PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN VŨ THƯ

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ KHẢO SÁT CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
Môn: TOÁN 8
Năm học: 2024 – 2025
(Thời gian làm bài: 120 phút)

Bài 1: *(4,0 điểm)*

1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $A = x^4 + x^2 + 1$

2. Cho a, b, c là ba số thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

Tính giá trị của biểu thức: $B = \dfrac{a+b}{c} + \dfrac{b+c}{a} - \dfrac{2025c + 2025a}{b}$.

Bài 2: *(5,0 điểm)*

Cho biểu thức: $P = \dfrac{x-2y}{2-2x^2-y}.\left(\dfrac{x-y}{2y-x} + \dfrac{x^2+y^2+y-2}{2y^2+xy-x^2}\right)$ (với $x \neq -y, x \neq 2y, y \neq 2-2x^2$).

1. Rút gọn P.

2. Tính giá trị của P khi x, y thỏa mãn: $2x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$.

3. Cho $y = 0$ và $x \geq 2$ tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = P + x$.

Bài 3: *(4,0 điểm)*

1. Cho đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ biết đa thức P(x) chia cho: $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$ đều dư là 6 và $P(-1) = -66$. Tìm đa thức P(x).

2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + x + 10 = y^2$.

Bài 4: *(4,0 điểm)*

Cho tam giác MBC vuông tại M, kẻ MD vuông góc với BC tại D. Trên đoạn thẳng MD lấy điểm H ($H \neq M, D$). Qua C vẽ thẳng vuông góc với tia BH tại E, qua B vẽ đường thẳng vuông góc với tia CH tại F. Gọi A là giao điểm của CE và BF.

1. Chứng minh: AE.AC = AF.AB và ba điểm A, M, D thẳng hàng.

2. Trên tia đối của tia FC lấy điểm K sao cho BK = BM chứng minh $\widehat{BKA} = 90^0$.

3. Giả sử $\widehat{BAC} = 45^0$. Chứng minh $S_{AEF} = S_{BCEF}$ (S_{AEF}, S_{BCEF} lần lượt là ký hiệu diện tích của tam giác AEF và tứ giác BCEF).

Bài 5: *(2,0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A, hai đường phân giác trong của tam giác là BD, CE cắt nhau tại O. Chứng minh: $\dfrac{BD^2}{BO^2} + \dfrac{CE^2}{CO^2} \geq 4$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 6: *(1,0 điểm).*

Trong một khu rừng hình vuông cạnh có độ dài 1000 mét, người ta trồng tất cả 4500 cây cổ thụ. Biết rằng cây to nhất có đường kính gốc là 0,5 mét. Chứng minh rằng trong khu rừng đó có ít nhất 60 mảnh đất có diện tích 200 m^2 không có cây cổ thụ nào?

