ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Đề chính thức

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2025

MÔN THI: TOÁN (VÒNG 2)
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu I. (3,5 điểm)

1) Giải phương trình

$$\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{3x^2-2x+1}=\sqrt[4]{2x^2-x+1}+\sqrt[4]{x^2+1},$$

trong đó với a là số thực không âm thì $\sqrt[4]{a}=\sqrt{\sqrt{a}}$.

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+xy=3, \\ 1+12(x+y)=7y^3+6xy(y+3-xy). \end{cases}$$

Câu II. (2,5 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn

$$25^y+\left(4^x+1\right)\left(4x^2+3x+3\right)=\left(4^x+4x^2+3x+4\right)5^y.$$

2) Cho các số thực x,y,z thỏa mãn $1<x,y,z<2$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}\right)\left(\frac{x^3}{x^3+8z^3}+\frac{y^3}{y^3+8x^3}+\frac{z^3}{z^3+8y^3}\right)\ge\frac{3xy}{z^2+8xy}+\frac{3yz}{x^2+8yz}+\frac{3zx}{y^2+8zx}.$$

Câu III. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A có O là trung điểm BC và $\widehat{BAC}<90^\circ$. Xét đường tròn (O) tiếp xúc các cạnh CA, AB theo thứ tự tại R,Q. Trên các cạnh CA, AB lần lượt lấy E,F (không trùng các đỉnh tam giác) sao cho EF tiếp xúc (O) tại P và EF không song song BC. Gọi H,K lần lượt là trực tâm các tam giác OFB, OEC. Gọi giao điểm của FH, EK với BC lần lượt là M,N.

1) Chứng minh rằng hai tam giác OHM, OKN đồng dạng và $\dfrac{OK}{OH}=\dfrac{AE}{AF}$.

2) Dựng điểm G sao cho $OHGK$ là hình bình hành. Chứng minh rằng O,G,P thẳng hàng.

3) Lấy S,T lần lượt đối xứng với Q,R qua BC. Giả sử X là giao điểm của SF và TE, D là giao điểm của BS và CT. Chứng minh rằng AX song song với PD.

Câu IV. (1,0 điểm)

Một tập M các số thực phân biệt được gọi là tập đặc biệt nếu nó có những tính chất sau:

i) với mỗi $x,y\in M$, $x\ne y$ thì $xy\ne 0, x+y\ne 0$ và đúng một trong hai số $xy, x+y$ là số hữu tỷ;

ii) với mỗi $x\in M$ thì x^2 là số vô tỷ.

Hãy tìm số phần tử lớn nhất có thể có của tập đặc biệt.

---HẾT---

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Lời giải đề thi vào 10 môn Toán vòng II trường THPT chuyên Khoa học Tự nhiên năm học 2025 – 2026

Lớp Toán thầy Khánh chuyên Sư phạm

1 Đề bài

Câu I:

(1) Giải phương trình

$$\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{3x^2-2x+1}=\sqrt[4]{2x^2-x+1}+\sqrt[4]{x^3+1},$$

trong đó với a là số thực không âm thì $\sqrt[4]{a}=\sqrt{a\sqrt{a}}$.

(2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+xy=3, \\ 1+12(x+y)=7y^3+6xy(y+3-xy). \end{cases}$$

Câu II:

(1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn

$$25^y+(4^x+1)(4x^2+3x+3)=(4^x+4x^2+3x+4)5^y.$$

(2) Cho các số thực x,y,z thỏa mãn $1<x,y,z<2$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}\right)\left(\frac{x^3}{x^3+8z^3}+\frac{y^3}{y^3+8x^3}+\frac{z^3}{z^3+8y^3}\right)\geq\frac{3xy}{z^2+8xy}+\frac{3yz}{x^2+8yz}+\frac{3zx}{y^2+8zx}$$

Câu III: Cho tam giác ABC cân tại A có O là trung điểm BC và $\widehat{BAC}<90^\circ$. Xét đường tròn (O) tiếp xúc các cạnh CA,AB theo thứ tự tại R,Q. Trên các cạnh CA,AB lần lượt lấy E,F (không trùng các đỉnh tam giác) sao cho EF tiếp xúc (O) tại P và EF không song song BC. Gọi H,K lần lượt là trực tâm các tam giác OFB,OEC. Gọi giao điểm của FH,EK với BC lần lượt là M,N.

