

BÀI 1. CĂN BẬC HAI VÀ CĂN BẬC BA CỦA SỐ THỰC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Kiến thức cần nhớ

I. Căn bậc hai của số thực không âm

Căn bậc hai của số thực a không âm là số thực x sao cho $x^2 = a$.

- Số âm không có căn bậc hai.
- Số 0 có một căn bậc hai là 0.
- Số dương a có đúng hai căn bậc hai đối nhau là \sqrt{a} và $-\sqrt{a}$.

II. Căn thức bậc ba

- Căn bậc ba của một số thực a là số thực x sao cho $x^3 = a$. Căn bậc ba của số thực a được kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$.
- Ta có $(\sqrt[3]{a})^3 = a$.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I – MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT

Câu 1: Căn bậc hai của 9 là :

- A. 3 B. $\sqrt{3}$ C. 3 và -3 D. -3

Câu 2: Số $\frac{1}{9}$ và $-\frac{1}{9}$ là căn bậc hai của số nào trong các số dưới đây:

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{81}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{18}$

Câu 3: Căn bậc hai số học của 4 là:

- A. 2 và -2 B. 2 C. -2 D. 16

Câu 4: Căn bậc ba của -125 là :

- A. 5 B. -5 C. 25 D. 5 và -5

Câu 5: Điều kiện xác định của biểu thức $\sqrt[3]{a}$ là:

- A. $a > 0$ B. $a \geq 0$ C. $a \in \mathbb{Z}$ D. $a \in \mathbb{R}$

Câu 6: Điều kiện xác định của biểu thức \sqrt{a} là :

- A. $a > 0$ B. $a \geq 0$ C. $a \in \mathbb{Z}$ D. $a \in \mathbb{R}$

Câu 7: Sử dụng máy tính cầm tay để tìm giá trị của $\sqrt[3]{-0,125}$

- A. -0,5 B. 0,5
C. $-0,125 < 0$ nên không tính được D. 0,25

II – MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 8: Khoanh vào khẳng định **sai** trong các khẳng định dưới đây:

- A. $\sqrt[3]{-11,35} > \sqrt[3]{-13,12}$
- B. Nếu $a < b$ thì $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$ (a, b là số thực)
- C. Nếu $a > b$ thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ ($a, b \geq 0$)
- D. $3 > \sqrt[3]{27\frac{1}{4}}$

Câu 9: Khoanh vào khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây:

- A. $\sqrt{\frac{4}{3}} > \sqrt{\frac{3}{4}}$
- B. $\sqrt{0,48} > 0,7$
- C. $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = -1$
- D. Số âm không có căn bậc 3

Câu 10: Tìm phát biểu đúng trong các phát biểu sau:

- A. Mỗi số dương có đúng một căn bậc hai
- B. Số âm và số dương đều có căn bậc 2
- C. Số âm và số dương đều có căn bậc 3
- D. Căn bậc ba của một số âm là số dương

Câu 11: Tìm phát biểu **sai** trong các phát biểu sau:

- A. $-10 < \sqrt[3]{-999}$
- B. $(\sqrt[3]{2} + 1)[(\sqrt[3]{2})^2 - \sqrt[3]{2} + 1] = -3$
- C. $(\sqrt{7} - 1)(\sqrt{7} + 1) = 6$
- D. Căn bậc hai số học của 16 là 4

Câu 12: Tìm nghiệm của phương trình sau: $x^2 = 25$

- A. $x = 5$
- B. $x = 5; x = -5$
- C. $x = -5$
- D. $x = 25$

Câu 13: $\frac{3}{4}$ là căn bậc hai số học của số nào dưới đây:

- A. $\frac{9}{16}$
- B. $-\frac{9}{16}$
- C. $\frac{6}{8}$
- D. $-\frac{6}{8}$

Câu 14: Khẳng định nào sau đây **sai** :

- A. $3 > 2\sqrt{2}$
- B. $11 < \sqrt{99}$
- C. Căn hai số học của của
- D. Luôn tồn tại căn bậc hai một số luôn là số dương của một số thực dương

III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 15: Định luật thứ ba của Kepler về sự chuyển động của các hành tinh trong hệ Mặt Trời cho biết khoảng cách trung bình d (triệu dặm) từ một hành tinh quay xung quanh Mặt Trời được tính bởi công thức: $d = \sqrt[3]{6t^2}$ với t (ngày Trái Đất) là thời gian hành tinh đó quay quanh Mặt trời đúng một vòng. Hỏi Trái Đất cách Mặt Trời bao xa biết Trái Đất quay một vòng quanh Mặt Trời trong khoảng 365 ngày (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)

- A. 92,1
- B. 92,08
- C. 92,8
- D. 92,008

Câu 16: Một hình vuông có diện tích $0,0144cm^2$. Cạnh của hình vuông đó dài :

A. 0,12m

B. 0,06cm

C. 0,12cm

D. 0,06m

Câu 17: Kết quả thu gọn của biểu thức $(\sqrt[3]{3} + 1)(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1)$ là :

A. $\sqrt[3]{3}$

B. 1

C. 9

D. 4

Câu 18: Gọi S là tập các giá trị nguyên của x thỏa mãn biểu thức $\sqrt{x} < 7$. Số phần tử của tập S là:

A. 48

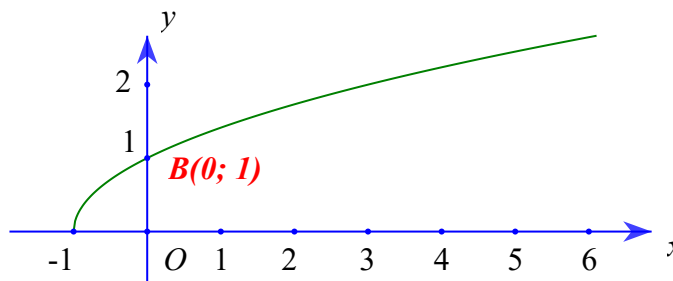
B. 35

C. 49

D. 50

IV – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG CAO

Câu 19: Hình dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x+1}$



Điểm $A(x, y)$ thuộc đồ thị hàm số trên sao cho tam giác COB có diện tích là 4 (biết C là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống trục Ox). Giá trị của y là :

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

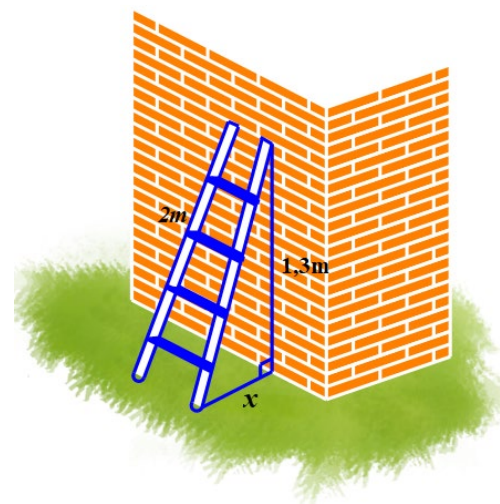
Câu 20: Một cái thang dựa vào tường như hình bên. Tìm khoảng cách từ chân thang tới góc tường biết thang dài 2m và tường cao 1,3m

A. 2,13m

B. 1,98m

C. 1,5m

D. 1,3m



C. CÁC DẠNG TỰ LUẬN

Dạng 1. Tìm căn bậc hai, căn bậc ba của một số

Phương pháp giải

➤ Dựa vào định nghĩa

+ Căn bậc hai của một số thực a không âm là số thực x sao cho $x^2 = a$

+ Căn bậc ba của một số thực a là số thực x sao cho $x^3 = a$.

Căn bậc ba của số thực a được kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$.

Bài 1. Điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau:

Số	25	0,64	0,01	$\frac{9}{16}$	2	0	-1
Căn bậc hai							
Căn bậc hai số học							

Bài 2. Tính căn bậc hai số học của các số sau

- a) 0,01; b) 0,04; c) 0,25 d) $\frac{4}{9}$.

Bài 3. Tính giá trị biểu thức

a) $A = \sqrt{0,09} + 7 \cdot \sqrt{0,36} - 3 \cdot \sqrt{2,25}$ b)

$$B = \sqrt{\left(\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}}\right) \cdot 18}$$

Bài 4. Tính

- a) $\sqrt[3]{8}$; b) $\sqrt[3]{-64}$ c) $\sqrt[3]{\frac{1}{0,008}}$ d) $\sqrt[3]{(-27) \cdot 8}$.

Bài 5. Tính các căn bậc ba sau:

- a) $\sqrt[3]{64}$; b) $\sqrt[3]{-512}$; c) $\sqrt[3]{0,064}$
 d) $\sqrt[3]{-0,216}$; e) $\frac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18}$ f) $\frac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{576}} - \frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}}$

Dạng 2. So sánh

Phương pháp giải

- Với hai số a, b không âm ta có $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.
- Để so sánh $\sqrt[3]{a}$ và $\sqrt[3]{b}$ ta so sánh a và b .

Bài 6. So sánh các số sau:

- a) $\sqrt{26}$ và 5; b) $\sqrt{7} + \sqrt{15}$ và 7;
 c) $\sqrt{2} + \sqrt{11}$ và $\sqrt{3} + 5$ d) $-5\sqrt{35}$ và -30.

Bài 7. So sánh các số sau:

- a) 6 và $\sqrt{41}$. b) $2\sqrt{27}$ và $\sqrt{147}$.
 c) $-3\sqrt{5}$ và $-5\sqrt{3}$. d) $2\sqrt{2} - 1$ và 2.

Bài 8. So sánh:

a) $\sqrt[3]{5}$ và $\sqrt[3]{4}$;

b) $\sqrt[3]{5}$ và 2;

c) $5\sqrt[3]{4}$ và $4\sqrt[3]{5}$.

Bài 9. So sánh

a) $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{7}$ và $\sqrt[3]{12}$

b) $\sqrt{2} + 1$ và $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}$;

c) $\sqrt{3} - 2$ và $\sqrt[3]{15\sqrt{3} - 25}$.

Bài 10. Cho $a > 0$. Chứng minh rằng

i) Nếu $a > 1$ thì $a > \sqrt{a}$.

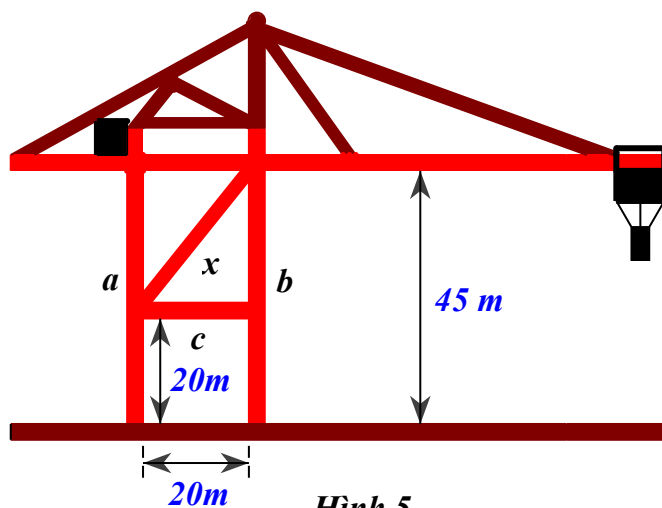
ii) Nếu $a < 1$ thì $a < \sqrt{a}$.

Dạng 3. Các bài toán thực tế.

Phương pháp giải

Đọc kỹ đề bài và vận dụng các kiến thức về căn bậc hai, căn bậc ba.

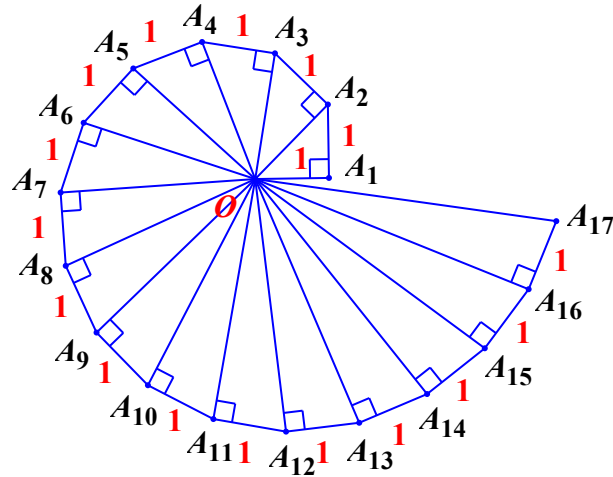
Bài 11. Trên cần trục ở Hình 5, hai trụ a và b đứng cách nhau 20 m, hai xà ngang c và d lần lượt có độ cao 20 m và 45 m so với mặt đất. Xà chéo x có độ dài bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



Hình 5

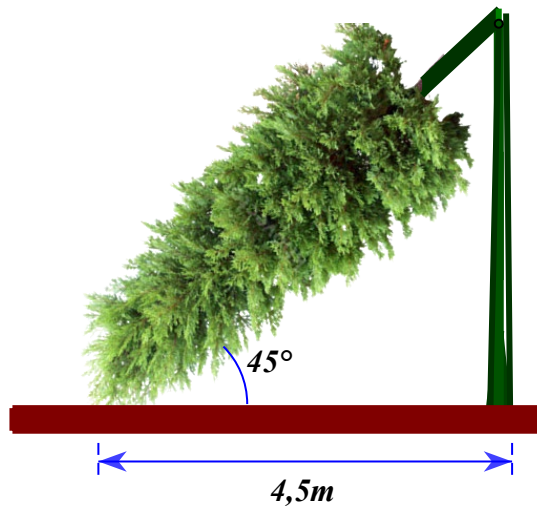
Bài 12. Một khối gỗ hình lập phương có thể tích 1000 cm^3 . Chia khối gỗ này thành 8 khối gỗ hình lập phương nhỏ có thể tích bằng nhau. Tính độ dài cạnh của mỗi khối gỗ lập phương nhỏ.

Bài 13. Tính độ dài cạnh huyền của mỗi tam giác vuông trong Hình 2.



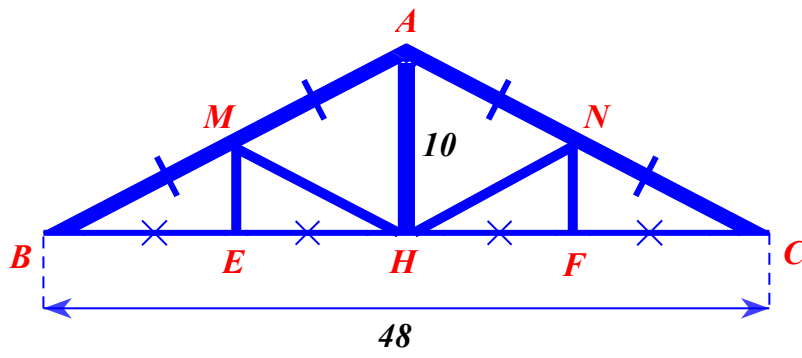
Bài 14. Đại Kim tự tháp Giza là Kim tự tháp Ai Cập lớn nhất và là lăng mộ của Vương triều thứ Tư của pharaoh Khufu. Nền kim tự tháp có dạng hình vuông với diện tích khoảng 53052 m^2 (Nguồn: <https://vi.wikipedia.org>). Hỏi độ dài cạnh nền của kim tự tháp đó là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Bài 15. Giông bão thổi mạnh, một cây bị gãy gập xuống làm ngọn cây chạm đất và tạo với phương nằm ngang một góc 45° (minh họa ở Hình 3). Người ta đo được khoảng cách từ chỗ ngọn cây chạm đất đến gốc cây là $4,5 \text{ m}$. Giả sử cây mọc vuông góc với mặt đất, hãy tính chiều cao của cây đó theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 3

Bài 16. Trên hình là một khung mái nhà tam giác cân tại A, được làm từ các thanh thép bằng cách hàn chúng lại với nhau. Biết độ dài cạnh $AH = 10 \text{ dm}$ ($AH \perp BC$), độ dài cạnh $BC = 48 \text{ dm}$. Để hoàn thành khung mái nhà này người thợ cắt các đoạn thẳng $AB; AC; ME; MH; NH; NF$. Hãy tính độ dài các đoạn thẳng trên để giúp chú thợ hàn cắt chuẩn kích thước. Biết rằng 4 điểm M; N; E; F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng $AB; AC; HB; HC$ và $ME \parallel AH \parallel NF$.



D. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

C.HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	C	B	B	B	D	B	A	D	D	C
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	D	B	A	D	C	C	D	C	A	C

I. MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT

Câu 1. Căn bậc hai của 9 là :

A. 3

B. $\sqrt{3}$

C. 3 và -3

D. -3

Lời giải

Số 9 có hai căn bậc hai là 3 và -3 vì $3^2=9$ và $(-3)^2 = 9$.

Chọn C

Câu 2. $\frac{1}{9}$ và $-\frac{1}{9}$ là căn bậc hai của số nào trong các số dưới đây:

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{81}$

C. $-\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{18}$

Lời giải

Ta thấy : $\left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{81}, \left(-\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{81}$

Chọn B

Câu 3. Căn bậc hai số học của 4 là:

A. 2 và -2

B. 2

C. -2

D. 16

Lời giải

Căn bậc hai số học của một số luôn phải là số dương, số 4 có hai căn bậc hai là 2 và -2. Vậy 2 là căn bậc 2 số học của 4

Chọn B

Câu 4. Căn bậc ba của -125 là :

A. 5

B. -5

C. 25

D. 5 và -5

Lời giải

Ta thấy: $(-5)^3 = -125$

Chọn B

Câu 5. Điều kiện xác định của biểu thức $\sqrt[3]{a}$ là:

A. $a > 0$

B. $a \geq 0$

C. $a \in \mathbb{Z}$

D. $a \in \mathbb{R}$

Lời giải

Chọn D

Câu 6. Điều kiện xác định của biểu thức \sqrt{a} là :

A. $a > 0$

B. $a \geq 0$

C. $a \in \mathbb{Z}$

D. $a \in \mathbb{R}$

Lời giải

Số âm không có căn bậc hai.

Chọn A

Câu 7. Sử dụng máy tính cầm tay để tìm giá trị của $\sqrt[3]{-0,125}$

A. -0,5

B. 0,5

C. $-0,125 < 0$ nên không tính được

D. 0,25

Lời giải

Chọn A

II. MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 8. Khoanh vào khẳng định **sai** trong các khẳng định dưới đây:

A. $\sqrt[3]{-11,35} > \sqrt[3]{-13,12}$

B. Nếu $a < b$ thì $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$
(a, b là số thực)

C. Nếu $a > b$ thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ ($a, b \geq 0$)

D. $3 > \sqrt[3]{27\frac{1}{4}}$

Lời giải

Ta có: $(\sqrt[3]{-11,35})^3 = -11,35 > (\sqrt[3]{-13,12})^3 = -13,12 \Rightarrow$ A đúng

B, C đều đúng do tính chất căn bậc hai và căn bậc ba của số thực

Ta có: $\sqrt[3]{27\frac{1}{4}} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}} < 3. \Rightarrow$ D sai

Chọn D

Câu 9. Khoanh vào khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây:

A. $\sqrt{\frac{4}{3}} > \sqrt{\frac{3}{4}}$

B. $\sqrt{0,48} > 0,7$

C. $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = -1$

D. Số âm không có căn bậc 3

Lời giải

Ta thấy : mọi số thực đều có căn bậc 3 nên D sai

$$\left(\sqrt{0,48}\right)^2 = 0,48 < 0,7^2 = 0,49 \Rightarrow \text{B sai}$$

$$\left(2 - \sqrt[3]{3}\right)\left(2 + \sqrt[3]{3}\right) = 2^2 - \left(\sqrt[3]{3}\right)^2 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow \text{C sai}$$

$$\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2 = \frac{3}{4} < \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow \text{A đúng}$$

Chọn A

Câu 10. Tìm phát biểu đúng trong các phát biểu sau:

- A. Mọi số dương có đúng một căn bậc hai
- B. Số âm và số dương đều có căn bậc 2
- C. Số âm và số dương đều có căn bậc 3
- D. Căn bậc ba của một số âm là số dương

Lời giải

Ta có : Mọi số thực dương đều có hai căn bậc hai \Rightarrow A sai

Số âm không có căn bậc hai $>$ B sai

Căn bậc ba của một số âm là số âm \Rightarrow D sai

\Rightarrow **Chọn C**

Câu 11. Tìm phát biểu **sai** trong các phát biểu sau:

A. $-10 < \sqrt[3]{-999}$

B. $(\sqrt[3]{2} + 1)[(\sqrt[3]{2})^2 - \sqrt[3]{2} + 1] = -3$

C. $(\sqrt{7} - 1)(\sqrt{7} + 1) = 6$

D. Căn bậc hai số học của 16 là 4

Lời giải

Ta có:

$$(-10)^3 = -1000 < \left(\sqrt[3]{-999}\right)^3 = -999 \Rightarrow \text{A đúng.}$$

$$(\sqrt{7} - 1)(\sqrt{7} + 1) = \left(\sqrt{7}\right)^2 - 1^2 = 7 - 1 = 6 \Rightarrow \text{C đúng}$$

Căn bậc hai của 16 là 4 \Rightarrow D đúng

$$(\sqrt[3]{2} + 1)[(\sqrt[3]{2})^2 - \sqrt[3]{2} + 1] = \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 - 1^3 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow \text{B sai}$$

Chọn B

Câu 12. Tìm nghiệm của phương trình sau: $x^2 = 25$

A. $x = 5$

B. $x = 5; x = -5$

C. $x = -5$

D. $x = 25$

Lời giải

$$x^2 = 25 \Leftrightarrow x = 5 \text{ hoặc } x = -5 \text{ vì } 5^2 = 25 \text{ và } (-5)^2 = 25$$

Chọn B**Câu 13.** $\frac{3}{4}$ là căn bậc hai số học của số nào dưới đây:

A. $\frac{9}{16}$

B. $-\frac{9}{16}$

C. $\frac{6}{8}$

D. $-\frac{6}{8}$

Lời giảiTa thấy : $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow$ **Chọn A****Câu 14.** Khẳng định nào sau đây **sai** :

A. $3 > 2\sqrt{2}$

B. $11 < \sqrt{99}$

C. Căn hai số học của của luôn là số dương**D.** Luôn tồn tại căn bậc hai của một số thực dương một số**Lời giải**Ta có: $3^2 = 9 > (2\sqrt{2})^2 = 8 \Rightarrow$ A đúng

C, D đúng theo lý thuyết căn bậc hai

 $11^2 = 121 > (\sqrt{99})^2 = 99 \Rightarrow$ B sai**Chọn B****III. MỨC ĐỘ VẬN DỤNG****Câu 15.** Định luật thứ ba của Kepler về sự chuyển động của các hành tinh trong hệ Mặt Trời cho biết khoảng cách trung bình d (triệu dặm) từ một hành tinh quay xung quanh Mặt Trời được tính bởi công thức: $d = \sqrt[3]{6t^2}$ với t (ngày Trái Đất) là thời gian hành tinh đó quay quanh Mặt trời đúng một vòng. Hỏi Trái Đất cách Mặt Trời bao xa biết Trái Đất quay một vòng quanh Mặt Trời trong khoảng 365 ngày (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)

A. 92,1

B. 92,08

C. 92,8

D. 92,008

Lời giải

Áp dụng công thức khoảng cách đề bài

Khoảng cách giữa Trái Đất và mặt trời là : $d = \sqrt[3]{6 \cdot 365^2} \approx 92,8$ triệu dặm

Chọn C**Câu 16.** Một hình vuông có diện tích $0,0144 \text{ cm}^2$. Cạnh của hình vuông đó dài :**A.** 0,12 m**B.** 0,06 cm**C.** 0,12 cm**D.** 0,06 m**Lời giải**Cạnh của hình vuông = $\sqrt{0,0144} = 0,12 \text{ cm}$ **Chọn C****Câu 17.** Kết quả thu gọn của biểu thức $(\sqrt[3]{3} + 1)(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1)$ là :**A.** $\sqrt[3]{3}$ **B.** 1**C.** 9**D.** 4**Lời giải**

Áp dụng hằng đẳng thức ta có :

$$(\sqrt[3]{3} + 1)(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1) = (\sqrt[3]{3})^3 + 1^3 = 3 + 1 = 4$$

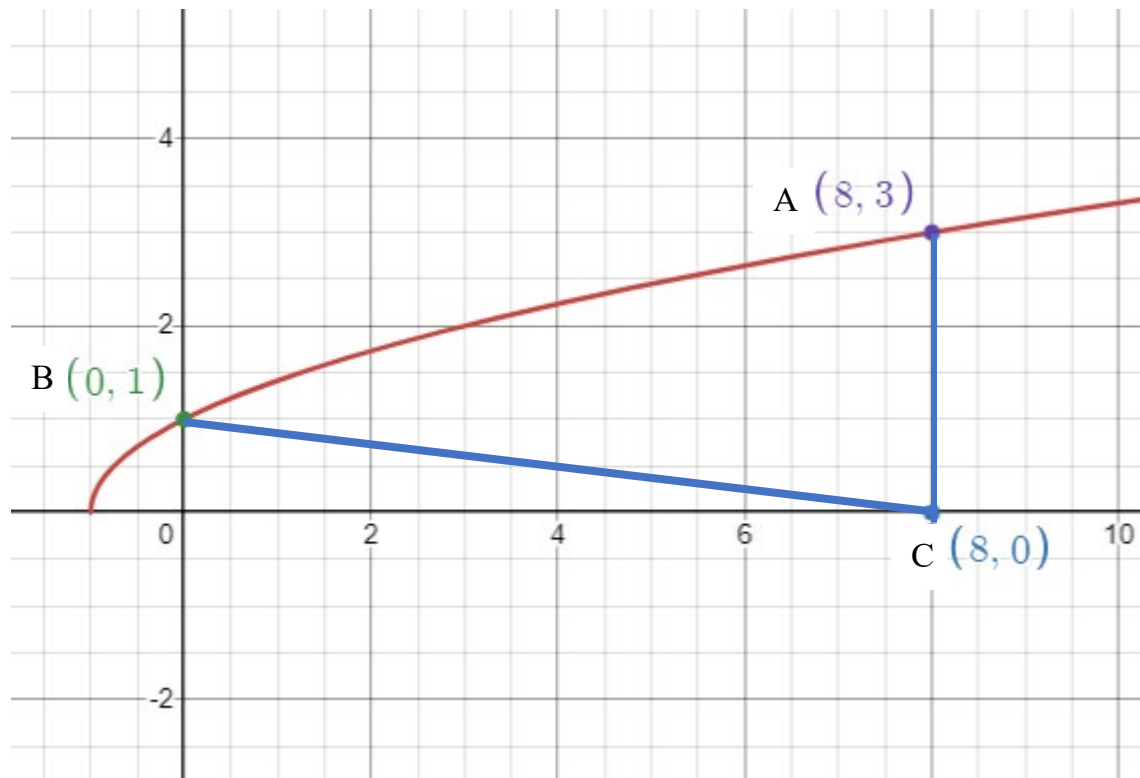
Chọn D**Câu 18.** Gọi S là tập các giá trị nguyên của x thỏa mãn biểu thức $\sqrt{x} < 7$. Số phần tử của tập S là:**A.** 48**B.** 35**C.** 49**D.** 50**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \sqrt{x} < 7 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 < 7^2 \Leftrightarrow x < 49$$

Vì x nguyên và $x \geq 0 \Rightarrow S = \{0; 1; 2; \dots; 48\}$

Tập S có 49 phần tử

Chọn C**IV. MỨC ĐỘ VẬN DỤNG CAO****Câu 19.** .



Điểm $A(x, y)$ thuộc đồ thị hàm số trên sao cho tam giác COB có diện tích là 4 (biết C là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống trục Ox). Giá trị của y là :

- A. 2
B. 3
C. 4
D. 5

Lời giải

Ta thấy : OB có độ dài là 1 $\Rightarrow S_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot 1 = 4 \Rightarrow OC = 8$

Mà C nằm trên trục $Ox \Rightarrow C(8, 0)$

Ta lại có: C là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống $Ox \Rightarrow x_A = x_C = 8$

Vì A thuộc đồ thị hàm số $y = \sqrt{x+1} \Rightarrow y_A = \sqrt{x_A+1} = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$

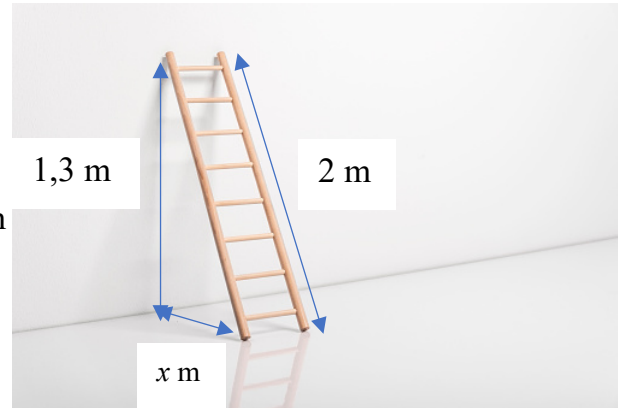
Chọn B

Câu 20.

Một cái thang dựa vào tường như hình bên

Tìm khoảng cách từ chân thang tới góc

tường biết thân 1,3 m và tường cao 1,3 2 m



A. 2,13 m

B. 1,98 m

C. 1,5 m

D. 1,3 m

Lời giải

Áp dụng định lý Py- Ta- Go ta có:

$$x^2 + 1,3^2 = 2^2$$

$$x^2 = 2^2 - 1,3^2 = 2,31$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{2,31} \approx 1,5m$$

Chọn C

E. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1: Tìm căn bậc hai, căn bậc ba của một số

Bài tập

1. Điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau:

Số	25	0,64	0,01	$\frac{9}{16}$	2	0	-1
----	----	------	------	----------------	---	---	----

Căn bậc hai							
Căn bậc hai số học							

Lời giải

Số	25	0,64	0,01	$\frac{9}{16}$	2	0	-1
Căn bậc hai	5, -5	0,8; -0,8	0,1; -0,1	$\frac{3}{4}; -\frac{3}{4}$	$\sqrt{2}; -\sqrt{2}$	0	/
Căn bậc hai số học	5	0,8	0,1	$\frac{3}{4}$	$\sqrt{2}$	0	/

Bài tập 2. Tính căn bậc hai số học của các số sau

- a) 0,01; b) 0,04; c) 0,25 d) $\frac{4}{9}$.

Lời giải

- a) $\sqrt{0,01} = 0,1$ vì $0,1^2 = 0,01$. c) $\sqrt{0,25} = 0,5$ vì $0,5^2 = 0,25$.
 b) $\sqrt{0,04} = 0,2$ vì $0,2^2 = 0,04$. d) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ vì $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

Bài tập 3. Tính giá trị biểu thức

a) $A = \sqrt{0,09} + 7 \cdot \sqrt{0,36} - 3 \cdot \sqrt{2,25}$ $B = \sqrt{\left(\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}}\right) \cdot 18}$

Lời giải

$$A = \sqrt{0,09} + 7 \cdot \sqrt{0,36} - 3 \cdot \sqrt{2,25}$$

$$A = 0,3 + 7 \cdot 0,6 - 3 \cdot 1,5$$

$$A = 0$$

$$B = \sqrt{\left(\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}}\right) \cdot 18}$$

$$B = \sqrt{\left(\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}}\right) \cdot 18}$$

$$B = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{25}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}}\right) \cdot 18}$$

$$B = \sqrt{\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4}\right) \cdot 18}$$

$$B = \sqrt{9} = 3$$

Bài tập 4. Tính

a) $\sqrt[3]{8}$; b) $\sqrt[3]{-64}$ c) $\sqrt[3]{\frac{1}{0,008}}$ d) $\sqrt[3]{(-27) \cdot 8}$.

Lời giải

a) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$. b) $\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$.

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{0,008}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{0,0008}} = \frac{1}{\sqrt[3]{0,2^3}} = \frac{1}{0,2} = 5$.

d) $\sqrt[3]{(-27) \cdot 8} = \sqrt[3]{-27} \cdot \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{-3^3} \cdot \sqrt[3]{2^3} = -3 \cdot 2 = -6$.

Bài tập 5. Tính các căn bậc ba sau:

a) $\sqrt[3]{64}$; b) $\sqrt[3]{-512}$; c) $\sqrt[3]{0,064}$
 d) $\sqrt[3]{-0,216}$; e) $\frac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18}$ f) $\frac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{576}} - \frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}}$

Lời giải

a) $\sqrt[3]{64} = 4$. b) $\sqrt[3]{-512} = -8$.

c) $\sqrt[3]{0,064} = \sqrt[3]{\frac{64}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. d) $\sqrt[3]{-0,216} = \sqrt[3]{(-0,6)^3} = -0,6$.

e) $\frac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{\frac{500}{4}} + \sqrt[3]{12 \cdot 18} = \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{216} = 5 + 6 = 11$.

f) $\frac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{576}} - \frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 6}{576}} - \sqrt[3]{\frac{32}{4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} - \sqrt[3]{8} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$.

