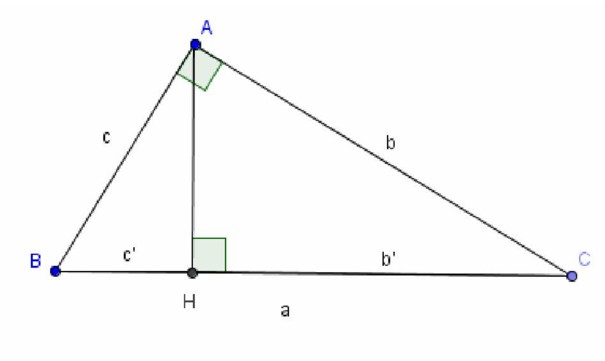
Chuyên đề: Khoảng cách và thể tích khối đa diện

ÔN TẬP KIẾN THỨC

LỚP 8-9-10

A. MỘT SỐ HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Cho tam giác ABC, BC=a: cạnh huyền, AB, AC là 2 cạnh góc vuông, AB=c, AC=b. Đường cao AH=h, BH=c′, CH=b′. Trung tuyến AM.



1. Định lí Py-ta-go: $BC^2 = AB^2 + AC^2$
2. $AB^2 = BH.BC = c'.a,\ \ AC^2 = CH.BC = b'.a$
3. $AB.AC = AH.BC$
4. $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$
5. $BC=2AM$
6. $\sin B = \dfrac{AC}{BC}, \cos B = \dfrac{AB}{BC}, \tan B = \dfrac{AC}{AB}, \cot B = \dfrac{AB}{AC}$
7. $b = a.\sin B, c = a.\sin C, \sin B = \cos C$

B. MỘT SỐ HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC THƯỜNG

1. Định lý hàm số sin: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$
2. Định lý hàm số cosin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

C. CÁC CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH

1. Tam giác thường: $S = \dfrac{1}{2}a.h = \dfrac{1}{2}ab.\sin C = \dfrac{abc}{4R} = p.r = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ \ p = \dfrac{a+b+c}{2}$
2. Tam giác vuông tại A: $S = \dfrac{1}{2}AB.AC$, tam giác đều cạnh a: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$
3. Hình vuông ABCD: S= AB.AD
4. Hình chữ nhật ABCD: S= AB.AD
5. Hình thoi ABCD: S= AC.BD/2
6. Hình thang ABCD(AB//CD): S= h(AB+CD)/2, h là chiều cao hình thang.
7. Hình bình hành: Đáy x chiều cao
8. Tứ giác thường ABCD: $S = \dfrac{1}{2}AC.BD.\sin(AC, BD)$

9. Hình tròn: $S = \pi.R^2$

D. CHÚ Ý

1. Đường cao tam giác, đường trung tuyến tam giác, đường phân giác, đường trung trực

2. Trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn nội ngoại tiếp tam giác.

LỚP 11:

A. QUAN HỆ SONG SONG

1. Đường thẳng song song với mặt phẳng: $a//(P) \Leftrightarrow a \cap (P) = \varnothing$

a. $\begin{cases} d \not\subset (P) \\ d//a \\ a \subset (P) \end{cases} \Rightarrow d//(P)$, b. $\begin{cases} a//(P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \end{cases} \Rightarrow d//a$, c. $\begin{cases} (P) \cap (Q) = d \\ a//(P) \\ a//(Q) \end{cases} \Rightarrow a//d$

2. Hai mặt phẳng song song: $(P)//(Q) \Leftrightarrow (P) \cap (Q) = \varnothing$

a. $\begin{cases} a, b \subset (P) \\ a \cap b = I \\ a//(Q), b//(Q) \end{cases} \Rightarrow (Q)//(P)$, b. $\begin{cases} (P)//(Q) \\ a \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a//(Q)$, c. $\begin{cases} (P)//(Q) \\ (R) \cap (P) = a \Rightarrow a//b \\ (R) \cap (Q) = b \end{cases}$

B. QUAN HỆ VUÔNG GÓC

1. Đường thẳng vuông góc mặt phẳng: $a \perp (P) \Leftrightarrow a \perp c, \forall c \subset (P)$

a. $\begin{cases} a, b \subset (P) \\ a \cap b = I \\ d \perp a, d \perp b \end{cases} \Rightarrow d \perp (P)$,

b. $\begin{cases} d \overline{\perp} (P) \\ a \subset (P) \end{cases} \Rightarrow d \perp a \Leftrightarrow d' \perp a$,**(ĐL 3 đường vuông góc- *d'* là hình chiếu của *d* trên *(P)*).**

2. Hai mặt phẳng vuông góc: $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \angle(P, Q) = 90^\circ$

a. $\begin{cases} a \subset (P) \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q)$, b. $\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \\ a \subset (P), a \perp d \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$,

c. $\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ A \in a \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow a \subset (P)$, d. $\begin{cases} (P) \cap (Q) = a \\ (P), (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \perp (R)$

C. KHOẢNG CÁCH

1. Khoảng cách từ 1 điểm đến 1 đường thẳng, 1 mặt phẳng là khoảng cách từ điểm đó đến hình chiếu của nó trên đường thẳng, mặt phẳng.

2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song là khoảng cách từ 1 điểm thuộc đường thẳng đến mặt phẳng.

3. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ 1 điểm thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

4. Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau là đoạn vuông góc chung.

D. GÓC

1. Góc giữa hai đường thẳng a và b là góc giữa hai đường thẳng a′ và b′ cùng đi qua 1 điểm, a′//a, b′//b.

2. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P), a không vuông góc với (P) là góc giữa a và hình chiếu a′ của a trên (P).

3. Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó hoặc góc giữa hai đường thẳng nằm trong 2 mặt phẳng cùng vuông góc giao tuyến tại 1 điểm.

4. Diện tích hình chiếu: Gọi *S* là diện tích hình (H) trên mp(P), *S′* là diện tích hình chiếu (H′) của hình (H) trên mp(P′) khi đó: $S' = S.\cos\varphi$, $\varphi = \angle(P, P')$.

LỚP 12:

A. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

1. Thể tích khối lăng trụ: $V=B.h$

2. Thể tích khối hộp chữ nhật: $V = abc$

3. Thể tích khối lập phương cạnh a: $V = a^3$

4. Thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3}B.h$

5. Tỉ số thể tích: Tứ diện SABC, A′, B′, C′ là các điểm tùy ý thuộc SA, SB, SC ta có: $\frac{V_{SABC}}{V_{SA'B'C'}} = \frac{SA}{SA'}\frac{SB}{SB'}\frac{SC}{SC'}$

B. CHÚ Ý:

1. Đường chéo của hình vuông cạnh *a* là $a\sqrt{2}$
2. Đường chéo của hình lập phương cạnh *a* là $a\sqrt{3}$
3. Đường chéo của hình hộp chữ nhật có 3 kích thước a, b, c là $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

4. Trong tam giác đều cạnh a đường cao, đường trung tuyến, đường phân giác có độ dài là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, các đường này xuất phát từ 1 đỉnh là trùng nhau. Nên trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn nội ngoại tiếp tam giác là trùng nhau, (chú ý đường trung trực).
5. Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều, các cạnh bên bằng nhau. Hình chiếu của đỉnh hình chóp chính là tâm của đáy, đối với đáy là tam giác thì tâm là trọng tâm, đáy là tứ giác thì tâm là giao 2 đường chéo.
6. Lăng trụ đều là lăng trụ đứng, đáy là đa giác đều.

