

Bài 1 (5,5 điểm)

1. Rút gọn biểu thức:

$$A = \left(\frac{x^2 + 3x}{x^3 + 3x^2 + 9x + 27} + \frac{3}{x^2 + 9} \right) : \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6x}{x^3 - 3x^2 + 9x - 27} \right) \cdot \frac{x-3}{x^2 + 7}$$

2. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $3x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = 3x^2 + y^2$

3. Cho $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực.

Biết $f(x)$ chia cho $x+1$ dư -4 , $f(x)$ chia cho $x-2$ dư 5 . Tính:

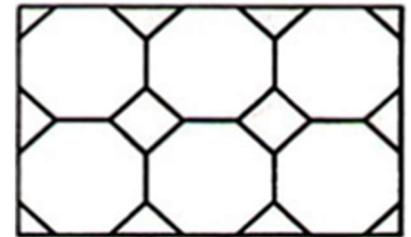
$$A = (a^{2025} + b^{2025})(b^{2025} - c^{2025})(c^{2025} + a^{2025})(x-3)$$

Bài 2 (4,0 điểm).

1. Tìm x biết:

$$(2x-5)^3 + (2-x)^3 = (x-3)^3 + (x-3)(7x^2 - 2052x + 2054)$$

2. Một sân vườn hình chữ nhật được lát bởi các viên gạch hình bát giác đều và các viên gạch hình vuông hoặc hình tam giác vuông cân (hình vẽ minh họa). Biết cạnh bát giác đều bằng $2dm$ và số gạch hình bát giác đều là 2025 viên. Tính diện tích phần sân vườn được lát bởi những viên gạch không phải là hình bát giác đều.



Bài 3 (4,0 điểm).

1. Tìm x, y nguyên tố biết: $(x^2 + 2)^2 = 2y^4 + 11y^2 + x^2y^2 + 9$

2. Với các số thực x, y, z thỏa mãn $xyz = -1$; $x + y + z = 4$ và

$$\frac{x}{x^2 - 3x - 1} + \frac{y}{y^2 - 3y - 1} + \frac{z}{z^2 - 3z - 1} = \frac{4}{9}. \text{ Tính giá trị của biểu thức } P = x^2 + y^2 + z^2.$$

Bài 4 (6,5 điểm)

1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, gọi F là trung điểm của cạnh AB . Tia phân giác trong của góc BFC cắt BC tại N , tia phân giác trong của góc AFC cắt AC tại Q .

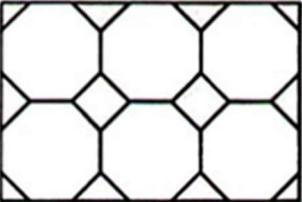
a. Chứng minh rằng $QN \parallel AB$

b. Lấy điểm P thuộc FQ sao cho $AP = AQ$. Gọi G là giao điểm của AP và FC , M là giao điểm của FN và BG . Chứng minh $\triangle APF \sim \triangle CQF$ và $BM = BN$

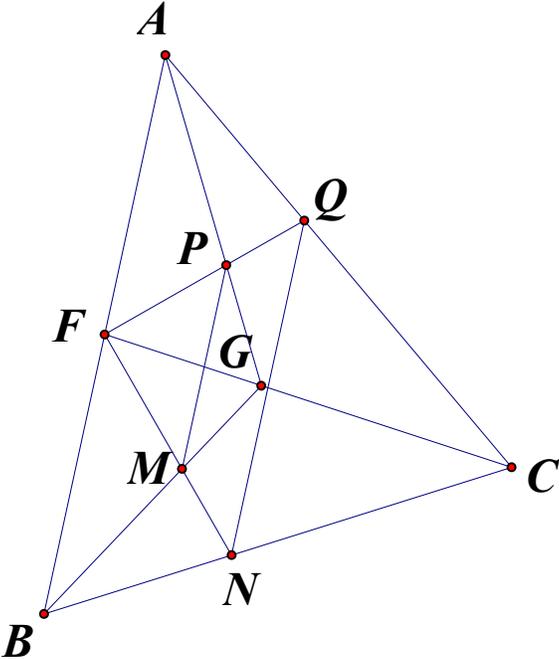
2. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 2\hat{C}$. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC biết rằng số đo các cạnh là ba số tự nhiên liên tiếp.