Dạng 2: So sánh

Bài tập 6. So sánh các số sau:

a) $\sqrt{26}$ và 5 ;

b) $\sqrt{7} + \sqrt{15}$ và 7 ;

c) $\sqrt{2} + \sqrt{11}$ và $\sqrt{3} + 5$

d) $-5\sqrt{35}$ và -30 .

Lời giải

a) Ta có $26 > 25 \Rightarrow \sqrt{26} > \sqrt{25}$ hay $\sqrt{26} > 5$.

b) Ta có $\begin{cases} 7 < 9 \\ 15 < 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{7} < \sqrt{9} \\ \sqrt{15} < \sqrt{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{7} < 3 \\ \sqrt{15} < 4 \end{cases}$. Vậy $\sqrt{7} + \sqrt{15} < 3 + 4 = 7$.

c) Ta có $\begin{cases} 2 < 3 \\ 11 < 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2} < \sqrt{3} \\ \sqrt{11} < \sqrt{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2} < \sqrt{3} \\ \sqrt{11} < 5 \end{cases}$. Vậy $\sqrt{2} + \sqrt{11} < \sqrt{3} + 5$.

d) Ta có $35 < 36 \Rightarrow \sqrt{35} < \sqrt{36} = 6 \Rightarrow -5\sqrt{35} > (-5).6 \Rightarrow -5\sqrt{35} > -30$

Bài tập 7. So sánh các số sau:

a) 6 và $\sqrt{41}$.

b) $2\sqrt{27}$ và $\sqrt{147}$.

c) $-3\sqrt{5}$ và $-5\sqrt{3}$.

d) $2\sqrt{2} - 1$ và 2.

Lời giải

a) Ta có $6 = \sqrt{36}$. Mà $\sqrt{36} < \sqrt{41}$ nên $6 < \sqrt{41}$.

b) Ta có $2\sqrt{27} = \sqrt{108}$. Mà $108 < 147$ nên $2\sqrt{27} < \sqrt{147}$.

c) Ta có $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$ và $5\sqrt{3} = \sqrt{75}$. Mà $45 < 75$ nên $3\sqrt{5} < 5\sqrt{3} \Rightarrow -3\sqrt{5} > -5\sqrt{3}$

d) Ta có $2\sqrt{2} - 1 = \sqrt{8} - 1$ và $2 = 3 - 1 = \sqrt{9} - 1$. Mà $8 < 9$ nên $2\sqrt{2} - 1 < 2$.

Bài tập 8. So sánh:

a) $\sqrt[3]{5}$ và $\sqrt[3]{4}$;

b) $\sqrt[3]{5}$ và 2 ;

c) $5\sqrt[3]{4}$ và $4\sqrt[3]{5}$.

Lời giải

a) Ta có: $4 < 5 \Rightarrow \sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{5}$.

b) Ta có: $8 > 5 \Leftrightarrow 2^3 > 5 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2^3} > \sqrt[3]{5} \Leftrightarrow 2 > \sqrt[3]{5}$.

c) Ta có: $5\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 4} = \sqrt[3]{500}$

$$4\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{4^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{320}$$

Suy ra $\sqrt[3]{500} > \sqrt[3]{320} \Leftrightarrow 5\sqrt[3]{4} > 4\sqrt[3]{5}$.

Bài tập 9. So sánh

- a) $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{7}$ và $\sqrt[3]{12}$ b) $\sqrt{2} + 1$ và $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}$; c) $\sqrt{3} - 2$ và $\sqrt[3]{15\sqrt{3} - 25}$.

Lời giải

a) $(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{7})^3 = 5 + 3\sqrt[3]{5^2 \cdot 7} + 3\sqrt[3]{5 \cdot 7^2} + 7 = 12 + 3\sqrt[3]{175} + 3\sqrt[3]{245} > 12 = (\sqrt[3]{12})^3$
 $\Rightarrow \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{7} > \sqrt[3]{12}$

b) $(\sqrt{2} + 1)^3 = 2\sqrt{2} + 6 + 3\sqrt{2} + 1 = 7 + 5\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} + 1 = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}$.

c) $(\sqrt{3} - 2)^3 = 3\sqrt{3} - 18 + 12\sqrt{3} - 8 = 15\sqrt{3} - 26 < 15\sqrt{3} - 25 \Rightarrow \sqrt{3} - 2 < \sqrt[3]{15\sqrt{3} - 25}$.

Bài tập 10. Cho $a > 0$. Chứng minh rằng

i) Nếu $a > 1$ thì $a > \sqrt{a}$.

ii) Nếu $a < 1$ thì $a < \sqrt{a}$.

Lời giải

i) Ta có tính chất, nếu $a > b > 0$ thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, do đó từ giả thiết $a > 1 \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{1} = 1$.

Nhân cả hai vế với $\sqrt{a} > 0$ ta được $a > \sqrt{a}$.

ii) Tương tự như trên ta có $a < 1 \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{1} = 1$.

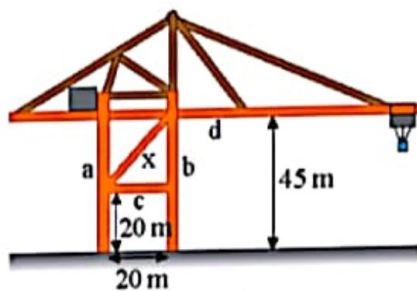
Nhân cả hai vế với $\sqrt{a} > 0$ ta được $a < \sqrt{a}$.

Dạng 3. Các bài toán thực tế

Phương pháp giải

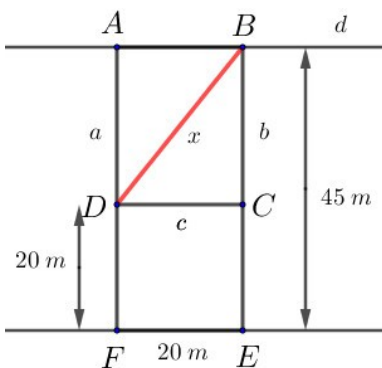
Sử dụng định lý Pythagore trong tam giác vuông để tính độ cao hoặc khoảng cách.

Bài tập 11. Trên cần trục ở Hình 5, hai trụ a và b đứng cách nhau 20 m, hai xà ngang c và d lần lượt có độ cao 20 m và 45 m so với mặt đất. Xà chéo x có độ dài bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



Hình 5

Lời giải



Từ hình vẽ mô phỏng bài toán, ta có:

$ABCD$ là hình chữ nhật với các kích thước:

$$BC = 45 - 20 = 25 \text{ (m)}; CD = 20 \text{ (m)}$$

Áp dụng định lí Pythagore cho tam giác BCD vuông tại C , ta có:

$$BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{25^2 + 20^2} = \sqrt{1025} \approx 32 \text{ (m)}$$

Suy ra xà chéo $x = BD \approx 32 \text{ m}$.

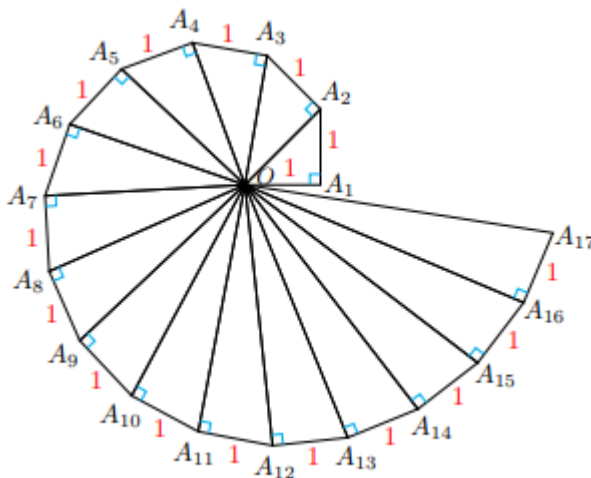
Bài tập 12. Một khối gỗ hình lập phương có thể tích 1000 cm^3 . Chia khối gỗ này thành 8 khối gỗ hình lập phương nhỏ có thể tích bằng nhau. Tính độ dài cạnh của mỗi khối gỗ lập phương nhỏ.

Lời giải

$$\text{Thể tích một khối gỗ: } \frac{1000}{8} = 125 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

$$\text{Độ dài cạnh của mỗi khối lập phương nhỏ: } \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{(5^3)} = 5 \text{ (cm)}.$$

Bài tập 13. Tính độ dài cạnh huyền của mỗi tam giác vuông trong Hình 2.



Lời giải

Xét $\triangle OA_1A_2$ có $OA_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ (đvdd)

Xét $\triangle OA_2A_3$ có $OA_3 = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ (đvdd).

Xét $\triangle OA_3A_4$ có $OA_4 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ (đvdd).

...

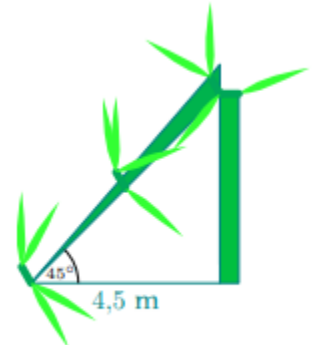
Xét $\triangle OA_{16}A_{17}$ có $OA_{17} = \sqrt{(\sqrt{16})^2 + 1^2} = \sqrt{17}$ (đvdd).

Bài tập 14. Đại Kim tự tháp Giza là Kim tự tháp Ai Cập lớn nhất và là lăng mộ của Vương triều thứ Tư của pharaoh Khufu. Nền kim tự tháp có dạng hình vuông với diện tích khoảng 53052 m^2 (Nguồn: <https://vi.wikipedia.org>). Hỏi độ dài cạnh của nền kim tự tháp đó là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải

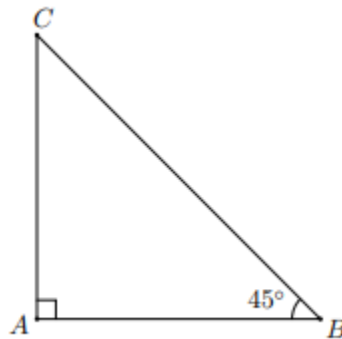
Gọi cạnh hình vuông (nền kim tự tháp) là x , điều kiện $x > 0$, đơn vị m. Diện tích hình vuông $x^2 = 53052 \Rightarrow x = \sqrt{53052} \approx 230,3$ (m). Vậy độ dài cạnh của nền kim tự tháp đó xấp xỉ $230,3 \text{ m}$.

Bài tập 15. Giông bão thổi mạnh, một cây bị gãy gập xuống làm ngọn cây chạm đất và tạo với phương nằm ngang một góc 45° (minh hoạ ở Hình 3). Người ta đo được khoảng cách từ chỗ ngọn cây chạm đất đến gốc cây là $4,5 \text{ m}$. Giả sử cây mọc vuông góc với mặt đất, hãy tính chiều cao của cây đó theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 3

Lời giải



Xem đoạn bị gãy là CB , đoạn còn lại thẳng đứng là AC .

Như vậy, độ dài của cây khi chưa bị gãy là $AC + BC$.

Do $\triangle ABC$ vuông tại A và $\widehat{ABC} = 45^\circ$, suy ra $\triangle ABC$ vuông cân tại A .

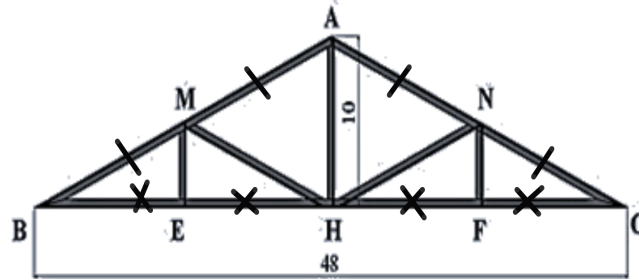
Suy ra $AC = AB = 4,5 \text{ m}$.

Áp dụng định lí Pythagore trong $\triangle ABC$ vuông tại A , ta được

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{2 \cdot (4,5)^2} = \sqrt{40,5} \text{ (m)}.$$

Chiều cao cây trước khi gãy là $4,5 + \sqrt{40,5} \approx 10,9$ (m).

Bài tập 16. Trên hình là một khung mái nhà tam giác cân tại A, được làm từ các thanh thép bằng cách hàn chúng lại với nhau. Biết độ dài cạnh $AH = 10$ dm ($AH \perp BC$), độ dài cạnh $BC = 48$ dm. Để hoàn thành khung mái nhà này người thợ cắt các đoạn thẳng AB ; AC ; ME ; MH ; NH ; NF . Hãy tính độ dài các đoạn thẳng trên để giúp chú thợ hàn cắt chuẩn kích thước. Biết rằng 4 điểm M; N; E; F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB ; AC ; HB ; HC và $ME \parallel AH \parallel NF$.



Lời giải

Vì H là trung điểm $BC \Rightarrow BH = CH = \frac{48}{2} = 24$ (dm)

Áp dụng định lý Pythagore trong tam giác ABH vuông tại H

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = (10)^2 + (24)^2 = 676 \Rightarrow AB = \sqrt{676} = 26$$
(dm)

$\Rightarrow AB = AC = 26$ dm (Vì tam giác ABC là tam giác cân tại A).

E là trung điểm $BH \Rightarrow BE = EH = \frac{HB}{2} = \frac{24}{2} = 12$ (dm);

F là trung điểm $HC \Rightarrow HF = FC = \frac{HC}{2} = \frac{24}{2} = 12$ (dm)

M là trung điểm $AB \Rightarrow AM = MB = \frac{AB}{2} = \frac{26}{2} = 13$ (dm);

N là trung điểm $AC \Rightarrow AN = NC = \frac{AC}{2} = \frac{26}{2} = 13$ (dm)

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác MBE vuông tại E

$$ME = \sqrt{MB^2 - BE^2} = \sqrt{(13)^2 - (12)^2} = 5$$
(dm)

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác NFC vuông tại F

$$NF = \sqrt{NC^2 - FC^2} = \sqrt{(13)^2 - (12)^2} = 5$$
(dm)

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác MEH vuông tại E

$$MH = \sqrt{ME^2 + EH^2} = \sqrt{(5)^2 + (12)^2} = 13(\text{dm})$$

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác NHF vuông tại F

$$NH = \sqrt{NF^2 + HF^2} = \sqrt{(5)^2 + (12)^2} = 13(\text{dm})$$

D. ĐÁP ÁN BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM:

BÀI 2. MỘT SỐ PHÉP TÍNH VỀ CĂN BẬC HAI CỦA SỐ THỰC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Kiến thức cần nhớ

I. Căn bậc hai

- **Khái niệm:** Căn bậc hai của số thực không âm a là số thực x sao cho $x^2 = a$.
- Nhận xét:
 - + Số âm không có căn bậc hai.
 - + Số 0 có căn bậc hai là 0
 - + Số dương a có đúng hai căn bậc hai đối nhau là \sqrt{a} (căn bậc hai số học của a) và $-\sqrt{a}$.

II. Tính chất của căn bậc hai

- Tính chất của căn bậc hai $\sqrt{a^2} = |a|$
 - So sánh hai căn bậc hai số học
- Với hai số a và b không âm, ta có $0 \leq a < b$ thì $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

III. Căn thức bậc hai của một tích

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \text{ với } a, b \geq 0.$$

$$\text{Với } A, B \text{ là các biểu thức không âm, ta có } \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B}$$

III. Căn thức bậc hai của một thương

$$\text{Nếu } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ với } a \geq 0, b > 0.$$

$$\text{Nếu } A, B \text{ là các biểu thức với } A \geq 0; B > 0 \text{ thì } \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$$

IV. Trục căn thức ở mẫu

$$\text{Với hai biểu thức } A, B \text{ mà } B > 0, \text{ ta có } \frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}.$$

Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0$ và $A \neq B^2$, ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A+B}} = \frac{C(\sqrt{A}-B)}{A-B^2}; \quad \frac{C}{\sqrt{A}-B} = \frac{C(\sqrt{A}+B)}{A-B^2}.$$

Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0, B \geq 0$ và $A \neq B$, ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} - \sqrt{B})}{A - B}; \quad \frac{C}{\sqrt{A} - \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} + \sqrt{B})}{A - B}.$$

V. Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai

Khi rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta cần phối hợp các phép tính (cộng, trừ, nhân, chia) và các phép biến đổi đã học (đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn; khử mẫu của biểu thức lấy căn; trục căn thức ở mẫu).

VI. Chú ý một số hằng đẳng thức

$$a^2 \pm 2a\sqrt{b} + b = (a \pm \sqrt{b})^2 \quad \text{với } b > 0$$

$$a \pm 2\sqrt{ab} + b = (\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 \quad \text{với } a > 0 \text{ và } b > 0$$

$$a^2 - b = (a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b}) \quad \text{với } b > 0$$

$$a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \quad \text{với } a > 0 \text{ và } b > 0$$

* **Chú ý:** Một số biểu thức khi ở trong căn chưa có dạng hằng đẳng thức $(a \pm \sqrt{b})^2$ hoặc $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2$, và khi đó ta cần nhân thêm một số căn bên ngoài vào căn đó thì mới xuất hiện dạng hằng đẳng thức $(a \pm \sqrt{b})^2$ hoặc $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2$, lúc đó ta mới phá được căn.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I – MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT

Câu 1: Tìm căn bậc hai của 9

- A. -3 B. ± 3 C. 3 D. 81

Câu 2: Tìm số x không âm thỏa mãn $\sqrt{x} = 6$

- A. 36 B. 6 C. 12 D. 3

Câu 3: Kết quả của phép tính $\sqrt{36} \cdot \sqrt{64}$ là

- A. 36 B. 6 C. 8 D. 48

Câu 4: Kết quả của phép tính $\frac{\sqrt{99}}{\sqrt{11}}$ là

- A. 9 B. 11 C. 3 D. $\sqrt{3}$

Câu 5: Trục căn thức ở mẫu của $\frac{15}{\sqrt{5}}$ được kết quả là

- A. 3 B. 5 C. $\sqrt{5}$ D. $3\sqrt{5}$

Câu 6: Cho $M = 5$ và $N = \frac{\sqrt{50}}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng.

- A. $M < N$ B. $M + 2 = N$ C. $M = N$ D. $M > N$

Câu 7: Giá trị của biểu thức $\sqrt{125} - \sqrt{80} + \sqrt{20}$ là

A. $11\sqrt{5}$

B. 15

C. $3\sqrt{5}$

D. $6\sqrt{5}$

Câu 8: Khử mẫu của biểu thức $\sqrt{\frac{3}{125}}$ sẽ được kết quả là

A. $\frac{\sqrt{15}}{25}$

B. $\frac{\sqrt{25}}{15}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{25}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{15}$

II – MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 9: Trục căn thức ở mẫu của $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$ được kết quả là

A. $2(\sqrt{3}+1)$

B. $2(\sqrt{3}-1)$

C. $\sqrt{3}+1$

D. $\sqrt{3}-1$

Câu 10: Trục căn thức ở mẫu của $\frac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}$ được kết quả là

A. $\sqrt{10}-\sqrt{7}$

B. $\sqrt{10}+\sqrt{7}$

C. $3(\sqrt{10}-\sqrt{7})$

D. $3(\sqrt{10}+\sqrt{7})$

Câu 11: Giá trị của biểu thức $4\sqrt{\frac{25}{16}}+5\sqrt{\frac{9}{25}}$ là

A. 9

B. 8

C. 7

D. $\frac{5}{4}$

Câu 12: Kết quả của phép tính $\sqrt{49a^2}+3a$ với $a \geq 0$ là

A. $10a$

B. $4a$

C. $-4a$

D. $52a$

Câu 13: Kết quả của phép tính $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}+1$ là

A. $\sqrt{3}-2$

B. $\sqrt{3}$

C. $2-\sqrt{3}$

D. $-\sqrt{3}$

Câu 14: Biểu thức $2b^2\sqrt{\frac{a^4}{4b^2}}$ với $b > 0$ bằng

A. $\frac{a^2}{2}$

B. a^2b

C. $-a^2b$

D. $\frac{a^2b^2}{b^2}$

III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 15: Kết quả của phép tính $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ là

A. $3-2\sqrt{5}$

B. $2-\sqrt{5}$

C. $\sqrt{5}-2$

D. Kết quả khác

Câu 16: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{45}+\sqrt{5}}{\sqrt{125}-\sqrt{80}}$. Giá trị của $3A$ là

A. 12

B. 9

C. 15

D. 8

Câu 17: Biểu thức $(\sqrt{5}+3\sqrt{2})(2\sqrt{5}+\sqrt{2})-(\sqrt{2}+3\sqrt{5})(2\sqrt{2}+\sqrt{5})$ có kết quả là

A. -1

B. 1

C. -2

D. -3

Câu 18: Giá trị của biểu thức $N = \sqrt{9-4\sqrt{5}} + \sqrt{9+4\sqrt{5}}$ bằng

A. $N = 4$

B. $N = \sqrt{5}$

C. $N = \sqrt{5} + 4$

D. $N = 2\sqrt{5}$

Câu 19: Cho biểu thức $A = \sqrt{4 + \sqrt{4 + \sqrt{4 + \dots}}}$ (có vô hạn số $\sqrt{4}$). Giá trị của biểu thức A là

A. $\frac{1 - \sqrt{17}}{2}$

B. $-\frac{1 + \sqrt{17}}{2}$

C. $\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$

D. $\frac{1 + \sqrt{17}}{2}$

Câu 20: Tốc độ của một chiếc cano và độ dài đường sóng nước để lại sau đuôi của nó được cho bởi công thức $v = 5\sqrt{I}$, trong đó I là độ dài đường nước sau đuôi cano (mét), v là vận tốc của cano (m/giây). Khi cano chạy với vận tốc 54 km/h thì đường sóng nước để lại sau đuôi chiếc cano dài bao nhiêu mét?

A. 5

B. $5\sqrt{3}$

C. 9

D. $3\sqrt{5}$



C. CÁC DẠNG TỰ LUẬN

Dạng 1. Căn bậc hai của một bình phương

Phương pháp giải

+ Với mọi số a , ta có: $\sqrt{a^2} = |a|$

+ $|a| = \begin{cases} a & \text{khi } a \geq 0 \\ -a & \text{khi } a < 0 \end{cases}$

+ Áp dụng hằng đẳng thức: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Bài 1. Tính

1) $\sqrt{25}$;

2) $\sqrt{(-3)^2}$;

3) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$;

4) $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$.

Bài 2. Thực hiện phép tính

1) $\sqrt{144} \cdot \sqrt{-\frac{49}{64}} \cdot \sqrt{0,01}$

2) $(\sqrt{0,15} - \sqrt{(-15)^2} + \sqrt{2,25}) : \sqrt{169}$

3) $(\sqrt{0,04} - \sqrt{(-1,2)^2} + \sqrt{121}) \cdot \sqrt{81}$ 4) $75 : \sqrt{3^2 + (-4)^2} - 3\sqrt{(-5)^2 - 3^2}$

Bài 3. Rút gọn biểu thức sau

1) $\sqrt{(4 - \sqrt{15})^2} + \sqrt{15}$; 2) $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$ 3) $\sqrt{(2\sqrt{2} - 3)^2} + 2\sqrt{2}$

Bài 4. Chứng minh rằng

1) $8 - 2\sqrt{7} = (\sqrt{7} - 1)^2$ 2) $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 1$; 3) $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

Bài 5. Rút gọn biểu thức sau

1) $\sqrt{49 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{49 + 12\sqrt{5}}$; 2) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$; 3) $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$.

Dạng 2. Căn bậc hai của một tích và căn bậc hai của một thương

Phương pháp giải

+ Với hai số không âm a, b , ta có: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

+ Với hai số không âm $a \geq 0, b > 0$, ta có: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Bài 1. Tính

1) $\sqrt{25 \cdot 144}$; 2) $\sqrt{45 \cdot 80}$; 3) $\sqrt{52} \cdot \sqrt{13}$; 4) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{28}$.

Bài 2. Tính

1) $\sqrt{\frac{25}{64}}$; 2) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; 3) $\frac{\sqrt{230}}{\sqrt{2,3}}$; 4) $\frac{\sqrt{12,5}}{0,5}$.

Bài 3. Thực hiện phép tính

1) $\sqrt{48} - 2\sqrt{75} + \sqrt{108} - \frac{1}{7}\sqrt{147}$; 2) $(\sqrt{44} + \sqrt{11})\sqrt{11}$;

3) $2\sqrt{5} - \sqrt{125} - \sqrt{80} + \sqrt{605}$

Bài 4. Tính

1) $(5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) : \sqrt{15}$. 2) $(\sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{3}) : \sqrt{3}$; 3) $\sqrt{1\frac{9}{16} \cdot 5\frac{4}{9} \cdot 0,01}$;

Bài 5. Rút gọn biểu thức sau

1) $\frac{\sqrt{10} - \sqrt{15}}{\sqrt{8} - \sqrt{12}}$; 2) $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - 1} + \frac{5 - 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5} - 4}$; 3) $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6} + \sqrt{16}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}}$

Dạng 3. Đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn bậc hai**Phương pháp giải**

Cho hai số a, b với $b \geq 0$. Khi đó $\sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b} = \begin{cases} a\sqrt{b} & \text{khi } a \geq 0 \\ -a\sqrt{b} & \text{khi } a < 0 \end{cases}$

Với $a \geq 0$ và $b \geq 0$, ta có: $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$.

Với $a < 0$ và $b \geq 0$, ta có: $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}$

Bài 1. So sánh

1) $2\sqrt{29}$ và $3\sqrt{13}$;;

2) $\frac{5}{4}\sqrt{2}$ và $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$;

Bài 2. Sắp xếp các cặp số sau theo thứ tự tăng dần:

1) $3\sqrt{5}; 2\sqrt{6}; \sqrt{29}$ và $4\sqrt{2}$

2) $5\sqrt{2}; \sqrt{39}; 3\sqrt{8}$ và $2\sqrt{15}$

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau.

1) $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}$.

2) $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} + \sqrt{84}$

3) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$.

4) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{4}{5}\sqrt{200}\right) : \frac{1}{8}$.

Bài 4. Tính

1) $A = \sqrt{8\sqrt{3}} - 2\sqrt{25\sqrt{12}} + 4\sqrt{\sqrt{192}}$

2) $B = 2\sqrt{80\sqrt{3}} - 2\sqrt{5\sqrt{3}} - 3\sqrt{20\sqrt{3}}$

Bài 5. Tính

1) $M = \sqrt{6 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}$

2) $N = \sqrt{9 - \sqrt{12} + \sqrt{20} - \sqrt{60}}$

Dạng 4. Trục căn thức ở mẫu**Phương pháp giải**

+ Với hai số $a \geq 0, b > 0$, ta có: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$

+ Với hai số $a, b (b > 0)$, ta có: $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$

+ Cho các số $a, b, c (b \geq 0, a^2 \neq b)$ ta có: $\frac{c}{a + \sqrt{b}} = \frac{c(a - \sqrt{b})}{a^2 - b}$; $\frac{c}{a - \sqrt{b}} = \frac{c(a + \sqrt{b})}{a^2 - b}$

+ Cho các số $a, b, c (a, b \geq 0, a \neq b)$ ta có: $\frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$; $\frac{c}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}$

Bài 1. Khử mẫu của các biểu thức sau\

1) $\sqrt{\frac{7}{27}}$;

2) $\sqrt{\frac{5}{11}}$;

3) $\frac{3+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$;

4) $\frac{1}{2-3\sqrt{3}}$

Bài 2. Trục căn thức ở mẫu

1) $\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}$

2) $\frac{2}{1-2\sqrt{5}}$

Bài 3. Trục căn thức ở mẫu

1) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{14}-\sqrt{6+\sqrt{35}}}$

3) $\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}}$.

Bài 4. Rút gọn biểu thức

1) $A = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

2) $B = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$.

Bài 5. Rút gọn biểu thức

1) $A = \frac{1}{2+\sqrt{3}} - \frac{1}{2-\sqrt{3}} + 5\sqrt{3}$

2) $B = \frac{2\sqrt{15}-2\sqrt{10}+\sqrt{6}-3}{2\sqrt{5}-2\sqrt{10}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}$;

D. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	B	A	D	C	D	D	C	A	C	A
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	B	A	B	B	C	A	D	D	D	C

I – MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT

Câu 1: Tìm căn bậc hai của 9.

- A. -3 B. ± 3 C. 3 D. 81

Lời giải

Ta có $\sqrt{9} = 3$ nên 9 có hai căn bậc hai là 3 và -3

Câu 2: Tìm số x không âm thỏa mãn $\sqrt{x} = 6$

- A. 36 B. 6 C. 12 D. 3

Lời giải

Căn bậc hai của 6 là số 36 vì $6^2 = 36$.

Câu 3: Kết quả của phép tính $\sqrt{36} \cdot \sqrt{64}$ là

- A. 36 B. 6 C. 8 D. 48

Lời giải

$$\sqrt{36} \cdot \sqrt{64} = 6 \cdot 8 = 48$$

Câu 4: Kết quả của phép tính $\frac{\sqrt{99}}{\sqrt{11}}$ là

- A. 9 B. 11 C. 3 D. $\sqrt{3}$

Lời giải

$$\frac{\sqrt{99}}{\sqrt{11}} = \sqrt{\frac{99}{11}} = \sqrt{9} = 3.$$

Câu 5: Trục căn thức ở mẫu của $\frac{15}{\sqrt{5}}$ được kết quả là

- A. 3 B. 5 C. $\sqrt{5}$ D. $3\sqrt{5}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{15}{\sqrt{5}} = \frac{15 \cdot \sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5}.$$

Câu 6: Cho $M = 5$ và $N = \frac{\sqrt{50}}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng.

- A. $M < N$ B. $M + 2 = N$ C. $M = N$ D. $M > N$

Lời giải

$$\text{Ta có } N = \frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{\sqrt{2}} < 5 = M.$$

Vậy $M > N$.

Câu 7. Giá trị của biểu thức $\sqrt{125} - \sqrt{80} + \sqrt{20}$ là

- A. $11\sqrt{5}$ B. 15 C. $3\sqrt{5}$ D. $6\sqrt{5}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \sqrt{125} - \sqrt{80} + \sqrt{20} = 5\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}.$$

Câu 8. Khử mẫu của biểu thức $\sqrt{\frac{3}{125}}$ sẽ được kết quả là

- A. $\frac{\sqrt{15}}{25}$ B. $\frac{\sqrt{25}}{15}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{25}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{15}$

Lời giải

$$\sqrt{\frac{3}{125}} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{3 \cdot 5}{25}} = \frac{\sqrt{15}}{25}.$$

II – MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 9. Trục căn thức ở mẫu của $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$ được kết quả là

- A. $2(\sqrt{3}+1)$ B. $2(\sqrt{3}-1)$ C. $\sqrt{3}+1$ D. $\sqrt{3}-1$

Lời giải

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = (\sqrt{3}+1).$$

Câu 10. Trục căn thức ở mẫu của $\frac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}$ được kết quả là

- A. $\sqrt{10}-\sqrt{7}$ B. $\sqrt{10}+\sqrt{7}$ C. $3(\sqrt{10}-\sqrt{7})$ D. $3(\sqrt{10}+\sqrt{7})$

Lời giải

$$\frac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}} = \frac{3(\sqrt{10}-\sqrt{7})}{(\sqrt{10}+\sqrt{7})(\sqrt{10}-\sqrt{7})} = \frac{3(\sqrt{10}-\sqrt{7})}{(\sqrt{10})^2 - (\sqrt{7})^2} = \frac{3(\sqrt{10}-\sqrt{7})}{3} = \sqrt{10}-\sqrt{7}.$$

Câu 11. Giá trị của biểu thức $4\sqrt{\frac{25}{16}} + 5\sqrt{\frac{9}{25}}$ là

A. 9

B. 8

C. 7

D. $\frac{5}{4}$ **Lời giải**

Giá trị của biểu thức $4\sqrt{\frac{25}{16}} + 5\sqrt{\frac{9}{25}} = 4\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2} + 5\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = 4 \cdot \frac{5}{4} + 5 \cdot \frac{3}{5} = 5 + 3 = 8$.

Câu 12. Kết quả của phép tính $\sqrt{49a^2} + 3a$ với $a \geq 0$ là

A. $10a$ B. $4a$ C. $-4a$ D. $52a$ **Lời giải**

Với $a \geq 0$. Ta có: $\sqrt{49a^2} + 3a = \sqrt{(7a)^2} + 3a = |7a| + 3a = 7a + 3a = 10a$.