CÁC LOẠI BÀI TẬP

A- HÌNH VẼ TRONG KHÔNG GIAN

Quan trọng bậc nhất đối với việc vẽ 1 hình không gian là xác định đúng đường cao (hay chân đường cao)

I. Hình chóp

1. Hình chóp có 1 cạnh vuông góc đáy thì cạnh đó là đường cao
2. Hình chóp có 1 mặt bên vuông góc đáy thì đường cao là đường kẻ từ đỉnh hình chóp và vuông góc với giao tuyến của mặt bên đó với mặt đáy.
3. Hình chóp có 2 mặt bên kề nhau cùng vuông góc đáy thì đường cao chính là giao tuyến của hai mặt đó.
4. Hình chóp có các cạnh bên bằng nhau hoặc các cạnh bên cùng tạo với đáy 1 góc bằng nhau thì chân đường cao chính là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy. Trong trường hợp đáy là tam giác tâm là giao 3 đường trung trực.
5. Khối chóp có các mặt bên tạo với đáy 1 góc bằng nhau thì chân đường cao là tâm đường tròn nội tiếp đáy. Trong trường hợp đáy là tam giác thì tâm là giao 3 đường phân giác.
6. Hình chóp có 2 mặt bên kề nhau cùng tạo với đáy 1 góc thì chân đường cao nằm trên đường phân giác của góc tạo bởi 2 giao tuyến của hai mặt bên với đáy.
7. Hình chóp có hai cạnh bên bằng nhau hoặc cùng tạo với đáy 1 góc thì chân đường cao thuộc đường trung trực của đoạn thẳng nối 2 giao điểm của hai cạnh bên nói trên với đáy.

II. Hình lăng trụ

1. Nếu là lăng trụ đứng thì đường cao là cạnh bên
2. Nếu là lăng trụ xiên thì đường cao là đường hạ từ 1 đỉnh của mặt này đến mặt kia nên giống như đường cao của hình chóp.

III. Chú ý

1. Hình chóp đều là hình chóp có các cạnh bên bằng nhau đáy là đa giác đều. Hiển nhiên chân đường cao trùng tâm đường tròn ngoại tiếp đáy.
2. Hình chóp có đáy là đa giác đều thì đáy là đa giác đều, các cạnh bên chưa chắc bằng nhau.
3. Lăng trụ đều là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.
4. Lăng trụ có đáy là đa giác đều thì chưa chắc là lăng trụ đứng.

B- KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

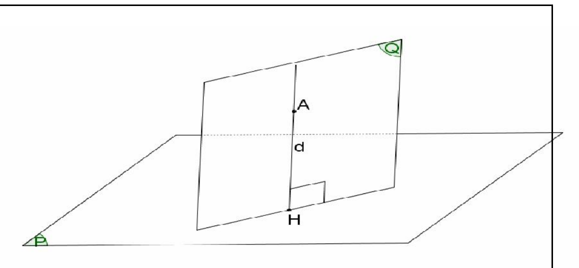
Bài toán 1. Khoảng cách từ 1 điểm đến 1 mặt phẳng

Các bước xác định khoảng cách từ điểm A đến (P):

Bước 1: Xác định mp(Q) chứa A, $(Q)\perp(P)$, $(Q)\cap(P)=d$

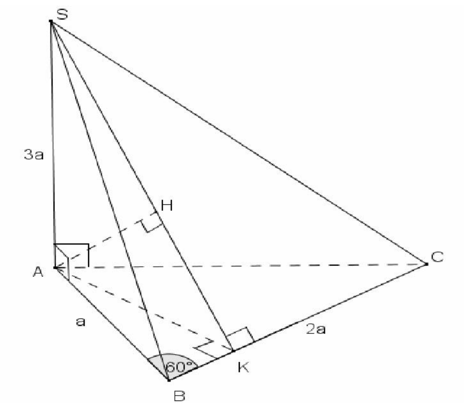
Bước 2: Kẻ đường cao $AH\perp d$, $H\in d \Rightarrow AH\perp(P)\Rightarrow d_{(A,(P))}=AH$

Bước 3: Tính AH.



Ví dụ. Cho hình chóp S.ABC, SA vuông góc với đáy, SA=3a, AB=a, $\angle ABC=60^\circ$. Tính $d_{(A,(SBC))}$

Giải:



Trong tam giác ABC ta dựng đường cao AK, nối SK

Do AK là hình chiếu vuông góc của SK lên (ABC) và AK $\perp$ BC

$\Rightarrow$ theo định lý 3 đường vuông góc SK $\perp$ BC $\Rightarrow$ BC $\perp$ (SAK)

Kẻ AH $\perp$ SK tại H (1)

Mà BC $\perp$ (SAK) $\Rightarrow$ BC $\perp$ AH (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ AH $\perp$ (SBC) $\Rightarrow$ $d(A,SBC)=AH$

Tính AH?

Nhận xét thấy tam giác SAK vuông tại A, AH là đường cao nên ta có: $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AS^2}+\dfrac{1}{AK^2}$

SA đã có nên ta chỉ cần tính AK.

Xét tam giác ABK vuông tại K, $\sin B=\dfrac{AK}{AB}\Rightarrow AK=AB.\sin B=a.\sin 60^\circ=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{4}{3a^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{13}{9a^2} \Leftrightarrow AH^2 = \frac{9a^2}{13} \Rightarrow AH = \frac{3\sqrt{13}a}{13}$$

$$\Rightarrow d(A, SBC) = \frac{3\sqrt{13}a}{13}$$

Bài tương tự

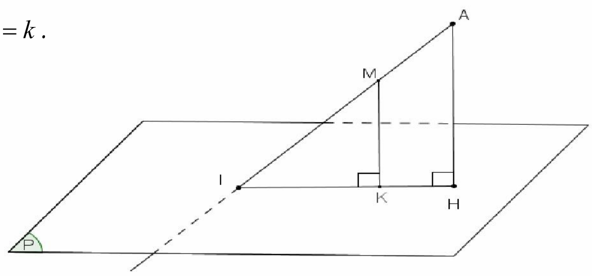
1. Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc đáy, SA=2a, AC=a, $\angle ACB = 120^\circ$. Tính $d_{(A,(SBC))}$
2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy. Góc giữa SC và mặt đáy bằng 60°. Tính $d_{(\mathrm{H},(SCD))}$ biết H là trung điểm AB.
3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, SA vuông góc đáy, góc giữa SB và mặt đáy bằng 30° góc giữa SD và mặt đáy bằng 60° biết $SA = a$. Tính $d_{(A,(SBC))}, d_{(A,(SDC))}, d_{(A,(SBD))}$
4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AD = 2AB = 2BC = 2a$, SA vuông góc đáy. Tính khoảng cách từ A đến (SCD) biết góc giữa SC và đáy bằng 60°
5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật SA=SC, SB=SD=2a. Tính khoảng cách từ O đến (SCD) biết O là tâm của đáy và góc giữa mặt (SAD) và đáy bằng 60°

KỸ THUẬT DỜI ĐIỂM

1. Dời điểm song song: *Yêu cầu cần tính* $d_{(M,(P))} = ?$ *Trong đó* $d_{(A,(P))} = k$. *Ở đây* $MA // (P) \Rightarrow d_{(M,(P))} = d_{(A,(P))} = k$

