CHƯƠNG I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

I LÝ THUYẾT.

I. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1. Khái niệm tính đợn điệu của hàm số.

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nữa khoảng và $y = f(x)$ là hàm số xác định trên K.

+) Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu

$\forall x_1,\ x_2 \in K,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$

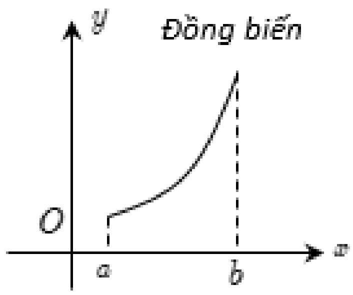
+) Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu

$\forall x_1,\ x_2 \in K,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$

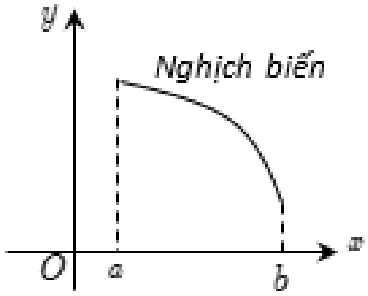
+) Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là đơn điệu trên K.

Chú ý:

*+ Nếu hàm số **đồng biến** trên K thì từ trái sang phải **đồ thị đi lên**.*



*+ Nếu hàm số **nghịch biến** trên K thì từ trái sang phải **đồ thị đi xuống**.*



2. Định lý: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nữa khoảng.

+) Nếu $f'(x) > 0,\ \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng K.

+) Nếu $f'(x) < 0,\ \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng K.

Chú ý.

Định lí trên vẫn đúng trong trường hợp $f'(x)$ bằng 0 tại một số hữu hạn điểm trong khoảng K.

Người ta chứng minh được rằng, nếu $f'(x)=0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ không đổi trên khoảng K.

3. Định lý: (Tổng quát) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

+) Nếu $f'(x) \geq 0,\ \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên K thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng K.

+) Nếu $f'(x) \leq 0,\ \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên K thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng K.

4. Lưu ý:

+) Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f'(x) > 0,\ \forall x \in (a;b)$ thì ta nói hàm số đồng biến trên đoạn $[a;b]$.

+) Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f'(x) < 0,\ \forall x \in (a;b)$ thì ta nói hàm số nghịch biến trên đoạn $[a;b]$.

+) Tương tự với các khái niệm hàm số đồng biến, nghịch biến trên các nửa khoảng.

5. Sử dụng bảng biến thiên để xét tính đơn điệu của hàm số.

Để xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định D.

Bước 2: Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\ (i = 0;1;2;...)$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 3: Sắp xếp các $x_i\ (i = 0;1;2;...)$ theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

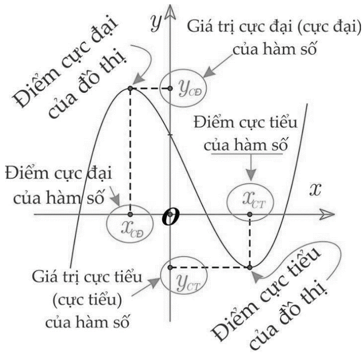
Bước 4: Căn cứ vào bảng biến thiên nêu kết luận

Chú ý: Đối với bài toán trắc nghiệm, ta có thể sử dụng **Phương pháp sử dụng MTCT.**

Cách 1: Sử dụng chức năng lập bảng giá trị MODE 7 của máy tính Casio. Quan sát bảng kết quả nhận được về tính tăng, giảm giá trị của f(x) và dự đoán.

Cách 2: Tính đạo hàm, thiết lập bất phương trình đạo hàm. Sử dụng tính năng giải bất phương trình INEQ của máy tính Casio (đối với bất phương trình bậc hai, bậc ba).

II. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

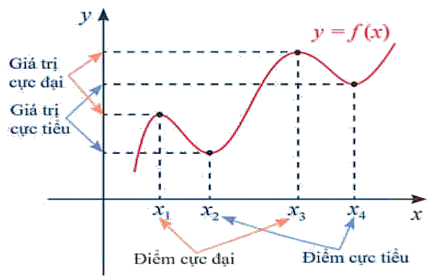


1. Khái niệm cực trị của hàm số: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$ và điểm $x_0 \in (a;b)$.

+) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $y = f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0.

+) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $y = f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0.

*** Chú ý**



+) Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực đại** của hàm số; $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số, kí hiệu là $f_{CĐ}(f_{CT})$, còn điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại** của đồ thị hàm số.

+) Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại còn gọi là **cực đại** và được gọi chung là **cực trị** của hàm số.

2. Cách tìm cực trị của hàm số

Định lí 2: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$.

+) Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(a;x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên $(x_0;b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$.

+) Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(a;x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên $(x_0;b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$.

Minh họa bằng bảng biến thiên

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f_{CĐ}$	$\searrow$	

x	a		x_1		b
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	f_{CT}	$\nearrow$	

NHẬN XÉT:

Để tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định D.

Bước 2: Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\,(i = 0;1;2;...)$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 3: Sắp xếp các $x_i\,(i = 0;1;2;...)$ theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

Bước 4: Căn cứ vào bảng biến thiên nêu kết luận

HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1: Một vật chuyển động theo quy luật $s(t)=-2t^3+24t^2+9t-3$ với t (giây) là khoảng thời gian từ lúc bắt đầu chuyển động và $s(t)$ (m) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vật chuyển động nhanh dần hay chậm dần.

Câu 2: Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm được tính theo công thức $V(t)=\frac{1}{100}\left(30t^3-\frac{t^4}{4}\right)$ với $0\le t\le 90$. Tốc độ bơm nước ở thời điểm t được tính theo công thức $v(t)=V'(t)$. Tìm thời điểm tốc độ bơm nước là lớn nhất và tính tốc độ bơm nước lớn nhất đó.

Câu 3: Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t)=\frac{5000}{1+5e^{-t}}, t\ge 0$ trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

Câu 4: Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t)=t^3-6t^2+9t$ với $t\ge 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $v(t); v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t. Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

Câu 5: Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n)=480-20n$ (gam). Hỏi phải thả số lượng cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ thuộc khoảng nào dưới đây để cân nặng trung bình của số cá đó tăng?

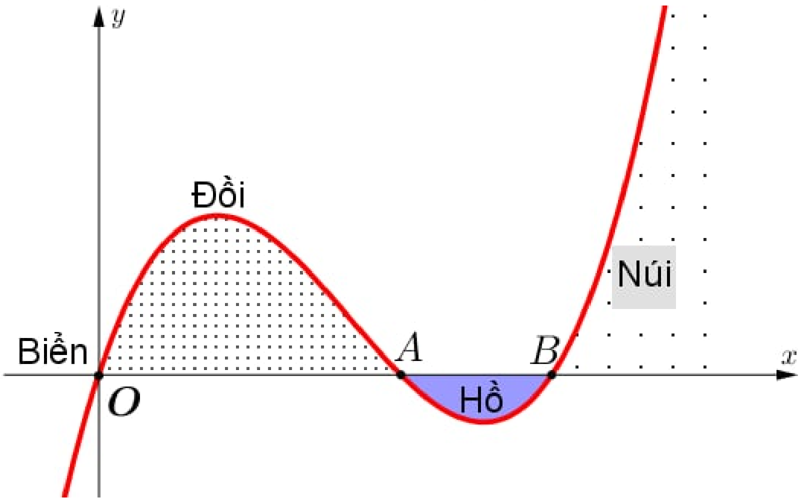
Câu 6: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t)=45t^2-t^3, t=0,1,2,...,25$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0;25]$ thì đạo hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. Xác định khoảng thời gian mà tốc độ truyền bệnh giảm?

Câu 7: Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là 300 km. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v)=cv^3t,$ trong đó c là hằng số và E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên nằm ở khoảng nào thì năng lượng tiêu hao của cá giảm?

Câu 8: Một cửa hàng trung bình bán được 100 cái Tivi mỗi tháng với giá 14 triệu đồng một cái. Chủ cửa hàng nhận thấy rằng, nếu giảm giá bán mỗi cái 500 ngàn đồng thì số lượng tivi bán ra sẽ tăng thêm 10 cái mỗi tháng. Hỏi cửa hàng nên bán với giá bao nhiêu để doanh thu cửa hàng là lớn nhất?

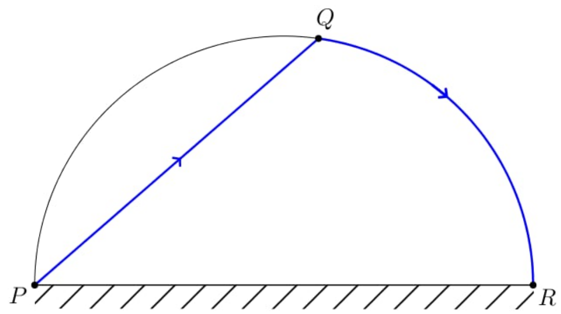
Câu 9: Giả sử số lượng quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hóa bằng hàm số $P(t)=\frac{25}{0,25+e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tốc độ sinh trưởng của quần thể nấm men ở thời điểm t được tính theo công thức $P'(t)$. Nêu nhận xét về sự tăng giảm của số lượng quần thể nấm men được nuôi cấy. Số lượng quần thể nấm men có thể tăng lên vô cùng được không?

Câu 10: Lát cắt ngang của một vùng đất ven biển được mô hình hoá thành một hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ (đơn vị độ dài trên các trục là km).



Biết khoảng cách hai bên chân đồi $OA=2$ km, độ rộng của hồ $AB=1$ km và ngọn đồi cao 528 m. Tìm độ sâu của hồ (tính bằng mét) tại điểm sâu nhất? (làm tròn đến hàng đơn vị).

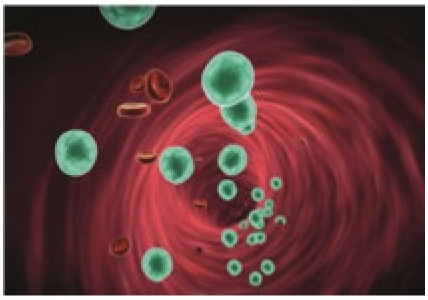
Câu 11: Cho một bờ hồ hình bán nguyệt có bán kính bằng 2 km, đường kính PR như hình vẽ sau :



Từ điểm P anh Tài chèo một chiếc thuyền với vận tốc 3 km/h đến điểm Q trên bờ hồ, rồi chạy bộ dọc theo thành hồ đến vị trí R với vận tốc 6 km/h. Thời gian chậm nhất mà anh Tài di chuyển từ P đến R là bao nhiêu? (thời gian tính bằng phút).

Câu 12: Xí nghiệp A sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết rằng hàm tổng chi phí sản xuất là $TC=x^3-77x^2+1000x+40000$ và hàm doanh thu là $TR=-2x^2+1312x$, với x là số sản phẩm. Lợi nhuận của xí nghiệp A được xác định bằng hàm số $f\left(x\right)=TR-TC$, cực đại lợi nhuận của xí nghiệp A khi đó đạt bao nhiêu sản phẩm?

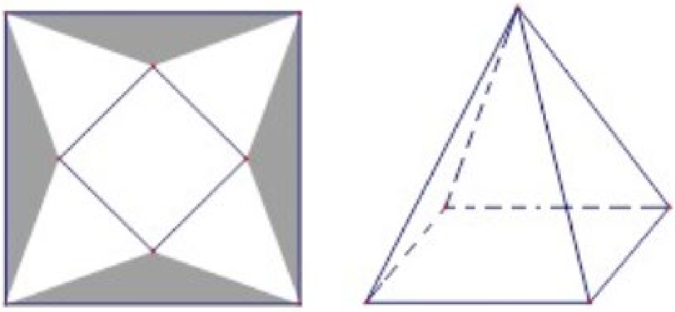
Câu 13: Khi loại thuốc A được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ mg/l của thuốc trong máu sau x phút (kể từ khi bắt đầu tiêm) được xác định bởi công thức: $C(x)=\dfrac{30x}{x^2+2}$.



(Nguồn: James Stewart, J. (2015). *Calculus*. Cengage Learning)

Để đưa ra những lời khuyên và cách xử lí phù hợp cho bệnh nhân, ta cần tìm khoảng thời gian mà nồng độ của thuốc trong máu đang tăng. Em hãy cho biết hàm nồng độ thuốc trong máu $C(x)$ đạt giá trị cực đại là bao nhiêu trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

Câu 14: Một tấm bạt hình vuông cạnh $20m$ như hình vẽ dưới đây. Người ta dự tính cắt phần tô đậm của tấm bạt rồi gập và may lại (các đường may không đáng kể), nhằm mục đích phủ lên tháp đèn trang trí (tháp dạng hình chóp tứ giác đều) để tránh hư hại tháp khi trời mưa.



Biết khối chóp hình thành sau khi gập và may lại cần thể tích lớn nhất thì mới phủ kín tháp đèn. Hỏi phần diện tích tấm bạt bị cắt là bao nhiêu để đảm bảo yêu cầu trên.

Câu 15: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=-\frac{t^3}{3}+18t^2-35t+10$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Trong 40 giây đầu tiên, chất điểm có vận tốc tức thời giảm trong khoảng thời gian $(a;b)$. Tính giá trị của biểu thức $P=2b-3a$.

Câu 16: Một chất điểm đang đứng yên thì bắt đầu chuyển động theo quy luật $s(t)=-t^3+6t^2+9t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi vật tăng tốc trong khoảng thời gian bao lâu tính từ lúc bắt đầu chuyển động?

Câu 17: Giả sử chiều cao (tính bằng cm) của một giống cây trồng (trong vòng một số tháng nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số

$$f(t)=\frac{200}{1+4e^{-t}},\ t\ge 0.$$

Trong đó thời gian t được tính bằng tháng kể từ khi hạt bắt đầu nảy mầm. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ tăng chiều cao của giống cây đó. Hỏi sau khi hạt giống bắt đầu nảy mầm thì sau bao nhiêu tháng tốc độ tăng chiều cao của cây là lớn nhất?

Câu 18: Giả sử tăng cân nặng (tính bằng kg) của một giống vật nuôi (trong vòng một số tháng nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số

$$f(t)=\frac{150}{1+3e^{-t}},\ t\ge 0$$

Trong đó thời gian t được tính bằng tháng kể từ khi vật nuôi đó bắt đầu sinh ra. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ tăng cân nặng của loài cây đó. Hỏi sau khi vật nuôi sinh ra thì sau bao nhiêu tháng tốc độ tăng cân nặng của vật nuôi là nhanh nhất?

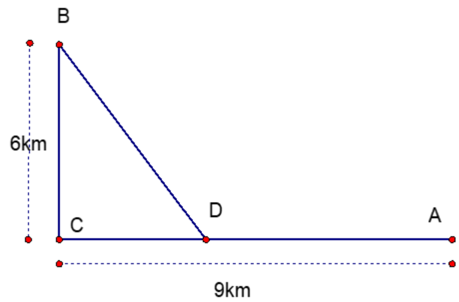
Câu 19: Sự tăng trưởng của một loại virut được xác định bởi hàm số $p(t)=\frac{800}{1+7\mathrm{e}^{-0,2t}}$, trong đó t là thời gian được tính theo ngày. Ở ngày thứ bao nhiêu thì tốc độ tăng trưởng của loài virut trên là lớn nhất?

Câu 20: Thể tích $V\left(cm^3\right)$ của $1kg$ nước tại nhiệt độ $T\left(0^{\circ}C \le T \le 30^{\circ}C\right)$ được tính bởi công thức $V\left(T\right)=999,87-0,06426T+0,0058043T^2-0,0000679T^3$.

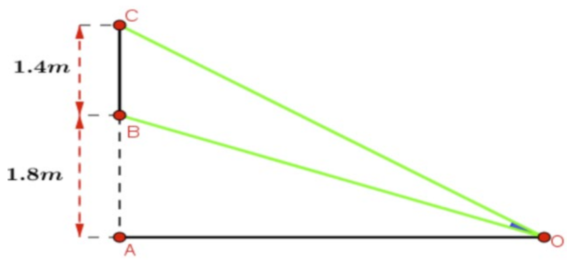
Thể tích nước $V\left(T\right)\left(0^{\circ}C \le T \le 30^{\circ}C\right)$ giảm trong khoảng nhiệt độ $\left(a°;b°\right);b$ làm tròn đến hàng đơn vị. Tổng $a+b$ bằng bao nhiêu?

Câu 21: Thể tích V của 1kg nước ở nhiệt độ $T\left(0^{\circ} \le T \le 30^{\circ}\right)$ được cho bởi công thức $V=999,87-0,06426T+0,0085043T^2-0,0000679T^3$. (Theo: J. Stewart, Calculus, Seventh Edition, Brooks/Cole, CENGAGE Learning 2012). Gọi $\left(a^{\circ};b^{\circ}\right)$ là khoảng nhiệt độ mà trong khoảng đó khi nhiệt độ tăng thì thể tích V của 1kg nước cũng tăng. Tính giá trị biểu thức $P=b-a$ (a,b làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 22: Một công ty muốn xây dựng hệ thống dây cáp từ trạm A ở trên bờ biển đến một vị trí B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Gọi C là điểm trên bờ sao cho BC vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến C là 9 km. Giá để lắp đặt mỗi km hệ thống dây trên bờ là 50 triệu đồng và dưới nước là 130 triệu đồng. Người ta cần xác định một vị trí D trên AC để lắp đặt hệ thống dây theo đường gấp khúc ADB mà số tiền chi phí thấp nhất. Khi đó chi phí lắp đặt thấp nhất là bao nhiêu triệu đồng?



Câu 23: Một màn hình chữ nhật cao $1,4\text{m}$ và đặt ở độ cao $1,8\text{m}$ so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình như hình vẽ bên dưới).



Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng sao cho góc nhìn lớn nhất. Tính khoảng cách từ vị trí đó đến màn hình? Biết rằng góc $\widehat{BOC}$ nhọn.

Câu 24: Hằng ngày mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h\left(\text{m}\right)$ của mực nước trong kênh tại thời điểm $t\left(\text{h}\right)\left(0 \le t \le 24\right)$ trong ngày được xác định bởi công thức $h=2\cos\left(\frac{\pi t}{12}+\frac{\pi}{3}\right)+5$. Gọi $\left(a;b\right)$ là khoảng thời gian trong ngày mà độ sâu của mực nước trong kênh tăng dần. Tính giá trị của $a+b$.

Câu 25: Xí nghiệp A sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết rằng hàm tổng chi phí sản xuất là $TC = x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000$ và hàm doanh thu là $TR = -2x^2 + 1312x$, với x là số sản phẩm. Lợi nhuận của xí nghiệp A được xác định bằng hàm số $f(x) = TR - TC$, cực đại lợi nhuận của xí nghiệp A khi đó đạt bao nhiêu sản phẩm?

Câu 26: Để thiết kế một chiếc bể cá hình chữ nhật có chiều cao là $60cm$, thể tích là $96.000cm^3$, người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70.000 đồng/m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/m^2. Tính chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá.

Câu 27: Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là $300\,km$. Vận tốc dòng nước là $6\,km/h$. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v\,(km/h)$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là hằng số và E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên nằm ở khoảng nào thì năng lượng tiêu hao của cá giảm?

Câu 28: Một vật chuyển động trên đường thẳng được xác định bởi công thức $s(t) = t^3 - 3t^2 + 7t - 2$, trong đó $t > 0$ và tính bằng giây và s là quãng đường chuyển động được của vật trong t giây tính bằng mét. Khi đó:

a) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ là $7(m/s)$.

b) Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ là $6\left(m/s^2\right)$.

c) Gia tốc của vật tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng $16\,m/s^2$ là $10\left(m/s^2\right)$.

d) Thời điểm $t = 1$ (giây) tại đó vận tốc của chuyển động đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 29: Một vật chuyển động thẳng được cho bởi phương trình: $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Khi đó:

a) Vận tốc của vật tại các thời điểm $t = 3$ giây là $v(3) = 1m/s$.

b) Quãng đường vật đi được từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vật đứng yên là $162(m)$.

c) Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3$ giây: $a(3) = 2\,m/s^2$.

d) Trong 9 giây đầu tiên, vật tăng tốc khi $t \in [0;4]$.

Câu 30: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi hàm số có công thức $c(t) = \frac{t}{t^2+1}$ (mg/L). Khi đó

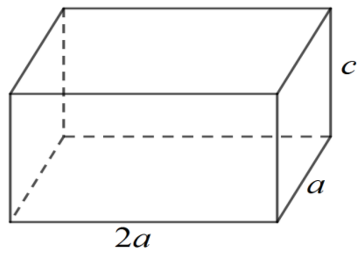
a) Nồng độ thuốc trong máu của bện nhân sau 3 giờ là $c(3) = \frac{3}{10}(mg/L)$.

b) Đạo hàm của hàm số $c(t) = \frac{t}{t^2+1}$ là $c'(t) = \frac{1-t^2}{\left(t^2+1\right)^2}$.

c) Nồng độ thuốc trong máu bệnh nhân tăng trong khoảng $t \in (0;2)$.

d) Nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất khi $t = \frac{1}{2}$.

Câu 31: Ông An muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $288\,\mathrm{m}^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/m^2. Ba kích thước của bể được mô tả như hình vẽ dưới $\left(a(m)>0, c(m)>0\right)$.



Nếu ông An biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất và (Biết độ dày thành bể và đáy bể không đáng kể). Khi đó:

a) Diện tích các mặt cần xây là $S=2a^2+4ac+2ac=2a^2+6ac$.

b) $2a^2c=288$.

c) Diện tích các mặt cần xây nhỏ nhất là $216\,m$.

d) Chi phí thấp nhất để xây dựng bể đó là 108 triệu đồng.

CHƯƠNG I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

I LÝ THUYẾT.

I. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1. Khái niệm tính đợn điệu của hàm số.

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nữa khoảng và $y = f(x)$ là hàm số xác định trên K.

+) Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu

$\forall x_1,\ x_2 \in K,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$

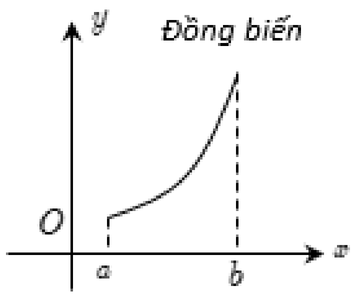
+) Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu

$\forall x_1,\ x_2 \in K,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$

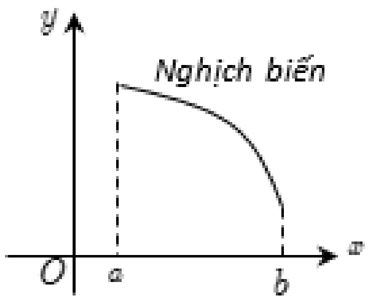
+) Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là đơn điệu trên K.

Chú ý:

*+ Nếu hàm số **đồng biến** trên K thì từ trái sang phải **đồ thị đi lên**.*



*+ Nếu hàm số **nghịch biến** trên K thì từ trái sang phải **đồ thị đi xuống**.*



2. Định lý: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nữa khoảng.

+) Nếu $f'(x) > 0, \ \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng K.

+) Nếu $f'(x) < 0, \ \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng K.

Chú ý.

Định lí trên vẫn đúng trong trường hợp $f'(x)$ bằng 0 tại một số hữu hạn điểm trong khoảng K.

Người ta chứng minh được rằng, nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ không đổi trên khoảng K.

3. Định lý: (Tổng quát) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nữa khoảng.

+) Nếu $f'(x) \geq 0, \ \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên K thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng K.

+) Nếu $f'(x) \leq 0, \ \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên K thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng K.

4. Lưu ý:

+) Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f'(x) > 0, \ \forall x \in (a;b)$ thì ta nói hàm số đồng biến trên đoạn $[a;b]$.

+) Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f'(x) < 0, \ \forall x \in (a;b)$ thì ta nói hàm số nghịch biến trên đoạn $[a;b]$.

+) Tương tự với các khái niệm hàm số đồng biến, nghịch biến trên các nửa khoảng.

5. Sử dụng bảng biến thiên để xét tính đơn điệu của hàm số.

Để xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định D.

Bước 2: Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Tìm các điểm $x_i \, (i = 0;1;2;...)$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 3: Sắp xếp các $x_i \, (i = 0;1;2;...)$ theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

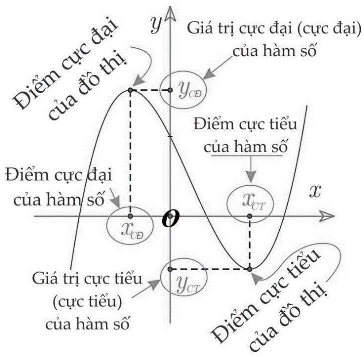
Bước 4: Căn cứ vào bảng biến thiên nêu kết luận

Chú ý: Đối với bài toán trắc nghiệm, ta có thể sử dụng **Phương pháp sử dụng MTCT.**

Cách 1: Sử dụng chức năng lập bảng giá trị MODE 7 của máy tính Casio. Quan sát bảng kết quả nhận được về tính tăng, giảm giá trị của f(x) và dự đoán.

Cách 2: Tính đạo hàm, thiết lập bất phương trình đạo hàm. Sử dụng tính năng giải bất phương trình INEQ của máy tính Casio (đối với bất phương trình bậc hai, bậc ba).

II. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

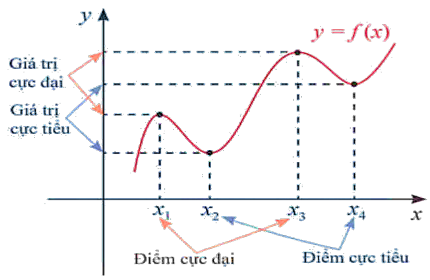


1. Khái niệm cực trị của hàm số: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$ và điểm $x_0 \in (a;b)$.

+) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $y = f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0.

+) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $y = f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0.

*** Chú ý**



+) Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực đại** của hàm số; $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số, kí hiệu là $f_{CĐ}(f_{CT})$, còn điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại** của đồ thị hàm số.

+) Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại còn gọi là **cực đại** và được gọi chung là **cực trị** của hàm số.

2. Cách tìm cực trị của hàm số

Định lí 2: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$.

+) Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(a;x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên $(x_0;b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$.

+) Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(a;x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên $(x_0;b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$.

Minh họa bằng bảng biến thiên

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f_{CĐ}$	$\searrow$	

x	a		x_1		b
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	f_{CT}	$\nearrow$	

NHẬN XÉT:

Để tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định D.

Bước 2: Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\left(i = 0;1;2;...\right)$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 3: Sắp xếp các $x_i\left(i = 0;1;2;...\right)$ theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

Bước 4: Căn cứ vào bảng biến thiên nêu kết luận

HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1: Một vật chuyển động theo quy luật $s\left(t\right) = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$ với t (giây) là khoảng thời gian từ lúc bắt đầu chuyển động và $s\left(t\right)$ (m) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vật chuyển động nhanh dần hay chậm dần.

Lời giải

Vận tốc chuyển động của vật được xác định theo công thức: $v\left(t\right) = s'\left(t\right) = -6t^2 + 48t + 9$.

Ta có $v'\left(t\right) = -12t + 48$; $v'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow t = 4$.

Từ đó ta có bảng biến thiên

t	0		4		10
$v'\left(t\right)$		$+$	0	$-$	
$v\left(t\right)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy: Từ thời điểm bắt đầu chuyển động đến thời điểm $t = 4$ giây, vật chuyển động nhanh dần. Từ thời điểm $t = 4$ giây đến thời điểm $t = 10$ giây, vật chuyển động chậm dần.

Câu 2: Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm được tính theo công thức $V\left(t\right) = \frac{1}{100}\left(30t^3 - \frac{t^4}{4}\right)$ với $0 \le t \le 90$. Tốc độ bơm nước ở thời điểm t được tính theo công thức $v\left(t\right) = V'\left(t\right)$. Tìm thời điểm tốc độ bơm nước là lớn nhất và tính tốc độ bơm nước lớn nhất đó.

Lời giải

Ta có $v\left(t\right) = V'\left(t\right) = \frac{1}{100}\left(90t^2 - t^3\right)$.

$v'\left(t\right) = \frac{1}{100}\left(180t - 3t^2\right)$.

$v'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 60 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	0		60		90
$v'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$v(t)$	0	$\nearrow$	1080	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên ta thấy: Tốc độ bơm nước lớn nhất bằng 1080, tại thời điểm $t = 60$ phút.

Câu 3: Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \dfrac{5000}{1 + 5e^{-t}}, t \geq 0$ trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

Lời giải

Ta có: $f'(t) = \dfrac{-5000\left(1 + 5e^{-t}\right)'}{\left(1 + 5e^{-t}\right)^2} = \dfrac{25000e^{-t}}{\left(1 + 5e^{-t}\right)^2}$

Tốc độ bán hàng là lớn nhất khi $f'(t)$ lớn nhất.

Đặt $h(t) = \dfrac{25000e^{-t}}{\left(1 + 5e^{-t}\right)^2}$.

$$h'(t) = \frac{-25000e^{-t}\left(1 + 5e^{-t}\right)^2 - 2\cdot\left(-5e^{-t}\right)\cdot\left(1 + 5e^{-t}\right)\cdot 25000e^{-t}}{\left(1 + 5e^{-t}\right)^4}$$

$$= \frac{-25000e^{-t}\left(1 + 5e^{-t}\right)\left(1 + 5e^{-t} - 10e^{-t}\right)}{\left(1 + 5e^{-t}\right)^4} = \frac{-25000e^{-t}\left(1 - 5e^{-t}\right)}{\left(1 + 5e^{-t}\right)^3}$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-25000e^{-t}\left(1 - 5e^{-t}\right)}{\left(1 + 5e^{-t}\right)^3} = 0 \Leftrightarrow 1 - 5e^{-t} = 0 \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow t = \ln 5 (\text{tm})$$

Ta có bảng biến thiên với $t \in [0; +\infty)$:

t	0		n 5		$-\infty$
$'(t)$			0		
(t)		$\nearrow$	250	$\searrow$	

Vậy sau khi phát hành khoảng $\ln 5 \approx 1,6$ năm thì thì tốc độ bán hàng là lớn nhất.

Câu 4: Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $v(t); v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t. Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

Lời giải

$v(t) = x'(t) = 3t^2 - 12t + 9$

Xét $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$

$\Rightarrow v'(t) = 6t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Bảng biến thiên

t	0		2		$+\infty$
$v'(t)$		$-$	0	$+$	
$v(t)$	9	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Vận tốc tăng trong khoảng thời gian $t \in (2;10)$ và giảm trong khoảng thời gian $t \in (0;2)$.

Câu 5: Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả số lượng cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ thuộc khoảng nào dưới đây để cân nặng trung bình của số cá đó tăng?

Lời giải

Sau một vụ, số cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ có cân nặng trung bình là: $f(n) = nP(n) = 480n - 20n^2$ (gam).

$f'(n) = 480 - 40n = 0 \Leftrightarrow n = 12$

Bảng biến thiên:

n	0		12		$+\infty$
$f'(n)$		$+$	0	$-$	
$f(n)$		$\nearrow$	$f(12)$	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên, suy ra trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ, số cá cần thả trong khoảng $(0;12)$

Câu 6: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ *t* là $f(t)=45t^2-t^3, t=0,1,2,...,25.$ Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn [0;25] thì đạo hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm *t*. Xác định khoảng thời gian mà tốc độ truyền bệnh giảm?

Lời giải

$f'(t)=90t-3t^2$; $f''(t)=90-6t$, $f''(t)=0 \Leftrightarrow t=15$

Bảng biến thiên

t	0		15		25
$f''(t)$		$+$	0	$-$	
$f'(t)$		$\nearrow$	675	$\searrow$	

Vậy khoảng thời gian $(15;25)$ ngày thì tốc độ truyền bệnh giảm

Câu 7: Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là 300 *km*. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là *v* (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong *t* giờ được cho bởi công thức $E(v)=cv^3t,$ trong đó *c* là hằng số và *E* tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên nằm ở khoảng nào thì năng lượng tiêu hao của cá giảm?

Lời giải

Khi bơi ngược dòng vận tốc của cá là: $v-6$ (km/h)

Thời gian để cá vượt khoảng cách 300 km là $t=\dfrac{300}{v-6}\,(v>6)$

Năng lượng tiêu hao của cá khi vượt khoảng cách 300km là: $E(v)=cv^3\dfrac{300}{v-6}=300c\dfrac{v^3}{v-6}$

$E'(v)=600cv^2\dfrac{v-9}{(v-6)^2}$; $E'(v)=0 \Leftrightarrow v=9$ do $(v>6)$

Bảng biến thiên

v	6		9		$+\infty$
$E'(v)$		$-$	0	$+$	
$E(v)$		$\searrow$	$E(9)$	$\nearrow$	

Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên nằm ở khoảng $(6;9)$ thì năng lượng tiêu hao của cá giảm

Câu 8: Một cửa hàng trung bình bán được 100 cái Tivi mỗi tháng với giá 14 triệu đồng một cái. Chủ cửa hàng nhận thấy rằng, nếu giảm giá bán mỗi cái 500 ngàn đồng thì số lượng tivi bán ra sẽ tăng thêm 10 cái mỗi tháng. Hỏi cửa hàng nên bán với giá bao nhiêu để doanh thu cửa hàng là lớn nhất?

Lời giải

Giả sử cần giảm giá bán mỗi cái tivi là x triệu đồng $(x<14)$.

Do giảm giá bán mỗi cái 500 ngàn đồng thì số lượng tivi bán ra sẽ tăng thêm 10 cái mỗi tháng nên số lượng tivi bán ra tăng lên bây giờ là: $\frac{10x}{0,5}=20x$.

Khi đó, doanh thu một tháng của cửa hàng là $(100+20x).(14-x)=-20x^2+180x+1400$.

Xét hàm số $f(x)=-20x^2+180x+1400$ $(x<14)$

Ta có $f'(x)=-40x+180$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=4,5$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$4,5$		14
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1805	↘	0

Từ bảng biến thiên ta thấy: Để doanh thu cửa hàng đạt cao nhất thì giá bán mỗi cái tivi là $14-4,5=9,5$ triệu đồng

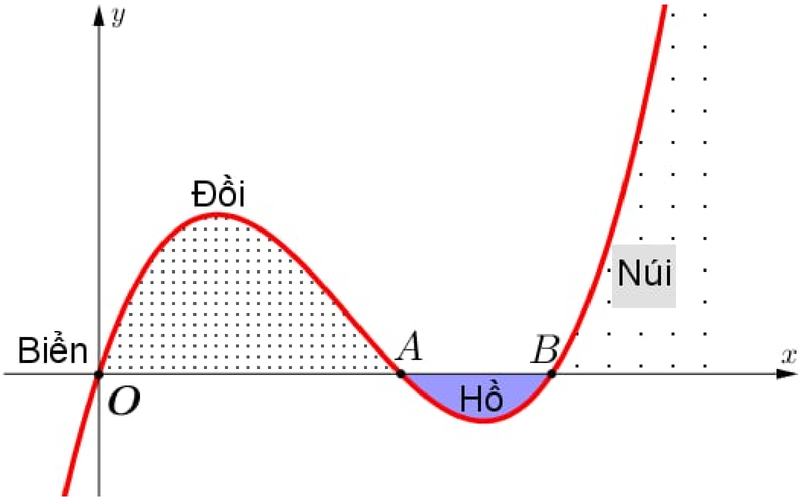
Câu 9: Giả sử số lượng quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hóa bằng hàm số $P(t)=\frac{25}{0,25+e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tốc độ sinh trưởng của quần thể nấm men ở thời điểm t được tính theo công thức $P'(t)$. Nêu nhận xét về sự tăng giảm của số lượng quần thể nấm men được nuôi cấy. Số lượng quần thể nấm men có thể tăng lên vô cùng được không?

Lời giải

Ta có $P'(t)=\frac{18,75.e^{-0,75t}}{\left(0,25+e^{-0,75t}\right)^2}>0, \forall t>0$. Suy ra số lượng quần thể nấm men được nuôi cấy luôn tăng.

Ta lại có $\lim\limits_{t\to+\infty}P(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{25}{0,25+e^{-0,75t}}=100$. Do đó, số lượng quần thể nấm men tăng nhưng không vượt quá 100, nên không thể tăng lên vô cùng được.

Câu 10: Lát cắt ngang của một vùng đất ven biển được mô hình hoá thành một hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ (đơn vị độ dài trên các trục là km).



Biết khoảng cách hai bên chân đồi $OA = 2$ km, độ rộng của hồ $AB = 1$ km và ngọn đồi cao 528 m. Tìm độ sâu của hồ (tính bằng mét) tại điểm sâu nhất? (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Theo đề bài ta có : $OA = 2$ km, $OB = 3$ km và 528 m=0,528 km.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua các điểm $O(0;\,0)$, $A(2;\,0)$, $C(3;\,0)$ suy ra

$y = f(x) = ax(x-2)(x-3) = a\left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)$ với $a > 0$.

Ta có : $y' = a\left(3x^2 - 10x + 6\right)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5+\sqrt{7}}{3} \\ x = \dfrac{5-\sqrt{7}}{3} \end{array}\right.$.

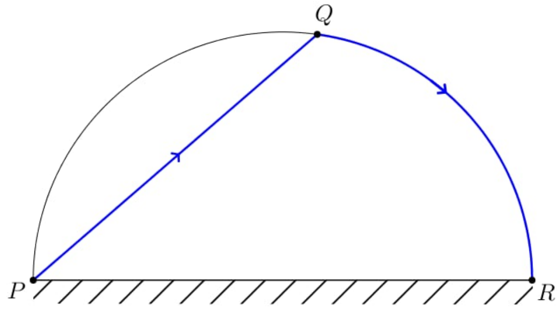
Từ độ cao của đồi ta có tại vị trí điểm cực đại $x_{CĐ} = \dfrac{5-\sqrt{7}}{3}$; $y_{CĐ} = 0,528$ suy ra

$$a = \frac{0,528}{\left(\frac{5-\sqrt{7}}{3}\right)^3 - 5.\left(\frac{5-\sqrt{7}}{3}\right)^2 + 6.\left(\frac{5-\sqrt{7}}{3}\right)} \approx 0,25.$$

Điểm sâu nhất của hồ ứng với vị trí của điểm cực tiểu $x_{CT} = \dfrac{5+\sqrt{7}}{3}$, $y_{CT} \approx 0,1578$.

Vậy độ sâu của hồ tại điểm sâu nhất xấp xỉ $0,1578$ km hay xấp xỉ 158 m.

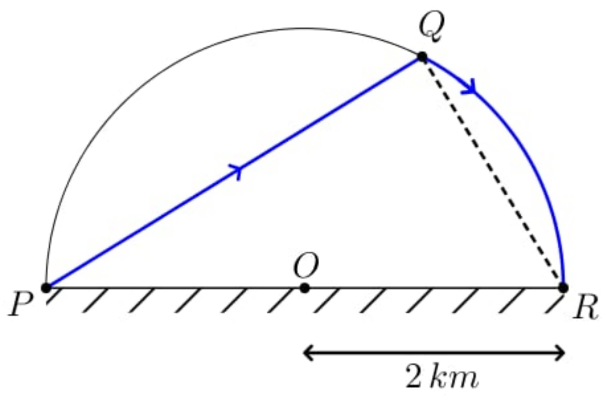
Câu 11: Cho một bờ hồ hình bán nguyệt có bán kính bằng 2 km, đường kính PR như hình vẽ sau :



Từ điểm P anh Tài chèo một chiếc thuyền với vận tốc 3 km/h đến điểm Q trên bờ hồ, rồi chạy bộ dọc theo thành hồ đến vị trí R với vận tốc 6 km/h. Thời gian chậm nhất mà anh Tài di chuyển từ P đến R là bao nhiêu? (thời gian tính bằng phút).

Lời giải

Đặt $\widehat{QPR} = \varphi(rad)$, $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.



Ta có ΔPQR vuông tại Q $\Rightarrow PQ = PR.\cos\varphi = 4\cos\varphi$.

Mà $\widehat{QOR} = 2\widehat{QPR} = 2\varphi$.

Độ dài cung tròn $QR = 2.2\varphi = 4\varphi$.

Thời gian anh Tài chèo từ P đến Q là: $\frac{4\cos\varphi}{3}$ (giờ).

Thời gian anh Tài chèo từ Q đến R là: $\frac{4\varphi}{6} = \frac{2\varphi}{3}$ (giờ).

Tổng thời gian anh Tài di chuyển từ P đến R là: $t = \frac{4\cos\varphi}{3} + \frac{2\varphi}{3}\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$.

Xét hàm số $t(\varphi) = \frac{4\cos\varphi}{3} + \frac{2\varphi}{3}$ với $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$t'(\varphi) = \frac{1}{3}(-4\sin\varphi + 2)$, $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$t'(\varphi) = 0$, $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \sin\varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$.

Bảng biến thiên

φ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$t'(\varphi)$		$+$	0	$-$	
$t(\varphi)$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$t\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\searrow$	$\frac{\pi}{3}$

Vậy thời gian chậm nhất mà anh Tài di chuyển từ P đến R là $t\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{\pi}{9}\approx 1,5$ (giờ) hay 90 phút.

Câu 12: Xí nghiệp A sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết rằng hàm tổng chi phí sản xuất là $TC=x^3-77x^2+1000x+40000$ và hàm doanh thu là $TR=-2x^2+1312x$, với x là số sản phẩm. Lợi nhuận của xí nghiệp A được xác định bằng hàm số $f(x)=TR-TC$, cực đại lợi nhuận của xí nghiệp A khi đó đạt bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải

Xét hàm số:

$f(x)=TR-TC=-2x^2+1312x-\left(x^3-77x^2+1000x+40000\right)$.

$f(x)=-x^3+75x^2+312x-40000$.

TXĐ: $D=(0;+\infty)$.

Ta có $f'(x)=-3x^2+150x+312=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=52\,(N)\\x=-2\,(L)\end{array}\right.$

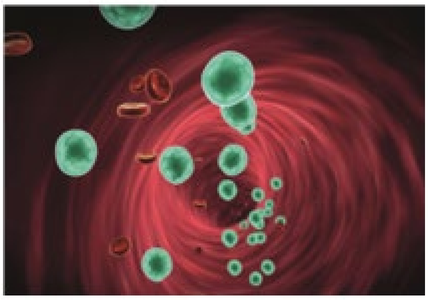
Bảng biến thiên:

x	0		52		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-4000	$\nearrow$	74416	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đạt giá trị cực đại $y_{CĐ}=74416$ tại $x=52$.

Vậy lợi nhuận của công ty đạt cực đại khi số sản phẩm $x=52$.

Câu 13: Khi loại thuốc A được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ mg/l của thuốc trong máu sau x phút (kể từ khi bắt đầu tiêm) được xác định bởi công thức: $C(x)=\frac{30x}{x^2+2}$.



(Nguồn: James Stewart, J. (2015). *Calculus*. Cengage Learning)

Để đưa ra những lời khuyên và cách xử lí phù hợp cho bệnh nhân, ta cần tìm khoảng thời gian mà nồng độ của thuốc trong máu đang tăng. Em hãy cho biết hàm nồng độ thuốc trong máu $C(x)$ đạt giá trị cực đại là bao nhiêu trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

Lời giải

Xét hàm số $y = C(x) = \dfrac{30x}{x^2+2}$ trên khoảng $x \in (0;6)$.

Ta có: $y' = \dfrac{-30x^2+60}{\left(x^2+2\right)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-30x^2+60}{\left(x^2+2\right)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{array}\right.$ do $x \in (0;6) \Rightarrow x = \sqrt{2}$.

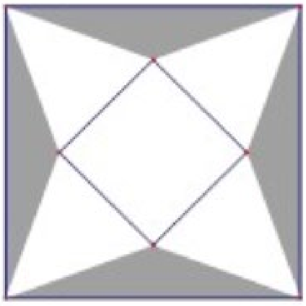
Bảng biến thiên:

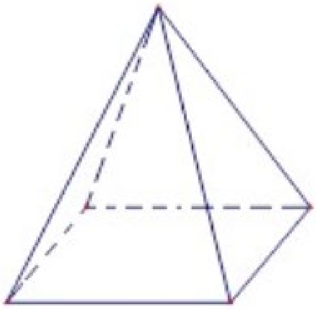
x	0		$\sqrt{2}$		6
y'		+	0	−	
y	0	↗	$\frac{15\sqrt{2}}{2}$	↘	$\frac{90}{19}$

Từ bảng biến thiên suy ra: nồng độ thuốc trong máu $C(x)$ đạt giá trị cực đại là

$\dfrac{15\sqrt{2}}{2}(mg/l) \approx 10,6(mg/l)$ trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm.

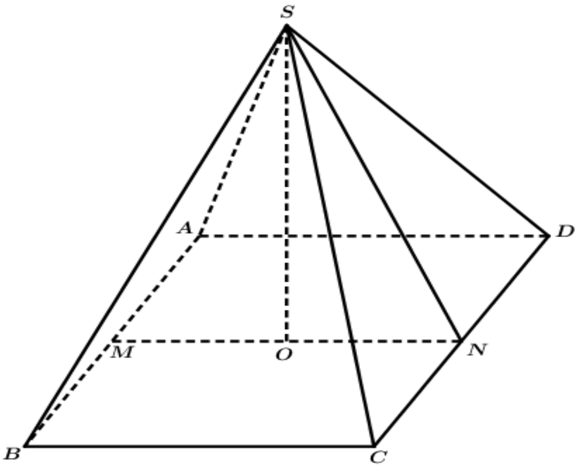
Câu 14: Một tấm bạt hình vuông cạnh $20m$ như hình vẽ dưới đây. Người ta dự tính cắt phần tô đậm của tấm bạt rồi gập và may lại (các đường may không đáng kể), nhằm mục đích phủ lên tháp đèn trang trí (tháp dạng hình chóp tứ giác đều) để tránh hư hại tháp khi trời mưa.





Biết khối chóp hình thành sau khi gập và may lại cần thể tích lớn nhất thì mới phủ kín tháp đèn. Hỏi phần diện tích tấm bạt bị cắt là bao nhiêu để đảm bảo yêu cầu trên.

Lời giải



Gọi cạnh đáy hình vuông của tháp là $x\left(m\right)$.

Độ dài đường chéo tấm bạt bằng $20\sqrt{2}\left(m\right)$.

Gọi hình chóp tứ giác đều là $S.ABCD$, Gọi M,N lần lượt là trung điểm AB,CD.

Khi đó $MN=x\left(m\right)$, $SN=\dfrac{20\sqrt{2}-x}{2}\left(m\right)$ với $0<x<10\sqrt{2}$.

Gọi O là tâm của hình vuông, ta có

$$SO=\sqrt{SN^2-ON^2}=\sqrt{\left(\frac{20\sqrt{2}-x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{800-40\sqrt{2}x}.$$

Thể tích khối chóp $V=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO=\dfrac{1}{6}x^2\sqrt{800-40\sqrt{2}x}$.

Ta có $V'=\dfrac{20x\left(80-5\sqrt{2}x\right)}{6\sqrt{800-40\sqrt{2}x}}$

$\Rightarrow V'=0\Leftrightarrow x=8\sqrt{2}$ với $0<x<10\sqrt{2}$.

Xét bảng biến thiên:

x	0		$8\sqrt{2}$		$10\sqrt{2}$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Vậy khi $x = 8\sqrt{2}$ thì thể tích khối chóp lớn nhất $V = \dfrac{256\sqrt{10}}{3}\left(m^3\right)$.

Diện tích phần bị cắt của tấm bạt:

$$S = S_{hv} - S_{ABCD} - 4.S_{\Delta SAB} = 20^2 - \left(8\sqrt{2}\right)^2 - 4.\frac{1}{2}.\frac{20\sqrt{2} - 8\sqrt{2}}{2}.8\sqrt{2} = 80\left(m^2\right).$$

Câu 15: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -\dfrac{t^3}{3} + 18t^2 - 35t + 10$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Trong 40 giây đầu tiên, chất điểm có vận tốc tức thời giảm trong khoảng thời gian $(a;b)$. Tính giá trị của biểu thức $P = 2b - 3a$.

Lời giải

Vận tốc tức thời của chất điểm là $v(t) = s'(t) = -t^2 + 36t - 35$.

Gia tốc tức thời của chất điểm là $a(t) = v'(t) = -2t + 36$.