Câu 13. Kết quả của phép tính $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + 1$ là

A. $\sqrt{3}-2$ B. $\sqrt{3}$ C. $2-\sqrt{3}$ D. $-\sqrt{3}$ **Lời giải**

Với $\sqrt{3}-1 > 0$. Ta có: $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + 1 = |\sqrt{3}-1| + 1 = \sqrt{3}-1+1 = \sqrt{3}$.

Câu 14. Biểu thức $2b^2\sqrt{\frac{a^4}{4b^2}}$ với $b > 0$ bằng:

A. $\frac{a^2}{2}$ B. a^2b C. $-a^2b$ D. $\frac{a^2b^2}{b^2}$ **Lời giải**

Biểu thức $2b^2\sqrt{\frac{a^4}{4b^2}} = 2b^2\left|\frac{a^2}{2b}\right| = 2b^2 \cdot \frac{a^2}{2b} = a^2b$ với $b > 0$

III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 15. Kết quả của phép tính $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ là

A. $3-2\sqrt{5}$ B. $2-\sqrt{5}$ C. $\sqrt{5}-2$

D. Kết quả khác

Lời giải

Ta có $\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{5} + 2^2} = \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = |\sqrt{5}-2| = \sqrt{5}-2$ do $\sqrt{5} > 2$.

Câu 16. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{45} + \sqrt{5}}{\sqrt{125} - \sqrt{80}}$. Giá trị của $3A$ là

A. 12

B. 9

C. 15

D. 8

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \frac{\sqrt{45} + \sqrt{5}}{\sqrt{125} - \sqrt{80}} = \frac{3\sqrt{5} + \sqrt{5}}{5\sqrt{5} - 4\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 4$$

Khi đó $3A = 3 \cdot 4 = 12$.

Câu 17. Biểu thức $(\sqrt{5} + 3\sqrt{2})(2\sqrt{5} + \sqrt{2}) - (\sqrt{2} + 3\sqrt{5})(2\sqrt{2} + \sqrt{5})$ có kết quả là

A. -1

B. 1

C. -2

D. -3

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & (\sqrt{5} + 3\sqrt{2})(2\sqrt{5} + \sqrt{2}) - (\sqrt{2} + 3\sqrt{5})(2\sqrt{2} + \sqrt{5}) \\ & = 10 + \sqrt{10} + 6\sqrt{10} + 6 - 4 - \sqrt{10} - 6\sqrt{10} - 15 \\ & = -3 \end{aligned}$$

Câu 18. Giá trị của biểu thức $N = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} + \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$ bằng

A. $N = 4$

B. $N = \sqrt{5}$

C. $N = \sqrt{5} + 4$

D. $N = 2\sqrt{5}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 9 - 4\sqrt{5} = (2 - \sqrt{5})^2; 9 + 4\sqrt{5} = (2 + \sqrt{5})^2$$

$$N = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} + \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(2 + \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| + |2 + \sqrt{5}| = 2\sqrt{5}$$

IV – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG CAO

Câu 19. Cho biểu thức $A = \sqrt{4 + \sqrt{4 + \sqrt{4 + \dots}}}$ (có vô hạn số $\sqrt{4}$). Giá trị của biểu thức A là

A. $\frac{1 - \sqrt{17}}{2}$

B. $-\frac{1 + \sqrt{17}}{2}$

C. $\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$

D. $\frac{1 + \sqrt{17}}{2}$

Lời giải

Đặt $x = \sqrt{4 + \sqrt{4 + \sqrt{4 + \dots + \sqrt{4}}}}$. Ta có: $x > 0$.

Khi đó: $x^2 = 4 + \sqrt{4 + \sqrt{4 + \sqrt{4 + \dots + \sqrt{4}}}} \Rightarrow x^2 = 4 + x \Leftrightarrow x^2 - x - 4 = 0$.

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 17 > 0 \Rightarrow \text{Phương trình có hai nghiệm phân biệt: } x_1 = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Vì $x > 0$ suy ra $x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$.

Câu 20. Tốc độ của một chiếc cano và độ dài đường sóng nước để lại sau đuôi của nó được cho bởi công thức $v = 5\sqrt{I}$, trong đó I là độ dài đường nước sau đuôi cano (mét), v là vận tốc của cano (m/giây). Khi cano chạy với vận tốc 54 km/h thì đường sóng nước để lại sau đuôi chiếc cano dài bao nhiêu mét?

A. 5

B. $5\sqrt{3}$

C. 9

D. $3\sqrt{5}$ **Lời giải**

Đổi $v = 54 \text{ (km/h)} = 15 \text{ (m/s)}$. Thay vào công thức

$v = 5\sqrt{I}$, ta được:

$$5\sqrt{I} = 15 \text{ suy ra } \sqrt{I} = 3, I = 9 \text{ (m)}$$

Vậy đường sóng nước để lại sau đuôi chiếc cano dài 9m.



E. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP TỰ LUẬN**Dạng 1: Căn bậc hai của một bình phương****Bài 1.** Tính

$$1) \sqrt{25}; \quad 2) \sqrt{(-3)^2}; \quad 3) \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}; \quad 4) \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}.$$

Lời giải

$$1) \sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5.$$

$$2) \sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3.$$

$$3) \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1.$$

$$4) \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}-1.$$

Bài 2. Thực hiện phép tính

$$1) \sqrt{144} \cdot \sqrt{-\frac{49}{64}} \cdot \sqrt{0,01}$$

$$2) (\sqrt{0,15} - \sqrt{(-15)^2} + \sqrt{2,25}) : \sqrt{169}$$

$$3) \left(\sqrt{0,04} - \sqrt{(-1,2)^2} + \sqrt{121} \right) \cdot \sqrt{81}$$

$$4) 75 : \sqrt{3^2 + (-4)^2} - 3\sqrt{(-5)^2 - 3^2}$$

Lời giải

$$1) \sqrt{144} \cdot \sqrt{-\frac{49}{64}} \cdot \sqrt{0,01} = \sqrt{12^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^2} \cdot \sqrt{0,1^2} = 1,05$$

$$2) (\sqrt{0,15} - \sqrt{(-15)^2} + \sqrt{2,25}) : \sqrt{169} = (\sqrt{0,5^2} - \sqrt{15^2} + \sqrt{1,5^2}) : \sqrt{13^2} = -1$$

$$3) \left(\sqrt{0,04} - \sqrt{(-1,2)^2} + \sqrt{121} \right) \cdot \sqrt{81} = (0,2 - 1,2 + 11) \cdot 9 = 90$$

$$4) 75 : \sqrt{3^2 + (-4)^2} - 3\sqrt{(-5)^2 - 3^2} = 75 : \sqrt{25} - 3\sqrt{16} = 3$$

Bài 3. Rút gọn biểu thức sau

$$1) \sqrt{(4-\sqrt{15})^2} + \sqrt{15}; \quad 2) \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}; \quad 3) \sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2} + 2\sqrt{2}.$$

Lời giải

$$1) \sqrt{(4-\sqrt{15})^2} + \sqrt{15} = |4-\sqrt{15}| + \sqrt{15} = 4;$$

$$2) \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = |2-\sqrt{3}| + |1-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3} - (1-\sqrt{3}) = 1;$$

$$3) \sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2} + 2\sqrt{2} = |2\sqrt{2}-3| + 2\sqrt{2} = 3$$

Bài 4. Chứng minh rằng

$$1) 8 - 2\sqrt{7} = (\sqrt{7} - 1)^2 \quad 2) \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 1; \quad 3) \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

Lời giải

$$1) 8 - 2\sqrt{7} = 7 + 2 \cdot \sqrt{7} \cdot 1 + 1 = (\sqrt{7} - 1)^2$$

$$2) \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{5+2 \cdot \sqrt{5} \cdot 1 + 1} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 1 + 1^2} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} = |\sqrt{5}+1| = \sqrt{5}+1$$

$$3) \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3-2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 2} = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = |\sqrt{3}-\sqrt{2}| = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

Bài 5. Rút gọn biểu thức sau

$$1) \sqrt{49-12\sqrt{5}} - \sqrt{49+12\sqrt{5}};$$

$$2) \sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{11-6\sqrt{2}};$$

$$3) \sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{7-2\sqrt{3}}$$

Lời giải

$$1) \sqrt{49-12\sqrt{5}} - \sqrt{49+12\sqrt{5}} = \sqrt{(2-3\sqrt{5})^2} - \sqrt{(2+3\sqrt{5})^2} = |2-3\sqrt{5}| - |2+3\sqrt{5}| = -4;$$

$$2) \sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} = |3+\sqrt{2}| - |3-\sqrt{2}| = 2\sqrt{2}|$$

$$3) \sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(2-\sqrt{3})^3} = |\sqrt{3}+\sqrt{2}| - |2-\sqrt{3}| = \sqrt{2}-2$$

Dạng 2: Căn bậc hai của một tích và căn bậc hai của một thương

Bài 1. Tính

$$1) \sqrt{25.144}; \quad 2) \sqrt{45.80}; \quad 3) \sqrt{52} \cdot \sqrt{13}; \quad 4) \sqrt{7} \cdot \sqrt{28}.$$

Lời giải

$$1) \sqrt{25.144} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{144} = 5 \cdot 12 = 60;$$

$$2) \sqrt{45.80} = \sqrt{9 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 16} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60;$$

$$3) \sqrt{52} \cdot \sqrt{13} = \sqrt{52 \cdot 13} = 26;$$

$$4) \sqrt{7} \cdot \sqrt{28} = \sqrt{7 \cdot 28} = 14;$$

Bài 2. Tính

$$1) \sqrt{\frac{25}{64}}; \quad 2) \sqrt{1\frac{9}{16}}; \quad 3) \frac{\sqrt{230}}{\sqrt{2,3}}; \quad 4) \frac{\sqrt{12,5}}{0,5}.$$

Lời giải

$$1) \sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{8}$$

$$2) \sqrt{1\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4};$$

$$3) \frac{\sqrt{230}}{\sqrt{2,3}} = \sqrt{\frac{230}{2,3}} = \sqrt{100} = 10;$$

$$4) \frac{\sqrt{12,5}}{0,5} = \frac{\sqrt{12,5}}{\sqrt{0,25}} = \sqrt{\frac{12,5}{0,25}} = \sqrt{25} = 5$$

Bài 3. Thực hiện phép tính

$$1) \sqrt{48} - 2\sqrt{75} + \sqrt{108} - \frac{1}{7}\sqrt{147}; \quad 2) (\sqrt{44} + \sqrt{11})\sqrt{11};$$

$$3) 2\sqrt{5} - \sqrt{125} - \sqrt{80} + \sqrt{605}$$

Lời giải

$$1) \sqrt{48} - 2\sqrt{75} + \sqrt{108} - \frac{1}{7}\sqrt{147} = 4\sqrt{3} - 2 \cdot 5\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - \frac{1}{7} \cdot 7\sqrt{3} = \sqrt{3} \left(4 - 2 \cdot 5 + 6 - \frac{1}{7} \cdot 7 \right) = -\sqrt{3}$$

$$2) (\sqrt{44} + \sqrt{11})\sqrt{11} = (2\sqrt{11} + \sqrt{11})\sqrt{11} = 3\sqrt{11} \cdot \sqrt{11} = 3 \cdot 11 = 33.;$$

$$3) 2\sqrt{5} - \sqrt{125} - \sqrt{80} + \sqrt{605} = 2\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 11\sqrt{5} = 4\sqrt{5}.$$

Bài 4. Tính

$$1) (5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) : \sqrt{15}. \quad 2) (\sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{3}) : \sqrt{3}; \quad 3) \sqrt{1\frac{9}{16} \cdot 5\frac{4}{9} \cdot 0,01}$$

Lời giải

$$1) (5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) : \sqrt{15} = (5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) : (\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}) = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

$$2) (\sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{3}) : \sqrt{3} = \sqrt{48:3} - \sqrt{27:3} + \sqrt{3:3} = \sqrt{16} - \sqrt{9} + 1 = 2$$

$$3) \sqrt{1\frac{9}{16} \cdot 5\frac{4}{9} \cdot 0,01} = \sqrt{\frac{25}{16} \cdot \frac{49}{9} \cdot \frac{1}{100}} = \sqrt{\frac{25}{16} \cdot \frac{49}{9} \cdot \frac{1}{100}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{7}{24}$$

Bài 5. Rút gọn biểu thức sau

$$1) \frac{\sqrt{10} - \sqrt{15}}{\sqrt{8} - \sqrt{12}}; \quad 2) \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - 1} + \frac{5 - 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5} - 4}; \quad 3) \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6} + \sqrt{16}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}}$$

Lời giải

$$1) \frac{\sqrt{10} - \sqrt{15}}{\sqrt{8} - \sqrt{12}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{4} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{2(\sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

$$2) \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - 1} + \frac{5 - 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5} - 4} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} - 1} + \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5} - 2)}{2(\sqrt{5} - 2)} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

$$3) \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6} + \sqrt{16}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}} = \frac{\sqrt{4} - \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}) + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}} = \sqrt{2} + 1$$

Dạng 3: Đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn bậc hai

Bài 1. So sánh

$$1) 2\sqrt{29} \text{ và } 3\sqrt{13}; ;$$

$$2) \frac{5}{4}\sqrt{2} \text{ và } \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}};$$

Lời giải

$$1) \text{ Ta có } 2\sqrt{29} = \sqrt{2^2 \cdot 29} = \sqrt{116} \text{ và } 3\sqrt{13} = \sqrt{3^2 \cdot 13} = \sqrt{117}.$$

$$\text{Mà } \sqrt{116} < \sqrt{117} \text{ nên } 2\sqrt{29} < 3\sqrt{13}.$$

$$2) \text{ Ta có } \frac{5}{4}\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot 2} = \sqrt{\frac{25}{8}} \text{ và } \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{27}{8}}.$$

$$\text{Mà } \sqrt{\frac{25}{8}} < \sqrt{\frac{27}{8}} \text{ nên } \frac{5}{4}\sqrt{2} < \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Bài 2. Sắp xếp các cặp số sau theo thứ tự tăng dần:

$$1) 3\sqrt{5}; 2\sqrt{6}; \sqrt{29} \text{ và } 4\sqrt{2}$$

$$2) 5\sqrt{2}; \sqrt{39}; 3\sqrt{8} \text{ và } 2\sqrt{15}$$

Lời giải

1) Ta có:

$$3\sqrt{5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}$$

$$2\sqrt{6} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{24}$$

$$4\sqrt{2} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{32}$$

$$\text{Do } \sqrt{24} < \sqrt{29} < \sqrt{32} < \sqrt{45} \text{ nên } 2\sqrt{6} < \sqrt{29} < 4\sqrt{2} < 3\sqrt{5}.$$

2) Ta có

$$5\sqrt{2} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{50}$$

$$3\sqrt{8} = \sqrt{9 \cdot 8} = \sqrt{72}$$

$$2\sqrt{15} = \sqrt{4 \cdot 15} = \sqrt{60}$$

Do $\sqrt{39} < \sqrt{50} < \sqrt{60} < \sqrt{72}$ nên $\sqrt{39} < 5\sqrt{2} < 2\sqrt{15} < 3\sqrt{8}$.

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau.

1) $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}$.

2) $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} + \sqrt{84}$

3) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$.

4) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{4}{5}\sqrt{200}\right) : \frac{1}{8}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} 1. \sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72} &= \sqrt{2^2 \cdot 5} - \sqrt{3^2 \cdot 5} + 3\sqrt{3^2 \cdot 2} + \sqrt{6^2 \cdot 2} = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 9\sqrt{2} + 6\sqrt{2} \\ &= (2-3)\sqrt{5} + (9+6)\sqrt{2} = 15\sqrt{2} - \sqrt{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. (\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} + \sqrt{84} &= \sqrt{2^2 \cdot 7} \cdot \sqrt{7} - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{2^2 \cdot 21} \\ &= 2 \cdot 7 - 2\sqrt{21} + 7 + 2\sqrt{21} = 14 + 7 + (2-2)\sqrt{21} = 21. \end{aligned}$$

$$3. (\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120} = 6 + 2\sqrt{30} + 5 - \sqrt{2^2 \cdot 30} = 6 + 5 + 2\sqrt{30} - 2\sqrt{30} = 11.$$

$$\begin{aligned} 4. \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{4}{5}\sqrt{200}\right) : \frac{1}{8} &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{2^2}} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{4}{5}\sqrt{10^2 \cdot 2}\right) : \frac{1}{8} \\ &= \left(\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + 8\sqrt{2}\right) \cdot 8 = 2\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 64\sqrt{2} = 54\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Bài 4. Tính

1) $A = \sqrt{8\sqrt{3}} - 2\sqrt{25\sqrt{12}} + 4\sqrt{\sqrt{192}}$

2) $B = 2\sqrt{80\sqrt{3}} - 2\sqrt{5\sqrt{3}} - 3\sqrt{20\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} 1) A &= \sqrt{8\sqrt{3}} - 2\sqrt{25\sqrt{12}} + 4\sqrt{\sqrt{192}} = \sqrt{2^2 \cdot 2\sqrt{3}} - 2 \cdot \sqrt{5^2 \sqrt{2^2 \cdot 3}} + 4\sqrt{\sqrt{8^2 \cdot 3}} = 2\sqrt{2\sqrt{3}} - 2 \cdot 5\sqrt{2\sqrt{3}} + 4\sqrt{8 \cdot \sqrt{3}} \\ &= 2\sqrt{2\sqrt{3}} - 10\sqrt{2\sqrt{3}} + 4 \cdot 2\sqrt{2\sqrt{3}} = 0 \end{aligned}$$

$$2) B = 2\sqrt{80\sqrt{3}} - 2\sqrt{5\sqrt{3}} - 3\sqrt{20\sqrt{3}} = 8\sqrt{5\sqrt{3}} - 2\sqrt{5\sqrt{3}} - 6\sqrt{5\sqrt{3}} = 0$$

Bài 5. Tính

1) $M = \sqrt{6+2\sqrt{3}+2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$

2) $N = \sqrt{9-\sqrt{12}+\sqrt{20}-\sqrt{60}}$

Lời giải

$$1) M = \sqrt{6+2\sqrt{3}+2\sqrt{2}+2\sqrt{6}} = \sqrt{3+2+1+2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)^2}$$

$$= |\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1| = \sqrt{3} + \sqrt{2} + 1$$

$$2) N = \sqrt{9 - \sqrt{12} + \sqrt{20} - \sqrt{60}} = \sqrt{5 + 3 + 1 - 2\sqrt{3} \cdot 1 - 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{5} - 1)^2}$$

$$= |\sqrt{3} - \sqrt{5} - 1| = 1 + \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

Dạng 4: Trục căn thức ở mẫu

Bài 1. Khử mẫu của các biểu thức sau\

$$1) \sqrt{\frac{7}{27}}; \quad 2) \sqrt{\frac{5}{11}}; \quad 3) \frac{3 + \sqrt{3}}{3\sqrt{3}}; \quad 4) \frac{1}{2 - 3\sqrt{3}}$$

Lời giải

$$1) \sqrt{\frac{7}{27}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 3}{27 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{21}{9^2}} = \frac{\sqrt{21}}{9}; \quad 2) \sqrt{\frac{5}{11}} = \sqrt{\frac{55}{11^2}} = \frac{\sqrt{55}}{11};$$

$$3) \frac{3 + \sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{3}; \quad 4) \frac{1}{2 - 3\sqrt{3}} = \frac{2 + 3\sqrt{3}}{(2 - 3\sqrt{3})(2 + 3\sqrt{3})} = \frac{2 + 3\sqrt{3}}{4 - 27} = -\frac{2 + 3\sqrt{3}}{23}.$$

Bài 2. Trục căn thức ở mẫu

$$1) \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} + 2} \quad 2) \frac{2}{1 - 2\sqrt{5}}$$

Lời giải

$$1) \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} + 2} = \frac{(\sqrt{3} - 2)^2}{3 - 4} = -7 + 4\sqrt{3} \quad 2) \frac{2}{1 - 2\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot (1 + 2\sqrt{5})}{1 - 20} = -\frac{2 + 4\sqrt{5}}{19}.$$

Bài 3. Trục căn thức ở mẫu

$$1) \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1}; \quad 2) \frac{1}{\sqrt{14} - \sqrt{6 + \sqrt{35}}}; \quad 3) \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{2} + \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}}$$

Lời giải

$$1) \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 1} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}{2\sqrt{6} + 4} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)(2\sqrt{6} - 4)}{24 - 16} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)(2\sqrt{6} - 4)}{8}$$

$$2) \frac{1}{\sqrt{14} - \sqrt{6 + \sqrt{35}}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{7} - \sqrt{12 + 2\sqrt{35}}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{7} - \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{7})^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{7 - 5} = \frac{\sqrt{14} - \sqrt{10}}{2}$$

$$3) \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}+\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2} = \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-2)}{3}.$$

Bài 4. Rút gọn biểu thức

$$1) A = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \qquad 2) B = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}};$$

Lời giải

$$1) A = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})-(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} = -\sqrt{3}$$

$$2) B = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = \frac{|\sqrt{3}-1|}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Bài 5. Rút gọn biểu thức

$$1) A = \frac{1}{2+\sqrt{3}} - \frac{1}{2-\sqrt{3}} + 5\sqrt{3} \qquad 2) B = \frac{2\sqrt{15}-2\sqrt{10}+\sqrt{6}-3}{2\sqrt{5}-2\sqrt{10}-\sqrt{3}+\sqrt{6}};$$

Lời giải

$$1) A = \frac{1}{2+\sqrt{3}} - \frac{1}{2-\sqrt{3}} + 5\sqrt{3} = \frac{2-\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})}{2^2-(\sqrt{3})^2} + 5\sqrt{3} = \frac{-2\sqrt{3}}{1} + 5\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$2) B = \frac{2\sqrt{15}-2\sqrt{10}+\sqrt{6}-3}{2\sqrt{5}-2\sqrt{10}-\sqrt{3}+\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{5}(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\sqrt{3}(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2\sqrt{5}(1-\sqrt{2})-\sqrt{3}(1-\sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(2\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(1-\sqrt{2})(2\sqrt{5}-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{1^2-(\sqrt{2})^2} = (\sqrt{2}-\sqrt{3})(1+\sqrt{2}).$$

BÀI 3. CĂN THỨC BẬC HAI VÀ CĂN THỨC BẬC BA CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Kiến thức cần nhớ

I. Căn thức bậc hai

Với A là một biểu thức đại số, người ta gọi \sqrt{A} là *căn thức bậc hai* của A , còn A được gọi là biểu thức lấy căn bậc hai hay biểu thức dưới dấu căn.

Chẳng hạn: $\sqrt{55^2 - x^2}$ là căn thức bậc hai của biểu thức đại số $55^2 - x^2$.

Điều kiện xác định cho căn thức bậc hai \sqrt{A} là $A \geq 0$

II. Căn thức bậc ba

Với A là một biểu thức đại số, người ta gọi $\sqrt[3]{A}$ là *căn thức bậc ba* của A , còn A được gọi là biểu thức lấy căn bậc ba hay biểu thức dưới dấu căn.

Chẳng hạn: $\sqrt[3]{V}$ là căn thức bậc hai của biểu thức đại số V .

Điều kiện xác định cho căn thức bậc hai $\sqrt[3]{A}$ chính là điều kiện xác định của biểu thức A .

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I – MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT

Câu 1: Điều kiện xác định cho căn thức bậc hai \sqrt{A} là:

- A. $A \geq 0$ B. $A \leq 0$ C. $\sqrt{A} < 0$ D. $A^2 \leq 0$

Câu 2: Điều kiện xác định của $\sqrt{x-1}$ là:

- A. $x > 1$ B. $x \geq 1$ C. $x \leq 1$ D. $x < 1$

Câu 3: Biểu thức $\sqrt{x^2 + 1}$ là căn thức bậc hai vì:

- A. lũy thừa của ẩn x bằng 2 B. $x^2 + 1$ là một hàm số bậc hai
C. $x^2 + 1$ là một biểu thức đại số D. $x^2 + 1$ luôn dương

Câu 4: Giá trị của $\sqrt{x-1}$ tại $x=1$ là:

- A. 2 B. -1 C. 1 D. 0

Câu 5: Biểu thức $\sqrt[3]{x^3 - 3}$ là căn thức bậc ba vì:

- A. $x^3 - 3$ là một biểu thức đại số B. $x^3 - 3$ là một hàm số bậc 3
C. $x^3 - 3$ luôn khác 0 D. Số mũ của biến x bằng 3

Câu 6: Giá trị của $\sqrt[3]{x+1}$ tại $x=0$ là:

- A. 0 B. 1 C. -1 D. 3

Câu 7: Điều kiện xác định của $\sqrt[3]{x^3 - 1}$ là:

- A. $x \geq 1$ B. $x > 1$ C. $x \leq 1$ D. $x \in R$

Câu 8: Điều kiện xác định của $\sqrt{x-6}$ là:

A. $x > 6$

B. $x < 6$

C. $x \geq 6$

D. $x \leq 6$

II – MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 9. Điều kiện xác định của biểu thức $Z = \sqrt[3]{3-x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ là:

A. $1 \leq x \leq 3$

B. $1 < x \leq 3$

C. $x > 1$

D. $x \geq 1$

Câu 10. Điều kiện xác định của $\sqrt{3x-3}$ là:

A. $x \geq 1$

B. $x \leq 3$

C. $x \geq -1$

D. $x \leq -3$

Câu 11. Điều kiện xác định của $\sqrt{10+100x}$ là:

A. $x < 10$

B. $x \geq -\frac{1}{10}$

C. $x \geq \frac{1}{10}$

D. $x \geq 10$

Câu 12. Giá trị của căn thức $\sqrt{15-x^2}$ tại $x = \sqrt{10}$ là:

A. $\sqrt{10}$

B. 5

C. $\sqrt{5}$

D. 10

Câu 13. Giá trị của căn thức $\sqrt[3]{2x-7}$ tại $x = -\frac{1}{2}$ là:

A. $-\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. 2

D. -2

Câu 14. Điều kiện xác định của $\sqrt[3]{4x-2}$ là:

A. $x \in R$

B. $x \geq \frac{1}{2}$

C. $x < \frac{1}{2}$

D. $x \leq \frac{1}{2}$

Câu 15. Điều kiện xác định của biểu thức $K = \sqrt{-x^2+5x-6} - \frac{1}{2x+5}$ là:

A. $2 \leq x \leq 3$

B. $\begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq \frac{5}{2} \end{cases}$

C. $\begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ x \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$

D. $x \leq 0$

III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 16. Giá trị của căn thức $\sqrt[3]{\frac{x^3-1}{8}}$ tại $x = 0$ là:

A. $\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. 2

D. -2

Câu 17. Điều kiện xác định của $\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ là:

A. $x \neq -1$

B. $x \neq 0$

C. $x \neq 1$

D. $x \neq 2$

Câu 18. Với giá trị nào của x thì biểu thức $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ có nghĩa?

A. $x \leq 0$

B. $x \geq 1, x \neq 0$

C. $x \geq 0, x \neq 1$

D. $x \geq 1$

Câu 19. Giá trị của biểu thức $\sqrt{9a^2(b^2+4-4b)}$ khi $a = 2$ và $b = -\sqrt{3}$ bằng giá trị nào sau đây?

A. $3(2+\sqrt{3})$

B. $6(2-\sqrt{3})$

C. $6(2+\sqrt{3})$

D. $3(2-\sqrt{3})$

Câu 20. Biểu thức $\frac{-3}{10-5x}$ có căn bậc hai khi

- A. $x < 2$ B. $x \leq 2$ C. $x > 2$ D. $x \geq 2$

Câu 21. Tìm điều kiện để biểu thức $\sqrt{(5\sqrt{x}+7)(5\sqrt{x}-7)}$ có nghĩa?

- A. $x \leq -\frac{5}{7}$ B. $x \geq 0$ C. $x \geq \frac{49}{25}$ D. $x \geq -\frac{5}{7}$

Câu 22. Tìm điều kiện xác định biểu thức $\frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x^2-4}$ có nghĩa?

- A. $x < 2, x \geq 3$ B. $x \leq 2, x \geq 3, x \neq -2$
 C. $x < 2, x > 3, x \neq -2$ D. $x < 2, x \geq 3, x \neq -2$

Câu 23. Biểu thức $\sqrt{|x-1|-3}$ có nghĩa khi:

- A. $\begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 4 \end{cases}$ B. $x \leq -2$ C. $-2 \leq x \leq 4$ D. $x \geq 4$

C. BÀI TẬP TỰ LUẬN

I. CÁC DẠNG VỀ CĂN THỨC BẬC HAI

Dạng 1. Tìm điều kiện để biểu thức xác định

Phương pháp giải

- \sqrt{A} có nghĩa khi $A \geq 0$.
- $\frac{1}{\sqrt{A}}$ có nghĩa khi $A > 0$.

Kiến thức bổ sung: Chú ý rằng với a là số dương ta luôn có:

$$x^2 \leq a^2 \text{ hay } -a \leq x \leq a.$$

$$x^2 \geq a^2 \text{ hay } \begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases}$$

Bài 1. Với giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa

- a) $\sqrt{-3x}$. b) $\sqrt{2x-4}$ c) $\sqrt{7-6x}$ d) $\sqrt{-3x+2}$

Bài 2. Tìm điều kiện của x để các biểu thức sau xác định

- a) $\sqrt{\frac{2}{3}x-\frac{1}{5}}$ b) $\sqrt{x^2+2}$ c) $\sqrt{\frac{1+x}{2x-3}}$ d) $\sqrt{3x-5} + \sqrt{\frac{2}{x-4}}$

Bài 3. Với giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa

- a) $\frac{x}{x-2} + \sqrt{x-2}$. b) $\frac{x}{x+2} + \sqrt{x-2}$. c) $\sqrt{\frac{1}{3-2x}}$ d) $\sqrt{\frac{-2}{x+1}}$.

Bài 4. Với giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa

a) $\sqrt{5-2x}$.

b) $\sqrt{\frac{1}{x^2-4x+4}}$

c) $\sqrt{25-x^2}$

d) $\sqrt{\frac{1}{x^2-100}}$

Bài 5. (*) Với giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa

a) $\sqrt{\frac{4x^2}{3x-1}}$

b) $\sqrt{\frac{2-3x}{4x^2}}$.

Bài 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để biểu thức $M = \sqrt{x+4} + \sqrt{2-x}$ có nghĩa?

Dạng 2. Rút gọn biểu thức dạng $\sqrt{A^2}$

Phương pháp giải

Đưa biểu thức dưới căn về dạng bình phương. $\sqrt{A^2} = |A|$.

! Điều kiện xác định của \sqrt{A} là $A \geq 0$.

Bài 1. Rút gọn các biểu thức sau

a) $\sqrt{13+4\sqrt{3}} + 2\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

b) $(\sqrt{10}-\sqrt{2})\sqrt{3+\sqrt{5}}$.

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau

a) $\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b}$ với $a > b > 0$.

b) $\frac{2}{x-1} \cdot \sqrt{\frac{x^2-2x+1}{4x^2}}$ với $0 < x < 1$.

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{x^4-4x^2+4-x^2}$.

b) $\frac{\sqrt{x^4-2x^2+1}}{x+1}$ với $x > 1$.

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau

a) $\sqrt{11-6\sqrt{2}} - \sqrt{11+6\sqrt{2}}$.

b) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}$

c) $(2+\sqrt{7})\sqrt{11-4\sqrt{7}}$

d) $\sqrt{(3+\sqrt{2})^2} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}$

e) $\sqrt{9-3\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$

f) $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

Bài 5. Cho các biểu thức:

$$A = \sqrt{20a+92+\sqrt{a^4+16a^2+64}}; \quad B = a^4+20a^3+100a^2$$

a) Rút gọn A

b) Tìm a để $A+B=0$.

Bài 6. Rút gọn các biểu thức sau

a) $\sqrt{19-8\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

b) $\sqrt{12+3\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}$.