2. Dời điểm cắt nhau: *Yêu cầu cần tính* $d_{(M,(P))} = ?$ *Trong đó* $d_{(A,(P))} = k$.

Ở đây $MA \cap (P) = I \Rightarrow \dfrac{d_{(M,(P))}}{d_{(A,(P))}} = \dfrac{IM}{IA}$ *(Tự CM)*



Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc đáy, ABCD là hình chữ nhật, SA=a, góc giữa SB, SD và mặt đáy lần lượt là 30°, 60°.

a. Tính khoảng cách từ D đến (SBC)
b. Tính khoảng cách từ B đến (SCD)

Giải

Ta có AB, AD lần lượt là hình chiếu của SB, SD lên mặt đáy nên

$\angle(SB,(ABCD)) = \angle(SB, AB) = \angle SBA = 30^\circ$

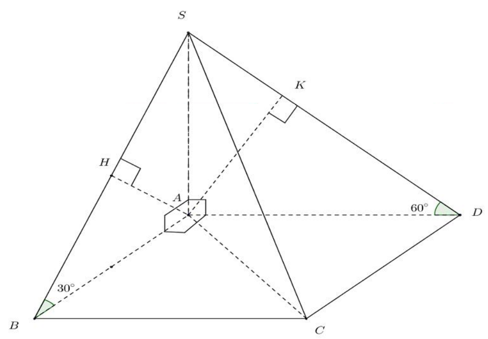
$\angle(SD,(ABCD)) = \angle(SD, AD) = \angle SDA = 60^\circ$

a. Tính khoảng cách từ D đến (SBC)

Có $AD//BC \Rightarrow AD//(SBC) \Rightarrow d_{(D,(SBC))} = d_{(A,(SBC))}$

Do $AB \perp BC \Rightarrow SB \perp BC$ (định lí 3 đường vuông góc)

$\Rightarrow BC \perp (SAB)$



Kẻ AH vuông góc SB tại H (1)

Mà $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SBC)$

Xét tam giác AHS vuông tại H có $\sin S = \frac{AH}{AS} \Rightarrow A$

$\Rightarrow d_{(D,(SBC))} = d_{(A,(SBC))} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

b. Tính khoảng cách từ B đến (

Có $AB//DC \Rightarrow AB//(SDC) \Rightarrow d_{(B,(SDC))} = d_{(A,(SDC,,}$

Do $AD \perp DC \Rightarrow SD \perp DC$ (định lí 3 đường vuông góc) $\Rightarrow DC \perp (SAD)$

Kẻ AK vuông góc SD tại K (3)

Mà $DC \perp (SAD) \Rightarrow DC \perp AK$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $AK \perp (SDC)$

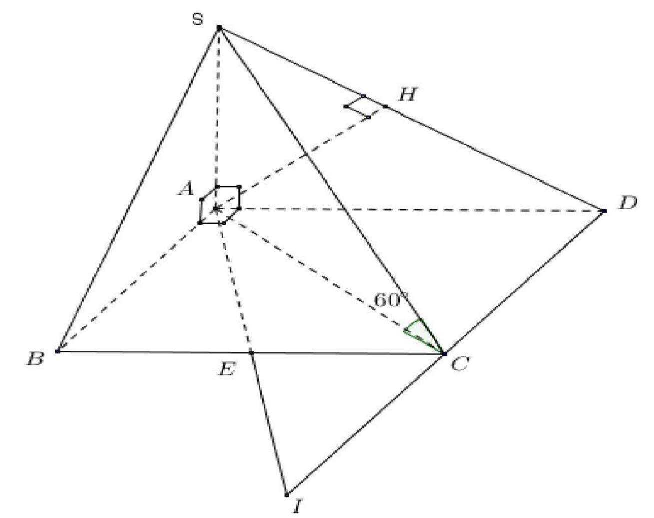
Xét tam giác AKS vuông tại K có $\sin S = \frac{AK}{AS} \Rightarrow AK = AS.\sin S = a\sin 30^\circ = \frac{a}{2} \quad \Rightarrow d_{(B,(SDC))} = d_{(A,(SDC))} = \frac{a}{2}$

Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc đáy, E là trung điểm BC. Góc giữa SC và mặt đáy bằng 60°. Tính khoảng cách từ E đến (SCD).

Giải

Do AC là hình chiếu của SC trên mặt đáy nên

$\angle(SC,(ABCD)) = \angle(SC,AC) = \angle SCA = 60^\circ$



Ta đã biết cách tính khoảng cách từ chân đường vuông góc A đến mặt (SCD). Vậy ta sẽ rời điểm E về A như sau

Có $AE \cap CD = I \Rightarrow AE \cap (SCD) = I \Rightarrow \frac{d_{(E,(SCD))}}{d_{(A,(SCD))}} = \frac{EI}{AI}$

Dễ dàng tính được $\frac{EI}{AI} = \frac{1}{2}$

Vấn đề còn lại là rất quen thuộc, đó là tính khoảng cách từ A đến (SCD)

Có $AH \perp CD \Rightarrow SD \perp CD$ (định lí 3 đường vuông góc)

$\Rightarrow CD \perp (SAD)$

Kẻ $AH \perp SD$ tại H (1)

Mà $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $AH \perp (SCD) \Rightarrow d_{(A,(SCD))} = AH$

Tính AH= ?

Xét tam giác SAD vuông tại A có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2}$ (*)

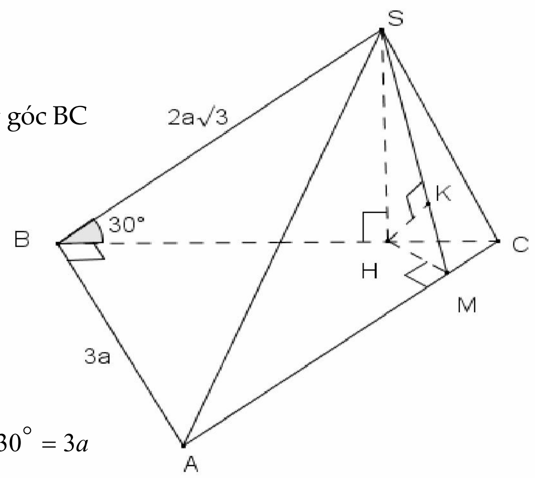
Xét tam giác SAC vuông tại A có $\tan C = \frac{SA}{AC} \Rightarrow SA = AC.\tan C = a\sqrt{2}\tan 60^\circ = a\sqrt{6}$

$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{6a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{6a^2} \Rightarrow AH^2 = \frac{6a^2}{7} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{42}}{7}$

$\Rightarrow d_{(A,(SCD))} = \frac{a\sqrt{42}}{7}$

$\Rightarrow d_{(E,(SCD))} = \frac{1}{2}d_{(A,(SCD))} = \frac{a\sqrt{42}}{14}$

Ví dụ 3. D-2011. Cho hình chóp S.ABC đáy là tam giác vuông tại B, AB=3*a*, BC=4*a*, (SBC) vuông góc mặt đáy. Biết SB= $2a\sqrt{3}$, $\angle SBC = 30^\circ, d_{(B,(SAC))} = ?$



Giải:

Nhận xét: Ta thấy (SBC) $\perp$ (ABC) có giao tuyến là BC nên ta kẻ SH vuông góc BC $\Rightarrow$ SH$\perp$(ABC). Nếu ycbt là tính khoảng cách từ H đến (SAC) thì ta dễ dàng thực hiện tương tự phần trước. Vì vậy ta sẽ sử dụng kĩ thuật rời điểm mà ta nói ở trên. Rõ ràng BH cắt (SAC) tại C nên ta sử dụng kĩ thuật rời điểm cắt nhau.