Vì vận tốc tức thời của chất điểm giảm nên $a(t) < 0 \Leftrightarrow -2t + 36 < 0 \Leftrightarrow t > 18$.

Do đó, trong 40 giây đầu tiên, chất điểm có vận tốc tức thời giảm trong khoảng thời gian $(18;40)$. Suy ra $a = 18$, $b = 40$.

Vậy $P = 2b - 3a = 26$.

Câu 16: Một chất điểm đag đứng yên thì bắt đầu chuyển động theo quy luật $s(t) = -t^3 + 6t^2 + 9t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi vật tăng tốc trong khoảng thời gian bao lâu tính từ lúc bắt đầu chuyển động?

Lời giải

+) $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t + 9$

$v'(t) = -6t + 12$; $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

t	0		2		$+\infty$
$v'(t)$		$+$	0	$-$	
$v(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

+) Do đó vật tăng tốc trong khoảng thời gian 2 (s).

Câu 17: Giả sử chiều cao (tính bằng cm) của một giống cây trồng (trong vòng một số tháng nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số

$$f\left(t\right)=\frac{200}{1+4e^{-t}},\ t\geq 0.$$

Trong đó thời gian t được tính bằng tháng kể từ khi hạt bắt đầu nảy mầm. Khi đó đạo hàm $f'\left(t\right)$ sẽ biểu thị tốc độ tăng chiều cao của giống cây đó. Hỏi sau khi hạt giống bắt đầu nảy mầm thì sau bao nhiêu tháng tốc độ tăng chiều cao của cây là lớn nhất?

Lời giải

Ta có: $f\left(t\right)=\dfrac{200}{1+4e^{-t}}\Rightarrow f'\left(t\right)=200.\dfrac{-4.e^{-t}.\left(-1\right)}{\left(1+4e^{-t}\right)^2}=200.\dfrac{4.e^{-t}}{\left(1+4e^{-t}\right)^2}$

$$f''\left(t\right)=200.\frac{-4e^{-t}\left(1+4e^{-t}\right)^2-2\left(1+4e^{-t}\right).\left(-4e^{t}\right).4e^{-t}}{\left(1+4e^{-t}\right)^4}=200.\frac{-4e^{-t}.\left(1+4e^{-t}\right)\left(1+4e^{-t}-8e^{-t}\right)}{\left(1+4e^{-t}\right)^4}$$

$$=200.\frac{-4e^{-t}.\left(1+4e^{-t}\right)\left(1-4e^{-t}\right)}{\left(1+4e^{-t}\right)^4}\Rightarrow f''\left(t\right)=0\Leftrightarrow e^{-t}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow t=-\ln\left(\frac{1}{4}\right)=\ln 4\approx 1,38$$

	0		$\ln 4$		$+\infty$
		$+$	0	$-$	
		$\nearrow$		$\searrow$	

Vậy sau khi nảy mầm khoảng $\ln 4\approx 1,38$ tháng thì cây có tốc độ tăng chiều cao lớn nhất.

Câu 18: Giả sử tăng cân nặng (tính bằng kg) của một giống vật nuôi (trong vòng một số tháng nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số

$$f\left(t\right)=\frac{150}{1+3e^{-t}},\ t\geq 0$$

Trong đó thời gian t được tính bằng tháng kể từ khi vật nuôi đó bắt đầu sinh ra. Khi đó đạo hàm $f'\left(t\right)$ sẽ biểu thị tốc độ tăng cân nặng của loài cây đó. Hỏi sau khi vật nuôi sinh ra thì sau bao nhiêu tháng tốc độ tăng cân nặng của vật nuôi là nhanh nhất?

Lời giải

Ta có: $f\left(t\right)=\dfrac{200}{1+3e^{-t}}\Rightarrow f'\left(t\right)=150.\dfrac{-3.e^{-t}.\left(-1\right)}{\left(1+3e^{-t}\right)^2}=150.\dfrac{3.e^{-t}}{\left(1+3e^{-t}\right)^2}$

$$f''\left(t\right)=150.\frac{-3e^{-t}\left(1+3e^{-t}\right)^2-2\left(1+3e^{-t}\right).\left(-3e^{-t}\right).3e^{-t}}{\left(1+3e^{-t}\right)^4}=150.\frac{-3e^{-t}.\left(1+3e^{-t}\right)\left(1+3e^{-t}-6e^{-t}\right)}{\left(1+3e^{-t}\right)^4}$$

$$=150.\frac{-3e^{-t}.\left(1+3e^{-t}\right)\left(1-3e^{-t}\right)}{\left(1+3e^{-t}\right)^4}\Rightarrow f''\left(t\right)=0\Leftrightarrow e^{-t}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow t=-\ln\left(\frac{1}{3}\right)=\ln 33\approx 1,09$$

	0	$\ln 3$	$+\infty$
	$+$	0	$-$
	↗		↘

Vậy sau khi sinh khoảng $\ln 3\approx 1,09$ tháng thì vật nuôi có tốc độ tăng cân nhanh nhất.

Câu 19: Sự tăng trưởng của một loại virut được xác định bởi hàm số $p\left(t\right)=\dfrac{800}{1+7e^{-0,2t}}$, trong đó t là thời gian được tính theo ngày. Ở ngày thứ bao nhiêu thì tốc độ tăng trưởng của loài virut trên là lớn nhất?

Lời giải

Tốc độ tăng trưởng của virut được tính theo hàm số $y=p'\left(t\right)=\dfrac{1120.e^{0,2t}}{\left(e^{0,2t}+7\right)^2}$, $t\geq 0$.

Xét hàm số $y=g\left(t\right)=\dfrac{1120.e^{0,2t}}{\left(e^{0,2t}+7\right)^2}$, có $g'\left(t\right)=\dfrac{224.e^{0,2t}\left(7-e^{0,2t}\right)}{\left(e^{0,2t}+7\right)^3}$.

$g'\left(t\right)=0\Leftrightarrow 7-e^{0,2t}=0\Leftrightarrow t=5\ln 7\approx 9,7$.

Ta có bảng dấu của $g'\left(t\right)$ như sau:

t	0		$5\ln 7$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng trên ta thấy tốc độ tăng trưởng của virut sẽ đạt lớn nhất ở ngày thứ 10.

Câu 20: Thể tích $V\left(cm^3\right)$ của $1kg$ nước tại nhiệt độ $T\left(0^\circ C\leq T\leq 30^\circ C\right)$ được tính bởi công thức $V\left(T\right)=999,87-0,06426T+0,0058043T^2-0,0000679T^3$.

Thể tích nước $V\left(T\right)\left(0^\circ C\leq T\leq 30^\circ C\right)$ giảm trong khoảng nhiệt độ $\left(a°;b°\right);b$ làm tròn đến hàng đơn vị. Tổng $a+b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Xét hàm số

$$V\left(T\right)=999,87-0,06426T+0,0058043T^2-0,0000679T^3\ \left(0^\circ C\leq T\leq 30^\circ C\right)$$

$$V'\left(T\right)=-0,06426+0,0170086T-0,0002037T^2$$

$$V'\left(T\right)=0\Leftrightarrow -0,06426+0,0170086T-0,0002037T^2$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}T=3,966514624\\T=79,53176716\left(loai\right)\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên

T	0		T_1		30
$V'(T)$		$-$	0	$+$	
$V(T)$	$V(0)$	$\searrow$	$V(T_1)$	$\nearrow$	$V(30)$

Từ bảng biến thiên suy ra thể tích $V(T)\left(0^\circ C \le T \le 30^\circ C\right)$ giảm trong khoảng nhiệt độ từ $(0°;4°)$ .Vậy $a+b=4$

Câu 21: Thể tích V của 1kg nước ở nhiệt độ $T\left(0^\circ \le T \le 30^\circ\right)$ được cho bởi công thức $V=999,87-0,06426T+0,0085043T^2-0,0000679T^3$. (Theo: J. Stewart, Calculus, Seventh Edition, Brooks/Cole, CENGAGE Learning 2012). Gọi $\left(a^\circ;b^\circ\right)$ là khoảng nhiệt độ mà trong khoảng đó khi nhiệt độ tăng thì thể tích V của 1kg nước cũng tăng. Tính giá trị biểu thức $P=b-a$ (a,b làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Xét hàm số $f(T)=999,87-0,06426T+0,0085043T^2-0,0000679T^3$ với $0^\circ \le T \le 30^\circ$.

Nhiệt độ tăng thì thể tích của 1kg nước tăng tức hàm số $f(T)$ đồng biến.

$f'(T)=-0,06426+0,0170086T-2,037.10^{-4}T^2$.

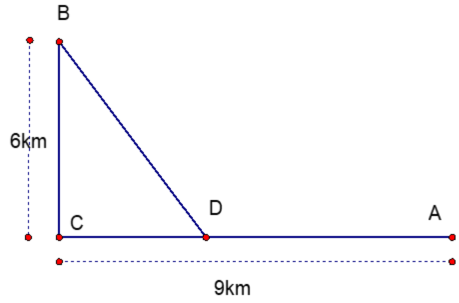
$f'(T)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} T_1 \approx 3,966 \in [0;30] \\ T_2 \approx 79,532 > 30 \end{array}\right.$.

$f'(T)>0, \forall T \in (T_1;T_2) \Rightarrow$ hàm số $f(T)$ đồng biến trên khoảng $(T_1;T_2)$.

Suy ra khi $T \in \left(T_1^\circ;30^\circ\right)$ thì khi nhiệt độ nước tăng thể tích của 1kg nước cũng tăng hay $a=4;b=30$.

Vậy $b-a=26$.

Câu 22: Một công ty muốn xây dựng hệ thống dây cáp từ trạm A ở trên bờ biển đến một vị trí B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Gọi C là điểm trên bờ sao cho BC vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến C là 9 km. Giá để lắp đặt mỗi km hệ thống dây trên bờ là 50 triệu đồng và dưới nước là 130 triệu đồng. Người ta cần xác định một vị trí D trên AC để lắp đặt hệ thống dây theo đường gấp khúc ADB mà số tiền chi phí thấp nhất. Khi đó chi phí lắp đặt thấp nhất là bao nhiêu triệu đồng?



Lời giải

Đặt $CD = x$ (km) $\left(x \in [0;9]\right)$

Ta có $AD = 9 - x$ (km) và $BD = \sqrt{CD^2 + BC^2} = \sqrt{x^2 + 36}$ (km).

Chi phí lắp đặt là: $F(x) = 50(9 - x) + 130\sqrt{x^2 + 36}$ (triệu đồng).

Xét hàm số $F(x) = 50(9 - x) + 130\sqrt{x^2 + 36}$ trên $[0;9]$

$$F'(x) = -50 + \frac{130x}{\sqrt{x^2 + 36}}.$$

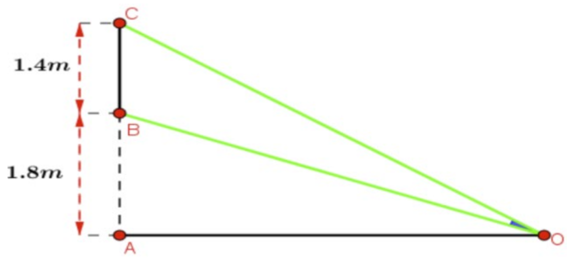
$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{130x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 50 = 0 \Leftrightarrow 13x = 5\sqrt{x^2 + 36} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 169x^2 = 25\left(x^2 + 36\right) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \text{(tm)}$$

BBT:

x	0		$\frac{5}{2}$		9
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$	1230	$\searrow$	1170	$\nearrow$	$390\sqrt{13}$

Vậy chi phí thấp nhất để lắp đặt hệ thống dây cáp là 1170 triệu đồng.

Câu 23: Một màn hình chữ nhật cao $1,4\text{m}$ và đặt ở độ cao $1,8\text{m}$ so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình như hình vẽ bên dưới).



Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng sao cho góc nhìn lớn nhất. Tính khoảng cách từ vị trí đó đến màn hình? Biết rằng góc $\widehat{BOC}$ nhọn.

Lời giải

Đặt độ dài $OA = x\left(\text{m}\right)$ với $x > 0$. Ta có: $OB = \sqrt{x^2 + 3,24}$; $OC = \sqrt{x^2 + 10,24}$

Sử dụng định lí cosin trong tam giác OBC:

$$\cos\widehat{BOC} = \frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2.OB.OC} = \frac{x^2 + 3,24 + x^2 + 10,24 - 1.96}{2\sqrt{x^2 + 3,24}.\sqrt{x^2 + 10,24}}$$

$$= \frac{x^2 + 5,76}{\sqrt{\left(x^2 + 3,24\right)\left(x^2 + 10,24\right)}}.$$

Vì góc $\widehat{BOC}$ nhọn nên $\widehat{BOC}$ lớn nhất khi và chỉ khi $\cos\widehat{BOC}$ nhỏ nhất. Khi đó bài toán trở thành tìm x để $f\left(x\right) = \dfrac{x^2 + 5,76}{\sqrt{\left(x^2 + 3,24\right)\left(x^2 + 10,24\right)}}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Đặt $t = x^2 + 3,24$ với $t > 3,24$. Suy ra $f\left(t\right) = \dfrac{t + \dfrac{63}{25}}{\sqrt{t\left(t + 7\right)}}$ với $t \in \left(3,24; +\infty\right)$.

Ta có: $f'\left(t\right) = \dfrac{1}{25}\left(\dfrac{49t - 441}{2t\left(t + 7\right)\sqrt{t\left(t + 7\right)}}\right)$.

Cho $f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow 49t - 441 = 0 \Leftrightarrow t = 9$.

Bảng biến thiên:

t	0		9		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$f_{\min}$	$\nearrow$	

Thế vào biểu thức của phép đặt ta có: $x^2 + 3,24 = 9 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{144}{25} \Rightarrow x = 2,4\text{m}$.

Vậy để nhìn rõ nhất thì khoảng cách từ vị trí đó đến màn hình là $OA = 2,4\text{m}$.

Câu 24: Hằng ngày mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h $\left(\text{m}\right)$ của mực nước trong kênh tại thời điểm t $\left(\text{h}\right)$ $\left(0 \le t \le 24\right)$ trong ngày được xác định bởi công thức $h = 2\cos\left(\dfrac{\pi t}{12} + \dfrac{\pi}{3}\right) + 5$. Gọi $\left(a; b\right)$ là khoảng thời gian trong ngày mà độ sâu của mực nước trong kênh tăng dần. Tính giá trị của $a + b$.

Lời giải

Ta có $h(t)=2\cos\left(\frac{\pi t}{12}+\frac{\pi}{3}\right)+5 \Rightarrow h'(t)=-\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi t}{12}+\frac{\pi}{3}\right)$.

$h'(t)=0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi t}{12}+\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{12}+\frac{\pi}{3}=k\pi \Leftrightarrow t=-4+12k\ (k\in\mathbb{Z})$.

Mà $0\le t\le 24$ nên $0\le -4+12k\le 24 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\le k\le\frac{7}{3} \Rightarrow k\in\{1;2\}$.

Do đó $h'(t)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=8 \\ t=20 \end{array}\right.$

t	0		8		20		24
$h'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(t)$	6	$\searrow$	3	$\nearrow$	7	$\searrow$	6

$\Rightarrow h(t)$ đồng biến trên khoảng $(8;20)$ hay trong khoảng từ $8\,\text{h}$ đến $20\,\text{h}$ độ sâu của mực nước trong kênh tăng dần.

Vậy $a=8; b=20$ và $a+b=28$.

Câu 25: Xí nghiệp A sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết rằng hàm tổng chi phí sản xuất là $TC=x^3-77x^2+1000x+40000$ và hàm doanh thu là $TR=-2x^2+1312x$, với x là số sản phẩm. Lợi nhuận của xí nghiệp A được xác định bằng hàm số $f(x)=TR-TC$, cực đại lợi nhuận của xí nghiệp A khi đó đạt bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải

Trả lời: $x=52$.

Xét hàm số:

$f(x)=TR-TC=-2x^2+1312x-\left(x^3-77x^2+1000x+40000\right)$.

$f(x)=-x^3+75x^2+312x-40000$.

TXĐ: $D=(0;+\infty)$.

Ta có $f'(x)=-3x^2+150x+312=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=52\,(N) \\ x=-2\,(L) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		52		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-4000	$\nearrow$	74416	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đạt giá trị cực đại $y_{CĐ} = 74416$ tại $x = 52$.

Vậy lợi nhuận của công ty đạt cực đại khi số sản phẩm $x = 52$.

Câu 26: Để thiết kế một chiếc bể cá hình chữ nhật có chiều cao là $60cm$, thể tích là $96.000cm^3$, người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70.000 đồng/m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/m^2. Tính chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá.

Lời giải

Diện tích của đáy hộp là: $S = \frac{V}{h} = \frac{96.000}{60} = 1600cm^2 = 0,16m^2$

Gọi chiều dài cạnh đáy của hộp là $x, (x > 0, m)$

Chiều rộng của hộp là $\frac{0,16}{x}$

Gọi $F(x)$ là hàm chi phí để làm để cá.

Chi phí để hoàn thành bể cá:

$$F(x) = 0,16 \times 100.000 + 2.0,6x.70.000 + 2.0,6.\frac{0,16}{x}.70.000$$

$$= 16.000 + 48.000x + \frac{13440}{x}$$

Câu toán trở thành tìm x để F(x) đạt GTNN.

$$F'(x) = 84.000 - \frac{13440}{x^2}$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 84.000 - \frac{13440}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0,4$$

Bảng biến thiên:

X	0		0,4		$+\infty$
F'(x)		−	0	+	
F(x)		↘	$F_{\min}$	↗	

Vậy chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là: 83.200 đồng.

Câu 27: Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là $300\,km$. Vận tốc dòng nước là $6\,km/h$. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v(km/h)$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là hằng số và E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên nằm ở khoảng nào thì năng lượng tiêu hao của cá giảm?

Lời giải

Khi bơi ngược dòng vận tốc của cá là: $v - 6(km/h)$.

Thời gian để cá vượt khoảng cách $300\,km$ là $t=\dfrac{300}{v-6}\ (v>6)$.

Năng lượng tiêu hao của cá khi vượt khoảng cách $300\,km$ là $E(v)=cv^3.\dfrac{300}{v-6}=300c.\dfrac{v^3}{v-6}$.

$E'(v)=600cv^2.\dfrac{v-9}{(v-6)^2}$, $E'(v)=0\Leftrightarrow v=9$ (vì $v>6$).

Bảng biến thiên

v	6		9		$+\infty$
$E'(v)$		$-$	0	$+$	
$E(v)$		$\searrow$	$E(9)$	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta thấy vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên nằm ở khoảng $(6;9)$ thì năng lượng tiêu hao của cá giảm.

Câu 28: Một vật chuyển động trên đường thẳng được xác định bởi công thức $s(t)=t^3-3t^2+7t-2$, trong đó $t>0$ và tính bằng giây và s là quãng đường chuyển động được của vật trong t giây tính bằng mét. Khi đó:

a) Vận tốc của vật tại thời điểm $t=2$ là $7(m/s)$.

b) Gia tốc của vật tại thời điểm $t=2$ là $6\left(m/s^2\right)$.

c) Gia tốc của vật tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng $16\,m/s^2$ là $10\left(m/s^2\right)$.

d) Thời điểm $t=1$ (giây) tại đó vận tốc của chuyển động đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

Ta có: $s'(t)=3t^2-6t+7$ và $s''(t)=6t-6$.

a) Vận tốc của vật tại thời điểm $t=2$ là: $v(2)=s'(2)=3.2^2-6.2+7=7(m/s)$.

b) Gia tốc của vật tại thời điểm $t=2$ là: $a(2)=v'(2)=s''(2)=6.2-6=6\left(m/s^2\right)$.

c) Vận tốc của chuyển động bằng $16\,m/s^2$ tại thời điểm t nghĩa là:

$$v(t)=s'(t)=16\Leftrightarrow 3t^2-6t+7=16\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \text{ (thỏa mãn)} \\ t=-1 \text{ (loại)} \end{array}\right..$$

Gia tốc của vật tại thời điểm $t=3$ là: $a(3)=v(3)=s''(3)=6.3-6=12\left(m/s^2\right)$.

d) Vận tốc của chuyển động có phương trình $v(t)=3t^2-6t+7$.

Có $v'(t)=6t-6=0\Leftrightarrow t=1$.

Bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$v'(t)$		-	0	+	
$v(t)$	7		4		$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 4 tại $t=1$.

Vậy tại thời điểm $t=1$ thì vận tốc của chuyển động đạt giá trị nhỏ nhất bằng $4(m/s)$.

Câu 29: Một vật chuyển động thẳng được cho bởi phương trình: $s(t)=-\frac{1}{3}t^3+4t^2+9t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Khi đó:

a) Vận tốc của vật tại các thời điểm $t=3$ giây là $v(3)=1\,m/s$.

b) Quãng đường vật đi được từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vật đứng yên là $162(m)$.

c) Gia tốc của vật tại thời điểm $t=3$ giây: $a(3)=2\,m/s^2$.

d) Trong 9 giây đầu tiên, vật tăng tốc khi $t\in[0;4]$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

a) $v(t)=s'(t)=-t^2+8t+9 \Rightarrow v(3)=24\,m/s$.

b) Vật đứng yên khi $v(t)=0 \Leftrightarrow -t^2+8t+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1(ktm) \\ t=9(tm) \end{array}\right.$.

Quãng đường vật chuyển động được đến thời điểm $t=9$ là:

$s(t)=-\frac{1}{3}.9^3+4.9^2+9.9=162(m)$.

c) Gia tốc của vật: $a(t)=s''(t)=-2t+8$.

Gia tốc của vật tại thời điểm $t=3$ giây: $a(3)=2\,m/s^2$.

d) Xét hàm $v(t)=-t^2+8t+9$; $v'(t)=-2t+8$

$v'(t)=0 \Rightarrow t=4$

Bảng biến thiên của hàm số $v(t)=-t^2+8t+9$ với $t\in[0;9]$:

t	0		4		9
$v'(t)$		$+$	0	$-$	
$v(t)$	9	$\nearrow$	25	$\searrow$	0

Trong 9 giây đầu tiên, vật tăng tốc khi $t \in [0;4]$.

Câu 30: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi hàm số có công thức $c(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$ (mg/L). Khi đó

a) Nồng độ thuốc trong máu của bện nhân sau 3 giờ là $c(3) = \dfrac{3}{10}(mg/L)$.

b) Đạo hàm của hàm số $c(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$ là $c'(t) = \dfrac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$.

c) Nồng độ thuốc trong máu bệnh nhân tăng trong khoảng $t \in (0;2)$.

d) Nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất khi $t = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

a) Xét hàm số $c(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$, $(t>0) \Rightarrow c(3) = \dfrac{3}{3^2+1} = \dfrac{3}{10}$.

b) $c'(t) = \dfrac{t^2+1-2t^2}{(t^2+1)^2} = \dfrac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$.

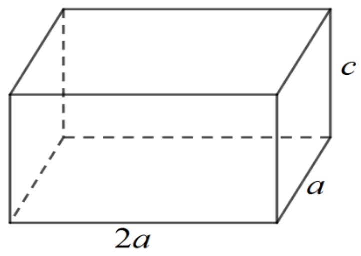
c) $c'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $c(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$ $(t>0)$.

t	0		1		$+\infty$
$c'(t)$		$+$	0	$-$	
$c(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

d) Với $t=1$ giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bênh nhân cao nhất.

Câu 31: Ông An muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $288\,\text{m}^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/m^2. Ba kích thước của bể được mô tả như hình vẽ dưới $\left(a(m)>0, c(m)>0\right)$.



Nếu ông An biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất và (Biết độ dày thành bể và đáy bể không đáng kể). Khi đó:

a) Diện tích các mặt cần xây là $S=2a^2+4ac+2ac=2a^2+6ac$.

b) $2a^2c=288$.

c) Diện tích các mặt cần xây nhỏ nhất là $216\,m$.

d) Chi phí thấp nhất để xây dựng bể đó là 108 triệu đồng.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

a) Từ hình vẽ ta có ba kích thước của bể là a, $2a$, c.

Ta có diện tích cách mặt cần xây là $S=2a^2+4ac+2ac=2a^2+6ac$.

b) Thể tích bể $V=a.2a.c=2a^2c=288\,(1)$

c) Từ $(1)\Rightarrow c=\dfrac{144}{a^2}$ nên $S=2a^2+6a.\dfrac{144}{a^2}=2a^2+\dfrac{864}{a}$.

Xét hàm số $S(a)=2a^2+\dfrac{864}{a}\Rightarrow S'(a)=4a-\dfrac{864}{a^2}$.

$$S'(a)=0\Leftrightarrow 4a-\frac{864}{a^2}=0\Leftrightarrow a^3=216\Leftrightarrow a=6$$

Bảng biến thiên của hàm số $S(a)=2a^2+\dfrac{864}{a}\,(a>0)$

a	0		6		$+\infty$
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$	$+\infty$	$\searrow$	216	$\nearrow$	$+\infty$

d) $S_{\min} = 216\,\text{m}^2$, khi đó chi phí thấp nhất là $216.500000 = 108$ triệu đồng.

CHƯƠNG I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 2: GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ

I LÝ THUYẾT.

I. *Định nghĩa:* Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên miền D.

- Số M gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên D nếu: $\begin{cases} f\left(x\right)\le M,\forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f\left(x_0\right)=M \end{cases}$.

Kí hiệu: $M=\max\limits_{x\in D} f\left(x\right)$ hoặc $M=\max\limits_{D} f\left(x\right)$.

- Số m gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên D nếu: $\begin{cases} f\left(x\right)\ge m,\forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f\left(x_0\right)=m \end{cases}$.

Kí hiệu: $m=\min\limits_{x\in D} f\left(x\right)$hoặc $m=\min\limits_{D} f\left(x\right)$

II. *Cách tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số*

Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm liên tục trên một đoạn

Giả sử hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$. Khi đó, để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm f trên đoạn $\left[a;b\right]$ ta làm như sau:

Bước 1: Tìm các điểm $x_1;\ x_2;...;\ x_n$ thuộc $\left(a;b\right)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

Bước 2: Tính $f\left(x_1\right);\ f\left(x_2\right);...;\ f\left(x_n\right);\ f\left(a\right);\ f\left(b\right)$.

Bước 3: So sánh các giá trị tìm được.

Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm f trên đoạn $\left[a;b\right]$, số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm f trên đoạn $\left[a;b\right]$.

Chú ý:

1) $y'>0,\forall x\in\left[a;b\right]\Rightarrow\begin{cases} \max\limits_{[a;b]} f\left(x\right)=f\left(b\right) \\ \min\limits_{[a;b]} f\left(x\right)=f\left(a\right) \end{cases}$

2) $y'<0,\forall x\in\left[a;b\right]\Rightarrow\begin{cases} \max\limits_{[a;b]} f\left(x\right)=f\left(a\right) \\ \min\limits_{[a;b]} f\left(x\right)=f\left(b\right) \end{cases}$

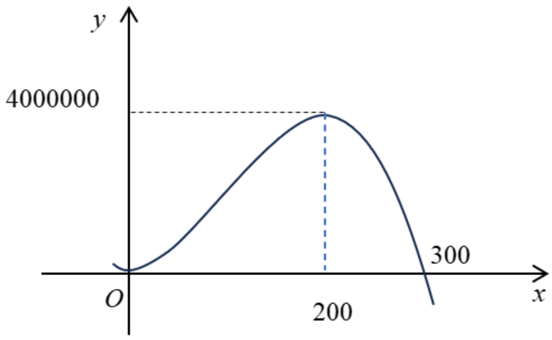
3. Quy tắc trên chỉ được sử dụng trong các bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một **đoạn**.

4. Đối với bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một **khoảng (nửa khoảng)** thì ta phải tính đạo hàm, **lập bảng biến thiên** của hàm f rồi dựa vào nội dung của bảng biến thiên để suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm f trên **khoảng (nửa khoảng)** đó.

5. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một **khoảng (nửa khoảng)** có thể không tồn tại.

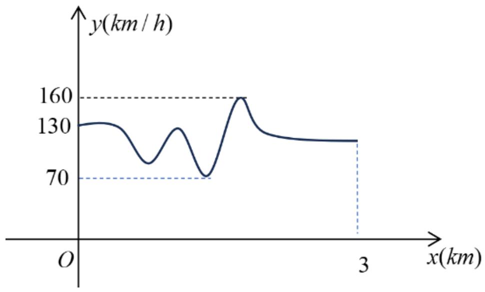
HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ

Câu 1: Một doanh nghiệp dự kiến lợi nhuận khi sản xuất x sản phẩm ($0 \le x \le 300$) được cho bởi hàm số $y = -x^3 + 300x^2$ (đơn vị: đồng) và được minh họa bằng đồ thị ở hình bên dưới.



Cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để doanh nghiệp thu được lợi nhuận cao nhất?

Câu 2: Đồ thị bên dưới là tốc độ của một chiếc xe đua trên đoạn đường đua bằng phẳng dài 3 km.



Tốc độ nhỏ nhất của xe đua trên đoạn đường này bằng

Câu 3: Quỹ đạo của một vật được ném lên từ gốc O (được chọn là điểm ném) trong mặt phẳng tọa độ Oxy là một parabol $y = -\dfrac{3}{1000}x^2 + x$, có tọa độ đỉnh là $I\left(\dfrac{500}{3};\dfrac{250}{3}\right)$, trong đó x (mét) là khoảng cách theo phương ngang trên mặt đất từ vị trí của vật đến gốc O, y (mét) là độ cao của vật so với mặt đất. Độ cao lớn nhất của vật trong quá trình bay là

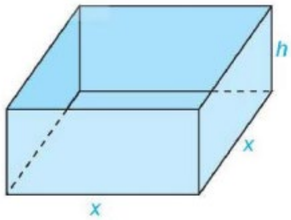
Câu 4: Một xe ô tô chở khách du lịch có sức chứa tối đa là 16 hành khách. Trong một khu du lịch, một đoàn khách gồm 22 người đang đi bộ và muốn thuê xe về khách sạn. Lái xe đưa ra thỏa thuận với đoàn khách du lịch như sau: Nếu một chuyến xe chở x (người) thì giá tiền cho mỗi người là $\dfrac{(40-x)^2}{2}$ (nghìn đồng). Trong bốn phương án dưới đây, lái xe sẽ thu được nhiều tiền nhất ứng với số khách được chở là

Câu 5: Giả sử một công ty du lịch bán tour với giá là x (triệu đồng)/khách thì doanh thu sẽ được biểu diễn qua hàm số $f(x) = -200x^2 + 550x$. Công ty phải bán giá tour cho một khách là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất (làm tròn tới hàng phần trăm).

Câu 6: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá x triệu đồng mỗi tháng thì lợi nhuận của công ty sẽ được biểu diễn bởi hàm số $F\left(x\right)=-\dfrac{x^2}{50.000}+90x$ (đồng). Vậy công ty cần cho thuê căn hộ với giá bao nhiêu để lợi nhuận của công ty cao nhất?

Câu 7: Người ta cần xây một bể nước ngầm dạng khối hộp chữ nhật có thể tích bằng $500m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng. Chi phí để xây bể là $2,5$ triệu đồng/m^2. Hãy xác định chi phí thấp nhất để xây bể (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 8: Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng $108\,\text{cm}^2$ như hình bên dưới. Tìm chiều cao của chiếc hộp sao cho thể tích của chiếc hộp là lớn nhất.



Câu 9: Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s\left(t\right)=-t^3+6t^2+t+5$, Trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?

Câu 10: Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức $V\left(t\right)=300\left(t^2-t^3\right)+4, 0\le t\le 0,5$.

(Nguồn: R.I.Charles et al. Algebra, Pearson)

a) Ban đầu trong bình xăng có bao nhiêu lít xăng?

b) Sau khi bơm 30 giây thì bình xăng đầy. Hỏi dung tích của bình xăng trong xe là bao nhiêu lít?

c) Khi xăng chảy vào bình xăng, gọi $V'\left(t\right)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0\le t\le 0,5$. Xăng chảy vào bình xăng ở thời điểm nào có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất?

Câu 11: Ho ép khí quản co lại, ảnh hưởng đến tốc độ của không khí vào khí quản. Tốc độ của không khí đi vào khí quản khi ho được cho bởi công thức

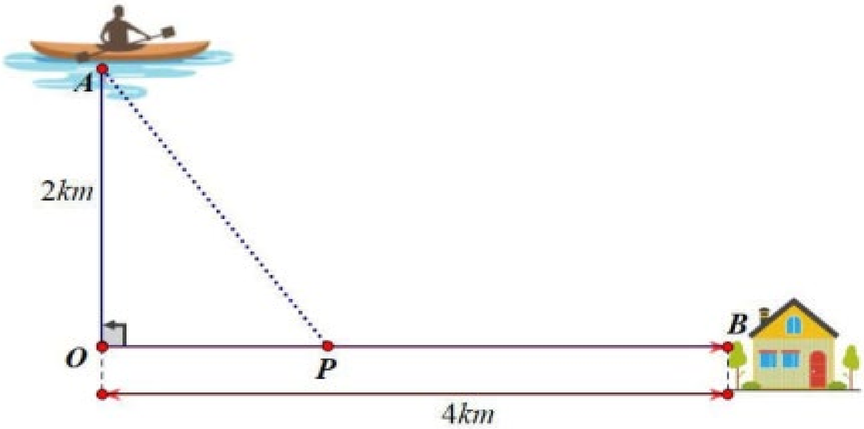
$$V=k\left(R-r\right)r^2 \text{ với } 0\le r<R,$$

Trong đó k là hằng số, R là bán kính bình thường của khí quản, r là bán kính khí quản khi ho (*Nguồn: R. Larson and* **B.** *Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014*). Hỏi bán kính của khí quản khi ho bằng bao nhiêu thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất?

Câu 12: Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t)=\dfrac{a}{b+e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t=0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b. Theo mô hình này, số lượng nấm men không vượt quá bao nhiêu?

Câu 13: Anh Ba đang trên chiếc thuyền tại vị trí A cách bờ sông $2km$, anh dự định chèo thuyền vào bờ và tiếp tục chạy bộ theo một đường thẳng để đến một địa điểm B tọa lạc ven bờ sông, B cách vị trí O trên bờ gần với thuyền nhất là $4km$ (hình vẽ). Biết rằng anh Ba chèo thuyền với vận tốc

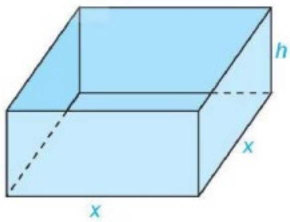
$6m/h$ và chạy bộ trên bờ với vận tốc $10km/h$. Khoảng thời gian ngắn nhất để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là



Câu 14: Một loại vi khuẩn được tiêm một loại thuốc kích thích sự sinh sản. Sau t phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức $N(t) = 1000 + 30t^2 - t^3\left(0 \le t \le 30\right)$. Hỏi sau bao giây thì số vi khuẩn lớn nhất?

Câu 15: Giám đốc một nhà hát A đang phân vân trong việc xác định mức giá vé xem các chương trình được trình chiếu trong nhà hát. Việc này rất quan trọng nó sẽ quyết định nhà hát thu được bao nhiêu lợi nhuận từ các buổi trình chiếu. Theo những cuốn sổ ghi chép của mình, ông ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là 20 USD/người thì trung bình có 1000 người đến xem. Nhưng nếu tăng thêm 1 USD/người thì sẽ mất 100 khách hàng hoặc giảm đi 1 USD/người thì sẽ có thêm 100 khách hàng trong số trung bình. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 2 USD lợi nhuận cho nhà hát trong các dịch vụ đi kèm. Hãy giúp giám đốc nhà hát này xác định xem cần tính giá vé vào cửa là bao nhiêu để thu nhập là lớn nhất.

Câu 16: Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng $108\,\text{cm}^2$ như hình bên dưới. Tìm chiều cao của chiếc hộp sao cho thể tích của chiếc hộp là lớn nhất.

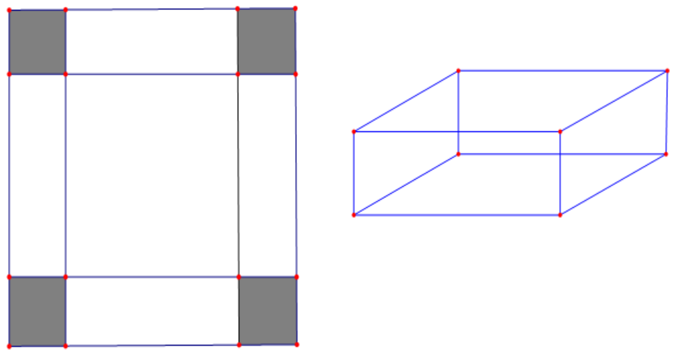


Câu 17: Nhà sản suất dự định sử dụng hết $6\,m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, có đáy là hình vuông (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Tìm các kích thước của bể cá để bể cá có dung tích là lớn nhất?

Câu 18: Một người bán gạo muốn đóng một thùng tôn đựng gạo có thể tích không đổi bằng $10\,m^3$, thùng tôn hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông, không nắp. Trên thị trường, giá tôn làm đáy thùng là $90000/m^2$ và giá tôn làm thành xung quanh thùng là $40000/m^2$. Hỏi người bán gạo đó cần đóng thùng đựng gạo với cạnh đáy bằng bao nhiêu để chi phí mua nguyên liệu là nhỏ nhất?

Câu 19: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể sau t giờ được cho bởi công thức $c(t) = \dfrac{2t}{t^2+1}\ (mg/L)$. Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Câu 20: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh $40cm$. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(cm)$, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất?

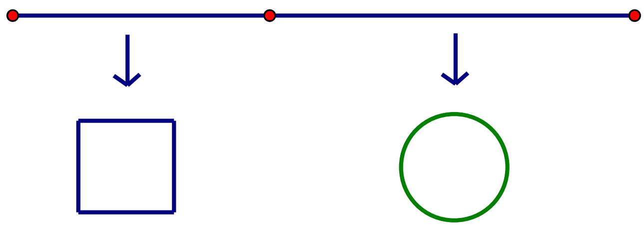


Câu 21: Ho ép khí quản co lại, ảnh hưởng đến tốc độ không khí đi vào khí quản. Tốc độ của không khí đi váo khí quản khi ho đo được bởi công thức : $V = k(R-r)r^2$ với $0 \le r < R$, trong đó k là hằng số, R là bán kính bình thường của khí quản, r là bán kính khí quản khi ho. Hỏi bán kính khí quản khi ho bằng bao nhiêu thì tốc độ của không khí đi váo khí quản là lớn nhất?

Câu 22: Một vật chuyển động theo quy luật $S = -t^3 + 18t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Câu 23: Khi sản xuất vỏ lon sữa bia hình trụ, các nhà sản xuất luôn đặt tiêu chí sao cho chi phí sản xuất vỏ lon là nhỏ nhất. Hỏi khi nhà sản xuất muốn thể tích của hộp sữa là V cm^3, thì diện tích toàn phần của lon sữa nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

Câu 24: Một sợi dây kim loại dài $60dm$ được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a, đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r. Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{a}{r}$ bằng bao nhiêu?



Câu 25: Hằng ngày mực nước của hồ thủy điện ở miền Trung lên và xuống theo lượng nước mưa và các suối nước đổ về hồ. Tính từ thời điểm 8 giờ sáng, độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống theo thời gian t (giờ) trong ngày cho bởi công thức: $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 24t \quad (t > 0)$. Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi xả nước theo quy định trước 5 giờ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước mấy giờ. Biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước.

Câu 26: Để thiết kế một chiếc bể cá hình hộp chữ nhật không nắp có chiều cao là $60cm$, thể tích $96000cm^3$. Người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70000 $VNĐ/m^2$ và loại kính để làm mặt đáy có giá thành 100000 $VNĐ/m^2$. Tính chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá.

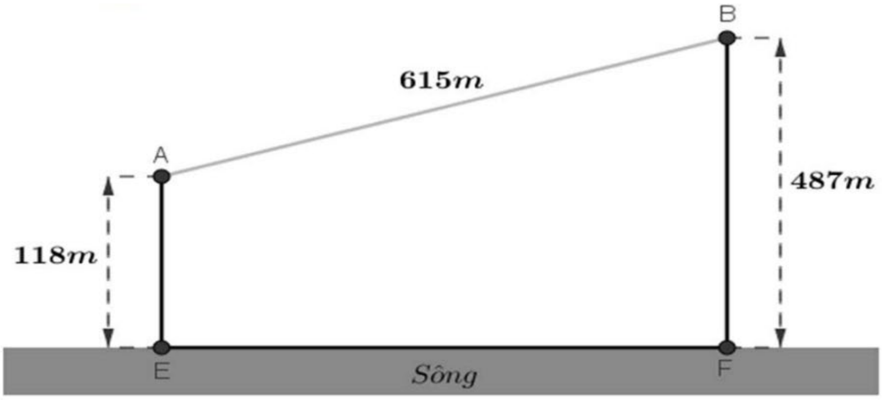
Câu 27: Nhà xe khoán cho hai tài xế An và Bình mỗi người lần lượt nhận 32 lít và 72 lít xăng trong một tháng. Biết rằng trong một ngày tổng số xăng cả hai người sử dụng là 10 lít. Tổng số ngày ít nhất để hai tài xế sử dụng hết số xăng được khoán là bao nhiêu (biết số lít xăng tiêu thụ trong các ngày là như nhau).

Câu 28: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c(t)=\frac{t}{t^2+1}\left(mg/L\right)$. Hỏi sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Câu 29: Ông A dự định sử dụng hết $5m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

Câu 30: Ông Khoa muốn xây một bể cá chứa nước dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích $288\,m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê công nhân xây bể là 500000 đồng/m^2. Nếu ông Khoa biết xác định các kích thước một cách hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông Khoa trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể cá đó là bao nhiêu?

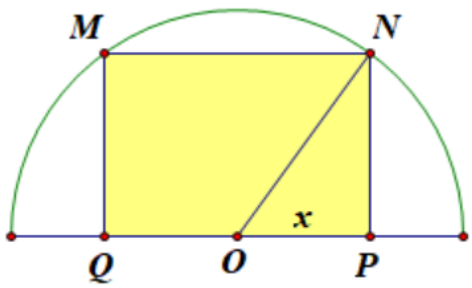
Câu 31: Cho hai vị trí A,B cách nhau 615 m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ.



Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118 m và 487 m. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B. Đoạn đường ngắn nhất là số nguyên dương mà người đó có thể đi là bao nhiêu?

Câu 32: Một công ty sản xuất những chiếc xô bằng nhôm hình trụ không có nắp đủ chứa được10 lít nước. Hỏi bán kính đáy (đơn vị cm) của chiếc xô bằng bao nhiêu để cửa hàng tốn ít nguyên vật liệu nhất.(Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Câu 33: Từ một miếng tôn dạng nửa hình tròn có bán kính $R=4$ dm, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật. Hỏi diện tích lớn nhất của hình chữ nhật có thể cắt được là bao nhiêu?



Câu 34: Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản suất mỗi ngày được x mét vải lụa $(1\le x\le 18)$. Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

$$C(x)=x^3-3x^2-20x+500.$$

Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét.

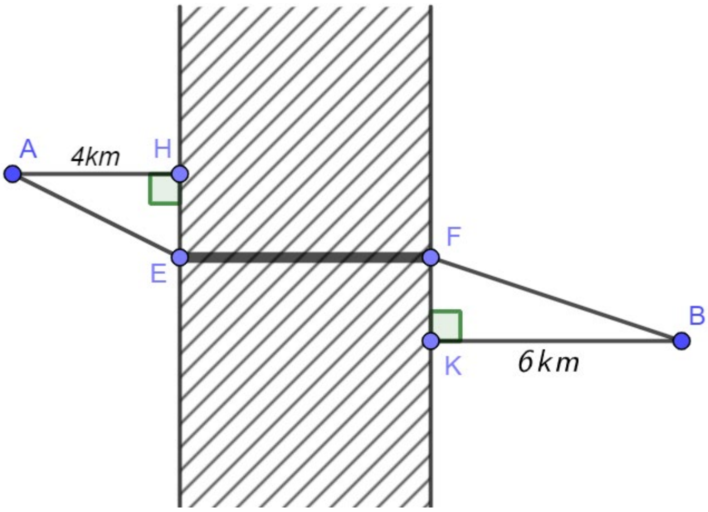
Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa.

Hỏi lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm trong một ngày?

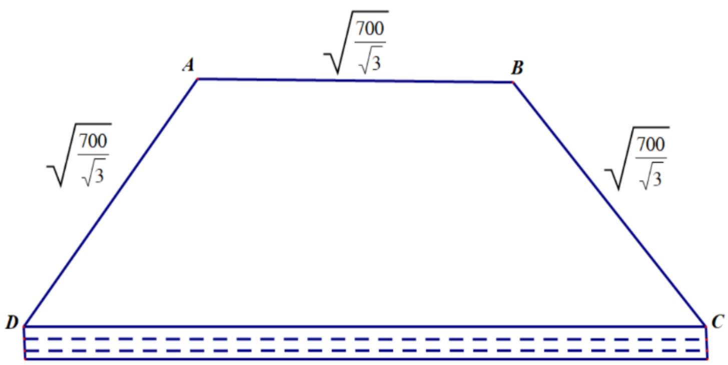
Câu 35: Một người quản lí của một khu chung cư có 80 căn hộ cho thuê nhận thấy rằng tất cả các căn hộ sẽ có người thuê nếu giá thuê một căn hộ là 7 triệu đồng. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thuê căn hộ thêm 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Người quản lí nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là bao nhiêu để doanh thu là lớn nhất?

Câu 36: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c(t)=\frac{t}{t^2+1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Câu 37: Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là $4km$ và thành phố B cách con sông một khoảng là $6km$ (hình vẽ), biết $HE+KF=20km$ và độ dài EF không đổi. Hỏi xây cây cầu cách thành phố A là bao nhiêu km để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường $AEFB$)? *(kết quả làm tròn đến phần chục)*

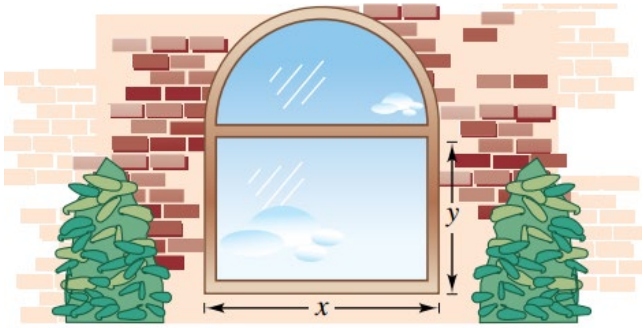


Câu 38: Bác nông dân có ba tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $\sqrt{\frac{700}{\sqrt{3}}}\,(m)$ và muốn rào một khu vườn có dạng hình thang cân $ABCD$ như trong hình vẽ. Khu vườn có 3 mặt rào, mặt còn lại tiếp giáp với bờ sông nên không cần rào. Hỏi diện tích lớn nhất mà bác nông dân có thể rào được là bao nhiêu mét vuông?



Câu 39: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá $2.000.000$ đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có lợi nhuận cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu (đơn vị tính bằng triệu đồng và làm tròn kết quả tới hàng phần trăm)?

Câu 40: Để làm một cửa sổ có dạng một hình bán nguyệt và một hình chữ nhật ghép lại như hình vẽ bên dưới, người ta dùng $8\,\text{m}$ dây thép để làm các đường viền. Gọi x, y là độ dài cạnh của khung hình chữ nhật.



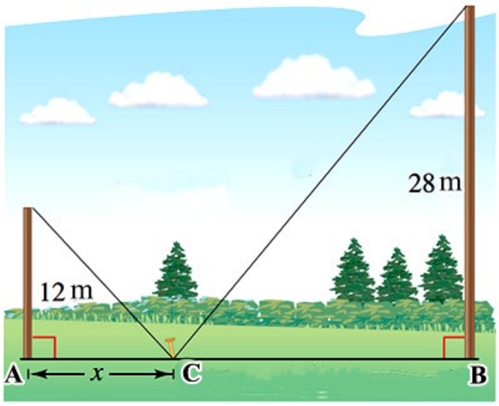
a) Chiều dài dây để uốn ra bán nguyệt là $\dfrac{\pi x}{2}$.

b) Giá trị của y tính theo x là $4-\dfrac{x(4+\pi)}{4}$.

c) Diện tích của cửa sổ là $S=4x-x^2$.

d) Khi diện tích của cửa sổ lớn nhất thì $y=\dfrac{16}{8+\pi}$.