Bài 7. Rút gọn các biểu thức sau

a) $\frac{1}{2}\sqrt{12-8\sqrt{2}} + \sqrt{17-12\sqrt{2}} - 4\sqrt{2}$.

b) $\sqrt{10+4\sqrt{6}}$

Bài 8. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{\sqrt{4x^2 + 4x + 1}}{4x^2 - 1}$ với $x > \frac{-1}{2}$

b) $9 + x + \sqrt{4 - 4x + x^2}$ với $x < 2$

Dạng 3. Giải phương trình $\sqrt{A} = B$ và $\sqrt{A^2} = B$

Phương pháp giải

Dạng 1: Phương trình: $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$

Dạng 2: Phương trình: $\sqrt{A^2} = B \Leftrightarrow |A| = B$

Dạng 3: Phương trình: $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0; B \geq 0 \\ A = B \end{cases}$

Chú ý: Nếu A và B là các phân thức thì phải có điều kiện Mẫu thức $\neq 0$

Bài 1. Giải phương trình:

a) $\sqrt{-2x^2 - 9} = 2.$

b) $\sqrt{x^2 + 1} + 2 = 0.$

c) $\sqrt{3x - 1} = 4.$

Bài 2. Giải phương trình:

a) $\sqrt{-3x + 4} = 12.$

b) $\sqrt{(x - 7)(x + 7)} = 2$

c) $\sqrt{9(x - 1)} - 19 = 2.$

Bài 3. Giải phương trình

a) $\sqrt{x^2} = 1.$

b) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 3.$

c) $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 0$

Bài 4. Giải các phương trình sau.

a) $\sqrt{(x - 1)^2} = 3 - x$

b) $\sqrt{2x + 5} = \sqrt{1 - x}$

c) $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = x - 3$

Bài 5. Giải các phương trình sau.

a) $\sqrt{1 - 12x + 36x^2} = 5$

b) $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{x - 3}$

Bài 6. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2 + x} = x - 1;$

b) $\sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{4x};$

c) $2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} = 27 - 3\sqrt{3x};$

d) $\sqrt{x^2 - 3} = 0;$

e) $2 - \sqrt{x^2 - 2} = 0$

f) $x + \sqrt{3x + 10} = 0$

Dạng 4. Chứng minh đẳng thức

Phương pháp giải

Biến đổi vế trái bằng vế phải bằng cách sử dụng các phép biến đổi căn thức và vận dụng thích hợp các phép tính và các phép biến đổi đã biết.

Bài 1. Chứng minh đẳng thức $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = 2\sqrt{2}.$

Bài 2. Chứng minh đẳng thức: $\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ với $a > 0, b > 0$.

Bài 3. Chứng minh các đẳng thức (với a, b không âm và $a \neq b$)

a) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}-2\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2\sqrt{a}+2\sqrt{b}}-\frac{2b}{b-a}=\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

b) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2=1$

Bài 4. Chứng minh các đẳng thức sau.

a) $\left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)\cdot\left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2=1$ với $a \geq 0$ và $a \neq 1$

b) $\frac{a+b}{b^2}\sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}}=|a|$ với $a+b > 0$ và $b \neq 0$

Bài 5. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sqrt{2006-2\sqrt{2005}}+\sqrt{2006+2\sqrt{2005}}=2\sqrt{2005}$

b) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}-\sqrt{8-2\sqrt{15}}=2\sqrt{3}$

c) $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{6}$

d) $\sqrt{8+\sqrt{63}}-\sqrt{8-3\sqrt{7}}=\sqrt{14}$

e) $\sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{18-\sqrt{128}}}}=\sqrt{3}-1$

f) $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}=1$

g) $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}=5+3\sqrt{2}$

II. CÁC DẠNG VỀ CĂN THỨC BẬC BA

Dạng 1. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc ba

Phương pháp giải

Dùng các phép biến đổi đưa biểu thức dưới dấu căn về dạng a^3 hoặc mũ 3 cả hai vế của biểu thức đưa về giải phương trình bậc ba.

Bài 1. Rút gọn biểu thức:

a) $A = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$.

b) $B = \sqrt[3]{72-32\sqrt{5}} \cdot \sqrt{7+3\sqrt{5}}$.

Bài 2. Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

b) $B = \sqrt[3]{182+\sqrt{33125}} + \sqrt[3]{182-\sqrt{33125}}$.

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) A = \left[\left(\frac{1}{a} - \sqrt[6]{\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{a^2} \right) + \left(\frac{a}{a^2} \sqrt[6]{a^5} - \frac{3}{a} \sqrt[3]{a^2} \right) \right] \cdot a\sqrt[3]{a}$$

$$b) B = \sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4 b^2}} + \sqrt{b^2 + \sqrt[3]{a^2 b^4}}$$

Bài 5. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) A = \left[\left(\frac{1}{a} - \sqrt[6]{\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{a^2} \right) + \left(\frac{a}{a^2} \sqrt[6]{a^5} - \frac{3}{a} \sqrt[3]{a^2} \right) \right] \cdot a\sqrt[3]{a}$$

$$b) B = \sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4 b^2}} + \sqrt{b^2 + \sqrt[3]{a^2 b^4}}$$

Dạng 2. Giải phương trình chứa căn bậc ba

Phương pháp giải

Lũy thừa bậc ba hai vế của phương trình rồi đưa về dạng phương trình tích hoặc ta có thể đặt ẩn phụ.

Bài 1. Giải phương trình

$$a) \sqrt[3]{x+7} - 3 = 1$$

$$b) \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = 0$$

Bài 2. Giải phương trình

$$a) \sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{5-x} = 1$$

$$b) \sqrt[3]{1000x} - \sqrt[3]{64x} - \sqrt[3]{27x} = 15$$

$$c) \sqrt[3]{x-3} + 3 = x$$

Bài 3. Giải các phương trình sau

$$a) \sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{3x-2}.$$

$$b) \sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$$

Bài 4. Giải phương trình

$$a) \sqrt[3]{2x+1} = 3;$$

$$b) \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{x^2-1}$$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt[3]{x+3} = \sqrt[3]{x^2-9};$$

$$b) \sqrt[3]{x+2} - \sqrt{x+1} = 1.$$

D. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	A	B	C	D	A	B	D	C	C	A
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	B	C	D	A	A	B	B	D	C	C
Câu	21	22	23							
Đáp án	C	D	A							

II – MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 9. Điều kiện xác định của biểu thức $Z = \sqrt[3]{3-x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ là:

- A. $1 \leq x \leq 3$
- B. $1 < x \leq 3$
- C. $x > 1$
- D. $x \geq 1$

Hướng dẫn:

Biểu thức $Z = \sqrt[3]{3-x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ xác định khi: $x-1 > 0$ hay $x > 1$

Vậy chọn câu C

Câu 15. Điều kiện xác định của biểu thức $K = \sqrt{-x^2 + 5x - 6} - \frac{1}{2x+5}$ là:

- A. $2 \leq x \leq 3$
- B. $\begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq \frac{5}{2} \end{cases}$
- C. $\begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ x \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$
- D. $x \leq 0$

Hướng dẫn:

Điều kiện xác định:

$$\begin{cases} -x^2 + 5x - 6 \geq 0 \\ 2x + 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ x \neq -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$$

Vậy chọn câu A

III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 18. Với giá trị nào của x thì biểu thức $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ có nghĩa?

- A. $x \leq 0$
- B. $x \geq 1, x \neq 0$
- C. $x \geq 0, x \neq 1$
- D. $x \geq 1$

Hướng dẫn:

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x - 2\sqrt{x-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-1) - 2\sqrt{x-1} + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (\sqrt{x-1} - 1)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$

Vậy chọn câu D

Câu 19. Giá trị của biểu thức $\sqrt{9a^2(b^2 + 4 - 4b)}$ khi $a = 2$ và $b = -\sqrt{3}$ bằng giá trị nào sau đây?

- A. $3(2 + \sqrt{3})$
- B. $6(2 - \sqrt{3})$
- C. $6(2 + \sqrt{3})$
- D. $3(2 - \sqrt{3})$

Hướng dẫn:

Ta có: $\sqrt{9a^2(b^2 + 4 - 4b)} = \sqrt{(3a)^2 \cdot (b-2)^2} = 3|a| \cdot |b-2|$

Thay $a = 2$ và $b = -\sqrt{3}$ vào biểu thức ta được:

$$3|a| \cdot |b-2| = 3 \cdot |2| \cdot |-\sqrt{3}-2| = 3 \cdot 2 \cdot (2+\sqrt{3}) = 6(2+\sqrt{3})$$

Vậy chọn câu C

Câu 20. Biểu thức $\frac{-3}{10-5x}$ có căn bậc hai khi

- A. $x < 2$
- B. $x \leq 2$
- C. $x > 2$
- D. $x \geq 2$

Hướng dẫn:

Ta có biểu thức: $\frac{-3}{10-5x}$ có căn bậc hai khi:
$$\begin{cases} 10-5x \neq 0 \\ \frac{-3}{10-5x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 10-5x < 0 \Leftrightarrow -5x < -10 \Leftrightarrow x > 2$$

Vậy chọn câu C

Câu 21. Tìm điều kiện để biểu thức $\sqrt{(5\sqrt{x}+7)(5\sqrt{x}-7)}$ có nghĩa?

- A. $x \leq -\frac{5}{7}$
- B. $x \geq 0$
- C. $x \geq \frac{49}{25}$
- D. $x \geq -\frac{5}{7}$

Hướng dẫn:

Điều kiện xác định:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 5\sqrt{x}-7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 5\sqrt{x} \geq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \geq \frac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{49}{25}$$

Vậy chọn câu C

Câu 22. Tìm điều kiện xác định biểu thức $\frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x^2-4}$ có nghĩa?

- A. $x < 2, x \geq 3$
- B. $x \leq 2, x \geq 3, x \neq -2$
- C. $x < 2, x > 3, x \neq -2$
- D. $x < 2, x \geq 3, x \neq -2$

Hướng dẫn:

Điều kiện xác định:
$$\begin{cases} x^2-5x+6 \geq 0 \\ x^2-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3) \geq 0 \\ (x-2)(x+2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x < 2, x \geq 3, x \neq -2$$

Vậy chọn câu D

Câu 23. Biểu thức $\sqrt{|x-1|}-3$ có nghĩa khi:

- A. $\begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 4 \end{cases}$
- B. $x \leq -2$
- C. $-2 \leq x \leq 4$
- D. $x \geq 4$

Hướng dẫn:

Ta có: $|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 1-x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

*) Với $x \geq 1$, ta có:

$\sqrt{|x-1|}-3 = \sqrt{x-1}-3 = \sqrt{x-4}$ có nghĩa khi: $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$ (nhận).

*) Với $x < 1$, ta có:

$$\sqrt{|x-1|-3} = \sqrt{1-x-3} = \sqrt{-x-2} \text{ có nghĩa khi: } -x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \text{ (nhận)}$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{|x-1|-3} \text{ có nghĩa khi: } \begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

Vậy chọn câu A

E. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP TỰ LUẬN

I. CÁC DẠNG VỀ CĂN THỨC BẬC HAI

Dạng 1. Tìm điều kiện để biểu thức xác định

📁 Bài 1. Với giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa

a) $\sqrt{-3x}$.

b) $\sqrt{2x-4}$

c) $\sqrt{7-6x}$

d) $\sqrt{-3x+2}$

🔗 Lời giải

a) $\sqrt{-3x}$ có nghĩa khi $-3x \geq 0$ hay $x \leq 0$.

b) $\sqrt{2x-4}$ có nghĩa khi $2x-4 \geq 0$ hay $2x \geq 4$ hay $x \geq 2$.

c) $\sqrt{7-6x}$ có nghĩa khi $7-6x \geq 0$ hay $6x \leq 7$ hay $x \leq \frac{7}{6}$.

d) $\sqrt{-3x+2}$ có nghĩa khi $-3x+2 \geq 0$ hay $3x \leq 2$ hay $x \leq \frac{2}{3}$.

📁 Bài 2. Tìm điều kiện của x để các biểu thức sau xác định

a) $\sqrt{\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}}$

b) $\sqrt{x^2 + 2}$

c) $\sqrt{\frac{1+x}{2x-3}}$

d) $\sqrt{3x-5} + \sqrt{\frac{2}{x-4}}$

🔗 Lời giải

a) $\sqrt{\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}}$ xác định khi $\frac{2}{3}x - \frac{1}{5} \geq 0$ hay $\frac{2}{3}x \geq \frac{1}{5}$ hay $x \geq \frac{3}{10}$

b) $\sqrt{x^2 + 2}$

Ta có: $x^2 + 2 > 0, \forall x$ suy ra $\sqrt{x^2 + 2}$ xác định với mọi x

c) $\sqrt{\frac{1+x}{2x-3}}$ xác định khi $\frac{1+x}{2x-3} \geq 0$ hay $\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 1+x \leq 0 \\ 2x-3 < 0 \end{cases}$

+ Với $\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x \geq -1 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases}$ hay $x > \frac{3}{2}$

$$+ \text{ Với } \begin{cases} 1+x \leq 0 \\ 2x-3 < 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x \leq -1 \\ x < \frac{3}{2} \end{cases} \text{ hay } x \leq -1$$

Vậy căn thức xác định nếu $x > \frac{3}{2}$ hoặc $x \leq -1$

$$d) \sqrt{3x-5} + \sqrt{\frac{2}{x-4}} \text{ xác định khi } \begin{cases} 3x-5 \geq 0 \\ \frac{2}{x-4} \geq 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 3x-5 \geq 0 \\ x-4 > 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x \geq \frac{5}{3} \\ x > 4 \end{cases} \text{ hay } x > 4$$

📁 Bài 3. Với giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa

$$1. \frac{x}{x-2} + \sqrt{x-2}. \quad 2. \frac{x}{x+2} + \sqrt{x-2}. \quad 3. \sqrt{\frac{1}{3-2x}} \quad 4. \sqrt{\frac{-2}{x+1}}.$$

🔗 Lời giải

$$1. \frac{x}{x-2} + \sqrt{x-2} \text{ có nghĩa khi } \begin{cases} x-2 \neq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x \neq 2 \\ x \geq 2 \end{cases} \text{ hay } x > 2.$$

$$2. \frac{x}{x+2} + \sqrt{x-2} \text{ có nghĩa khi } \begin{cases} x+2 \neq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x \neq -2 \\ x \geq 2 \end{cases} \text{ hay } x \geq 2.$$

$$3. \sqrt{\frac{1}{3-2x}} \text{ có nghĩa khi } \begin{cases} \frac{1}{3-2x} \geq 0 \\ 3-2x \neq 0 \end{cases} \text{ hay } 3-2x > 0 \text{ hay } x < \frac{3}{2}.$$

$$4. \sqrt{\frac{-2}{x+1}} \text{ có nghĩa khi } \begin{cases} \frac{-2}{x+1} \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \text{ hay } x+1 < 0 \text{ hay } x < -1$$

📁 Bài 4. Với giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa

$$a) \sqrt{5-2x}. \quad b) \sqrt{\frac{1}{x^2-4x+4}} \quad c) \sqrt{25-x^2} \quad d) \sqrt{\frac{1}{x^2-100}}$$

🔗 Lời giải

$$a) \sqrt{5-2x} \text{ có nghĩa khi } 5-2x \geq 0 \text{ hay } -2x \geq -5 \text{ hay } x \leq \frac{5}{2}.$$

$$b) \sqrt{\frac{1}{x^2-4x+4}} \text{ có nghĩa khi } \sqrt{\frac{1}{(x-2)^2}} \text{ có nghĩa khi } (x-2)^2 > 0 \text{ hay } x \neq 2.$$

$$c) \sqrt{25-x^2} \text{ có nghĩa khi } 25-x^2 \geq 0 \text{ hay } -x^2 \geq -25 \text{ hay } x^2 \leq 25 \text{ hay } |x| \leq 5 \text{ hay } -5 \leq x \leq 5.$$

1. $\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b}$ với $a > b > 0$.

2. $\frac{2}{x-1} \cdot \sqrt{\frac{x^2-2x+1}{4x^2}}$ với $0 < x < 1$.

✎ Lời giải

1. $\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b} = \frac{\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}}{a-b} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

2. $\frac{2}{x-1} \cdot \sqrt{\frac{x^2-2x+1}{4x^2}} = \frac{2}{x-1} \sqrt{\frac{(x-1)^2}{(2x)^2}} = \frac{2}{x-1} \frac{|x-1|}{2|x|}$.

Do $0 < x < 1$ nên $|x-1|=1-x$; $|x|=x$. Suy ra $\frac{2}{x-1} \frac{|x-1|}{2|x|} = -\frac{1}{x}$.

📁 Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau:

1. $\sqrt{x^4-4x^2+4}-x^2$.

2. $\frac{\sqrt{x^4-2x^2+1}}{x+1}$ với $x > 1$.

✎ Lời giải

1. $\sqrt{x^4-4x^2+4}-x^2 = \sqrt{(x^2-2)^2}-x^2 = |x^2-2|-x^2$.

Trường hợp 1: $x \leq -\sqrt{2}$ hoặc $x \geq \sqrt{2}$ ta có: $|x^2-2|-x^2 = x^2-2-x^2 = -2$

Trường hợp 2: $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ ta có: $|x^2-2| = -x^2+2-x^2 = -2x^2+2$

2. Vì $x > 1$ nên $\frac{\sqrt{x^4-2x^2+1}}{x+1} = \frac{\sqrt{(x^2-1)^2}}{x+1} = \frac{|x^2-1|}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x-1$.

📁 Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau

1. $\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\sqrt{11+6\sqrt{2}}$.

2. $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$

3. $(2+\sqrt{7})\sqrt{11-4\sqrt{7}}$

4. $\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$

5. $\sqrt{9-3\sqrt{8}}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$

6. $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

✎ Lời giải

$$1. \sqrt{11-6\sqrt{2}} - \sqrt{11+6\sqrt{2}} = \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} - \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} = 3-\sqrt{2} - 3-\sqrt{2} = -2\sqrt{2}.$$

$$2. \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{14-6\sqrt{5}} = \sqrt{5}-2 + \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}-2+3-\sqrt{5} = 1.$$

$$3. (2+\sqrt{7})\sqrt{11-4\sqrt{7}} = (2+\sqrt{7})\sqrt{(\sqrt{7}-2)^2} = (\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2) = 7-4 = 3.$$

$$4. \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} + \sqrt{6-4\sqrt{2}} = 3+\sqrt{2} + \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} = 3+\sqrt{2} + 2-\sqrt{2} = 5.$$

$$\begin{aligned} 5. & \sqrt{9-3\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{6+3-2\sqrt{6}\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3+2-2\sqrt{3}\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{8-4\sqrt{3}}}{2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} - \frac{\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}}{2} \\ &= \sqrt{6}-\sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3}-\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. & \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}} + \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3-\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{6})(3-\sqrt{3})+(2\sqrt{2}+\sqrt{6})(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

📁 Bài 5. Cho các biểu thức:

$$A = \sqrt{20a+92} + \sqrt{a^4+16a^2+64}$$

$$B = a^4 + 20a^3 + 100a^2$$

1. Rút gọn A .

2. Tìm a để $A+B=0$.

✎ Lời giải

$$1. A = \sqrt{20a+92} + \sqrt{(a^2+8)^2} = \sqrt{a^2+20a+100} = \sqrt{(a+10)^2} = |a+10|.$$

$$2. A+B = |a+10| + a^2 \cdot (a+10)^2.$$

Đề $A + B = 0$ thì

$$|a+10| + a^2 \cdot (a+10)^2 = 0 \Leftrightarrow |a+10| + a^2 |a+10|^2 = 0 \Leftrightarrow |a+10| \cdot (1 + |a+10| a^2) = 0 \Leftrightarrow |a+10| = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -10.$$

(vì $1 + a^2 |a+10| > 0$ với mọi a).

Bài 6. Rút gọn các biểu thức sau

$$1. \sqrt{19-8\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}. \qquad 2. \sqrt{12+3\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}.$$

Lời giải

$$1. \sqrt{19-8\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(4-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = 4-\sqrt{3} + \sqrt{3}-1 = 3$$

$$2. \sqrt{12+3\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{12+3\sqrt{3}} + \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - 2\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{12+3\sqrt{3}+1+\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{13+4\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}+1-2\sqrt{3} = 1.$$

Bài 7. Rút gọn các biểu thức sau

$$1. \frac{1}{2}\sqrt{12-8\sqrt{2}} + \sqrt{17-12\sqrt{2}} - 4\sqrt{2}. \qquad 2. \sqrt{10+4\sqrt{6}}$$

Lời giải

$$1. \frac{1}{2}\sqrt{12-8\sqrt{2}} + \sqrt{17-12\sqrt{2}} - 4\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{2}-2)^2} + \sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} - 4\sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{2}|2\sqrt{2}-2| + |3-2\sqrt{2}| - 4\sqrt{2} = \frac{1}{2}(2\sqrt{2}-2) + 3-2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = -5\sqrt{2} + 2.$$

$$2. \sqrt{10+4\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{6}+2)^2} = \sqrt{6} + 2.$$

Bài 8. Rút gọn các biểu thức sau:

$$1. \frac{\sqrt{4x^2+4x+1}}{4x^2-1} \text{ với } x > \frac{-1}{2} \qquad 2. 9+x+\sqrt{4-4x+x^2} \text{ với } x < 2$$

Lời giải


$$1. A = \frac{\sqrt{4x^2+4x+1}}{4x^2-1} = \frac{\sqrt{(2x+1)^2}}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{|2x+1|}{(2x+1)(2x-1)}.$$

Do $x > -\frac{1}{2}$ nên $2x+1 > 0$. Suy ra $A = \frac{2x+1}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{1}{2x-1}$.

$$2. 9+x+\sqrt{4-4x+x^2} = 9+x+\sqrt{(2-x)^2} = 9+x+|2-x|.$$

Do $x < 2$ nên $2-x > 0$. Suy ra $B = 9+x+2-x = 11$.

Dạng 3. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH $\sqrt{A} = B$ và $\sqrt{A^2} = B$

 **Bài 1.** Giải phương trình:

$$1. \sqrt{-2x^2 - 9} = 2.$$

$$2. \sqrt{x^2 + 1} + 2 = 0.$$

$$3. \sqrt{3x-1} = 4.$$

Lời giải

1. Điều kiện xác định $-2x^2 - 9 \geq 0$ (vô lí).

Vậy phương trình vô nghiệm.

2. Điều kiện xác định $x^2 + 1 \geq 0$ (luôn đúng).

Ta có

$$\sqrt{x^2 + 1} + 2 = 0$$

$$\sqrt{x^2 + 1} = -2 \text{ (vô lí vì } \sqrt{x^2 + 1} > 0 \text{ với mọi } x \text{)}.$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

3. Điều kiện xác định $3x-1 \geq 0$ hay $x \geq \frac{1}{3}$


Ta có

$$\sqrt{3x-1} = 4$$

$$3x-1 = 16$$

$$x = \frac{17}{3} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{17}{3}$

 **Bài 2.** Giải phương trình:

$$1. \sqrt{-3x+4} = 12.$$

$$2. \sqrt{(x-7)(x+7)} = 2.$$

$$3. \sqrt{9(x-1)} - 19 = 2.$$

✎ Lời giải

1. Điều kiện xác định $-3x + 4 \geq 0$ hay $x \leq \frac{4}{3}$.

Ta có

$$\sqrt{-3x+4} = 12$$

$$-3x + 4 = 144$$

$$x = -\frac{140}{3} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -\frac{140}{3}$.

2. Điều kiện xác định $\begin{cases} x \geq 0 \\ (\sqrt{x}-7)(\sqrt{x}+7) \geq 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x \geq 0 \\ x-49 \geq 0 \end{cases}$ hay $x \geq 49$

Ta có

$$\sqrt{(\sqrt{x}-7)(\sqrt{x}+7)} = 2$$

$$x - 49 = 4$$

$$x = 53 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 53$.

3. Điều kiện xác định $9(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Ta có

$$\sqrt{9(x-1)} - 19 = 2$$

$$\sqrt{9(x-1)} = 21$$

$$9(x-1) = 441$$

$$x - 1 = 49$$

$$x = 50 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 50$.

📁 Bài 3. Giải phương trình

1. $\sqrt{x^2} = 1$.

2. $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 3$.

3. $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 0$

✎ Lời giải

1.

$$\sqrt{x^2} = 1.$$

$$|x| = 1$$

$$x = \pm 1$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \pm 1$

2.

$$\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 3$$

$$\sqrt{(2x-1)^2} = 3$$

$$|2x-1| = 3$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $\begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$

3.

$$\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+2)(x-2) = 0 \\ (x+2)^2 = 0 \end{cases}$$

$$x = -2$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -2$

📁 **Bài 4.** Giải các phương trình sau.

$$1. \sqrt{(x-1)^2} = 3-x$$

$$2. \sqrt{2x+5} = \sqrt{1-x}$$

$$3. \sqrt{x^2 - 4x + 3} = x-3$$

✎ Lời giải

1.

$$\sqrt{(x-1)^2} = 3-x$$

$$|x-1| = 3-x.$$

$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ \begin{cases} x - 1 = 3 - x \\ x - 1 = -(3 - x) \end{cases} \end{cases}$$

$$x = 2.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 2$.

2.

$$\sqrt{2x+5} = \sqrt{1-x}$$

$$\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 2x + 5 = 1 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ 3x = -4 \end{cases}$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -\frac{4}{3}$

3.


$$\sqrt{x^2 - 4x + 3} = x - 3.$$

$$\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 = (x - 3)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ 2x = 6 \end{cases}$$

$$x = 3$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$

 **Bài 5.** Giải các phương trình sau.

$$1. \sqrt{1-12x+36x^2} = 5$$

$$2. \sqrt{x^2-x-6} = \sqrt{x-3}$$

 **Lời giải**

1.

$$\sqrt{1-12x+36x^2} = 5$$

$$|1-6x| = 5$$

$$\begin{cases} 1 - 6x = 5 \\ 1 - 6x = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -\frac{2}{3}; x = 1$

2.

$$\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{x - 3}$$

$$\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x^2 - x - 6 = x - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$x = 3$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$

📁 Bài 6. Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{x^2 + x} = x - 1;$

4. $\sqrt{x^2 - 3} = 0;$

2. $\sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{4x};$

5. $2 - \sqrt{x^2 - 2} = 0$

3. $2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} = 27 - 3\sqrt{3x};$

6. $x + \sqrt{3x + 10} = 0$

🔗 Lời giải

1. Ta có $\sqrt{x^2 + x} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 + x = (x - 1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 + x = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$ loãi

Vậy phương trình vô nghiệm.

2. Ta có

$$\sqrt{x^2+3} = \sqrt{4x} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \geq 0 \\ x^2+3=4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-4x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x \in \{1;3\}$.

3. Điều kiện xác định: $x \geq 0$.

$$2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} = 27 - 3\sqrt{3x} \Leftrightarrow 2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} + 3\sqrt{3x} = 27 \Leftrightarrow \sqrt{3x} = 27 \Leftrightarrow 3x = 729 \Leftrightarrow x = 243.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 243$.

$$4. \sqrt{x^2-3} = 0 \Leftrightarrow x^2-3=0 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \pm\sqrt{3}$.

$$5. 2 - \sqrt{x^2-2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \geq 0 \text{ luôn đúng} \\ x^2-2=4 \end{cases} \Leftrightarrow x^2=6 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \pm\sqrt{6}$.

6. Ta có


$$x + \sqrt{3x+10} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3x+10} = -x$$

Điều kiện xác định: $-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.

$$3x+10 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-2. \end{cases}$$

So với điều kiện xác định, ta có nghiệm của phương trình $x = -2$.

Dạng 4. Chứng minh đẳng thức


 **Bài 1.** Chứng minh đẳng thức $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = 2\sqrt{2}$.

 **Lời giải**

Biến đổi về trái ta có

$$VT = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = (1 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3 = 2\sqrt{2} = VP.$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

 **Bài 2.** Chứng minh đẳng thức

$$\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \text{ với } a > 0, b > 0.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } VT &= \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b} - a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a(\sqrt{a} - \sqrt{b}) - b(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ &= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a - b)}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = VP. \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 3. Chứng minh các đẳng thức (với a, b không âm và $a \neq b$)

$$\begin{aligned} 1. & \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2\sqrt{a} - 2\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2\sqrt{a} + 2\sqrt{b}} - \frac{2b}{b - a} = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}. \\ 2. & \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} \right)^2 = 1 \end{aligned}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} 1. \text{ Ta có } VT &= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2(\sqrt{a} - \sqrt{b})} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2(\sqrt{a} + \sqrt{b})} - \frac{2b}{b - a} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 4b}{2(a - b)} \\ &= \frac{a + 2\sqrt{ab} + b - a + 2\sqrt{ab} - b + 4b}{2(a - b)} = \frac{4\sqrt{ab} + 4b}{2(a - b)} = \frac{4\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{2(a - b)} = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = VP \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Ta có: } VT &= \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} \right)^2 \\ &= \left[\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right] \cdot \left[\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \right]^2 \\ &= (a - 2\sqrt{ab} + b) \cdot \frac{1}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} \\ &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \cdot \frac{1}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = 1 = VP \end{aligned}$$

Bài 4. Chứng minh các đẳng thức sau.

$$\begin{aligned} 1. & \left(\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{a}}{1 - a} \right)^2 = 1 \text{ với } a \geq 0 \text{ và } a \neq 1 \\ 2. & \frac{a + b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2 b^4}{a^2 + 2ab + b^2}} = |a| \text{ với } a + b > 0 \text{ và } b \neq 0 \end{aligned}$$

Lời giải

1. Với $a \geq 0$ và $a \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a} \right)^2 \\ &= \left[\frac{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a}+a)}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} \right] \cdot \left[\frac{1-\sqrt{a}}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})} \right]^2 \\ &= (1+2\sqrt{a}+a) \cdot \frac{1}{(1+\sqrt{a})^2} \\ &= (1+\sqrt{a})^2 \cdot \frac{1}{(1+\sqrt{a})^2} = 1 = VP. \end{aligned}$$

2. Với $a+b > 0$ và $b \neq 0$ ta có

$$VT = \frac{a+b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = \frac{a+b}{b^2} \cdot \sqrt{\frac{(ab^2)^2}{(a+b)^2}} = \frac{a+b}{b^2} \cdot \frac{|a|b^2}{a+b} = |a| = VP$$

Bài 5. Chứng minh các đẳng thức sau:

1. $\sqrt{2006-2\sqrt{2005}} + \sqrt{2006+2\sqrt{2005}} = 2\sqrt{2005}$
2. $\sqrt{8+2\sqrt{15}} - \sqrt{8-2\sqrt{15}} = 2\sqrt{3}$
3. $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6}$
4. $\sqrt{8+\sqrt{63}} - \sqrt{8-3\sqrt{7}} = \sqrt{14}$
5. $\sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{128}}} = \sqrt{3}-1$
6. $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}} = 1$
7. $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}} = 5+3\sqrt{2}$

Lời giải

1. $\sqrt{2006-2\sqrt{2005}} + \sqrt{2006+2\sqrt{2005}} = 2\sqrt{2005}$

$$\begin{aligned} VT &= \sqrt{2006-2\sqrt{2005}} + \sqrt{2006+2\sqrt{2005}} = \sqrt{(\sqrt{2005}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{2005}+1)^2} \\ &= |\sqrt{2005}-1| + |\sqrt{2005}+1| = \sqrt{2005}-1 + \sqrt{2005}+1 \\ &= 2\sqrt{2005} = VP \end{aligned}$$
2. $\sqrt{8+2\sqrt{15}} - \sqrt{8-2\sqrt{15}} = 2\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} VT &= \sqrt{8+2\sqrt{15}} - \sqrt{8-2\sqrt{15}} = \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2} \\ &= |\sqrt{5}+\sqrt{3}| - |\sqrt{5}-\sqrt{3}| = (\sqrt{5}+\sqrt{3}) - (\sqrt{5}-\sqrt{3}) \\ &= 2\sqrt{3} = VP \end{aligned}$$
3. $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6}$

$$\begin{aligned}
 VT &= \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6} = VP
 \end{aligned}$$

$$4. \sqrt{8+\sqrt{63}} - \sqrt{8-3\sqrt{7}} = \sqrt{14}$$

$$\begin{aligned}
 VT &= \sqrt{8+\sqrt{63}} - \sqrt{8-3\sqrt{7}} = \sqrt{8+3\sqrt{7}} - \sqrt{8-3\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{16+6\sqrt{7}}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{16-6\sqrt{7}}}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{(\sqrt{7}+3)^2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{(\sqrt{7}-3)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}+3}{\sqrt{2}} - \frac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \sqrt{14} = VP
 \end{aligned}$$

$$5. \sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{128}}} = \sqrt{3}-1$$

$$\begin{aligned}
 VT &= \sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{128}}} = \sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{18}-2\sqrt{32}}} \\
 &= \sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{(4-\sqrt{2})^2}}} = \sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+4-\sqrt{2}}} \\
 &= \sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{12}+4}} = \sqrt{6-2\sqrt{2\sqrt{3}+4}} = \sqrt{6-2\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}} \\
 &= \sqrt{6-2(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} \\
 &= \sqrt{3}-1 = VP
 \end{aligned}$$

$$6. \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}} = 1$$

$$\begin{aligned}
 VT &= \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}} = \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{(3-2\sqrt{5})^2}} \\
 &= \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}-(2\sqrt{5}-3)} = \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}} \\
 &= \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} = \sqrt{\sqrt{5}-(\sqrt{5}-1)} \\
 &= \sqrt{1} = 1 = VP
 \end{aligned}$$

$$7. \sqrt{13+30\sqrt{2}+\sqrt{9+4\sqrt{2}}} = 5+3\sqrt{2}$$

$$VT = \sqrt{13+30\sqrt{2}+\sqrt{9+4\sqrt{2}}} = \sqrt{13+30\sqrt{2}+\sqrt{(1+2\sqrt{2})^2}} = \sqrt{13+30\sqrt{2}+2\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{13+30\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}} = \sqrt{13+30(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{43+30\sqrt{2}} = \sqrt{(5+3\sqrt{2})^2} \\
 &= 5+3\sqrt{2} = VP
 \end{aligned}$$