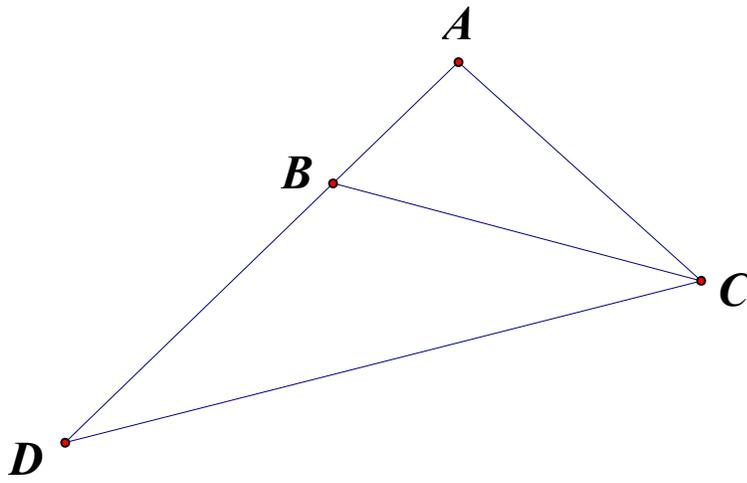
HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Nội dung	Điểm
Bài 1 (5,5đ)	<p>1. Rút gọn biểu thức:</p> $A = \left(\frac{x^2 + 3x}{x^3 + 3x^2 + 9x + 27} + \frac{3}{x^2 + 9} \right) : \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6x}{x^3 - 3x^2 + 9x - 27} \right) \cdot \frac{x-3}{x^2 + 7}$ <p>2. Cho x,y là các số thực thỏa mãn $3x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = 3x^2 + y^2$</p> <p>3. Cho $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực.</p> <p>Biết f(x) chia cho $x+1$ dư -4, f(x) chia cho $x-2$ dư 5. Tính:</p> $A = (a^{2025} + b^{2025})(b^{2025} - c^{2025})(c^{2025} + a^{2025})(x-3)$	
Ý 1 (2đ)	<p>1. Rút gọn biểu thức:</p> $A = \left(\frac{x^2 + 3x}{x^3 + 3x^2 + 9x + 27} + \frac{3}{x^2 + 9} \right) : \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6x}{x^3 - 3x^2 + 9x - 27} \right) \cdot \frac{x-3}{x^2 + 7}$ $= \left(\frac{x(x+3)}{(x^2+9)(x+3)} + \frac{3}{x^2+9} \right) : \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6x}{(x-3)(x^2+9)} \right) \cdot \frac{x-3}{x^2+7}$ $= \frac{x+3}{x^2+9} : \frac{x^2+9-6x}{(x-3)(x^2+9)} \cdot \frac{x-3}{x^2+7}$ $= \frac{x+3}{x^2+9} \cdot \frac{(x-3)(x^2+9)}{(x-3)^2} \cdot \frac{x-3}{x^2+7}$ $= \frac{x+3}{x^2+7}$ <p>Kl...</p>	0,5 0,5 0,5 0,5
Ý 2 (1,5đ)	<p>2. Có</p> $3x + y = 1$ $y = 1 - 3x$ <p>Xét</p> $M = 3x^2 + y^2 = 3x^2 + (1-3x)^2 = 3x^2 + 1 - 6x + 9x^2$ $= 12x^2 - 6x + 1 = 12 \left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12} \right) = 12 \left(x^2 - 2x \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{48} \right)$ $= 12 \left(x - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{1}{4}$ <p>Lập luận chỉ ra $M \geq \frac{1}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y = \frac{1}{4}$</p>	0,25 0,25 0,5 0,5