(1) Chứng minh rằng hai tam giác OHM,OKN đồng dạng và $\dfrac{OK}{OH}=\dfrac{AE}{AF}$.

(2) Dựng điểm G sao cho $OHGK$ là hình bình hành. Chứng minh rằng O,G,P thẳng hàng.

(3) Lấy S,T lần lượt đối xứng với Q,R qua BC. Giả sử X là giao điểm của SF và TE, D là giao điểm của BS và CT. Chứng minh rằng AX song song với PD.

Câu IV: Một tập M các số thực phân biệt được gọi là tập đặc biệt nếu nó có những tính chất sau:

i) với mỗi $x,y\in M$, $x\neq y$ thì $xy\neq 0, x+y\neq 0$ và đúng một trong hai số $xy, x+y$ là số hữu tỷ;

ii) với mỗi $x\in M$ thì x^2 là số vô tỷ.

Hãy tìm số phần tử lớn nhất có thể có của tập đặc biệt.

2 Lời giải

Câu I:

(1) Giải phương trình

$$\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{3x^2-2x+1}=\sqrt[4]{2x^2-x+1}+\sqrt[4]{x^2+1}$$

trong đó với a là số thực không âm thì $\sqrt[4]{a}=\sqrt{\sqrt{a}}$.

(2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+xy=3, \\ 1+12(x+y)=7y^3+6xy(y+3-xy). \end{cases}$$

Lời giải:

(1) ĐKXĐ: $x \geq -1$.

Chuyển vế ta có phương trình tương đương

$$\sqrt[4]{3x^2-2x+1}-\sqrt[4]{2x^2-x+1}=\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt[4]{x+1}$$

$$\iff \frac{\sqrt{3x^2-2x+1}-\sqrt{2x^2-x+1}}{\sqrt[4]{3x^2-2x+1}+\sqrt[4]{2x^2-x+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x^2+1}+\sqrt{x+1}}$$

$$\iff \frac{x^2-x}{(\sqrt[4]{3x^2-2x+1}+\sqrt[4]{2x^2-x+1})(\sqrt{3x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2-x+1})}$$

$$=\frac{x^2-x}{(\sqrt[4]{x^2+1}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1})}$$

Ta thấy rằng phương trình có nghiệm $x=0, x=1$.

Xét trường hợp $x =\neq 0, 1$.

$$\implies (\sqrt[4]{3x^2-2x+1}+\sqrt[4]{2x^2-x+1})(\sqrt{3x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2-x+1})$$

$$=(\sqrt[4]{x^2+1}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1})$$

Nếu $x^2<x \implies \sqrt[4]{3x^2-2x+1}<\sqrt[4]{x+1}, \sqrt[4]{2x^2-x+1}<\sqrt[4]{x^2+1}$.

Đồng thời $\sqrt{3x^2-2x+1}<\sqrt{x+1}, \sqrt{2x^2-x+1}<\sqrt{x^2+1}$.

Vì vậy, rõ ràng dấu bằng sẽ không thể xảy ra.

Trường hợp $x^2>x$ thì cũng tương tự.

Do đó phương trình chỉ có 2 nghiệm $x=0, x=1$.