II. CÁC DẠNG VỀ CĂN THỨC BẬC BA

Dạng 1. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc ba

Bài 1. Rút gọn biểu thức:

$$1. A = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}.$$

$$2. B = \sqrt[3]{72-32\sqrt{5}} \cdot \sqrt{7+3\sqrt{5}}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 1. A &= \sqrt[3]{(\sqrt{2})^3 + 3(\sqrt{2})^2 \cdot 1 + 3\sqrt{2} \cdot 1^2 + 1^3} + \sqrt[3]{(\sqrt{2})^3 - 3(\sqrt{2})^2 \cdot 1 + 3\sqrt{2} \cdot 1^2 - 1^3} \\
 &= \sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3} + \sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3} = (\sqrt{2}+1) + (\sqrt{2}-1) = 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. B &= \sqrt[3]{(3)^3 - 3 \cdot (3)^2 \cdot \sqrt{5} + 3 \cdot 3 \cdot (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{5})^3} \cdot \frac{\sqrt{14+6\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} \\
 &= \sqrt[3]{(3-\sqrt{5})^3} \cdot \frac{\sqrt{(3+\sqrt{5})^2}}{\sqrt{2}} = \frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Bài 2. Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

Lời giải

$$A^3 = 2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} + 3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} (\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}) = 4 - 3A.$$

$$A^3 + 3A - 4 = 0$$

$$(A-1)(A^2 + A + 4) = 0$$

$$A = 1 \text{ (do } A^2 + A + 4 = \left(A + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0, \forall A)$$

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau:

$$1. A = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}.$$

$$2. B = \sqrt[3]{182+\sqrt{33125}} + \sqrt[3]{182-\sqrt{33125}}.$$

Lời giải.

$$1. A = \sqrt[3]{2^3 + 3 \cdot 2^2 (\sqrt{2}) + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{2^3 - 3 \cdot 2^2 (\sqrt{2}) + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^3}$$

$$= \sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3} = 2+\sqrt{2} + 2-\sqrt{2} = 4$$

$$2. B^3 = 182 + \sqrt{33125} + 182 - \sqrt{33125} + 3\sqrt[3]{182^2 - 33125}B = 364 - 3B.$$

$$\text{Nên } B^3 + 3B - 364 = 0 \Leftrightarrow (B - 7)(B^2 + 7B + 52) = 0 \Leftrightarrow B = 7$$

$$\text{(do } B^2 + 7B + 52 = \left(B + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{159}{4} > 0)$$

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau:

$$1. A = \left[\left(\frac{1}{a} - \sqrt[6]{\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{a^2} \right) + \left(\frac{a}{a^2} \sqrt[6]{a^5} - \frac{3}{a} \sqrt[3]{a^2} \right) \right] \cdot a \sqrt[3]{a}$$

$$2. B = \sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4 b^2}} + \sqrt{b^2 + \sqrt[3]{a^2 b^4}}$$

Lời giải.

$$1. \text{ Ta có } A = \left[\left(\frac{1}{a} - \sqrt[6]{\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{a^2} \right) + \left(\frac{a}{a^2} \sqrt[6]{a^5} - \frac{3}{a} \sqrt[3]{a^2} \right) \right] a \sqrt[3]{a}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{a} - \sqrt[6]{\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{a^2} \right) + \left(\sqrt[6]{\frac{1}{a}} - 3 \sqrt[3]{\frac{1}{a}} \right) \right] a \sqrt[3]{a}$$

$$= \left(\frac{1}{a} + \sqrt[3]{a^2} - 3 \sqrt[3]{\frac{1}{a}} \right) a \sqrt[3]{a}$$

$$= a^2 - 3a + \sqrt[3]{a}$$

$$2. \text{ Ta có } B = \sqrt[3]{a^2} \sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}} + \sqrt[3]{b^2} \sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}$$

$$= \left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} \right) \sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} \right)^3}$$

Bài 5. Rút gọn các biểu thức sau:

$$1. A = \left[\left(\frac{1}{a} - \sqrt[6]{\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{a^2} \right) + \left(\frac{a}{a^2} \sqrt[6]{a^5} - \frac{3}{a} \sqrt[3]{a^2} \right) \right] \cdot a \sqrt[3]{a}$$

$$2. B = \sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4 b^2}} + \sqrt{b^2 + \sqrt[3]{a^2 b^4}}$$

Lời giải.

$$1. \text{ Ta có } A = \left[\left(\frac{1}{a} - \sqrt[6]{\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{a^2} \right) + \left(\frac{a}{a^2} \sqrt[6]{a^5} - \frac{3}{a} \sqrt[3]{a^2} \right) \right] a \sqrt[3]{a}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{a} - \sqrt[6]{\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{a^2} \right) + \left(\sqrt[6]{\frac{1}{a}} - 3 \sqrt[3]{\frac{1}{a}} \right) \right] a \sqrt[3]{a}$$

$$= \left(\frac{1}{a} + \sqrt[3]{a^2} - 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}} \right) a\sqrt[3]{a}$$

$$= a^2 - 3a + \sqrt[3]{a}$$

2. Ta có $B = \sqrt[3]{a^2} \sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}} + \sqrt[3]{b^2} \sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}$

$$= (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}) \sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})^3}.$$

Dạng 2. Giải phương trình chứa căn bậc ba

Bài 1. Giải phương trình

a) $\sqrt[3]{x+7} - 3 = 1$ b) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = 0$

Lời giải

a) $\sqrt[3]{x+7} - 3 = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+7} = 4 \Leftrightarrow x+7 = 64 \Leftrightarrow x = 57$

b) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = 0$

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1} = -\sqrt[3]{x+2}$$

Lũy thừa bậc ba cả hai vế ta được $x + x + 1 + 3\sqrt[3]{x(x+1)}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1}) = -x - 2$

$$3x + 3 + 3\sqrt[3]{x(x+1)}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1}) = 0$$

$$x + 1 - \sqrt[3]{x(x+1)}(x+2) = 0$$

$$x(x+1)(x+2) = (x+1)^3$$

$$x = -1$$

Thử lại ta thấy $x = -1$ là nghiệm của phương trình.

Bài 2. Giải phương trình

a) $\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{5-x} = 1$

b) $\sqrt[3]{1000x} - \sqrt[3]{64x} - \sqrt[3]{27x} = 15$

c) $\sqrt[3]{x-3} + 3 = x$

Lời giải

a) Đặt $a = \sqrt[3]{2+x}, b = \sqrt[3]{5-x}$

$$\text{Ta có } \begin{cases} a+b=1 \\ a^3+b^3=2+x+5-x=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ (a+b)(a^2-ab+b^2)=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ (a+b)^2-3ab=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ ab=-2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } a, b \text{ là nghiệm của phương trình } X^2 - X - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = -1 \\ X = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Từ (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2+x} = -1 \\ \sqrt[3]{5-x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3$$

$$\text{Từ (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2+x} = 2 \\ \sqrt[3]{5-x} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = -3$ và $x = 6$.

$$\text{b) } \sqrt[3]{1000x} - \sqrt[3]{64x} - \sqrt[3]{27x} = 15 \Leftrightarrow 10\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{x} = 15 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 5 \Leftrightarrow x = 125.$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 125$.


$$\text{c) Ta có } \sqrt[3]{x-3} + 3 = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-3} = x-3 \Leftrightarrow x-3 = (x-3)^3$$

$$\Leftrightarrow (x-3)[(x-3)^2 - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x-2)(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2; 3; 4\}$.

 **Bài 3.** Giải các phương trình sau

$$1. \sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{3x-2}.$$

$$2. \sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$$

 **Lời giải.**

$$1. \text{ Ta có } \sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{3x-2}$$

$$\Leftrightarrow 2x-1+x-1+3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1}) = 3x-2$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)(3x-2)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Thử lại ta thấy các nghiệm đều thỏa mãn phương trình.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{1}{2}; 1; \frac{2}{3} \right\}$.

2. Ta có $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$

$$\Leftrightarrow x+5 + x+6 + 3\sqrt[3]{(x+5)(x+6)} \left(\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} \right) = 2x+11$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{(x+5)(x+6)(2x+11)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = -6 \\ x = -\frac{11}{2} \end{cases}$$

Thử lại ta thấy các nghiệm đều thỏa mãn phương trình.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ -5; -\frac{11}{2}; -6 \right\}$.

📁 Bài 4. Giải phương trình

1. $\sqrt[3]{2x+1} = 3;$

2. $\sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{x^2-1}$

🔗 Lời giải

1. Ta có

$$\sqrt[3]{2x+1} = 3 \Leftrightarrow 2x+1 = 27 \Leftrightarrow 2x = 26 \Leftrightarrow x = 13$$

2. Ta có

$$\sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{x^2-1} \Leftrightarrow x+1 = x^2-1 \Leftrightarrow x+1 = (x-1)(x+1)$$

$$(x+1)(x-1-1) = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -1$ và $x = 2$.

📁 Bài 5. Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt[3]{x+3} = \sqrt[3]{x^2-9};$

$$2. \sqrt[3]{x+2} - \sqrt{x+1} = 1.$$

✎ Lời giải

1. Ta có :

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x+3} &= \sqrt[3]{x^2-9} \\ \sqrt[3]{x+3}(\sqrt[3]{x-3}-1) &= 0 \\ \begin{cases} \sqrt[3]{x+3} = 0 \\ \sqrt[3]{x-3}-1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 0 \\ x-3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -3$ hoặc $x = 4$

$$2. \sqrt[3]{x+2} - \sqrt{x+1} = 1$$

Điều kiện xác định: $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x = t^2 - 1$. Phương trình đã cho trở thành :

$$\sqrt[3]{t^2+1} - t = 1$$

$$\sqrt[3]{t^2+1} = 1+t$$

$$t^2+1 = t^3+3t^2+3t+1$$

$$t^3+2t^2+3t = 0$$

$$t(t^2+2t+3) = 0$$

$$t = 0 \quad (\text{vì } \Leftrightarrow t^2+2t+3 > 0).$$

Khi đó ta có $\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = -1$. So với điều kiện ta có nghiệm của bài toán là $x = -1$

§4. MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI CĂN THỨC BẬC HAI CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Kiến thức cần nhớ

I. Căn thức bậc hai của một bình phương

Với biểu thức A bất kì, ta có $\sqrt{A^2} = |A|$, nghĩa là:

$\sqrt{A^2} = A$ khi $A \geq 0$ (tức là khi A nhận giá trị không âm);

$\sqrt{A^2} = -A$ khi $A < 0$ (tức là khi A nhận giá trị âm).

II. Căn thức bậc hai của một tích

Với A, B là các biểu thức không âm, ta có $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B}$

III. Căn thức bậc hai của một thương

Nếu A, B là các biểu thức với $A \geq 0; B > 0$ thì $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$

IV. Trục căn thức ở mẫu

Với hai biểu thức A, B mà $B > 0$, ta có $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$.

Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0$ và $A \neq B^2$, ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A+B}} = \frac{C(\sqrt{A}-B)}{A-B^2}; \quad \frac{C}{\sqrt{A-B}} = \frac{C(\sqrt{A}+B)}{A-B^2}.$$

Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0, B \geq 0$ và $A \neq B$, ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A+\sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{A-B}; \quad \frac{C}{\sqrt{A-\sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{A-B}.$$

V. Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai

Khi rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta cần phối hợp các phép tính (cộng, trừ, nhân, chia) và các phép biến đổi đã học (đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn; khử mẫu của biểu thức lấy căn; trục căn thức ở mẫu).

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I – MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT

Câu 1. Rút gọn biểu thức $B = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{3}$

A. $2\sqrt{3}$

B. $-2\sqrt{3}$

C. -2

D. 2

Câu 2. Biểu thức $\sqrt{(3-2x)^2}$ bằng:

A. $3-2x$.

B. $2x-3$.

C. $|2x-3|$.

D. $3-2x$ và $2x-3$

Câu 3. Rút gọn biểu thức sau: $A = \sqrt{64a^2} + 2a$ với $a \geq 0$

A. $A = 20a$

B. $A = 68a$

C. $A = 10a$

D. $A = 8a$

Câu 4. Rút gọn biểu thức $\sqrt{\frac{x^2}{y^4}}$ với $x > 0; y \neq 0$, ta được

A. $-\frac{x^2}{y^4}$.

B. $\frac{x^2}{y^4}$.

C. $-\frac{x}{y^2}$.

D. $\frac{x}{y^2}$.

Câu 5. Rút gọn biểu thức $\frac{\sqrt{32a^2}}{\sqrt{2}}$ với $a < 0$ được kết quả là

A. $16a^2$.

B. $4a$.

C. $-4a$.

D. $-16a^2$.

Câu 6. Khử mẫu của biểu thức $\sqrt{\frac{3}{125}}$ sẽ được kết quả là

A. $\frac{\sqrt{15}}{25}$.

B. $\frac{\sqrt{25}}{15}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{25}$.

D. $\frac{\sqrt{5}}{15}$.

Câu 7. Trục căn thức ở mẫu biểu thức $\frac{5}{2\sqrt{3}}$ có kết quả là

A. $\frac{5\sqrt{3}}{6}$.

B. $\frac{3\sqrt{5}}{6}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 8. Trục căn thức ở mẫu biểu thức $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ có kết quả là

A. 3 .

B. $3(\sqrt{5}-\sqrt{3})$.

C. $3(\sqrt{5}+\sqrt{3})$.

D. -3 .

II – MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 9. Rút gọn biểu thức $\sqrt{0,36(a-1)^2}$ với $a < 1$ ta được kết quả là

A. $0,6(a-1)$

B. $0,36(1-a)$.

C. $0,6(1-a)$.

D. $0,36a$.

Câu 10. Biểu thức $\sqrt{25(x^2-4x+4)}$ khi $x \geq 2$ bằng

A. $5(x-2)$.

B. $-5(x-2)$.

C. $5(x+2)$.

D. $-5(x+2)$.

Câu 11. Với $y < 0$, kết quả của phép tính $2y \cdot \sqrt{\frac{x^4}{4y^2}}$ là

A. $-x^2$.

B. x^2 .

C. $\frac{x^2}{2y}$.

D. $\frac{-x^2}{2y}$.

Câu 12. Rút gọn biểu thức $\frac{\sqrt{63y^3}}{\sqrt{7y}}$ với $y > 0$ được kết quả là

- A. $3y^2$. B. $9y$. C. $3y$. D. $-3y$.

Câu 13. Khử mẫu biểu thức sau $xy\sqrt{\frac{4}{x^2y^2}}$ với $x > 0; y > 0$ ta được kết quả là

- A. 4 . B. $\sqrt{-xy}$. C. $\sqrt{2}$. D. 2 .

Câu 14. Trục căn thức ở mẫu biểu thức $\frac{3}{6+\sqrt{3a}}$ với $a \geq 0; a \neq 12$ ta được kết quả là

- A. $\frac{6+\sqrt{3a}}{12+a}$. B. $\frac{6-\sqrt{3a}}{12+a}$. C. $\frac{6+\sqrt{3a}}{12-a}$. D. $\frac{6-\sqrt{3a}}{12-a}$.

III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 15. Giá trị của biểu thức $\sqrt{4x^2(y^2+6y+9)}$ tại $x=2; y=-\sqrt{7}$ là

- A. $4\sqrt{7}-3$. B. $4(\sqrt{7}-3)$. C. $4(3-\sqrt{7})$. D. $8(\sqrt{7}-3)$.

Câu 16. Nghiệm của phương trình $\sqrt{25(x-1)}=10$ là

- A. $x=2,5$. B. $x=0,4$. C. $x=4$. D. $x=5$.

Câu 17. Rút gọn biểu thức $\sqrt{27x}-\sqrt{48x}+4\sqrt{75x}+\sqrt{243x}$ với $x \geq 0$ ta được

- A. $40\sqrt{3x}$. B. $28\sqrt{3x}$. C. $39\sqrt{x}$. D. $28\sqrt{x}$.

Câu 18. Cho $A=\frac{1}{3+\sqrt{5}}+\frac{1}{3-\sqrt{5}}$. Nghiệm của phương trình $2Ax+3=0$ là

- A. $x=1$. B. $x=-1$. C. $x=2$. D. $x=-2$.

IV – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG CAO

Câu 19. Cho biểu thức $P=\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3-1}}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right):\left(1-\frac{x+4}{x+\sqrt{x+1}}\right)$. Tìm các giá trị nguyên của x để P

nhận giá trị nguyên dương.

- A. $x=1; x=36$. B. $x=-1; x=36$.
C. $x=4; x=6$. D. $x=16; x=36$.

Câu 20. Cho biểu thức $C=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}+\frac{2}{x-\sqrt{x}}\right):\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ với $x > 0; x \neq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của C .

- A. $C=1$. B. $C=\sqrt{2}$. C. $C=2$. D. $C=2\sqrt{2}$.

C. CÁC DẠNG TỰ LUẬN

Dạng 1. Căn thức bậc hai của một bình phương

Phương pháp giải

Với biểu thức A bất kỳ, ta có $\sqrt{A^2} = |A|$, nghĩa là

$\sqrt{A^2} = A$ khi $A \geq 0$ (tức là A nhận giá trị không âm).

$\sqrt{A^2} = -A$ khi $A < 0$ (tức là khi A nhận giá trị âm).

Bài 1. Tính:

a) $\sqrt{13^2}$

b) $\sqrt{(-8)^2}$

c) $\sqrt{35^2}$

d) $\sqrt{\left(-\frac{7}{9}\right)^2}$

e) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$

f) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$

g) $\sqrt{\frac{4}{9}}$

h) $\sqrt{(-3)^2} + \sqrt{(-12)^2}$

Bài 2. Tính:

a) $\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}$

b) $\sqrt{16^2}$

c) $(-\sqrt{9})^2 + \sqrt{(-9)^2}$

d) $-\sqrt{\left(-\frac{4}{9}\right)^2}$

Bài 3. Rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$

b) $-2\sqrt{3^2} + (-\sqrt{6})^2$

c) $1-\sqrt{2} + \sqrt{(1+\sqrt{2})^2}$

d) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{6-4\sqrt{2}}$

Bài 4. Rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}$

b) $\sqrt{(1+2\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-2\sqrt{2})^2}$

c) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} - \sqrt{3}$

d) $(\sqrt{5})^2 + (-\sqrt{1,12})^2$

Bài 5. Rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{(x-2)^2}$ với $x \geq 2$

b) $\sqrt{(x-\sqrt{5})^2}$ với $x > 3$

c) $\sqrt{x^2} + \sqrt{(-3x)^2}$ với $x > 0$

d) $\sqrt{(2-x)^2}$ với $x > 2$

e) $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$ với $x < 2$

g) $\sqrt{1-2x+x^2}$ với $x > 2$

Dạng 2. Căn bậc hai của một tích

Phương pháp giải

➤ Với các biểu thức A, B không âm, ta có: $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$.

➤ Kết quả trên có thể mở rộng cho nhiều biểu thức không âm, chẳng hạn:

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \cdot \sqrt{C} = \sqrt{A \cdot B \cdot C}$$

* **Nhận xét:** Tổng quát hơn, với biểu thức A, B mà $B \geq 0$, ta có $\sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B}$

Bài 1. Rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{4x^2}$

b) $\sqrt{2x} \cdot \sqrt{8x}$ với $x > 0$

c) $\sqrt{9x^4}$

c) $\sqrt{3x^3} \cdot \sqrt{27x}$ với $x > 0$

Bài 2. Tính

a) $\sqrt{25.1,21}$

b) $\sqrt{360.90}$

c) $\sqrt{20}.\sqrt{5}$

d) $\sqrt{2,8}.\sqrt{7}.\sqrt{10}$

e) $\sqrt{45}.\sqrt{180}$

g) $\sqrt{7}.\sqrt{175}$

Bài 3. Rút gọn các biểu thức:

a) $\sqrt{3a}.\sqrt{27a}$ với $a \geq 0$

b) $\sqrt{8a.5ab.10b^3}$

c) $\sqrt{5a}.\sqrt{20a}$ với $a \geq 0$

d) $\sqrt{15a}.\sqrt{3a}$ với $a > 0$

e) $\sqrt{5x}.\sqrt{20x}$ với $x \geq 0$

g) $\sqrt{5ab^3}.\sqrt{5ab}$ với $a < 0, b < 0$

Bài 4. Rút gọn các biểu thức:

a) $\sqrt{6+\sqrt{35}}.\sqrt{6-\sqrt{35}}$

b) $\sqrt{9-\sqrt{17}}.\sqrt{9+\sqrt{17}}$

c) $\sqrt{9(x-5)^2}$ với $x \geq 5$

d) $\sqrt{x^2.(x-2)^2}$ với $x < 0$

Bài 5. Rút gọn biểu thức sau:

a) $\sqrt{11-6\sqrt{2}} - \sqrt{11+6\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}$

c) $(2+\sqrt{7})\sqrt{11-4\sqrt{7}}$

d) $\sqrt{(3+\sqrt{2})^2} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}$

Dạng 3. Căn bậc hai của một thương

Phương pháp giải

➤ Với các biểu thức A không âm và biểu thức B dương, ta có: $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$.

Bài 1. Rút gọn biểu thức sau:

a) $\sqrt{\frac{27}{75}}$

b) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$

c) $\frac{\sqrt{3ab^4}}{\sqrt{27a}}$ với $a > 0$

d) $\sqrt{\frac{3a^2b}{27}}$ với $a \leq 0, b \geq 0$

Bài 2. Rút gọn biểu thức sau:

a) $\sqrt{\frac{4a^2}{25}}$

b) $\frac{\sqrt{125a}}{\sqrt{5a}}$ với $a > 0$

c) $\sqrt{\frac{9}{(x-3)^2}}$ với $x > 3$

d) $\frac{\sqrt{48x^3}}{\sqrt{3x^5}}$ với $x > 0$

Bài 3. Rút gọn biểu thức sau:

a) $\sqrt{\frac{(3-a)^2}{9}}$ với $a > 3$

b) $\frac{\sqrt{75x^5}}{\sqrt{5x^3}}$ với $x > 0$

c) $\sqrt{\frac{9}{x^2-2x+1}}$ với $x > 1$

d) $\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{\sqrt{x^2+6x+9}}$ với $x > 2$

Bài 4. Rút gọn biểu thức sau:

a) $\sqrt{8} : \sqrt{2}$

b) $\sqrt{52a^3} : \sqrt{13a}$ với $a > 0$

c) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{50}}$

d) $\sqrt{16ab^2} : \sqrt{4a}$ với $a \geq 0, b < 0$

Bài 5. Rút gọn biểu thức sau:

a) $\sqrt{\frac{(x-1)^2}{16}}$ với $x \geq 1$

b) $\sqrt{\frac{x^4}{(a-1)^2}}$ với $a < 1$

c) $\frac{\sqrt{27(x-5)^2}}{\sqrt{3}}$ với $x \geq 5$

d) $\frac{\sqrt{(x-4)^2}}{\sqrt{9(x-4)^2}}$ với $x < 4$

Dạng 4. Trục căn thức ở mẫu

Phương pháp giải

➤ **Phép biến đổi mất căn thức bậc hai ở mẫu thức của một biểu thức được gọi là trục căn thức căn thức ở mẫu của biểu thức đó.**

➤ **Với các biểu thức A, B thỏa mãn $AB \geq 0, B \neq 0$, ta có:**

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{B} = \frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{B^2}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}$$

➤ **Với các biểu thức A, B mà biểu thức B dương (hay $B > 0$), ta có: $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$.**

➤ **Với các biểu thức A, B, C mà biểu thức B không âm (hay $B \geq 0$) và $A^2 \neq B$, ta có:**

$$\frac{C}{A+\sqrt{B}} = \frac{C(A-\sqrt{B})}{A^2-B}; \quad \frac{C}{A-\sqrt{B}} = \frac{C(A+\sqrt{B})}{A^2-B}$$

(Trong đó: $A-\sqrt{B}$ được gọi là biểu thức liên hợp của $A+\sqrt{B}$ và ngược lại).

➤ **Với các biểu thức A, B, C mà biểu thức $A \geq 0, B \geq 0$ và $A \neq B$, ta có:**

$$\frac{C}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{A-B}; \quad \frac{C}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{A-B}$$

(Trong đó: $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ được gọi là biểu thức liên hợp của $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ và ngược lại).

Bài 1. Trục căn thức ở mẫu:

a) $\frac{5}{2+\sqrt{3}}$

b) $\frac{9}{2\sqrt{3}}$

c) $\frac{7}{3-\sqrt{2}}$

d) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Bài 2. Trục căn thức ở mẫu:

a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

b) $\frac{3}{2\sqrt{6}}$

c) $-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

d) $\sqrt{\frac{3}{5}}$

e) $\sqrt{\frac{2a}{3b}}$ với $ab \geq 0$

e) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

Bài 3. Trục căn thức ở mẫu:

a) $\frac{2}{3\sqrt{5}}$

b) $\frac{a}{3-2\sqrt{2}}$

c) $\frac{4+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

d) $\frac{3+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

e) $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$

g) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Bài 3. Trục căn thức ở mẫu:

a) $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ với $x > -1$

b) $\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}}$ với $x > 1$

c) $\frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0$

d) $\frac{1}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

Bài 4. Trục căn thức ở mẫu:

a) $\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ với $x > 0, y > 0$

b) $\frac{a}{a-\sqrt{a}}$ với $a > 0, a \neq 1$

c) $\frac{-5\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{3}}$

d) $\frac{a^2-2a}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}$ với $a \geq 0, a \neq 2$

Bài 5. Rút gọn biểu thức:

a) $2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}}$

b) $\frac{5\sqrt{48} - 3\sqrt{27} + 2\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$

c) $\frac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}$ với $a \geq 0$

d) $\sqrt{60} - 5\sqrt{\frac{3}{5}} - 3\sqrt{\frac{5}{3}}$

Dạng 5. Chứng minh đẳng thức

Phương pháp giải

➤ *Biến đổi về trái bằng về phải bằng cách sử dụng các phép biến đổi căn thức và vận dụng thích hợp các phép tính và các phép biến đổi đã biết.*

Bài 1. Chứng minh đẳng thức $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})=2\sqrt{2}$

Bài 2. Chứng minh đẳng thức:

a) $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$

b) $\sqrt{(1+2\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-2\sqrt{2})^2} = 2$

Bài 3. Chứng minh đẳng thức: $\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ với $a > 0, b > 0$.

Bài 4. Chứng minh các đẳng thức (với a, b không âm và $a \neq b$)

a) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}-2\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2\sqrt{a}+2\sqrt{b}} - \frac{2b}{b-a} = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

b) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2 = 1$

Bài 5. Chứng minh các đẳng thức sau.

a) $\left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2 = 1$ với $a \geq 0$ và $a \neq 1$

b) $\frac{a+b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = |a|$ với $a+b > 0$ và $b \neq 0$

Dạng 6. Chứng minh đẳng thức

Phương pháp giải

Rút gọn biểu thức chứa biến. Sử dụng kết quả rút gọn để:

- Tính giá trị của biểu thức khi biết giá trị của biến.
- Giải phương trình, bất phương trình (so sánh biểu thức với một số).
- Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của một biểu thức.
- Tìm giá trị nguyên của biểu thức ứng với các giá trị nguyên của biến.

Bài 1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

- a) Rút gọn P .
- b) Tìm các giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x} + 5$.

Bài 2. Cho biểu thức $A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 4$

- a) Rút gọn biểu thức A .
- b) Tìm x sao cho A nhận một giá trị nguyên.

Bài 3. Cho biểu thức $A = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$.

- a) Tìm điều kiện để A có nghĩa.
- b) Khi A có nghĩa, chứng tỏ giá trị của A không phụ thuộc vào a .

Bài 4. Cho biểu thức $A = \frac{x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$; $x \neq 1$.

- a) Tìm x để A có nghĩa.
- b) Rút gọn biểu thức A .
- c) Với giá trị nào của x thì $A < 1$?

Bài 5.

a) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$. Tính giá trị của biểu thức A với $x = 36$.

b) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{4}{\sqrt{x}-4} \right) : \frac{x+16}{\sqrt{x}+2}$ (với $x \geq 0$, $x \neq 16$).

c) Với các biểu thức A và B nói trên, hãy tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức $B(A-1)$ là số nguyên.

Bài 6. Cho biểu thức $P = \left(\frac{3\sqrt{a}}{a+\sqrt{ab}+b} - \frac{3a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \right) : \frac{(a-1)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{2a+2\sqrt{ab}+2b}$.

- a) Rút gọn P .
- b) Tìm những giá trị nguyên của a để P có giá trị nguyên.

C. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	D	C	C	D	C	A	A	B	C	A
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	A	C	D	D	C	D	B	B	D	D

I – MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT

Câu 1: Rút gọn biểu thức $B = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{3}$

- A. $2\sqrt{3}$ B. $-2\sqrt{3}$ C. -2 D. 2

Lời giải

$$B = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{3} = |2 - \sqrt{3}| + \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2$$

Câu 2: Biểu thức $\sqrt{(3 - 2x)^2}$ bằng:

- A. $3 - 2x$. B. $2x - 3$. C. $|2x - 3|$. D. $3 - 2x$ và $2x - 3$

Lời giải

$$\sqrt{(3 - 2x)^2} = |3 - 2x|$$

Câu 3: Rút gọn biểu thức sau: $A = \sqrt{64a^2} + 2a$ với $a \geq 0$

- A. $A = 20a$ B. $A = 68a$ C. $A = 10a$ D. $A = 8a$

Lời giải

$$A = \sqrt{64a^2} + 2a = |8a| + 2a = 8a + 2a = 10a \quad (\text{vì } a \geq 0)$$

Câu 4: Rút gọn biểu thức $\sqrt{\frac{x^2}{y^4}}$ với $x > 0; y \neq 0$, ta được

- A. $-\frac{x^2}{y^4}$. B. $\frac{x^2}{y^4}$. C. $-\frac{x}{y^2}$. D. $\frac{x}{y^2}$.

Lời giải

$$\sqrt{\frac{x^2}{y^4}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{(y^2)^2}} = \frac{|x|}{y^2} = \frac{x}{y^2} \quad (\text{vì } x > 0; y \neq 0)$$

Câu 5: Rút gọn biểu thức $\frac{\sqrt{32a^2}}{\sqrt{2}}$ với $a < 0$ được kết quả là

- A. $16a^2$. B. $4a$. C. $-4a$. D. $-16a^2$.

Lời giải

$$\frac{\sqrt{32a^2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{32a^2}{2}} = \sqrt{16a^2} = \sqrt{(4a)^2} = |4a| = -4a \text{ (vì } a < 0\text{)}$$

Câu 6: Khử mẫu của biểu thức $\sqrt{\frac{3}{125}}$ sẽ được kết quả là

- A. $\frac{\sqrt{15}}{25}$. B. $\frac{\sqrt{25}}{15}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{25}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{15}$.

Lời giải

$$\sqrt{\frac{3}{125}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 5}{25 \cdot 5 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{15}{25^2}} = \frac{\sqrt{15}}{25}$$

Câu 7: Trục căn thức ở mẫu biểu thức $\frac{5}{2\sqrt{3}}$ có kết quả là

- A. $\frac{5\sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{3\sqrt{5}}{6}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

$$\frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot (\sqrt{3})^2} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

Câu 8: Trục căn thức ở mẫu biểu thức $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ có kết quả là

- A. 3. B. $3 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})$. C. $3 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})$. D. -3.

Lời giải

$$\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{6 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2} = 3 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})$$

II – MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 9: Rút gọn biểu thức $\sqrt{0,36(a-1)^2}$ với $a < 1$ ta được kết quả là

- A. $0,6(a-1)$ B. $0,36(1-a)$. C. $0,6(1-a)$. D. $0,36a$.