<p>Ý 3 (2 đ)</p>	<p>3. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ $f(x)$ chia cho $x+1$ dư -4 nên $f(-1) = -4$ suy ra $a - b + c = -3$. (1) $f(x)$ chia cho $x-2$ dư 5 nên $f(2) = 5$ Suy ra $4a + 2b + c = -3$. (2) Lấy (2) $-$(1) về với về ta được $3a + 3b = 0$ $a + b = 0$ $a = -b$ Suy ra $a^{2025} + b^{2025} = 0$. Vậy $A = (a^{2025} + b^{2025})(b^{2025} - c^{2025})(c^{2025} + a^{2025})(x-3) = 0$</p>	<p>0,5 0,5 0,5 0,5</p>
	<p>1. Tìm x biết: $(2x-5)^3 + (2-x)^3 = (x-3)^3 + (x-3)(7x^2 - 2052x + 2054)$</p> <p>2. Một sân vườn hình chữ nhật được lát bởi các viên gạch hình bát giác đều và các viên gạch hình vuông hoặc hình tam giác vuông cân (hình vẽ minh họa). Biết cạnh bát giác đều bằng 2 dm và số gạch hình bát giác đều là 2025 viên. Tính diện tích phần sân vườn được lát bởi những viên gạch không phải là hình bát giác đều.</p> 	
<p>Bài 2 (4,0đ)</p>	<p>1. $(2x-5)^3 + (2-x)^3 = (x-3)^3 + (x-3)(7x^2 - 2052x + 2054)$. (1) Đặt $a = 2x-5$; $b = 2-x$ Suy ra $a+b = x-3$ Có $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ Hay $(2x-5)^3 + (2-x)^3 = (x-3)^3 - 3(2x-5)(2-x)(x-3)$. Khi đó (1) có dạng $(x-3)^3 - 3(2x-5)(2-x)(x-3) = (x-3)^3 + (x-3)(7x^2 - 2052x + 2054)$ $(x-3)(7x^2 - 2052x + 2054) + 3(2x-5)(2-x)(x-3) = 0$ $(x-3)[7x^2 - 2052x + 2054 + 3(4x - 2x^2 - 10 + 5x)] = 0$ $(x-3)[7x^2 - 2052x + 2054 + 27x - 6x^2 - 30] = 0$ $(x-3)[x^2 - 2025x + 2024] = 0$ $(x-3)(x-1)(x-2024) = 0$ Suy ra $x = 1$; $x = 3$; $x = 2024$ Vậy</p>	<p>0,5 0,5 0,5 0,5</p>

	<p>2.</p>  <p>Xét một hình vuông chứa viên gạch hình bát giác đều cạnh 2 dm. Bốn tam giác vuông cân nằm ngoài viên gạch hình bát giác đều ghép lại được một hình vuông cạnh 2 dm có diện tích bằng 4 dm². Như vậy ứng với mỗi viên gạch hình bát giác đều, có diện tích 4 dm² được lát bởi các viên gạch không phải là hình bát giác đều. Vậy diện tích phải tìm là 2025 x 4 = 8100 (dm²) = 81 (m²).</p>	<p>0,75</p> <p>0,5</p> <p>0,75</p>
<p>Bài 3 (4,0 điểm).</p>	<p>1. Tìm x, y nguyên tố biết: $(x^2 + 2)^2 = 2y^4 + 11y^2 + x^2y^2 + 9$ 2. Với các số thực x, y, z thỏa mãn $xyz = -1$; $x + y + z = 4$ và $\frac{x}{x^2 - 3x - 1} + \frac{y}{y^2 - 3y - 1} + \frac{z}{z^2 - 3z - 1} = \frac{4}{9}$. Tính giá trị của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2$.</p>	
	<p>1. Có $(x^2 + 2)^2 = 2y^4 + 11y^2 + x^2y^2 + 9$ $x^4 + 4x^2 + 4 - 2y^4 - 11y^2 - x^2y^2 - 9 = 0$</p> <p>Biến đổi được $(x^2 + y^2 + 5)(x^2 - 2y^2 - 1) = 0$</p> <p>Suy ra $x^2 - 2y^2 - 1 = 0$. Lập luận chỉ ra y=2; x=3 Kl...</p>	<p>0,5</p> <p>0,75</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p>
	<p>2. Ta có: $\frac{x}{x^2 - 3x - 1} = \frac{x}{x^2 - 3x + xyz} = \frac{1}{x - 3 + yz} = \frac{1}{1 - y - z + yz} = \frac{1}{(y - 1)(z - 1)}$ Tương tự $\frac{y}{y^2 - 3y - 1} = \frac{1}{(x - 1)(z - 1)}$; $\frac{z}{z^2 - 3z - 1} = \frac{1}{(x - 1)(y - 1)}$.</p> <p>Suy ra $\frac{1}{(y - 1)(z - 1)} + \frac{1}{(x - 1)(z - 1)} + \frac{1}{(x - 1)(y - 1)} = \frac{4}{9}$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>