(2) Ta có phương trình thứ hai tương đương

$$1+12(x+y)+x^3+y^3=8y^3+6xy(y+x+y)+x^3 \iff 1+12(x+y)-3xy(x+y)+(x+y)^3=(2y+x)^3$$

$$\iff 1+3(x+y)(4-xy)+(x+y)^3=(2y+x)^3 \iff 1+3(x+y)+3(x+y)^2+(x+y)^3=(2y+x)^3$$

$$\iff (x+y+1)^3=(2y+x)^3 \iff x+y+1=2y+x \implies y=1 \implies x=1.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x,y)=(1,1)$.

Câu II:

(1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn

$$25^y + (4^x + 1)(4x^2 + 3x + 3) = (4^x + 4x^2 + 3x + 4)5^y.$$

(2) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $1 < x, y, z < 2$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{z^3} + \frac{z^3}{x^3}\right)\left(\frac{x^3}{x^3 + 8z^3} + \frac{y^3}{y^3 + 8x^3} + \frac{z^3}{z^3 + 8y^3}\right) \geq \frac{3xy}{z^2 + 8xy} + \frac{3yz}{x^2 + 8yz} + \frac{3zx}{y^2 + 8zx}$$

Lời giải:

(1) $25^y + (4^x + 1)(4x^2 + 3x + 3) = (4^x + 4x^2 + 3x + 4)5^y$.

$\Longleftrightarrow 5^{2y} + (4^x + 1)(4x^2 + 3x + 3) = (4x^2 + 3x + 3)5^y + (4^x + 1)5^y$.

$\Longleftrightarrow 5^y(5^y - 4^x - 1) + (4x^2 + 3x + 3)(4^x + 1 - 5^y) = 0$.

$\Longleftrightarrow (5^y - 4^x - 1)(4x^2 + 3x + 3 - 5^y) = 0$.

TH1: $5^y = 4^x + 1$. Nếu $x = 1$ thì $y = 1$ thử lại thỏa mãn.

Nếu $x \geq 2$ thì $4^x \equiv 0 \pmod 8$ nên $5^y \equiv 1 \pmod 8$ suy ra y chẵn. Nhưng lại có $5^y = 4^x + 1 \equiv 2 \pmod 3$ nên y lẻ ta có điều vô lí.

TH2: $4x^2 + 3x + 3 = 5^y$ suy ra $4x^2 + 3x + 3 \not\vdots\, 3$ nên $x \not\vdots\, 3$ suy ra $4x^2 + 3x + 3 \equiv 1 \pmod 3$ dẫn tới $5^y \equiv 1 \pmod 3$ suy ra y chẵn. Khi đó $4x^2 + 3x + 3$ là số chính phương mà lại có $(2x)^2 < 4x^2 + 3x + 3 < (2x + 2)^2$ suy ra $4x^2 + 3x + 3 = (2x + 1)^2 \implies x = 2 \implies y = 2$. Thử lại thỏa mãn.

Vậy $(x; y) = (1; 1),\ (2; 2)$.

(2) Ta chứng minh $VT \geq 1 \geq VP$.

Đặt $A = \dfrac{3xy}{z^2 + 8xy} + \dfrac{3yz}{x^2 + 8yz} + \dfrac{3zx}{y^2 + 8zx}$ ta có

$$3 - \frac{8}{3}A = \frac{z^2}{z^2 + 8xy} + \frac{x^2}{x^2 + 8yz} + \frac{y^2}{y^2 + 8zx} \geq \frac{(x + y + z)^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 8(xy + yz + zx)}$$

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 + 8(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2 + 6(xy + yz + zx) \leq 3(x + y + z)^2$ nên $3 - \dfrac{8}{3}A \geq \dfrac{1}{3}$ hay $A \leq 1$ tức $VP \leq 1$.

Đặt $x^3 = a,\ y^3 = b,\ z^3 = c$ và $B = \dfrac{x^3}{x^3 + 8z^3} + \dfrac{y^3}{y^3 + 8x^3} + \dfrac{z^3}{z^3 + 8y^3}$.