Lời giải

$$\sqrt{0,36(a-1)^2} = \sqrt{(0,6)^2} \cdot \sqrt{(a-1)^2} = 0,6 \cdot |a-1| = 0,6(1-a) \text{ (vì } a < 1\text{)}$$

Câu 10. Biểu thức $\sqrt{25(x^2 - 4x + 4)}$ khi $x \geq 2$ bằng

- A. $5(x-2)$. B. $-5(x-2)$. C. $5(x+2)$. D. $-5(x+2)$.

Lời giải

$$\sqrt{25(x^2 - 4x + 4)} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{(x-2)^2} = 5 \cdot |x-2| = 5(x-2) \quad (\text{vì } x \geq 2)$$

Câu 11. Với $y < 0$, kết quả của phép tính $2y \cdot \sqrt{\frac{x^4}{4y^2}}$ là

- A. $-x^2$. B. x^2 . C. $\frac{x^2}{2y}$. D. $\frac{-x^2}{2y}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2y \sqrt{\frac{x^4}{4y^2}} = 2y \sqrt{\left(\frac{x^2}{2y}\right)^2} = 2y \left| \frac{x^2}{2y} \right|$$

$$\text{Vì } y < 0 \text{ nên } \frac{x^2}{2y} < 0 \Rightarrow \left| \frac{x^2}{2y} \right| = \frac{-x^2}{2y}. \text{ Do đó } 2y \sqrt{\frac{x^4}{4y^2}} = 2y \cdot \left(\frac{-x^2}{2y} \right) = -x^2.$$

Câu 12. Rút gọn biểu thức $\frac{\sqrt{63y^3}}{\sqrt{7y}}$ với $y > 0$ được kết quả là

- A. $3y^2$. B. $9y$. C. $3y$. D. $-3y$.

Lời giải

$$\text{Với } y > 0, \text{ ta có: } \frac{\sqrt{63y^3}}{\sqrt{7y}} = \sqrt{\frac{63y^3}{7y}} = \sqrt{9y^2} = \sqrt{(3y)^2} = |3y| = 3y.$$

Câu 13. Khử mẫu biểu thức sau $xy \sqrt{\frac{4}{x^2 y^2}}$ với $x > 0; y > 0$ ta được kết quả là

- A. 4. B. $\sqrt{-xy}$. C. $\sqrt{2}$. D. 2.

Lời giải

$$\text{Vì } x > 0; y > 0 \text{ nên } xy > 0. \text{ Từ đó ta có } xy \sqrt{\frac{4}{x^2 y^2}} = xy \cdot \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{x^2 y^2}} = xy \cdot \frac{2}{xy} = 2.$$

Câu 14. Trục căn thức ở mẫu biểu thức $\frac{3}{6 + \sqrt{3a}}$ với $a \geq 0; a \neq 12$ ta được kết quả là

- A. $\frac{6 + \sqrt{3a}}{12 + a}$. B. $\frac{6 - \sqrt{3a}}{12 + a}$. C. $\frac{6 + \sqrt{3a}}{12 - a}$. D. $\frac{6 - \sqrt{3a}}{12 - a}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{3}{6+\sqrt{3a}} = \frac{3(6-\sqrt{3a})}{(6+\sqrt{3a})(6-\sqrt{3a})} = \frac{3(6-\sqrt{3a})}{6^2-(\sqrt{3a})^2} = \frac{3(6-\sqrt{3a})}{36-3a} = \frac{6-\sqrt{3a}}{12-a}.$$

III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 15. Giá trị của biểu thức $\sqrt{4x^2(y^2+6y+9)}$ tại $x=2; y=-\sqrt{7}$ là

- A. $4\sqrt{7}-3$. B. $4(\sqrt{7}-3)$. C. $4(3-\sqrt{7})$. D. $8(\sqrt{7}-3)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sqrt{4x^2(y^2+6y+9)} = \sqrt{(2x)^2(y+3)^2} = |2x| \cdot |y+3|.$$

Thay $x=2; y=-\sqrt{7}$ vào biểu thức $|2x| \cdot |y+3|$ ta được

$$|2 \cdot 2| \cdot |-\sqrt{7}+3| = 4|3-\sqrt{7}| = 4(3-\sqrt{7}).$$

Câu 16. Nghiệm của phương trình $\sqrt{25(x-1)} = 10$ là

- A. $x=2, 5$. B. $x=0, 4$. C. $x=4$. D. $x=5$.

Lời giải

Với $x \geq 1$ ta có:

$$\sqrt{25(x-1)} = 10$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{x-1} = 10$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 5(TM)$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=5$.

Câu 17. Rút gọn biểu thức $\sqrt{27x} - \sqrt{48x} + 4\sqrt{75x} + \sqrt{243x}$ với $x \geq 0$ ta được

- A. $40\sqrt{3x}$. B. $28\sqrt{3x}$. C. $39\sqrt{x}$. D. $28\sqrt{x}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sqrt{27x} - \sqrt{48x} + 4\sqrt{75x} + \sqrt{243x} = \sqrt{9 \cdot 3x} - \sqrt{16 \cdot 3x} + 4\sqrt{25 \cdot 3x} + \sqrt{81 \cdot 3x}$$

$$= \sqrt{3^2 \cdot 3x} - \sqrt{4^2 \cdot 3x} + 4\sqrt{5^2 \cdot 3x} + \sqrt{9^2 \cdot 3x}$$

$$= 3\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} + 4 \cdot 5\sqrt{3x} + 9\sqrt{3x} = \sqrt{3x}(3-4+20+9) = 28\sqrt{3x}$$

Câu 18. Cho $A = \frac{1}{3+\sqrt{5}} + \frac{1}{3-\sqrt{5}}$. Nghiệm của phương trình $2Ax+3=0$ là

- A. $x=1$. B. $x=-1$. C. $x=2$. D. $x=-2$.

Lời giải

$$A = \frac{1}{3+\sqrt{5}} + \frac{1}{3-\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} + \frac{3+\sqrt{5}}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}$$

$$= \frac{3-\sqrt{5}+3+\sqrt{5}}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = \frac{6}{9-5} = \frac{3}{2}.$$

Khi đó: $2Ax+3=0$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1.$$

IV – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG CAO

Câu 19. Cho biểu thức $P = \left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3-1}} - \frac{1}{\sqrt{x-1}} \right) : \left(1 - \frac{x+4}{x+\sqrt{x+1}} \right)$. Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên dương.

A. $x = 1; x = 36.$

B. $x = -1; x = 36.$

C. $x = 4; x = 6.$

D. $x = 16; x = 36.$

Lời giải

$$\text{ĐKXD: } \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq 9 \end{cases}$$

Ta có: $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} = \frac{\sqrt{x}-3+3}{\sqrt{x-3}} = 1 + \frac{3}{\sqrt{x-3}}$.

Để P nhận giá trị là số nguyên dương thì $\begin{cases} P \in \mathbb{Z} \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{x-3}} \in \mathbb{Z} \\ 1 + \frac{3}{\sqrt{x-3}} > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{x-3}} \in \mathbb{Z} \\ \frac{3+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}} > 0 \end{cases} \quad (\sqrt{x-3}) \in U(3) \quad (1) \quad \text{và} \quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} > 0 \quad (2)$$

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{x-3}) \in \{1; 3\} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-3} = 1 \\ \sqrt{x-3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 4 \\ \sqrt{x} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ x = 36 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn điều kiện}).$$

Nhận thấy $x = 16; x = 36$ vẫn thỏa mãn (2)

Nên $x = 16$ hoặc $x = 36$ thì P nguyên dương.

Câu 20. Cho biểu thức $C = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0; x \neq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của C .

A. $C = 1$.

B. $C = \sqrt{2}$.

C. $C = 2$.

D. $C = 2\sqrt{2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } C &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) \cdot (\sqrt{x}-1) = \frac{x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot (\sqrt{x}-1) = \frac{x+2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Vậy $C = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 1$

Xét $C = \frac{x+2}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

Với $x > 0, x \neq 1$, áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương \sqrt{x} và $\frac{2}{\sqrt{x}}$ ta được:

$$C \geq 2\sqrt{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow x = 2$ (thỏa mãn)

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là $2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2$.

E. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Căn thức bậc hai của một bình phương

Phương pháp giải

Với biểu thức A bất kỳ, ta có $\sqrt{A^2} = |A|$, nghĩa là

$$\sqrt{A^2} = A \text{ khi } A \geq 0 \text{ (tức là } A \text{ nhận giá trị không âm).}$$

$$\sqrt{A^2} = -A \text{ khi } A < 0 \text{ (tức là khi } A \text{ nhận giá trị âm).}$$

Bài 1. Tính:

a) $\sqrt{13^2}$

b) $\sqrt{(-8)^2}$

c) $\sqrt{35^2}$

d) $\sqrt{\left(-\frac{7}{9}\right)^2}$

e) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$

f) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$

g) $\sqrt{\frac{4}{9}}$

h) $\sqrt{(-3)^2} + \sqrt{(-12)^2}$

Lời giải

a) $\sqrt{13^2} = |13| = 13$

b) $\sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8$

c) $\sqrt{35^2} = |35| = 35$

d) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$

e) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = |\sqrt{3}-2| = 2-\sqrt{3}$ (vì $\sqrt{3}-2 < 0$)

f) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$ (vì $1-\sqrt{2} < 0$)

h) $\sqrt{(-3)^2} + \sqrt{(-12)^2} = |-3| + |-12| = 3+12 = 15$

Bài 2. Tính:

a) $\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}$

b) $\sqrt{16^2}$

c) $(-\sqrt{9})^2 + \sqrt{(-9)^2}$

d) $-\sqrt{\left(-\frac{4}{9}\right)^2}$

a) $\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = \sqrt{(2 \cdot 3 \cdot 5)^2} \sqrt{30^2} = |30| = 30$

b) $\sqrt{16^2} = |16| = 16$

c) $(-\sqrt{9})^2 + \sqrt{(-9)^2} = 9 + |-9| = 9+9 = 18$

d) $-\sqrt{\left(-\frac{4}{9}\right)^2} = -\left|-\frac{4}{9}\right| = -\frac{4}{9}$

Lời giải

Bài 3. Rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$

b) $-2\sqrt{3^2} + (-\sqrt{6})^2$

c) $1-\sqrt{2} + \sqrt{(1+\sqrt{2})^2}$

d) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{6-4\sqrt{2}}$

a) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$ (vì $2-\sqrt{5} < 0$)

Lời giải

b) $-2\sqrt{3^2} + (-\sqrt{6})^2 = -2 \cdot |3| - 6 = -2 \cdot 3 - 6 = -12$

c) $1-\sqrt{2} + \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} = 1-\sqrt{2} + |1+\sqrt{2}| = 1-\sqrt{2} + 1+\sqrt{2} = 2$

d) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} - \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| - |2-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1-2+\sqrt{2} = -3$

Bài 4. Rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}$

b) $\sqrt{(1+2\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-2\sqrt{2})^2}$

c) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} - \sqrt{3}$

d) $(\sqrt{5})^2 + (-\sqrt{1,12})^2$

Lời giải

a) $\sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \sqrt{5} - |\sqrt{5}-1| = \sqrt{5} - \sqrt{5} + 1 = 1$

b) $\sqrt{(1+2\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-2\sqrt{2})^2} = |1+2\sqrt{2}| - |1-2\sqrt{2}| = 1+2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 1 = 0$

c) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} - \sqrt{3} = |1-\sqrt{3}| - \sqrt{3} = \sqrt{3}-1-\sqrt{3} = -1$

d) $(\sqrt{5})^2 + (-\sqrt{1,12})^2 = 5 + |1,12| = 5+1,12 = 6,12$

Bài 5. Rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{(x-2)^2}$ với $x \geq 2$

b) $\sqrt{(x-\sqrt{5})^2}$ với $x > 3$

c) $\sqrt{x^2} + \sqrt{(-3x)^2}$ với $x > 0$

d) $\sqrt{(2-x)^2}$ với $x > 2$

e) $\sqrt{x^2-4x+4}$ với $x < 2$

g) $\sqrt{1-2x+x^2}$ với $x > 2$

Lời giải

a) $\sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = x-2$ (vì $x \geq 2$)

b) $\sqrt{(x-\sqrt{5})^2} = |x-\sqrt{5}| = x-\sqrt{5}$ (vì $x-\sqrt{5} > 0$ với $x > 3$)

c) $\sqrt{x^2} + \sqrt{(-3x)^2} = |x| + |-3x| = x+3x = 4x$ (vì $x > 0$)

d) $\sqrt{(2-x)^2} = |2-x| = x-2$ (vì $x > 2$)

e) $\sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = 2-x$

g) $\sqrt{1-2x+x^2} = \sqrt{(1-x)^2} = |1-x| = x-1$ (vì $x > 2$)

(với $x < 2$)**Dạng 2. Căn bậc hai của một tích****Phương pháp giải**

- Với các biểu thức A, B không âm, ta có: $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$.
- Kết quả trên có thể mở rộng cho nhiều biểu thức không âm, chẳng hạn:

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \cdot \sqrt{C} = \sqrt{A \cdot B \cdot C}$$

* **Nhận xét:** Tổng quát hơn, với biểu thức A, B mà $B \geq 0$, ta có $\sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B}$

Bài 1. Rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{4x^2}$

b) $\sqrt{2x} \cdot \sqrt{8x}$ với $x > 0$

c) $\sqrt{9x^4}$

d) $\sqrt{3x^3} \cdot \sqrt{27x}$ với $x > 0$

a) $\sqrt{4x^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x^2} = 2|a|$.

Lời giải

b) $\sqrt{2x} \cdot \sqrt{8x} = \sqrt{2x \cdot 8x} = \sqrt{16x^2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{x^2} = 4|a| = 4a$
(vì $x > 0$).

c) $\sqrt{9x^4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x^4} = 3 \cdot \sqrt{(x^2)^2} = 3|x^2| = 3x^2$ (vì $x^2 \geq 0$).

d) $\sqrt{3x^3} \cdot \sqrt{27x} = \sqrt{3x^3 \cdot 27x} = \sqrt{81x^4} = 9x^2$ với $x > 0$

Bài 2. Tính

a) $\sqrt{25.1.21}$

b) $\sqrt{360.90}$

c) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5}$

d) $\sqrt{2.8} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{10}$

e) $\sqrt{45} \cdot \sqrt{180}$

g) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{175}$

Lời giải

a) $\sqrt{25.1.21} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{1.21} = 5.1.1 = 5,5$

b) $\sqrt{360.90} = \sqrt{36.9.100} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{100} = 6.3.10 = 180$

c) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{20.5} = \sqrt{100} = 10$

d) $\sqrt{2.8} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{2.8.7.10} = \sqrt{28.10} = \sqrt{4.7.7} = \sqrt{2^2 \cdot 7^2} = \sqrt{14^2} = 14$

e) $\sqrt{45} \cdot \sqrt{180} = \sqrt{45.180} = \sqrt{8100} = 90$

g) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{175} = \sqrt{7.175} = \sqrt{1225} = 35$

Bài 3. Rút gọn các biểu thức:

a) $\sqrt{3a} \cdot \sqrt{27a}$ với $a \geq 0$

b) $\sqrt{8a.5ab.10b^3}$

c) $\sqrt{5a} \cdot \sqrt{20a}$ với $a \geq 0$

d) $\sqrt{15a} \cdot \sqrt{3a}$ với $a > 0$

e) $\sqrt{5x} \cdot \sqrt{20x}$ với $x \geq 0$

g) $\sqrt{5ab^3} \cdot \sqrt{5ab}$ với $a < 0, b < 0$

Lời giải

a) $\sqrt{3a} \cdot \sqrt{27a} = \sqrt{3a.27a} = \sqrt{81a^2} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{a^2} = 9|a| = 9a$ (vì $a \geq 0$)

b) $\sqrt{8a.5ab.10b^3} = \sqrt{8.5.10.a^2b^4} = \sqrt{400} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{(b^2)^2} = 20|a|b^2$

c) $\sqrt{5a} \cdot \sqrt{20a} = \sqrt{5a.20a} = \sqrt{100.a^2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{a^2} = 10|a| = 10a$ (vì $a \geq 0$)

d) $\sqrt{15a} \cdot \sqrt{3a} = \sqrt{15a.3a} = \sqrt{9.a^2.5} = 3a\sqrt{5}$ (vì $a > 0$)

e) $\sqrt{5x} \cdot \sqrt{20x} = \sqrt{5x.20x} = \sqrt{100x^2} = \sqrt{(10x)^2} = |10x| = 10x$ (vì $x \geq 0$)

g) $\sqrt{5ab^3} \cdot \sqrt{5ab} = \sqrt{5ab^3.5ab} = \sqrt{25a^2b^4} = \sqrt{(5ab^2)^2} = |5ab^2| = -5ab^2$ (vì $a < 0, b < 0$)

Bài 4. Rút gọn các biểu thức:

a) $\sqrt{6+\sqrt{35}} \cdot \sqrt{6-\sqrt{35}}$

b) $\sqrt{9-\sqrt{17}} \cdot \sqrt{9+\sqrt{17}}$

c) $\sqrt{9(x-5)^2}$ với $x \geq 5$

d) $\sqrt{x^2 \cdot (x-2)^2}$ với $x < 0$

Lời giải

a) $\sqrt{6+\sqrt{35}} \cdot \sqrt{6-\sqrt{35}} = \sqrt{(6+\sqrt{35})(6-\sqrt{35})} = \sqrt{36-35} = 1$

b) $\sqrt{9-\sqrt{17}} \cdot \sqrt{9+\sqrt{17}} = \sqrt{(9-\sqrt{17})(9+\sqrt{17})} = \sqrt{81-17} = \sqrt{64} = 8$

c) $\sqrt{9(x-5)^2} = 3|x-5| = 3(x-5)$ (vì $x \geq 5$)

d) $\sqrt{x^2 \cdot (x-2)^2} = |x| \cdot |x-2| = -x(2-x) = x(x-2)$ (vì $x < 0$)

Bài 5. Rút gọn biểu thức sau:

a) $\sqrt{11-6\sqrt{2}} - \sqrt{11+6\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}$

c) $(2+\sqrt{7})\sqrt{11-4\sqrt{7}}$

d) $\sqrt{(3+\sqrt{2})^2} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}$

Lời giải

a) $\sqrt{11-6\sqrt{2}} - \sqrt{11+6\sqrt{2}} = \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} - \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} = 3-\sqrt{2} - 3-\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$.

b) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{14-6\sqrt{5}} = \sqrt{5}-2 + \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}-2 + 3-\sqrt{5} = 1$.

c) $(2+\sqrt{7})\sqrt{11-4\sqrt{7}} = (2+\sqrt{7})\sqrt{(\sqrt{7}-2)^2} = (\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2) = 7-4 = 3$.

d) $\sqrt{(3+\sqrt{2})^2} + \sqrt{6-4\sqrt{2}} = 3+\sqrt{2} + \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} = 3+\sqrt{2} + 2-\sqrt{2} = 5$.

Dạng 3. Căn bậc hai của một thương

Phương pháp giải

➤ Với các biểu thức A không âm và biểu thức B dương, ta có: $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$.

Bài 1. Rút gọn biểu thức sau:

a) $\sqrt{\frac{27}{75}}$

b) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$

c) $\frac{\sqrt{3ab^4}}{\sqrt{27a}}$ với $a > 0$

d) $\sqrt{\frac{3a^2b}{27}}$ với $a \leq 0, b \geq 0$

Lời giải

a) $\sqrt{\frac{27}{75}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$

b) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 5}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{20}{10}} = \sqrt{2}$

c) $\frac{\sqrt{3ab^4}}{\sqrt{27a}} = \sqrt{\frac{3ab^4}{27a}} = \sqrt{\frac{b^4}{9}} = \frac{\sqrt{(b^2)^2}}{\sqrt{9}} = \frac{b^2}{3}$ (vì $a > 0$)

d) $\sqrt{\frac{3a^2b}{27}} = \sqrt{\frac{a^2b}{9}} = -\frac{1}{3}a\sqrt{b}$ (vì $a \leq 0, b \geq 0$)

Bài 2. Rút gọn biểu thức sau:

a) $\sqrt{\frac{4a^2}{25}}$

b) $\frac{\sqrt{125a}}{\sqrt{5a}}$ với $a > 0$

c) $\sqrt{\frac{9}{(x-3)^2}}$ với $x > 3$

d) $\frac{\sqrt{48x^3}}{\sqrt{3x^5}}$ với $x > 0$

Lời giải

a) $\sqrt{\frac{4a^2}{25}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{a^2}}{\sqrt{25}} = \frac{2|a|}{5}$

b) $\frac{\sqrt{125a}}{\sqrt{5a}} = \sqrt{\frac{125a}{5a}} = \sqrt{25} = 5$ với $a > 0$

$$c) \sqrt{\frac{9}{(x-3)^2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{(x-3)^2}} = \frac{3}{|x-3|} = \frac{3}{x-3} \text{ (vì } x > 3)$$

$$d) \frac{\sqrt{48x^3}}{\sqrt{3x^5}} = \sqrt{\frac{48x^3}{3x^5}} = \sqrt{\frac{16}{x^2}} = \frac{4}{|x|} = \frac{4}{x} \text{ (vì } x > 0)$$

Bài 3. Rút gọn biểu thức sau:

a) $\sqrt{\frac{(3-a)^2}{9}}$ với $a > 3$

b) $\frac{\sqrt{75x^5}}{\sqrt{5x^3}}$ với $x > 0$

c) $\sqrt{\frac{9}{x^2-2x+1}}$ với $x > 1$

d) $\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{\sqrt{x^2+6x+9}}$ với $x > 2$

Lời giải

a) $\sqrt{\frac{(3-a)^2}{9}} = \frac{\sqrt{(3-a)^2}}{\sqrt{9}} = \frac{|3-a|}{3} = \frac{a-3}{3}$ (vì $a > 3$)

b) $\frac{\sqrt{75x^5}}{\sqrt{5x^3}} = \sqrt{\frac{75x^5}{5x^3}} = \sqrt{15x^2} = \sqrt{15}|x| = \sqrt{15}x$ (vì $x > 0$)

c) $\sqrt{\frac{9}{x^2-2x+1}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{(x-1)^2}} = \frac{3}{|x-1|} = \frac{3}{x-1}$ (vì $x > 1$)

d) $\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{\sqrt{x^2+6x+9}} = \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{\sqrt{(x+3)^2}} = \frac{|x-2|}{|x+3|} = \frac{x-2}{x+3}$ (vì $x > 2$)

Bài 4. Rút gọn biểu thức sau:

a) $\sqrt{8} : \sqrt{2}$

b) $\sqrt{52a^3} : \sqrt{13a}$ với $a > 0$

c) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{50}}$

d) $\sqrt{16ab^2} : \sqrt{4a}$ với $a \geq 0, b < 0$

Lời giải

a) $\sqrt{8} : \sqrt{2} = \sqrt{8:2} = \sqrt{4} = 2$

b) $\sqrt{52a^3} : \sqrt{13a} = \sqrt{52a^3:(13a)} = \sqrt{4a^2} = \sqrt{(2a)^2} = 2a$ (vì $a > 0$)

c) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{18}{50}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{3^2}}{\sqrt{5^2}} = \frac{3}{5}$

d) $\sqrt{16ab^2} : \sqrt{4a} = \sqrt{16ab^2:(4a)} = \sqrt{4b^2} = \sqrt{(2b)^2} = -2b$ (vì $b < 0$)

Bài 5. Rút gọn biểu thức sau:

a) $\sqrt{\frac{(x-1)^2}{16}}$ với $x \geq 1$

b) $\sqrt{\frac{x^4}{(a-1)^2}}$ với $a < 1$

c) $\frac{\sqrt{27(x-5)^2}}{\sqrt{3}}$ với $x \geq 5$

d) $\frac{\sqrt{(x-4)^2}}{\sqrt{9(x-4)^2}}$ với $x < 4$

Lời giải

a) Vì $(x-1)^2 \geq 0$ và $16 > 0$ nên ta có, $\sqrt{\frac{(x-1)^2}{16}} = \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{\sqrt{16}} = \frac{|x-1|}{4} = \frac{x-1}{4}$; do $x \geq 1$

b) Vì $x^4 \geq 0$ và $(a-1)^2 > 0$ nên ta có, $\sqrt{\frac{x^4}{(a-1)^2}} = \frac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{(a-1)^2}} = \frac{x^2}{|a-1|} = \frac{x^2}{1-a}$ (vì $a < 1$)

c) Với $x \geq 5$ ta có, $\frac{\sqrt{27(x-5)^2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27(x-5)^2}{3}} = \sqrt{9(x-5)^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{(x-5)^2} = 3 \cdot |x-5| = 3(x-5)$ (vì $x \geq 5$)

d) Với $x < 4$ ta có, $\frac{\sqrt{(x-4)^2}}{\sqrt{9(x-4)^2}} = \sqrt{\frac{(x-4)^4}{9(x-4)^2}} = \sqrt{\frac{(x-4)^2}{9}} = \frac{\sqrt{(x-4)^2}}{\sqrt{9}} = \frac{|x-4|}{3} = \frac{4-x}{3}$ (vì $x < 4$)

Dạng 4. Trục căn thức ở mẫu

Phương pháp giải

➤ Phép biến đổi mất căn thức bậc hai ở mẫu thức của một biểu thức được gọi là trục căn thức ở mẫu của biểu thức đó.

➤ Với các biểu thức A, B thỏa mãn $AB \geq 0, B \neq 0$, ta có:

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{B} = \frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{B^2}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}$$

➤ Với các biểu thức A, B mà biểu thức B dương (hay $B > 0$), ta có: $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$.

➤ Với các biểu thức A, B, C mà biểu thức B không âm (hay $B \geq 0$) và $A^2 \neq B$, ta có:

$$\frac{C}{A+\sqrt{B}} = \frac{C(A-\sqrt{B})}{A^2-B}; \quad \frac{C}{A-\sqrt{B}} = \frac{C(A+\sqrt{B})}{A^2-B}.$$

(Trong đó: $A-\sqrt{B}$ được gọi là biểu thức liên hợp của $A+\sqrt{B}$ và ngược lại).

➤ Với các biểu thức A, B, C mà biểu thức $A \geq 0, B \geq 0$ và $A \neq B$, ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{A-B}; \quad \frac{C}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{A-B}.$$

(Trong đó: $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ được gọi là biểu thức liên hợp của $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ và ngược lại).

Bài 1. Trục căn thức ở mẫu:

a) $\frac{5}{2+\sqrt{3}}$

b) $\frac{9}{2\sqrt{3}}$

c) $\frac{7}{3-\sqrt{2}}$

d) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Lời giải

a) $\frac{5}{2+\sqrt{3}} = \frac{5(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{10-5\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{10-5\sqrt{3}}{4-3} = 10-5\sqrt{3}$

b) $\frac{9}{2\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{2(\sqrt{3})^2} = \frac{9\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{9\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{7}{3-\sqrt{2}} = \frac{7(3+\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{7(3+\sqrt{2})}{3^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{7(3+\sqrt{2})}{9-2} = \frac{7(3+\sqrt{2})}{7} = 3+\sqrt{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{2 \cdot 3}+(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{3-2\sqrt{6}+2}{3-2} = \frac{5-2\sqrt{6}}{1} = 5-2\sqrt{6}$

Bài 2. Trục căn thức ở mẫu:

$$a) \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1 \cdot \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}}{x+1} \text{ với } x > -1$$

$$b) \frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}} = \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x-1}} = \frac{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})(x+1)}{\sqrt{x-1}} = (\sqrt{x+1})(x+1) \text{ với } x > 1$$

$$c) \frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}{(\sqrt{x-1})^2 - (\sqrt{x})^2} = \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}{x-1-x} = -(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}) \text{ với } x \geq 0$$

$$d) \frac{1}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}+3}{x-9} \text{ với } x \geq 0, x \neq 9$$

Bài 4. Trục căn thức ở mẫu:

$$a) \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+\sqrt{y}} \text{ với } x > 0, y > 0$$

$$b) \frac{a}{a-\sqrt{a}} \text{ với } a > 0, a \neq 1$$

$$c) \frac{-5\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{3}}$$

$$d) \frac{a^2-2a}{\sqrt{a}+\sqrt{2}} \text{ với } a \geq 0, a \neq 2$$

Lời giải

$$a) \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(2\sqrt{x}+\sqrt{y})(2\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \frac{2x-\sqrt{xy}}{4x-y} \text{ với } x > 0, y > 0$$

$$b) \frac{a}{a-\sqrt{a}} = \frac{a(a+\sqrt{a})}{(a-\sqrt{a})(a+\sqrt{a})} = \frac{a(a+\sqrt{a})}{a^2-a} = \frac{a(a+\sqrt{a})}{a(a-1)} = \frac{a\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}{a(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} = \frac{a}{\sqrt{a}-1} \text{ với } a > 0, a \neq 1$$

$$c) \frac{-5\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot (-5\sqrt{x^2+1})}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{-5\sqrt{3(x^2+1)}}{6}$$

$$d) \frac{a^2-2a}{\sqrt{a}+\sqrt{2}} = \frac{a(a-2)}{\sqrt{a}+\sqrt{2}} = \frac{a(\sqrt{a}-\sqrt{2})(\sqrt{a}+\sqrt{2})}{\sqrt{a}+\sqrt{2}} = a(\sqrt{a}-\sqrt{2}) \text{ với } a \geq 0, a \neq 2$$

Bài 5. Rút gọn biểu thức:

$$a) 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$b) \frac{5\sqrt{48} - 3\sqrt{27} + 2\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$$

$$c) \frac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} \text{ với } a \geq 0$$

$$d) \sqrt{60} - 5\sqrt{\frac{3}{5}} - 3\sqrt{\frac{5}{3}}$$

Lời giải

$$a) 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{\frac{6}{9}} - 4\sqrt{\frac{6}{4}} = 2 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{6} - 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{6} = \left(\frac{2}{3} - 2\right) \cdot \sqrt{6} = \left(\frac{2}{3} - \frac{6}{3}\right) \cdot \sqrt{6} = \frac{-4}{3} \cdot \sqrt{6}$$

$$b) \frac{5\sqrt{48} - 3\sqrt{27} + 2\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{16 \cdot 3} - 3\sqrt{9 \cdot 3} + 2\sqrt{4 \cdot 3}}{\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{(16-9+4)\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 11$$

$$c) \frac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} = \frac{1+(\sqrt{a})^3}{1+\sqrt{a}} = \frac{(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a}+a)}{1+\sqrt{a}} = 1-\sqrt{a}+a \text{ với } a \geq 0$$

$$d) \sqrt{60} - 5\sqrt{\frac{3}{5}} - 3\sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{4 \cdot 15} - \frac{5}{5}\sqrt{15} - \frac{3}{3}\sqrt{15} = 2\sqrt{15} - \sqrt{15} - \sqrt{15} = (2 - 1 - 1)\sqrt{15} = 0$$

Dạng 5. Chứng minh đẳng thức

Phương pháp giải

➤ Biến đổi về trái bằng về phải bằng cách sử dụng các phép biến đổi căn thức và vận dụng thích hợp các phép tính và các phép biến đổi đã biết.