	$\frac{x-1+y-1+z-1}{(x-1)(y-1)(z-1)} = \frac{4}{9} \Rightarrow (x-1)(y-1)(z-1) = \frac{9}{4}$ $\Rightarrow 1 - (x+y+z) + (xy+yz+zx) = \frac{9}{4}$ $\Rightarrow xy+yz+zx = \frac{-1}{4}$ $\Rightarrow x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = \frac{33}{2}$ <p>Vậy $x^2+y^2+z^2 = \frac{33}{2}$.</p>	
<p>Bài 4 (6,5 đ)</p>	<p>1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, gọi F là trung điểm của cạnh AB. Tia phân giác trong của góc BFC cắt BC tại N, tia phân giác trong của góc AFC cắt AC tại Q.</p> <p>a) Chứng minh rằng $QN \parallel AB$</p> <p>b) Lấy điểm P thuộc FQ sao cho $AP = AQ$. Gọi G là giao điểm của AP và FC, M là giao điểm của FN và BG. Chứng minh $\triangle APF \sim \triangle CQF$ và $BM = BN$</p>	
		
<p>1a) (2,0 đ)</p>	<p>$\triangle AFC$ có FQ là tia phân giác của $\angle CFA \Rightarrow \frac{AQ}{QC} = \frac{FA}{FC}$</p> <p>$\triangle BFC$ có FN tia phân giác của $\angle BFC \Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{BF}{FC}$</p> <p>Mà $FA = FB$ nên suy ra $\frac{AQ}{QC} = \frac{BN}{NC}$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>

	Theo Định lí Talet đảo ta suy ra $QN // AB$ (1)	
1b) (2,5đ)	Vì $AP = AQ \Rightarrow \Delta APQ$ cân tại A $\Rightarrow \angle APQ = \angle AQP$	0,25
	Mà $\hat{APQ} + \hat{APF} = 180^\circ$ và $\hat{AQP} + \hat{CQF} = 180^\circ$	0,25
	Nên $\hat{APF} = \hat{CQF}$	
	Xét ΔAPF và ΔCQF có :	
	$\begin{cases} \angle PFA = \angle QFC (gt) \\ \angle APF = \angle CQF (cmt) \end{cases} \Rightarrow \Delta APQ \sim \Delta CQF (g.g)$	0,5
	Từ $\Delta APF \sim \Delta CQF (g.g) \Rightarrow \frac{PF}{QF} = \frac{FA}{FC} (2)$	
Theo tính chất phân giác trong ΔGAF và ΔGBF ta có	0,25	
$\frac{AP}{PG} = \frac{FA}{FG} = \frac{FB}{FG} = \frac{BM}{GM} \Rightarrow \frac{AP}{PG} = \frac{BM}{AB} \Rightarrow MP // AB (3)$ (thales đảo)		
Từ (1) và (3) suy ra $QN // PM \Rightarrow \frac{FP}{FQ} = \frac{FM}{FN} (4)$	0,25	
Từ (2) và (4) suy ra $\frac{FM}{FN} = \frac{FA}{FC} = \frac{FB}{FC}$	0,25	
Xét ΔBFM và ΔCFN có :		
$\begin{cases} \angle BFM = \angle CFN (gt) \\ \frac{FM}{FN} = \frac{FB}{FC} (cmt) \end{cases} \Rightarrow \Delta BFM \sim \Delta CFN (c.g.c) \Rightarrow \angle BMF = \angle CNF$	0,5	
Từ đó c/m được góc $BMN =$ góc BNM , nên tam giác BMN cân tại B $\Rightarrow BM = BN$	0,25	
2. (2,0 đ)	<p>2. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 2\hat{C}$. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC biết rằng số đo các cạnh là ba số tự nhiên liên tiếp.</p> 	

	<p>Trên tia đối tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BC$ Chứng minh: $\Delta ACD \sim \Delta ABC$ (g - g)</p> $\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AC^2 = AB \cdot AD$ <p>Mà $AD = AB + BC$ nên $AC^2 = AB^2 + AB \cdot BC$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>
	<p>Đặt $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$ ($a, b, c > 0$) Ta có $b^2 = c^2 + ac$ suy ra $b > c > 0$ mà a, b, c là 3 số tự nhiên liên tiếp</p> <p>+) Nếu $b = c + 1$ ta có $(c + 1)^2 = c^2 + ac \Rightarrow 2c + 1 = ac \Rightarrow c(a - 2) = 1$ Suy ra $c = 1$; $a = 3$; $b = 2$ (loại) vì số đo trên không thể là các cạnh của một tam giác.</p> <p>+) Nếu $b = c + 2$ suy ra $(c + 2)^2 = c^2 + ac \Rightarrow 4c + 4 = ac \Rightarrow c(a - 4) = 4$ Suy ra $c \in \{1; 2; 4\}$</p> <p>Xét từng TH thì chỉ có $c = 4$; $a = 5$; $b = 6$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy:</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>