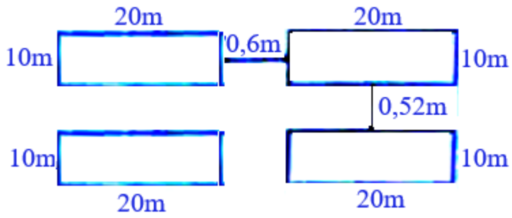
Hết

BÀI	Ý	NỘI DUNG	ĐIỂM
Bài 1 4 điểm		1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $A=x^4+x^2+1$ 2. Cho a,b,c là ba số thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$. Tính giá trị của biểu thức: $\mathrm{B}=\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{b+c}{a}-\dfrac{2025c+2025a}{b}$.	
	1	$A=x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2$ $=\left(x^2+1\right)^2-x^2=\left(x^2+1-x\right)\left(x^2+1+x\right)$	
	2	Biến đổi $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ về dạng $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0\ldots$ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ Lập luận để $a=b=c$	
		Từ đó tính: Biến đổi $\mathrm{B}=\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{b+c}{a}-\dfrac{2025(c+a)}{b}$ Và thay vào tính KQ KL $B=-4046$	
Bài 2 5 điểm		Cho biểu thức: $P=\dfrac{x-2y}{2-2x^2-y}\left(\dfrac{x-y}{2y-x}+\dfrac{x^2+y^2+y-2}{2y^2+xy-x^2}\right)$ (với $x\neq -y, x\neq 2y, y\neq 2-2x^2$) 1. Rút gọn P. 2. Tính giá trị của P khi x,y thỏa mãn: $2x^2+y^2-4x-6y+11=0$ 3. Cho $y=0$ và $x\geq 2$ tìm giá trị nhỏ nhất của $Q=P+x$.	
	1	$P=\dfrac{x-2y}{2-2x^2-y}\left(\dfrac{x-y}{2y-x}+\dfrac{x^2+y^2+y-2}{2y^2+xy-x^2}\right)$ Với ĐK $x\neq -y, x\neq 2y, y\neq 2-2x^2$ Ta có $=\dfrac{x-2y}{2-2x^2-y}\left(\dfrac{x-y}{2y-x}+\dfrac{x^2+y^2+y-2}{(2y-x)(x+y)}\right)$ $=\dfrac{x-2y}{2-2x^2-y}\left(\dfrac{(x-y)(x+y)}{(2y-x)(x+y)}+\dfrac{x^2+y^2+y-2}{(2y-x)(x+y)}\right)$ $=\dfrac{x-2y}{2-2x^2-y}\left(\dfrac{x^2-y^2+x^2+y^2+y-2}{(2y-x)(x+y)}\right)$ $=\dfrac{x-2y}{2-2x^2-y}\left(\dfrac{2x^2+y-2}{(2y-x)(x+y)}\right)$ $=\dfrac{2y-x}{2x^2+y-2}\cdot\dfrac{2x^2+y-2}{(2y-x)(x+y)}$	

		$=\dfrac{1}{x+y}$ và kết luận đúng	
	2	Biến đổi $2x^2+y^2-4x-6y+11=0$ thành $2(x-1)^2+(y-3)^2=0$ Lập luận tìm $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$ Thỏa mãn điều kiện $x\neq -y, x\neq 2y, y\neq 2-2x^2$ Thay vào P tính KQ đúng $P=\dfrac{1}{4}$	
	3	Cho $y=0$ và $x\geq 2$ tìm giá trị nhỏ nhất của $Q=P+x$.	
		Khi $y=0$ và $x\geq 2$ thi luôn thỏa mãn: $x\neq -y, x\neq 2y, y\neq 2-2x^2$ Khi đó: $P=\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{x}$. $Q=\dfrac{1}{x}+x=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{4}+\dfrac{3x}{4}=\dfrac{1}{x}-1+\dfrac{x}{4}+\dfrac{3x}{4}+1$ $=\dfrac{(x-2)^2}{4x}+\dfrac{3x}{4}+1\geq\dfrac{5}{2}$ do $x\geq 2$ và $(x-2)^2\geq 0, \forall x\geq 2$ Dấu bằng xảy ra khi $x=2$ (TMĐK) Vậy GTNN là $Q_{\min}=\dfrac{5}{2}$ khi $x=2$	
Bài 3 **4 điểm**		1. Cho đa thức $\mathrm{P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d}$ biết: đa thức $\mathrm{P(x)}$ chia cho: $\mathrm{x-1, x-2, x-3}$ đều dư là 6 và 2 d $\mathrm{P(-1)=-66}$. Tìm đa thức $\mathrm{P(x)}$? 2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2+x+10=y^2$.	
	1	Xét đa thức $\mathrm{Q}(x)=\mathrm{P}(x)-6$ Tính $Q(1)=Q(2)=Q(3)=0$ và suy ra $x=1,2,3$ là các nghiệm của của $\mathrm{Q(x)}$	
		Lập luận $\mathrm{Q(x)}$ bậc 4 hệ số cao nhất là 1 và viết dạng của $\mathrm{Q}(x)=(x-1))x-2)(x-3)(x-a)$ với a là một nghiệm nữa của $\mathrm{Q(x)}$	
		Tính $P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-a)+6$ Từ gt $P(-1)=-66$ tính $\mathrm{a=-4}$ Từ đó tìm được $\mathrm{P(x)=x^4-2x^3-13x^2+38x-18}$	
	2	Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2+x+10=y^2$.	
		Nhân hai vế với 4 và biến đổi thành $(2y-2x-1)(2y+2x+1)=39$	
		Lập luận rồi xét các trường hợp TH1: $\begin{cases}2y-2x-1=1\\2y+2x+1=39\end{cases}$ suy ra $\begin{cases}x=9\\y=10\end{cases}$	