Câu 41: Có hai cây cột, một cây cao $12\,\text{m}$ và một cây cao $28\,\text{m}$ đứng cách nhau $30\,\text{m}$. Chúng được giữ bằng hai sợi dây, gắn vào một cọc duy nhất nối từ mặt đất đến đỉnh mỗi cột. Gọi x là khoảng cách từ cột cao $12\,\text{m}$ đến cọc.



a) Để tổng chiều dài của dây ngắn nhất thì $x\in(0;30)$.

b) Chiều dài sợi dây nối từ cọc đến đỉnh cột cao $28\,\text{m}$ là $\sqrt{1684+x^2}$.

c) Tổng chiều dài của dây là $\sqrt{144+x^2}+\sqrt{1684-60x+x^2}$.

d) Tổng chiều dài ngắn nhất của dây là $48,5\,\text{m}$.

Câu 42: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=t^3-3t^2+8t+1$, trong đó t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Các phát biểu sau đúng hay sai

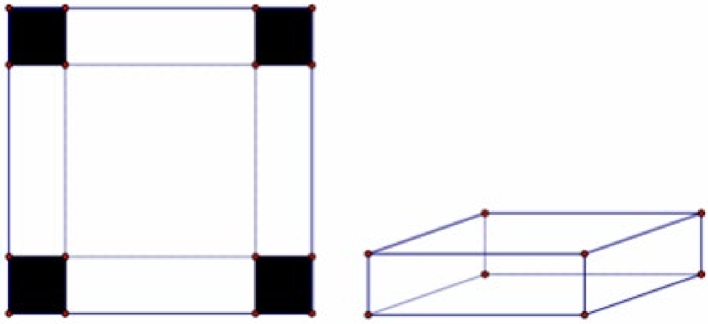
a) Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t=3(s)$ bằng $8\,m/s$.

b) Tại thời điểm mà chất điểm di chuyển được $13m$, vận tốc khi đó bằng $8\,m/s$.

c) Vận tốc nhỏ nhất của chất điểm là $5\,m/s$.

d) Gia tốc tại thời điểm chất điểm đạt vận tốc nhỏ nhất bằng $2\,m/s^2$.

Câu 43: Cho một tấm nhôm hình vuông có cạnh bằng $30(cm)$. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó thành bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh $x(cm)$, rồi gập tấm nhôm lại để thành cái hộp không nắp. Các phát biểu sau đúng hay sai?



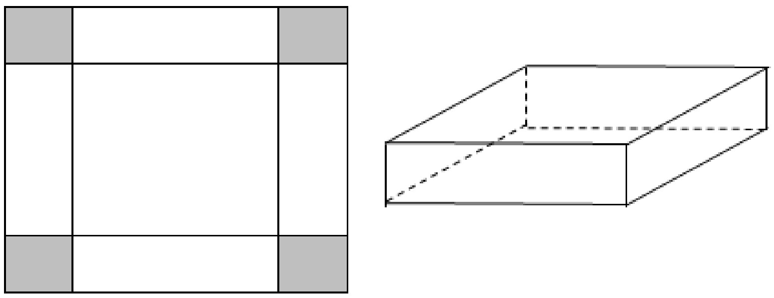
a) Đáy của hộp là một hình vuông có cạnh bằng $30-x(cm)$

b) Nếu $x=3cm$ thì thể tích hộp bằng $1500\left(cm^3\right)$.

c) Thể tích hộp đạt giá trị lớn nhất khi $x=15(cm)$

d) Giá trị lớn nhất của hộp bằng $2000cm^3$.

Câu 44: Một tấm nhôm hình vuông cạnh $120cm$. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(cm)$, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp.



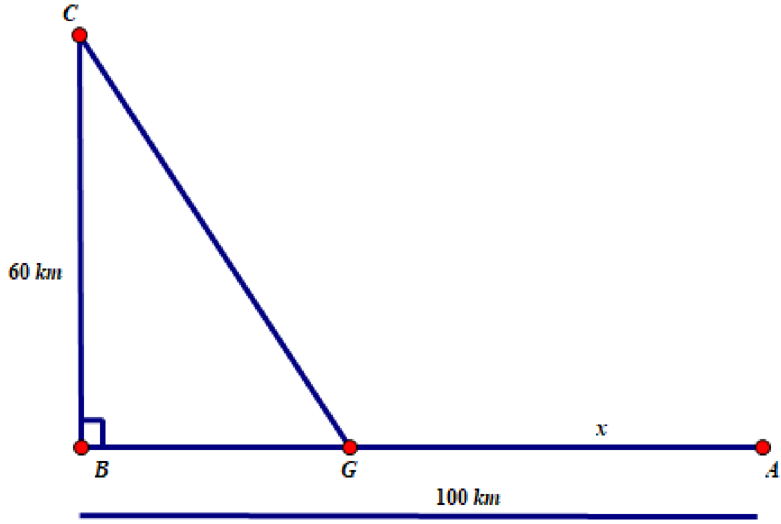
a) Thể tích khối hộp nhận được khi tính theo x là $V=x(120-2x)^2$.

b) Khi $x=10cm$ thì thể tích của khối hộp nhận được là $1\left(m^3\right)$.

c) Để hộp nhận được có thể tích lớn nhất thì $x=20(cm)$.

d) Hộp nhận được có thể tích lớn nhất là $128\left(dm^3\right)$.

Câu 45: Đường dây điện $110KV$ kéo từ trạm phát (điểm A) trong đất liền ra Côn Đảo (điểm C). Biết $BC = 60km$, $AB = 100km$, góc $\widehat{ABC} = 90°$, như hình vẽ. Mỗi km dây điện dưới nước chi phí là $5000USD$, chi phí cho mỗi km dây điện trên bờ là $3000USD$. Đặt $x = AG$.



a) Khi $x = 20km$ thì đường dây điện nối từ C về G dài $100km$.

b) Khi $x = 20km$ thì tổng chi phí mắc điện là $560.000USD$.

c) Tổng chi phí mắc điện nhỏ nhất khi $x = 50km$.

d) Tổng chi phí mắc điện nhỏ nhất là $540.000USD$.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 2: GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ

I LÝ THUYẾT.

I. *Định nghĩa:* Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên miền D.

- Số M gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên D nếu: $\begin{cases} f\left(x\right) \le M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f\left(x_0\right) = M \end{cases}$.

Kí hiệu: $M = \max\limits_{x \in D} f\left(x\right)$ hoặc $M = \max\limits_{D} f\left(x\right)$.

- Số m gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên D nếu: $\begin{cases} f\left(x\right) \ge m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f\left(x_0\right) = m \end{cases}$.

Kí hiệu: $m = \min\limits_{x \in D} f\left(x\right)$hoặc $m = \min\limits_{D} f\left(x\right)$

II. *Cách tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số*

Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm liên tục trên một đoạn

Giả sử hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$. Khi đó, để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm f trên đoạn $\left[a;b\right]$ ta làm như sau:

Bước 1: Tìm các điểm $x_1;\ x_2;...;\ x_n$ thuộc $\left(a;b\right)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

Bước 2: Tính $f\left(x_1\right); f\left(x_2\right);...; f\left(x_n\right); f\left(a\right); f\left(b\right)$.

Bước 3: So sánh các giá trị tìm được.

Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm f trên đoạn $\left[a;b\right]$, số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm f trên đoạn $\left[a;b\right]$.

Chú ý:

1) $y' > 0, \forall x \in \left[a;b\right] \Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right) = f\left(b\right) \\ \min\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right) = f\left(a\right) \end{cases}$

2) $y' < 0, \forall x \in \left[a;b\right] \Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right) = f\left(a\right) \\ \min\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right) = f\left(b\right) \end{cases}$

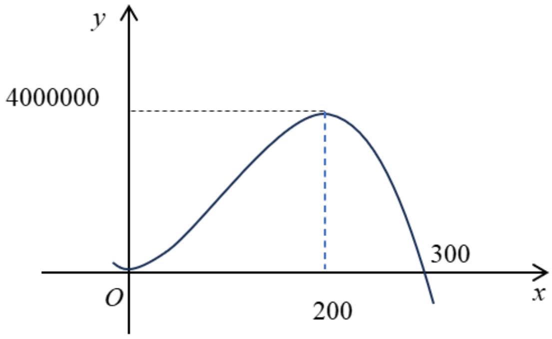
3. Quy tắc trên chỉ được sử dụng trong các bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một **đoạn**.

4. Đối với bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một **khoảng (nửa khoảng)** thì ta phải tính đạo hàm, **lập bảng biến thiên** của hàm f rồi dựa vào nội dung của bảng biến thiên để suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm f trên **khoảng (nửa khoảng)** đó.

5. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một **khoảng (nửa khoảng)** có thể không tồn tại.

HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ

Câu 1: Một doanh nghiệp dự kiến lợi nhuận khi sản xuất x sản phẩm ($0 \le x \le 300$) được cho bởi hàm số $y = -x^3 + 300x^2$ (đơn vị: đồng) và được minh họa bằng đồ thị ở hình bên dưới.



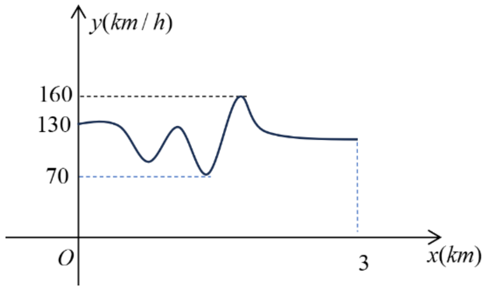
Cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để doanh nghiệp thu được lợi nhuận cao nhất?

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có giá trị lớn nhất bằng 4000000 khi $x = 200$.

Do đó cần sản suất 200 sản phẩm thì doanh nghiệp thu được lợi nhuận cao nhất.

Câu 2: Đồ thị bên dưới là tốc độ của một chiếc xe đua trên đoạn đường đua bằng phẳng dài 3 km.



Tốc độ nhỏ nhất của xe đua trên đoạn đường này bằng

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy tốc độ nhỏ nhất bằng $70km/h$.

Câu 3: Quỹ đạo của một vật được ném lên từ gốc O (được chọn là điểm ném) trong mặt phẳng tọa độ Oxy là một parabol $y = -\frac{3}{1000}x^2 + x$, có tọa độ đỉnh là $I\left(\frac{500}{3};\frac{250}{3}\right)$, trong đó x (mét) là khoảng cách theo phương ngang trên mặt đất từ vị trí của vật đến gốc O, y (mét) là độ cao của vật so với mặt đất. Độ cao lớn nhất của vật trong quá trình bay là

Lời giải

Vì parabol $y = -\frac{3}{1000}x^2 + x$ có tọa độ đỉnh là $I\left(\frac{500}{3};\frac{250}{3}\right)$ nên giá trị lớn nhất của hàm số $y = -\frac{3}{1000}x^2 + x$ bằng $\frac{250}{3}$.

Câu 4: Một xe ô tô chở khách du lịch có sức chứa tối đa là 16 hành khách. Trong một khu du lịch, một đoàn khách gồm 22 người đang đi bộ và muốn thuê xe về khách sạn. Lái xe đưa ra thỏa thuận với đoàn khách du lịch như sau: Nếu một chuyến xe chở x (người) thì giá tiền cho mỗi người là $\frac{(40-x)^2}{2}$ (nghìn đồng). Trong bốn phương án dưới đây, lái xe sẽ thu được nhiều tiền nhất ứng với số khách được chở là

Lời giải

Gọi $f(x), x \in \mathbb{N}^*$ là lợi nhuận mà lái xe có thể thu về khi chở x người trong chuyến xe đó.

Ta có $f(x) = x.\frac{(40-x)^2}{2}$ (nghìn đồng) với $1 \le x \le 16$. Tính trực tiếp $f(13) = 4738,5$ (nghìn); $f(14) = 4732$ (nghìn); $f(15) = 4687,5$ (nghìn); $f(16) = 4608$ (nghìn).

Vậy lái xe chở 13 người để thu được nhiều tiền nhất.

Câu 5: Giả sử một công ty du lịch bán tour với giá là x (triệu đồng)/khách thì doanh thu sẽ được biểu diễn qua hàm số $f(x) = -200x^2 + 550x$. Công ty phải bán giá tour cho một khách là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất (làm tròn tới hàng phần trăm).

Lời giải

Doanh thu là $f(x) = -200x^2 + 550x$.

Ta có $f'(x) = -400x + 550$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{8}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{11}{8}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{3025}{8}$	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{11}{8} = 1,375$.

Vậy công ty cần bán tour với giá 1,38 triệu đồng/khách thì doanh thu sẽ cao nhất.

Câu 6: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá x triệu đồng mỗi tháng thì lợi nhuận của công ty sẽ được biểu diễn bởi hàm số $F(x) = -\frac{x^2}{50.000} + 90x$ (đồng). Vậy công ty cần cho thuê căn hộ với giá bao nhiêu để lợi nhuận của công ty cao nhất?

Lời giải

$F(x) = -\frac{x^2}{50.000} + 90x$.

$F'(x) = -\frac{1}{25.000}x + 90$

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{25.000}x + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 2.250.000$

Bảng biến thiên:

X	2.000.000		2.250.000		$+\infty$
F'(x)		+	0	−	
F(x)		$\nearrow$	F_{max}	$\searrow$	

Suy ra $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2.250.000$

Vậy công ty phải cho thuê với giá $2.250.000$ đồng hay 2,25 triệu đồng mỗi căn hộ thì được có lợi nhuận cao nhất.

Câu 7: Người ta cần xây một bể nước ngầm dạng khối hộp chữ nhật có thể tích bằng $500m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng. Chi phí để xây bể là $2,5$ triệu đồng/m^2. Hãy xác định chi phí thấp nhất để xây bể (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Gọi chiều rộng của hình chữ nhật đáy bể là $x(m), (x > 0)$.

Suy ra chiều dài của hình chữ nhật là $3x$.

Gọi h là chiều cao của bể, ta có $V = Sh = 3x^2.h = 500 \Rightarrow h = \dfrac{500}{3x^2}$.

Diện tích xây dựng của bể là

$$S = 2h.x + 2h.3x + 2x.3x = 6x^2 + 8hx = 6x^2 + 8.\frac{500}{3x^2}.x = 6x^2 + \frac{4000}{3x}.$$

Cách 1: Xét hàm số $f(x) = 6x^2 + \dfrac{4000}{3x}$, $x > 0$ ta có

$$f'(x) = 12x - \frac{4000}{3x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10}{\sqrt[3]{9}}.$$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{10}{\sqrt[3]{9}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(\frac{10}{\sqrt[3]{9}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ bằng $f\left(\dfrac{10}{\sqrt[3]{9}}\right)$ khi $x = \dfrac{10}{\sqrt[3]{9}} \approx 4,807(m)$.

Vậy chi phí thấp nhất để xây bể là $f\left(\dfrac{10}{\sqrt[3]{9}}\right).2,5 = \left[6\left(\dfrac{10}{\sqrt[3]{9}}\right)^2 + \dfrac{4000}{3.\dfrac{10}{\sqrt[3]{9}}}\right].2,5 \approx 1040,04$ (triệu đồng).

Cách 2:

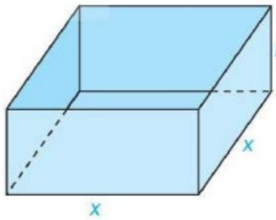
Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$f(x) = 6x^2 + \frac{4000}{3x} = 6x^2 + \frac{2000}{3x} + \frac{2000}{3x} \geq 3\sqrt[3]{6x^2.\frac{2000}{3x}.\frac{2000}{3x}} = 3\sqrt[3]{\frac{8000000}{3}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $6x^2 = \dfrac{2000}{3x} \Leftrightarrow x = \dfrac{10}{\sqrt[3]{9}}$.

Suy ra chi phí thấp nhất để xây bể là $3\sqrt[3]{\dfrac{8000000}{3}}.2,5 \approx 1040,04$ triệu đồng.

Câu 8: Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng $108\,\text{cm}^2$ như Hình 1.17. Tìm chiều cao của chiếc hộp sao cho thể tích của chiếc hộp là lớn nhất.



Hình 1.17

Lời giải

Hình hộp trên có độ dài cạnh đáy là x ($\text{cm}, x > 0$) và chiều cao là h ($\text{cm}, h > 0$)

Diện tích bề mặt của hình hộp là $108\,\text{cm}^2$ nên $x^2 + 4xh = 108 \Rightarrow h = \dfrac{108 - x^2}{4x}(\text{cm})$ (điều kiện $0 < x < \sqrt{108}$).

Thể tích của hình hộp là: $V = x^2.h = x^2 \cdot \dfrac{108 - x^2}{4x} = \dfrac{108x - x^3}{4}\left(\text{cm}^3\right)$. Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $V = -\dfrac{x^3}{4} + 27x \quad (0 < x < \sqrt{108})$

Ta có: $V' = \dfrac{-3x^2 + 108}{4}, V' = 0 \Leftrightarrow x = 6$ (do $0 < x < \sqrt{108}$)

Lập bảng biến thiên của hàm số

x	0		6		$\sqrt{108}$
V'		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	108	$\searrow$	0

Do đó, thể tích của chiếc hộp là lớn nhất khi độ dài cạnh đáy $x = 6\,\text{cm}$

Khi đó, chiều cao của chiếc hộp là: $\dfrac{108 - 6^2}{4.6} = 3(\text{cm})$.

Câu 9: Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$, Trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?

Lời giải

Xét hàm số $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5\ (t > 0)$,

Ta có $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t + 1$;

Khi đó $v'(t) = -6t + 12$;

$v'(t) = 0 \Leftrightarrow -6t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Bảng biến thiên của hàm số $v(t)$ như sau:

t	0		2		5
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	1	↗	13	↘	−14

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $\max\limits_{[0;5]} v(t) = v(2) = 13$.

Vậy vận tốc tức thời của chất điểm lớn nhất bằng $13\,m/s$ tại $t = 2$ giây.

Câu 10: Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức $V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4, 0 \le t \le 0,5$.

(Nguồn: R.I.Charles et al. Algebra, Pearson)

a) Ban đầu trong bình xăng có bao nhiêu lít xăng?

b) Sau khi bơm 30 giây thì bình xăng đầy. Hỏi dung tích của bình xăng trong xe là bao nhiêu lít?

c) Khi xăng chảy vào bình xăng, gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \le t \le 0,5$. Xăng chảy vào bình xăng ở thời điểm nào có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất?

Lời giải

a) Ta có: $V(0) = 4$. Do đó ban đầu trong bình xăng có 4 lít xăng.

b) Sau khi bơm 30 giây, tức 0,5 phút thì bình xăng đầy. Ta có $V(0,5) = 41,5$. Vậy dung tích của bình xăng trong xe là 41,5 lít.

c) Ta có $V'(t) = 300(2t - 3t^2), t \in [0;0,5]$. Có $V''(t) = 300(2 - 6t)$.

Khi đó trên khoảng $(0;0,5), V''(t) = 0$ khi $t = \dfrac{1}{3}$.

$V'(0) = 0; V'\left(\dfrac{1}{3}\right) = 100; V'(0,5) = 75$. Do đó $\max\limits_{[0;0,5]} V'(t) = 100$ tại $t = \dfrac{1}{3}$.

Vậy xăng chảy vào bình ở thời điểm $t = \dfrac{1}{3}s$ kể từ khi bắt đầu bơm có tốc độ tăng.

Câu 11: Ho ép khí quản co lại, ảnh hưởng đến tốc độ của không khí vào khí quản. Tốc độ của không khí đi vào khí quản khi ho được cho bởi công thức

$$V = k(R - r)r^2 \text{ với } 0 \le r < R,$$

Trong đó k là hằng số, R là bán kính bình thường của khí quản, r là bán kính khí quản khi ho (*Nguồn: R. Larson and* **B.** *Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014*). Hỏi bán kính của khí quản khi ho bằng bao nhiêu thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất?

Lời giải

Xét hàm số $V(r) = k(R - r)r^2 = kRr^2 - kr^3$ với $0 \le r < R$;

Ta có $V'(r) = 2kRr - 3kr^2$;

$V'(r) = 0 \Leftrightarrow 2kRr - 3kr^2 = 0 \Leftrightarrow kr(2R - 3r) = 0 \Leftrightarrow r = 0$ (nhận) hoặc $r = \dfrac{2}{3}R$ (nhận)

Bảng biến thiên của hàm số $V(r)$ như sau:

r	0		$\frac{2R}{3}$		R
$V'(r)$		+	0	−	
$V(r)$	0	↗	$V\left(\frac{2R}{3}\right)$	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên trên, ta thấy hàm số $V(r)$ đạt giá trị lớn nhất tại $r=\frac{2}{3}R$.

Vậy khi $r=\frac{2}{3}R$ thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất.

Câu 12: Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hinh hoá bằng hàm số $P(t)=\frac{a}{b+e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t=0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b. Theo mô hình này, số lượng nấm men không vượt quá bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $P'(t)=\frac{0,75a\mathrm{e}^{-0,75t}}{\left(b+\mathrm{e}^{-0,75t}\right)^2}, t\geq 0$.

Theo đề bài, ta có: $P(0)=20$ và $P'(0)=12$. Do đó, ta có hệ phương trình:

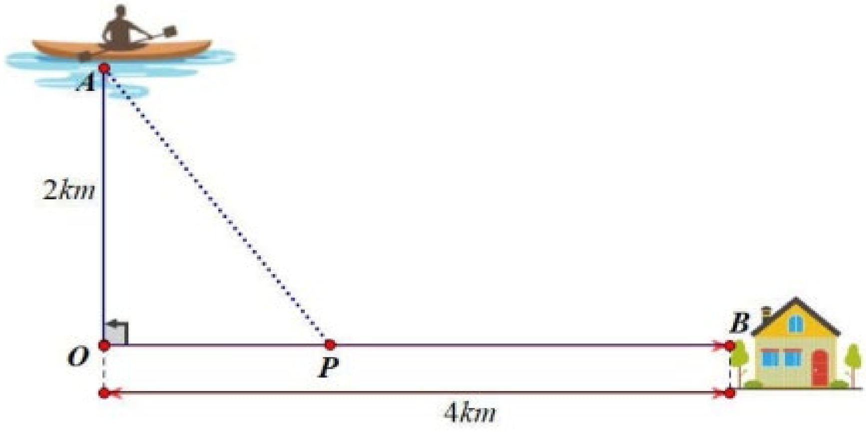
$$\begin{cases}\frac{a}{b+1}=20\\ \frac{0,75a}{(b+1)^2}=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=20(b+1)\\ \frac{15}{b+1}=12.\end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được $a=25$ và $b=\frac{1}{4}$.

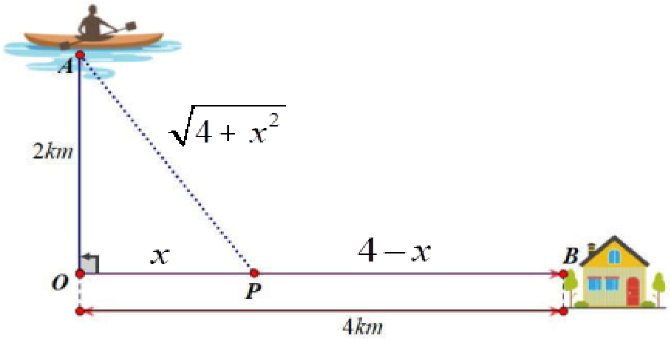
Khi đó, $P'(t)=\frac{18,75\mathrm{e}^{-0,75t}}{\left(\frac{1}{4}+\mathrm{e}^{-0,75t}\right)^2}>0, \forall t\geq 0$, tức là số lượng quần thể nấm men luôn tăng.

Tuy nhiên, do $\lim\limits_{t\to+\infty}P(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{25}{\frac{1}{4}+\mathrm{e}^{-0.75t}}=100$ nên số lượng quần thể nấm men tăng nhưng không vượt quá 100 tế bào.

Câu 13: Anh Ba đang trên chiếc thuyền tại vị trí A cách bờ sông $2km$, anh dự định chèo thuyền vào bờ và tiếp tục chạy bộ theo một đường thẳng để đến một địa điểm B tọa lạc ven bờ sông, B cách vị trí O trên bờ gần với thuyền nhất là $4km$ (hình vẽ). Biết rằng anh Ba chèo thuyền với vận tốc $6m/h$ và chạy bộ trên bờ với vận tốc $10km/h$. Khoảng thời gian ngắn nhất để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là



Lời giải



Đặt $OP = x\ \left(0 < x < 4\right) \Rightarrow BP = 4 - x$; $AP = \sqrt{4 + x^2}$.

Khoảng thời gian để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là:

$t_{(x)} = t_{AP} + t_{PB} = \dfrac{\sqrt{4+x^2}}{6} + \dfrac{4-x}{10}\left(h\right). \quad \Rightarrow t'_{(x)} = \dfrac{x}{6\sqrt{4+x^2}} - \dfrac{1}{10}.$

$t'_{(x)} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{6\sqrt{4+x^2}} - \dfrac{1}{10} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{4+x^2} = 5x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 4 \\ 4x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}.$

BBT:

x	0		$\frac{3}{2}$		4
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
$t(x)$		$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	

Từ BBT suy ra khoảng thời gian ngắn nhất để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là:

$t_{\min} = \dfrac{2}{3}\left(h\right) = \dfrac{2}{3}.60 = 40$ (phút).

Câu 14: Một loại vi khuẩn được tiêm một loại thuốc kích thích sự sinh sản. Sau t phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức $N\left(t\right) = 1000 + 30t^2 - t^3\left(0 \le t \le 30\right)$. Hỏi sau bao giây thì số vi khuẩn lớn nhất?

Lời giải

Xét hàm số $N\left(t\right) = 1000 + 30t^2 - t^3\left(0 \le t \le 30\right)$.

Ta có: $N'\left(t\right) = 60t - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 20 \end{array}\right.$

t	0		20		30
N'		$+$	0	$-$	
N		$\nearrow$	5000	$\searrow$	

Với $t = 20$ giây thì số vi khuẩn lớn nhất.

Câu 15: Giám đốc một nhà hát A đang phân vân trong việc xác định mức giá vé xem các chương trình được trình chiếu trong nhà hát. Việc này rất quan trọng nó sẽ quyết định nhà hát thu được bao nhiêu lợi nhuận từ các buổi trình chiếu. Theo những cuốn sổ ghi chép của mình, ông ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là 20 USD/người thì trung bình có 1000 người đến xem. Nhưng nếu tăng thêm 1 USD/người thì sẽ mất 100 khách hàng hoặc giảm đi 1 USD/người thì sẽ có thêm 100 khách hàng trong số trung bình. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 2 USD lợi nhuận cho nhà hát trong các dịch vụ đi kèm. Hãy giúp giám đốc nhà hát này xác định xem cần tính giá vé vào cửa là bao nhiêu để thu nhập là lớn nhất.

Lời giải

Gọi giá vé sau khi điều chỉnh là $20 + x \ \left(ĐK : x > -20\right)$

Số khách là: $1000 - 100x$

Tổng thu nhập

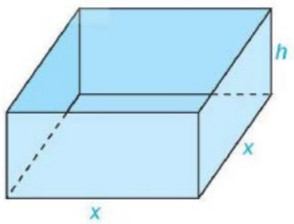
$f\left(x\right) = \left(20 + x + 2\right)\left(1000 - 100x\right) = \left(22 + x\right)\left(1000 - 100x\right) = -100x^2 - 1200x + 22000$

Bảng biến thiên

x	-20		-6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-20)$	$\nearrow$	$f(-6)$	$\searrow$	$-\infty$

$\max\limits_{(-20;+\infty)} f\left(x\right) = f\left(-6\right)$. Suy ra giá vé là: $x + 20 = 20 - 6 = 14$ USD

Câu 16: Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng $108\,\text{cm}^2$ như hình bên dưới. Tìm chiều cao của chiếc hộp sao cho thể tích của chiếc hộp là lớn nhất.



Lời giải

Hình hộp trên có độ dài cạnh đáy là x ($\text{cm}, x > 0$) và chiều cao là h ($\text{cm}, h > 0$)

Diện tích bề mặt của hình hộp là $108\,\text{cm}^2$ nên $x^2 + 4xh = 108 \Rightarrow h = \dfrac{108 - x^2}{4x}$ (cm) (điều kiện $0 < x < \sqrt{108}$).

Thể tích của hình hộp là: $V = x^2.h = x^2 \cdot \dfrac{108 - x^2}{4x} = \dfrac{108x - x^3}{4}\left(\text{cm}^3\right)$. Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $V = -\dfrac{x^3}{4} + 27x \quad \left(0 < x < \sqrt{108}\right)$

Ta có: $V' = \dfrac{-3x^2 + 108}{4}, V' = 0 \Leftrightarrow x = 6$ (do $0 < x < \sqrt{108}$)

Lập bảng biến thiên của hàm số

x	0		6		$\sqrt{108}$
V'		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	108	$\searrow$	0

Do đó, thể tích của chiếc hộp là lớn nhất khi độ dài cạnh đáy $x = 6\text{cm}$

Khi đó, chiều cao của chiếc hộp là: $\dfrac{108 - 6^2}{4.6} = 3(\text{cm})$.

Câu 17: Nhà sản suất dự định sử dụng hết $6m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, có đáy là hình vuông (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Tìm các kích thước của bể cá để bể cá có dung tích là lớn nhất?

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là cạnh đáy và chiều cao của bể cá (điều kiện $x, y > 0$).

Ta có thể tích bể cá $V = x^2 y$.

Theo đề bài ta có: $4xy + x^2 = 6 \Leftrightarrow y = \dfrac{6 - x^2}{4x}$ (Điều kiện $y > 0 \Leftrightarrow 6 - x^2 > 0 \ \Rightarrow 0 < x < \sqrt{6}$)

Khi đó: $V = x^2.\dfrac{6 - x^2}{4x} = \dfrac{6x - x^3}{4}$

$\Rightarrow V' = \dfrac{6 - 3x^2}{4}$

$V' = 0 \Leftrightarrow 6 - 3x^2 = 0 \ \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Ta có bảng biến thiên

x	0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{6}$
V'		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0

Suy ra $V_{\max} = \sqrt{2}$ tại $x = \sqrt{2}; y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy bể cá có kích thước là cạnh đáy là $\sqrt{2}$, chiều cao là $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ thì dung tích là lớn nhất.

Câu 18: Một người bán gạo muốn đóng một thùng tôn đựng gạo có thể tích không đổi bằng $10\ m^3$, thùng tôn hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông, không nắp. Trên thị trường, giá tôn làm đáy thùng là $90000/m^2$ và giá tôn làm thành xung quanh thùng là $40000/m^2$. Hỏi người bán gạo đó cần đóng thùng đựng gạo với cạnh đáy bằng bao nhiêu để chi phí mua nguyên liệu là nhỏ nhất?

Lời giải

Gọi chiều dài cạnh đáy hình vuông và chiều cao của thùng đựng gạo lần lượt là $x, y\ (m)$;

$(x>0, y>0)$. Ta có thể tích của thùng là: $V = x^2y = 10 \Rightarrow y = \dfrac{10}{x^2}$.

Diện tích đáy hình hộp là x^2 và diện tích xung quanh là $4xy$ nên chi phí để làm thùng tôn là

$$90000x^2 + 160000xy = 90000x^2 + \frac{1600000}{x} = f(x)12000\sqrt[3]{900}$$

Trên khoảng $(0;+\infty)$ ta có $f'(x) = 180000x - \dfrac{1600000}{x^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{9}}$.

Ta có bảng biến thiên

x	0		$\frac{2\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{9}}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert\ +\infty$	$\searrow$	$120000\sqrt[3]{900}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy chi phí nhỏ nhất bằng $120000\sqrt[3]{900}$ đồng khi và chỉ khi cạnh đáy hình hộp bằng $\dfrac{2\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{9}}$.

Câu 19: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể sau t giờ được cho bởi công thức $c(t) = \dfrac{2t}{t^2+1}\ (mg/L)$. Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Lời giải

Xét hàm số $c(t) = \dfrac{2t}{t^2+1}$, $(t>0)$.

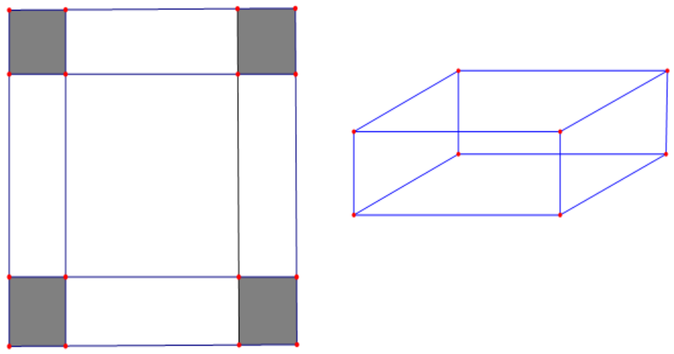
$c'(t) = \dfrac{2-2t^2}{(t^2+1)^2}$.

$c'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \end{array}\right.$.

t	0		1		$+\infty$
$c'(t)$		$+$	0	$-$	
$c(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Sau 1 giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bênh nhân cao nhất.

Câu 20: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh $40\,cm$. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(cm)$, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất?



Lời giải

Ta có: $h = x\ (cm)$ là chiều cao của hình hộp.

Vì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là: $40 - 2x\ (cm)$.

Vậy diện tích đáy hình hộp $S = (40-2x)^2\ (cm^2)$.

Ta có: $\begin{cases} x > 0 \\ 40 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 20 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0;20)$.

Thể tích của hình hộp là: $V = S.h = x.(40-2x)^2$.

Xét hàm số: $y = x.(40-2x)^2$ trên khoảng $(0;20)$

Ta có: $y' = (40-2x)^2 - 4x(40-2x) = (40-2x)(40-6x)$;

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 20\,(L) \\ x = \dfrac{20}{3}\,(N) \end{array} \right.$.

x	0		$\frac{20}{3}$		20
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{128000}{27}$	$\searrow$	0

Vậy $x = \dfrac{20}{3}$ thì thể tích khối hộp là lớn nhất.

Câu 21: Ho ép khí quản co lại, ảnh hưởng đến tốc độ không khí đi vào khí quản. Tốc độ của không khí đi váo khí quản khi ho đo được bởi công thức : $V = k(R-r)r^2$ với $0 \le r < R$, trong đó k là hằng số, R là bán kính bình thường của khí quản, r là bán kính khí quản khi ho. Hỏi bán kính khí quản khi ho bằng bao nhiêu thì tốc độ của không khí đi váo khí quản là lớn nhất?

Lời giải

Ta có $V = kRr^2 - kr^3$

$V' = 2kRr - 3kr^2$, $V' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = 0 \\ r = \dfrac{2R}{3} \end{array} \right.$

BBT

r	0		$\frac{2R}{3}$		R
$v'(r)$		$+$	0	$-$	
$v(r)$	0	$\nearrow$	$\frac{4kR^3}{27}$	$\searrow$	0

Từ BBT ta có bán kính khí quản khi ho bằng $\frac{2R}{3}$ thì tốc độ của không khí đi váo khí quản là lớn nhất

Câu 22: Một vật chuyển động theo quy luật $S=-t^3+18t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $v(t)=s'(t)=-3t^2+36t$ với $t\in[0;10]$.

$v'(t)=-6t+36$

$v'(t)=0\Leftrightarrow t=6$

$v(0)=0$

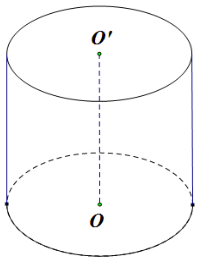
$v(10)=60$

$v(6)=108$

Vậy vận tốc lớn nhất của vật trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động là 108 (m/s).

Câu 23: Khi sản xuất vỏ lon sữa bia hình trụ, các nhà sản xuất luôn đặt tiêu chí sao cho chi phí sản xuất vỏ lon là nhỏ nhất. Hỏi khi nhà sản xuất muốn thể tích của hộp sữa là V cm^3, thì diện tích toàn phần của lon sữa nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải



Ta có: $V=\pi r^2h\Rightarrow h=l=\frac{V}{\pi r^2}$.

Diện tích toàn phần của lon sữa:

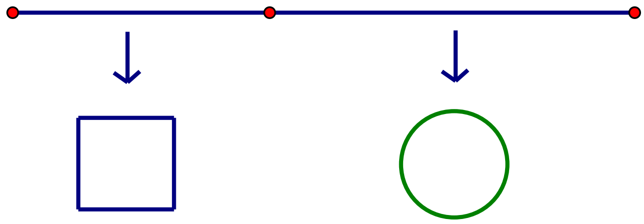
$S_{tp}=S_{xq}+S_{2d}=2\pi rl+2\pi r^2=2\pi r\frac{V}{\pi r^2}+2\pi r^2=\frac{2V}{r}+2\pi r^2$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $\frac{2V}{r}+2\pi r^2=\frac{V}{r}+\frac{V}{r}+2\pi r^2\geq 3\sqrt[3]{\frac{V}{r}.\frac{V}{r}.2\pi r^2}=6\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{4}}$.

Dấu "=" xảy ra khi: $\frac{V}{r} = 2\pi r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Vậy diện tích toàn phần của lon sữa nhỏ nhất bằng $6\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{4}}$ khi $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Câu 24: Một sợi dây kim loại dài $60dm$ được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a, đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r. Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{a}{r}$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Ta có:

* $4a + 2\pi r = 60 \Leftrightarrow \pi r = 30 - 2a$

Điều kiện: $0 < 4a < 60 \Leftrightarrow 0 < a < 15$.

* Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn:

$$S = a^2 + r^2\pi = a^2 + \frac{(30-2a)^2}{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[(\pi+4)a^2 - 120a + 900\right]$$

* Xét $f(a) = (\pi+4)a^2 - 120a + 900$ với $a \in (0,15)$

$f(a)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $a = \frac{120}{2(\pi+4)} = \frac{60}{\pi+4} \in (0,15)$.

* S đạt giá trị nhỏ nhất khi $a = \frac{60}{\pi+4}$.

$\Rightarrow \pi r = 30 - 2.\frac{60}{\pi+4} = \frac{30\pi}{\pi+4} \Rightarrow r = \frac{30}{\pi+4}$

* Khi đó: $\frac{a}{r} = \frac{60}{\pi+4} : \frac{30}{\pi+4} = 2$.

Kết luận: $\frac{a}{r} = 2dm$.

Câu 25: Hằng ngày mực nước của hồ thủy điện ở miền Trung lên và xuống theo lượng nước mưa và các suối nước đổ về hồ. Tính từ thời điểm 8 giờ sáng, độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống theo thời gian t (giờ) trong ngày cho bởi công thức: $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 24t \quad (t > 0)$. Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi xả nước theo quy định trước 5 giờ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước mấy giờ. Biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước.

Lời giải

Ta có: $h'(t) = -t^2 + 10t + 24$

$h'(t) = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 10t + 24 = 0 \Leftrightarrow t = 12$

Bảng biến thiên:

t	0		12		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$		$\nearrow$	h_{max}	$\searrow$	

Để mực nước lên cao nhất thì phải mất 12 giờ, Khi đó 20 giờ nước đầy. Vậy phải thông báo cho dân di dời vào 15 giờ chiều cùng ngày.

Câu 26: Để thiết kế một chiếc bể cá hình hộp chữ nhật không nắp có chiều cao là $60cm$, thể tích $96000cm^3$. Người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70000 $VNĐ/m^2$ và loại kính để làm mặt đáy có giá thành 100000 $VNĐ/m^2$. Tính chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá.

Lời giải

Gọi $x, y(m)$ $(x>0, y>0)$ là chiều dài và chiều rộng của đáy bể

Khi đó theo đề ta suy ra: $0,6xy = 0,096 \Leftrightarrow y = \dfrac{0,16}{x}$.

Giá thành của bể cá được xác định theo hàm số sau:

$$f(x) = 2.0,6\left(x + \frac{0,16}{x}\right).70000 + 100000.x.\frac{0,16}{x}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 84000\left(x + \frac{0,16}{x}\right) + 16000$$

Ta có: $f'(x) = 84000\left(1 - \dfrac{0,16}{x^2}\right) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,4$

Bảng biến thiên:

x	0		$0,4$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(0,4)$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là $f(0,4) = 83200$ $VNĐ$

Câu 27: Nhà xe khoán cho hai tài xế An và Bình mỗi người lần lượt nhận 32 lít và 72 lít xăng trong một tháng. Biết rằng trong một ngày tổng số xăng cả hai người sử dụng là 10 lít. Tổng số ngày ít nhất để hai tài xế sử dụng hết số xăng được khoán là bao nhiêu (biết số lít xăng tiêu thụ trong các ngày là như nhau).

Lời giải

Gọi x (lít) $(0 < x < 10)$ là số xăng An sử dụng trong 1 ngày.

Khi đó: $10 - x$ (lít) là số xăng Bình sử dụng trong 1 ngày.

Suy ra $f(x) = \dfrac{32}{x} + \dfrac{72}{10-x}$, $x \in (0;10)$ là tổng số ngày An và Bình sử dụng hết số xăng được khoán.

Ta có: $f'(x) = -\dfrac{32}{x^2} + \dfrac{72}{(10-x)^2}$. Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{32}{x^2} + \dfrac{72}{(10-x)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -20 \notin (0;10) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x) = \dfrac{32}{x} + \dfrac{72}{10-x}$, $x \in (0;10)$

x	0		4		10
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	20	↗	$+\infty$ ‖

Dựa vào BBT ta có ít nhất 20 ngày thì An và Bình sử dụng hết lượng xăng được khoán.

Câu 28: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c(t) = \dfrac{t}{t^2+1}\ (mg/L)$. Hỏi sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Lời giải

Xét hàm số $c(t) = \dfrac{t}{t^2+1} \quad (t > 0)$

Ta có $c'(t) = \dfrac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$

$c'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1\ (L) \end{array}\right.$

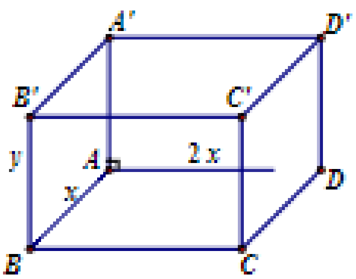
Ta có bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$c'(t)$		$+$	0	$-$	
$c(t)$	0	↗	$\dfrac{1}{2}$	↘	0

Vậy khi $t = 1$ thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân là cao nhất.

Câu 29: Ông A dự định sử dụng hết $5m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi x và y lần lượt là chiều rộng và chiều cao của bể cá.

Ta có thể tích của bể cá là $V = 2x^2y$.

Theo đề bài ta có $2xy + 2.2xy + 2x^2 = 5 \Leftrightarrow 6xy + 2x^2 = 5 \Leftrightarrow y = \dfrac{5-2x^2}{6x}$

$\Rightarrow V = 2x^2.\dfrac{5-2x^2}{6x} = \dfrac{5x-2x^3}{3} \Rightarrow V' = \dfrac{5-6x^2}{3} \Rightarrow V' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{5}{6}}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\sqrt{\dfrac{5}{6}}$		$\sqrt{\dfrac{5}{2}}$
V'		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	$\dfrac{5\sqrt{30}}{27}$	$\searrow$	0

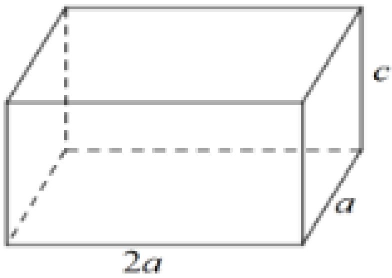
Vậy thể tích lớn nhất của bể cá là $\dfrac{5\sqrt{30}}{27} \approx 1,01m^3$

Câu 30: Ông Khoa muốn xây một bể cá chứa nước dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích $288\,m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê công nhân xây bể là 500000 đồng/m^2. Nếu ông Khoa biết xác định các kích thước một cách hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông Khoa trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể cá đó là bao nhiêu?

Lời giải

Theo bài ra ta có chi phí thuê nhân công thấp nhất thì bể phải xây dung có tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy nhỏ nhất.

Gọi ba kích thước của bể là $a, 2a, c$ với $(a, c > 0)$.



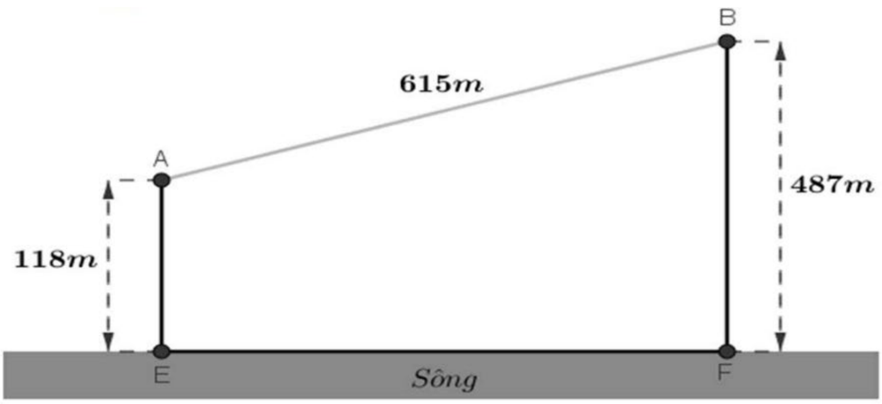
Diện tích các mặt cần xây là $S = 2a^2 + 4ac + 2ac = 2a^2 + 6ac$.

Thể tích bể là $V = a.2a.c = 2a^2c = 288 \Rightarrow c = \dfrac{144}{a^2}$

Khi đó $S = 2a^2 + 6a.\dfrac{144}{a^2} = 2a^2 + \dfrac{864}{a} = 2a^2 + \dfrac{432}{a} + \dfrac{432}{a} \geq 3\sqrt[3]{2a^2.\dfrac{432}{a}.\dfrac{432}{a}} = 216$.

Vậy chi phí thấp nhất là $216.500000 = 108$ triệu đồng

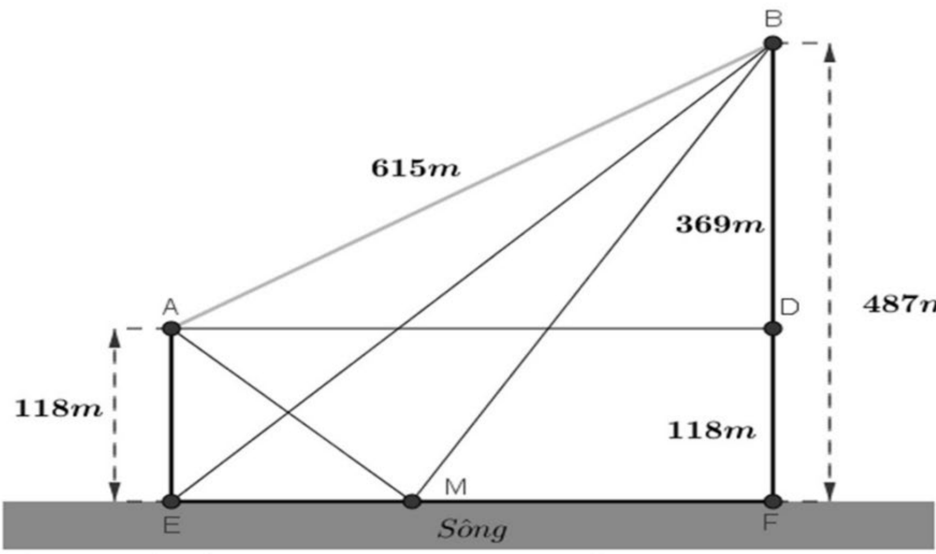
Câu 31: Cho hai vị trí A, B cách nhau 615 m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ.



Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118 m và 487 m. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B. Đoạn đường ngắn nhất là số nguyên dương mà người đó có thể đi là bao nhiêu?

Lời giải

Giả sử người đó đi từ A đến M để lấy nước và đi từ M về B dễ dàng tính được $BD = 369, EF = 492$.



Ta đặt $EM = x$, khi đó ta được:

$MF = 492 - x, AM = \sqrt{x^2 + 118^2}, BM = \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}$.

