Cho biểu thức $P=\dfrac{3x+4\sqrt{x}-7}{x+2\sqrt{x}-3}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}-\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}$.

a. Rút gọn biểu thức P.

b. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

Câu 2 (1,0 điểm). Cho $P(x)$ là đa thức có tất cả các hệ số nguyên. Biết rằng, $P(2025)$ và $P(2026)$ là các số tự nhiên lẻ. Chứng minh rằng, đa thức $P(x)$ không có nghiệm nguyên.

Câu 3 (1,0 điểm). Lớp 9D có 45 học sinh, mỗi bạn đều biết chơi ít nhất một trong hai môn thể thao: đá cầu, bóng đá. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp đó. Xét các biến cố:

A: "Học sinh được chọn biết chơi cả hai môn đá cầu và bóng đá";

B: "Học sinh được chọn biết chơi môn đá cầu".

Biết rằng, xác suất của biến cố A bằng $\dfrac{2}{9}$, xác suất của biến cố B bằng $\dfrac{2}{3}$. Tính xác suất của biến cố C: "Học sinh được chọn biết chơi môn bóng đá".

Câu 4 (2,0 điểm).

a. Cho số nguyên dương n là tích của ba số nguyên tố phân biệt. Biết rằng, tổng tất cả các ước nguyên dương của n bằng $2n-16$. Chứng minh rằng, $n-8$ chia hết cho 6.

b. Cho p là số nguyên tố thoả mãn $p-1$ chia hết cho 4. Chứng minh rằng, p^3-p^2-4 không phải là số chính phương.

Câu 5 (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi BH và CQ là hai đường cao của tam giác ABC. Tiếp tuyến tại B và tại C của đường tròn (O) cắt nhau tại M. Hai đường thẳng OM và BC cắt nhau tại N.

a. Chứng minh rằng, $\widehat{ABO}=\widehat{BHN}$.

b. Đường thẳng OM cắt đường tròn (O) tại D và S (D nằm giữa O và M). Hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại F. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AFN. Chứng minh rằng, hai đường thẳng OI và AS vuông góc với nhau.

c. Hai đường thẳng AM và BC cắt nhau tại E. Hai đường thẳng AN và HQ cắt nhau tại G. Chứng minh rằng, hai đường thẳng GE và OM song song với nhau.

Câu 6 (1,0 điểm). Bạn Thái viết ra bảng 100 số nguyên dương đôi một phân biệt, mỗi số không lớn hơn 2^{98}. Đối với mỗi cặp số (a,b) được bạn Thái viết ra, bạn Nguyên viết số $a+b-\text{ƯCLN}(a,b)$ trên bảng. Chứng minh rằng, có ít nhất một số trong các số mà bạn Nguyên viết khác với tất cả các số mà bạn Thái viết.

—— HẾT ——

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHUYÊN TOÁN TỈNH THÁI NGUYÊN
Năm học 2025 – 2026

Câu 1.

a. ĐKXĐ: $\begin{cases} x+2\sqrt{x}-3\neq 0 \\ \sqrt{x}-1\neq 0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x\geq 0 \end{cases}$. Với $x\geq 0, x\neq 1$, ta có

$$P=\frac{3x+4\sqrt{x}-7}{x+2\sqrt{x}-3}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}=\frac{3x+4\sqrt{x}-7}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}$$

$$\Leftrightarrow P=\frac{3x+4\sqrt{x}-7-(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}=\frac{x+4\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}=\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

Vậy $P=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x\geq 0, x\neq 1$.

b. Với $x\geq 0, x\neq 1$, có $P=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=1+\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$.

Để P nguyên thì $\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$ nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{x}-1\in Ư(2)=\{\pm 1;\pm 2\}$, kết hợp $x\geq 0, x\neq 1 \Rightarrow x\in\{0;4;9\}$

Vậy tập giá trị nguyên của x thỏa mãn là $\{0;4;9\}$.