Bài 1. Chứng minh đẳng thức $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = 2\sqrt{2}$

Lời giải

Biến đổi về trái ta có

$$VT = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = (1 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3 = 2\sqrt{2} = VP$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

Bài 2. Chứng minh đẳng thức:

$$a) (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1 \qquad b) \sqrt{(1 + 2\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1 - 2\sqrt{2})^2} = 2$$

Lời giải

$$a) (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$$

$$\text{Ta có } VT = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1 = VP$$

$$b) \sqrt{(1 + 2\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1 - 2\sqrt{2})^2} = 2$$

$$\text{Ta có } VT = \sqrt{(1 + 2\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1 - 2\sqrt{2})^2} = |1 + 2\sqrt{2}| - |1 - 2\sqrt{2}| = 1 + 2\sqrt{2} + 1 - 2\sqrt{2} = 2 = VP$$

Bài 3. Chứng minh đẳng thức: $\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ với $a > 0, b > 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có } VT = \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b} - a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a(\sqrt{a} - \sqrt{b}) - b(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a - b)}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = VP.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 4. Chứng minh các đẳng thức (với a, b không âm và $a \neq b$)

$$a) \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2\sqrt{a} - 2\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2\sqrt{a} + 2\sqrt{b}} - \frac{2b}{b - a} = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$$

$$b) \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} \right)^2 = 1$$

Lời giải

$$\begin{aligned} a) \text{ Ta có } VT &= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2(\sqrt{a} - \sqrt{b})} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2(\sqrt{a} + \sqrt{b})} - \frac{2b}{b - a} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 4b}{2(a - b)} \\ &= \frac{a + 2\sqrt{ab} + b - a + 2\sqrt{ab} - b + 4b}{2(a - b)} = \frac{4\sqrt{ab} + 4b}{2(a - b)} = \frac{4\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{2(a - b)} = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = VP \end{aligned}$$

$$b) \text{ Ta có: } VT = \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} \right)^2$$

$$= \left[\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right] \cdot \left[\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \right]^2 = (a - 2\sqrt{ab} + b) \cdot \frac{1}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}$$

$$= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \cdot \frac{1}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = 1 = VP$$

Bài 5. Chứng minh các đẳng thức sau.

a) $\left(\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{a}}{1 - a} \right)^2 = 1$ với $a \geq 0$ và $a \neq 1$

b) $\frac{a+b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = |a|$ với $a+b > 0$ và $b \neq 0$

Lời giải

a) Với $a \geq 0$ và $a \neq 1$ ta có:

$$VT = \left(\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{a}}{1 - a} \right)^2 = \left[\frac{(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a} + a)}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right] \cdot \left[\frac{1 - \sqrt{a}}{(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a})} \right]^2$$

$$= (1 + 2\sqrt{a} + a) \cdot \frac{1}{(1 + \sqrt{a})^2} = (1 + \sqrt{a})^2 \cdot \frac{1}{(1 + \sqrt{a})^2} = 1 = VP.$$

b) Với $a+b > 0$ và $b \neq 0$ ta có

$$VT = \frac{a+b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = \frac{a+b}{b^2} \sqrt{\frac{(ab^2)^2}{(a+b)^2}} = \frac{a+b}{b^2} \cdot \frac{|ab^2|}{a+b} = |a| = VP$$

Dạng 6. Rút gọn biểu thức và một số bài toán liên quan

Phương pháp giải

Rút gọn biểu thức chứa biến. Sử dụng kết quả rút gọn đề:

- Tính giá trị của biểu thức khi biết giá trị của biến.
- Giải phương trình, bất phương trình (so sánh biểu thức với một số).
- Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của một biểu thức.
- Tìm giá trị nguyên của biểu thức ứng với các giá trị nguyên của biến.

Bài 1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

a) Rút gọn P .

b) Tìm các giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x} + 5$.

Lời giải

a) Ta có $P = \left(\frac{x-2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

b) Theo ý 1, ta có $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \Rightarrow 2P = 2\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 2 = 2x + 5\sqrt{x}$

$$\Leftrightarrow 2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 2)(2\sqrt{x} - 1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Vậy với $x = \frac{1}{4}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 2. Cho biểu thức $A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 4$

- a) Rút gọn biểu thức A .
 b) Tìm x sao cho A nhận một giá trị nguyên.

Lời giải

a) Với $x > 0$ và $x \neq 4$, biểu thức A có nghĩa, ta có

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}} = \frac{2(2\sqrt{x}+1) + 3(\sqrt{x}-2) - (5\sqrt{x}-7)}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} : \frac{2\sqrt{x}+3}{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}+3} = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

Vậy với $x > 0$, $x \neq 4$ nên $A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} > 0$.

b) Ta có: $\forall x > 0, x \neq 4$ nên $A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} > 0$.

$$A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2(2\sqrt{x}+1)} < \frac{5}{2}, x > 0, x \neq 4 \Rightarrow 0 < A < \frac{5}{2}.$$

Kết hợp với A nhận giá trị là một số nguyên thì $A \in \{1; 2\}$.

$$A = 1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$A = 2 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 4\sqrt{x} + 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy với $x = \frac{1}{9}$ thì A nhận giá trị nguyên.

Bài 3. Cho biểu thức $A = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$.

- a) Tìm điều kiện để A có nghĩa.
 b) Khi A có nghĩa, chứng tỏ giá trị của A không phụ thuộc vào a .

Lời giải

a) Biểu thức A có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ a \neq b. \end{cases}$

b) Ta có:
$$A = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} = \frac{a + 2\sqrt{ab} + b - 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{ab}}$$

$$= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{1} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{a} - \sqrt{b} = -2\sqrt{b}.$$

Vậy giá trị của A không phụ thuộc vào giá trị của a mà phụ thuộc vào giá trị của b .

Bài 4. Cho biểu thức $A = \frac{x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

- a) Tìm x để A có nghĩa.
- b) Rút gọn biểu thức A .
- c) Với giá trị nào của x thì $A < 1$?

Lời giải

a) A có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}-1 \neq 0 \\ \sqrt{x}+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

b) Ta có $A = \frac{x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}-1 + \sqrt{x} = 2\sqrt{x}-1$.

c) Ta có $A < 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}-1 < 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$.

Vậy với $0 \leq x < 1$ thì $A < 1$.

Bài 5.

a) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$. Tính giá trị của biểu thức A với $x = 36$.

b) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{4}{\sqrt{x}-4} \right) : \frac{x+16}{\sqrt{x}+2}$ (với $x \geq 0, x \neq 16$).

c) Với các biểu thức A và B nói trên, hãy tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức $B(A-1)$ là số nguyên.

Lời giải

a) Với $x = 36$, ta có $A = \frac{\sqrt{36}+4}{\sqrt{36}+2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$.

b) Với $x \geq 0, x \neq 16$ ta có

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)}{x-16} + \frac{4(\sqrt{x}+4)}{x-16} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x+16} = \frac{(x+16)(\sqrt{x}+2)}{(x-16)(x+16)} = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16}$$

c) Biểu thức $B(A-1) = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}+4-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \right) = \frac{2}{x-16}$.

$B(A-1)$ nguyên khi $(x-16) \in \pm(2) \Leftrightarrow (x-16) \in \{-2; -1; 1; 2\} \Leftrightarrow x \in \{14; 15; 17; 18\}$.

Kết hợp điều kiện, để $B(A-1)$ nguyên thì $x \in \{14; 15; 17; 18\}$.

Bài 6. Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{3\sqrt{a}}{a + \sqrt{ab} + b} - \frac{3a}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right) : \frac{(a-1)(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{2a + 2\sqrt{ab} + 2b}.$$

a) Rút gọn P .

b) Tìm những giá trị nguyên của a để P có giá trị nguyên.

Lời giải

a) ĐKXD: $a, b > 0; a \neq b; a \neq 1$

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{3\sqrt{a}}{a + \sqrt{ab} + b} - \frac{3a}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b)} + \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right) \cdot \frac{2(a + \sqrt{ab} + b)}{(a-1)(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \\ &= \frac{3a - 3\sqrt{ab} - 3a + a + \sqrt{ab} + b}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b)} \cdot \frac{2(a + \sqrt{ab} + b)}{(a-1)(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b)} \cdot \frac{2(a + \sqrt{ab} + b)}{(a-1)(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{2}{a-1} \end{aligned}$$

b) Để P nhận giá trị nguyên thì $a - 1 \in U(2) \Leftrightarrow a - 1 \in \{-2; -1; 1; 2\} \Leftrightarrow a \in \{-1; 0; 2; 3\}$

Vậy với $a \in \{-1; 0; 2; 3\}$ thì P có giá trị nguyên.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Kiến thức cần nhớ

I. Căn bậc hai và căn bậc ba của số thực

1) Căn bậc hai.

- Căn bậc hai của số thực a không âm là số thực x sao cho $x^2 = a$.
- Số âm không có căn bậc hai.
- Số 0 có một căn bậc hai là 0.
- Số dương a có đúng hai căn bậc hai đối nhau là \sqrt{a} và $-\sqrt{a}$.

2) Căn bậc ba

- Căn bậc ba của số thực a là số thực x sao cho $x^3 = a$.
- Căn bậc ba của số thực a kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$.

3) Một số phép tính về căn bậc hai của số thực.

a) Căn bậc hai của một bình phương

Với mọi số thực a , ta có $\sqrt{a^2} = |a|$

b) Căn bậc hai của một tích

Với 2 số a, b không âm, ta có $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

c) Căn bậc hai của một thương

Với $a \geq 0; b > 0$, ta có $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

d) Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

Nếu a là một số và b là một số không âm thì $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a| \cdot \sqrt{b}$.

e) Đưa thừa số vào trong dấu căn

- Nếu a và b là hai số không âm thì $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$
- Nếu a là số âm và b không âm thì $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$.

II. Căn thức bậc hai và căn bậc ba của biểu thức đại số

1. Căn thức bậc hai

- Căn thức bậc hai là biểu thức có dạng \sqrt{A} trong đó A là một biểu thức đại số. Khi đó: A được gọi là biểu thức lấy căn hoặc biểu thức dưới dấu căn.
- \sqrt{A} xác định khi A lấy giá trị không âm và hay $A \geq 0$ là điều kiện xác định (điều kiện có nghĩa) của \sqrt{A} .

2. Căn thức bậc ba

Căn thức bậc ba là biểu thức có dạng $\sqrt[3]{A}$ trong đó A là một biểu thức đại số. Khi đó: A được gọi là biểu thức lấy căn hoặc biểu thức dưới dấu căn.

Câu 18 : Biểu thức $\frac{\sqrt{3}-2}{2+\sqrt{3}}$ viết dưới dạng $a+b\sqrt{c}$ với a,b,c là các số nguyên. Giá trị biểu thức $a-2b+c$ bằng.

- A. -12 B. $-7+4\sqrt{3}$ C. $-3\sqrt{3}$ D. 2

III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 19: Cho a,b,c là các số thực thoả mãn $a+b+c-3=2(\sqrt{a-3}+\sqrt{b-2}+\sqrt{c-1})$. Khi đó giá trị của biểu thức $S=2a+b-c$ bằng.

- A. 11 B. 13 C. 12 D. 9

Câu 20: Nếu $\sqrt{x+10}-\sqrt{x-10}=4$ thì $\sqrt{x+10}+\sqrt{x-10}$ bằng

- A. -4 B. 4 C. 5 D. -5.

C. CÁC DẠNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Tìm điều kiện để biểu thức xác định

Phương pháp giải

Với A, B là các biểu thức, ta có

- \sqrt{A} có nghĩa khi và chỉ khi $A \geq 0$.
- $\frac{A}{B}$ có nghĩa khi và chỉ khi $B \neq 0$.
- $\frac{A}{\sqrt{B}}$ có nghĩa khi và chỉ khi $B > 0$.

II. Bài tập:

Bài 1: Tìm điều kiện có nghĩa của các biểu thức:

- a) $\sqrt{2x}$ b) $\sqrt{-5x}$ c) $\sqrt{x-1}$ d) $\sqrt{2-x}$

Bài 2: Tìm điều kiện có nghĩa của các biểu thức:

- a) $\sqrt{\frac{1}{x+2}}$ b) $\sqrt{\frac{-x+4}{2}}$ c) $\sqrt{\frac{-1}{x-5}}$ d) $\sqrt{\frac{1}{8-2x}}$

Bài 3: Tìm điều kiện có nghĩa của các biểu thức:

- a) $\sqrt{\frac{1}{x^2}}$ b) $\sqrt{\frac{-3}{x^2+1}}$ c) $\sqrt{\frac{3x}{x^2+5}}$ d) $\sqrt{\frac{x^2+6}{x-8}}$

Bài 4: Tìm điều kiện có nghĩa của các biểu thức:

- a) $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$ b) $\sqrt{-x}-x\sqrt{-2-x}$ c) $\sqrt{x-5}+\sqrt{7-x}$ d) $\frac{1}{\sqrt{3x+1}}-\frac{x}{\sqrt{8-2x}}$

Bài 5: Tìm điều kiện có nghĩa của các biểu thức:

a) $\sqrt{x(1+x)}$

b) $\sqrt{(x-2)(5-x)}$

c) $\sqrt{\frac{1-x}{6-2x}}$

d) $\sqrt{\frac{5x-10}{2x-16}}$

Bài 6: Tìm điều kiện có nghĩa của các biểu thức:

a) $\sqrt{x} + \frac{3x}{\sqrt{(x-2)^2}}$

b) $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{\frac{-1}{3-x}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{4}{6+2x}} + \sqrt{(x-1)^2}$

d) $\sqrt{\frac{x+3}{-3}} - \frac{1}{\sqrt{(x+9)^2}}$

Bài 7: Tìm điều kiện có nghĩa của các biểu thức:

a) $\frac{1}{\sqrt{x+2024}}$

b) $\frac{x}{\sqrt{x-6}+102}$

c) $\frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{2024-x}+2024}$

d) $\frac{\sqrt{2x-18}}{\sqrt{x-8}+18}$

Bài 8: Tìm điều kiện có nghĩa của các biểu thức:

a) $\frac{1}{\sqrt{x-10}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{x-2}-3}$

c) $\frac{2x}{\sqrt{9-x}-1}$

d) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{9-3x}-3}$

Bài 9: Tìm điều kiện có nghĩa của các biểu thức:

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$

b) $\frac{2x+1}{\sqrt[3]{x-2}}$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}+1}$

d) $\frac{-2}{\sqrt[3]{2x-2}}$

Bài 10: Tìm điều kiện có nghĩa của các biểu thức:

a) $\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}$

b) $\sqrt{x-6\sqrt{x}+9}$

c) $\sqrt{4x-4\sqrt{x}+1}$

d) $\sqrt{9x+6\sqrt{x}+1}$

Dạng 2: Rút gọn biểu thức dạng số. Tính giá trị của biểu thức.

Phương pháp giải

- **Bước 1:** Tìm đkxd (nếu cần).
- **Bước 2:** Áp dụng các công thức biến đổi căn thức, các quy tắc thực hiện phép tính về phân thức để rút gọn.
- **Bước 3:** Kết luận.

II. Bài tập:

Bài 1. Thực hiện các phép tính sau:

a) $-0,8\sqrt{(-0,125)^2}$

b) $\sqrt{(-2)^6}$

c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$

d) $\frac{1}{2}\sqrt{196}$

e) $\sqrt[3]{-64}$

Bài 2. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}$

b) $\sqrt{(5-2\sqrt{6})^2} - \sqrt{(5+2\sqrt{6})^2}$

c) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$

d) $\sqrt{(3-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(3+\sqrt{5})^2}$

Bài 3. Thực hiện các phép tính sau:

a) $2\sqrt{5} - \sqrt{125} - \sqrt{80} + \sqrt{605}$

b) $8\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + \sqrt{192}$

c) $\sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{75} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3^3}$

d) $2\sqrt{6} + \sqrt{54} - \sqrt{96}$

Bài 4. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48}$

b) $2\sqrt{3}(\sqrt{27} + 2\sqrt{48} - \sqrt{75})$

c) $(2\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + 4\sqrt{6}$

d) $(3\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - 6\sqrt{15}$

Bài 5. Rút gọn biểu thức:

a) $\frac{5 + \sqrt{10}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} + \frac{8}{1 - \sqrt{5}}$

b) $\frac{2}{2 + \sqrt{3}} + \frac{2}{2 - \sqrt{3}}$

c) $\frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$

d) $\frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{\sqrt{2} - 1} + \frac{\sqrt{6} - 2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

Bài 6. Rút gọn biểu thức:

a) $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$

b) $\sqrt{\frac{3}{20}} + \sqrt{\frac{1}{60}} - 2\sqrt{\frac{1}{15}}$

c) $\frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$

d) $\sqrt{\frac{1}{10}} + \sqrt{\frac{2}{5}} - \sqrt{90}$

Bài 7. Rút gọn các biểu thức:

a) $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{6}}{\sqrt{35} - \sqrt{14}}$

b) $\frac{\sqrt{10} + \sqrt{15}}{\sqrt{8} + \sqrt{12}}$

c) $\frac{\sqrt{6} - 2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

d) $\frac{\sqrt{24} - \sqrt{3}}{\sqrt{40} - \sqrt{5}}$

Bài 8. Rút gọn các biểu thức:

a) $E = \sqrt{3 - \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}$

b) $F = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$

c) $G = \sqrt{14 - 8\sqrt{3}} - \sqrt{24 - 12\sqrt{3}}$

d) $H = \sqrt{8\sqrt{3}} - 2\sqrt{25\sqrt{12}} + 4\sqrt{\sqrt{192}}$

e) $I = \sqrt{11 - 2\sqrt{30}} : \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right)$

f) $J = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$

g) $K = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$

h) $L = \frac{2\sqrt{8} - \sqrt{12}}{\sqrt{18} - \sqrt{48}} - \frac{\sqrt{5} + \sqrt{27}}{\sqrt{30} + \sqrt{162}}$

Bài 9: Rút gọn

a) $M = (4 + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$

b) $N = \frac{\sqrt{8 - \sqrt{15}}}{\sqrt{30} - \sqrt{2}}$

Dạng 3: Rút gọn biểu thức chứa căn.**Phương pháp giải****Bước 1: Tìm điều kiện xác định của biểu thức**

- Nếu biểu thức chứa phân thức thì mẫu số phải khác không
- Nếu biểu thức chứa căn bậc chẵn thì biểu thức dưới dấu căn phải lớn hơn hoặc bằng 0

- **Chú ý:** Các bài toán thường gặp có sự kết hợp của cả phân thức và căn bậc chẵn. Khi đó chúng ta giải riêng lẻ từng phần, sau đó kết hợp kết quả lại với nhau để chọn ra kết luận cuối cùng

Bước 2: Phân tích tử số và mẫu số thành nhân tử rồi rút gọn nếu có thể

- **Chú ý:** Các dạng đa thức, hằng đẳng thức thường gặp để phân tích đa thức thành nhân tử

$$\diamond x\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x})^3 + 1 = (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)$$

$$\diamond x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = (\sqrt{x})^3 + (\sqrt{y})^3 = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + \sqrt{y})$$

$$\diamond x\sqrt{x} - 1 = (\sqrt{x})^3 - 1 = (\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)$$

$$\diamond x\sqrt{x} - y\sqrt{y} = (\sqrt{x})^3 - (\sqrt{y})^3 = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + \sqrt{y})$$

$$\diamond x - \sqrt{xy} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \text{ và } x + \sqrt{xy} = \sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

$$\diamond x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) \text{ và } x + \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)$$

$$\diamond x\sqrt{y} - y\sqrt{x} = \sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})$$

$$\diamond (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) = x - 1$$

$$\diamond 1 - x = 1 - (\sqrt{x})^2 = (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x}) = -(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$$

$$\diamond 1 - x = \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1-x} \text{ (} x \leq 1 \text{)} \text{ và } 1 + x = \sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1+x} \text{ (} x \geq -1 \text{)}$$

$$\diamond x^2 + \sqrt{x} = \sqrt{x}(x\sqrt{x} + 1) = \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)$$

$$\diamond x + 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} + 1)^2 \text{ và } x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} - 1)^2$$

Bước 3: Quy đồng

- **Tìm mẫu số chung:** Là tích của nhân tử chung và riêng của mỗi nhân tử lấy với số mũ lớn nhất
- **Nhân tử phụ:** Lấy mẫu chung cho từng mẫu để được nhân tử phụ tương ứng
- Nhân nhân tử phụ với từng tử và giữ nguyên mẫu chung

Bước 4: Phá ngoặc bằng cách nhân khai triển các hạng tử với nhau hoặc khi triển hằng đẳng thức**Bước 5: Thu gọn bằng cách cộng, trừ các hạng tử đồng dạng****Bước 6: Phân tích tử thành nhân tử****Bước 7: Rút gọn lần cuối.**

II. Bài tập

Bài 1: Rút gọn biểu thức $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{7}{x-4} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} - 1 \right)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$

Bài 2: Cho biểu thức $M = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{2}{x} - \frac{2-x}{x\sqrt{x}+x} \right)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

a) Rút gọn M

b) Tìm x để $M = \frac{-1}{2}$

Bài 3: Rút gọn biểu thức $N = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{4\sqrt{x}}{3}$ với $x \geq 0$

Bài 4: Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - 1 \right)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

Bài 5: Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x}+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$

Bài 6: Rút gọn biểu thức $M = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$ ($x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$)

Bài 7: Rút gọn biểu thức $Q = \left(\frac{1-x\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \right)^2$

Bài 8: Rút gọn biểu thức $A = \frac{15\sqrt{x}-19}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$

Bài 9: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3\sqrt{x}+1}{x-1}$ ($x \geq 0; x \neq 1$)

Dạng 4: Giải phương trình

Phương pháp giải

- Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa: \sqrt{A} có nghĩa khi $A \geq 0$
- Đưa thừa số ra ngoài dấu căn: $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$ ($B \geq 0$) = $\begin{cases} A\sqrt{B} & (A \geq 0; B \geq 0) \\ -A\sqrt{B} & (A < 0; B \geq 0) \end{cases}$
- Rút gọn các căn thức đồng dạng
- Biến đổi phương trình về dạng: $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow A = B^2$ ($B \geq 0$)

II. Bài tập**Bài 1.** Giải các phương trình sau

a) $5\sqrt{3x} - 4\sqrt{27x} - \sqrt{12x} - \sqrt{75x} = -28$

b) $15\sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{25x} = 110$

c) $\sqrt{x-1} + 4\sqrt{x-1} + 6\sqrt{x-1} - 7\sqrt{x-1} = 12$

d) $-3\sqrt{x+2} - 4\sqrt{4x+8} + \sqrt{9x+18} = -40$

Bài 2. Giải các phương trình sau: $\sqrt{36x-72} - 15\sqrt{\frac{x-2}{25}} = 2(5 + \sqrt{x-2})$ **Bài 3.** Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{18x+9} - \sqrt{8x+4} + \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} = 4$

b) $\frac{3}{2}\sqrt{4x-8} - 9\sqrt{\frac{x-2}{81}} = 6$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{2}{3}\sqrt{9u-9} - \frac{1}{4}\sqrt{16u-16} + 27\sqrt{\frac{u-1}{81}} = 4$

b) $\sqrt{4u-20} + 3\sqrt{\frac{u-5}{9}} - \frac{1}{3}\sqrt{9u-45} = 4$

Bài 5. Giải các phương trình sau: $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-1} + 2 = 0$ ($x \geq -1; x \neq 0$)**Bài 6.** Giải các phương trình sau: $\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 1$ ($x \geq 0$)**Bài 7.** Giải các phương trình sau: $\sqrt{x+1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{z-1} = \frac{1}{2}(x+y+z)$ **Bài 8.** Giải các phương trình sau: $\sqrt{x+1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{z-1} = \frac{1}{2}(x+y+z)$ **Bài 9.** Giải các phương trình sau: $25\sqrt{\frac{a-3}{25}} - 7\sqrt{\frac{4a-12}{9}} - 7\sqrt{a^2-9} + 18\sqrt{\frac{9a^2-81}{81}} = 0$ **Bài 10.** Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x^2} = 5$

b) $\sqrt{25x^2} = 10$

c) $\sqrt{9x^2} = 2x+1$

d) $\sqrt{x^2+6x+9} = 3x-1$

Bài 11: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x-4\sqrt{x}+4} = 5$

b) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{x-1}-1.$

D. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	D	B	A	D	B	C	D	C	B	A
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	B	C	C	A	B	B	D	A	D	C

Câu 1: Căn bậc hai của 4 là

- A. 2 B. -2 C. 16 và -16 D. 2 và -2

Lời giải

Vì $2^2 = 4; (-2)^2 = 4$ nên căn bậc hai của 4 là 2 và -2.

Câu 2: Nếu $\sqrt{x} = 3$ thì x bằng

- A. 81 B. 9 C. 6 D. 3

Lời giải

ĐKXD: $x \geq 0$

Vì $\sqrt{x} = 3$ nên $x = 3^2 = 9$ (TM)

Câu 3: Điều kiện xác định của $\sqrt{2-x}$ là

- A. $x \leq 2$ B. $x \geq 2$ C. $x \leq -2$ D. $x \geq -2$

Lời giải

Điều kiện xác định của $\sqrt{2-x}$ là $2-x \geq 0$

$$-x \geq -2$$

$$x \leq 2$$

Câu 4: Điều kiện xác định của biểu thức $\sqrt[3]{\frac{1}{2-x}}$ là

- A. $x \neq 8$ B. $x \neq 0$ C. $x \neq \pm 2$ D. $x \neq 2$

Lời giải

Điều kiện xác định của biểu thức $\sqrt[3]{\frac{1}{2-x}}$ là $2-x \neq 0$

Suy ra $x \neq 2$

Câu 5: Thực hiện phép tính $\sqrt{4.3} - \sqrt{9.3} + \sqrt{36.3}$ được kết quả là

- A. $6\sqrt{3}$ B. $5\sqrt{3}$ C. $11\sqrt{3}$ D. $-5\sqrt{3}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \sqrt{4.3} - \sqrt{9.3} + \sqrt{36.3} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

Câu 6: Giá trị của biểu thức $\sqrt[3]{9-x^2}$ khi $x=1$ là

- A. -2 B. 4 C. 2 D. -4

Lời giải

Thay $x=1$ vào $\sqrt[3]{9-x^2}$ ta được:

$$\sqrt[3]{9-x^2} = \sqrt[3]{9-1} = 2$$

Câu 7: Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng?

- A. Số âm không có căn bậc ba. B. Số âm có đúng một căn bậc hai.
C. Căn bậc hai của số dương là số dương. D. Căn bậc ba của số âm là số âm.

Lời giải

Số âm có đúng một căn bậc ba là số âm

Câu 8: Kết quả của phép tính $\sqrt{\frac{64}{16}} - \sqrt{9}$ là

- A. 1 B. 4 C. -1 D. -4

Lời giải

$$\sqrt{\frac{64}{16}} - \sqrt{9} = \sqrt{4} - \sqrt{9} = 2 - 3 = -1$$

Câu 9: Rút gọn biểu thức $\sqrt{40^2 - 24^2}$ được kết quả là

- A. 16 B. 32 C. 48 D. 12

Lời giải

$$\sqrt{40^2 - 24^2} = \sqrt{(40-24)(40+24)} = \sqrt{16.64} = 4.8 = 32$$

Câu 10: Kết quả rút gọn của biểu thức $\sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{32}$ là

- A. $3\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $5\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{2}$

Lời giải

$$\sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{32} = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Câu 11: Giá trị của x thỏa mãn $\sqrt{(2x-1)^2} = 3$ là

- A. $x=2$ B. $x=2; x=-1$ C. $x=3$ D. $x=-1$

Lời giải

$$\sqrt{(2x-1)^2} = 3$$

$$|2x-1|=3$$

$$\text{TH1: } 2x-1=3$$

$$2x=4$$

$$x=2$$

$$\text{TH2: } 2x-1=-3$$

$$2x=-2$$

$$x=-1$$

Câu 12: So sánh $2\sqrt{3}$ và $3\sqrt{2}$ được kết quả là

A. $2\sqrt{3}=3\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{3}>3\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{3}\geq 3\sqrt{2}$

Lời giải

Ta có: $2\sqrt{3}=\sqrt{12}$ và $3\sqrt{2}=\sqrt{18}$

Vì $12<18$ nên $\sqrt{12}<\sqrt{18}$

Vậy $2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$

Câu 13: Cho $a < b$, biểu thức $\frac{1}{a-b}\sqrt{4(a-b)^2}$ có kết quả rút gọn là

A. 4

B. 2

C. -2

D. $2(a-b)$

Lời giải

Ta có $\frac{1}{a-b}\sqrt{4(a-b)^2}=\frac{1}{a-b}\cdot 2|a-b|=\frac{-2}{a-b}(a-b)=-2$ (vì $a < b$)

Câu 14: Biểu thức $\sqrt{\frac{-1}{x^2-1}}$ xác định khi

A. $-1 < x < 1$

B. $x > 1$

C. $x > 1$ hoặc $x < -1$

D. $x < -1$

Lời giải

Ta có điều kiện xác định của biểu thức $\sqrt{\frac{-1}{x^2-1}}$ là

$$\begin{cases} \frac{-1}{x^2-1} \geq 0 \\ x^2-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2-1 < 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

Câu 15: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\sqrt{x^2-4x+6}$ bằng

A. 0

B. $\sqrt{2}$

C. 2

D. $\sqrt{5}$

Lời giải

Ta có $A=\sqrt{x^2-4x+6}=\sqrt{x^2-2\cdot x\cdot 2+4+2}=\sqrt{(x-2)^2+2}\geq\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{matrix} x-2=0 \\ x=2 \end{matrix}$.

Vậy GTNN của $A = \sqrt{2}$ khi $x = 2$.

Câu 16 : Khử mẫu của biểu thức $-xy\sqrt{\frac{5}{xy}}$ với $x < 0; y < 0$ ta được :

- A. $\sqrt{5xy}$ B. $-\sqrt{5xy}$ C. $\sqrt{-5xy}$ D. $\sqrt{5}$

Lời giải

Ta có $-xy\sqrt{\frac{5}{xy}} = -\sqrt{\frac{5}{xy}(xy)^2} = -\sqrt{5xy}$.

Câu 17: Có bao nhiêu số nguyên dương x để biểu thức $\frac{\sqrt{18-4x}+1}{x-1}$ xác định:

- A. 4 B. 5 C. 2 D. 3

Lời giải

Ta có $\frac{\sqrt{18-4x}+1}{x-1}$ xác định khi $\begin{cases} 18-4x \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{9}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Mà x là số nguyên dương nên $x \in \{2; 3; 4\}$.

Vậy có 3 số nguyên dương x thoả mãn bài toán.

Câu 18 : Biểu thức $\frac{\sqrt{3}-2}{2+\sqrt{3}}$ viết dưới dạng $a+b\sqrt{c}$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị biểu thức $a-2b+c$ bằng.

- A. -12 B. $-7+4\sqrt{3}$ C. $-3\sqrt{3}$ D. 2

Lời giải

Ta có $\frac{\sqrt{3}-2}{2+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-2)(2-\sqrt{3})}{4-3} = -7+4\sqrt{3}$

Suy ra $a = -7; b = 5; c = 3$ vậy $a-2b+c = -7-2.4+3 = -12$.

III – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 19: Cho a, b, c là các số thực thoả mãn $a+b+c-3 = 2(\sqrt{a-3} + \sqrt{b-2} + \sqrt{c-1})$. Khi đó giá trị của biểu thức $S = 2a+b-c$ bằng.

- A. 11 B. 13 C. 12 D. 9

Lời giải

Ta có

$$a+b+c-3=2(\sqrt{a-3}+\sqrt{b-2}+\sqrt{c-1})$$

$$a+b+c-3-2\sqrt{a-3}-2\sqrt{b-2}-2\sqrt{c-1}=0$$

$$(a-3-2\sqrt{a-3}+1)+(b-2-2\sqrt{b-2}+1)+(c-1-2\sqrt{c-1}+1)=0$$

$$(\sqrt{a-3}-1)^2+(\sqrt{b-2}-1)^2+(\sqrt{c-1}-1)^2=0$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \sqrt{a-3}-1=0 \\ \sqrt{b-2}-1=0 \\ \sqrt{c-1}-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{a-3}=1 \\ \sqrt{b-2}=1 \\ \sqrt{c-1}=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a=4 \\ b=3 \\ c=2 \end{cases}$$

Vậy giá trị biểu thức $S=2a+b-c=2.4+3-2=9$

Câu 20: Nếu $\sqrt{x+10}-\sqrt{x-10}=4$ thì $\sqrt{x+10}+\sqrt{x-10}$ bằng

A. -4

B. 4

C. 5

D. -5

Lời giải

Ta có $(\sqrt{x+10}-\sqrt{x-10}).(\sqrt{x+10}+\sqrt{x-10})=x+10-x+10=20$

Suy ra $\sqrt{x+10}+\sqrt{x-10}=20:4=5$.

E.HƯỚNG DẪN GIẢI TỰ LUẬN

Dạng 1. Tìm điều kiện xác định

Bài 1: Tìm điều kiện xác định

a) $\sqrt{2x}$

b) $\sqrt{-5x}$

c) $\sqrt{x-1}$

d) $\sqrt{2-x}$

Đáp án:

a) $x \geq 0$

b) $x \leq 0$

c) $x \geq 1$

d) $x \leq 2$.