Như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định bằng tổng quãng đường AM và MB:

$f(x) = \sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}$ với $x \in [0;492]$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được quãng đường ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm M.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} - \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} = \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}} \Leftrightarrow x\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} = (492 - x)\sqrt{x^2 + 118^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left[(492 - x)^2 + 487^2\right] = (492 - x)^2\left(x^2 + 118^2\right) \\ 0 \le x \le 492 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (487x)^2 = (58056 - 118x)^2 \\ 0 \le x \le 492 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{58056}{605} \text{ hay } x = -\frac{58056}{369} \Leftrightarrow x = \frac{58056}{605} \\ 0 \le x \le 492 \end{cases}$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;492]$. So sánh các giá trị của $f(0), f\left(\frac{58056}{605}\right), f(492)$ ta có giá trị nhỏ nhất là $f\left(\frac{58056}{605}\right) \approx 779,8$ m

Khi đó quãng đường đi ngắn nhất là xấp xỉ $779,8$ m.

Câu 32: Một công ty sản xuất những chiếc xô bằng nhôm hình trụ không có nắp đủ chứa được10 lít nước. Hỏi bán kính đáy (đơn vị cm) của chiếc xô bằng bao nhiêu để cửa hàng tốn ít nguyên vật liệu nhất.(Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

Ta có: $10l = 10000cm^3$.

Gọi x ($x > 0$) là bán kính của chiếc xô. Khi đó $V = \pi x^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi x^2}$.

Diện tích phần tôn làm chiếc xô là:

$$S(x) = \pi x^2 + 2\pi x h = \pi x^2 + 2\pi x \frac{V}{\pi x^2} = \pi x^2 + 2\frac{10000}{x} = \pi x^2 + \frac{20000}{x}$$

$$S'(x) = 2\pi x - \frac{20000}{x^2} = \frac{2\pi x^3 - 20000}{x^2}.$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\pi x^3 - 20000 = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{10000}{\pi} \Leftrightarrow x = 10.\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$$

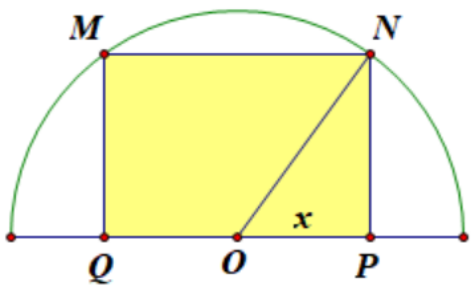
Bảng biến thiên:

x	0		$10.\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Ta thấy diện tích phần nhôm làm chiếc xô nhỏ nhất khi bán kính đáy xô là $x = 10\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} \approx 14,7(\text{cm})$

Câu 33: Từ một miếng tôn dạng nửa hình tròn có bán kính $R = 4$ dm, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật. Hỏi diện tích lớn nhất của hình chữ nhật có thể cắt được là bao nhiêu?

Lời giải



Gọi hình chữ nhật cần tính diện tích là $MNPQ$ có $OP = x\ (0 < x < 4)$, $ON = 4$.

Khi đó diện tích của hình chữ nhật $MNPQ$ là: $S = MN.NP = 2x\sqrt{16-x^2}$.

Xét hàm số : $f(x) = 2x\sqrt{16-x^2}$ trên $(0;4)$.

Ta có : $f'(x) = 2\sqrt{16-x^2} - \dfrac{2x^2}{\sqrt{16-x^2}} = \dfrac{-4x^2+32}{\sqrt{16-x^2}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\sqrt{2} \in (0;4) \\ x = -2\sqrt{2} \notin (0;4) \end{array}\right.$.

BBT:

x	0		$2\sqrt{2}$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	16	$\searrow$	0

Ta có: $\max\limits_{(0;4)} f(x) = f\left(2\sqrt{2}\right) = 16$.

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật có thể cắt được là $16\,(\text{dm}^2)$.

Câu 34: Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa $(1 \le x \le 18)$. Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

$$C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500.$$

Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét.
Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa.
Hỏi lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm trong một ngày?

Lời giải

Số tiền thu về khi bán x mét vải lụa là: $220x$.
Lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa là:

$L(x) = 220x - (x^3 - 3x^2 - 20x + 500) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$

Xét hàm số $L(x) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$ với $x \in [1;18]$

$L'(x) = -3x^2 + 6x + 240$; $L'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 \in [1;18] \\ x = -8 \notin [1;18] \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	1		10		18
y	-258	$\nearrow$	1200	$\searrow$	-1040

Vậy hộ làm nghề dệt này thu được lợi nhuận tối đa trong một ngày là 1200 nghìn đồng khi sản xuất 10 mét vải lụa trong một ngày.

Câu 35: Một người quản lí của một khu chung cư có 80 căn hộ cho thuê nhận thấy rằng tất cả các căn hộ sẽ có người thuê nếu giá thuê một căn hộ là 7 triệu đồng. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thuê căn hộ thêm 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Người quản lí nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là bao nhiêu để doanh thu là lớn nhất?

Lời giải

Gọi x trăm nghìn là giá thuê tăng thêm so với giá gốc 7 triệu đồng, với $x \in \mathbb{N}, x < 80$.

Số căn hộ bị bỏ trống là x.

Giá thuê mỗi căn hộ là $7 + \dfrac{x}{10}$ triệu đồng.

Doanh thu của $80 - x$ căn hộ cho thuê là: $(80 - x)\left(7 + \dfrac{x}{10}\right) = \dfrac{-1}{10}x^2 + x + 560$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{-1}{10}x^2 + x + 560$, với $x \in \mathbb{N}, x < 80$.

$f'(x) = \dfrac{-1}{5}x + 1$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$

Bảng biến thiên

x	0		5		80
y	560	$\nearrow$	$562{,}5$	$\searrow$	0

Vậy người quản lí nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là $7{,}5$ triệu đồng để doanh thu là lớn nhất.

Câu 36: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c(t) = \dfrac{t}{t^2 + 1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Lời giải

Xét hàm số $c(t) = \dfrac{t}{t^2 + 1}$, $(t > 0)$.

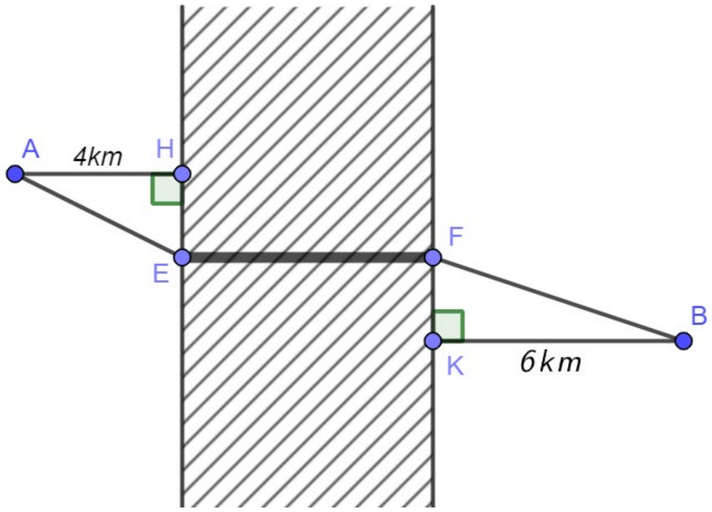
$c'(t) = \dfrac{1 - t^2}{\left(t^2 + 1\right)^2}$.

$c'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \end{array}\right.$.

t	0		1		$+\infty$
$c'(t)$		$+$	0	$-$	
$c(t)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	0

Với $t = 1$ giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất.

Câu 37: Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là $4km$ và thành phố B cách con sông một khoảng là $6km$ (hình vẽ), biết $HE + KF = 20km$ và độ dài EF không đổi. Hỏi xây cây cầu cách thành phố A là bao nhiêu km để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường $AEFB$)? *(kết quả làm tròn đến phần chục)*



Lời giải

Đặt $HE = x$, $FK = y$, với $x, y > 0$

Ta có: $HE + KF = 20 \Rightarrow x + y = 20$, $\begin{cases} AE = \sqrt{16 + x^2} \\ BF = \sqrt{36 + y^2} = \sqrt{36 + (20 - x)^2} \end{cases}$

Nhận xét: Vì EF không đổi nên AB ngắn nhất khi $AE + BF$ nhỏ nhất.

Ta có $AE + BF = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{(20 - x)^2 + 36} = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 40x + 436} = f(x)$

$f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} + \dfrac{x - 20}{\sqrt{x^2 - 40x + 436}}, \forall x \in (0; 20)$.

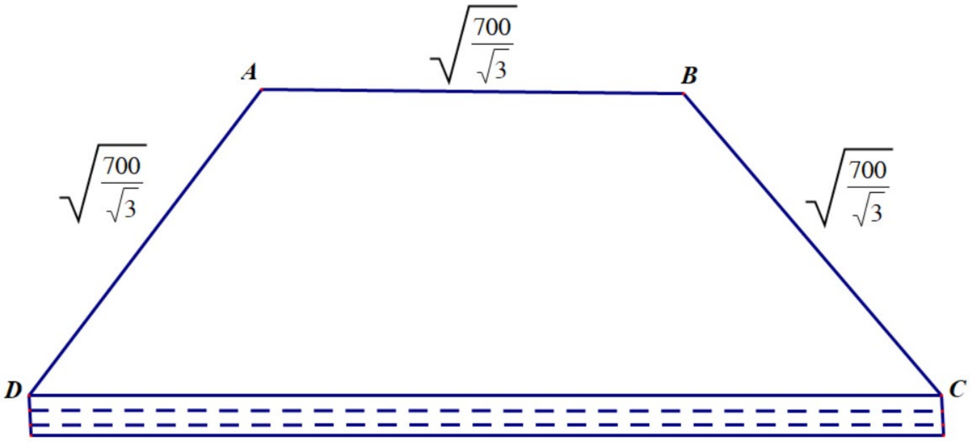
Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 8$

Bảng biến thiên

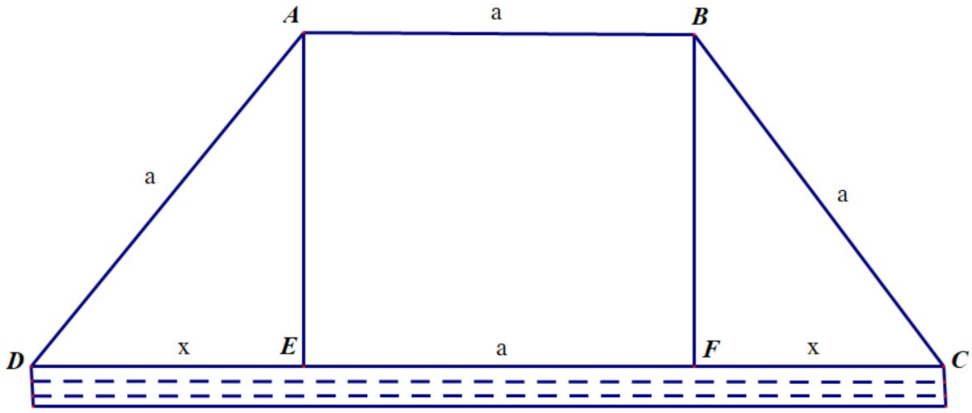
x	0		8		20
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	$10\sqrt{5}$	$\nearrow$	

Vậy $AE = \sqrt{8^2 + 16} \approx 8,94km$

Câu 38: Bác nông dân có ba tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $\sqrt{\dfrac{700}{\sqrt{3}}}(m)$ và muốn rào một khu vườn có dạng hình thang cân $ABCD$ như trong hình vẽ. Khu vườn có 3 mặt rào, mặt còn lại tiếp giáp với bờ sông nên không cần rào. Hỏi diện tích lớn nhất mà bác nông dân có thể rào được là bao nhiêu mét vuông?



Lời giải



Gọi $a=\sqrt{\frac{700}{\sqrt{3}}}(m)$. Dựng các đường cao AE và BF của hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ trên.

Vì $ABCD$ là hình thang cân nên $DE=FC$ và $EF=AB=a$.

Đặt $DE=FC=x\ \ (x>0)$. Ta có $DC=DE+EF+FC=x+a+x=2x+a$

Ta có $AE=\sqrt{AD^2-DE^2}=\sqrt{a^2-x^2}$

Ta thấy, x phải thỏa mãn điều kiện $0<x<a$.

Diện tích của hình thang cân $ABCD$ là

$$S=\frac{1}{2}(AB+CD)AE=\frac{1}{2}(a+2x+a)\sqrt{a^2-x^2}=(a+x)\sqrt{a^2-x^2}$$

Xét hàm số $S(x)=(a+x)\sqrt{a^2-x^2}$ với $x\in(0;a)$. $\Rightarrow S'(x)=\frac{-2x^2-ax+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$\Rightarrow S'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2-ax+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=0 \Leftrightarrow -2x^2-ax+a^2=0 \Leftrightarrow (x+a)(a-2x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-a\ (l) \\ x=\dfrac{a}{2}\ (n) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số $S(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0		$\frac{a}{2}$		a	$+\infty$
$S'(x)$			$+$	0	$-$		
$S(x)$		a^2	$\nearrow$	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0	

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ tại $x=\frac{a}{2}$.

Thay $a=\sqrt{\frac{700}{\sqrt{3}}}$ vào biểu thức $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3.\left(\sqrt{\frac{700}{\sqrt{3}}}\right)^2.\sqrt{3}}{4}=525$

Vậy bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là $525\,m^2$.

Câu 39: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá $2.000.000$ đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có lợi nhuận cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu (đơn vị tính bằng triệu đồng và làm tròn kết quả tới hàng phần trăm)?

Lời giải

Gọi x là giá thuê thực tế của mỗi căn hộ, (x : đồng; $x \ge 2\ 000\ 000$ đồng)

+) Khi tăng giá 100.000 đồng thì có 2 căn hộ bị bỏ trống.

Tăng giá $x-2.000.000$ đồng, ta có số căn hộ bị bỏ trống là $\frac{2(x-2.000.000)}{100.000}=\frac{x-2.000.000}{50.000}$

Khi cho thuê với giá x đồng thì số căn hộ cho thuê là: $50-\frac{x-2.000.000}{50.000}=-\frac{x}{50.000}+90$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ, ($F(x)$: đồng).

Ta có: $F(x)=\left(-\frac{x}{50.000}+90\right)x=-\frac{1}{50.000}x^2+90x$

Ta tìm GTLN của $F(x)=-\frac{1}{50.000}x^2+90x$, $x \ge 2.000.000$

$$F'(x)=-\frac{1}{25.000}x+90$$

$$F'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{25.000}x+90=0 \Leftrightarrow x=2.250.000$$

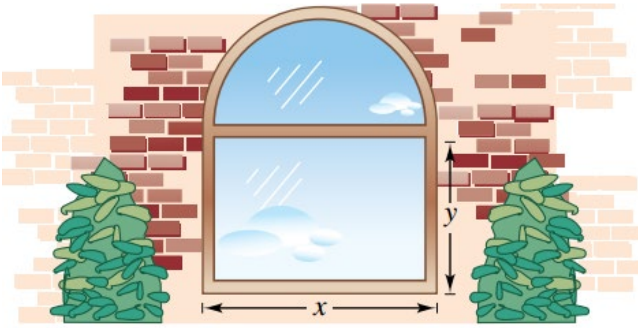
Bảng biến thiên:

X	2.000.000		2.250.000		$+\infty$
F'(x)		+	0	$-$	
F(x)		$\nearrow$	F_{max}	$\searrow$	

Suy ra $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2.250.000$

Vậy công ty phải cho thuê với giá $2,25$ triệu đồng mỗi căn hộ thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

Câu 40: Để làm một cửa sổ có dạng một hình bán nguyệt và một hình chữ nhật ghép lại như hình vẽ bên dưới, người ta dùng $8\,\text{m}$ dây thép để làm các đường viền. Gọi x, y là độ dài cạnh của khung hình chữ nhật.



a) Chiều dài dây để uốn ra bán nguyệt là $\dfrac{\pi x}{2}$.

b) Giá trị của y tính theo x là $4 - \dfrac{x(4+\pi)}{4}$.

c) Diện tích của cửa sổ là $S = 4x - x^2$.

d) Khi diện tích của cửa sổ lớn nhất thì $y = \dfrac{16}{8+\pi}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

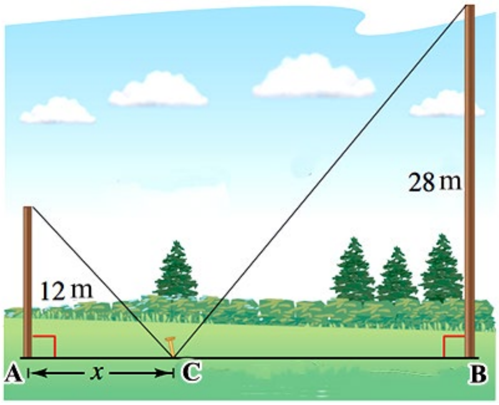
a) Bán kính của hình bán nguyệt là $\dfrac{x}{2}$ nên nửa chu vi bán nguyệt là $\dfrac{\pi x}{2}$

b) Ta có $2(x+y) + \dfrac{\pi x}{2} = 8 \Leftrightarrow y = 4 - \dfrac{x(4+\pi)}{4}$.

c) Diện tích của cửa sổ: $S = xy + \dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = x\left(4 - x - \dfrac{\pi x}{4}\right) + \dfrac{\pi x^2}{8} = 4x - x^2 - \dfrac{\pi x^2}{8}$.

d) S đạt giá trị lớn nhất khi $x = \dfrac{4}{2+\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{16}{8+\pi}$ nên $y = 4 - x - \dfrac{\pi x}{4} = \dfrac{16}{8+\pi}$.

Câu 41: Có hai cây cột, một cây cao $12\,\text{m}$ và một cây cao $28\,\text{m}$ đứng cách nhau $30\,\text{m}$. Chúng được giữ bằng hai sợi dây, gắn vào một cọc duy nhất nối từ mặt đất đến đỉnh mỗi cột. Gọi x là khoảng cách từ cột cao $12\,\text{m}$ đến cọc.



a) Để tổng chiều dài của dây ngắn nhất thì $x \in (0;30)$.

b) Chiều dài sợi dây nối từ cọc đến đỉnh cột cao 28 m là $\sqrt{1684 + x^2}$.

c) Tổng chiều dài của dây là $\sqrt{144 + x^2} + \sqrt{1684 - 60x + x^2}$.

d) Tổng chiều dài ngắn nhất của dây là 48,5 m.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) Rõ ràng để tổng chiều dài dây ngắn nhất thì cọc phải nằm trong khoảng giữa hai cây cột nên $x \in (0;30)$.

b) $AC = x \Rightarrow BC = 30 - x$ nên chiều dài sợi dây nối từ cọc đến đỉnh cột cao 28 m là $\sqrt{28^2 + (30-x)^2} = \sqrt{1684 - 60x + x^2}$.

c) Chiều dài sợi dây nối từ cọc đến đỉnh cột cao 12 m là $\sqrt{12^2 + x^2} = \sqrt{144 + x^2}$ suy ra tổng chiều dài của sợi dây là $\sqrt{144 + x^2} + \sqrt{1684 - 60x + x^2}$.

d) Xét hàm số $f(x) = \sqrt{144 + x^2} + \sqrt{1684 - 60x + x^2}$ với $x \in [0;30]$

Ta có $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{144 + x^2}} + \dfrac{x - 30}{\sqrt{1684 - 60x + x^2}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{1684 - 60x + x^2} = (30 - x)\sqrt{144 + x^2}$

$\Rightarrow x^2(1684 - 60x + x^2) = (30 - x)^2(144 + x^2)$

$\Leftrightarrow 640x^2 + 8540x - 129600 = 0$

$\Leftrightarrow x = 9; x = -\dfrac{45}{2}$

Do $x \in [0;30]$ nên ta nhận $x = 9$

Ta có $f(0) \approx 53,04$; $f(9) = 50$; $f(30) = 60,31$

Vậy chiều dài ngắn nhất của dây là 50 m.

Câu 42: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 8t + 1$, trong đó t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Các phát biểu sau đúng hay sai

a) Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3(s)$ bằng $8\,m/s$.

b) Tại thời điểm mà chất điểm di chuyển được $13m$, vận tốc khi đó bằng $8\,m/s$.

c) Vận tốc nhỏ nhất của chất điểm là $5m/s$.

d) Gia tốc tại thời điểm chất điểm đạt vận tốc nhỏ nhất bằng $2m/s^2$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) Vận tốc $v(t)=3t^2-6t+8$

Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t=3(s)$ bằng $v(3)=17m/s$

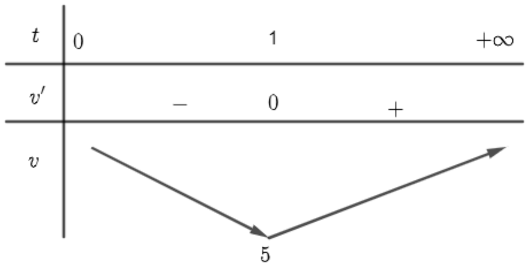
b) Chất điểm di chuyển được $13m$ $\Leftrightarrow t^3-3t^2+8t+1=13 \Leftrightarrow t=2(s)$

Vận tốc khi đó bằng $v(2)=8m/s$.

c) Vận tốc $v(t)=3t^2-6t+8$

$v'(t)=6t-6 \Leftrightarrow t=1$

Bảng biến thiên

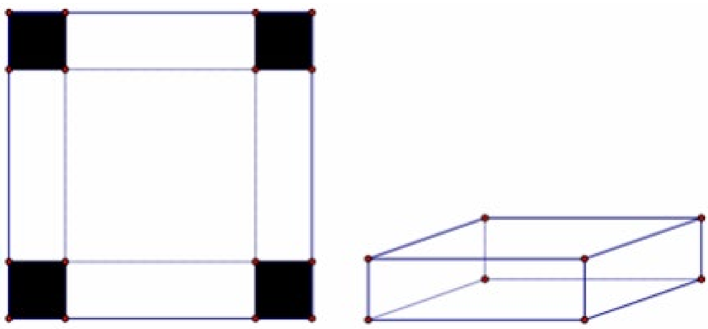


Vận tốc nhỏ nhất bằng $5m/s$ tại thời điểm $t=1(s)$.

d) Gia tốc $a(t)=6t-6$

Gia tốc tại thời điểm $t=1(s)$ bằng $a(1)=0$.

Câu 43: Cho một tấm nhôm hình vuông có cạnh bằng $30(cm)$. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó thành bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh $x(cm)$, rồi gập tấm nhôm lại để thành cái hộp không nắp. Các phát biểu sau đúng hay sai?



a) Đáy của hộp là một hình vuông có cạnh bằng $30-x(cm)$

b) Nếu $x=3cm$ thì thể tích hộp bằng $1500(cm^3)$.

c) Thể tích hộp đạt giá trị lớn nhất khi $x=15(cm)$

d) Giá trị lớn nhất của hộp bằng $2000cm^3$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

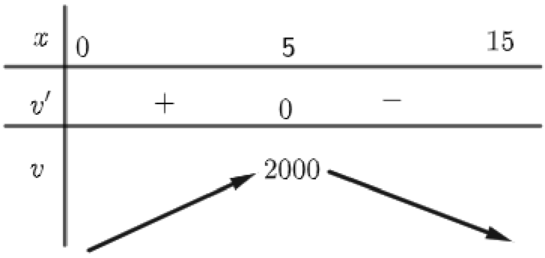
a) Đáy của hộp là một hình vuông có cạnh bằng $30-2x(cm)$

b) Thể tích cái hộp không nắp: $V=x(30-2x)^2$

Thể tích hộp nếu $x=3cm$ $V(3)=1728\left(cm^3\right)$

c) $V'=900+12x^2-240x$

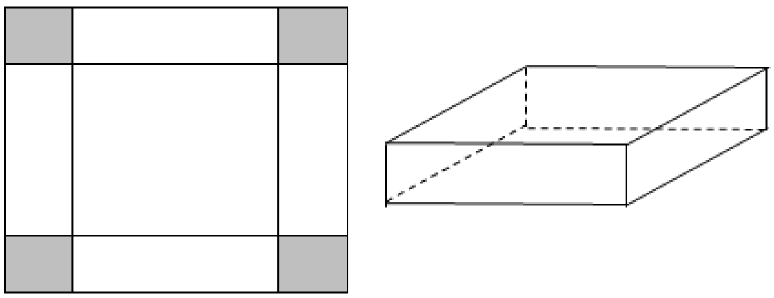
$V'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=15\\x=5\end{array}\right.,\quad x\in(0;15)$



Thể tích hộp đạt giá trị lớn nhất tại $x=5(cm)$.

d) Thể tích hộp đạt giá trị lớn nhất bằng $V(5)=2000\ \left(cm^3\right)$.

Câu 44: Một tấm nhôm hình vuông cạnh $120cm$. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(cm)$, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp.



a) Thể tích khối hộp nhận được khi tính theo x là $V=x(120-2x)^2$.

b) Khi $x=10cm$ thì thể tích của khối hộp nhận được là $1\left(m^3\right)$.

c) Để hộp nhận được có thể tích lớn nhất thì $x=20(cm)$.

d) Hộp nhận được có thể tích lớn nhất là $128\left(dm^3\right)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Điều kiện: $0<x<60$ ta có $V=h.B=x(120-2x)^2$.

b) Xét hàm số $f(x)=x(120-2x)^2$.

Khi $x=10cm$ thể tích khối hộp nhận được là $V=100000\left(cm^3\right)=0{,}1\left(m^3\right)$.

c) Với $x \in (0;60)$ ta có: $f'(x) = 12x^2 - 960x + 14400 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 60\,(l) \\ x = 20 \end{array}\right.$.

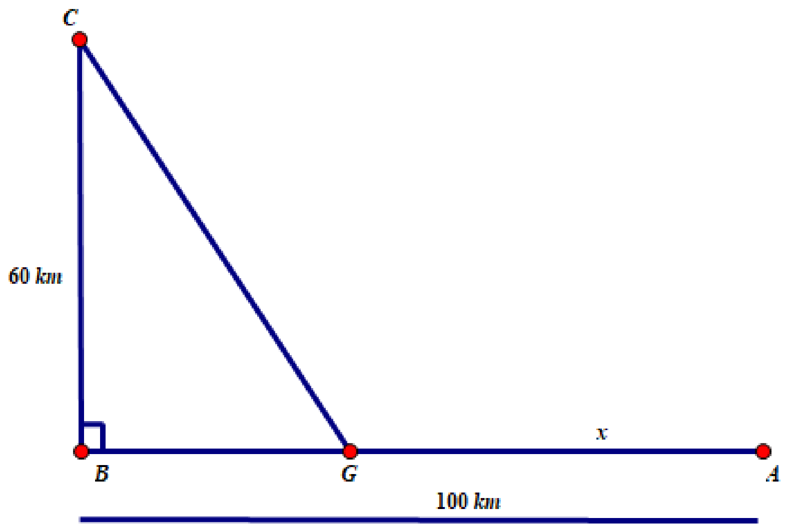
Bảng biến thiên

x	0		20		60
$f'(x)$		+	0	−	0
$f(x)$	0	↗	128000	↘	0

Suy ra V đạt giá trị lớn nhất khi $x = 20\,(cm)$.

d) $V_{\max} = 128000\,(cm^3) = 128\,(dm^3)$

Câu 45: Đường dây điện $110KV$ kéo từ trạm phát (điểm A) trong đất liền ra Côn Đảo (điểm C). Biết $BC = 60km$, $AB = 100km$, góc $\widehat{ABC} = 90°$, như hình vẽ. Mỗi km dây điện dưới nước chi phí là $5000USD$, chi phí cho mỗi km dây điện trên bờ là $3000USD$. Đặt $x = AG$.



a) Khi $x = 20\,km$ thì đường dây điện nối từ C về G dài $100km$.

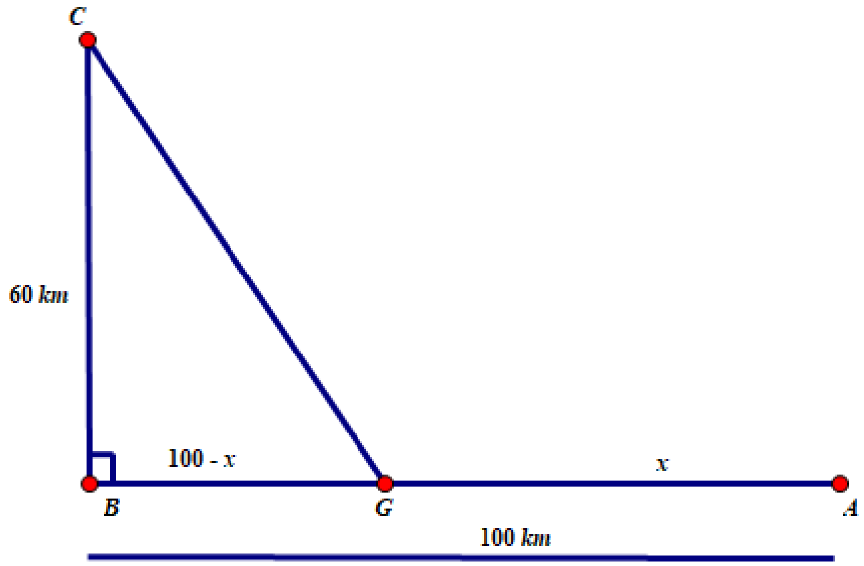
b) Khi $x = 20\,km$ thì tổng chi phí mắc điện là $560.000USD$.

c) Tổng chi phí mắc điện nhỏ nhất khi $x = 50km$.

d) Tổng chi phí mắc điện nhỏ nhất là $540.000USD$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng



a) Có $AG = x \Rightarrow BG = 100 - x$ với $0 \le x \le 100$.

Xét tam giác CBG vuông tại B có $CG = \sqrt{CB^2 + BG^2} = \sqrt{3600 + (100-x)^2}$.

Khi $x = 20\,km \Rightarrow CG = 100\,km$.

b) Chi phí tiền mắc điện là $f(x) = 3000x + 5000.\sqrt{3600 + (100-x)^2}$

Khi $x = 20\,km \Rightarrow CG = 100\,km$ và tổng chi phí mắc điện là $T = f(20) = 560.000\,USD$.

c) Để chi phí mắc điện ít nhất thì $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $f'(x) = 3000 - 5000\dfrac{(100-x)}{\sqrt{3600 + (100-x)^2}}$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3000 = 5000\dfrac{(100-x)}{\sqrt{3600+(100-x)^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 55 \\ x = 145(l) \end{array}\right.$.

Ta có

$f(0) = 583095{,}1895\text{USD}$

$f(55) = 540.000\,USD$

$f(100) = 600.000\text{USD}$

Vậy chi phí mắc điện nhỏ nhất khi $x = 55km$.

d) chi phí mắc điện nhỏ nhất là $540.000\,USD$

CHƯƠNG I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

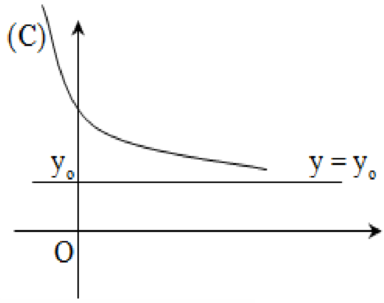
BÀI 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

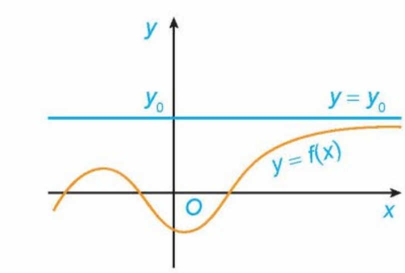
I LÝ THUYẾT.

I. Đường tiệm cận ngang

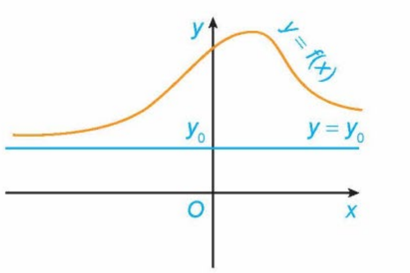
Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có xác định trên một khoảng vô hạn là khoảng có một trong các dạng $(a,+\infty)$; $(-\infty,a)$; $(-\infty,+\infty)$.Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là **đường TCN** (hay **TCN**) của đồ thị nếu thỏa mãn ít nhất một trong các điều kiện sau:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y_0$





Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to +\infty$).



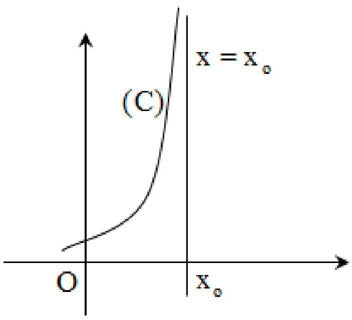
Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to -\infty$).

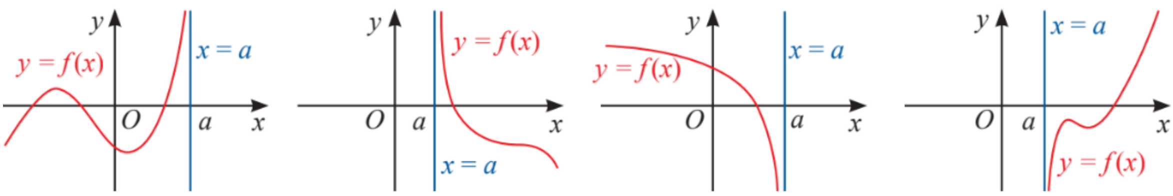
II. Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là **đường tiệm cận đứng** (**TCĐ**) của đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ nếu thỏa mãn ít nhất một trong các điều kiện sau:

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$





a) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ c) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ d) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

☞ **Lưu ý:**

i) Hàm $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $ac\neq 0$ có tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$; tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$.

ii) Hàm $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ với $f(x)$, $g(x)$ là những hàm đa thức

+) Nếu bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu thì có tiệm cận ngang $y=0$.

+) Nếu bậc tử bằng bậc mẫu thì có tiệm cận ngang $y=\dfrac{a_n}{b_n}$ với a_n, b_n là hệ số của lũy thừa cao nhất trên tử và dưới mẫu.

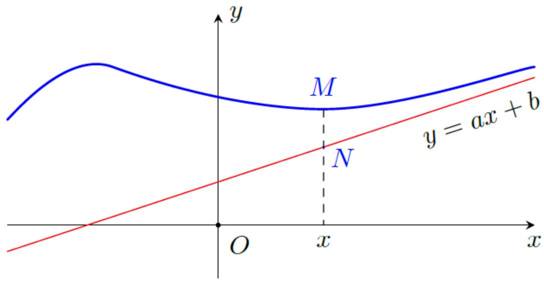
+) Nếu bậc tử lớn hơn bậc mẫu thì không có tiệm cận ngang.

+) $x=x_0$ là tiệm cận đứng $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x_0)=0; f(x_0)\neq 0 \\ \begin{cases} g(x_0)=f(x_0)=0 \\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty \end{cases}\end{array}\right.$.

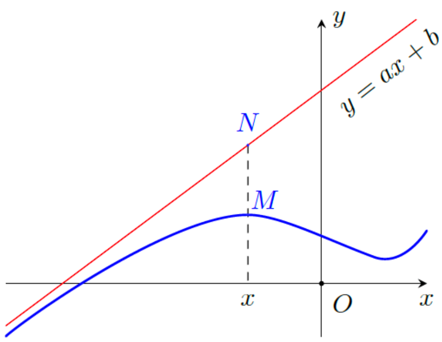
III. Đường tiệm cận xiên

Đường thẳng $y=ax+b$ được gọi là một đường **tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$.

Đường thẳng $y=ax+b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$ được minh họa như sau



Hình 16a



Hình 16b

Để tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số ta cần tính hệ số a,b trong phương trình của đường tiệm cận xiên $y=ax+b$ theo công thức như sau

+ $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]$ hoặc $a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]$

+ Khi $a=0$ thì đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=b$.

HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1: Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N\left(x\right) = \dfrac{50x}{x+4}$ $\left(x \ge 0\right)$ bộ phận mỗi ngày sau x ngày đào tạo. Xem $y = N\left(x\right)$ là một hàm số xác định trên $\left[0;+\infty\right)$, khi đó tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

Câu 2: Người ta ngọt hóa nước hồ bằng cách bơm nước ngọt vào hồ và biểu thức $C\left(t\right) = \dfrac{4000}{400+3t}$ (gam /lít) biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm. Khi thời gian đủ lớn nồng độ muối trong bể bằng

Câu 3: Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số $F\left(x\right) = 60000 + 250x$. Gọi $\overline{F}\left(x\right)$ là hàm số biểu thị chi phí trung bình (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm $(x \ge 0)$, khi đó tiệm cận ngang của đồ thị hàm số bằng

Câu 4: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f\left(t\right) = \dfrac{26t+10}{t+5}$; $f\left(t\right)$ được tính bằng nghìn người (Nguồn: Giai tich 12 nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020). Xem $f\left(t\right)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $\left[0;+\infty\right)$. Đồ thị hàm số $y = f\left(t\right)$ có đường tiệm cận ngang là $y = a$. Giá trị của a là bao nhiêu?

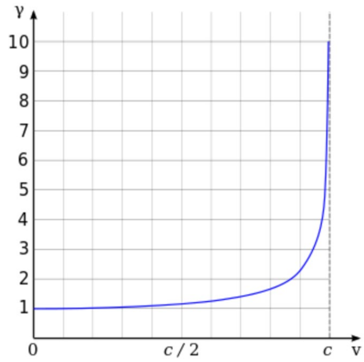
Câu 5: Một công ty chuyên sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là: $C\left(x\right) = 2x + 50$ (triệu đồng), khi đó $G\left(x\right) = \dfrac{C\left(x\right)}{x}$ là chi phí sản xuất cho mỗi sản phẩm. Xem $G\left(x\right)$ là một hàm số xác định trên $\left[0;+\infty\right)$, số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $G\left(x\right)$ là

Câu 6: Phương trình chuyển động của một vật được xác định bởi công thức $S(t) = \dfrac{4t}{t+3}$ với t là thời gian mà vật chuyển động. Xem $y = S(t)$ là một hàm số xác định trên $\left[0;+\infty\right)$, khi đó tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

Câu 7: Một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử thống kê được rằng trung bình một tổ sản xuất với x người thì số sản phẩm sản xuất được trong một thời gian cố định được tính bằng công thức $P(x) = \dfrac{5000x}{4x+25}$. Xem $y = P(x)$ là một hàm số xác định trên $\left[0;+\infty\right)$, khi đó tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

Câu 8: Số lượng sản phẩm của công ty bán được trong x (tháng) được tính bởi công thức $S(x) = 300\left(2 + \dfrac{4}{x+2}\right)$ với $x \ge 1$. Xem $y = S(x)$ là một hàm số xác định trên $\left[1;+\infty\right)$, khi đó tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

Câu 9: Một ứng dụng của hàm số trong vật lý là hệ số tương đối tính Lorentz được cho bởi công thức $\gamma\left(v\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$, với v là vận tốc tương đối giữa các hệ quy chiếu quán tính, c là tốc độ ánh sáng trong chân không. Hàm này được sử dụng trong thuyết tương đối đặc biệt của Einstein để mô tả các hiệu ứng tương đối tính có đồ thị trông như thế này:



Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là:

Câu 10: Dân số P (ngàn người) của một khu nghỉ dưỡng được cho bởi hàm số $P(t)=\dfrac{400t}{2t^2+7}, t\ge 0$, với t là thời gian tính theo tháng. Tìm tiệm cận ngang đồ thị hàm số $y=P(t)$.

Câu 11: Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(x)=\dfrac{50x}{x+4}$ $(x\ge 0)$ bộ phận mỗi ngày sau x ngày đào tạo. Xem $y=N(x)$ là một hàm số xác định trên $[0;+\infty)$, khi số ngày đào tạo tăng lên, hãy tính số bộ phận một nhân viên lắp ráp tối đa không vượt quá bao nhiêu?

Câu 12: Một bể chứa 1000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 20 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 30 lít/phút.

(*Nguồn: internet.* Hình ảnh mang tính chất minh hoạ)

a) Sau 20 phút, nồng độ muối trong bể bằng bao nhiêu (gam/lít)? Làm tròn đến hàng phần trăm.
b) Sau t phút, nồng độ muối trong bể bằng bao nhiêu (gam/lít)? Tính theo t.
c) Nếu cứ bơm liên tục thì nồng độ muối trong bể như thế nào?

Câu 13: Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số $F(x)=60000+250x$. Gọi $\overline{F}(x)$ là hàm số biểu thị chi phí trung bình (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm $(x\ge 0)$, khi đó, hãy tính chi phí trung bình tối đa để sản xuất một sản phẩm.

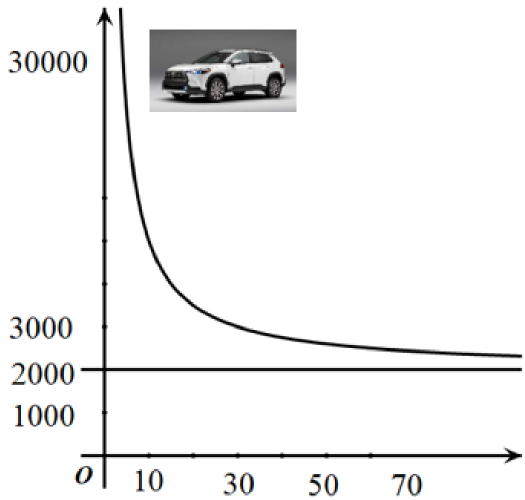
Câu 14: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t)=\dfrac{26t+10}{t+5}$; $f(t)$ được tính bằng nghìn người (Nguồn: Giai tich 12 nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020). Khi đó, số dân tối đa của thị trấn không vượt quá bao nhiêu?

Câu 15: Một công ty chuyên sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là: $C(x) = 2x + 50$ (triệu đồng), khi đó $G(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ là chi phí sản xuất cho mỗi sản phẩm. Khi đó, chi phí sản xuất tối đa cho mỗi sản phẩm không vượt quá bao nhiêu?

Câu 16: Một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử thống kê được rằng trung bình một tổ sản xuất với x người thì số sản phẩm sản xuất được trong một thời gian cố định được tính bằng công thức $P(x) = \dfrac{5000x}{4x+25}$. Hãy tìm số sản phẩm sản xuất được tối đa khi số người tham gia là rất lớn?

Câu 17: Số lượng sản phẩm của công ty bán được trong x (tháng) được tính bởi công thức $S(x) = 300\left(2 + \dfrac{4}{x+2}\right)$ với $x \geq 1$. Xem $y = S(x)$ là một hàm số xác định trên $[1; +\infty)$. Khi đó, hãy tính xem số lượng sản phẩm của công ty bán được trong thời gian dài không thể thấp hơn bao nhiêu sản phẩm?

Câu 18: Một chiếc xe ô tô mới mua có giá 30000 USD. Sau thời gian t (năm), người ta xác định giá trị của xe ô tô đó là $f(t) = \dfrac{30000 + 2000t}{t}$ (USD).

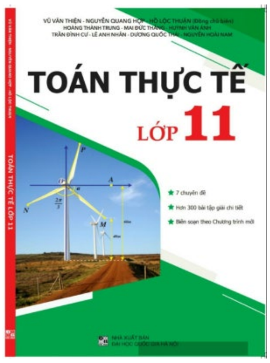


a) Sau 15 năm, giá trị của xe ô tô đó bằng bao nhiêu (USD)?

b) Khi thời gian tăng lên, hỏi giá trị của xe ô tô đó ngày càng bằng bao nhiêu?

Câu 19: Số lượng xe máy điện bán được của một cửa hàng bán xe máy điện trong địa bàn thành phố Vinh trong tháng thứ x được tính theo công thức $f\left(x\right)=50-\dfrac{30}{2+x}$, trong đó $x\geq 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) Số lượng xe máy điện của cửa hàng được bán ra trong tháng đầu là bao nhiêu?
b) Muốn số lương xe bán ra trong tháng đạt mức từ 45 xe trở lên trong một tháng thì cần sau bao nhiêu tháng?
c) Khi x càng lớn thì số lượng xe bán ra càng tiến gần đến mức bao nhiêu xe một tháng?



Câu 20: Một tác giả muốn xuất bản một cuốn sách Toán học. Biết phí xuất bản là 7 triệu đồng và giá tiền in mỗi cuốn sách là 50000 đồng. Gọi $t\left(t\geq 1\right)$ là số cuốn sách sẽ in và $f\left(t\right)$ (Đơn vị nghìn đồng) là chi phí trung bình của mỗi cuốn sách.
Khi đó, chi phí trung bình của mỗi cuốn sách thấp nhất càng gần nhưng không thể nhỏ hơn bao nhiêu ?

Câu 21: Tại một công ty sản xuất đồ chơi an toàn cho trẻ em, công ty phải chi $40000USD$ để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi A, công ty phải trả $6USD$ cho nguyên liệu ban đầu và nhân công. Gọi $x\left(x\geq 1\right)$ là số đồ chơi A mà công ty đã sản xuất và $P\left(x\right)$ (đơn vị USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi A. Người ta xác định chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi A là $F(x)=\dfrac{P(x)}{x}$. Xem $F\left(x\right)$ là hàm số theo x xác định trên nửa khoảng $\left[1;+\infty\right)$. Khi đó, chi phí trung bình của mỗi đồ chơi A thấp nhất càng gần nhưng không thể nhỏ hơn bao nhiêu ?

Câu 22: Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước lượng chi phí cần bỏ ra là $C\left(x\right)=\dfrac{400x+10}{100-x}$ (triệu đồng), $0<x<100$. Để đạt được gần như loại bỏ 100% chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy thì cần chi phí là bao nhiêu ?

Câu 23: Giả sử dân số của một huyện sau t năm kể từ năm 2024 được mô tả bởi hàm số $f(t)=\dfrac{20t+5}{t+2}, t\geq 0$ (nghìn người). Dân số của huyện đó luôn tăng nhưng không vượt quá bao nhiêu nghìn người?

Câu 24: Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước lượng chi phí cần bỏ ra là $C(x)=\dfrac{400x+10}{100-x}$ (triệu đồng), $0<x<100$. Tìm đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(x)$.

Câu 25: Một công ty sản xuất đồ chơi ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x)=2x^2+x+25$ (nghìn đồng). Gọi $f(x)$ là chi phí sản xuất trung bình mỗi sản phẩm. Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$, coi $x\in[0;+\infty)$.

Câu 26: Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là $200\left(m^2\right)$. Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là $x(m)$. Gọi $f(x)$ là chu vi của mảnh vườn. Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$.

Câu 27: Một bể chứa 6000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 25 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Giả sử sau t phút, tỉ số giữa khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể (đơn vị gam/lít) là một hàm $f(t)$. Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$, coi $t\in[0;+\infty)$.

Câu 28: Một mảnh đất hình thang vuông có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ, có diện tích là $S=24\left(m^2\right)$. Gọi $x(m)$ là độ dài đáy nhỏ và $P(x)$ là chu vi mảnh đất đó. Tìm số tiệm cận của $P(x)$.

Câu 29: Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in…) được cho bởi $C(x)=x^2-2000x+10^8$ đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. $M(x)=\dfrac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường nào.

Câu 30: Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong x (tháng) được tính theo công thức $S(x)=200\left(5-\dfrac{9}{2+x}\right)$,trong đó $x\geq 1$

a) Xem $y=S(x)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1;+\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

b) Nêu nhận xét về số lượng sản phẩm được bán của công ty đó trong x (tháng) khi x đủ lớn.