Suy ra

$$\begin{aligned} B &= \frac{a}{a + 8c} + \frac{b}{b + 8a} + \frac{c}{c + 8b} \\ &= \frac{a^2}{a^2 + 8ac} + \frac{b^2}{b^2 + 8ab} + \frac{c^2}{c^2 + 8bc} \\ &\geq \frac{(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 8ab + 8bc + 8ca} \end{aligned}$$

Tương tự trên $a^2 + b^2 + c^2 + 8ab + 8bc + 8ca \leq 3(a + b + c)^2$ nên $B \geq \dfrac{1}{3}$.

Mà $\dfrac{x^3}{y^3} + \dfrac{y^3}{z^3} + \dfrac{z^3}{x^3} \geq 3$ suy ra $VT \geq 1 \geq VP$ ta có đpcm.

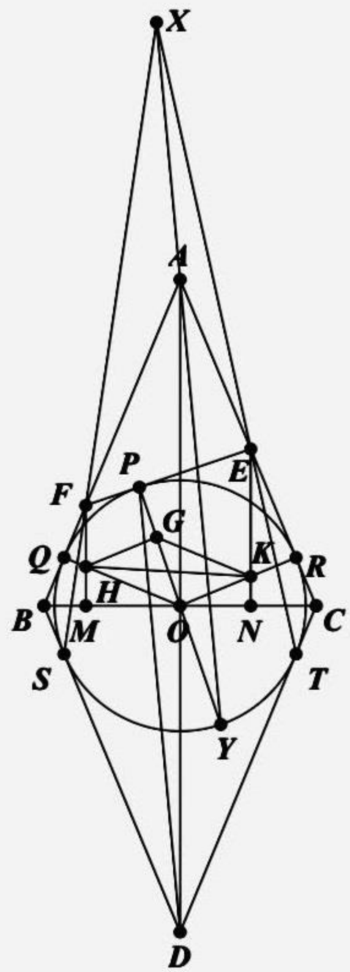
Câu III: Cho tam giác ABC cân tại A có O là trung điểm BC và $\widehat{BAC} < 90°$. Xét đường tròn (O) tiếp xúc các cạnh CA, AB theo thứ tự tại R, Q. Trên các cạnh CA, AB lần lượt lấy E, F (không trùng các đỉnh tam giác) sao cho EF tiếp xúc (O) tại P và EF không song song BC. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác OFB, OEC. Gọi giao điểm của FH, EK với BC lần lượt là M, N.

(1) Chứng minh rằng hai tam giác OHM, OKN đồng dạng và $\dfrac{OK}{OH} = \dfrac{AE}{AF}$.

(2) Dựng điểm G sao cho $OHGK$ là hình bình hành. Chứng minh rằng O, G, P thẳng hàng.

(3) Lấy S, T lần lượt là đối xứng với Q, R qua BC. Giả sử X là giao điểm của SF và TE, D là giao điểm của BS và CT. Chứng minh rằng AX song song với PD.

Lời giải:



(1) Do tam giác ABC cân tại A nên $\angle ABC = \angle ACB$. Lại có $OQ \perp AB$ và $OR \perp AC$ nên suy ra $\angle QOB = 90° - \angle ABC = 90° - \angle ACB = \angle ROC$.

Ta có H, K là trực tâm tam giác FOB và EOC nên $FH \perp BC$ và $EK \perp BC$ suy ra $\angle HMO = \angle KNO = 90°$.

Từ hai điều trên ta có $\triangle HOM \backsim \triangle KON$ suy ra $\dfrac{OH}{OK} = \dfrac{OM}{ON}$ (1).

Ta có $FM \parallel AO \parallel EN$ (cùng vuông góc BC) nên áp dụng định lí Talet ta có: $\dfrac{BM}{OM} = \dfrac{BF}{FA}$ và $\dfrac{CN}{ON} = \dfrac{CE}{AE}$ nên $\dfrac{OM}{ON} = \dfrac{BM}{BF} \cdot \dfrac{CE}{CN} \cdot \dfrac{AF}{AE}$.