Vậy ta có: $\frac{d_{(B,(SAC))}}{d_{(H,(SAC))}} = \frac{BC}{HC}$

Trong tam giác vuông SHB ta có: $\cos B = \frac{BH}{SB} \Rightarrow BH = SB.\cos B = 2a\sqrt{3}.\cos 30^\circ = 3a$

$\Rightarrow CH = BC - BH = 4a - 3a = a \Rightarrow \frac{CB}{CH} = 4$

Ta tính khoảng cách từ H đến (SAC).

Kẻ HM$\perp$AC $\Rightarrow$SM$\perp$AC (Định lí 3 đường vuông góc)

$\Rightarrow$AC$\perp$(SHM)

Kẻ HK$\perp$SM tại K (1)

Do AC$\perp$(SHM) nên AC$\perp$HK (2)

Từ (1) và (2) suy ra HK $\perp$(SAC)$\Rightarrow d(H,SAC) = HK$

Lại có: $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{12a^2 - 9a^2} = a\sqrt{3}$, AC=$\sqrt{BA^2 + BC^2} = \sqrt{16a^2 + 9a^2} = 5a$

$\Delta CMH \sim \Delta CBA \Rightarrow \frac{CH}{CA} = \frac{MH}{BA} \Leftrightarrow MH = \frac{AB.CH}{AC} = \frac{3a.a}{5a} = \frac{3a}{5}$

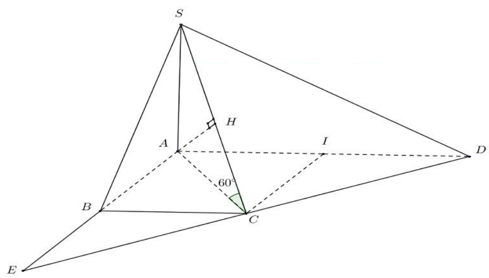
$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HM^2} \Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{25}{9a^2} = \frac{28}{9a^2} \Rightarrow HK = \frac{3a\sqrt{7}}{14}$

$\Rightarrow d(H,SAC) = \frac{3a\sqrt{7}}{14} \Rightarrow d(B,SAC) = 4.\frac{3a\sqrt{7}}{14} = \frac{6a\sqrt{7}}{7}$

Ví dụ 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, SA vuông góc đáy, AB=BC=a, AD=2a và góc giữa SC với mặt đáy bằng 60°. Tính

a. Khoảng cách từ A đến (SCD)

b. Khoảng cách từ B đến (SCD)



Giải

Có AC là hình chiếu của SC trên mặt đáy nên

$\angle\left(SC,\left(ABCD\right)\right)=\angle\left(SC,AC\right)=\angle SCA=60^\circ$

a. Khoảng cách từ A đến (SCD)

Gọi I là trung điểm AD nên ta có IA=ID=IC=a. Vậy tam giác ACD nội tiếp đường tròn tâm I đường kính AD. Vậy $AC\perp CD\Rightarrow SC\perp CD$ (định lí …)

$\Rightarrow CD\perp\left(SAC\right)$

Kẻ AH vuông góc SC tại H (1)

Mà $CD\perp\left(SAC\right)\Rightarrow CD\perp AH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AH\perp\left(SCD\right)\Rightarrow d_{\left(A,\left(SCD\right)\right)}=AH$

Xét tam giác AHC vuông tại H có

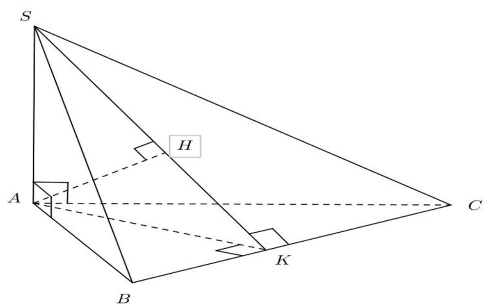
$\sin C=\dfrac{AH}{AC}\Rightarrow AH=AC.\sin 60^\circ=a\sqrt{2}.\sqrt{3}=a\sqrt{6}\Rightarrow d_{\left(A,\left(SCD\right)\right)}=a\sqrt{6}$

b. Tính khoảng cách từ B đến (SCD)

Có $BA\cap CD=E\Rightarrow BA\cap\left(SCD\right)=E\Rightarrow\dfrac{d_{\left(B,\left(SCD\right)\right)}}{d_{\left(A,\left(SCD\right)\right)}}=\dfrac{BE}{AE}$

Ta có $\Delta EBC\sim\Delta EAD\Rightarrow\dfrac{EB}{EA}=\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow d_{\left(B,\left(SCD\right)\right)}=\dfrac{BE}{AE}.d_{\left(A,\left(SCD\right)\right)}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Ví dụ 5. Cho hình chóp S.ABC có SA là đường cao, tam giác ABC vuông tại A, AB=a, $AC=a\sqrt{2}$, góc giữa SC và đáy bằng 45 độ. G là trọng tâm tam giác SAB. Tính khoảng cách từ G đến (SBC)



Giải

Do AC là hình chiếu của SC trên (ABC) nên ta có

$\angle\left(SC,\left(ABC\right)\right)=\angle\left(SC,AC\right)=\angle SCA=45^\circ$

Vậy tam giác SAC vuông cân tại A

Gọi N là trung điểm SB $\Rightarrow AG\cap\left(SBC\right)=N\Rightarrow\dfrac{d_{\left(G,\left(SBC\right)\right)}}{d_{\left(A,\left(SBC\right)\right)}}=\dfrac{GN}{AN}=\dfrac{1}{3}$

Ta tính khoảng cách từ A đến (SBC)

Kẻ AK vuông góc BC tại K suy ra SK cũng vuông góc BC (Định lý...)

$\Rightarrow BC\perp\left(SAK\right)$

Kẻ AH vuông góc SK tại H (1)

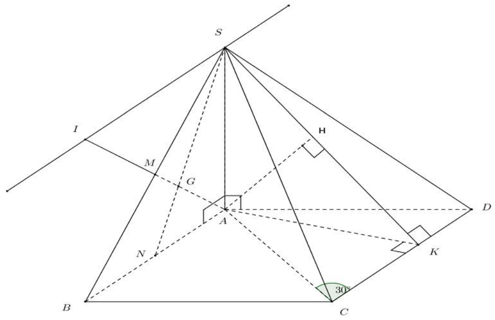
Mà $BC\perp\left(SAK\right)\Rightarrow BC\perp AH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AH\perp(SBC)\Rightarrow d_{\left(A,\left(SBC\right)\right)}=AH$

Lại có tam giác SAK vuông tại A, tam giác ABC vuông tại A nên

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{2a^2}=\frac{2}{a^2}\Rightarrow AH^2=\frac{a^2}{2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Ví dụ 6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành, SA là đường cao, $SA = a\sqrt{3}$. $\angle ACD = 30^\circ, AC = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác SAB đến (SCD)



Giải

Cách 1. Rời điểm 1 lần

Ta có $AG \subset (SAB)$, $(SAB) \cap (SCD) = d$, $d // AB$

Gọi $I = AG \cap d \Rightarrow AG \cap (SCD) = I \Rightarrow \dfrac{d_{(G,(SCD))}}{d_{(A,(SCD))}} = \dfrac{GI}{AI}$