Câu 31: Một bể chứa 1000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 15 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Biết rằng nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là một hàm số $f(t)$, thời gian t tính bằng phút. Phương trình tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ bằng

Câu 32: Một bể chứa $2\,m^3$ nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ không đổi với tốc độ 20 lít/phút. Biết rằng nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là một hàm số $f(t)$, thời gian t tính bằng phút. Biết rằng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ là $y=10$. Nồng độ muối trong bể sau khi bơm được 1 giờ là

Câu 33: Một tác giả muốn xuất bản một cuốn sách Toán học. Biết phí xuất bản là 7 triệu đồng và giá tiền in mỗi cuốn sách là 50 000 đồng. Gọi $t\,(t\geq 1)$ là số cuốn sách sẽ in và $f(t)$ (Đơn vị nghìn đồng) là chi phí trung bình của mỗi cuốn sách. Khi đó, phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ là :

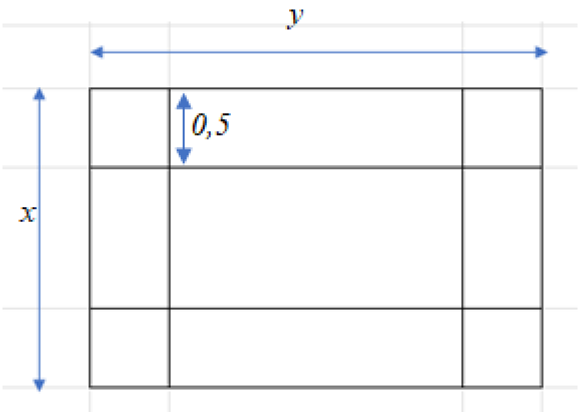
Câu 34: Một bể chứa 1000 lít nước muối có nồng độ 0,1 (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích bể, đơn vị gam/lít). Người ta bơm nước muối có nồng độ 0,2 vào bể với tốc độ 20 lít/phút. Gọi $f(t)$ là nồng độ muối trong bể sau t phút. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ là :

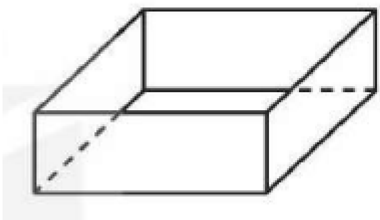
Câu 35: Tại một công ty sản xuất đồ chơi an toàn cho trẻ em, công ty phải chi $40000USD$ để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi A, công ty phải trả $6USD$ cho nguyên liệu ban đầu và nhân công. Gọi $x\,(x\geq 1)$ là số đồ chơi A mà công ty đã sản xuất và $P(x)$ (đơn vị USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi A. Người ta xác định chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi A là $F(x)=\dfrac{P(x)}{x}$. Xem $F(x)$ là hàm số theo x xác định trên nửa khoảng $[1;+\infty)$, phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $F(x)$ là

Câu 36: Một khu vườn hình chữ nhật tiếp giáp với bờ sông được rào lại để làm vườn trồng hoa màu; biết phía bên bờ sông không cần hàng rào. Diện tích khu vườn là $1000\left(m^2\right)$. Hàng rào ở phía song song với sông có chi phí là 36.000 (đồng) trên một m^2, hàng rào ở hai phía còn lại (vuông góc với bờ sông) là 80.000 (đồng) trên một m^2. Bốn trụ ở bốn góc vườn có giá là 250.000 (đồng) mỗi trụ. Gọi x là độ dài một cạnh vuông góc với bờ sông và hàm $C(x)$ mô tả chi phí của dự án. Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=C(x)$ là

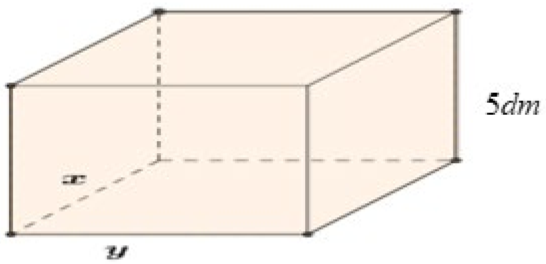
Câu 37: Số lượng sản phẩm bán được của một cửa hàng quần áo trong t (tháng) được cho bởi công thức: $S(t)=200\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{8}{2+t}\right)$ với $t\geq 1$. Xem $y=S(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1;+\infty)$, biết rằng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số có dạng $\dfrac{a}{b}, a,b\in N^*, (a,b)=1$. Tính $P=a-2b$.

Câu 38: Từ một tấm tôn hình chữ nhật có các kích thước là $x(m)$, $y(m)$ với $x>1$ và $y>1$ và diện tích bằng $4m^2$, người ta cắt bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc rồi gập thành một cái thùng dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có chiều cao bằng $0,5m$. Thể tích của thùng là hàm số $V(x)$ trên khoảng $(1;+\infty)$. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{V(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



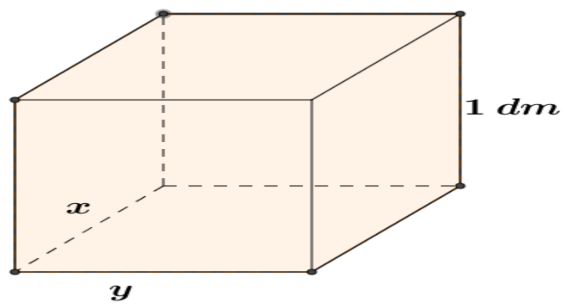


Câu 39: Người ta muốn làm một cái bể dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có thể tích bằng $1m^3$. Chiều cao của bể là $5dm$, các kích thước khác là $x(m)$, $y(m)$ với $x>0$ và $y>0$. Diện tích toàn phần của bể (không kể nắp) là hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $S(x)$ là đường thẳng $y=ax+b$. Tính giá trị của biểu thức $P=a^2+b^2$.



Câu 40: Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x)=150x+900$ (nghìn đồng). Khi sản xuất càng nhiều sản phẩm thì chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm không vượt quá t (nghìn đồng). Tìm giá trị nhỏ nhất của t.

Câu 41: Người ta muốn làm một cái bể dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có thể tích bằng $5m^3$. Chiều cao của bể là $10dm$, các kích thước khác là $x(m)$, $y(m)$ với $x>0$ và $y>0$. Diện tích toàn phần của bể (không kể nắp) là hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $S(x)$ là đường thẳng $y=ax+b$. Tính giá trị của biểu thức $P=a^2+b^2$.



Câu 42: Trong 200 gam dung dịch muối nồng độ 15%, giả sử thêm vào dung dịch x (gam) muối tinh khiết và được dung dịch có nồng độ $f(x)$%.

a) Hàm số $f(x)=\dfrac{100(x+200)}{x+30}$.

b) Đạo hàm của hàm số luôn nhận giá trị âm trên khoảng (0; + ∞).

c) Thêm càng nhiều gam muối tinh khiết thì nồng độ phần trăm càng tăng và không vượt quá 100%.

d) Giới hạn của $f(x)$ khi x dần đến dương vô cực bằng 100.

Câu 43: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t)=\dfrac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người) (*Nguồn: Giải tích 12 nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020*). Xem $y=f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0;+\infty)$.

a) Dân số của thị trấn đó vào năm 2025 là 34 nghìn người.

b) Đạo hàm của hàm số luôn nhận giá trị âm trên khoảng (0; + ∞).

c) Đồ thị hàm số $y=f(t)$ có đường tiệm cận ngang là $y=26$.

d) Dân số của thị trấn đó không thể vượt quá 26 nghìn người.

Câu 44: Một bể chứa 3000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 25 gam muối cho một lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Xét tính đúng sai của mỗi khẳng định sau

a) Sau một giờ bơm thì khối lượng muối trong bể là $30(kg)$

b) Thể tích lượng nước trong bể sau thời gian t phút là $3000+20t$ (lít)

c) Giả sử nồng độ muối trong nước trong bể sau t phút được được xác định bởi một hàm số $f(t)$ trên $[0;+\infty)$ (gam/ lít) thì đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(t)$ là đường thẳng $y=20$.

d) Khi t càng lớn thì nồng độ muối trong bể tiến gần đến 25 gam/lít.

Câu 45: Số lượng xe máy điện bán được của một cửa hàng bán xe máy điện trong địa bàn thành phố Vinh trong tháng thứ x được tính theo công thức $f(x)=50-\dfrac{30}{2+x}$, trong đó $x\geq 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) Số lượng xe máy điện của cửa hàng được bán ra trong tháng đầu là 40 (xe)

b) Từ tháng thứ ba trở đi thì số lượng xe bán ra trong tháng đạt mức lớn hơn hoặc bằng 45 xe/tháng

c) Nếu xem $y=f(x)$ là một hàm số xác định trên $[1;+\infty)$ thì đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là $y=0$

d) Khi x càng lớn thì số lượng xe bán ra càng tiến gần đến mức 50 xe/tháng

Câu 46: Một bể chứa 5000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 30 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 25 lít/phút.

a) Sau 10 phút bơm số lượng muối trong bể là 300 gam.

b) Nếu bơm trong một giờ đồng hồ thì số lượng muối trong bể không vượt quá 2 kg.

c) Nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít là $f\left(t\right)=\dfrac{30t}{200+t}$.

d) Khi t đủ lớn thì nồng độ muối trong bể sẽ tiến gần đến mức 30 (gam/lít).

Câu 47: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f\left(t\right)=\dfrac{26t+10}{t+5}$ ($f\left(t\right)$ được tính bằng nghìn người) (*nguồn: Giải tích 12 nâng cao, NXBGD Việt Na, 2000).*

a) số dân của thi trấn đó sau 10 năm là 18.000 người.

b) Số dân thị trấn đó vào năm 2025 là 24.000 người.

c) Xem $f\left(t\right)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $\left[0;+\infty\right)$. Đồ thị hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{26t+10}{t+5}$ có tiệm cận ngang là $y=26$.

d) Đạo hàm của hàm số $y=f\left(t\right)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Vào năm 1990 thì tốc độ tăng dân số là $0,129$ nghìn người trên /năm.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

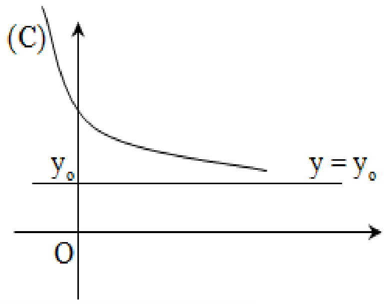
BÀI 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

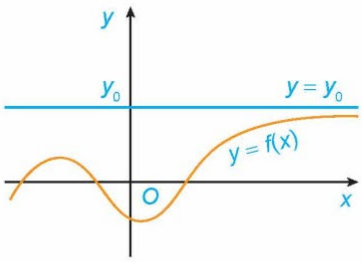
I LÝ THUYẾT.

I. Đường tiệm cận ngang

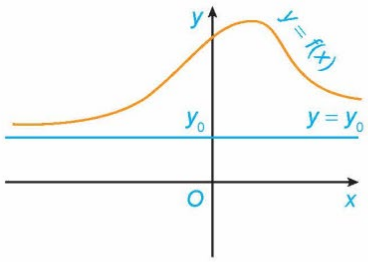
Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có xác định trên một khoảng vô hạn là khoảng có một trong các dạng $(a,+\infty)$; $(-\infty,a)$; $(-\infty,+\infty)$. Đường thẳng $y=y_0$ được gọi là **đường TCN** (hay **TCN**) của đồ thị nếu thỏa mãn ít nhất một trong các điều kiện sau:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=y_0$





Đường thẳng $y=y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x\to+\infty$).



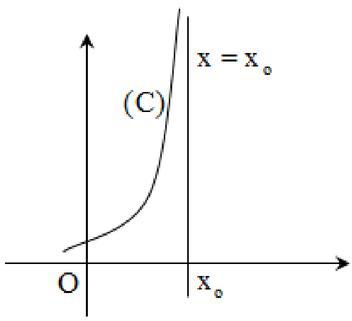
Đường thẳng $y=y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x\to-\infty$).

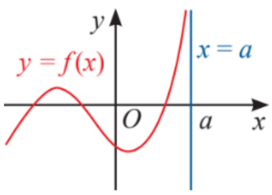
II. Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x=x_0$ được gọi là **đường tiệm cận đứng** (**TCĐ**) của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nếu thỏa mãn ít nhất một trong các điều kiện sau:

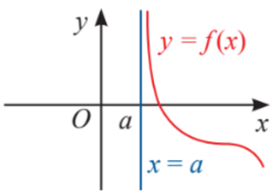
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$

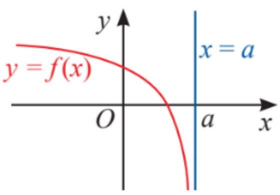




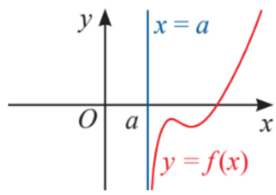
a) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$



b) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$



c) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$



d) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

☞ **Lưu ý:**

i) Hàm $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $ac\neq 0$ có tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$; tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$.

ii) Hàm $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ với $f(x),\ g(x)$ là những hàm đa thức

+) Nếu bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu thì có tiệm cận ngang $y=0$.

+) Nếu bậc tử bằng bậc mẫu thì có tiệm cận ngang $y=\dfrac{a_n}{b_n}$ với $a_n,\ b_n$ là hệ số của lũy thừa cao nhất trên tử và dưới mẫu.

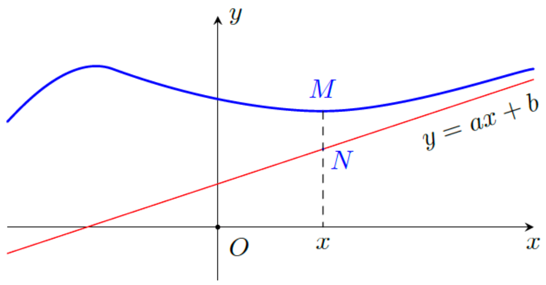
+) Nếu bậc tử lớn hơn bậc mẫu thì không có tiệm cận ngang.

+) $x=x_0$ là tiệm cận đứng $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x_0)=0;f(x_0)\neq 0 \\ \begin{cases} g(x_0)=f(x_0)=0 \\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty \end{cases}\end{array}\right.$.

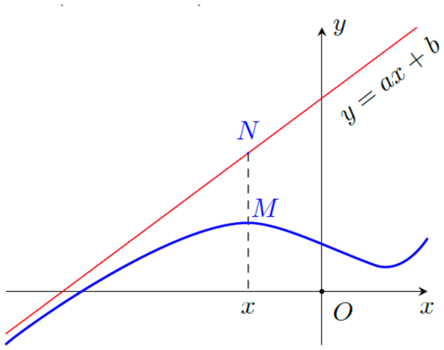
III. Đường tiệm cận xiên

Đường thẳng $y=ax+b$ được gọi là một đường **tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$.

Đường thẳng $y=ax+b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$ được minh họa như sau



Hình 16a



Hình 16b

Để tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số ta cần tính hệ số a,b trong phương trình của đường tiệm cận xiên $y=ax+b$ theo công thức như sau

+ $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]$ hoặc $a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]$

+ Khi $a=0$ thì đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=b$.

HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1: Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N\left(x\right)=\dfrac{50x}{x+4}$ $\left(x\geq 0\right)$ bộ phận mỗi ngày sau x ngày đào tạo. Xem $y=N\left(x\right)$ là một hàm số xác định trên $\left[0;+\infty\right)$, khi đó tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}N\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{50x}{x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{50x}{x\left(1+\dfrac{4}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{50}{1+\dfrac{4}{x}}=50$.

Câu 2: Người ta ngọt hóa nước hồ bằng cách bơm nước ngọt vào hồ và biểu thức $C\left(t\right)=\dfrac{4000}{400+3t}$ (gam /lít) biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm. Khi thời gian đủ lớn nồng độ muối trong bể bằng

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{t\to+\infty}C(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{4000}{4000+3t}=0$

Câu 3: Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số $F\left(x\right)=60000+250x$. Gọi $\overline{F}\left(x\right)$ là hàm số biểu thị chi phí trung bình (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm $(x\geq 0)$, khi đó tiệm cận ngang của đồ thị hàm số bằng

Lời giải

Chi phí trung bình để sản xuất x sản phẩm là $\overline{F}\left(x\right)=\dfrac{60000+250x}{x}$ (nghìn đồng).

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\overline{F}\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{60000+250x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{60000}{x}+250\right)=250$.

Câu 4: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f\left(t\right)=\dfrac{26t+10}{t+5}$; $f\left(t\right)$ được tính bằng nghìn người (Nguồn: Giai tich 12 nâng cao, NXBGD Viêt Nam, 2020). Xem $f\left(t\right)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $\left[0;+\infty\right)$. Đồ thị hàm số $y=f\left(t\right)$ có đường tiệm cận ngang là $y=a$. Giá trị của a là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{t\to\infty}f\left(t\right)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{26t+10}{t+5}=26$. Nên đồ thị hàm số $f\left(t\right)$ có đường tiệm cận ngang là $y=26$.

Câu 5: Một công ty chuyên sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là: $C(x) = 2x + 50$ (triệu đồng), khi đó $G(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ là chi phí sản xuất cho mỗi sản phẩm. Xem $G(x)$ là một hàm số xác định trên $[0;+\infty)$, số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $G(x)$ là

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} G(t) = 2$. Nên số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $G(t)$ là một.

Câu 6: Phương trình chuyển động của một vật được xác định bởi công thức $S(t) = \dfrac{4t}{t+3}$ với t là thời gian mà vật chuyển động. Xem $y = S(t)$ là một hàm số xác định trên $[0;+\infty)$, khi đó tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{t\to+\infty} S(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{4t}{t+3} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{4}{1+\dfrac{3}{t}} = 4$.

Vậy tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 4$.

Câu 7: Một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử thống kê được rằng trung bình một tổ sản xuất với x người thì số sản phẩm sản xuất được trong một thời gian cố định được tính bằng công thức $P(x) = \dfrac{5000x}{4x+25}$. Xem $y = P(x)$ là một hàm số xác định trên $[0;+\infty)$, khi đó tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5000x}{4x+25} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5000}{4+\dfrac{25}{x}} = 1250$.

Vậy tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 1250$.

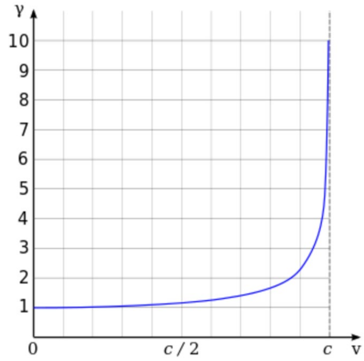
Câu 8: Số lượng sản phẩm của công ty bán được trong x (tháng) được tính bởi công thức $S(x) = 300\left(2 + \dfrac{4}{x+2}\right)$ với $x \geq 1$. Xem $y = S(x)$ là một hàm số xác định trên $[1;+\infty)$, khi đó tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 300\left(2 + \dfrac{4}{x+2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(600 + \dfrac{\dfrac{1200}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}\right) = 600$.

Vậy tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 600$.

Câu 9: Một ứng dụng của hàm số trong vật lý là hệ số tương đối tính Lorentz được cho bởi công thức $\gamma(v)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, với v là vận tốc tương đối giữa các hệ quy chiếu quán tính, c là tốc độ ánh sáng trong chân không. Hàm này được sử dụng trong thuyết tương đối đặc biệt của Einstein để mô tả các hiệu ứng tương đối tính có đồ thị trông như thế này:



Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là:

Lời giải

$\lim\limits_{v\to c}\gamma(v)=\lim\limits_{v\to c}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=+\infty$ nên $x=c$ là tiệm cận đứng của đồ thị.

Câu 10: Dân số P (ngàn người) của một khu nghỉ dưỡng được cho bởi hàm số $P(t)=\dfrac{400t}{2t^2+7}, t\ge 0$, với t là thời gian tính theo tháng. Tìm tiệm cận ngang đồ thị hàm số $y=P(t)$.

Lời giải

$\lim\limits_{t\to+\infty}P(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\dfrac{400}{t}}{2+\dfrac{7}{t^2}}=0$ nên $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị.

Ta có $\lim\limits_{t\to+\infty}P(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{400t}{2t^2+7}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\dfrac{400}{t}}{2+\dfrac{7}{t^2}}=\dfrac{0}{2}=0$. Do vậy tiệm cận ngang đồ thị hàm số $y=P(t)$ là đường thẳng $y=0$.

Câu 11: Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(x)=\dfrac{50x}{x+4}$ $(x\ge 0)$ bộ phận mỗi ngày sau x ngày đào tạo. Xem $y=N(x)$ là một hàm số xác định trên $[0;+\infty)$, khi số ngày đào tạo tăng lên, hãy tính số bộ phận một nhân viên lắp ráp tối đa không vượt quá bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} N\left(x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{50x}{x+4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{50x}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{50}{1+\frac{4}{x}} = 50$.

Câu 12: Một bể chứa 1000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 20 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 30 lít/phút.

(*Nguồn: internet.* Hình ảnh mang tính chất minh hoạ)

a) Sau 20 phút, nồng độ muối trong bể bằng bao nhiêu (gam/lít)? Làm tròn đến hàng phần trăm.
b) Sau t phút, nồng độ muối trong bể bằng bao nhiêu (gam/lít)? Tính theo t.
c) Nếu cứ bơm liên tục thì nồng độ muối trong bể như thế nào?

Lời giải

a) Sau 20 phút, số gam muối trong bể là: $20\times30\times20=12000$ (gam).

Sau 20 phút, số lít nước trong bể là: $1000+30\times20=1600$ (lít).

Sau 20 phút, nồng độ muối trong bể là: $\frac{12000}{1600}=\frac{15}{2}\approx7,5$ (gam/lít).

b) Sau t phút, số gam muối trong bể là: $20\times30t=600t$ (gam).

Sau t phút, số lít nước trong bể là: $1000+30t$ (lít).

Sau t phút, nồng độ muối trong bể là: $f\left(t\right)=\frac{600t}{1000+30t}=\frac{60t}{100+3t}$ (gam/lít).

c) Xét hàm số $f\left(t\right)=\frac{60t}{100+3t}$ Với t có đơn vị là phút và $t\geq0$.

Ta có: $\lim\limits_{t\to+\infty} f\left(t\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{60t}{100+3t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{60}{\frac{100}{t}+3}=20$.

Nên tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f\left(t\right)$ là $y=20$.

Vậy nồng độ muối trong bể luôn nhỏ hơn và ngày càng gần 20 (gam/lít).

Câu 13: Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số $F\left(x\right) = 60000 + 250x$. Gọi $\overline{F}\left(x\right)$ là hàm số biểu thị chi phí trung bình (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm $(x \geq 0)$, khi đó, hãy tính chi phí trung bình tối đa để sản xuất một sản phẩm.

Lời giải

Chi phí trung bình để sản xuất x sản phẩm là $\overline{F}(x)=\dfrac{60000+250x}{x}$ (nghìn đồng).

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\overline{F}(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{60000+250x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{60000}{x}+250\right)=250$.

Vậy chi phí trung bình tối đa để sản xuất một sản phẩm là không quá 250000 đồng

Câu 14: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t)=\dfrac{26t+10}{t+5}$; $f(t)$ được tính bằng nghìn người (Nguồn: Giai tich 12 nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020). Khi đó, số dân tối đa của thị trấn không vượt quá bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{26t+10}{t+5}=26$. Vậy số dân tối đa của thị trấn không vượt quá 26 nghìn người.

Câu 15: Một công ty chuyên sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là: $C(x)=2x+50$ (triệu đồng), khi đó $G(x)=\dfrac{C(x)}{x}$ là chi phí sản xuất cho mỗi sản phẩm. Khi đó, chi phí sản xuất tối đa cho mỗi sản phẩm không vượt quá bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}G(t)=2$. Nên số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $G(t)$ là 2. Vậy chi phí sản xuất tối đa cho mỗi sản phẩm không vượt quá 2 triệu đồng.

Câu 16: Một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử thống kê được rằng trung bình một tổ sản xuất với x người thì số sản phẩm sản xuất được trong một thời gian cố định được tính bằng công thức $P(x)=\dfrac{5000x}{4x+25}$. Hãy tìm số sản phẩm sản xuất được tối đa khi số người tham gia là rất lớn?

Lời giải

Ta có: $P'(x)=\dfrac{5000.25}{(4x+25)^2}>0\quad\forall x>0$, suy ra hàm số $P(x)=\dfrac{5000x}{4x+25}$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Ta lại có: $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5000x}{4x+25} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5000}{4+\dfrac{25}{x}} = 1250$.

Suy ra tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 1250$.

Vậy số sản phẩm sản xuất được tối đa khi số người tham gia là rất lớn không vượt quá 1250.

Câu 17: Số lượng sản phẩm của công ty bán được trong x (tháng) được tính bởi công thức $S(x) = 300\left(2+\dfrac{4}{x+2}\right)$ với $x \ge 1$. Xem $y = S(x)$ là một hàm số xác định trên $[1;+\infty)$. Khi đó, hãy tính xem số lượng sản phẩm của công ty bán được trong thời gian dài không thể thấp hơn bao nhiêu sản phẩm?

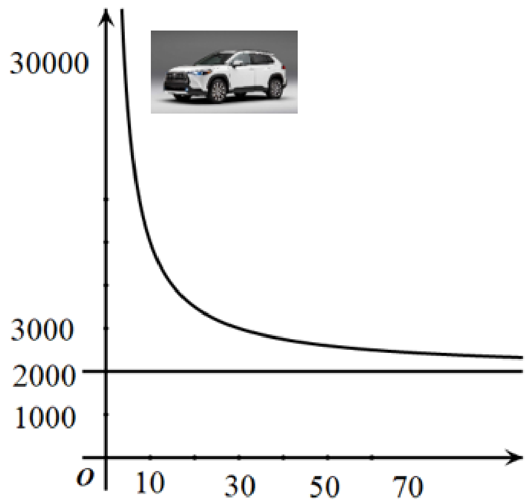
Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 300\left(2+\dfrac{4}{x+2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(600+\dfrac{\dfrac{1200}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}\right) = 600$.

Suy ra, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 600$.

Vậy số lượng sản phẩm của công ty bán được trong thời gian dài không thể thấp hơn 600 sản phẩm.

Câu 18: Một chiếc xe ô tô mới mua có giá 30000 USD**.** Sau thời gian t (năm), người ta xác định giá trị của xe ô tô đó là $f(t) = \dfrac{30000+2000t}{t}$ (USD).



a) Sau 15 năm, giá trị của xe ô tô đó bằng bao nhiêu (USD)?

b) Khi thời gian tăng lên, hỏi giá trị của xe ô tô đó ngày càng bằng bao nhiêu?

Lời giải

a) Ta có: $f(t) = \dfrac{30000+2000t}{t}$.

Sau 15 năm thì $t = 15$. Nên $f(15) = \dfrac{30000+2000\times 15}{15} = 4000$.

Vậy sau 15 năm, giá trị của xe ô tô đó bằng 4000 (USD).

b) Ta có:

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty}\frac{30000+2000t}{t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{30000}{t}+2000\right) = 2000.$$

Suy ra, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ là $y=2000$.

Vậy khi thời gian tăng lên, giá trị của xe ô tô đó ngày càng giảm về và gần bằng 2000 USD.

Câu 19: Số lượng xe máy điện bán được của một cửa hàng bán xe máy điện trong địa bàn thành phố Vinh trong tháng thứ x được tính theo công thức $f(x)=50-\dfrac{30}{2+x}$, trong đó $x\ge 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) Số lượng xe máy điện của cửa hàng được bán ra trong tháng đầu là bao nhiêu?

b) Muốn số lương xe bán ra trong tháng đạt mức từ 45 xe trở lên trong một tháng thì cần sau bao nhiêu tháng?

c) Khi x càng lớn thì số lượng xe bán ra càng tiến gần đến mức bao nhiêu xe một tháng?

Lời giải

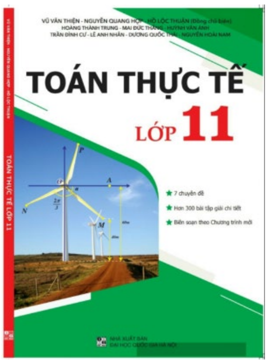
a) Số lượng xe máy điện của cửa hàng được bán ra trong tháng đầu là $f(1)=50-\dfrac{30}{2+1}=40$ (xe)

b) Ta có: $f(x)\ge 45 \Leftrightarrow \dfrac{30}{2+x}\le 5 \Leftrightarrow 2+x\ge 6 \Leftrightarrow x\ge 4 \Rightarrow$ để bán được từ 45 xe trở lên trong mỗi tháng thì phải từ tháng thứ tư trở đi.

c) Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(50-\dfrac{30}{2+x}\right)=50 \Rightarrow$ Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là đường thẳng $y=50$.

Vì tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là đường thẳng $y=50$ nên khi x càng lớn thì số lượng xe bán ra càng tiến gần đến mức 50 xe/tháng.

Câu 20: Một tác giả muốn xuất bản một cuốn sách Toán học. Biết phí xuất bản là 7 triệu đồng và giá tiền in mỗi cuốn sách là 50000 đồng. Gọi $t\,(t\ge 1)$ là số cuốn sách sẽ in và $f(t)$ (Đơn vị nghìn đồng) là chi phí trung bình của mỗi cuốn sách.



Khi đó, chi phí trung bình của mỗi cuốn sách thấp nhất càng gần nhưng không thể nhỏ hơn bao nhiêu ?

Lời giải

Tổng số tiền cần bỏ ra để in t cuốn sách là : $7000+50t$ (nghìn đồng).

Chi phí trung bình của mỗi cuốn sách là $f\left(t\right)=\dfrac{7000+50t}{t}$.

Ta có $\lim\limits_{t\to+\infty} f\left(t\right)=50$.

Suy ra $y=50$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f\left(t\right)$. Vậy chi phí trung bình của mỗi cuốn sách thấp nhất càng gần nhưng không thể thấp hơn 50000 đồng.

Câu 21: Tại một công ty sản xuất đồ chơi an toàn cho trẻ em, công ty phải chi $40000USD$ để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi A, công ty phải trả $6USD$ cho nguyên liệu ban đầu và nhân công. Gọi $x\left(x\ge 1\right)$ là số đồ chơi A mà công ty đã sản xuất và $P\left(x\right)$ (đơn vị USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi A. Người ta xác định chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi A là $F(x)=\dfrac{P(x)}{x}$. Xem $F\left(x\right)$ là hàm số theo x xác định trên nửa khoảng $\left[1;+\infty\right)$. Khi đó, chi phí trung bình của mỗi đồ chơi A thấp nhất càng gần nhưng không thể nhỏ hơn bao nhiêu ?

Lời giải

Một đồ chơi A công ty phải trả $6USD$ nên x đồ chơi A công ty phải trả $6x\left(USD\right)\left(x>1\right)$.

Khi đó tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi A là: $P\left(x\right)=6x+40000 \Rightarrow F\left(x\right)=\dfrac{P\left(x\right)}{x}=\dfrac{6x+40000}{x}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{6x + 40000}{x}\right) = 6$

Suy ra $y = 6$ là phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $F(x)$. Vậy chi phí trung bình của mỗi đồ chơi A thấp nhất càng gần nhưng không thể nhỏ hơn $6USD$.

Câu 22: Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước lượng chi phí cần bỏ ra là $C(x) = \dfrac{400x + 10}{100 - x}$ (triệu đồng), $0 < x < 100$. Để đạt được gần như loại bỏ 100% chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy thì cần chi phí là bao nhiêu ?

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x \to 100^-} C(x) = \lim\limits_{x \to 100^-} \dfrac{400x + 10}{100 - x} = +\infty$.

Suy ra, đường thẳng $x = 100$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(x)$.

Vậy để đạt được gần như loại bỏ 100% chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy thì cần chi phí là vô cùng lớn và gần như là không thể thực hiện được.

Câu 23: Giả sử dân số của một huyện sau t năm kể từ năm 2024 được mô tả bởi hàm số $f(t) = \dfrac{20t + 5}{t + 2}, t \geq 0$ (nghìn người). Dân số của huyện đó luôn tăng nhưng không vượt quá bao nhiêu nghìn người?

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{20t + 5}{t + 2} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{20 + \frac{5}{t}}{1 + \frac{2}{t}} = 20$.

Vậy dân số của huyện đó không vượt quá 20 (nghìn người).

Câu 24: Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước lượng chi phí cần bỏ ra là $C(x) = \dfrac{400x + 10}{100 - x}$ (triệu đồng), $0 < x < 100$. Tìm đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(x)$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x \to 100^-} C(x) = \lim\limits_{x \to 100^-} \dfrac{400x + 10}{100 - x} = +\infty$.

Vậy đường thẳng $x = 100$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(x)$.

Câu 25: Một công ty sản xuất đồ chơi ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x) = 2x^2 + x + 25$ (nghìn đồng). Gọi $f(x)$ là chi phí sản xuất trung bình mỗi sản phẩm. Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$, coi $x \in [0;+\infty)$.

Lời giải

Chi phí để sản xuất trung bình một sản phẩm là $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 25}{x} = 2x + 1 + \dfrac{25}{x}$ (nghìn đồng).

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - (2x+1)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{25}{x} = 0$.

Vậy đường thẳng $y = 2x + 1$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$.

Câu 26: Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là $200\left(m^2\right)$. Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là $x(m)$. Gọi $f(x)$ là chu vi của mảnh vườn. Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$.

Lời giải

Độ dài một cạnh còn lại của hình chữ nhật là $\dfrac{200}{x}(m)$.

Chu vi của hình chữ nhật là $f(x) = 2\left(x + \dfrac{200}{x}\right) = 2x + \dfrac{400}{x}(m)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - 2x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{400}{x} = 0$.

Vậy đường thẳng $y = 2x$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$

Câu 27: Một bể chứa 6000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 25 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Giả sử sau t phút, tỉ số giữa khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể (đơn vị gam/lít) là một hàm $f(t)$. Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$, coi $t \in [0;+\infty)$.

Lời giải

Sau t phút khối lượng muối trong bể là $25.20.t = 500t$ (gam).

Thể tích của bể sau t phút là $6000 + 20.t$ (lít).

Khi đó $f(t) = \dfrac{500t}{6000 + 20t} = \dfrac{25t}{3000 + t}$ (gam/lít).

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty}\frac{25t}{3000+t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{25}{\dfrac{3000}{t}+1} = 25.$$

Vậy đường thẳng $y = 25$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$.

Câu 28: Một mảnh đất hình thang vuông có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ, có diện tích là $S = 24\left(m^2\right)$. Gọi $x\left(m\right)$ là độ dài đáy nhỏ và $P\left(x\right)$ là chu vi mảnh đất đó. Tìm số tiệm cận của $P\left(x\right)$.

Lời giải

Gọi x là độ dài đáy nhỏ của hình thang $\left(x > 0\right)$. Ta có :

Đáy lớn là $2x$.

Chiều cao của hình thang là $h = \dfrac{2S}{x+2x} = \dfrac{16}{x}$.

Độ dài cạnh còn lại của hình thang là $\sqrt{x^2 + \left(\dfrac{16}{x}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \dfrac{256}{x^2}}$.

Khi đó $P\left(x\right) = x + \dfrac{16}{x} + 2x + \sqrt{x^2 + \dfrac{256}{x^2}} = 3x + \sqrt{x^2 + \dfrac{256}{x^2}} + \dfrac{16}{x}$ (tập xác định $D = \left(0; +\infty\right)$).

Do $\lim\limits_{x \to +\infty} P\left(x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[3x + \sqrt{x^2 + \dfrac{256}{x^2}} + \dfrac{16}{x}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left[3 + \sqrt{1 + \dfrac{256}{x^4}} + \dfrac{16}{x^2}\right] = +\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

+ $\lim\limits_{x \to 0^+} P\left(x\right) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x}\left[3x^2 + \sqrt{x^4 + 256} + 16\right] = +\infty$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là trục Oy

+ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(P\left(x\right) - 4x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + \dfrac{256}{x^2}} - x + \dfrac{16}{x}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{256}{x^2\sqrt{x^2 + \dfrac{256}{x^2}} + x} + \dfrac{16}{x^2}\right] = 0$.

Khi đó đồ thị hàm số có 1 tiệm cận xiên $y = 4x$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Câu 29: Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in…) được cho bởi $C\left(x\right) = x^2 - 2000x + 10^8$ đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. $M\left(x\right) = \dfrac{T\left(x\right)}{x}$ với $T\left(x\right)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M\left(x\right)$ sẽ tiệm cận với đường nào.

Lời giải

Theo giả thiết, ta có:

$T\left(x\right) = C\left(x\right) + 4000x = x^2 + 2000x + 10^8$.

$M\left(x\right) = \dfrac{T\left(x\right)}{x} = x + \dfrac{10^8}{x} + 2000$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(M(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x+\frac{10^8}{x}+2000-(x+2000)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{10^8}{x}\right]=0$$

Khi đó đồ thị hàm số có 1 tiệm cận xiên $y=x+2000$. Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường $y=x+2000$.

Câu 30: Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong x(tháng) được tính theo công thức $S(x)=200\left(5-\frac{9}{2+x}\right)$,trong đó $x\ge 1$

a) Xem $y=S(x)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1;+\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

b) Nêu nhận xét về số lượng sản phẩm được bán của công ty đó trong x(tháng) khi x đủ lớn.

Bài giải

a) Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}S(x)=\lim_{x\to+\infty}200\left(5-\frac{9}{2+x}\right)=1000.$$

Vậy đường thẳng $y=1000$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=S(x)$.

b) Ta có đồ thị hàm số $y=S(x)$ nhận đường thẳng $y=1000$ làm tiệm cận ngang, tức là khi x càng lớn lượng sản phẩm bán ra sẽ tiến gần đến mức 1000(sản phẩm/tháng).

Câu 31: Một bể chứa 1000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 15 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Biết rằng nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là một hàm số $f(t)$, thời gian t tính bằng phút. Phương trình tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ bằng

Lời giải

Sau t phút, ta có khối lượng muối trong bể là $20.15t=300t$ (gam).

Thể tích của lượng nước trong bể sau t phút là $1000+20t$ (lít).

Vậy nồng độ muối sau t phút là $f(t)=\frac{300t}{1000+20t}=\frac{30t}{100+2t}$ (gam/lit)

$\lim_{t\to+\infty}f(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{30t}{100+2t}=15$ nên đồ thị hàm số $y=f(t)$ có phương trình tiệm cận ngang là $y=15$.

Câu 32: Một bể chứa $2\,m^3$ nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ không đổi với tốc độ 20 lít/phút. Biết rằng nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là một hàm số $f(t)$, thời gian t tính bằng phút. Biết rằng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ là $y=10$. Nồng độ muối trong bể sau khi bơm được 1 giờ là

Lời giải

Giả sử nước muối bơm vào có nồng độ a gam/lít.

Sau t phút, ta có khối lượng muối trong bể là $20at$ (gam).

Thể tích của lượng nước trong bể sau t phút là $2000+20t$ (lít).

Vậy nồng độ muối sau t phút là $f\left(t\right)=\dfrac{20at}{2000+20t}=\dfrac{at}{100+t}$ (gam/lit)

$\lim\limits_{t\to+\infty} f\left(t\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{at}{100+t}=a$ nên đồ thị hàm số $y=f\left(t\right)$ có phương trình tiệm cận ngang là $y=a=10$.

Từ đó hàm số nồng độ muối trong bể sau khi bơm được t phút là $f\left(t\right)=\dfrac{10t}{100+t}$.

Nồng độ muối sau 1 giờ bơm là $f\left(60\right)=\dfrac{10.60}{100+60}=3,75$ gam/ lít.

Câu 33: Một tác giả muốn xuất bản một cuốn sách Toán học. Biết phí xuất bản là 7 triệu đồng và giá tiền in mỗi cuốn sách là 50 000 đồng. Gọi $t\left(t\ge 1\right)$ là số cuốn sách sẽ in và $f\left(t\right)$ (Đơn vị nghìn đồng) là chi phí trung bình của mỗi cuốn sách. Khi đó, phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f\left(t\right)$ là :

Lời giải

Tổng số tiền cần bỏ ra để in t cuốn sách là : $7000+50t$ (nghìn đồng).

Chi phí trung bình của mỗi cuốn sách là $f\left(t\right)=\dfrac{7000+50t}{t}$.

Ta có $\lim\limits_{t\to+\infty} f\left(t\right)=50$.

Vậy $y=50$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f\left(t\right)$.

Câu 34: Một bể chứa 1000 lít nước muối có nồng độ 0,1 (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích bể, đơn vị gam/lít). Người ta bơm nước muối có nồng độ 0,2 vào bể với tốc độ 20 lít/phút. Gọi $f\left(t\right)$ là nồng độ muối trong bể sau t phút. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f\left(t\right)$ là :

Lời giải

Khối lượng muối có trong bể trong t phút là $1000\cdot 0,1+20\cdot 0,2t=100+4t$.

Nồng độ muối trong bể sau t phút là $\dfrac{100+4t}{1000+20t}=\dfrac{25+t}{250+5t}$.

Ta có $\lim\limits_{t\to+\infty} f\left(t\right)=0,2$.

Vậy $y=0,2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f\left(t\right)$.

Câu 35: Tại một công ty sản xuất đồ chơi an toàn cho trẻ em, công ty phải chi $40000USD$ để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi A, công ty phải trả $6USD$ cho nguyên liệu ban đầu và nhân công. Gọi $x\left(x\ge 1\right)$ là số đồ chơi A mà công ty đã sản xuất và $P(x)$ (đơn vị USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi A. Người ta xác định chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi A là $F(x)=\frac{P(x)}{x}$. Xem $F(x)$ là hàm số theo x xác định trên nửa khoảng $[1;+\infty)$, phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $F(x)$ là

Lời giải

Một đồ chơi A công ty phải trả $6USD$ nên x đồ chơi A công ty phải trả $6x(USD)(x>1)$.

Khi đó tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi A là

$$P(x)=6x+40000 \Rightarrow F(x)=\frac{P(x)}{x}=\frac{6x+40000}{x}.$$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{6x+40000}{x}\right)=6$

Vậy $y=6$ là phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $F(x)$.

Câu 36: Một khu vườn hình chữ nhật tiếp giáp với bờ sông được rào lại để làm vườn trồng hoa màu; biết phía bên bờ sông không cần hàng rào. Diện tích khu vườn là $1000(m^2)$. Hàng rào ở phía song song với sông có chi phí là 36.000 (đồng) trên một m^2, hàng rào ở hai phía còn lại (vuông góc với bờ sông) là 80.000 (đồng) trên một m^2. Bốn trụ ở bốn góc vườn có giá là 250.000 (đồng) mỗi trụ. Gọi x là độ dài một cạnh vuông góc với bờ sông và hàm $C(x)$ mô tả chi phí của dự án. Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=C(x)$ là

Lời giải

Điều kiện: $x>0$, chiều rộng của khu vườn là $x(m) \Rightarrow$ chiều dài của khu vườn là $\frac{1000}{x}(m)$.

Khi đó chi phí của dự án là $C(x)=160x+\frac{36000}{x}+1000$ (nghìn đồng)

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[C(x)-(160x+1000)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{36000}{x}\right]=0 \Rightarrow y=160x+1000$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=C(x)$.

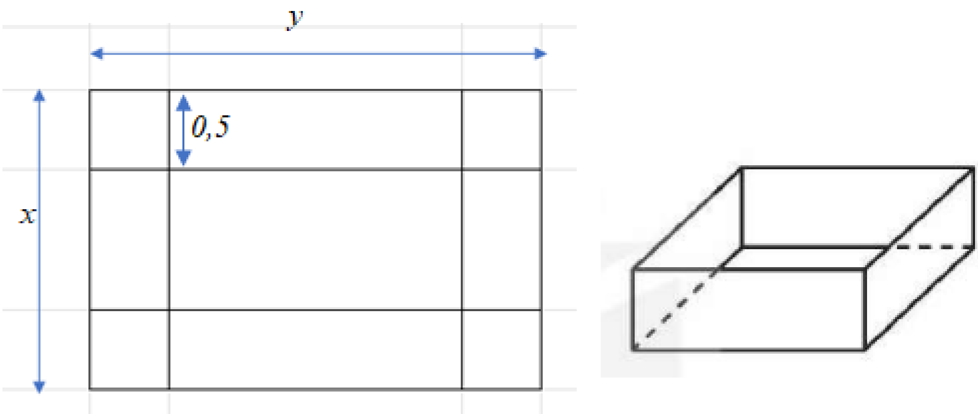
Câu 37: Số lượng sản phẩm bán được của một cửa hàng quần áo trong t (tháng) được cho bởi công thức: $S(t)=200\left(\frac{2}{3}-\frac{8}{2+t}\right)$ với $t\geq 1$. Xem $y=S(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1;+\infty)$, biết rằng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số có dạng $\frac{a}{b}, a,b\in N^*, (a,b)=1$. Tính $P=a-2b$

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} S(t)=\lim\limits_{x\to+\infty} 200\left(\frac{2}{3}-\frac{8}{2+t}\right)=200.\frac{2}{3}=\frac{400}{3} \Rightarrow a=400; b=3$

Vậy $P = a - 2b = 400 - 6 = 394$

Câu 38: Từ một tấm tôn hình chữ nhật có các kích thước là $x(m)$, $y(m)$ với $x > 1$ và $y > 1$ và diện tích bằng $4m^2$, người ta cắt bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc rồi gập thành một cái thùng dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có chiều cao bằng $0,5m$. Thể tích của thùng là hàm số $V(x)$ trên khoảng $(1;+\infty)$. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{V(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



Lời giải

Do tấm tôn có diện tích bằng $4m^2$ nên $xy = 4 \Leftrightarrow y = \dfrac{4}{x}$

Thùng có chiều cao là 0,5m và các kích thước còn lại của thùng là: $x-1$ và $y-1$

Thể tích của thùng là $V(x) = 0,5.(x-1)(y-1) = \dfrac{1}{2}(x-1)\left(\dfrac{4}{x}-1\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{(x-1)(4-x)}{x}$

Suy ra: $y = \dfrac{1}{V(x)} = \dfrac{2x}{(x-1)(4-x)}$

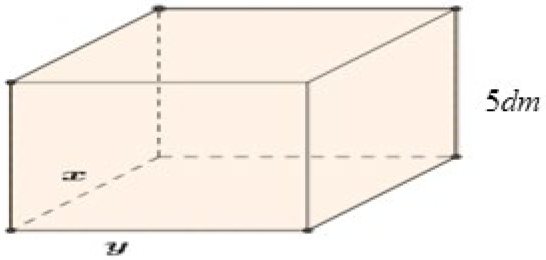
Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{V(x)} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x}{(x-1)(4-x)} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{V(x)} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x}{(x-1)(4-x)} = -\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{V(x)}$

$\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{1}{V(x)} = \lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{2x}{(x-1)(4-x)} = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{1}{V(x)} = \lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{2x}{(x-1)(4-x)} = +\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x = 4$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{V(x)}$

Vậy đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{V(x)}$ có 2 đường tiệm cận đứng.

Câu 39: Người ta muốn làm một cái bể dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có thể tích bằng $1m^3$. Chiều cao của bể là $5dm$, các kích thước khác là $x(m)$, $y(m)$ với $x > 0$

và $y>0$. Diện tích toàn phần của bể (không kể nắp) là hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $S(x)$ là đường thẳng $y=ax+b$. Tính giá trị của biểu thức $P=a^2+b^2$.



Lời giải

Do thể tích của bể là $1m^3$ nên $0,5xy=1 \Leftrightarrow xy=2$

Diện tích toàn phần của bể là $S(x)=xy+2.0,5.x+2.0,5.y=2+x+\frac{2}{x},\ (x>0)$

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(S(x)-(x+2)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$

Suy ra đồ thị hàm số $S(x)$ có đường tiệm cận xiên là $y=x+2 \Rightarrow a=1;b=2$

$P=a^2+b^2=5$

Câu 40: Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x)=150x+900$ (nghìn đồng). Khi sản xuất càng nhiều sản phẩm thì chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm không vượt quá t (nghìn đồng). Tìm giá trị nhỏ nhất của t.

Lời giải.

Chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm là $f(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{150x+900}{x}$.

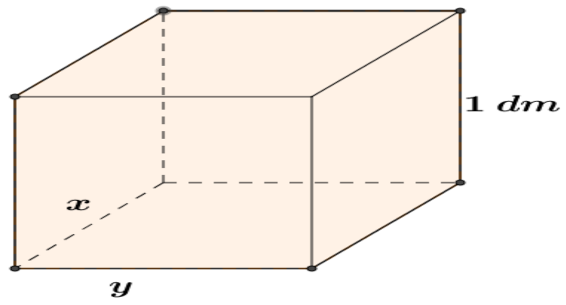
Ta có $f'(x)=\frac{-900}{x^2}<0\ \forall x>0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{150x+900}{x}=150$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	150

Vậy khi sản xuất càng nhiều sản phẩm thì chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm càng giảm, nhưng không dưới 150 nghìn đồng.