Câu 2. Giả sử đa thức $P(x)$ bậc $n\geq 1$ thoả mãn $P(2025), P(2026)$ là số tự nhiên và có nghiệm nguyên a. Khi đó theo định lý Bezout thì $P(x)=(x-a).Q(x)$, với $\deg Q(x)=n-1$.

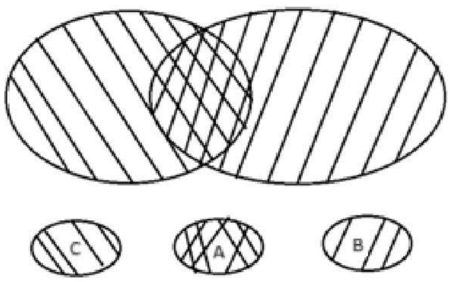
Ta có: $P(2025)P(2026)=(2025-a).Q(2025).(2026-a).Q(2026)$.

Do $2025-a, 2026-a$ là hai số nguyên liên tiếp nên $(2025-a)(2026-a)$ chẵn.

Mặt khác $P(2025)P(2026)$ lẻ. Do đó xảy ra điều mâu thuẫn.

Vậy đa thức $P(x)$ không có nghiệm nguyên.

Câu 3.



Hình chứa *C, B* lần lượt là tập các HS biết chơi môn đá cầu và bóng đá. Hình chứa *A* là tập các HS biết chơi cả hai môn đá cầu và bóng đá. Gọi số phần tử tập chứ *A,B,C* lần lượt là n_A, n_B, n_C.

Gọi xác suất của biến cố *A, B, C* lần lượt là p_A, p_B, p_C. Theo giả thiết thì $p_A = \frac{2}{9}, p_B = \frac{2}{3}$.

Cách 1: Số học sinh biết chơi cả hai môn đá cầu và bóng đá là $n_A = p_A.45 = \frac{2}{9}.45 = 10$ học sinh.

Số học sinh biết chơi môn đá cầu là $n_B = p_B.45 = \frac{2}{3}.45 = 30$ học sinh.

$\Rightarrow$ Số học sinh biết chơi môn đá bóng là: $n_C = 45 - 30 + 10 = 25$ học sinh.

$\Rightarrow$ Xác suất biến cố *C* là: $p_C = \frac{n_C}{45} = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$.

Cách 2: Xác suất biến cố *C* là

$$p_C = 1 - p_B + p_A = 1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}.$$

Vậy $p_C = \frac{5}{9}$

Câu 4.

a. Giả sử $n = pqr$, với *p, q, r* là các số nguyên tố phân biệt.

Ta có các ước dương của *n* là $1, p, q, r, pq, qr, pr, pqr$. Theo giả thiết thì

$2n - 16 = 1 + p + q + r + pq + qr + rp + pqr = (1+p)(1+q)(1+r).$

Tức là $4 \mid (1+p)(1+q)(1+r)$. $2pqr - 16 = (1+p)(1+q)(1+r)$.

Trong *p, q, r* phải có ít nhất hai số nguyên tố lẻ. Suy ra $4 \mid (1+p)(1+q)(1+r) = 2(n-8)$.

Hay nói cách khác $2 \mid n - 8$. (1)

Giả sử ta *p, q, r* là các số nguyên tố chia cho 3 dư 1, thì có $p+1, q+1, r+1$ chia cho 3 dư 2.

Do đó $(1+p)(1+q)(1+r)$ chia cho 3 dư 2 và $2pqr$ chia cho 3 dư 2.

Suy ra $16 = 2pqr - (1+p)(1+q)(1+r)$ chia hết cho 3. Dẫn đến điều vô lý.

Như vậy trong ba số tồn tại một số chia cho 3 dư 2.

Khi đó $3 \mid (1+p)(1+q)(1+r) = 2(n-8)$ hay $3 \mid n - 8$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $n - 8$ chia hết cho 6.

b. Giả sử $p^3 - p^2 - 4$ là số chính phương, đặt $p^3 - p^2 - 4 = a^2$.

Khi đó $a^2 = (p-2)(p^2 + p + 2)$.