		TH2: $\begin{cases} 2y-2x-1=-1 \\ 2y+2x+1=-39 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x=-10 \\ y=-10 \end{cases}$ TH3: $\begin{cases} 2y-2x-1=3 \\ 2y+2x+1=13 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ TH4: $\begin{cases} 2y-2x-1=13 \\ 2y+2x+1=3 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x=-3 \\ y=4 \end{cases}$ TH5: $\begin{cases} 2y-2x-1=-13 \\ 2y+2x+1=-3 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$ TH6: $\begin{cases} 2y-2x-1=-3 \\ 2y+2x+1=-13 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases}$ TH7: $\begin{cases} 2y-2x-1=-39 \\ 2y+2x+1=-1 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x=9 \\ y=-10 \end{cases}$ TH8: $\begin{cases} 2y-2x-1=39 \\ 2y+2x+1=1 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x=-10 \\ y=10 \end{cases}$ Kết luận:	
Bài 4		Cho tam giác MBC vuông tại M, kẻ MD vuông góc với BC tại D. Trên đoạn thẳng MD lấy điểm H ($H \neq M$ và D). Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với tia BH tại E, qua B vẽ đường thẳng vuông góc với tỉa CH tại F. Gọi A là giao điểm của CE và BF. 1. Chứng minh: $AE.AC = AE.AB$ và ba điểm A, M, D thẳng hàng. 2. Trên tia đối của tía FC lấy điểm K sao cho. $\mathrm{BK} = \mathrm{BM}$ chứng minh $\widehat{\mathrm{BKA}} = 90^\circ$ 3. Giả sử $\widehat{\mathrm{BAC}} = 45^\circ$. Chứng minh $S_{AEF} = S_{BCEF}$ ($S_{AEF}; S_{BCEF}$ lần lượt là ký hiệu diện tích của tam giác AEF và tứ giác BCEF).	
		Hình vẽ	
	1	+) Chứng minh $\triangle \mathrm{AEB} \backsim \triangle \mathrm{AFC} (\mathrm{g}-\mathrm{g})$ Rút ra tỷ số đồng dạng và suy ra: $\mathrm{AE.AC} = \mathrm{AF.AB}$ +) Chứng minh được H là trực tâm tam giác ABC Suy ra AH $\perp$ BC Lập luận $\mathrm{MH} \perp \mathrm{BC}$ và suy ra $\mathrm{A, M, D}$ thẳng hàng	
	2	+) Chứng minh được $\mathrm{MB}^2 = \mathrm{BD} \cdot \mathrm{BC}$, suy ra $\mathrm{BK}^2 = \mathrm{BD} \cdot \mathrm{BC}$ +) Chứng minh được $\mathrm{BD} \cdot \mathrm{BC} = \mathrm{BF} \cdot \mathrm{BA}$ Suy ra $\dfrac{BK}{BA} = \dfrac{BF}{BK}$ Chửng minh $\triangle \mathrm{BKA} \backsim \triangle \mathrm{BFK}$ (c.g.c) Suy ra $\widehat{\mathrm{BKA}} = \widehat{\mathrm{BFK}} = 90^\circ$	