Câu 41: Người ta muốn làm một cái bể dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có thể tích bằng $5m^3$. Chiều cao của bể là $10dm$, các kích thước khác là $x(m)$, $y(m)$ với $x>0$ và $y>0$. Diện tích toàn phần của bể (không kể nắp) là hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $S(x)$ là đường thẳng $y=ax+b$. Tính giá trị của biểu thức $P=a^2+b^2$.



Lời giải

Do thể tích của bể là $1m^3$ nên $1.xy=5 \Leftrightarrow xy=5$

Diện tích toàn phần của bể là $S(x)=xy+2.1.x+2.1.y=5+2x+\dfrac{10}{x},\ (x>0)$

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(S(x)-(5+2x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10}{x}=0$

Suy ra đồ thị hàm số $S(x)$ có đường tiệm cận xiên là $y=2x+5 \Rightarrow a=2;b=5$

$P=a^2+b^2=2^2+5^2=29$

Câu 42: Trong 200 gam dung dịch muối nồng độ 15%, giả sử thêm vào dung dịch x (gam) muối tinh khiết và được dung dịch có nồng độ $f(x)$%.

a) Hàm số $f(x)=\dfrac{100(x+200)}{x+30}$.

b) Đạo hàm của hàm số luôn nhận giá trị âm trên khoảng (0; + ∞).

c) Thêm càng nhiều gam muối tinh khiết thì nồng độ phần trăm càng tăng và không vượt quá 100%.

d) Giới hạn của $f(x)$ khi x dần đến dương vô cực bằng 100.

Lời giải

a) Trong 200 gam dung dịch muối nồng độ 15% có $200.\dfrac{15}{100}=30$ (gam) muối tinh khiết. Khi thêm x (gam) muối tinh khiết vào 200 gam dung dịch muối nồng độ 15% thì có $(x+30)$ (gam) muối tinh khiết. Khi đó, ta có hàm số là

$f(x)=\dfrac{100(x+30)}{x+200}$. **Suy ra a) sai.**

b) Ta có $f'(x)=\dfrac{17000}{(x+200)^2}>0, \forall x\in(0;+\infty)$. **Suy ra b) sai.**

c) Vì $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nên khi x tăng thì $f(x)$ tăng. Nghĩa là khi thêm càng nhiều gam muối tinh khiết thì dung dịch có nồng độ phần trăm càng tăng.

Vì $x+30<x+200$ với mọi $x\in(0;+\infty)$ nên $\dfrac{x+30}{x+200}<1$ dẫn đến $f(x)=\dfrac{100(x+30)}{x+200}<100$. Nghĩa là nồng độ phần trăm không vượt quá 100% khi cho thêm nhiều gam muối tinh khiết vào. **Suy ra c) đúng.**

d) Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{100(x+30)}{x+200}=100$. **Suy ra d) đúng.**

Câu 43: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t)=\dfrac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người) (*Nguồn: Giải tích 12 nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020*). Xem $y=f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0;+\infty)$.

a) Dân số của thị trấn đó vào năm 2025 là 34 nghìn người.

b) Đạo hàm của hàm số luôn nhận giá trị âm trên khoảng $(0;+\infty)$.

c) Đồ thị hàm số $y=f(t)$ có đường tiệm cận ngang là $y=26$.

d) Dân số của thị trấn đó không thể vượt quá 26 nghìn người.

Lời giải

a) Dân số của thị trấn đó vào năm 2025 là $f(55)=\dfrac{26\cdot55+10}{55+5}=24$ nghìn người. **Suy ra a) sai.**

b) Đạo hàm của hàm số $f'(t)=\dfrac{120}{(t+5)^2}>0\ (\forall t\neq-5)$ luôn nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$.

Suy ra b) sai.

c) Ta có: $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{26t+10}{t+5}=26$. Do đó đồ thị hàm số $f(t)$ có đường tiệm cận ngang là $y=26$. **Suy ra c) đúng.**

d) Ta có $f(t)=\dfrac{26t+10}{t+5}<\dfrac{26t+130}{t+5}=26$. Vì vậy dân số của thị trấn đó không thể vượt quá 26 nghìn người. **Suy ra d) đúng.**

Câu 44: Một bể chứa 3000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 25 gam muối cho một lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Xét tính đúng sai của mỗi khẳng định sau

a) Sau một giờ bơm thì khối lượng muối trong bể là $30(kg)$

b) Thể tích lượng nước trong bể sau thời gian t phút là $3000+20t$ (lít)

c) Giả sử nồng độ muối trong nước trong bể sau t phút được được xác định bởi một hàm số $f(t)$ trên $[0;+\infty)$ (gam/ lít) thì đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(t)$ là đường thẳng $y=20$.

d) Khi t càng lớn thì nồng độ muối trong bể tiến gần đến 25 gam/lít.

Lời giải

a) Đổi 1 giờ = 60 phút

khối lượng muối sau khi bơm 60 phút là: $60.20.25 = 30000(gam) = 30(kg) \Rightarrow$ **a đúng**

b) Thể tích lượng nước bơm vào bể sau thời gian t phút là $20t$ (lít)

$\Rightarrow$ Thể tích lượng nước trong bể sau thời gian t phút là: $3000 + 20t$ (lít) $\Rightarrow$ **b đúng**

c) Sau thời gian bơm t phút thì khối lượng muối trong bể là $25.20.t = 500t$ (gam)

$\Rightarrow$ nồng độ muối trong bể sau khi bơm được t phút là: $f(t) = \dfrac{500t}{3000 + 20t} = \dfrac{25t}{150 + t}$ (gam/lít)

$\Rightarrow$ đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(t)$ là $y = 25 \Rightarrow$ **c sai**

d) Ta có $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{25t}{150 + t} = 25$ nên khi t càng lớn thì nồng độ muối trong bể tiến gần đến 25 gam/lít $\Rightarrow$ **d đúng.**

Câu 45: Số lượng xe máy điện bán được của một cửa hàng bán xe máy điện trong địa bàn thành phố Vinh trong tháng thứ x được tính theo công thức $f(x) = 50 - \dfrac{30}{2 + x}$, trong đó $x \geq 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) Số lượng xe máy điện của cửa hàng được bán ra trong tháng đầu là 40 (xe)

b) Từ tháng thứ ba trở đi thì số lượng xe bán ra trong tháng đạt mức lớn hơn hoặc bằng 45 xe/tháng

c) Nếu xem $y = f(x)$ là một hàm số xác định trên $[1; +\infty)$ thì đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là $y = 0$

d) Khi x càng lớn thì số lượng xe bán ra càng tiến gần đến mức 50 xe/tháng

Lời giải

a) Số lượng xe máy điện của cửa hàng được bán ra trong tháng đầu là $f(1) = 50 - \dfrac{30}{2 + 1} = 40$ (xe)

$\Rightarrow$ **a đúng**.

b) Ta có: $f(x) \geq 45 \Leftrightarrow \dfrac{30}{2 + x} \leq 5 \Leftrightarrow 2 + x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 4 \Rightarrow$ để bán được từ 45 xe trở lên trong mỗi tháng thì phải từ tháng thứ tư trở đi $\Rightarrow$ **b sai.**

c) Ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(50 - \dfrac{30}{2 + x}\right) = 50 \Rightarrow$ Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường thẳng $y = 50 \Rightarrow$ **c sai.**

d) Vì tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường thẳng $y = 50$ nên khi x càng lớn thì số lượng xe bán ra càng tiến gần đến mức 50xe/tháng $\Rightarrow$ **d đúng**.

Câu 46: Một bể chứa 5000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 30 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 25 lít/phút.

a) Sau 10 phút bơm số lượng muối trong bể là 300 gam.

b) Nếu bơm trong một giờ đồng hồ thì số lượng muối trong bể không vượt quá 2 kg.

c) Nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít là $f\left(t\right)=\dfrac{30t}{200+t}$.

d) Khi t đủ lớn thì nồng độ muối trong bể sẽ tiến gần đến mức 30 (gam/lít).

Lời giải:

a) Số lượng muối trong bể sau 10 phút bơm là $30.25.10=7500$ gam. a) sai

b) Số lượng muối trong bể sau một giờ đồng hồ bơm là $30.25.60=4500$ gam. b) sai

c) Sau t phút, ta có: Khối lượng muối trong bể là $25.30.t=750t$ (gam); thể tích của lượng nước trong bể là $5000+25t$ (lít). Vậy nồng độ muối sau t phút là $f\left(t\right)=\dfrac{750t}{5000+25t}=\dfrac{30t}{200+t}$ (gam/lít). c) đúng

d) khi t đủ lớn ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(t\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{750t}{5000+25t}=30$.

Vậy t đủ lớn thì nồng độ muối trong bể sẽ tiến gần đến mức 30 (gam/lít). d) đúng.

Câu 47: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f\left(t\right)=\dfrac{26t+10}{t+5}$ ($f\left(t\right)$ được tính bằng nghìn người) (*nguồn: Giải tích 12 nâng cao, NXBGD Việt Na, 2000).*

a) số dân của thi trấn đó sau 10 năm là 18.000 người.

b) Số dân thị trấn đó vào năm 2025 là 24.000 người.

c) Xem $f\left(t\right)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $\left[0;+\infty\right)$. Đồ thị hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{26t+10}{t+5}$ có tiệm cận ngang là $y=26$.

d) Đạo hàm của hàm số $y=f\left(t\right)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Vào năm 1990 thì tốc độ tăng dân số là $0{,}129$ nghìn người trên /năm.

Lời giải:

a) số dân của thi trấn đó sau 10 năm là $\dfrac{26.10+10}{10+5}=18$ (nghìn). a) đúng.

b) Số dân thị trấn đó vào năm 2025 là $\dfrac{55.10+10}{55+5}=24$ (nghìn). b) đúng

c) $\lim\limits_{t\to+\infty}f\left(t\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{26t+10}{t+5}=26$. c) đúng

d) ta có $f'\left(t\right)=\dfrac{120}{\left(t+5\right)^2}$

Theo đề $f'\left(t\right)=0{,}192\Leftrightarrow\dfrac{120}{\left(t+5\right)^5}=0{,}192\Rightarrow t=20$.

Vậy vào năm 1990 thì tốc độ tăng dân số là $0,129$ nghìn người trên /năm. d) đúng.

CHƯƠNG I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

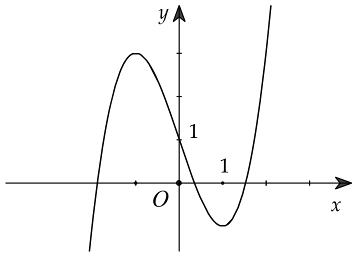
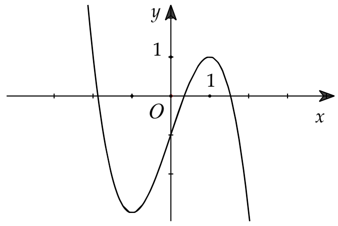
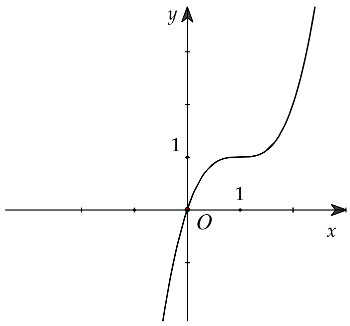
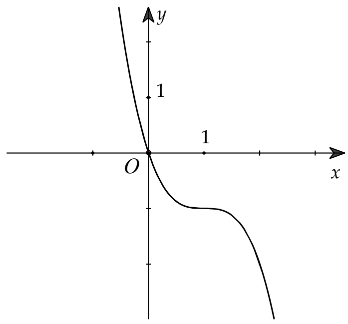
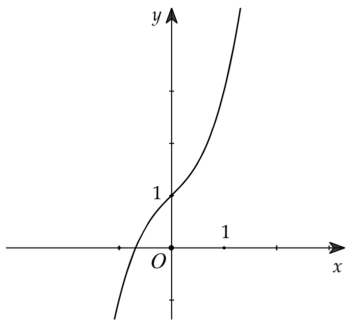
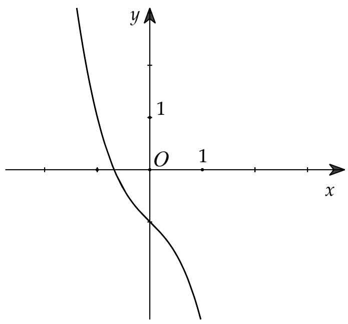
BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

I LÝ THUYẾT.

I. SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

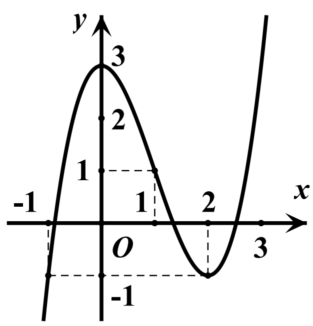
Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số;
Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$;
Bước 3. Tìm nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$;
Bước 4. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} y; \lim\limits_{x\to-\infty} y$ và tìm tiệm cận đứng, ngang (*nếu có*);
Bước 5. Lập bảng biến thiên;
Bước 6. Kết luận tính biến thiên và cực trị (*nếu có*);
Bước 7. Tìm các điểm đặc biệt của đồ thị (*giao với trục Ox, Oy, các điểm đối xứng, ...*);
Bước 8. Vẽ đồ thị.

II. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC BA $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$

TRƯỜNG HỢP	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt*		
Phương trình $y' = 0$ *có nghiệm kép*		
Phương trình $y' = 0$ *vô nghiệm*		

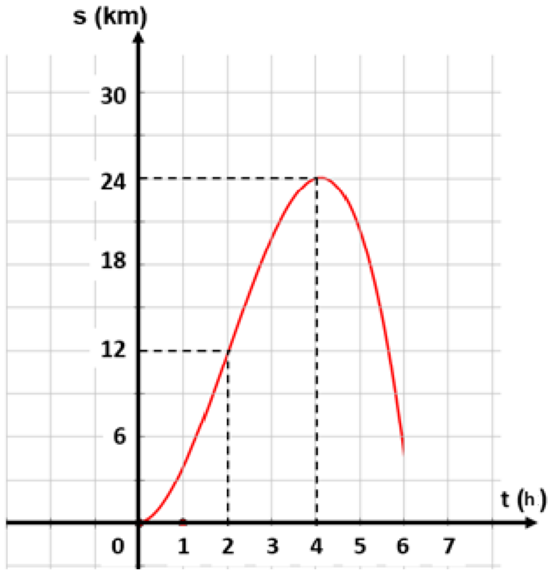
HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ

Câu 1: Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t) = at^3 + bt^2 + ct + d \ (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Biết rằng đồ thị của hàm số $S(t)$ là đường cong như hình bên dưới



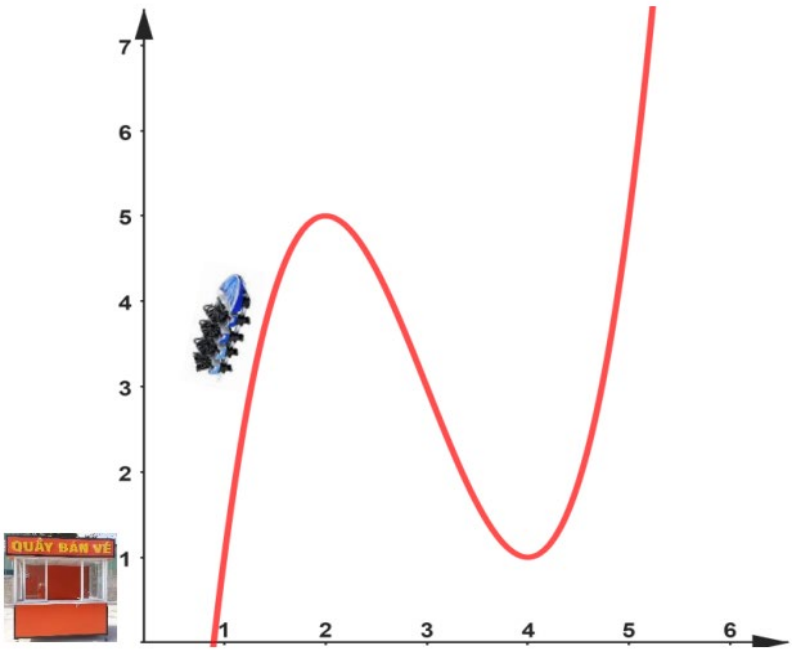
Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc bằng $12\,m/s^2$?

Câu 2: Thầy Toán tham dự giải “Đi bộ trực tuyến Ngành Giáo dục và Đào tạo Edu Run-HCMC” năm 2024.



Quãng đường thầy Hiếu đi được biểu diễn bằng hàm số $s(t)=at^3+bt^2+ct+d$ (với $a\neq 0$) có đồ thị như hình bên. (trong đó t là thời gian tính bằng giờ, s là quãng đường tính bằng km). Khi đó, vận tốc tối đa của thầy Toán đạt được trong quá trình đi bộ là

Câu 3: Trong một khu vui chơi cảm giác mạnh dành cho thiếu nhi. Một tàu lượn siêu tốc được thiết kế đi theo đường cong là đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3-9x^2+24x-15$ như hình vẽ, với gốc toạ độ là quầy vé, $x\le 6$ (mét) là độ lệch ngang của tàu so với quầy vé, y (mét) là độ cao của tàu so với mặt đất.



a) Khi tàu lượn bắt đầu đi xuống thì độ cao của tàu so với mặt đất là bao nhiêu?

b) Khi tàu lượn đi xuống hết và bắt đầu đi lên thì độ lệch ngang của tàu so với quầy vé là bao nhiêu?

c) Khi tàu lên độ cao 6 mét thì độ lệch ngang của tàu so với quầy vé là bao nhiêu? (Làm tròn đến hàng phần mười)

d) Tàu đạt độ cao 3 mét bao nhiêu lần?

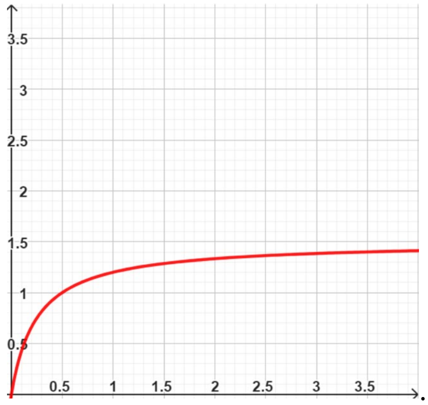
Câu 4: Sau giờ học, Ngọc và Hoa (em của Ngọc) phụ mẹ kết hạt cườm. Trong 1 giờ, Ngọc kết được 6 vòng cườm, Hoa kết được 4 vòng cườm. Vì hai bạn chưa biết làm nên mẹ kết 1 vòng làm mẫu cho hai chị em và vòng đó mẹ tính cho Hoa.

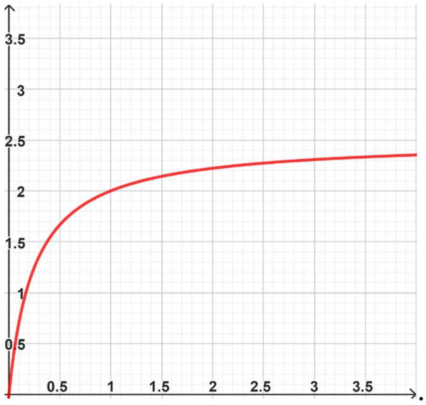
a) Sau t giờ, tỉ số vòng cườm của Ngọc so với Hoa là bao nhiêu?

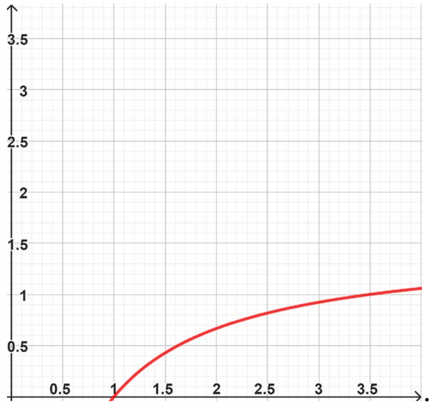
b) Nếu tiếp tục làm thì càng về sau thì tỉ số nêu trên bằng bao nhiêu?

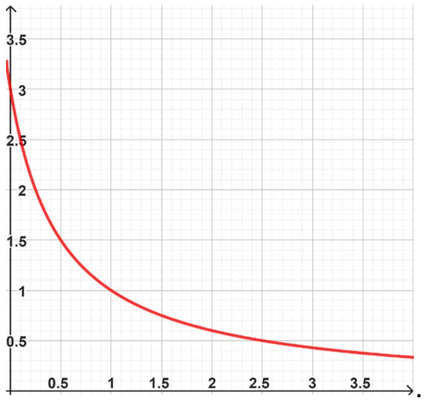
c) Đạo hàm của $f(t)$ biểu thị tốc độ của tỉ số nêu trên. Tính tốc độ của tỉ số nêu trên sau 4 giờ. Làm tròn đến hàng phần mười nghìn.

d) Đồ thị nào sau đây biểu diễn tỉ số nêu trên?

A. 

B. 

C. 

D. 

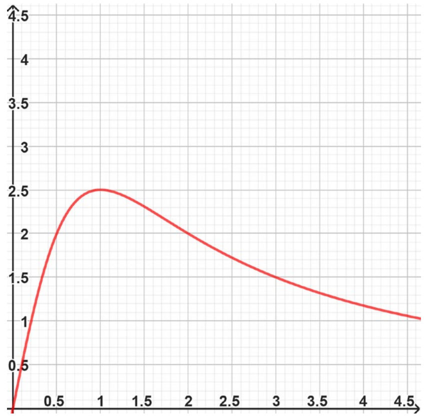
Câu 5: Giả sử $c(t)=\dfrac{5t}{t^2+1}$ (tính bằng mg) biểu thị nồng độ của một loại thuốc trong máu của bệnh nhân trong thời gian $t>0$ giờ sau khi dùng thuốc.

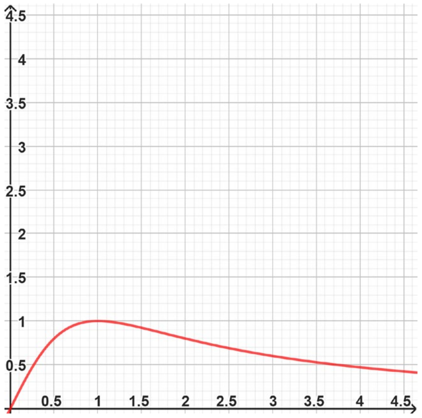
a) Sau 3 giờ, nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân bằng bao nhiêu mg?

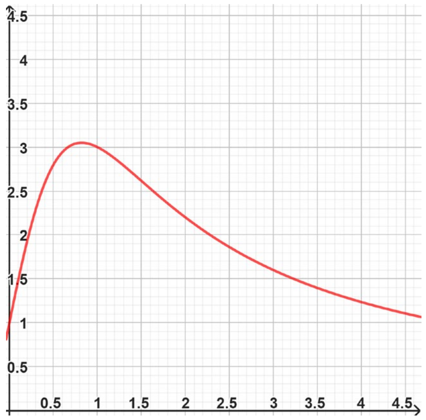
b) Nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân tăng trong khoảng thời gian nào sau khi dùng thuốc?

c) Nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất bằng bao nhiêu mg?

d) Đồ thị nào sau đây biểu diễn nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau t giờ?

A. 

B. 

C. 

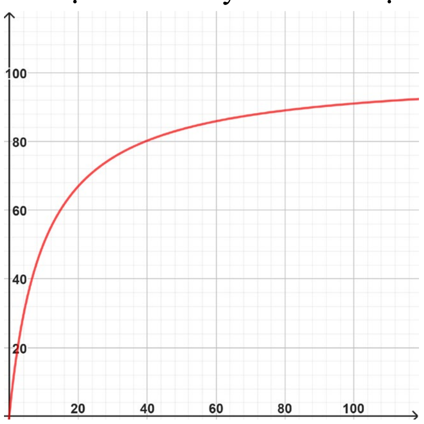
D. 

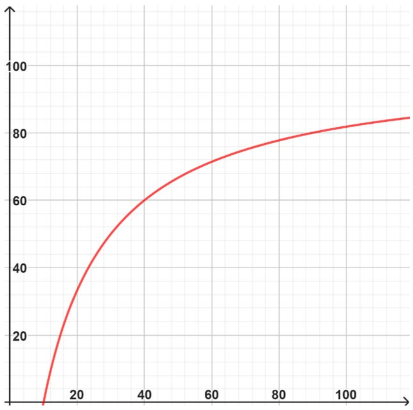
Câu 6: Lợi nhuận bán hàng online sau t tháng của bạn Trường được ước tính bởi công thức $f(t)=\dfrac{100t+10}{t+10}$ ($f(t)$ được tính bằng triệu đồng).

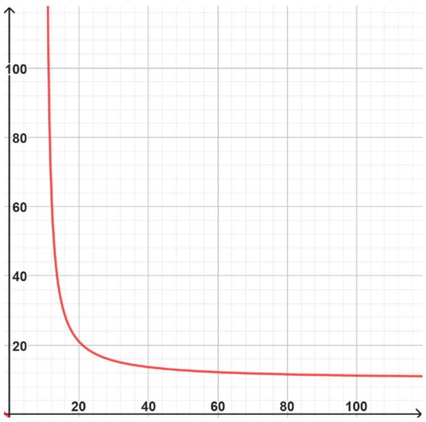
a) Sau 5 tháng, lợi nhuận của Trường bằng bao nhiêu?

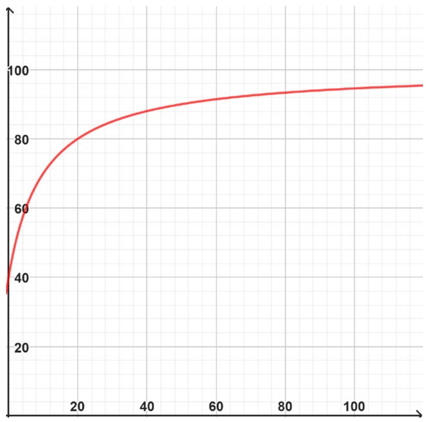
b) Đạo hàm của hàm số $y=f(t)$ biểu thị cho tốc độ tăng trưởng lợi nhuận của Trường. Tính tốc độ tăng trưởng lợi nhuận tại thời điểm sau 1 năm. Làm tròn đến chữ số phần trăm.

c) Đồ thị nào sau đây biểu diễn lợi nhuận bán hàng online sau t tháng của bạn Trường?

A. 

B. 

C. 

D. 

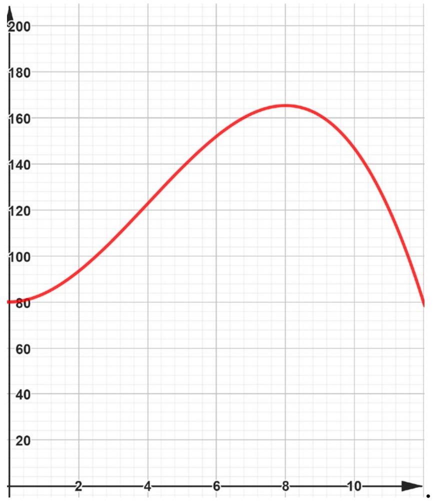
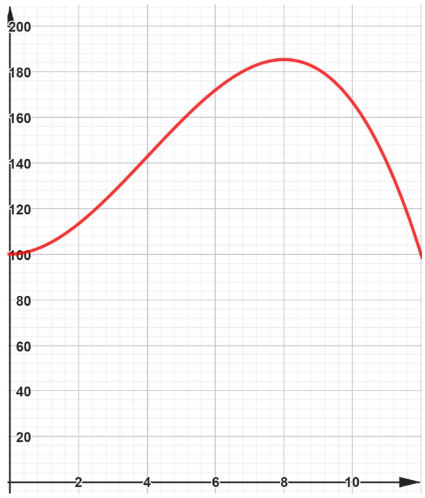
Câu 7: Trong khoảng thời gian từ 11h00 đến 11h12, lưu lượng của một con sông trong 12 phút được tính theo công thức $Q(t)=-\dfrac{1}{3}t^3+4t^2+80$ ($Q(t)$ được tính bằng m^2/phút).

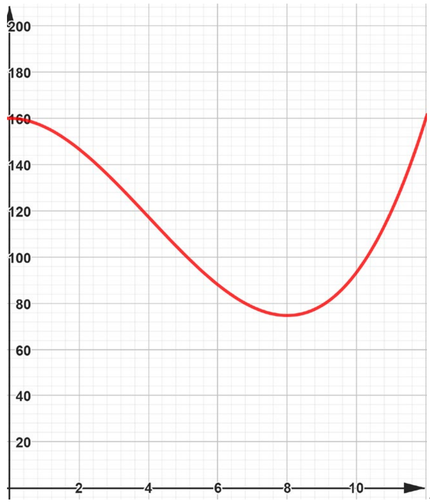
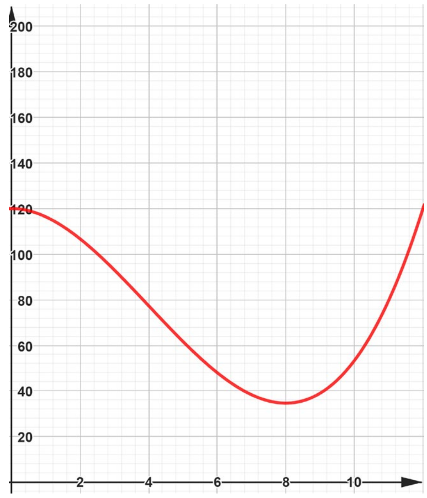
a) Lưu lượng của con sông nêu trên tăng trong khoảng thời gian nào?

b) Lưu lượng lớn nhất của con sông nêu trên bằng bao nhiêu? Làm tròn đến hàng phần trăm.

c) Có bao nhiêu thời điểm từ 11h00 đến 11h12 để lưu lượng của con sông nêu trên bằng 100 m^2/phút.

d) Đồ thị nào sau đây biểu diễn lưu lượng của con sông nêu trên trong khoảng thời gian 11h00 đến 11h12?

A. . **B.** .

C. . **D.** .

Câu 8: Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ mặt đất với tốc độ ban đầu là $32,5$ m/s (bỏ qua sức cản của không khí), độ cao (tính bằng mét) của vật sau t giây được cho bởi công thức $h(t) = 32,5t - 4,9t^2$. Tính vận tốc của vật tại thời điểm 3 giây.

Câu 9: Giả sử số lượng của một quần thể nấm X tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hóa bằng hàm số $P(t) = 120e^{0,15t}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, tốc độ tăng trưởng của quần thể nấm X là

Câu 10: Giả sử chi phí tiền xăng C (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình v (km/h) theo công thức:

$$C(v) = \frac{5400}{v} + \frac{3}{2}v \quad (0 < v \leq 120)$$

Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình là bao nhiêu để tiết kiệm tiền xăng nhất?

Câu 11: Dân số của Việt Nam sau t năm tính từ năm 2023 được dự đoán theo công thức với $N(t)$ tính theo đơn vị triệu người: $N(t) = 100.e^{0,012t}, 0 < t \leq 50$. Biết rằng đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ gia tăng dân số của Việt Nam (đơn vị là triệu người/ năm). Vào năm nào thì tốc độ gia tăng dân số hơn 2 triệu người/ năm.

Câu 12: Một cửa hàng nhận làm những chiếc xô bằng nhôm hình trụ không có nắp để chứa nước. Gọi $x\ (cm)$ là bán kính đáy của chiếc xô và $S(x) = \pi x^2 + \frac{20000}{x}\ (cm^2)$ là diện tích toàn phần của chiếc xô, khi đó x bằng bao nhiêu để cửa hàng tốn ít nguyên vật liệu nhất (kết quả làm tròn tới hàng phần mười)?

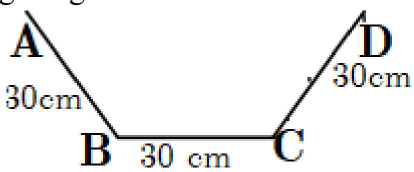
Câu 13: Giả sử một công ty du lịch bán tour với giá là x (triệu đồng)/khách thì doanh thu sẽ được biểu diễn qua hàm số $f(x)=-200x^2+550x$. Công ty phải bán giá tour cho một khách là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất (làm tròn tới hàng phần trăm).

Câu 14: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá x triệu đồng mỗi tháng thì lợi nhuận của công ty sẽ được biểu diễn bởi hàm số $F\left(x\right)=-\dfrac{x^2}{50.000}+90x$ (đồng). Vậy công ty cần cho thuê căn hộ với giá bao nhiêu để lợi nhuận của công ty cao nhất?

Câu 15: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ *t* là $f(t)=45t^2-t^3, t=0,1,2,...,25$. Nếu coi *f(t)* là hàm số xác định trên đoạn [0;25] thì đạo hàm *f'(t)* được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm *t*. Xác định khoảng thời gian mà tốc độ truyền bệnh giảm?

Câu 16: Một sợi dây có chiều dài $28m$ được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài (theo đơn vị mét) của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 17: Từ một tấm tôn có kích thước $90cm$ x $300cm$, người ta làm một máng thoát nước, mặt cắt ngang của máng là hình thang cân $ABCD$ có đáy lớn AD, $AB=BC=CD=30cm$, minh họa hình bên. Thể tích lớn nhất của máng bằng



Câu 18: Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu P (được tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số: $P(t)=\dfrac{25t^2+125}{t^2+1}, 0\le t\le 10$

Trong đó t là thời gian được tính bằng giây. Tốc độ thay đổi của huyết áp sau 8 giây kể từ khi máu rời tim giảm bao nhiêu mmHg?

Câu 19: Bộ phận sản xuất của một công ty xác định chi phí để sản xuất x sản phẩm được cho bởi biểu thức $T(x)=x^2+20x+4000$ (nghìn đồng). Nếu x sản phẩm đều được bán hết và giá bán mỗi sản phẩm là 150 nghìn đồng thì lợi nhuận lớn nhất mà công ty thu được là bao nhiêu?

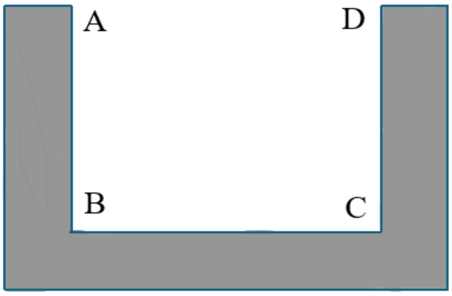
Câu 20: Trong hệ trục toạ độ $\left(Oxy\right)$, cho đồ thị hàm số $\left(C\right)$: $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}; x>-1$ mô tả chuyển động của một chiếc thuyền trên biển, một trạm phát sóng đặt tại điểm $I\left(-1;-1\right)$. Biết hoành độ điểm M thuộc đồ thị $\left(C\right)$ mà tại đó thuyền thu được sóng tốt nhất là $x_0=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}-b$ (Loại trừ các điều kiện ảnh hưởng đến việc thu phát sóng). Tính $a.n+b$?

Câu 21: Một rạp chiếu phim có sức chứa 800 người, trung bình mỗi ngày rạp có khoảng 360 khách với giá mỗi vé là 100.000đ. Nếu giá mỗi vé giảm 10.000đ thì mỗi ngày rạp có thêm 60 khách đến xem. Hỏi cần giảm giá vé đến bao nhiêu nghìn đồng để doanh thu của rạp là lớn nhất.

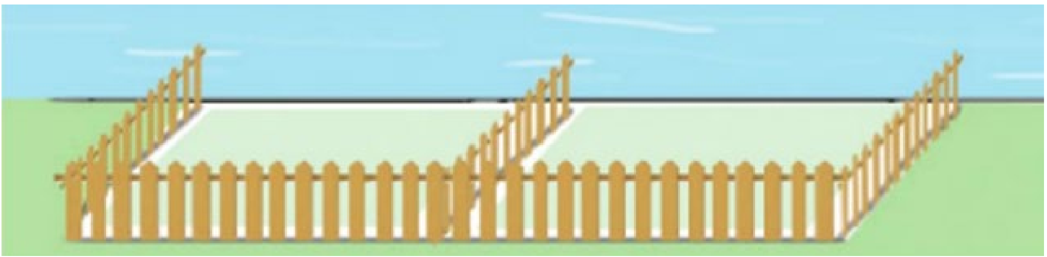
Câu 22: Một bể ban đầu chứa 150 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 50 lít nước, đồng thời cho vào bể 20 gam chất khử trùng (hòa tan). Đặt $f(t)$ gam/lít là nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút ($t \geq 0$), biết rằng sau khi khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(t)$, ta thấy giá trị $f(t)$ tăng theo t nhưng không vượt ngưỡng p gam/lít. Tìm số p (kết quả thể hiện dưới dạng số thập phân).

Câu 23: Ông A dự định sử dụng hết $6,7\,m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 24: Hình dưới đây là mương dẫn nước thủy lợi tại một địa phương phục vụ tưới tiêu cho ruộng đồng. Phần không gian trong mương để nước chảy có mặt cắt ngang là hình chữ nhật $ABCD$. Với điều kiện lưu lượng nước qua mương cho phép thì diện tích mặt cắt $ABCD$ là $0,48\,m^2$. Để đảm bảo yêu cầu kỹ thuật tốt nhất cho mương, người ta cần thiết kế sao cho tổng độ dài $T = AB + BC + CD$ là ngắn nhất. Khi đó chiều rộng đáy mương bằng bao nhiêu (biết chiều rộng phải dưới 1m, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Câu 25: Một người nông dân có $15\,000\,000$ đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (hình vẽ dưới). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là $60\,000$ đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là $50\,000$ đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.



Câu 26: Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B. Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x)=45-0,001x^2$ (triệu đồng). Cho phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x)=100+30x$ triệu đồng (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

a) Tính chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng.

b) Tính số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B.

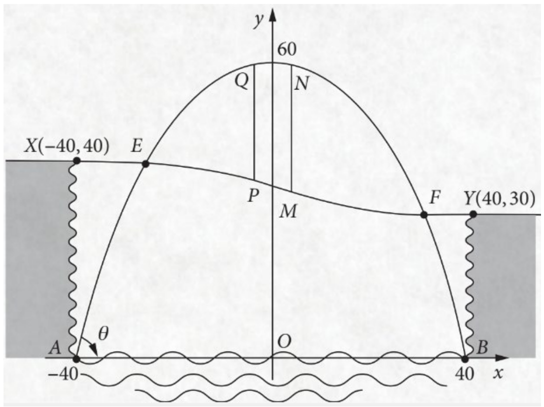
c) Xác đinh hàm số biểu thị lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm $(0\le x\le 100)$ cho B.

d) A bán cho B khoảng bao nhiêu tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất?

Câu 27: Một thành phố nằm trên một con sông chảy qua hẻm núi. Hẻm có chiều ngang 80m, một bên cao 40 m và một bên cao 30 m. Một cây cầu sẽ được xây dựng bắc qua sông và hẻm núi. Sơ đồ thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ dưới đây.

Con đường XY xuyên qua hẻm núi được mô hình hóa bằng phương trình: $y=\dfrac{x^3}{25600}-\dfrac{3x}{16}+35$.

Hai cột đỡ dọc MN và PQ (song song với trục Oy) là đoạn nối giữa khung của Parabol và đường XY. Tính tổng độ dài đoạn MN và PQ biết rằng N và Q là hai điểm đối xứng qua Oy; MN là đoạn có độ dài lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



Câu 28: Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18000.

a) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì mỗi chiếc khăn cần tăng thêm 10000 đồng

b) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì mỗi chiếc khăn cần bán với giá 39000 đồng

c) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì sau khi tăng giá mỗi chiếc khăn lãi 21000 đồng

d) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì số khăn bán ra giảm 800 chiếc

Câu 29: Chi phí nhiên liệu của một chiếc tầu chạy trên sông được chia làm hai phần. Phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 nghìn đồng trên 1 giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v = 10$ (*km/giờ*) thì phần thứ hai bằng 30 *nghìn đồng/giờ*.

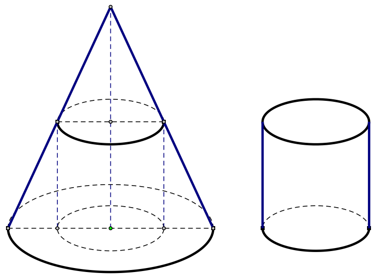
a) Khi vận tốc $v = 10$ (*km/giờ*) thì chi phí nguyên liệu cho phần thứ nhất trên 1 *km* đường sông là 48000 đồng.

b) Hàm số xác định tổng chi phí nguyên liệu trên 1 *km* đường sông với vận tốc $x(km/h)$ là $f(x) = \frac{480}{x} + 0,03x^3$.

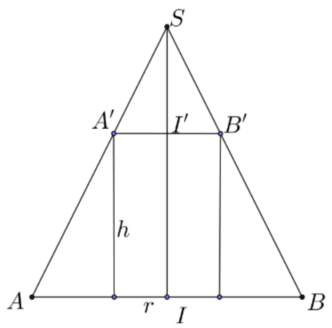
c) Khi vận tốc $v = 30$ (*km/giờ*) thì tổng chi phí nguyên liệu trên 1 *km* đường sông là 43000 đồng.

d) Vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 *km* đường sông nhỏ nhất là $v = 20$ (*km/giờ*).

Câu 30: Một khúc gỗ có dạng hình khối nón có bán kính đáy $r = 2m$, chiều cao $l = 6m$. Bác thợ mộc chế tác từ khúc gỗ đó thành một khúc gỗ có dạng hình khối trụ như hình vẽ.



a) Ta có mặt cắt qua trục hình nón như hình vẽ. Đặt x là bán kính đáy hình trụ, h là chiều cao của hình trụ.



Khi đó chiều cao của khối trụ tính theo bán kính đáy hình trụ là $h = -3x + 6(m)$ với $0 < x < 2$.

b) Hàm số xác định thể tích của khối trụ trên là $V = 6x^2 - 3x^3\left(m^3\right),\ \forall x \in (0;2)$.

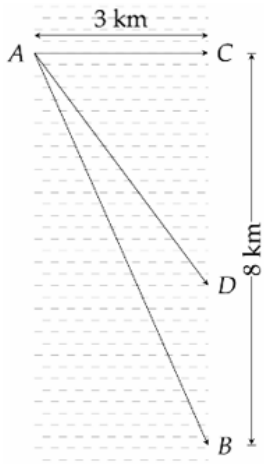
c) Giả sử bác thợ mộc chế tác khúc gỗ đó thành hình trụ có bán kính đáy bằng chiều cao, khi đó thể tích của khối trụ là $V = \frac{27}{8}\pi\left(m^3\right)$.

d) Thể tích lớn nhất của khối gỗ mà bác thợ mộc chế tác là $V_{max} = \frac{32\pi}{9}\left(m^3\right)$

Câu 31: Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật thể sau thời gian t giây được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 5 mét với tốc độ ban đầu 39,2 m/s là $h(t) = 5 + 39,2t - 4,9t^2$, chọn chiều dương là chiều hướng từ dưới lên. *(theo Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).*

Mệnh đề	Đúng	Sai
a) Vận tốc của vật sau 3 giây là $4,6m/s$.		
b) Vật đạt độ cao lớn nhất bằng $83,4$ mét tại thời điểm $t = 4$ giây.		
c) Khoảng thời gian vật ở độ cao trên 10 mét dài hơn 7 giây.		
d) Vận tốc của vật lúc vật chạm đất sấp xỉ $-40,43(m/s)$		

Câu 32: Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ).



Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B, hay có thể chèo trực tiếp đến B, hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B. Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8\text{ km}$. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Gọi $x\,(\text{km})$ là độ dài quãng đường BD.

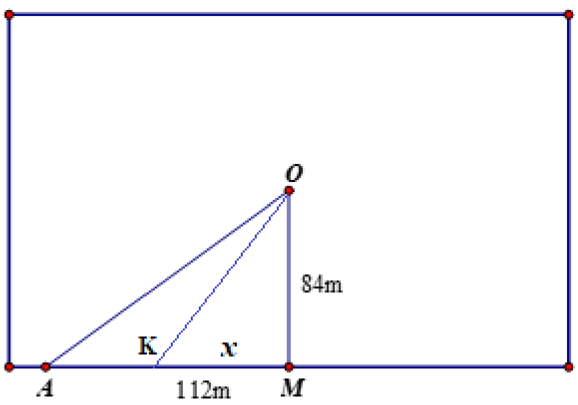
a) $8 - x\,(\text{km})$ là độ dài quãng đường CD.

b) Thời gian chèo thuyền trên quãng đường AD là: $\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{3}$ (giờ)

c) Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \dfrac{8-x}{8}$

d) Khoảng 1 giờ 20 phút là khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B.

Câu 33: Gia đình bác Hùng có một ao cá hình chữ nhật. Để lắp đặt một hệ thống điện ra vị trí O ở giữa hồ bác dự định nối một đường dây điện từ vị trí A trên bờ hồ đến vị trí O ở giữa hồ (như hình vẽ). Biết khoảng cách ngắn nhất từ O đến bờ hồ là $OM = 84m$, khoảng cách từ A đến M là $AM = 112m$. Mỗi mét dây điện lắp đặt ở trên bờ có chi phí cả tiềnn công và tiền vật liệu là $25\,200$ đồng và mỗi mét dây điện lắp đặt ở dưới nước có chi phí cả tiền công và tiền vật liệu là $42\,000$ đồng.



Mệnh đề	Đúng	Sai
a) Nếu nối đường dây điện theo đường gấp khúc $AM + MO$ thì chi phí lắp đặt đường dây điện bé hơn $6\,000\,000$ đồng		
b) Nếu chọn một vị trí K trên đoạn AM sao cho $KM = x$ (với x thay đổi sao cho $0 \le x \le 112$) sau đó nối đường dây điện theo đường gấp khúc $AK + KO$ thì chi phí lắp đặt đường dây điện là một hàm số biến x và ta có hàm số là: $f(x) = 25200(112-x) + 42000\sqrt{x^2+84^2}$		
c) Nếu chọn điểm K cách điểm A một khoảng bằng 63m sau đó nối đường dây điện theo đường gấp khúc $AK + KO$ thì chi phí lắp đặt đường dây điện là thấp nhất.		
d) Chi phí thấp nhất để lắp đặt đường dây điện là $5\,644\,800$ đồng		

Câu 34: Người ta muốn xây một cái bể hình hộp đứng có thể tích $V = 18\left(m^3\right)$, biết đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng và bể không có nắp.
Để nguyên vật liệu xây dựng là ít nhất (biết nguyên vật liệu xây dựng các mặt là như nhau) thì
a) Chiều rộng của đáy bể bằng 2 m.
b) Chiều dài của đáy bể bằng 6 m.
c) Chiều cao của bể là $h = 3$ m.
d) Diện tích xung quanh của bể bằng 48 m^2.

Câu 35: Một vật chuyển động có phương trình quãng đường tính bằng mét phụ thuộc thời gian t tính bằng giây được biểu thị bởi hàm số $f\left(t\right) = -t^3 + 9t^2 + 21t$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?
a) Quãng đường mà vật đi được sau 2s kể từ lúc bắt đầu chuyển động là $70m$.
b) Vận tốc lớn nhất của vật thể là $21\left(m/s\right)$.
c) Vận tốc của vật tăng từ lúc bắt đầu chuyển động đến giây thứ 3.
d) Kể từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn, vật đi được quãng đường là $150m$.

Câu 36: Một cơ sở đóng giầy sản xuất mỗi ngày được x đôi giầy. $1 \le x \le 20$. Tổng chi phí sản xuất x đôi giầy(đơn vị nghìn đồng) là $C\left(x\right) = x^3 - 6x^2 - 88x + 592$. Giả sử cơ sở này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 200 nghìn đồng /một đôi. Gọi $T\left(x\right)$ là số tiền bán được và $L\left(x\right)$ là lợi nhuận thu được sau khi bán hết x đôi giầy.

Mệnh đề	Đúng	Sai
a) Giả sử trong một ngày nào đó cơ sở sản xuất được 10 đôi giầy thì lợi nhuận thu được là 1888 (nghìn đồng).		
b) Giả sử trong một ngày nào đó cơ sở lợi nhuận thu được là 1584 (nghìn đồng) khi đó cơ sở phải sản xuất được 9 đôi giầy.		
c) Cơ sở này sản xuất được 12 đôi giầy thì lợi nhuận thu được là nhiều nhất.		
d) Lợi nhuận tối đa thu được trong một ngày là 1980 nghìn đồng.		