Có $\Delta GAN \sim \Delta GIS \quad (g.g)$, N là trung điểm AB

$\Rightarrow \dfrac{GI}{GA} = \dfrac{GS}{GN} = 2 \Rightarrow GI = 2GA \Rightarrow \dfrac{GI}{AI} = \dfrac{2}{3}$

Còn lại ta tính khoảng cách từ A đến (SCD)

Kẻ AK vuông góc CD tại K suy ra SK cũng vuông góc CD (Định lý...) $\Rightarrow CD \perp (SAK)$

Kẻ AH vuông góc SK tại H (1)

Mà $CD \perp (SAK) \Rightarrow CD \perp AH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SCD) \Rightarrow d_{(A,(SCD))} = AH$

Lại có tam giác SAK vuông tại A suy ra ta có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AK^2}$

Xét tam giác AKC vuông tại

K $\Rightarrow \sin C = \dfrac{AK}{AC} \Rightarrow AK = AC.\sin 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{2}{a^2} = \dfrac{7}{3a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

$\Rightarrow d_{(G,(SCD))} = \dfrac{2}{3}.d_{(A,(SCD))} = \dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$

Cách 2. Rời điểm 2 lần

Gọi N là trung điểm AB, có $NG \cap (SCD) = S \Rightarrow \dfrac{d_{(G,(SCD))}}{d_{(N,(SCD))}} = \dfrac{GS}{NS} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow d_{(G,(SCD))} = \dfrac{2}{3}.d_{(N,(SCD))}$

Lại có AN//(SCD) $\Rightarrow d_{(N,(SCD))} = d_{(A,(SCD))} = AH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$, (Tương tự cách 1)

$\Rightarrow d_{(G,(SCD))} = \dfrac{2}{3}.d_{(A,(SCD))} = \dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$

Bài toán 2. khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

1. Đoạn vuông góc chung: *Cho hai đường thẳng a, b chéo nhau. M thuộc a, N thuộc b, MN vuông góc với cả a và b nên MN được gọi là đoạn vuông góc chung của a và b.*

2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau: *là độ dài đoạn vuông góc chung.*

3. Cách xác định khoảng cách giữa hai đương thẳng chéo nhau a và b:

Bước 1: Xác định (P) chứa b và (P)//a.

Bước 2: Lấy A thuộc a sao cho dễ tính khoảng cách từ A đến (P) nhất $\Rightarrow d_{(a,b)} = d_{(a,(P))} = d_{(A,(P))}$

Loại 1. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau nhưng vuông góc nhau

KTCB. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b, a vuông góc b khi đó ta xác định kc như sau

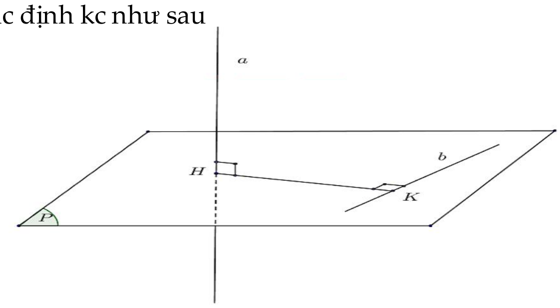
Bước 1. Chứng minh a vuông góc 1 mp (P) chứa b tại H

Bước 2. Từ H kẻ HK vuông góc b tại K

Suy ra HK là đoạn vuông góc chung

Thật vậy, ta có HK vuông góc b mà HK nằm trong (P)

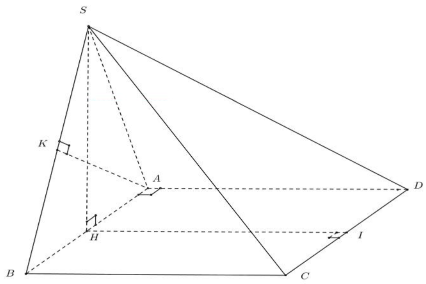
Nên HK vuông góc a.



Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy. Tính khoảng cách giữa

a. SH và CD với H là trung điểm AB

b. AD và SB



Giải

Do tam giác ABC đều nên $SH \perp AB$. Lại có (SAB) vuông góc đáy nên $SH \perp (ABCD)$

a. Có $SH \perp (ABCD)$ tại H mà (ABCD) chứa CD nên từ H ta kẻ đường thẳng vuông góc CD tại I suy ra I là trung điểm CD (Do ABCD là hình vuông)

Vậy ta có $\begin{cases} HI \perp CD \\ HI \perp SH \quad (vi\ SH \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow d_{(SH,CD)} = HI = a$

b. Ta có $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SH \quad (vi\ \ SH \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$ tại A

Mà (SAB) chứa SB nên từ A ta kẻ AK vuông góc SB tại K suy ra K Là trung điểm SB (Do SAB là tam giác đều)

Vậy ta có $\begin{cases} AK \perp SB \\ AK \perp AD \quad (vi\ \text{AD} \perp (SAB)) \end{cases} \Rightarrow d_{(AD,SB)} = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Ví dụ 2. A-2010. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh *a*, M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD. H là giao điểm cuả MD và NC, biết SH vuông góc đáy, SH= $a\sqrt{3}$. $d_{(MD,SC)} = ?$

Giải:

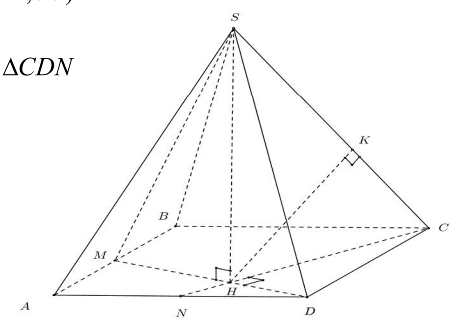
Trước tiên ta chứng minh MD ⊥ CN. Thật vậy, do $\Delta DAM = \Delta CDN$ nên $\angle C_1 = \angle D_2$ mà $\angle D_1 + \angle D_2 = 90^\circ \Rightarrow \angle D_1 + \angle C_1 = 90^\circ$

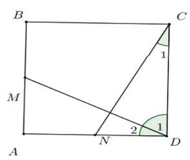
$\Rightarrow \angle CHD = 90^\circ \Rightarrow MD \perp CN$

$\Rightarrow \begin{cases} MD \perp SH \\ MD \perp CN \end{cases} \Rightarrow MD \perp (SCN)$ tại H.