Dễ thấy $\triangle BFM \backsim \triangle CEN$ nên $\dfrac{BM}{CN} = \dfrac{BF}{CE}$ từ đây ta có $\dfrac{OM}{ON} = \dfrac{AF}{AE}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{OH}{OK} = \dfrac{AF}{AE}$, đpcm.

(2) Ta có các tứ giác $FPOQ$ và $OPER$ nội tiếp nên $\angle POQ = \angle AFE$ và $\angle POR = \angle AEF$.

Do tứ giác $HGKO$ là hình bình hành nên $\angle GHO = 180° - \angle HOK$ và $HG = OK$.

Ta có tứ giác $AQOR$ nội tiếp nên $\angle HOK = 180° - \angle EAF$ suy ra $\angle GHO = \angle EAF$ và $\dfrac{HG}{HO} = \dfrac{OK}{OH} = \dfrac{AE}{F}$ nên ta có $\triangle GHO \backsim \triangle EAF$ dẫn tới $\angle GOH = \angle AFE = \angle POQ$.

Tương tự $\angle GOK = \angle POR$ từ đây suy ra ba điểm O, P, G thẳng hàng.

(3) Do Q đối xứng S qua BC nên $OQ = OS$ hay $S \in (O)$ và $QS \perp BC$. Dễ có $QR \parallel BC$ nên $QR \perp QS$ suy ra RS là đường kính của (O) hay O là trung điểm RS.

Kết hợp với O là trung điểm BC suy ra $BSRC$ và hình bình hành suy ra $BS \parallel AC$. Tương tự O là trung điểm QT và $CT \parallel AB$ dẫn tới $ABDC$ là hình bình hành nên O là trung điểm AD.

Kẻ đường kính PY của (O) ta được $APDT$ là hình bình hành nên $PD \parallel AY$. Để chứng minh $PD \parallel AX$ ta chỉ ra A, X, Y thẳng hàng.

Gọi I là tâm nội tiếp tam giác AEF và I', Z lần lượt là hình chiếu của I lên AE, EF.

Ta có A, I, O thẳng hàng và $II' \parallel OR$ nên $\dfrac{AI}{AO} = \dfrac{II'}{OR} = \dfrac{IZ}{OY}$ mà $IZ \parallel OY$ (cùng vuông góc EF) nên A, Z, Y thẳng hàng.

Ta có FI, FO lần lượt là phân giác trong và ngoài góc AFE nên $FI \perp FO$.

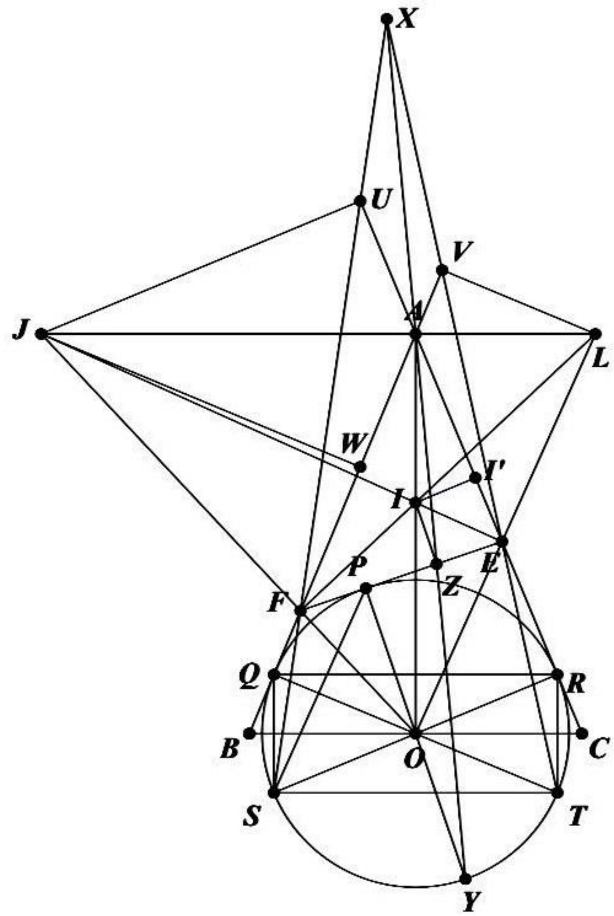
Đường thẳng qua A vuông góc AI cắt FO tại J. Ta có $\angle JAI = \angle JFI = 90°$ nên tứ giác $AIFJ$ nội tiếp suy ra $\angle JIF = \angle JAF = 90° - \angle IAF = 180° - \angle EIF$ do đó J, I, E thẳng hàng vì vậy J là tâm đường tròn bàng tiếp góc E của tam giác AEF.