Câu 37: Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm tính theo công thức $V\left(t\right) = \dfrac{1}{100}\left(30t^3 - \dfrac{t^4}{4}\right)$, $\left(0 \le t \le 90\right)$. Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi $f\left(t\right) = V'\left(t\right)$. Trong các khẳng định sau, chọn khẳng định đúng hoặc sai?
a) Tốc độ bơm giảm từ phút thứ 60 đến phút thứ 90.
b) Tốc độ bơm tăng từ phút 0 đến phút thứ 75.
c) Tốc độ bơm luôn giảm.
d) Tốc độ bơm lớn nhất ở phút thứ 60.

Câu 38: Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y = t^3 - 12t + 3,\ t \ge 0$.
a) Hàm gia tốc của vật là $a = y'$.
b) Hàm vận tốc của vật là $v\left(t\right) = 3t^2 - 12$.
c) Tại thời điểm $t = 1$ thì hạt đang chuyển động lên trên.
d) Trong khoảng thời gian $0 \le t \le 3$, quãng đường mà hạt đi là 23 m.

Câu 39: Dân số của một quốc gia sau t (năm) bắt đầu từ năm 2023 được tính theo công thức $N(t)=100e^{0,012t}$ (trong đó $N(t)$ được tính bằng triệu người, $0\le t\le 50$)

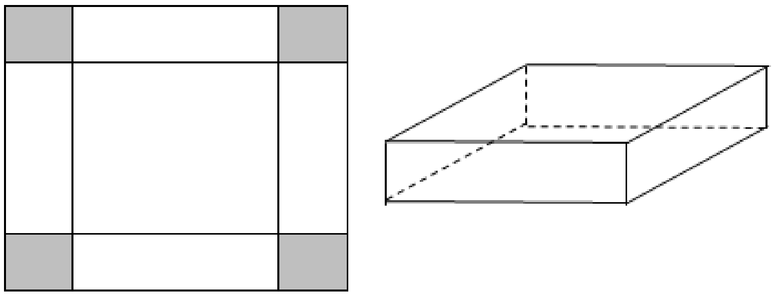
a) Dân số của quốc gia này ở năm 2030 vượt mức 110 triệu người.

b) Dân số của quốc gia này ở năm 2035 vượt mức 115 triệu người.

c) Vào năm 2030 thì tốc độ tăng dân số là $1,6$ triệu người/năm.

d) Vào năm 2026 thì tốc độ tăng dân số là $1,6$ triệu người/năm.

Câu 40: Một tấm nhôm hình vuông cạnh $120cm$. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(cm)$, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp.



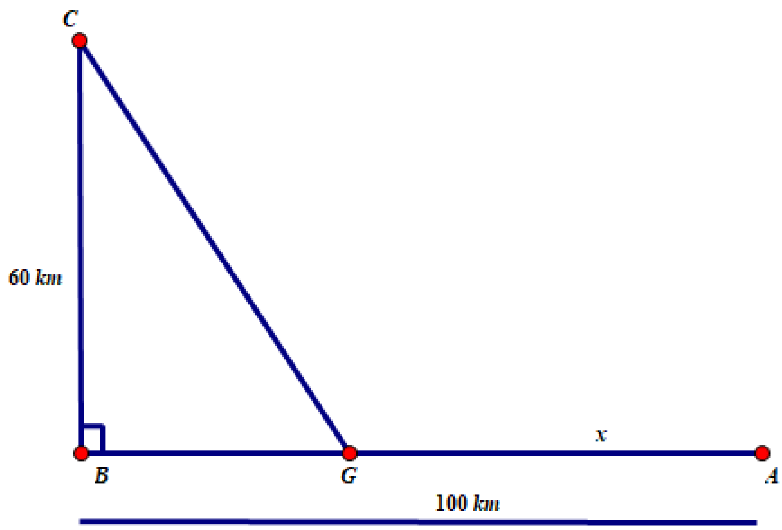
a) Thể tích khối hộp nhận được khi tính theo x là $V=x(120-2x)^2$.

b) Khi $x=10cm$ thì thể tích của khối hộp nhận được là $1(m^3)$.

c) Để hộp nhận được có thể tích lớn nhất thì $x=20(cm)$.

d) Hộp nhận được có thể tích lớn nhất là $128(dm^3)$.

Câu 41: Đường dây điện $110KV$ kéo từ trạm phát (điểm A) trong đất liền ra Côn Đảo (điểm C). Biết $BC=60km$, $AB=100km$, góc $\widehat{ABC}=90°$, như hình vẽ. Mỗi km dây điện dưới nước chi phí là $5000USD$, chi phí cho mỗi km dây điện trên bờ là $3000USD$. Đặt $x=AG$.



a) Khi $x=20km$ thì đường dây điện nối từ C về G dài $100km$.

b) Khi $x=20km$ thì tổng chi phí mắc điện là $560.000USD$.

c) Tổng chi phí mắc điện nhỏ nhất khi $x=50km$.

d) Tổng chi phí mắc điện nhỏ nhất là $540.000USD$.

Câu 42: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá $2.000.000$ đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có lợi nhuận cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu (đơn vị tính bằng triệu đồng và làm tròn kết quả tới hàng phần trăm)?

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

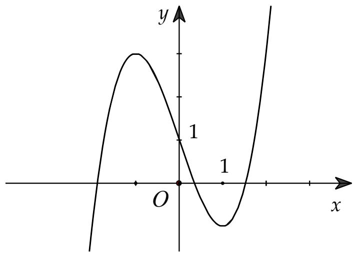
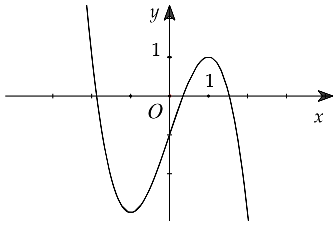
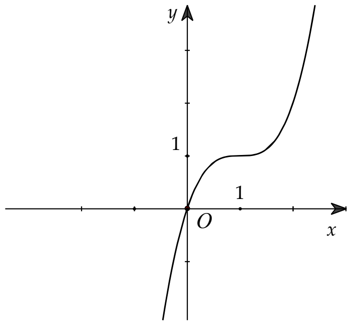
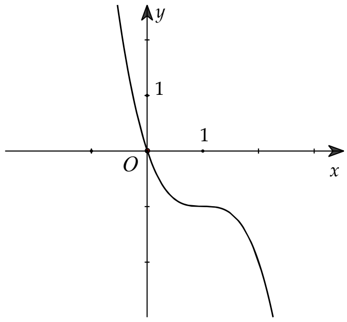
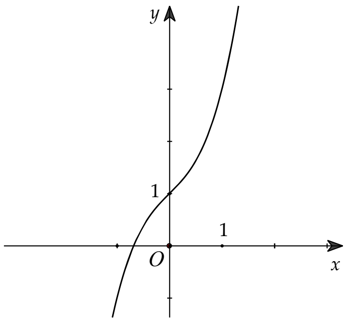
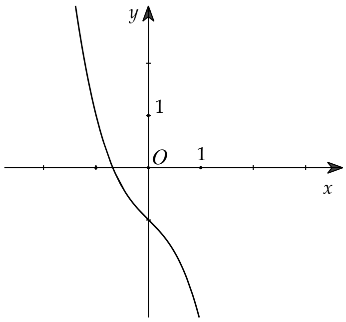
I LÝ THUYẾT.

I. SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số;
Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$;
Bước 3. Tìm nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$;
Bước 4. Tính giới hạn $\lim_{x\to+\infty} y; \lim_{x\to-\infty} y$ và tìm tiệm cận đứng, ngang (*nếu có*);
Bước 5. Lập bảng biến thiên;
Bước 6. Kết luận tính biến thiên và cực trị (*nếu có*);
Bước 7. Tìm các điểm đặc biệt của đồ thị (*giao với trục Ox, Oy, các điểm đối xứng, ...*);
Bước 8. Vẽ đồ thị.

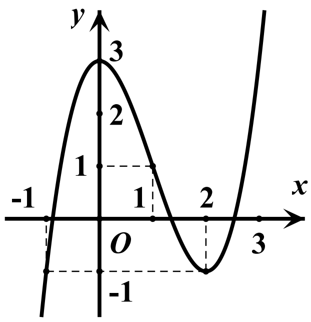
II. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC BA

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

TRƯỜNG HỢP	$a>0$	$a<0$
Phương trình $y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt*		
Phương trình $y' = 0$ *có nghiệm kép*		
Phương trình $y' = 0$ *vô nghiệm*		

HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ

Câu 1: Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Biết rằng đồ thị của hàm số $S(t)$ là đường cong như hình bên dưới



Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc bằng $12\,m/s^2$?

Lời giải

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(-1;-1), B(0;3), C(1;1), D(2;-1)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -a+b-c+d=-1 \\ d=3 \\ a+b+c+d=1 \\ 8a+4b+2c+d=-1 \end{cases} \quad (*)$$

Giải hệ phương trình ta được $a=1; b=-3; c=0; d=3$. Do đó $S=t^3-3t^2+3$.

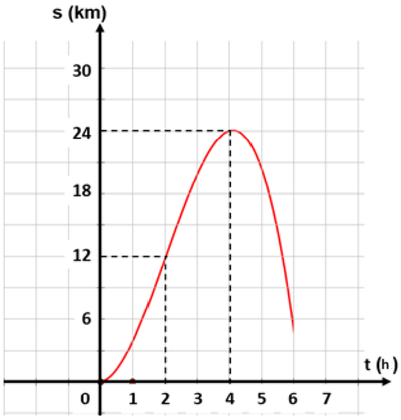
Vận tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp một của quãng đường: $v=S'=3t^2-6t$

Gia tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp hai của quãng đường:

$a=S''=6t-6=12 \Rightarrow t=3$

Khi đó vận tốc của chuyển động là $S'(3)=27-18=9\text{m/s}$.

Câu 2: Thầy Toán tham dự giải "Đi bộ trực tuyến Ngành Giáo dục và Đào tạo Edu Run-HCMC" năm 2024.



Quãng đường thầy Hiếu đi được biểu diễn bằng hàm số $s(t)=at^3+bt^2+ct+d$ (với $a \neq 0$) có đồ thị như hình bên. (trong đó t là thời gian tính bằng giờ, s là quãng đường tính bằng km). Khi đó, vận tốc tối đa của thầy Toán đạt được trong quá trình đi bộ là

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số đi qua các điểm: $O(0;0), A(2;12), B(4;24)$ và nhận $B(4;24)$ làm 1 cực trị.

Ta có: $s(t)=at^3+bt^2+ct+d \Rightarrow s'(t)=3at^2+2bt+c$

Khi đó ta có hệ sau: $\begin{cases} s(0)=0 \\ s(2)=12 \\ s(4)=24 \\ s'(4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ 8a+4b+2c+d=12 \\ 64a+16b+4c+d=24 \\ 48a+8b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{3}{4} \\ b=\dfrac{9}{2} \\ c=0 \\ d=0 \end{cases}$

Nên: $s(t)=-\dfrac{3}{4}t^3+\dfrac{9}{2}t^2 \Rightarrow v(t)=s'(t)=-\dfrac{9}{4}t^2+9t$.

Thầy Toán dừng đi bộ khi: $v(t)=0 \Leftrightarrow -\dfrac{9}{4}t^2+9t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=4 \end{array}\right.$

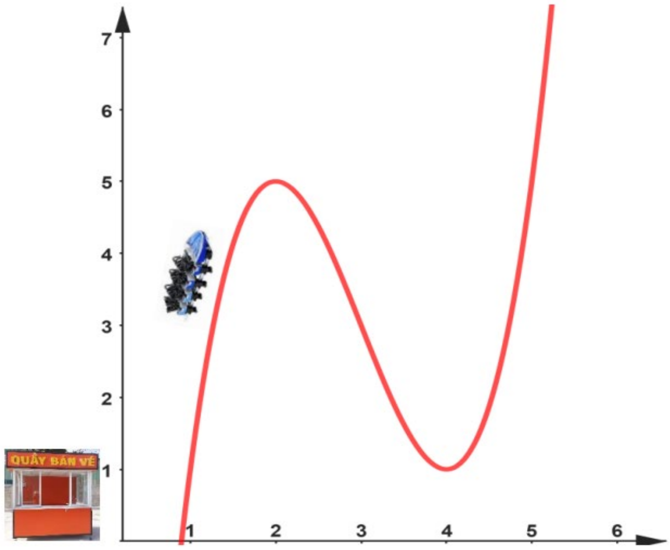
Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của $v(t)$ trên $[0;4]$.

Ta có: $v'(t) = -\frac{9}{2}t + 9 \Rightarrow v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Khi đó: $v(0) = 0$, $v(2) = 9$, $v(4) = 0$

Vậy vận tốc lớn nhất mà thầy Hiếu đạt được là 9 km/h tại thời điểm $t = 2$.

Câu 3: Trong một khu vui chơi cảm giác mạnh dành cho thiếu nhi. Một tàu lượn siêu tốc được thiết kế đi theo đường cong là đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 15$ như hình vẽ, với gốc toạ độ là quầy vé, $x \le 6$ (mét) là độ lệch ngang của tàu so với quầy vé, y (mét) là độ cao của tàu so với mặt đất.



a) Khi tàu lượn bắt đầu đi xuống thì độ cao của tàu so với mặt đất là bao nhiêu?

b) Khi tàu lượn đi xuống hết và bắt đầu đi lên thì độ lệch ngang của tàu so với quầy vé là bao nhiêu?

c) Khi tàu lên độ cao 6 mét thì độ lệch ngang của tàu so với quầy vé là bao nhiêu? (Làm tròn đến hàng phần mười)

d) Tàu đạt độ cao 3 mét bao nhiêu lần?

Lời giải

a) $y = f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 15$

$y' = 3x^2 - 18x + 24$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 4 \end{array}\right.$

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên $(2;4)$, tại $x = 2$ thì $y = 5$. Vậy khi tàu lượn bắt đầu đi xuống thì độ cao của tàu lượn so với mặt đất bằng $5m$.

b) Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $(4;+\infty)$. Vậy khi tàu lượn bắt đầu đi lên thì độ lệch ngang so với quầy vé bằng $4m$.

c) Khi tàu lượn lên độ cao $6m$ nghĩa là $y = 6$.

Ta giải phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 9x^2 + 24x - 15 = 6$.

Phương trình trên tương đương $x^3 - 9x^2 + 24x - 21 = 0 \Leftrightarrow x \approx 5{,}1$.

Khi tàu lên độ cao 6 mét thì độ lệch ngang của tàu so với quầy vé xấp xỉ $5{,}1m$.

d) Khi tàu lượn lên độ cao $3m$ nghĩa là $y = 3$.

Ta xét phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 9x^2 + 24x - 15 = 3$.

Phương trình trên tương đương $x^3 - 9x^2 + 24x - 18 = 0$.

Ta thấy phương trình trên có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy tàu đạt độ cao 3 mét 3 lần.

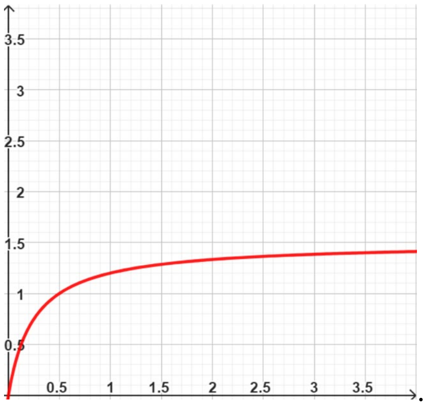
Câu 4: Sau giờ học, Ngọc và Hoa (em của Ngọc) phụ mẹ kết hạt cườm. Trong 1 giờ, Ngọc kết được 6 vòng cườm, Hoa kết được 4 vòng cườm. Vì hai bạn chưa biết làm nên mẹ kết 1 vòng làm mẫu cho hai chị em và vòng đó mẹ tính cho Hoa.

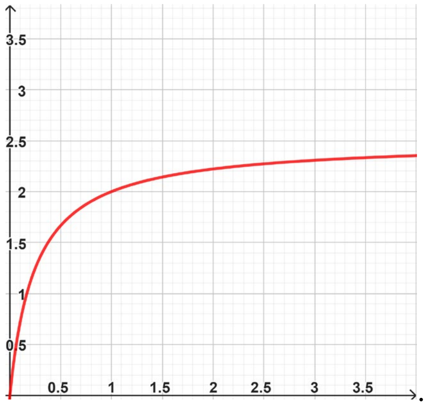
a) Sau t giờ, tỉ số vòng cườm của Ngọc so với Hoa là bao nhiêu?

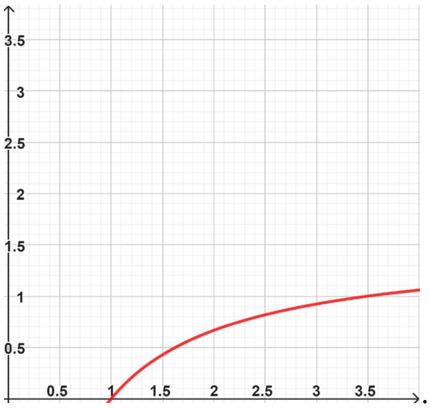
b) Nếu tiếp tục làm thì càng về sau thì tỉ số nêu trên bằng bao nhiêu?

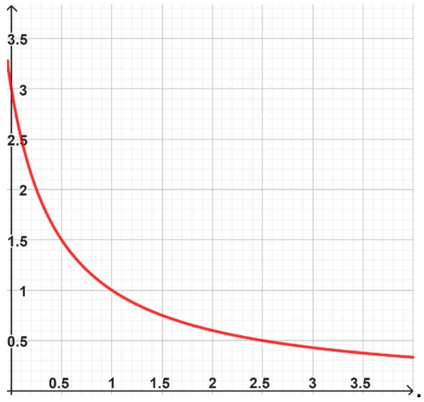
c) Đạo hàm của $f(t)$ biểu thị tốc độ của tỉ số nêu trên. Tính tốc độ của tỉ số nêu trên sau 4 giờ. Làm tròn đến hàng phần mười nghìn.

d) Đồ thị nào sau đây biểu diễn tỉ số nêu trên?

A.


B.


C.


D.


Lời giải

a) Số vòng cườm sau t giờ Ngọc làm được là $6t$.

Số vòng cườm sau t giờ Hoa làm được là $4t + 1$.

Tỉ số vòng cườm của Ngọc so với Hoa sau t giờ là $f(t) = \dfrac{6t}{4t+1}$.

b) Xét hàm số $f(t) = \dfrac{6t}{4t+1}$ với $t \ge 0$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6t}{4t+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6t}{t\left(4+\dfrac{1}{t}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{4+\dfrac{1}{t}}=\dfrac{3}{2}$. Nên tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ là $y=\dfrac{3}{2}$. Vậy nếu tiếp tục làm thì càng về sau thì tỉ số nêu trên bằng $\dfrac{3}{2}$.

c) $f'(t)=\dfrac{6}{(4t+1)^2}\Rightarrow f'(4)=\dfrac{6}{(4.4+1)^2}\approx 0,0208$.

Vậy tốc độ của tỉ số nêu trên sau 4 giờ xấp xỉ $0,0208$.

d) Nhận xét: khi $t=0\Rightarrow y=0$ nên loại đáp án **C** và **D.**

Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y=\dfrac{3}{2}$ nên ta chọn đáp án **A.**

Câu 5: Giả sử $c(t)=\dfrac{5t}{t^2+1}$ (tính bằng mg) biểu thị nồng độ của một loại thuốc trong máu của bệnh nhân trong thời gian $t>0$ giờ sau khi dùng thuốc.

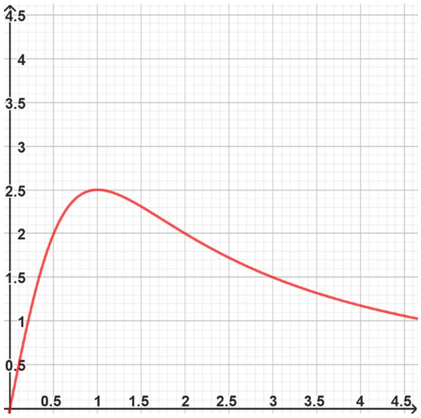
(Nguồn: https://www.youtube.com/watch?v=rN3dfhBdK-Q)

a) Sau 3 giờ, nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân bằng bao nhiêu mg?

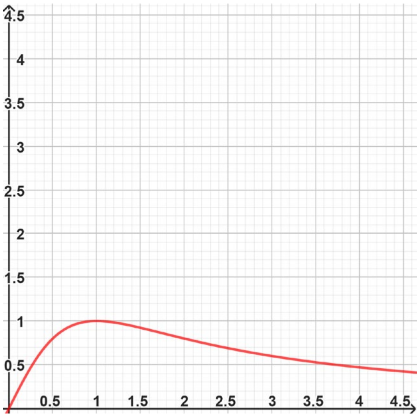
b) Nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân tăng trong khoảng thời gian nào sau khi dùng thuốc?

c) Nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất bằng bao nhiêu mg?

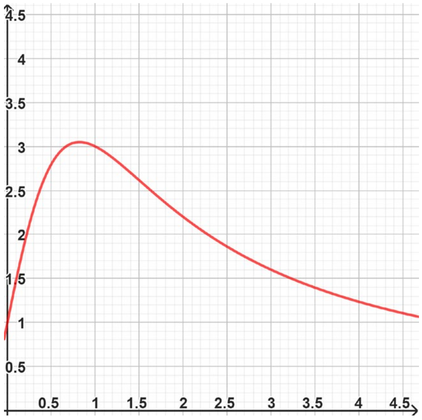
d) Đồ thị nào sau đây biểu diễn nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau t giờ?



A.



B.



C.

D.

Lời giải

a) Ta có $c(t)=\dfrac{5t}{t^2+1}$ với $t>0$.

Sau 3 giờ nghĩa là $t=3$ suy ra $c(3)=\dfrac{5\times 3}{3^2+1}=1,5$ (mg)

Vậy sau 3 giờ, nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân bằng $1,5$ mg.

b) Ta có $c(t)=\dfrac{5t}{t^2+1}\Rightarrow c'(t)=\dfrac{(5t)'(t^2+1)-(t^2+1)'(5t)}{(t^2+1)^2}=\dfrac{5(t^2+1)-2t.5t}{(t^2+1)^2}=\dfrac{-5t^2+5}{(t^2+1)^2}$.

$c'(t)=0\Leftrightarrow -5t^2+5=0\Rightarrow t=1$, ta loại $t=-1<0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}c(t)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5t}{t^2+1}=0$.

x	0		1		$+\infty$
$c'(t)$		$+$	0	$-$	
$c(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{5}{2}$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $c(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$

Vậy nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân tăng trong khoảng thời gian sau khi dùng thuốc 1 giờ.

c) Ta có bảng biến thiên của hàm số $c(t)$ như sau:

x	0		1		$+\infty$
$c'(t)$		$+$	0	$-$	
$c(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{5}{2}$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $c(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{5}{2}$ tại $t=1$.

Vậy nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất bằng $2{,}5$ mg.

d) Ta có bảng biến thiên của hàm số $c(t)$ như sau:

x	0		1		$+\infty$
$c'(t)$		$+$	0	$-$	
$c(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{5}{2}$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $c(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{5}{2}$ tại $t=1$.

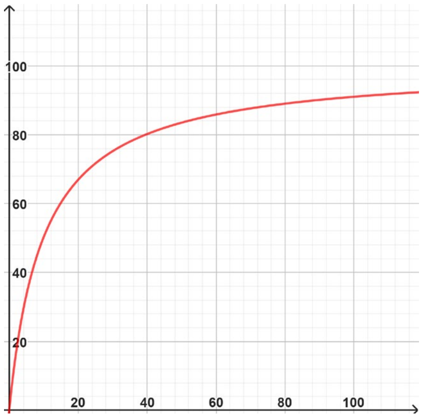
Vậy đáp án **A** là phù hợp nhất.

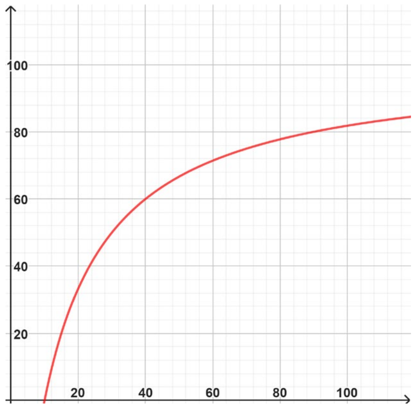
Câu 6: Lợi nhuận bán hàng online sau t tháng của bạn Trường được ước tính bởi công thức $f(t)=\dfrac{100t+10}{t+10}$ ($f(t)$ được tính bằng triệu đồng).

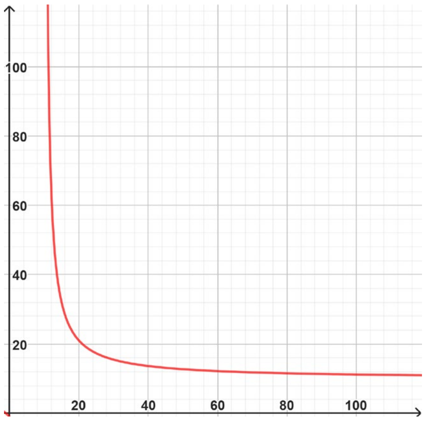
a) Sau 5 tháng, lợi nhuận của Trường bằng bao nhiêu?

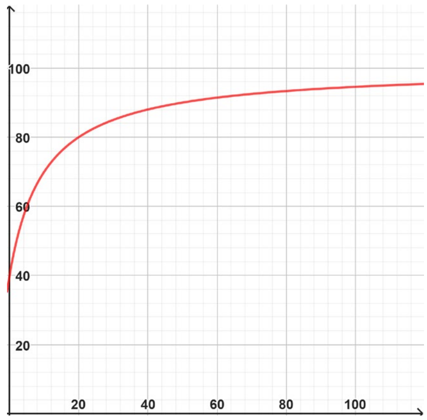
b) Đạo hàm của hàm số $y=f(t)$ biểu thị cho tốc độ tăng trưởng lợi nhuận của Trường. Tính tốc độ tăng trưởng lợi nhuận tại thời điểm sau 1 năm. Làm tròn đến chữ số phần trăm.

c) Đồ thị nào sau đây biểu diễn lợi nhuận bán hàng online sau t tháng của bạn Trường?

A.


B.


C.


D.


Lời giải

a) Ta có $f(t)=\dfrac{100t+10}{t+10}$.

Sau 5 tháng nghĩa là $t=5$ suy ra $f(5)=\dfrac{100\times5+10}{5+10}=34$ (triệu đồng)

Vậy sau 5 tháng, lợi nhuận của Trường bằng 34 triệu đồng.

b) Ta có $f(t)=\dfrac{100t+10}{t+10}\Rightarrow f'(t)=\dfrac{990}{(t+10)^2}$.

Sau 1 năm nghĩa là 12 tháng. Ta có $t=12$ suy ra $f'(12)=\dfrac{990}{(12+10)^2}\approx2,05$.

Vậy tốc độ tăng trưởng lợi nhuận tại thời điểm sau 1 năm là 2,05.

c) Nhận xét: $f'(t)=\dfrac{990}{(t+10)^2}>0$ nên hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$, ta loại đáp án **D** vì đồ thị ở đáp án **D** nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

khi $t=0\Rightarrow y=1$ nên đáp án **A** là phù hợp nhất.

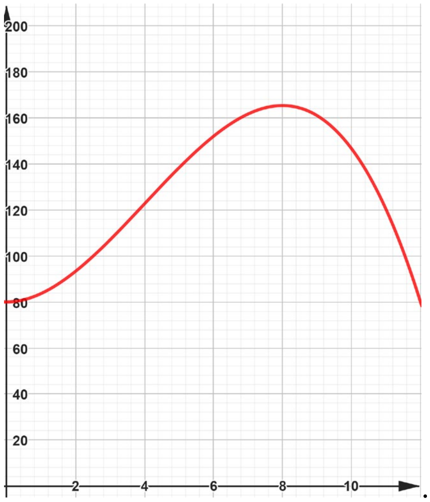
Câu 7: Trong khoảng thời gian từ 11h00 đến 11h12, lưu lượng của một con sông trong 12 phút được tính theo công thức $Q(t)=-\dfrac{1}{3}t^3+4t^2+80$ ($Q(t)$ được tính bằng m^2/phút).

a) Lưu lượng của con sông nêu trên tăng trong khoảng thời gian nào?

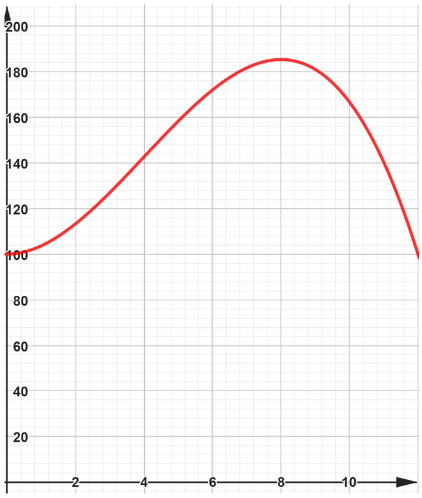
b) Lưu lượng lớn nhất của con sông nêu trên bằng bao nhiêu? Làm tròn đến hàng phần trăm.

c) Có bao nhiêu thời điểm từ 11h00 đến 11h12 để lưu lượng của con sông nêu trên bằng 100 m^2/phút.

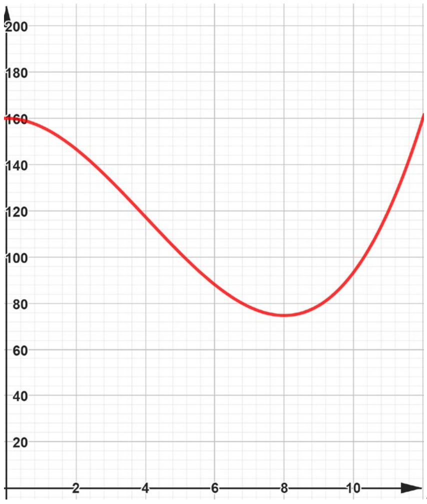
d) Đồ thị nào sau đây biểu diễn lưu lượng của con sông nêu trên trong khoảng thời gian 11h00 đến 11h12?

A. 

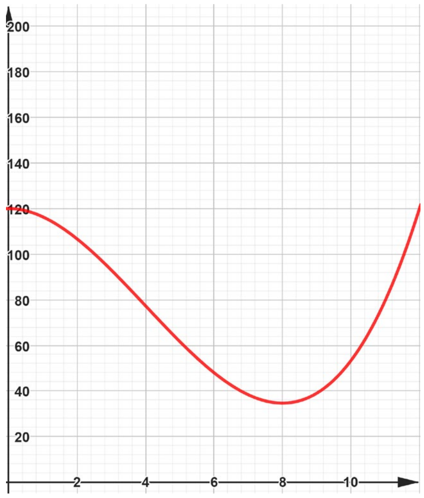
.

B. 

.

C. 

.

D. 

.

Lời giải

a) Ta có $Q(t)=-\frac{1}{3}t^3+4t^2+80$ với $0\le t\le 12$.

Nên $Q'(t)=-t^2+8t$. Dẫn đến $Q(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=8 \\ t=0 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

t	0		8		12
Q'		+	0	−	
Q	80	↗	$\frac{496}{3}$	↘	80

Dựa vào bảng biến thiên ta có $Q(t)$ tăng trong khoảng $(0;8)$.

Vậy lưu lượng của con sông nêu trên tăng trong khoản thời gian từ 11h00 đến 11h08.

b) Ta có bảng biến thiên:

t	0		8		12
Q'		+	0	−	
Q	80	↗	$\frac{496}{3}$	↘	80

Dựa vào bảng biến thiên ta có $Q(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{496}{3} \approx 165,33$.

Vậy lưu lượng lớn nhất của con sông nêu trên bằng $165,33$ m^2/phút.

c) Ta có bảng biến thiên:

t	0		8		12
Q'		+	0	−	
Q	80	↗	$\frac{496}{3}$	↘	80

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy có 2 giá trị $t_1 \in (0;8)$, $t_2 \in (8;12)$ để $Q(t)$ bằng 100.

Vậy có 2 thời điểm từ 11h00 đến 11h12 để lưu lượng của con sông nêu trên bằng 100 m^2/phút.

d)

Ta có bảng biến thiên:

t	0		8		12
Q'		+	0	−	
Q	80	↗	$\frac{496}{3}$	↘	80

Dựa vào bảng biến thiên ta có $Q(t)$ tăng trong khoảng $(0;8)$ giảm trong khoảng $(8;12)$ nên loại đáp án **C** và **D.**

Mặt khác tại thời điểm $t=0$ thì $Q(0)=80$. Nên ta loại đáp án **B.**

Vậy đáp án **A** là phù hợp nhất.

Câu 8: Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ mặt đất với tốc độ ban đầu là $32,5$ m/s (bỏ qua sức cản của không khí), độ cao (tính bằng mét) của vật sau t giây được cho bởi công thức $h(t)=32,5t-4,9t^2$. Tính vận tốc của vật tại thời điểm 3 giây.

Lời giải

Theo ý nghĩa cơ học của đạo hàm, vận tốc của vật sau t giây là $v(t)=h'(t)=32,5-9,8t$ (m/s).

Do đó, vận tốc của vật sau 3 giây là $v(3)=32,5-9,8.3=3,1$ (m/s).

Câu 9: Giả sử số lượng của một quần thể nấm X tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hóa bằng hàm số $P(t)=120e^{0,15t}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t=0$, tốc độ tăng trưởng của quần thể nấm X là

Lời giải

Tốc độ tăng trưởng của quần thể nấm X tại thời điểm t là: $P'(t)=120.0,15.e^{0,15t}=18e^{0,15t}$.

Do đó, tốc độ tăng trưởng của quần thể nấm X tại thời điểm $t=0$ là $P'(0)=18$ tế bào/giờ.

Câu 10: Giả sử chi phí tiền xăng C (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình v (km/h) theo công thức:

$$C(v)=\frac{5400}{v}+\frac{3}{2}v\ (0<v\le 120)$$

Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình là bao nhiêu để tiết kiệm tiền xăng nhất?

Lời giải

Tập xác định: $D=(0;120]$.

Sự biến thiên:

Đạo hàm $C'(v)=-\dfrac{5400}{v^2}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{3(v-60)(v+60)}{2v^2}; C'(v)=0\Leftrightarrow v=-60$ (loại) hoặc $v=60$.

Trên khoảng $(0;60), C'(v)<0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

Trên khoảng $(60;120), C'(v)>0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng này.

Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $v=60, C_{CT}=C(60)=180$.

Như vậy, để tiết kiệm tiền xăng nhất, tài xế nên chạy xe với tốc độ trung bình là 60 km/h

Câu 11: Dân số của Việt Nam sau t năm tính từ năm 2023 được dự đoán theo công thức với $N(t)$ tính theo đơn vị triệu người: $N(t)=100.e^{0,012t}, 0<t\le 50$. Biết rằng đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ gia tăng dân số của Việt Nam (đơn vị là triệu người/ năm). Vào năm nào thì tốc độ gia tăng dân số hơn 2 triệu người/ năm.

Lời giải

Tập xác định: $D=(0;50]$.

Đạo hàm $N'(t)=1,2e^{0,012t}=2\Rightarrow t=\dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{1,2}\right)}{0,012}\approx 42,57$

Vào năm 2066 thì tốc độ gia tăng dân số hơn 2 triệu người/ năm.

Câu 12: Một cửa hàng nhận làm những chiếc xô bằng nhôm hình trụ không có nắp để chứa nước. Gọi $x\,(cm)$ là bán kính đáy của chiếc xô và $S(x)=\pi x^2+\dfrac{20000}{x}\,(cm^2)$ là diện tích toàn phần của chiếc xô, khi đó x bằng bao nhiêu để cửa hàng tốn ít nguyên vật liệu nhất (kết quả làm tròn tới hàng phần mười)?

Lời giải

Ta có $S(x)=\pi x^2+\dfrac{20000}{x}$

$S'(x)=2\pi x-\dfrac{20000}{x^2}=\dfrac{2\pi x^3-20000}{x^2}$.

$S'(x)=0\Leftrightarrow 2\pi x^3-20000=0\Leftrightarrow x^3=\dfrac{10000}{\pi}\Leftrightarrow x=10.\sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}}$

Bảng biến thiên:

x	0		$10.\sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}}$		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$		$\searrow$	$2039,4$	$\nearrow$	

Ta thấy diện tích toàn phần chiếc xô nhỏ nhất khi bán kính đáy xô là $x=10\sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}}\approx 14,7(\text{cm})$.

Câu 13: Giả sử một công ty du lịch bán tour với giá là x (triệu đồng)/khách thì doanh thu sẽ được biểu diễn qua hàm số $f(x)=-200x^2+550x$. Công ty phải bán giá tour cho một khách là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất (làm tròn tới hàng phần trăm).

Lời giải

Doanh thu là $f(x) = -200x^2 + 550x$.

Ta có $f'(x) = -400x + 550$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{11}{8}$.

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{11}{8}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{3025}{8}$	$\searrow$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = \dfrac{11}{8} = 1,375$.

Vậy công ty cần bán tour với giá 1,38 triệu đồng/khách thì doanh thu sẽ cao nhất.

Câu 14: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá x triệu đồng mỗi tháng thì lợi nhuận của công ty sẽ được biểu diễn bởi hàm số $F(x) = -\dfrac{x^2}{50.000} + 90x$ (đồng). Vậy công ty cần cho thuê căn hộ với giá bao nhiêu để lợi nhuận của công ty cao nhất?

Lời giải

$F(x) = -\dfrac{x^2}{50.000} + 90x$.

$F'(x) = -\dfrac{1}{25.000}x + 90$

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{25.000}x + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 2.250.000$

Bảng biến thiên:

X	2.000.000	2.250.000	$+\infty$
F'(x)	$+$	0	$-$
F(x)	$\nearrow$	F_{max}	$\searrow$

Suy ra $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2.250.000$

Vậy công ty phải cho thuê với giá $2.250.000$ đồng hay 2,25 triệu đồng mỗi căn hộ thì được có lợi nhuận cao nhất.

Câu 15: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3, t = 0,1,2,...,25$. Nếu coi *f(t)* là hàm số xác định trên đoạn [0;25] thì đạo hàm *f'(t)* được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm *t*. Xác định khoảng thời gian mà tốc độ truyền bệnh giảm?

Lời giải

Ta có: $f'(t) = 90t - 3t^2$; $f''(t) = 90 - 6t; f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 15$

Bảng biến thiên

t	0		15		25
$f''(t)$		$+$	0	$-$	
$f'(t)$		$\nearrow$	675	$\searrow$	

Khoảng thời gian $(15;25)$ ngày thì tốc độ truyền bệnh giảm.

Câu 16: Một sợi dây có chiều dài $28m$ được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài (theo đơn vị mét) của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Gọi chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông là x (m) ($0<x<28$)
thì chiều dài của đoạn dây làm thành hình tròn là $28-x$ (m)

+) Diện tích hình vuông là: $\left(\frac{x}{4}\right)^2=\frac{x^2}{16}$.

+) Bán kính hình tròn là: R = $\frac{28-x}{2\pi}$.

Do đó, diện tích hình tròn là: $\pi R^2=\pi.\left(\frac{28-x}{2\pi}\right)^2=\frac{784-56x+x^2}{4\pi}$.

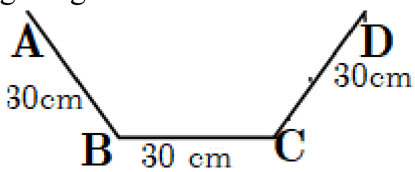
Khi đó Tổng diện tích hai hình là: $\frac{x^2}{16}+\frac{784-56x+x^2}{4\pi}=\left(\frac{\pi+4}{16\pi}\right)x^2-\frac{14}{\pi}x+\frac{196}{\pi}$.

Xét hàm số bậc hai $f(x)=\left(\frac{\pi+4}{16\pi}\right)x^2-\frac{14}{\pi}x+\frac{196}{\pi}$.

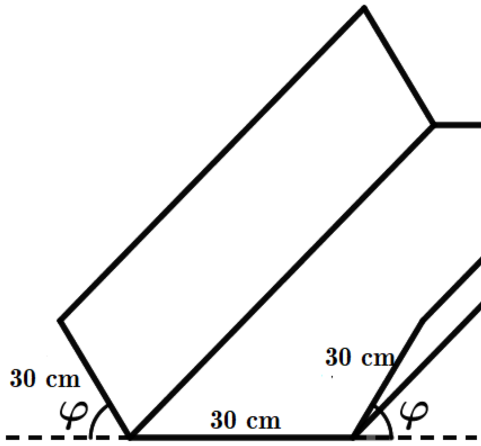
Nhận thấy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=\frac{-b}{2a}=\frac{14}{\pi}.\frac{16\pi}{2(\pi+4)}=\frac{112}{\pi+4}$

Vậy chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông để tổng diện tích của hai hình đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{112}{4+\pi}\approx 15,68(m)$.

Câu 17: Từ một tấm tôn có kích thước $90cm$ x $300cm$, người ta làm một máng thoát nước, mặt cắt ngang của máng là hình thang cân $ABCD$ có đáy lớn AD, $AB=BC=CD=30cm$, minh họa hình bên. Thể tích lớn nhất của máng bằng



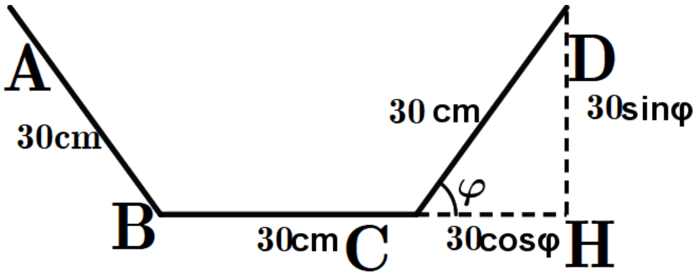
Lời giải



+) Gọi chiều dài máng nước là x, ta có tổng diện tích tôn làm máng nước theo hình vẽ trên là: $30x+30x+30x=90x\ \left(cm^2\right)$. Do tấm tôn làm có kích thước $90cm.300cm$ nên ta có:

$90x=27000 \Leftrightarrow x=300\ (cm)$

+)Gọi φ là góc giữa thành máng nghiêng tạo với mặt đất $\left(0°<\varphi<90°\right)$ (tham khảo hình vẽ trên).



Theo yêu cầu bài toán, để có thể tích lớn nhất của máng nước thì diện tích hình thang $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất

+) Ta có: $S_{ABCD}=\dfrac{\left(AD+BC\right).DH}{2}=\dfrac{(30+60\cos\varphi)+30}{2}.30\sin\varphi=\left(60+60\cos\varphi\right).15\sin\varphi$

$=900\left(1+\cos\varphi\right).\sin\varphi$

Xét: $f\left(\varphi\right)=900\left(1+\cos\varphi\right).\sin\varphi$ trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Ta có:

$f'\left(\varphi\right)=900.\left(1+\cos\varphi\right)'.\sin\varphi+900.\left(1+\cos\varphi\right).\left(\sin\varphi\right)'=-900\sin^2\varphi+900.\cos^2\varphi+900\cos\varphi$

$=900\cos\varphi+900\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right)=900\cos\varphi+900.\cos2\varphi$

+) $f'\left(\varphi\right)=0 \Leftrightarrow 900.\left(\cos2\varphi+\cos\varphi\right)=0 \Leftrightarrow 1800.\cos\dfrac{3\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{3\varphi}{2}=0\\ \cos\dfrac{\varphi}{2}=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{3\varphi}{2}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ \dfrac{\varphi}{2}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\varphi=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2k\pi}{3}\\ \varphi=\pi+2k\pi\end{array}\right.$

Do $\varphi \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$, để hàm số $f\left(\varphi\right) = 900 + 900.\cos\varphi.\sin\varphi$ trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ đạt giá trị lớn nhất thì $\varphi = \frac{\pi}{3} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 900\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right).\sin\frac{\pi}{3} = 900.\frac{3}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 675\sqrt{3}$

diện tích hình thang $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất là $675\sqrt{3}$ cm^2.

Vậy thể tích lớn nhất của máng nước là: $V = B.h = 675\sqrt{3}.x = 675\sqrt{3}.300 = 202500\sqrt{3}$ $\left(cm^3\right)$.

Câu 18: Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu P (được tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số: $P(t) = \frac{25t^2+125}{t^2+1}, 0 \le t \le 10$

Trong đó t là thời gian được tính bằng giây. Tốc độ thay đổi của huyết áp sau 8 giây kể từ khi máu rời tim giảm bao nhiêu mmHg?

Lời giải

Tốc độ thay đổi của huyết áp sau t giây là:

$$P'(t) = \frac{50t.(t^2+1)-(25t^2+125).2t}{t^2+1} = \frac{-200t}{(t^2+1)^2} \le 0, \forall 0 \le t \le 10$$

$\Rightarrow P(t)$ nghịch biến trên đoạn $[0;10]$

Ta có: $P'(8) = \frac{-200.8}{(8^2+1)^2} = \frac{-64}{169}$

Tốc độ thay đổi của huyết áp sau 8 giây kể từ khi máu rời tim là giảm $\frac{64}{169} \approx 0,38$ (mmHg).

Câu 19: Bộ phận sản xuất của một công ty xác định chi phí để sản xuất x sản phẩm được cho bởi biểu thức $T(x) = x^2 + 20x + 4000$ (nghìn đồng). Nếu x sản phẩm đều được bán hết và giá bán mỗi sản phẩm là 150 nghìn đồng thì lợi nhuận lớn nhất mà công ty thu được là bao nhiêu?

Lời giải

Doanh thu khi bán được x sản phẩm là $150x$ (nghìn đồng).

Lợi nhuận khi bán x sản phẩm là:

$f(x) = 150x - \left(x^2 + 2x + 4000\right) = -x^2 + 130x - 4000$ (nghìn đồng)

Để công ty có lãi thì $-x^2 + 130x - 4000 > 0 \Leftrightarrow 50 < x < 80$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^2 + 130x - 4000$ với $x \in (50;80)$

Ta có: $f'(x) = -2x + 130$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 65$

Do $f''(x) = -2 < 0$, $\forall x \in (50;80)$

Do đó $\max f(x) = \max\limits_{x\in(50;80)} f(x) = f(65) = 225$

Vậy lợi nhuận lớn nhất công ty thu được là 225 nghìn đồng.

Câu 20: Trong hệ trục toạ độ (Oxy), cho đồ thị hàm số (C): $y = \frac{x^2+x+1}{x+1}; x > -1$ mô tả chuyển động của một chiếc thuyền trên biển, một trạm phát sóng đặt tại điểm $I(-1;-1)$. Biết hoành độ điểm M

thuộc đồ thị (C) mà tại đó thuyền thu được sóng tốt nhất là $x_0 = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} - b$ (Loại trừ các điều kiện ảnh hưởng đến việc thu phát sóng). Tính $a.n+b$?

Lời giải

$M \in (C) \Rightarrow M\left(x_0; x_0 + \frac{1}{x_0+1}\right)$ với $x_0 > -1$.

$IM^2 = (x_0+1)^2 + \left(x_0+1+\frac{1}{x_0+1}\right)^2 = 2(x_0+1)^2 + \frac{1}{(x_0+1)^2} + 2$.

Đặt $t = (x_0+1)^2, t > 0$ thì $IM^2 = 2t + 2 + \frac{1}{t}$.

Xét hàm $y = 2t + 2 + \frac{1}{t}, t > 0$

Ta có $y' = 2 - \frac{1}{t^2}, y' = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}}$

t	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

Để thuyền thu được sóng tốt nhất $\Leftrightarrow$ IM ngắn nhất $\Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} - 1$

Vậy $n = 4; a = 2; b = 1 \Rightarrow a.n + b = 9$.

Câu 21: Một rạp chiếu phim có sức chứa 800 người, trung bình mỗi ngày rạp có khoảng 360 khách với giá mỗi vé là 100.000đ. Nếu giá mỗi vé giảm 10.000đ thì mỗi ngày rạp có thêm 60 khách đến xem. Hỏi cần giảm giá vé đến bao nhiêu nghìn đồng để doanh thu của rạp là lớn nhất.