Mà (SCN) chứa SC nên từ H kẻ HK vuông góc SC tại K

$\Rightarrow \begin{cases} HK \perp SC \\ HK \perp MD \quad (vi\ \ MD \perp (SCN)) \end{cases} \Rightarrow d_{(\text{MD},SC)} = HK$





Lại có tam giác SHC vuông tại H(gt) $\Rightarrow \frac{1}{HK^2}=\frac{1}{HS^2}+\frac{1}{HC^2}$ (1)

Trong tam giác vuông CDN có

$CN=\sqrt{CD^2+DN^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{5a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$

Mà $\Delta CHD \sim \Delta CDN \Rightarrow \frac{CH}{CD}=\frac{CD}{CN} \Leftrightarrow CH=\frac{CD^2}{CN}=\frac{2a^2}{a\sqrt{5}}=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$

$(1) \Rightarrow \frac{1}{HK^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{5}{4a^2}=\frac{19}{12a^2} \Rightarrow HK=\frac{2a\sqrt{57}}{19}$

Loại 2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau và không vuông góc

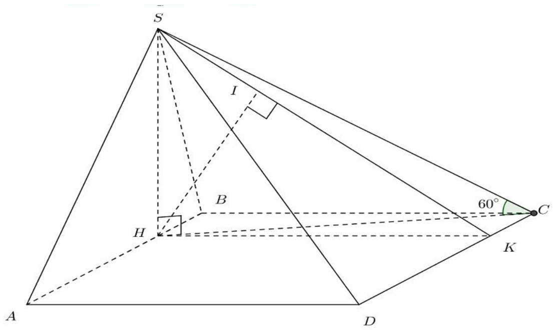
KTCB. Tìm một mặt phẳng (P) chứa b và (P)//a $\Rightarrow d_{(a,b)}=d_{(a,(P))}$

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, AD=2AB=2a. Hình chiếu vuông góc H của S nằm trên AB sao cho HA=3HB, góc giữa SC và mặt đáy bằng 60 độ. Tính khoảng cách giữa AB và SC

Giải

Do HC là hình chiếu của SC nên ta có $\angle(SC,(ABCD))=\angle(SC,HC)=\angle SCH=60^\circ$

Dễ thấy $SC \subset (SCD)//AB \Rightarrow d_{(AB,SC)}=d_{(AB,(SCD))}=d_{(H,(SCD))}$



Lấy K thuộc cạnh CD sao cho KD=3KC $\Rightarrow HK \perp CD \Rightarrow SK \perp CD$ (Định lý…)

$\Rightarrow CD \perp (SHK)$

Kẻ HI vuông góc SK tại I (1)

Mà $CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp HI$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $HI \perp (SCD)$

$\Rightarrow d_{(H,(SCD))}=HI$

Xét tam giác SHK vuông tại H có $\frac{1}{HI^2}=\frac{1}{HS^2}+\frac{1}{HK^2}$ (*)

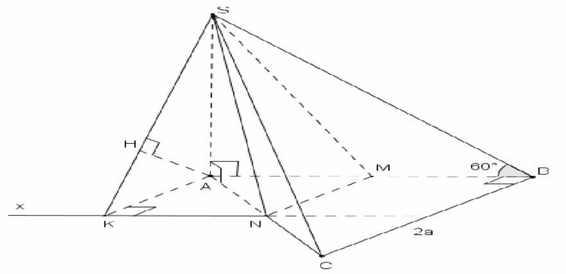
Xét tam giác SHC vuông tại H, $HC=\sqrt{HB^2+BC^2}=\frac{a\sqrt{65}}{4} \Rightarrow \tan C=\frac{SH}{HC} \Rightarrow SH=HC.\tan 60^\circ=\frac{a\sqrt{195}}{4}$

Vậy $(*) \Leftrightarrow \frac{1}{HI^2}=\frac{4}{195a^2}+\frac{1}{4a^2}=\frac{211}{780a^2} \Rightarrow HI^2=\frac{780a^2}{211} \Rightarrow HI=a\sqrt{\frac{780}{211}}$

$\Rightarrow d_{(AB,SC)}=d_{(AB,(SCD))}=d_{(H,(SCD))}=HI=a\sqrt{\frac{780}{211}}$

Ví dụ 2. A-2011. Cho hình chóp S.ABC, đáy là tam giác vuông tại B, AB=BC=2*a*. (SAB), (SAC) cùng vuông góc với đáy, M là trung điểm AB. Mặt phẳng qua SM song song BC cắt AC tại N, $\angle(SBC,ABC)=60^\circ$. $d_{(SN,AB)}=?$

Giải:



Do (SAB), (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy nên SA ⊥ (ABC), mặt phẳng qua SM, //BC cắt AC tại N mà M là trung điểm AB nên N là trung điểm AC.Qua N dựng đường thẳng Nx//AB ⇒ AB//(SNx)

$\Rightarrow d(AB,SN)=d(A,SNx)$

Qua A kẻ AK ⊥ Nx (K thuộc Nx), trong tam giác SAK kẻ đường cao AH.

Ta có Nx ⊥ AK, Nx ⊥ SA ⇒ Nx ⊥ (SAK) ⇒ Nx ⊥ AH

$\Rightarrow$ AH $\perp$ SK, AH $\perp$ Nx $\Rightarrow$ AH $\perp$ (SNx)
$\Rightarrow AH = d(A, SNx)$

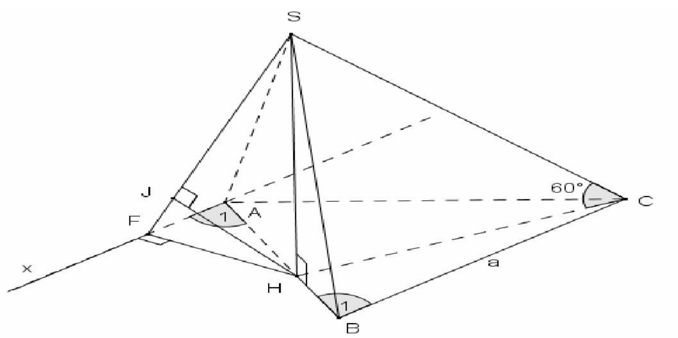
Ta có tam giác SAK vuông tại A nên: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AK^2}$ (1)

$AK = MN = \frac{BC}{2} = a$, Δ SAB vuông tại A nên ta có: $\tan B = \frac{SA}{AB} \Rightarrow SA = AB.\tan B = 2a.\tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$

$(1) \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{12a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{13}{12a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{39}}{13} \Rightarrow d(AB, SN) = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$

Ví dụ 3: A-2012. Cho hình chóp S.ABC, đáy là tam giác đều cạnh a. H thuộc AB sao cho HA=2HB, hình chiếu của S lên (ABC) trùng với H, $\angle(SC, ABC) = 60^\circ$. $d_{(SA,BC)} = ?$

Giải:



Qua A dựng đường thẳng Ax//BC, ta có mặt phẳng (SAx)
$\Rightarrow d(SA, BC) = d(BC, SAx) = d(B, SAx)$
Mà ta thấy H là chân đường cao của hình chóp nên tính khoảng cách đến các mặt là dễ hơn, vì vậy ta sử dụng quy tắc rời điểm từ B sang H.

$BH \cap (SAx) = A \Rightarrow \frac{d(B, SAx)}{d(H, SAx)} = \frac{AB}{AH} = \frac{3}{2}$ (*)

Ta đi tính $d(H, SAx)$=?
Kẻ HF $\perp$ Ax, trong tam giác SHF kẻ đường cao HJ
Ta có AF $\perp$ HF, AF $\perp$ SH (gt) $\Rightarrow$ AF $\perp$ (SHF)
$\Rightarrow$ AF $\perp$ HJ
$\Rightarrow$ HJ $\perp$ AF, HJ $\perp$ SF $\Rightarrow$ HJ $\perp$ (SAx). $d(H, SAx)$=HJ

Do SH $\perp$ (ABC) nên tam giác SHF vuông tại H $\Rightarrow \frac{1}{HJ^2} = \frac{1}{HF^2} + \frac{1}{HS^2}$ (1)

Ta đi tính HF và HS.
Trong tam giác AHF có AF//BC nên $\angle A_1 = \angle B_1 = 60^\circ$,

$AH = \frac{2a}{3} \Rightarrow \sin A_1 = \frac{FH}{AH} \Rightarrow FH = AH.\sin A_1 = \frac{2a}{3}\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Trong tam giác AHC có: $HC^2 = AH^2 + AC^2 - 2AH.AC.\cos A = (\frac{2a}{3})^2 + a^2 - 2.\frac{2a}{3}.a.\cos 60^\circ = \frac{7a^2}{9}$