Đặt $d = \gcd(p-2, p^2 + p + 2)$. Suy ra $d \mid (p-2)(p+3) + 8 \Rightarrow d \mid 8$.

- Nếu *d* chẵn thì $p - 2$ chẵn và kéo theo $p - 1$ lẻ, vô lý do $4 \mid p - 1$.

- Nếu $d = 1$. Khi đó $p - 2, p^2 + p + 2$ đều là số chính phương.

Do $p-1$ chia hết cho 4 nên $p-2$ chia cho 4 dư 3, suy ra $p-2$ không thể là số chính phương (do số chính phương chia cho 4 chỉ dư 0 hoặc 1). Như vậy điều giả sử là sai.

Vậy p^3-p^2-4 không thể là số chính phương.

Chú ý: *ở trên ta dùng tính chất*: Nếu hai số nguyên dương *a,b* nguyên tố cùng nhau và tích *ab* là số chính phương thì *a,b* đều là số chính phương. **HS tự chứng minh.**

Câu 5.

a. Ta có tam giác *ABO* cân tại *O* và tam giác *HNB* cân tại *N* nên $\angle BHN = \angle NBH$.

Ta có biến đổi góc như sau

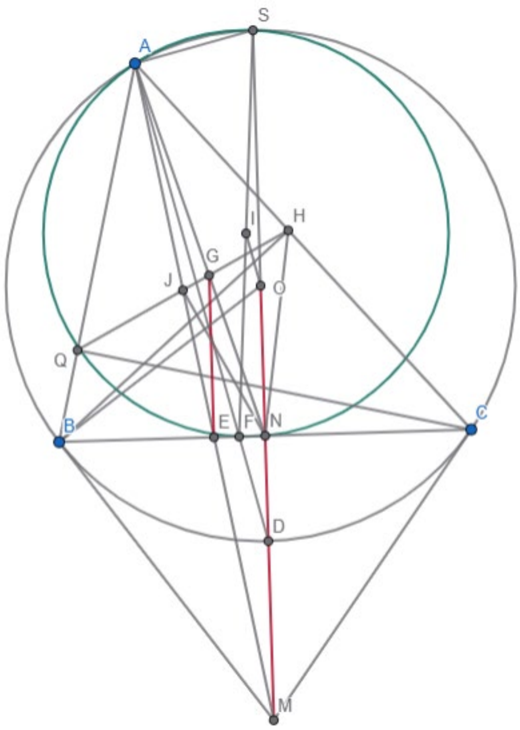
$$\angle ABO = \frac{180^\circ - \angle AOB}{2} = \frac{180^\circ - 2\angle ACB}{2} = 90^\circ - \angle ACB = \angle HBN = \angle BHN.$$

b. Do *DS* đi qua *O* nên *DS* là đường kính của đường tròn (*O*). Suy ra $\angle SAF = 90^\circ$.

Ta thấy *SM* vuông góc *BC* tại *N* nên $\angle SNF = 90^\circ$.

Khi đó ta chứng minh được tứ giác *ASNF* nội tiếp. Mà do *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *AFN* nên tứ giác *ASNF* nội tiếp đường tròn (*I*) có đường kính là *SF*.

Do đó ta có: $\begin{cases} OA = OS \\ IA = IS \end{cases} \Rightarrow$ *OI* là đường trung trực của *AS* nên *OI* vuông góc *AS*.



c. Ta có *N* là trung điểm của *BC,* suy ra *NQ* = *NH* = *NB* = *NC.*

Gọi *J* là trung điểm *GH* thì *NJ* vuông góc với *GH*. Ta có:

$$\frac{AH}{HN} = \frac{\sin\angle ABH.AB}{HN} = \sin\left(\frac{\angle HNQ}{2}\right).\frac{AB}{HN} = \sin\angle HNJ.\frac{AB}{HN} = \frac{JH.AB}{HN^2} = \frac{HQ.AB}{NQ.BC} (1)$$