Lời giải

Gọi x là giá tiền một vé, y là số người mua vé tương ứng.

Ta có giá tiền tỉ lệ nghịch với số người mua vé nên $y = ax + b$

Khi $x = 100$ thì $y = 360$, Khi $x = 90$ thì $y = 420$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 100a + b = 360 \\ 90a + b = 420 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 960 \end{cases}$$

Hay $y = -6x + 960$.

Doanh thu của rạp chiếu phim là $T(x) = xy = x(-6x+960) = -6x^2 + 960x$ với $0 < x \le 100$

$T' = -12x + 960 = 0 \Leftrightarrow x = 80$

BBT

x	0		80		100
T'		$+$	0	$-$	
T		$\nearrow$	38400	$\searrow$	

Vậy khi giá vé là 80.000đ thì doanh thu của Rạp là lớn nhất.

Câu 22: Một bể ban đầu chứa 150 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 50 lít nước, đồng thời cho vào bể 20 gam chất khử trùng (hòa tan). Đặt $f(t)$ gam/lít là nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút ($t \geq 0$), biết rằng sau khi khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(t)$, ta thấy giá trị $f(t)$ tăng theo t nhưng không vượt ngưỡng p gam/lít. Tìm số p (kết quả thể hiện dưới dạng số thập phân).

Lời giải

Sau t phút, trong bể chứa $(50t+150)$ lít nước và $20t$ gam chất khử trùng.

Suy ra nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút là $f(t)=\dfrac{20t}{50t+150}$ gam/lít.

Khảo sát sự biến thiên hàm số $f(t)=\dfrac{20t}{50t+150}$, $t \geq 0$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{3000}{(50t+150)^2}>0, \forall t \geq 0$

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{20t}{50t+150}=\lim_{t\to+\infty}\frac{20}{50+\frac{150}{t}}=\frac{2}{5}=0,4$$

Bảng biến thiên

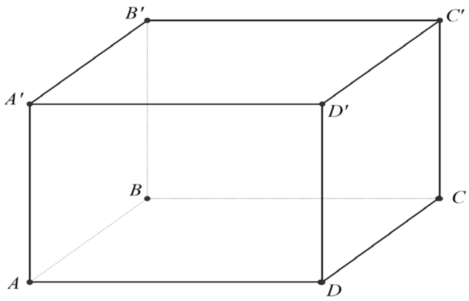
t	0		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$0,4$

Dựa vào BBT ta thấy giá trị $f(t)$ tăng theo t nhưng không vượt ngưỡng $0,4$ gam/lít.

Vậy $p=0,4$.

Câu 23: Ông A dự định sử dụng hết $6,7\,m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải



Gọi x là chiều rộng, ta có chiều dài là $2x$

Do diện tích đáy và các mặt bên là $6,7m^2$ nên có chiều cao $h=\dfrac{6,7-2x^2}{6x}$,

Ta có : $h>0$ nên $x<\sqrt{\dfrac{6,7}{2}}$.

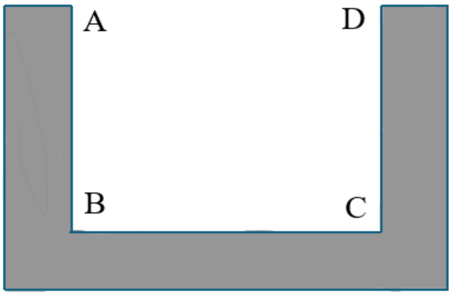
Thể tích bể cá là $V(x)=\dfrac{6,7x-2x^3}{3}$ và $V'(x)=\dfrac{6,7-6x^2}{3}=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{6,7}{6}}$

Bảng biến thiên

x	0		$\sqrt{\dfrac{6,7}{6}}$		$\sqrt{\dfrac{6,7}{2}}$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$1,57m^3$	$\searrow$	0

Bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,57\text{m}^3$.

Câu 24: Hình dưới đây là mương dẫn nước thủy lợi tại một địa phương phục vụ tưới tiêu cho ruộng đồng. Phần không gian trong mương để nước chảy có mặt cắt ngang là hình chữ nhật $ABCD$. Với điều kiện lưu lượng nước qua mương cho phép thì diện tích mặt cắt $ABCD$ là $0,48\,m^2$. Để đảm bảo yêu cầu kỹ thuật tốt nhất cho mương, người ta cần thiết kế sao cho tổng độ dài $T = AB + BC + CD$ là ngắn nhất. Khi đó chiều rộng đáy mương bằng bao nhiêu (biết chiều rộng phải dưới 1m, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Lời giải

Đặt $BC = x(m), 0 < x < 1$. Theo đề bài, ta có $AB.BC = 0,48 \Rightarrow AB = \dfrac{0,48}{BC} = \dfrac{0,48}{x}$.

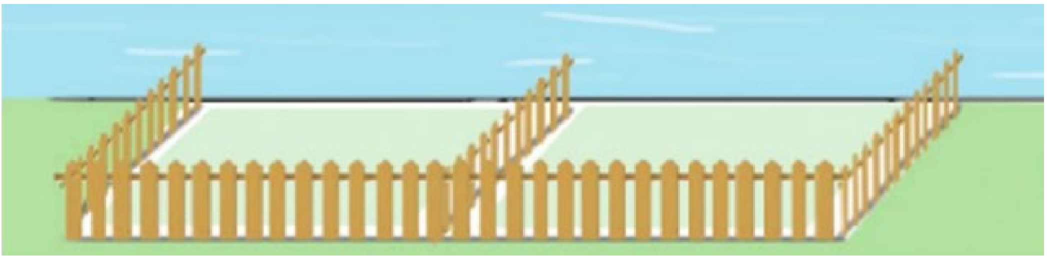
$T = f(x) = AB + BC + CD = x + 2.AB = x + \dfrac{0,96}{x}$.

$f'(x) = 1 - \dfrac{0,96}{x^2}$. Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 0,96 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2\sqrt{6}}{5} \simeq 0,98(m)$.

x	0		$\frac{2\sqrt{6}}{5}$		1
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4\sqrt{6}}{5}$	$\nearrow$	$\frac{49}{25}$

Vậy chiều rộng đáy mương $BC = 0,98(m)$ thỏa ycbt.

Câu 25: Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (hình vẽ dưới). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.



Lời giải

Gọi độ dài của hàng rào song song với bờ sông là x với $x > 0$

Gọi độ dài của mỗi hàng rào trong ba hàng rào song song nhau là y với $y > 0$

Diện tích đất mà bác nông dân rào được là: $xy\left(m^2\right)$

Tổng chi phí là 15 000 000 đồng nên ta có phương trình:

$x60000+3y50000=15000000 \Rightarrow 6x+15y=1500$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có:

$6x+15y \geq 2\sqrt{6x.15y} => 1500 \geq 2\sqrt{90xy} => xy \leq 6250$

Vậy diện tích lớn nhất mà bác nông dân có thể tạo rào là $6250\left(m^2\right)$

Câu 26: Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B. Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x)=45-0,001x^2$ (triệu đồng). Cho phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x)=100+30x$ triệu đồng (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

a) Tính chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng.

b) Tính số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B.

c) Xác đinh hàm số biểu thị lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm $(0 \leq x \leq 100)$ cho B.

d) A bán cho B khoảng bao nhiêu tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất?

Lời giải

a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là $C(10)=100+30.10=400$ triệu đồng.

b) Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là $R(10)=10.P(10)=10.\left(45-0,001.10^2\right)=449$ triệu đồng.

c) Lợi nhuận mà A thu được là:

$H(x)=R(x)-C(x)=xP(x)-C(x)=P(x)=45x-0,001x^3-(100+30x)$

$=-0,001x^3+15x-100$.

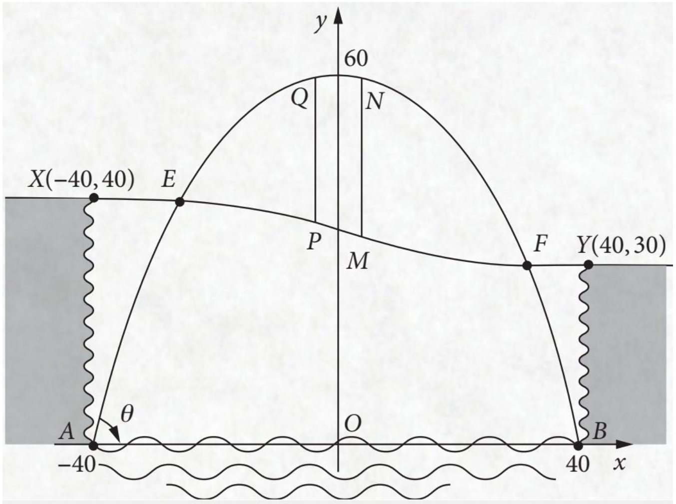
d) Xét hàm số $H(x)=-0,001x^3+15x-100$, $(0 \leq x \leq 100)$ ta có $H'(x)=-0,003x^2+15$,

$H'(x)=0 \Leftrightarrow -0,003x^2+15=0 \Leftrightarrow x=50\sqrt{2}$ (chọn).

Ta có $H(0)=-100$; $H\left(50\sqrt{2}\right)=500\sqrt{2}-100$; $H(100)=400$.

Vậy A bán cho B khoảng $50\sqrt{2} \approx 70,7$ tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất bằng $H\left(50\sqrt{2}\right) = 500\sqrt{2} - 100$.

Câu 27: Một thành phố nằm trên một con sông chảy qua hẻm núi. Hẻm có chiều ngang 80m, một bên cao 40 m và một bên cao 30 m. Một cây cầu sẽ được xây dựng bắc qua sông và hẻm núi. Sơ đồ thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ dưới đây.



Con đường XY xuyên qua hẻm núi được mô hình hóa bằng phương trình: $y = \dfrac{x^3}{25600} - \dfrac{3x}{16} + 35$
.

Hai cột đỡ dọc MN và PQ (song song với trục Oy) là đoạn nối giữa khung của Parabol và đường XY. Tính tổng độ dài đoạn MN và PQ biết rằng N và Q là hai điểm đối xứng qua Oy; MN là đoạn có độ dài lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Lời giải

Theo bài ra ta có: phương trình của Parabol là $y = 60 - \dfrac{3}{80}x^2$.

Khoảng cách giữa khung Parabol và đường xuyên núi là:

$D = 60 - \dfrac{3}{80}x^2 - \left(\dfrac{x^3}{25600} - \dfrac{3x}{16} + 35\right)$ với $x \in (-23,71; 27,99)$

Xét $D' = -\dfrac{3}{40}x - \dfrac{3x^2}{25600} + \dfrac{3}{16} = 0 \Leftrightarrow x = 2,49$

Bảng biến thiên:

x	$-23,71$	$2,49$	$27,99$
D'(x)	+	0	−
D(x)	0 ↗	25,23	↘ 0

Dựa vào bảng biến thiên, MN là đoạn có độ dài lớn nhất khi $x = 2,49$

$\Rightarrow MN = D_{MN} = 60 - \dfrac{3}{80}.2,49^2 - \left(\dfrac{2,49^3}{25600} - \dfrac{3.2,49}{16} + 35\right) \approx 25,23$

Vì N và Q là hai điểm đối xứng qua $Oy \Rightarrow x_{PQ} \approx -2,49$

$$\Rightarrow PQ = D_{PQ} = 60 - \frac{3}{80}.2,49^2 - \left(\frac{-2,49^3}{25600} - \frac{3.-2,49}{16} + 35\right) \approx 24,3$$

Tổng độ dài $MN + PQ = 49,5$.

Câu 28: Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá $30\,000$ đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá $30\,000$ đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là $18\,000$.

a) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì mỗi chiếc khăn cần tăng thêm 10000 đồng

b) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì mỗi chiếc khăn cần bán với giá 39000 đồng

c) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì sau khi tăng giá mỗi chiếc khăn lãi 21000 đồng

d) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì số khăn bán ra giảm 800 chiếc

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

Gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là x (nghìn đồng).

Vì cứ tăng giá thêm 1 (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm 100 chiếc nên tăng x (nghìn đồng) thì số xe khăn bán ra giảm $100x$ chiếc.

Do đó tổng số khăn bán ra mỗi tháng là: $3000 - 100x$ chiếc.

Lúc đầu bán với giá 30 (nghìn đồng), mỗi chiếc khăn có lãi 12 (nghìn đồng). Sau khi tăng giá, mỗi chiếc khăn thu được số lãi là: $12 + x$ (nghìn đồng).

Do đó tổng số lợi nhuận một tháng thu được sau khi tăng giá là:

$f(x) = (3000 - 100x)(12 + x)$ (nghìn đồng).

Xét hàm số $f(x) = (3000 - 100x)(12 + x)$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có: $f(x) = -100x^2 + 1800x + 36000$.

$f'(x) = -200x + 1800$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -200x + 1800 = 0 \Leftrightarrow x = 9$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0; +\infty)$ ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất khi $x = 9$

Như vậy, để thu được lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sản xuất cần tăng giá bán mỗi chiếc khăn là 9000 đồng, tức là mỗi chiếc khăn bán với giá mới là $39\,000$ đồng.

Câu 29: Chi phí nhiên liệu của một chiếc tầu chạy trên sông được chia làm hai phần. Phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 nghìn đồng trên 1 giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v = 10$ (*km/giờ*) thì phần thứ hai bằng 30 *nghìn đồng/giờ*. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Khi vận tốc $v = 10$ (*km/giờ*) thì chi phí nguyên liệu cho phần thứ nhất trên 1 *km* đường sông là 48000 đồng.

b) Hàm số xác định tổng chi phí nguyên liệu trên 1 *km* đường sông với vận tốc $x(km/h)$ là $f(x) = \dfrac{480}{x} + 0,03x^3$.

c) Khi vận tốc $v = 30$ (*km/giờ*) thì tổng chi phí nguyên liệu trên 1 *km* đường sông là 43000 đồng.

d) Vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 *km* đường sông nhỏ nhất là $v = 20$ (*km/giờ*).

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Đúng.

Thời gian tàu chạy quãng đường $1km$ là: $\frac{1}{10}$ (giờ)

Chi phí tiền nhiên liệu cho phần thứ nhất là: $\frac{1}{10} \cdot 480000 = 48000.$ (đồng).

b) Sai

Gọi $x(km/h)$ là vận tốc của tàu, $x > 0$

Thời gian tàu chạy quãng đường $1km$ là: $\frac{1}{x}$ (giờ)

+) Chi phí tiền nhiên liệu cho phần thứ nhất là: $\frac{1}{x} \cdot 480 = \frac{480}{x}.$ (ngàn đồng)

+) Hàm chi phí cho phần thứ hai là $p = kx^3$ (ngàn đồng/ giờ)

Mà khi $x = 10 \Rightarrow p = 30 \Rightarrow k = 0,03$. Nên $p = 0,03x^3$ (ngàn đồng/ giờ)

Do đó chi phí phần 2 để chạy 1 *km* là: $\frac{1}{x} \cdot 0,03x^3 = 0,03x^2.$ (ngàn đồng)

Vậy tổng chi phí: $f(x) = \frac{480}{x} + 0,03x^2$.

c) Đúng

Tổng chi phí: $f(x) = \frac{480}{x} + 0,03x^2$.

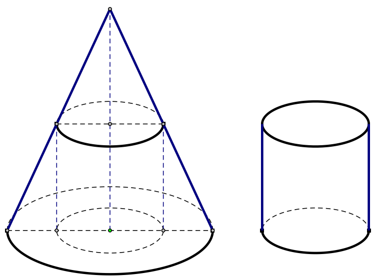
Thay $x = v = 30$ (*km/giờ*) vào ta có $f(30) = \frac{480}{30} + 0,03.30^2 = 43$(ngàn đồng).

d) Đúng

$$f(x) = \frac{480}{x} + 0,03x^2 = \frac{240}{x} + \frac{240}{x} + 0,03x^2 \geq 3\sqrt[3]{1728} = 36.$$

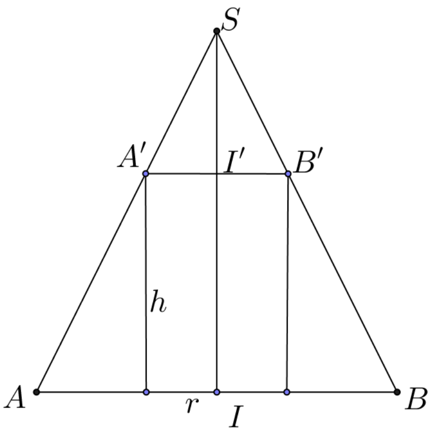
Dấu ''='' xảy ra khi $x = 20$.

Câu 30: Một khúc gỗ có dạng hình khối nón có bán kính đáy $r = 2m$, chiều cao $l = 6m$. Bác thợ mộc chế tác từ khúc gỗ đó thành một khúc gỗ có dạng hình khối trụ như hình vẽ.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Ta có mặt cắt qua trục hình nón như hình vẽ. Đặt x là bán kính đáy hình trụ, h là chiều cao của hình trụ.



Khi đó chiều cao của khối trụ tính theo bán kính đáy hình trụ là $h = -3x + 6(m)$ với $0 < x < 2$.

b) Hàm số xác định thể tích của khối trụ trên là $V = 6x^2 - 3x^3\left(m^3\right), \quad \forall x \in (0;2)$.

c) Giả sử bác thợ mộc chế tác khúc gỗ đó thành hình trụ có bán kính đáy bằng chiều cao, khi đó thể tích của khối trụ là $V = \dfrac{27}{8}\pi\left(m^3\right)\cdot$

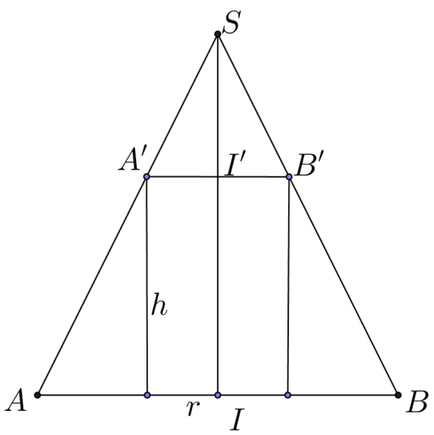
d) Thể tích lớn nhất của khối gỗ mà bác thợ mộc chế tác là $V_{\max} = \dfrac{32\pi}{9}\left(m^3\right)$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) **Đúng**.

Ta có mặt cắt qua trục hình nón như hình vẽ. Đặt x là bán kính đáy hình trụ, h là chiều cao của hình trụ.



Ta có hai tam giác SAI và $SA'I'$ đồng dạng.

$\Rightarrow \dfrac{SI}{SI'} = \dfrac{AI}{A'I'} \Leftrightarrow \dfrac{6}{6-h} = \dfrac{2}{x} \Rightarrow h = 6 - 3x$, với $0 < x < 2$

b) **Sai**.

Ta có:

Chiều cao của khối trụ tính theo bán kính đáy hình trụ là $h = -3x + 6$ với $0 < x < 2$.

Suy ra: Thể tích của khối trụ là: $V = \pi.x^2.h = \pi.x^2.(6-3x) = \pi\left(-3x^3 + 6x^2\right)$, với $0 < x < 2$.

c) **Đúng**.

Bác thợ mộc chế tác khúc gỗ đó thành hình trụ có bán kính đáy bằng chiều cao

Suy ra: $x = 6 - 3x \Rightarrow x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow V = \pi \cdot \left[-3\left(\dfrac{3}{2}\right)^3 + 6\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 \right] =$, khi đó thể tích của khối trụ là

$V = \pi \cdot \left[-3\left(\dfrac{3}{2}\right)^3 + 6\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 \right] = \dfrac{27}{8}\pi\left(m^3\right)$.

d) **Đúng**.

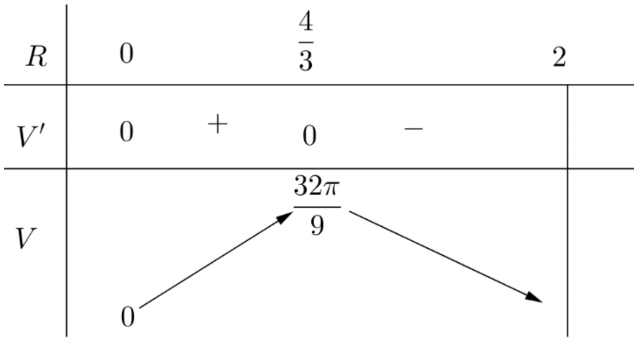
Thể tích của khối trụ là: $V = \pi.x^2.h = \pi.x^2.(6 - 3x) = \pi\left(-3x^3 + 6x^2\right)$, với $0 < x < 2$.

Xét hàm số $V = \pi\left(-3x^3 + 6x^2\right)$, với $0 < x < 2$.

$V' = \pi\left(-9x^2 + 12x\right)$.

$V' = 0 \Leftrightarrow \pi\left(-9x^2 + 12x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \ (l) \\ x = \dfrac{4}{3} \ (n) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $V_{\max} = \dfrac{32\pi}{9}\left(m^3\right)$ khi $x = \dfrac{4}{3}$.

Câu 31: Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật thể sau thời gian t giây được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 5 mét với tốc độ ban đầu 39,2 m/s là $h(t) = 5 + 39,2t - 4,9t^2$, chọn chiều dương là chiều hướng từ dưới lên. *(theo Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).*

Mệnh đề	**Đúng**	**Sai**
a) Vận tốc của vật sau 3 giây là $4,6\,m/s$.		
b) Vật đạt độ cao lớn nhất bằng $83,4$ mét tại thời điểm $t = 4$ giây.		
c) Khoảng thời gian vật ở độ cao trên 10 mét dài hơn 7 giây.		
d) Vận tốc của vật lúc vật chạm đất sấp xỉ $-40,43(m/s)$		

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

a. Sai

Vận tốc của vật tại thời điểm t giây là $v(t) = h'(t) = 39,2 - 9,8t$.

Vận tốc của vật sau 3 giây là $v(3) = 9,8\,m/s$.

b. Đúng

Vì $h(t)$ là hàm số bậc hai có hệ số $a=-4,9<0$ nên $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm $t=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{39,2}{2,4,9}=4$ (giây). Khi đó độ cao lớn nhất của vật là $h(4)=83,4$ (m).

c. Đúng

Vật ở độ cao trên 10 mét khi $h(t)>10\Leftrightarrow -4,9t^2+39,2t-5>0\Leftrightarrow \dfrac{28-\sqrt{734}}{7}<t<\dfrac{28+\sqrt{734}}{7}$.

Khoảng thời gian vật ở độ cao trên 10 mét dài $\dfrac{28+\sqrt{734}}{7}-\dfrac{28-\sqrt{734}}{7}=\dfrac{2\sqrt{734}}{7}\approx 7,74$ (giây)

d. Đúng

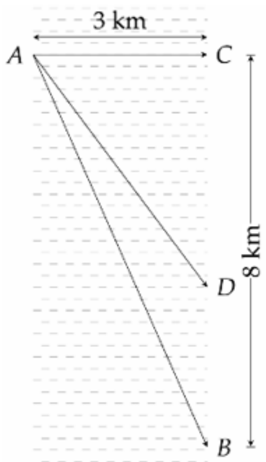
Vật chạm đất khi độ cao bằng 0, tức là

$$h(t)=0\Leftrightarrow -4,9t^2+39,2t+5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{28+\sqrt{834}}{7}\left(tm\ t>0\right) \\ t=\dfrac{28-\sqrt{834}}{7}\left(ktm\ t>0\right)\end{array}\right.$$

Khi đó vận tốc của vật là $v\left(\dfrac{28+\sqrt{834}}{7}\right)\approx -40,43\left(m/s\right)$.

Vận tốc của vật âm chứng tỏ chiều chuyển động của vật ngược chiều dương của trục đã chọn.

Câu 32: Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ).



Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B, hay có thể chèo trực tiếp đến B, hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B. Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC=8$ km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Gọi x (km) là độ dài quãng đường BD. Xét tính đúng sai trong các khẳng định sau:

a) $8-x$ (km) là độ dài quãng đường CD.

b) Thời gian chèo thuyền trên quãng đường AD là: $\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{3}$ (giờ)

c) Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{3}+\dfrac{8-x}{8}$

d) Khoảng 1 giờ 20 phút là khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) Đúng: Gọi $x\,(\text{km})$ là độ dài quãng đường BD; $8-x\,(\text{km})$ là độ dài quãng đường CD.

b) Sai: Thời gian chèo thuyền trên quãng đường $AD=\sqrt{x^2+9}$ là: $\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6}$ (giờ)

Thời gian chạy trên quãng đường DB là: $\dfrac{8-x}{8}$ (giờ)

c) Sai: Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6}+\dfrac{8-x}{8}$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6}+\dfrac{8-x}{8}$ trên khoảng $(0;8)$

Ta có $f'(x)=\dfrac{x}{6\sqrt{x^2+9}}-\dfrac{1}{8}$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+9}=4x \Leftrightarrow x=\dfrac{9}{\sqrt{7}}$

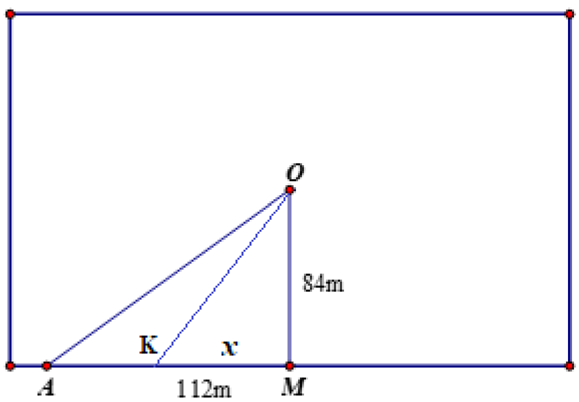
Bảng biến thiên

x	0		$9/\sqrt{7}$		8
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	$1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}$	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{73}}{6}$

d) Đúng: Dựa vào bảng biến thiên ta thấy thời gian ngắn nhất để di chuyển từ A đến B là $1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}$

Vậy khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B là $1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}\approx 1^{\text{h}}20'$.

Câu 33: Gia đình bác Hùng có một ao cá hình chữ nhật. Để lắp đặt một hệ thống điện ra vị trí O ở giữa hồ bác dự định nối một đường dây điện từ vị trí A trên bờ hồ đến vị trí O ở giữa hồ (như hình vẽ). Biết khoảng cách ngắn nhất từ O đến bờ hồ là $OM=84m$, khoảng cách từ A đến M là $AM=112m$. Mỗi mét dây điện lắp đặt ở trên bờ có chi phí cả tiềnn công và tiền vật liệu là 25200 đồng và mỗi mét dây điện lắp đặt ở dưới nước có chi phí cả tiền công và tiền vật liệu là 42000 đồng.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đúng	Sai

a) Nếu nối đường dây điện theo đường gấp khúc $AM+MO$ thì chi phí lắp đặt đường dây điện bé hơn 6000000 đồng		
b) Nếu chọn một vị trí K trên đoạn AM sao cho $KM=x$ (với x thay đổi sao cho $0\le x\le 112$) sau đó nối đường dây điện theo đường gấp khúc $AK+KO$ thì chi phí lắp đặt đường dây điện là một hàm số biến x và ta có hàm số là: $f(x)=25200(112-x)+42000\sqrt{x^2+84^2}$		
c) Nếu chọn điểm K cách điểm A một khoảng bằng 63m sau đó nối đường dây điện theo đường gấp khúc $AK+KO$ thì chi phí lắp đặt đường dây điện là thấp nhất.		
d) Chi phí thấp nhất để lắp đặt đường dây điện là 5644800 đồng		

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

Nếu nối đường dây điện theo đường gấp khúc $AM+MO$ thì chi phí lắp đặt đường dây điện là $112.25200+84.42000=6350400$ suy ra mệnh đề a) sai.

Ta có $AK=112-x$ và $KO=\sqrt{x^2+84^2}$ suy ra chi phí lắp đặt đường dây điện theo đường gấp khúc $AK+KO$ là $f(x)=25200(112-x)+42000\sqrt{x^2+84^2}$ suy ra mệnh đề b) đúng

Chi phí nối đường dây điện theo đường gấp khúc $AK+KO$ hàm số

$f(x)=25200(112-x)+42000\sqrt{x^2+84^2}$, khỏa sát hàm số ta có

$$f'(x)=-25200+42000\frac{x}{\sqrt{x^2+84^2}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+84^2}}=\frac{25200}{42000}=\frac{3}{5}\Leftrightarrow x=\pm 63$$

Suy ra $KM=63m, AK=49m$ suy ra mệnh đề c) sai.

Chi phí lắp đặt thấp nhất là $f(63)=25200(112-63)+42000\sqrt{63^2+84^2}=5644800$

Suy ra mệnh đề d) đúng.

Câu 34: Người ta muốn xây một cái bể hình hộp đứng có thể tích $V=18\left(m^3\right)$, biết đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng và bể không có nắp. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

Để nguyên vật liệu xây dựng là ít nhất (biết nguyên vật liệu xây dựng các mặt là như nhau) thì

a) Chiều rộng của đáy bể bằng 2 m.

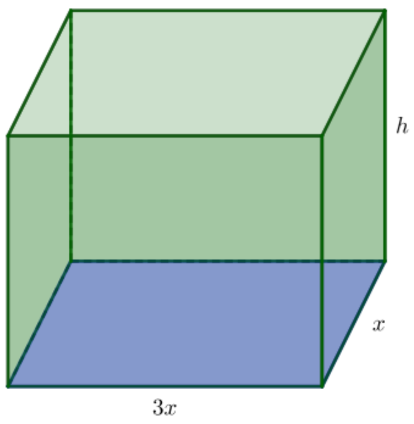
b) Chiều dài của đáy bể bằng 6 m.

c) Chiều cao của bể là $h=3$ m.

d) Diện tích xung quanh của bể bằng 48 m^2.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai



Gọi $x\ (x>0)$ là chiều rộng hình chữ nhật đáy bể,

suy ra chiều dài hình chữ nhật đáy bể là $3x$.

$V = h.x.3x = h.3x^2 = 18\ \ (x>0) \Rightarrow h = \dfrac{18}{3x^2} = \dfrac{6}{x^2}$,

Gọi P là diện tích xung quanh cộng với diện tích một đáy bể của hình hộp chữ nhật.

Nguyên vật liệu ít nhất khi P nhỏ nhất.

$P = 2hx + 2.h.3x + 3x^2 = 2.\dfrac{6}{x^2}.x + 2.\dfrac{6}{x^2}.3x + 3x^2 = \dfrac{48}{x} + 3x^2$.

Đặt $f(x) = \dfrac{48}{x} + 3x^2$, $(x>0)$. Ta có $f'(x) = \dfrac{-48}{x^2} + 6x$,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-48}{x^2} + 6x = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	36	$\nearrow$	

a) Ta có chiều rộng của đáy bể là $x = 2$ m. Mệnh đề **đúng**.

b) Ta có chiều dài của đáy bể là $3x = 6$ m. Mệnh đề **đúng**.

c) Ta có chiều cao của bể $h = \dfrac{6}{x^2} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$ m. Mệnh đề **sai**.

d) Diện tích xung quanh của bể là $S = 2.2.\dfrac{3}{2} + 2.6.\dfrac{3}{2} = 24$ m^2. Mệnh đề **sai**.

Câu 35: Một vật chuyển động có phương trình quãng đường tính bằng mét phụ thuộc thời gian t tính bằng giây được biểu thị bởi hàm số $f(t) = -t^3 + 9t^2 + 21t$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Quãng đường mà vật đi được sau 2s kể từ lúc bắt đầu chuyển động là $70m$.

b) Vận tốc lớn nhất của vật thể là $21(m/s)$.

c) Vận tốc của vật tăng từ lúc bắt đầu chuyển động đến giây thứ 3.

d) Kể từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn, vật đi được quãng đường là $150m$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

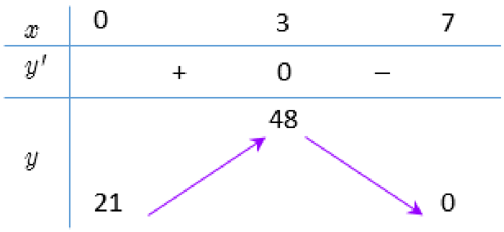
a) Quãng đường mà vật đi được sau 2s chuyển động là $f(2) = -2^3 + 9.2^2 + 21.2 = 70(m)$.

Mệnh đề **a) Đúng**.

b) Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm *t* tính theo công thức sau

$v(t) = f'(t) = -3t^2 + 18t + 21 \Rightarrow v(t) = -3(t-3)^2 + 48 \le 48 \Rightarrow$ Vận tốc lớn nhất của vật thể là $48(m/s)$. Mệnh đề **b) Sai**

c) Xét hàm số $v(t) = -3t^2 + 18t + 21 \Rightarrow v'(t) = -6t + 18$



Căn cứ vào bảng biến thiên suy ra vận tốc vận thể tăng từ lúc bắt đầu chuyển động đến giây thứ 3. Mệnh đề **c) Đúng**

d) Vật dừng hẳn khi vận tốc bằng 0.

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow -3t^2 + 18t + 21 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1(l) \\ t = 7 \end{array}\right.$$

Vật dừng hẳn sau 7s chuyển động.

Quãng đường mà vật di duyển được là $S = f(7) = -7^3 + 9.7^2 + 21.7 = 245(m)$

Mệnh đề **d) Sai.**

Câu 36: Một cơ sở đóng giầy sản xuất mỗi ngày được x đôi giầy. $1 \le x \le 20$. Tổng chi phí sản xuất x đôi giầy(đơn vị nghìn đồng) là $C(x) = x^3 - 6x^2 - 88x + 592$. Giả sử cơ sở này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 200 nghìn đồng /một đôi. Gọi $T(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được sau khi bán hết x đôi giầy.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đúng	Sai
a) Giả sử trong một ngày nào đó cơ sở sản xuất được 10 đôi giầy thì lợi nhuận thu được là 1888 (nghìn đồng).		
b) Giả sử trong một ngày nào đó cơ sở lợi nhuận thu được là 1584 (nghìn đồng) khi đó cơ sở phải sản xuất được 9 đôi giầy.		
c) Cơ sở này sản xuất được 12 đôi giầy thì lợi nhuận thu được là nhiều nhất.		
d) Lợi nhuận tối đa thu được trong một ngày là 1980 nghìn đồng.		

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) Lợi nhuận thu được là $L(x) = T(x) - C(x) = -x^3 + 6x^2 + 288x - 592$.

Một ngày nào đó cơ sở sản xuất được 10 đôi giầy thì lợi nhuận thu được là:
$L(10) = -10^3 + 6.10^2 + 288.10 - 592 = 1888$ (nghìn đồng). Chọn **đúng.**

b) Lợi nhuận thu được là 1584, khi đó ta có $1584 = -x^3 + 6x^2 + 288x - 592$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 - 288x + 2176 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 + \sqrt{273} \\ x = -1 - \sqrt{273} \\ x = 8 \end{array}\right. .$$

Chọn **sai**.

c) Xét hàm số $L(x) = -x^3 + 6x^2 + 288x - 592$ với $1 \le x \le 20$.

$L'(x) = -3x^2 + 12x + 288$

$L'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 12x + 288 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 12 \\ x = -8 (l) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	1		12		20
$L'(x)$		$+$	0	$-$	
$L(x)$	-299	$\nearrow$	2000	$\searrow$	-432

Vậy cơ sở sản xuất được 12 đôi giầy thì lợi nhuận đạt cao nhất. Chọn **đúng**.

d) Khi đó lợi nhuận tối đa đạt được trong một ngày là 1980 (nghìn đồng). Chọn **sai.**

Câu 37: Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm tính theo công thức $V(t) = \frac{1}{100}\left(30t^3 - \frac{t^4}{4}\right)$, $(0 \le t \le 90)$. Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi $f(t) = V'(t)$. Trong các khẳng định sau, chọn khẳng định đúng hoặc sai?

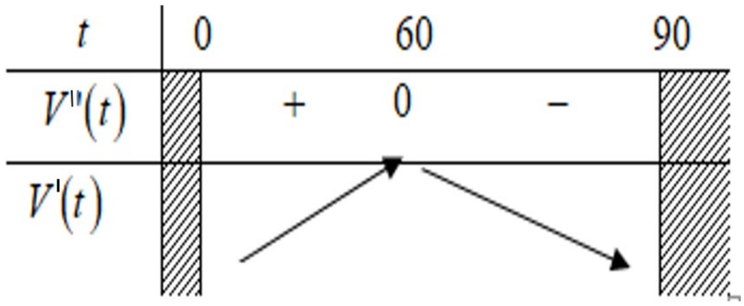
a) Tốc độ bơm giảm từ phút thứ 60 đến phút thứ 90.
b) Tốc độ bơm tăng từ phút 0 đến phút thứ 75.
c) Tốc độ bơm luôn giảm.
d) Tốc độ bơm lớn nhất ở phút thứ 60.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

$$V'(t) = \frac{1}{100}\left(90t^2 - t^3\right) \Rightarrow V''(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{100}\left(180t - 3t^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 60 \\ t = 0 \end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên ta có:



Dựa vào bảng biến thiên ta có

Câu 38: Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y = t^3 - 12t + 3,\ t \ge 0$.

a) Hàm gia tốc của vật là $a = y'$.

b) Hàm vận tốc của vật là $v(t) = 3t^2 - 12$.

c) Tại thời điểm $t = 1$ thì hạt đang chuyển động lên trên.

d) Trong khoảng thời gian $0 \le t \le 3$, quãng đường mà hạt đi là 23m.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Nếu y là hàm số biểu thị cho chuyển động của hạt thì y' là hàm vận tốc v.

b) Ta có $y = t^3 - 12t + 3 \Rightarrow y' = v = 3t^2 - 12$

c) Dựa vào hàm vận tốc $v(t) = 3t^2 - 12$ thì hạt đi lên khi $v > 0$ và xuống khi $v < 0$. Do đó, vật đi lên khi $t \in (2;+\infty)$ và đi xuống khi $t \in (0;2)$. Vậy tại thời điểm $t = 1$ thì hạt đang chuyển động đi xuống.

d)

+) Từ $t = 0$ tới $t = 2$, vật chuyển động từ tọa độ $y = 3$ đến tọa độ $y = -13$, tức là vật đi được quãng đường 16 đơn vị độ dài.

+) Từ $t = 2$ tới $t = 3$, vật chuyển động từ tọa độ $y = -13$ đến tọa độ $y = -6$, tức là vật đi được quảng đường 7 đơn vị độ dài.

Kết luận quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian $0 \le t \le 3$ là 23 đơn vị độ dài.

Câu 39: Dân số của một quốc gia sau t (năm) bắt đầu từ năm 2023 được tính theo công thức $N(t) = 100e^{0,012t}$ (trong đó $N(t)$ được tính bằng triệu người, $0 \le t \le 50$)

a) Dân số của quốc gia này ở năm 2030 vượt mức 110 triệu người.

b) Dân số của quốc gia này ở năm 2035 vượt mức 115 triệu người.

c) Vào năm 2030 thì tốc độ tăng dân số là $1,6$ triệu người/năm.

d) Vào năm 2026 thì tốc độ tăng dân số là $1,6$ triệu người/năm.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Dân số của quốc gia này ở năm 2030 là $N(7) = 100e^{0,012.7} \approx 108,8$ triệu người.

b) Dân số của quốc gia này ở năm 2035 là $N(12) = 100e^{0,012.12} \approx 115,5$ triệu người.

c) Hàm tốc độ tăng dân số là $N'(t) = 1,2e^{0,012t}$. Ta có:

$$1,2e^{0,012t} = 1,6 \Leftrightarrow t \approx 2,34.$$

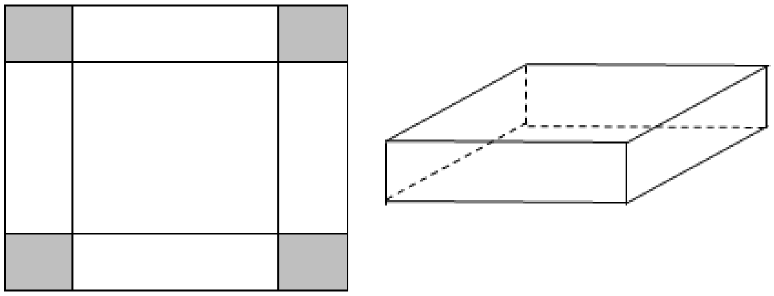
Vậy thời vào năm 2026, tốc độ tăng dân số là $1,6$ triệu người/năm

d) Hàm tốc độ tăng dân số là $N'(t)=1,2e^{0,012t}$. Ta có:

$$1,2e^{0,012t}=1,6 \Leftrightarrow t\approx 2,34.$$

Vậy thời vào năm 2026, tốc độ tăng dân số là $1,6$ triệu người/năm.

Câu 40: Một tấm nhôm hình vuông cạnh $120cm$. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(cm)$, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp.



a) Thể tích khối hộp nhận được khi tính theo x là $V=x(120-2x)^2$.

b) Khi $x=10cm$ thì thể tích của khối hộp nhận được là $1(m^3)$.

c) Để hộp nhận được có thể tích lớn nhất thì $x=20(cm)$.

d) Hộp nhận được có thể tích lớn nhất là $128(dm^3)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Điều kiện: $0<x<60$ ta có $V=h.B=x(120-2x)^2$.

b) Xét hàm số $f(x)=x(120-2x)^2$.

Khi $x=10cm$ thể tích khối hộp nhận được là $V=100000(cm^3)=0,1(m^3)$.

c) Với $x\in(0;60)$ ta có: $f'(x)=12x^2-960x+14400 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=60\,(l) \\ x=20 \end{array}\right.$.

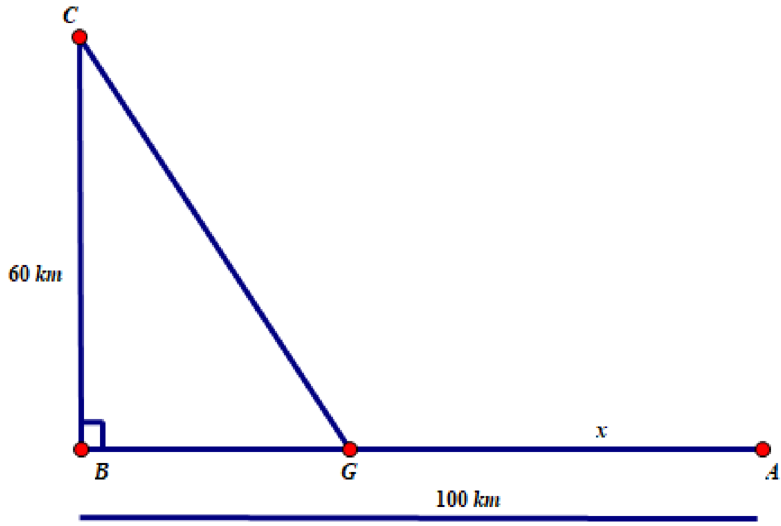
Bảng biến thiên

x	0		20		60
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	128000	$\searrow$	0

Suy ra V đạt giá trị lớn nhất khi $x=20(cm)$.

d) $V_{\max}=128000(cm^3)=128(dm^3)$

Câu 41: Đường dây điện $110KV$ kéo từ trạm phát (điểm A) trong đất liền ra Côn Đảo (điểm C). Biết $BC=60km$, $AB=100km$, góc $\widehat{ABC}=90^\circ$, như hình vẽ. Mỗi km dây điện dưới nước chi phí là $5000USD$, chi phí cho mỗi km dây điện trên bờ là $3000USD$. Đặt $x=AG$.



a) Khi $x = 20\,km$ thì đường dây điện nối từ C về G dài $100km$.

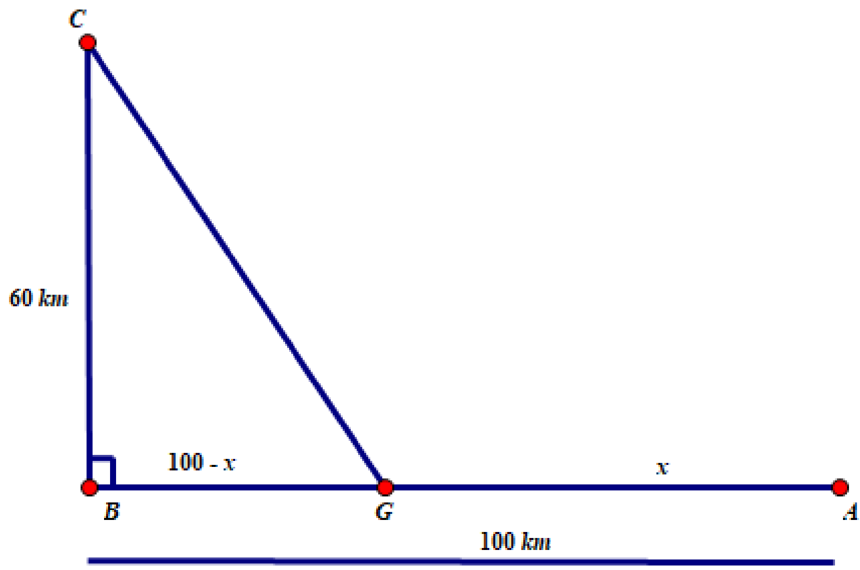
b) Khi $x = 20\,km$ thì tổng chi phí mắc điện là $560.000USD$.

c) Tổng chi phí mắc điện nhỏ nhất khi $x = 50km$.

d) Tổng chi phí mắc điện nhỏ nhất là $540.000USD$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng



a) Có $AG = x \Rightarrow BG = 100 - x$ với $0 \le x \le 100$.

Xét tam giác CBG vuông tại B có $CG = \sqrt{CB^2 + BG^2} = \sqrt{3600 + (100 - x)^2}$.

Khi $x = 20\,km \Rightarrow CG = 100\,km$.

b) Chi phí tiền mắc điện là $f(x) = 3000x + 5000.\sqrt{3600 + (100 - x)^2}$

Khi $x = 20\,km \Rightarrow CG = 100\,km$ và tổng chi phí mắc điện là $T = f(20) = 560.000\,USD$.

c) Để chi phí mắc điện ít nhất thì $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $f'(x)=3000-5000\dfrac{(100-x)}{\sqrt{3600+(100-x)^2}}$

$\Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow 3000=5000\dfrac{(100-x)}{\sqrt{3600+(100-x)^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=55 \\ x=145(l) \end{array}\right.$.

Ta có

$f(0)=583095{,}1895USD$

$f(55)=540.000USD$

$f(100)=600.000USD$

Vậy chi phí mắc điện nhỏ nhất khi $x=55km$.

d) chi phí mắc điện nhỏ nhất là $540.000USD$

Câu 42: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá $2.000.000$ đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có lợi nhuận cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu (đơn vị tính bằng triệu đồng và làm tròn kết quả tới hàng phần trăm)?

Lời giải

Gọi x là giá thuê thực tế của mỗi căn hộ, (x: đồng; $x \geq 2\ 000\ 000$ đồng)

+) Khi tăng giá 100.000 đồng thì có 2 căn hộ bị bỏ trống.

Tăng giá $x-2.000.000$ đồng, ta có số căn hộ bị bỏ trống là $\dfrac{2(x-2.000.000)}{100.000}=\dfrac{x-2.000.000}{50.000}$

Khi cho thuê với giá x đồng thì số căn hộ cho thuê là: $50-\dfrac{x-2.000.000}{50.000}=-\dfrac{x}{50.000}+90$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ, ($F(x)$: đồng).

Ta có: $F(x)=\left(-\dfrac{x}{50.000}+90\right)x=-\dfrac{1}{50.000}x^2+90x$

Ta tìm GTLN của $F(x)=-\dfrac{1}{50.000}x^2+90x$, $x \geq 2.000.000$

$F'(x)=-\dfrac{1}{25.000}x+90$

$F'(x)=0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{25.000}x+90=0 \Leftrightarrow x=2.250.000$

Bảng biến thiên:

X	2.000.000		2.250.000		$+\infty$
F'(x)		+	0	−	
F(x)			F_{max}		

Suy ra $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x=2.250.000$

Vậy công ty phải cho thuê với giá $2{,}25$ triệu đồng mỗi căn hộ thì thu được lợi nhuận lớn nhất.