Kẻ $JW \perp AF$ và $JU \perp AE$ với $W \in AF$, $U \in AE$.

Do JA là phân giác ngoài góc FAE nên $JU = JW$.

Ta có $JW \parallel QO$ (cùng vuông góc AB) nên $\dfrac{JF}{FO} = \dfrac{JW}{QO} = \dfrac{SO}{JU}$ mà $SO \parallel JU$ nên S, F, U thẳng hàng.

Tương tự gọi OE cắt AJ tại L thì L là tâm đường tròn bàng tiếp góc F của tam giác AEF. Kẻ $LV \perp AF$ với $V \in AF$ thì E, T, V thẳng hàng.



Theo tính chất tâm bàng tiếp, ta tính được $AU = FZ = \dfrac{EF + AF - AE}{2}$, $AU = EZ = \dfrac{EF + AE - AF}{2}$ và $FV = EU = \dfrac{AE + AF + EF}{2}$ suy ra $\dfrac{ZF}{ZE} \cdot \dfrac{UE}{UA} \cdot \dfrac{VA}{VF} = 1$ nên áp dụng định lí Ceva đảo cho tam giác AEF ta có AZ, FU, EZ đồng quy suy ra X, A, Z thẳng hàng nên A, Y, X thẳng hàng, ta có đpcm.

Câu IV: Một tập M các số thực phân biệt được gọi là tập đặc biệt nếu nó có những tính chất sau:

i) với mỗi $x, y \in M$, $x \neq y$ thì $xy \neq 0, x + y \neq 0$ và đúng một trong hai số $xy, x + y$ là số hữu tỷ;

ii) với mỗi $x \in M$ thì x^2 là số vô tỷ.

Hãy tìm số phần tử lớn nhất có thể có của tập đặc biệt.

Lời giải:

Ta sẽ chứng minh rằng M chỉ có thể chứa tối đa 4 phần tử.

Với $|M| = 4$, khi đó $M = \{1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}, -2 - \sqrt{2}\}$ sẽ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Giả sử tồn tại $M = \{a, b, c, d, e\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Dễ thấy $a, b, c, d, e \neq 0$.

Xét các số a, b, c.

Nếu ab, bc, ca hữu tỉ thì thì $\dfrac{ab}{bc} \cdot ca = a^2$ hữu tỉ (vô lí)

Nếu $a + b, b + c, c + a$ hữu tỉ thì $(a + b) - (b + c) + c + a = 2a$ hữu tỉ (vô lí).

Nếu $ab, ac, b + c$ hữu tỉ thì $\dfrac{ab + ac}{b + c} = 2a$ hữu tỉ (vô lí) $\quad (1)$

Vậy nếu ab hữu tỉ thì $b + c, c + a$ vô tỉ.

Vậy giả sử ab hữu tỉ, khi đó dễ thấy $a + c, a + d, b + c, b + d$ hữu tỉ, dẫn tới cd hữu tỉ.

Tương tự de, ce hữu tỉ (vô lí do (1)).

Vậy M có tối đa 4 phần tử.