		Từ câu 1: $AE \cdot AC = AF \cdot AB$ Chứng minh được $\triangle AEF \backsim \triangle ABC (c.g.c)$ Tinh tỷ số diện tích $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2$ $\left(S_{ABC}\right.$ là ký hiệu diện tích tam giác $\left.ABC\right)$ Từ giả thiết $\widehat{BAC} = 45^\circ$ chứng minh $\triangle AEB$ vuông cân tại E và chứng minh được $AB^2 = 2AE^2$ Suy ra: $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}$ suy ra $S_{AEF} = \frac{1}{2} S_{ABC}$ Từ đó suy ra $S_{ABf} = S_{BCE}$	
Bài 5 **2 điểm**		Cho tam giác ABC vuông tại A , hai đường phân giác trong của tam giác là BD, CE cát nhau tại O . Chứng minh: $\frac{BD^2}{BO^2} + \frac{CE^2}{CO^2} \geq 4$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?	
		Hình vẽ	
		+) Áp dưng tính chất đường phân giác BD cho $\triangle ABC$ ta có $\frac{CD}{AD} = \frac{BC}{AB}$ suy ra $\frac{CD}{AD+CD} = \frac{BC}{AB+BC}$ hay $\frac{CD}{AC} = \frac{BC}{AB+BC}$ suy ra $\frac{CD}{BC} = \frac{AC}{AB+BC}$ +) Áp dụng tính chất đường phân giác CO cho $\triangle BCD$ ta có $\frac{OD}{OB} = \frac{CD}{BC} = \frac{AC}{AB+BC}$ suy ra $\frac{OD+OB}{OB} = \frac{AB+AC+BC}{AB+BC}$ Suy ra $\frac{BD}{BO} = \frac{AB+AC+BC}{AB+BC}$ Tương tư: $\frac{CE}{CO} = \frac{AB+AC+BC}{AC+BC}$ +) Tính $\frac{BD}{BO} \cdot \frac{CE}{CO} = \frac{(AB+AC+BC)^2}{(AB+BC)(AC+BC)} = 2$ Ta có: $\frac{BD^2}{BO^2} + \frac{CE^2}{CO^2} \geq 2\frac{BD}{BO} \cdot \frac{CE}{CO} = 4$ Dấu bằng xày ra khi: $\frac{BD}{BO} = \frac{CE}{CO}$ hay $AB = AC$ Suy ra tam giác ABC vuông cân tại A	
Bài 6 **1 điểm**		Trong một khu rừng hình vuông cạnh có độ dài 1000 mét, người ta trồng tất cả 4500 cây cổ thụ. Biết rằng cây to nhất có đường kính gốc là 0,5 mét. Chứng minh rằng trong khu rừng đó có it nhất 60 mảnh đất có diện tích $200\,m^2$ không có cây cổ thu nào?	
		Hình vẽ	

		 	
		Ta có : $1000 = 48.20 + 47.0,6 + 2.5,9$ Và $1000 = 95 \cdot 10 + 94 \cdot 0,52 + 2 \cdot 0,56$	
		Chia cạnh thứ nhất của khu rừng hình vuông thành 48 đoạn mỗi đoạn 20 m , khoảng cách giữa hai đoạn là $0,6\,\text{m}$, ở hai đầu là $5,9\,\text{m}$ Chia cạnh thứ hai của khu rừng hình vuông thành 95 đoạn mỗi đoạn dài 10 m , khoảng cách giữa hai đoạn là $0,52\,\text{m}$, ở hai đầu là hai đoạn $0,56\,\text{m}$	
		Do đó ta có tất cả $95.48 = 4560$ mảnh đất có diện tích $200\,\text{m}^2$ Vì chỉ có 4500 cây cổ thụ, **mỗi cây có đường kính không quá** $0,5\,\text{m}$**.** $(0,5 < 0,52 < 0,6)$ đo đó mỗi cây cồ thụ bất kỳ không thể chiếm chỗ hai mảnh đất (mỗi mảnh có diện tích $200\,\text{m}^2$) Vì thế theo nguyên li Dirichlet còn it nhất 60 mảnh (mỗi mảnh có diện tich $200\,\text{m}^2$) mà trong mỗi mảnh ấy không có một cây cổ thụ nào.	

Lưu ý:

Trên đây chỉ là hướng dẫn chấm điểm theo bước cho một cách giải.

Các cách giải chính xác khác, giám khảo cho điểm tương ứng.

Điểm toàn bài thi bằng tổng điểm các câu thành phần (không làm tròn).