$\Rightarrow HC = \frac{a\sqrt{7}}{3}$ mà tam giác SHC vuông tại H nên ta có: $\tan C = \frac{SH}{HC} \Rightarrow SH = HC.\tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{21}}{3}$

$(1) \Rightarrow \frac{1}{HJ^2} = \frac{3}{a^2} + \frac{3}{7a^2} = \frac{24}{7a^2} \Rightarrow HJ = \frac{a\sqrt{42}}{12}$

$(*) \Rightarrow d(B, SAx) = \frac{a\sqrt{42}}{8} \Rightarrow d(BC, SA) = \frac{a\sqrt{42}}{8}$

Bài tổng hợp

1. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình vuông cạnh a, góc giữa SC và mặt đáy bằng 60 độ, SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mp vuông góc đáy.
   a. Chứng minh SB vuông góc AD, DK vuông góc SC biết K là trung điểm BC
   b. ác định góc giữa SD và mặt đáy, góc giữa SB và (SHC), góc giữa SD và (SHC)
   c. Tính khoảng cách từ H đến (SCD)
   d. Tính khoảng cách từ A đến (SCD)
   e. nh khoảng cách từ H đến (SDK)
   f. Tính khoảng cách từ A đến (SDK)
   g. ính khoảng cách giữa SH và CD, CD và SB, DA và SB
   h. nh khoảng cách giữa DK và SH
   i. Tính khoảng cách giữa SA và BD
2. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thoi tâm O cạnh a, SA vuông góc đáy, Góc ABC bằng 60 độ, góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và mặt đáy là 60 độ. Tính khoảng cách
   a. Từ điểm A đến các mặt (SBD), (SCD)
   b. Từ O đến (SCD)
   c. Trọng tâm G của tam giác SAB đến (SCD)
   d. Giữa SA và CD, giữa SB và CD, giữa SC và AD

C -BÀI TOÁN THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

Bài toán 1. Đường cao khối đa diện

1. Đường cao của khối chóp đều

a. Khối chóp đều S.ABC => SA=SB=SC=b, ABC là tam giác đều cạnh a.

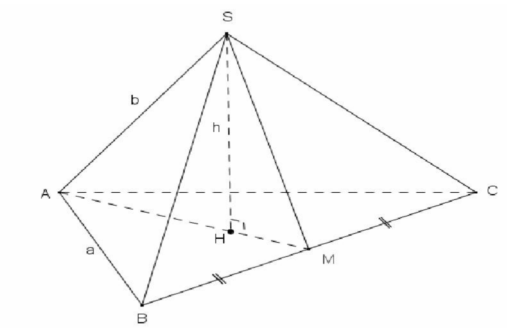
- $SH \perp (ABC) \Leftrightarrow H$ *là tâm đáy.*
- $SH = h = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{b^2 - \left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}$

- *Chú ý:* $-\ AH = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$,

$-\ AH = R = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{a}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

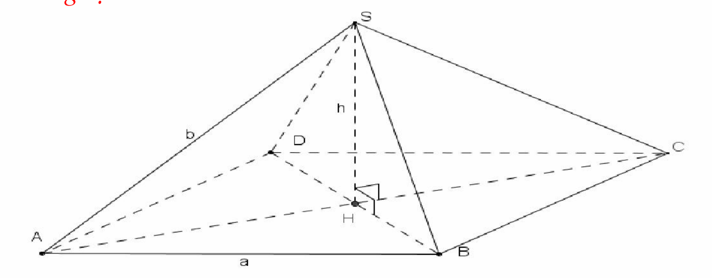
$-$ If $a = b \Rightarrow SABC$ là tứ diện đều

$\Rightarrow h = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, $\quad S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin A = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$



b. Khối chóp đều S.ABCD =>SA=SB=SC=SD=b, ABCD là hình vuông cạnh a.

- $SI \perp (ABCD) \Leftrightarrow I$ *là tâm đáy,* $I = AC \cap BD$
- $SI = h = \sqrt{b^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}$



2. Đường cao của khối chóp không đều.

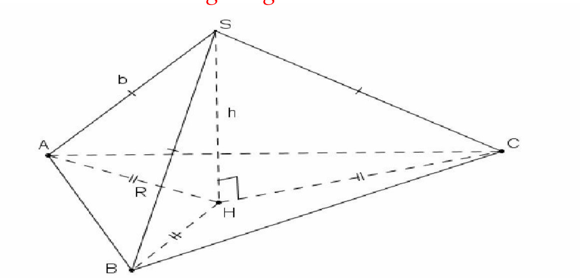
a. Nếu khối chóp S.ABC… có 3 cạnh bên SA=SB=SC=b thì $SH \perp (ABC...) \Leftrightarrow HA = HB = HC = R, R$ *là bán kính đường tròn (ABC).*

Hệ quả: Nếu 3 đường xiên của hình chóp bằng nhau thì hình chiếu của chúng bằng nhau.

$R = \dfrac{BC}{2\sin A}, \quad \cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC}$

$\Rightarrow \sin A = \sqrt{1-\cos^2 A}$ do $\sin A > 0$

$h = SH = \sqrt{SA^2 - HA^2} = \sqrt{b^2 - R^2}$

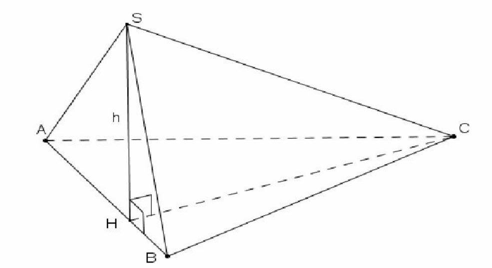


b. Nếu khối chóp S.ABC… có mặt bên vuông góc với đáy, giả sử (SAB) $\perp$ *(ABC…)*

$- \ SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABC...)$

$-SH = h = SA.\sin A, \cos A = \dfrac{AS^2 + AB^2 - SB^2}{2AS.AB}$

$\Rightarrow \sin A = \sqrt{1-\cos^2 A}$



c. Nếu khối chóp S.ABC… có hai mặt bên cắt nhau vuông góc đáy, giả sử (SAB), (SAC) $\perp$ *(ABC…)*

=>SA $\perp$ *(ABC…) => SA=h*

3. Đường cao của khối lăng trụ, khối hộp.

a. Nếu là hình lăng trụ đứng, hình hộp đứng, hình lăng trụ đều => đường cao bằng độ dài cạnh bên.

b. Nếu là hình lăng trụ, hình hộp không đứng ta tìm đường cao giống hình chóp không đều (các TH tương tự). Đó là, ta sẽ tính chiều cao từ 1 đỉnh của mặt đáy này đến mặt kia (chú ý chọn đỉnh nào cho tính dễ nhất).