Ta có biến đổi góc:

$$\angle BMC = 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - 2\angle BAC = 180^\circ - 2(90^\circ - \angle ACQ) = \angle HNQ.$$

Chú ý tam giác HNQ cân tại N và BCM cân tại M nên

$$\Delta QNH \sim \Delta BMC \Rightarrow \frac{HQ}{BC} = \frac{QN}{BM} \Rightarrow \frac{HQ}{QN.BC} = \frac{1}{BM}.(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AH}{HN} = \frac{AB}{BM}(3)$

Ta có: $\angle AHN = \angle AHQ + \angle QHN = \angle ABC + \angle MBC = \angle ABM\,(\Delta AQH \sim \Delta ACB).(4)$

Từ (3) (4) suy ra $\Delta AHN \sim \Delta ABM\,(c.g.c) \Rightarrow \begin{cases} \angle NAH = \angle MAB(5) \\ \frac{AN}{AM} = \frac{AH}{AB}(*) \end{cases}$.

Từ (5) suy ra $\Delta AHG \sim \Delta ABE(g.g) \Rightarrow \frac{AG}{AE} = \frac{AH}{AB}(**)$

Từ (*) và (**) thì $\frac{AG}{AE} = \frac{AN}{AM} \Rightarrow GE \parallel OM$. Ta có điều phải chứng minh.

Câu 6.

Ta thấy các số mà bạn Nguyên viết ra đều là số nguyên dương. Gọi 100 số mà Thái viết ra bảng là $a_1 < a_2 < ... < a_{100}, (a_i \in \mathbb{N}^*)$. Giả sử không tồn tại số nào trong các số mà bạn Nguyên viết khác với tất cả các mà bạn Thái viết.

Như vậy với mọi $1 \le i < j \le 100$, thì $a_i + a_j - \gcd(a_i, a_j) \in S, S = \{a_1; a_2; ...; a_{100}\}$.

Khi đó $a_{99} + a_{100} - \gcd(a_{99}, a_{100}) \in S$. Ta thấy $a_{99} < a_{99} + a_{100} - \gcd(a_{99}, a_{100})$. Suy ra

$$a_{99} + a_{100} - \gcd(a_{99}, a_{100}) = a_{100} \Leftrightarrow \gcd(a_{99}, a_{100}) = a_{99} \Rightarrow a_{99} \mid a_{100}. (1)$$

Bây giờ, $a_{98} < a_{98} + a_{99} - \gcd(a_{98}, a_{99})$.

Nếu $a_{98} + a_{99} - \gcd(a_{98}, a_{99}) = a_{100} \Rightarrow a_{99} \mid a_{98} - \gcd(a_{98}, a_{99})$, do (1)

Suy ra $a_{99} \le a_{98} - \gcd(a_{98}, a_{99}) < a_{98}$, vô lý. Như vậy

$$a_{98} + a_{99} - \gcd(a_{98}, a_{99}) = a_{90} \Rightarrow a_{98} \mid a_{99} \mid a_{100}.$$

Bây giờ, $a_{97} < a_{97} + a_{98} - \gcd(a_{97}, a_{98}) \Rightarrow a_{97} + a_{98} - \gcd(a_{97}, a_{98}) \in \{a_{98}, a_{99}, a_{100}\}$.

Tương tự như trên thì $a_{97} \mid a_{98} \mid a_{99} \mid a_{100}$.

Lặp lại quá trình như vậy thì ta có $a_1 \mid a_2 \mid ... \mid a_{98} \mid a_{99} \mid a_{100}$.

Ta đặt $a_{i+1} = q_i.a_i$ với $q_i \in \mathbb{N}^*, q_i \ne 1, \forall i = \overline{1,99}$.

Ta thấy $a_{100} = q_{99}q_{98}...q_1a_1 \ge 2^{99}$. Mà a_{100} không lớn hơn 2^{98}. Suy ra mâu thuẫn.

Như vậy có ít nhất một số trong các số mà bạn Nguyên viết khác với tất cả các mà bạn Thái viết.