=> Vậy, tính chiều cao hình chóp là cái cơ bản để ta tính chiều cao hình lăng trụ. ☺

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình thoi cạnh a. SA=a, $\angle SAB = \angle SAD = \angle BAD = 60^\circ$. $V_{S.ABCD} = ?$

Giải:

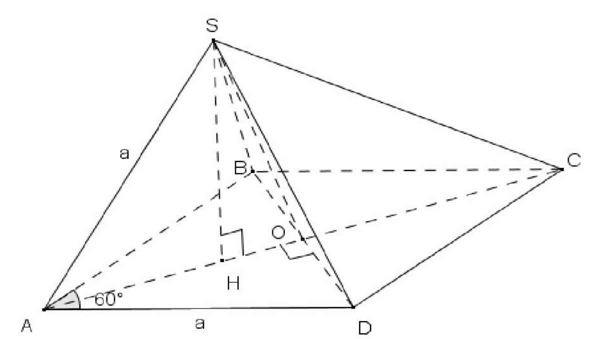
Do $\angle SAB = \angle SAD = 60^\circ \Rightarrow SA = SB = SD$

Vậy nên chân đường cao hạ từ đỉnh S sẽ nằm trên tâm của tam giác BAD. Mà ΔBAD đều cạnh a, nên tâm của ΔBAD sẽ chính là trọng tâm H của tam giác.

Ta có: $BD = a,\ AC = 2.AO = 2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Xét ΔBAD có $AH = \dfrac{2}{3}AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$



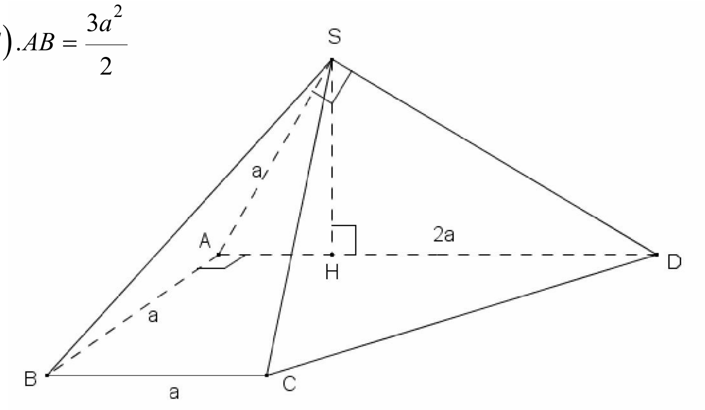
Xét tam giác SHA có $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

Ví dụ 2: D-2008. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình thang vuông tại A, B. AB=BC=a, AD=2a, (SAD) vuông góc với mặt đáy, tam giác SAD vuông tại S, SA=a. Tính $V_{S.ABCD} = ?$

Giải:

Do ABCD là hình thang vuông nên: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left(AD + BC\right).AB = \frac{3a^2}{2}$



Tam giác SAD vuông tại S mà $SA = \frac{1}{2}AD$,

suy ra $\angle SAD = 30^\circ$.

Ta có: $SD = \sqrt{AD^2 - SA^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

Trong tam giác SAD kẻ đường cao SH

$$\Rightarrow SH = \frac{1}{2}SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{3a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$

Ví dụ 3: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là hình vuông cạnh a. Các mặt bên là hình thoi, biết $\angle AA'B' = \angle AA'D = 60^\circ$. Tính $V_{ABCD.A'B'C'D'} = ?$

Giải:

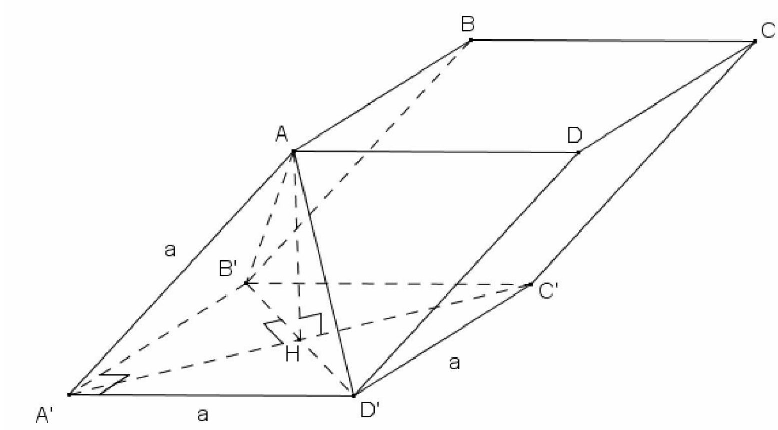
Do các mặt bên là hình thoi nên $A'A = A'B' = A'D'$

Mà $\angle AA'B' = \angle AA'D = 60^\circ$.

$\Rightarrow \Delta A'AB', \Delta A'AD'$ là các tam giác đều cạnh a.

Vậy AA′=AB′=AD′=a suy ra chân đường cao hạ từ đỉnh A của hình lăng trụ chính là tâm của tam giác A′B′D′.

Mà tam giác A′B′D′ vuông tại A′ nên tâm của tam giác A′B′D′ chính là trung điểm H của B′D′.



Có:

$$A'H = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AH = \sqrt{AA'^2 - A'H^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2},\ S_{A'B'C'D'} = a^2$$

$$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = AH.S_{A'B'C'D'} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$$

Bài toán 2. Tỉ số thể tích

Định lý Simson: *Cho tứ diện SABC, A′, B′, C′ là các điểm tùy ý thuộc SA, SB, SC ta có:* $\dfrac{V_{SABC}}{V_{SA'B'C'}} = \dfrac{SA}{SA'}\dfrac{SB}{SB'}\dfrac{SC}{SC'}$

Ví dụ. Cho hình chóp S.ABC, SA=a, SB=b, SC=c, $\angle BSA = \angle BSC = \angle CSA = 60^\circ$. Tính $V_{S.ABC}$ =?

Giải:

Giả sử a <b <c. Trên SB, SC lấy các điểm B′, C′ sao cho:

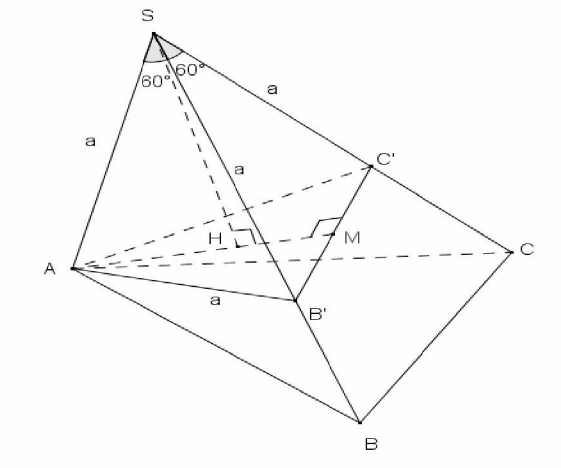
SB′=SC′=SA=a, lại có $\angle BSA = \angle BSC = \angle CSA = 60^\circ$

$\Rightarrow$ S.AB′C′ là hình chóp đều cạnh a. Gọi H là trọng tâm tam giác AB′C′ nên SH chính là đường cao của hình chóp

S.AB′C′ $\Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow V_{S.AB'C'} = \dfrac{1}{3}SH.S_{AB'C'} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{6}}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lại có: $\dfrac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA.SB'.SC'}{SA.SB.SC} = \dfrac{a^2}{bc} \Rightarrow V_{S.ABC} = V_{S.AB'C'}.\dfrac{bc}{a^2} = \dfrac{abc\sqrt{2}}{12}$



Bài toán 3. Phân chia khối đa diện (Trình bày sau)

Ví dụ áp dụng. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, AD=2AB=2a, SA vuông góc đáy, Góc giữa SB và mặt đáy bằng 60 độ. Trên cạnh SA lấy M sao cho $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Mặt phẳng (BMC) cắt SD tại N. Tính thể tích khối chóp S.BCNM