Bài 2: Tìm điều kiện xác định

a) $\sqrt{\frac{1}{x+2}}$

b) $\sqrt{\frac{-x+4}{2}}$

c) $\sqrt{\frac{-1}{x-5}}$

d) $\sqrt{\frac{1}{8-2x}}$

Đáp án

a) $x \geq -2$

b) $x \leq 4$

c) $x \leq 5$

d) $x \leq 4$

Bài 3: Tìm điều kiện xác định

a) $\sqrt{\frac{1}{x^2}}$

b) $\sqrt{\frac{3}{x^2+1}}$

c) $\sqrt{\frac{3x}{x^2+5}}$

d) $\sqrt{\frac{x^2+6}{x-8}}$

Đáp án:

- a) $x \neq 0$ b) $x \in \mathbb{R}$ c) $x \geq 0$ d) $x \geq 8$

Bài 4: Tìm điều kiện xác định

- a) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ b) $\sqrt{-x} - x\sqrt{-2-x}$ c) $\sqrt{x-5} + \sqrt{7-x}$ d) $\frac{1}{\sqrt{3x+1}} - \frac{x}{\sqrt{8-2x}}$

Đáp án:

- a) $x \geq 0$ b) $x \leq -2$ c) $5 \leq x \leq 7$ d) $\frac{-1}{3} \leq x \leq 4$

Bài 5:

- a) $\sqrt{x(1+x)}$ b) $\sqrt{(x-2)(5-x)}$ c) $\sqrt{\frac{1-x}{6-2x}}$ d) $\sqrt{\frac{5x-10}{2x-16}}$

Đáp án: Tìm điều kiện xác định

- a) $x \geq 0$ hoặc $x \leq -1$ b) $2 \leq x \leq 5$ c) $x \geq 3$ hoặc $x \leq 1$ d) $x \geq 8$ hoặc $x \leq 2$

Bài 6: Tìm điều kiện xác định

- a) $\sqrt{x} + \frac{3x}{\sqrt{(x-2)^2}}$ b) $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{\frac{-1}{3-x}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{4}{6+2x}} + \sqrt{(x-1)^2}$ d) $\sqrt{\frac{x+3}{-3}} - \frac{1}{\sqrt{(x+9)^2}}$

Đáp án:

- a) $x \geq 0$ và $x \neq 2$ b) $x \geq 3$ c) $x \neq -3$ d) $x \leq -3$ và $x \neq -9$

Bài 7:

- a) $\frac{1}{\sqrt{x} + 2024}$ b) $\frac{x}{\sqrt{x-6} + 102}$ c) $\frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{2024-x} + 2024}$ d) $\frac{\sqrt{2x-18}}{\sqrt{x-8} + 18}$

Đáp án: Tìm điều kiện xác định

- a) $x \geq 0$ b) $x \geq 6$ c) $0 \leq x \leq 2024$ d) $x \geq 9$

Bài 8: Tìm điều kiện xác định

- a) $\frac{1}{\sqrt{x}-10}$ b) $\frac{1}{\sqrt{x-2}-3}$ c) $\frac{2x}{\sqrt{9-x}-1}$ d) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{9-3x}-3}$

Đáp án:

- a) $x \geq 0$ và $x \neq 100$ b) $x \geq 2$ và $x \neq 11$

c) $x \leq 9$ và $x \neq 8$

d) $0 < x \leq 3$

Bài 9: Tìm điều kiện xác định

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$

b) $\frac{2x+1}{\sqrt[3]{x-2}}$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}+1}$

d) $\frac{-2}{\sqrt[3]{2x-2}}$

Đáp án:

a) $x \neq -1$

b) $x \neq 8$

c) $x \neq 0$

d) $x \neq 4$

Bài 10: Tìm điều kiện xác định

a) $\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}$

b) $\sqrt{x-6\sqrt{x}+9}$

c) $\sqrt{4x-4\sqrt{x}+1}$

d) $\sqrt{9x+6\sqrt{x}+1}$

Đáp án:

a) $x \geq 0$

b) $x \geq 0$

c) $x \geq 0$

d) $x \geq 0$

Dạng 2. Thực hiện các phép tính sau

Bài 1. Thực hiện các phép tính sau:

a) $-0,8\sqrt{(-0,125)^2}$

b) $\sqrt{(-2)^6}$

c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$

d) $\frac{1}{2}\sqrt{196}$

e) $\sqrt[3]{-64}$

Hướng dẫn giải:

a) $-0,8\sqrt{(-0,125)^2} = -0,8 \cdot 0,125 = -0,1$

b) $\sqrt{(-2)^6} = |-2|^3 = 2^3 = 8$

c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = |\sqrt{3}-2| = 2-\sqrt{3}$ vì $\sqrt{3}-2 < 0$

d) $\frac{1}{2}\sqrt{196} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{14^2} = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7$

e) $\sqrt[3]{-64} = -4$

Bài 2. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}$

b) $\sqrt{(5-2\sqrt{6})^2} - \sqrt{(5+2\sqrt{6})^2}$

c) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$

d) $\sqrt{(3-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(3+\sqrt{5})^2}$

Hướng dẫn giải:

a) $\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}$
 $= |3-2\sqrt{2}| + |3+2\sqrt{2}|$

$$= 3 - 2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2} \text{ (Vì } 3 > 2\sqrt{2} \text{ nên } 3 - 2\sqrt{2} > 0)$$

$$= 6$$

$$\text{b) } \sqrt{(5-2\sqrt{6})^2} - \sqrt{(5+2\sqrt{6})^2}$$

$$= |5-2\sqrt{6}| - |5+2\sqrt{6}|$$

$$= 5 - 2\sqrt{6} - 5 - 2\sqrt{6} \text{ (Vì } 5 > 2\sqrt{6} \text{ nên } 5 - 2\sqrt{6} > 0)$$

$$= -4\sqrt{6}$$

$$\text{c) } \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$$

$$= |2-\sqrt{3}| + |1-\sqrt{3}|$$

$$= 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 \text{ (Vì } 2 > \sqrt{3} \text{ nên } 2 - \sqrt{3} > 0, 1 < \sqrt{3} \text{ nên } 1 - \sqrt{3} < 0)$$

$$= 1$$

$$\text{d) } \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(3+\sqrt{5})^2}$$

$$= |3-\sqrt{5}| - |3+\sqrt{5}|$$

$$= 3 - \sqrt{5} - 3 - \sqrt{5} \text{ (Vì } 3 > \sqrt{5} \text{ nên } 3 - \sqrt{5} > 0)$$

$$= 2\sqrt{5}$$

Bài 3. Thực hiện các phép tính sau:

$$\text{a) } 2\sqrt{5} - \sqrt{125} - \sqrt{80} + \sqrt{605}$$

$$\text{b) } 8\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + \sqrt{192}$$

$$\text{c) } \sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{75} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3^3}$$

$$\text{d) } 2\sqrt{6} + \sqrt{54} - \sqrt{96}$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{a) } 2\sqrt{5} - \sqrt{125} - \sqrt{80} + \sqrt{605}$$

$$= 2\sqrt{5} - \sqrt{5^2 \cdot 5} - \sqrt{4^2 \cdot 5} + \sqrt{11^2 \cdot 5}$$

$$= 2\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 11\sqrt{5}$$

$$= 4\sqrt{5}$$

$$\text{b) } 8\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + \sqrt{192}$$

$$= 8\sqrt{3} - 2\sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{64 \cdot 3}$$

$$= 8\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$$

$$= 12\sqrt{3}$$

$$\text{c) } \sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{75} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3^3}$$

$$= \sqrt{3^2 \cdot 3} + \sqrt{4^2 \cdot 3} - \sqrt{5^2 \cdot 3} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3^2 \cdot 3}$$

$$\text{d) } 2\sqrt{6} + \sqrt{54} - \sqrt{96}$$

$$= 2\sqrt{6} + \sqrt{9 \cdot 6} - \sqrt{16 \cdot 6}$$

$$= 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 4\sqrt{6}$$

$$= \sqrt{6}$$

$$= 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} - \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

Bài 4. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48}$

b) $2\sqrt{3}(\sqrt{27} + 2\sqrt{48} - \sqrt{75})$

c) $(2\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + 4\sqrt{6}$

d) $(3\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - 6\sqrt{15}$

Hướng dẫn giải:

a) $\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48}$

$$= \sqrt{2^2 \cdot 3} + 2\sqrt{3^2 \cdot 3} + 3\sqrt{5^2 \cdot 3} - 9\sqrt{4^2 \cdot 3}$$

$$= 2\sqrt{3} + 2 \cdot 3\sqrt{3} + 3 \cdot 5\sqrt{3} - 9 \cdot 4\sqrt{3}$$

$$= -13\sqrt{3}$$

b) $2\sqrt{3}(\sqrt{27} + 2\sqrt{48} - \sqrt{75})$

$$= 2\sqrt{3}(\sqrt{3^2 \cdot 3} + 2\sqrt{4^2 \cdot 3} - \sqrt{5^2 \cdot 3})$$

$$= 2\sqrt{3}(3\sqrt{3} + 2 \cdot 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3})$$

$$= 2\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3}$$

$$= 36$$

c) $(2\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + 4\sqrt{6}$

$$= (2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{6}$$

$$= 8 - 4\sqrt{6} + 3 + 4\sqrt{6}$$

$$= 11$$

d) $(3\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - 6\sqrt{15}$

$$= (3\sqrt{3})^2 + 2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} + 5 - 6\sqrt{15}$$

$$= 27 + 6\sqrt{15} + 5 - 6\sqrt{15}$$

$$= 32$$

Bài 5. Rút gọn:

a) $\frac{5 + \sqrt{10}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} + \frac{8}{1 - \sqrt{5}}$

b) $\frac{2}{2 + \sqrt{3}} + \frac{2}{2 - \sqrt{3}}$

c) $\frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$

d) $\frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{\sqrt{2} - 1} + \frac{\sqrt{6} - 2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

Hướng dẫn giải:

a) $\frac{5 + \sqrt{10}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} + \frac{4}{1 - \sqrt{5}}$

$$= \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} + \frac{4(1 + \sqrt{5})}{(1 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})}$$

$$= \sqrt{5} + \frac{4(1 + \sqrt{5})}{1 - 5}$$

$$= \sqrt{5} - (1 + \sqrt{5})$$

$$= \sqrt{5} - 1 - \sqrt{5} = -1$$

b) $\frac{2}{2 + \sqrt{3}} + \frac{2}{2 - \sqrt{3}}$

$$= \frac{2(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} + \frac{2(2 + \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}$$

$$= \frac{4 - 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3}}{4 - 3}$$

$$= 8$$

$$c) \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} + \frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} \\ &= \sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{5} \\ &= \sqrt{3}+\sqrt{7} \end{aligned}$$

$$d) \frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{7}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{7}+\sqrt{2} \end{aligned}$$

Bài 6: Rút gọn biểu thức:

$$a) \frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$$

$$b) \sqrt{\frac{3}{20}} + \sqrt{\frac{1}{60}} - 2\sqrt{\frac{1}{15}}$$

$$c) \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$d) \sqrt{\frac{1}{10}} + \sqrt{\frac{2}{5}} - \sqrt{90}$$

Hướng dẫn giải:

$$a) \frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{3}(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} = -\sqrt{3}$$

$$b) \sqrt{\frac{3}{20}} + \sqrt{\frac{1}{60}} - 2\sqrt{\frac{1}{15}} = \sqrt{\frac{9}{60}} + \sqrt{\frac{1}{60}} - 2\sqrt{\frac{4}{60}} = \frac{3}{\sqrt{60}} + \frac{1}{\sqrt{60}} - \frac{4}{\sqrt{60}} = 0$$

$$c) \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} + \frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2} + \frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2}$$

$$= \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3} + \frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$$

$$= \sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{5}+\sqrt{6}$$

$$d) \sqrt{\frac{1}{10}} + \sqrt{\frac{2}{5}} - \sqrt{90} = \frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{\sqrt{10}}{5} - 3\sqrt{10} = \frac{33\sqrt{10}}{10}$$

Bài 7. Rút gọn các biểu thức:

$$a) \frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{\sqrt{35}-\sqrt{14}}$$

$$b) \frac{\sqrt{10}+\sqrt{15}}{\sqrt{8}+\sqrt{12}}$$

$$c) \frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$d) \frac{\sqrt{24}-\sqrt{3}}{\sqrt{40}-\sqrt{5}}$$

Hướng dẫn giải:

$$a) \frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{\sqrt{35}-\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{\sqrt{7}(\sqrt{5}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

$$b) \frac{\sqrt{10}+\sqrt{15}}{\sqrt{8}+\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{4}(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$c) \frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$d) \frac{\sqrt{24}-\sqrt{3}}{\sqrt{40}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{8}-1)}{\sqrt{5}(\sqrt{8}-1)} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

Bài 8. Rút gọn các biểu thức:

$$a) E = \sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}$$

$$b) F = \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}}$$

$$c) G = \sqrt{14-8\sqrt{3}} - \sqrt{24-12\sqrt{3}}$$

$$d) H = \sqrt{8\sqrt{3}} - 2\sqrt{25\sqrt{12}} + 4\sqrt{\sqrt{192}}$$

$$e) I = \sqrt{11-2\sqrt{30}} : \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right)$$

$$f) J = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$$

$$g) K = \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

$$h) L = \frac{2\sqrt{8}-\sqrt{12}}{\sqrt{18}-\sqrt{48}} - \frac{\sqrt{5}+\sqrt{27}}{\sqrt{30}+\sqrt{162}}$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} a) E &= \sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{6-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{5}-1+\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) F &= \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} \\ &= 2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) H &= \sqrt{8\sqrt{3}} - 2\sqrt{25\sqrt{12}} + 4\sqrt{\sqrt{192}} \\ &= 2\sqrt{2\sqrt{3}} - 10\sqrt{2\sqrt{3}} + 4\sqrt{8\sqrt{3}} \\ &= 2\sqrt{2\sqrt{3}} - 10\sqrt{2\sqrt{3}} + 8\sqrt{2\sqrt{3}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g) K &= \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \\ \Rightarrow K^2 &= 8 + 2\sqrt{(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}})(4-\sqrt{10+2\sqrt{5}})} \\ &= 8 + 2\sqrt{16-10-2\sqrt{5}} \\ &= 8 + 2\sqrt{6-2\sqrt{5}} \\ &= 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} \end{aligned}$$

$$c) G = \sqrt{14-8\sqrt{3}} - \sqrt{24-12\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{2(7-4\sqrt{3})} - \sqrt{2(12-6\sqrt{3})}$$

$$= \sqrt{2(2-\sqrt{3})^2} - \sqrt{2(3-\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{2}(2-\sqrt{3}) - (3-\sqrt{3})\sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{2} - \sqrt{6} - 3\sqrt{2} + \sqrt{6} = -\sqrt{2}$$

$$\text{e) } I = \sqrt{11-2\sqrt{30}} : \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right)$$

$$= \sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{5})^2} : \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

$$= (\sqrt{6}-\sqrt{5}) \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{6}$$

$$\text{f) } J = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2} - \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{2} - \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{2}$$

$$= \frac{2}{2} = 1$$

$$= 8+2(\sqrt{5}-1)$$

$$= 6+2\sqrt{5}$$

$$\text{Do đó } K = \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} = \sqrt{5}+1$$

$$\text{h) } L = \frac{2\sqrt{8}-\sqrt{12}}{\sqrt{18}-\sqrt{48}} - \frac{\sqrt{5}+\sqrt{27}}{\sqrt{30}+\sqrt{162}}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-4\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{\sqrt{30}+9\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(4\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+4\sqrt{3})}{(3\sqrt{2})^2-(4\sqrt{3})^2} - \frac{(\sqrt{5}+3\sqrt{3})(\sqrt{30}-9\sqrt{2})}{(\sqrt{30})^2-(9\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{24+16\sqrt{6}-6\sqrt{6}-24}{18-48} - \frac{\sqrt{150}-9\sqrt{10}+3\sqrt{90}+27\sqrt{6}}{30-162}$$

$$= \frac{-10\sqrt{6}}{30} - \frac{5\sqrt{6}-9\sqrt{10}+9\sqrt{10}+27\sqrt{6}}{-132}$$

$$= \frac{-\sqrt{6}}{3} - \frac{32\sqrt{6}}{-132}$$

$$= \frac{-\sqrt{6}}{3} + \frac{8\sqrt{6}}{33}$$

$$= \frac{-11\sqrt{6}+8\sqrt{6}}{33}$$

$$= \frac{-3\sqrt{6}}{33}$$

$$= \frac{-\sqrt{6}}{11}$$

Bài 9: Rút gọn

$$\text{a) } M = (4+\sqrt{3}) \cdot \sqrt{19-8\sqrt{3}}$$

$$\text{b) } N = \frac{\sqrt{8-\sqrt{15}}}{\sqrt{30}-\sqrt{2}}$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{a) } M &= (4+\sqrt{3}) \cdot \sqrt{19-8\sqrt{3}} = (4+\sqrt{3}) \cdot \sqrt{16-8\sqrt{3}+3} = (4+\sqrt{3}) \cdot \sqrt{(4-\sqrt{3})^2} = (4+\sqrt{3}) \cdot |4-\sqrt{3}| \\ &= (4+\sqrt{3}) \cdot (4-\sqrt{3}) = 16-3 = 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } N &= \frac{\sqrt{8-\sqrt{15}}}{\sqrt{30}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{30}+\sqrt{2})\sqrt{8-\sqrt{15}}}{30-2} = \frac{(\sqrt{15}+1)\sqrt{16-2\sqrt{15}}}{28} = \frac{(\sqrt{15}+1)\sqrt{(\sqrt{15}-1)^2}}{28} \\ &= \frac{(\sqrt{15}+1)|\sqrt{15}-1|}{28} = \frac{(\sqrt{15}+1)(\sqrt{15}-1)}{28} = \frac{15-1}{28} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dạng 3. Rút gọn biểu thức

Bài 1: Rút gọn biểu thức $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{7}{x-4} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} - 1 \right)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$

Hướng dẫn giải

$$Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{7}{x-4} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} - 1 \right) = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} + \frac{7}{x-4} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2} \right) = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2} \quad (x \geq 0; x \neq 4)$$

Bài 2. Cho biểu thức $M = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{2}{x} - \frac{2-x}{x\sqrt{x}+x} \right)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

a) Rút gọn M

b) Tìm x để $M = \frac{-1}{2}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } M &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{2}{x} - \frac{2-x}{x\sqrt{x}+x} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) : \left(\frac{2}{x} - \frac{2-x}{x(\sqrt{x}+1)} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) : \left(\frac{2(\sqrt{x}+1)}{x(\sqrt{x}+1)} - \frac{2-x}{x(\sqrt{x}+1)} \right) \\ &= \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} : \frac{2\sqrt{x}+2-2+x}{x(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{x(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}+x} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x}-1}, \text{ với } x \geq 0; x \neq 1 \end{aligned}$$

b) Ta có $M = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow 2x + \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn)

Bài 3: Rút gọn biểu thức $N = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) \cdot \frac{4\sqrt{x}}{3}$ với $x \geq 0$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Với } x \geq 0 \text{ ta có } N &= \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) \cdot \frac{4\sqrt{x}}{3} \\ &= \left(\frac{x+2}{(\sqrt{x+1})(x-\sqrt{x+1})} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) \cdot \frac{4\sqrt{x}}{3} \\ &= \frac{x+2-x+\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x+1})(x-\sqrt{x+1})} \cdot \frac{4\sqrt{x}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x+1})(x-\sqrt{x+1})} \cdot \frac{4\sqrt{x}}{3} \\ &= \frac{4\sqrt{x}}{3(x-\sqrt{x+1})} \end{aligned}$$

Bài 4: Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - 1 \right)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

Hướng dẫn giải

với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - 1 \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} : \frac{1}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{1} \end{aligned}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

Bài 5: Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x}+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$

Hướng dẫn giải

với $x \geq 0$ và $x \neq 25$

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x}+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5} \\ &= \left(\frac{15-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} + \frac{2(\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5} \\ &= \frac{15-\sqrt{x}+2\sqrt{x}-10}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{\sqrt{x}+5}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

Bài 6: Rút gọn biểu thức $M = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$ ($x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$)

Hướng dẫn giải

với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

$$\begin{aligned} M &= \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} - \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} + \frac{(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-9-x+9+2x-4\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \end{aligned}$$

Bài 7: Rút gọn biểu thức $Q = \left(\frac{1-x\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \right)^2$

Hướng dẫn giải

với $x \geq 0; x \neq 1$

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{1-x\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \right)^2 \\ &= \left[\frac{1-x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x}{1-\sqrt{x}} \right] \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \right)^2 \\ &= \left[\frac{1-x + \sqrt{x}(1-x)}{1-\sqrt{x}} \right] \cdot \left(\frac{1-\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})} \right)^2 \\ &= \frac{(1-x)(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \right)^2 \\ &= \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)}{1-\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1}{1+\sqrt{x}} \right)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Bài 8: Rút gọn biểu thức $A = \frac{15\sqrt{x}-19}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$

Hướng dẫn giải

với $x \geq 0; x \neq 1$

$$\begin{aligned} A &= \frac{15\sqrt{x}-19}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} \\ &= \frac{15\sqrt{x}-19}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} + \frac{(3\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \frac{(2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{15\sqrt{x}-19}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} + \frac{3x+9\sqrt{x}-2\sqrt{x}-6}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \frac{2x-2\sqrt{x}+3\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{15\sqrt{x} - 19 + 3x + 9\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 6 - 2x + 2\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \\
 &= \frac{x + 21\sqrt{x} - 22}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \\
 &= \frac{x + 22\sqrt{x} - \sqrt{x} - 22}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \\
 &= \frac{(\sqrt{x} + 22)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \\
 &= \frac{\sqrt{x} + 22}{\sqrt{x} + 3}
 \end{aligned}$$

Bài 9: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{3\sqrt{x} + 1}{x - 1}$ ($x \geq 0; x \neq 1$)

Hướng dẫn giải

với $x \geq 0; x \neq 1$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{3\sqrt{x} + 1}{x - 1} \\
 &= \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} + \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} - \frac{3\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \\
 &= \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} + \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} - \frac{3\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \\
 &= \frac{x + 2\sqrt{x} + 1 + x - 2\sqrt{x} + 1 - 3\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \\
 &= \frac{2x - 3\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \\
 &= \frac{2x - 2\sqrt{x} - \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \\
 &= \frac{(2\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

Dạng 4. Giải phương trình**Bài 1.**

a) $5\sqrt{3x} - 4\sqrt{27x} - \sqrt{12x} - \sqrt{75x} = -28$

b) $15\sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{25x} = 110$

c) $\sqrt{x-1} + 4\sqrt{x-1} + 6\sqrt{x-1} - 7\sqrt{x-1} = 12$

d) $-3\sqrt{x+2} - 4\sqrt{4x+8} + \sqrt{9x+18} = -40$

Hướng dẫn giải

a) $5\sqrt{3x} - 4\sqrt{27x} - \sqrt{12x} - \sqrt{75x} = -28$

với $x \geq 0$

$$5\sqrt{3x} - 4\sqrt{27x} - \sqrt{12x} - \sqrt{75x} = -28 \Leftrightarrow 5\sqrt{3x} - 12\sqrt{3x} - 2\sqrt{3x} - 5\sqrt{3x} = -28$$

$$\Leftrightarrow -14\sqrt{3x} = -28 \Leftrightarrow \sqrt{3x} = 2 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \text{ (TMĐK)}$$

Vậy $x = \frac{4}{3}$ là nghiệm của phương trình

b) $15\sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{25x} = 110$

với $x \geq 0$

$$15\sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{25x} = 110 \Leftrightarrow 11\sqrt{x} = 110 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 10 \Leftrightarrow x = 100 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy $x = 100$ là nghiệm của phương trình

c) $\sqrt{x-1} + 4\sqrt{x-1} + 6\sqrt{x-1} - 7\sqrt{x-1} = 12$

với $x \geq 1$

$$\sqrt{x-1} + 4\sqrt{x-1} + 6\sqrt{x-1} - 7\sqrt{x-1} = 12 \Leftrightarrow 4\sqrt{x-1} = 12 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow x-1 = 9 \Leftrightarrow x = 9+1$$

$$\Leftrightarrow x = 10 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy $x = 10$ là nghiệm của phương trình

d) $-3\sqrt{x+2} - 4\sqrt{4x+8} + \sqrt{9x+18} = -40$

với $x \geq -2$

$$-3\sqrt{x+2} - 4\sqrt{4x+8} + \sqrt{9x+18} = -40 \Leftrightarrow -3\sqrt{x+2} - 8\sqrt{x+2} + 3\sqrt{x+2} = -40$$

$$\Leftrightarrow -8\sqrt{x+2} = -40 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 5 \Leftrightarrow x+2 = 25 \Leftrightarrow x = 23 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy $x = 23$ là nghiệm của phương trình

Bài 2. $\sqrt{36x-72} - 15\sqrt{\frac{x-2}{25}} = 2(5+\sqrt{x-2})$

Hướng dẫn giải

với $x \geq 2$

$$\sqrt{36x-72} - 15\sqrt{\frac{x-2}{25}} = 2(5+\sqrt{x-2}) \Leftrightarrow 6\sqrt{x-2} - 3\sqrt{x-2} = 10 + 2\sqrt{x-2}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-2} - 2\sqrt{x-2} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 10 \Leftrightarrow x-2 = 100 \Leftrightarrow x = 102 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy $x = 102$ là nghiệm của phương trình

Bài 3. a) $\sqrt{18x+9} - \sqrt{8x+4} + \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} = 4$ b) $\frac{3}{2}\sqrt{4x-8} - 9\sqrt{\frac{x-2}{81}} = 6$

Hướng dẫn giải

a) $\sqrt{18x+9} - \sqrt{8x+4} + \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} = 4$

với $x \geq \frac{-1}{2}$

$$\sqrt{18x+9} - \sqrt{8x+4} + \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} = 4 \Leftrightarrow 3\sqrt{2x+1} - 2\sqrt{2x+1} + \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} = 4$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{2x+1} = 12 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = 3 \Leftrightarrow 2x+1 = 9 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy $x = 4$ là nghiệm của phương trình

b) $\frac{3}{2}\sqrt{4x-8} - 9\sqrt{\frac{x-2}{81}} = 6$

với $x \geq 2$

$$\frac{3}{2}\sqrt{4x-8} - 9\sqrt{\frac{x-2}{81}} = 6 \Leftrightarrow 3\sqrt{x-2} - \sqrt{x-2} = 6 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-2} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 3 \Leftrightarrow x-2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x = 11 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy $x = 11$ là nghiệm của phương trình

Bài 4. a) $\frac{2}{3}\sqrt{9u-9} - \frac{1}{4}\sqrt{16u-16} + 27\sqrt{\frac{u-1}{81}} = 4$

b) $\sqrt{4u-20} + 3\sqrt{\frac{u-5}{9}} - \frac{1}{3}\sqrt{9u-45} = 4$

Hướng dẫn giải

a) $\frac{2}{3}\sqrt{9u-9} - \frac{1}{4}\sqrt{16u-16} + 27\sqrt{\frac{u-1}{81}} = 4$

với $u \geq 1$

$$\frac{2}{3}\sqrt{9u-9} - \frac{1}{4}\sqrt{16u-16} + 27\sqrt{\frac{u-1}{81}} = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{u-1} - \sqrt{u-1} + 3\sqrt{u-1} = 4$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{u-1} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{u-1} = 1 \Leftrightarrow u-1 = 1 \Leftrightarrow u = 2 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy $u = 2$ là nghiệm của phương trình

b) $\sqrt{4u-20} + 3\sqrt{\frac{u-5}{9}} - \frac{1}{3}\sqrt{9u-45} = 4$

với $u \geq 5$

$$\sqrt{4u-20} + 3\sqrt{\frac{u-5}{9}} - \frac{1}{3}\sqrt{9u-45} = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{u-5} + \sqrt{u-5} - \sqrt{u-5} = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{u-5} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{u-5} = 2$$

$$\Leftrightarrow u-5 = 4 \Leftrightarrow u = 9 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy $u = 9$ là nghiệm của phương trình

Bài 5. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-1} + 2 = 0$ với $x \neq 0$

Hướng dẫn giải

với $x \neq 0$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-1} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+1}-1)} - \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+1}-1)} + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+1}-1-\sqrt{x^2+1}-1}{x^2+1-1} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{x^2} + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

Vậy $x = -1; x = 1$ là nghiệm của phương trình

Bài 6. $\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 1 \quad (x \geq 0)$

Hướng dẫn giải

với $x \geq 0$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}}{x+3-x-2} + \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{x+2-x-1} + \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x+1-1} = 1 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x+3}-\sqrt{x+2} + \sqrt{x+2}-\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}-\sqrt{x} = 1 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x+3}-\sqrt{x} = 1 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x+3} = \sqrt{x} + 1 \\ \Leftrightarrow & x+3 = x+2\sqrt{x}+1 \quad (\text{TMDK}) \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x} = 1 \\ \Leftrightarrow & x = 1 \quad (\text{TMDK}) \end{aligned}$$

Vậy $x = 1$ là nghiệm của phương trình

Bài 7. $\sqrt{x+1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{z-1} = \frac{1}{2}(x+y+z)$

Hướng dẫn giải

với $x \geq -1; y \geq 3; z \geq 1$

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{z-1} = \frac{1}{2}(x+y+z) \\ \Leftrightarrow & x+1-2\sqrt{x+1}+1+y-3-2\sqrt{y-3}+1+z-1-2\sqrt{z-1}+1=0 \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{x+1}-1)^2 + (\sqrt{y-3}-1)^2 + (\sqrt{z-1}-1)^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x+1}-1)^2 = 0 \\ (\sqrt{y-3}-1)^2 = 0 \\ (\sqrt{x-1}-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}-1=0 \\ \sqrt{y-3}-1=0 \\ \sqrt{z-1}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}=1 \\ \sqrt{y-3}=1 \\ \sqrt{z-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=1 \\ y-3=1 \\ z-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4 \\ z=2 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

Vậy $x=0; y=4; z=2$ là nghiệm của phương trình

Bài 8. $25\sqrt{\frac{a-3}{25}} - 7\sqrt{\frac{4a-12}{9}} - 7\sqrt{a^2-9} + 18\sqrt{\frac{9a^2-81}{81}} = 0$

Hướng dẫn giải

với $a \geq 3$

$$\begin{aligned} & 25\sqrt{\frac{a-3}{25}} - 7\sqrt{\frac{4a-12}{9}} - 7\sqrt{a^2-9} + 18\sqrt{\frac{9a^2-81}{81}} = 0 \\ \Leftrightarrow & 5\sqrt{a-3} - \frac{14}{3}\sqrt{a-3} - 7\sqrt{(a-3)(a+3)} + 6\sqrt{(a-3)(a+3)} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{3}\sqrt{a-3} - \sqrt{(a-3)(a+3)} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a-3} \left(\frac{1}{3} - \sqrt{a+3} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a-3} = 0 \\ \frac{1}{3} - \sqrt{a+3} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a-3=0 \\ a+3=\frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=\frac{-26}{9} \end{cases} \Leftrightarrow a=3 \end{aligned}$$

Vậy $a=3$ là nghiệm của phương trình

Bài 9. Giải các phương trình sau

- a) $\sqrt{x^2} = 5$
- b) $\sqrt{25x^2} = 10$
- c) $\sqrt{9x^2} = 2x+1$
- d) $\sqrt{x^2+6x+9} = 3x-1$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện xác định với $x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2} = 5 \Leftrightarrow |x| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -5 \end{cases}$$

Vậy $x=5; x=-5$ là nghiệm của phương trình

b) $\sqrt{25x^2} = 10$ Điều kiện xác định với $x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{25x^2} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = 2 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy $x = 2; x = -2$ là nghiệm của phương trình

c) $\sqrt{9x^2} = 2x+1$ Điều kiện xác định với $x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{9x^2} = 2x+1 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2} = 2x+1 \Leftrightarrow |x| = \frac{2x+1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2x+1}{3} \\ x = -\frac{2x+1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2x+1 \\ 3x = -2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1}{5} \end{cases}$$

Vậy $x = 1; x = \frac{-1}{5}$ là nghiệm của phương trình

d) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 3x - 1$ Điều kiện xác định với $x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 3x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2} = 3x - 1 \Leftrightarrow |x+3| = 3x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 3x-1 \\ x+3 = -3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

Vậy $x = 2; x = \frac{-1}{2}$ là nghiệm của phương trình

Bài 10: a) $\sqrt{x-4\sqrt{x}+4} = 5$ b) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{x-1}-1$

Hướng dẫn giải

a) $\sqrt{x-4\sqrt{x}+4} = 5$
với $x \geq 0$

$$\sqrt{x-4\sqrt{x}+4} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x}-2)^2} = 5 \Leftrightarrow |\sqrt{x}-2| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-2 = 5 \\ \sqrt{x}-2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 7 \\ \sqrt{x} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 49 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy $x = 49$ là nghiệm của phương trình

a) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{x-1}-1$
với $x \geq 1$

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{x-1}-1 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = 2\sqrt{x-1}-1 \Leftrightarrow |\sqrt{x-1}-1| = 2\sqrt{x-1}-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}-1=2\sqrt{x-1}-1 & (x \geq 2) \\ -\sqrt{x-1}+1=2\sqrt{x-1}-1 & (x \leq 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 & (x \geq 2) \\ 3\sqrt{x-1}=2 & (x \leq 2) \end{cases} \Leftrightarrow x-1=\frac{4}{9} \Leftrightarrow x=\frac{13}{9} \text{ (TMĐK)}$$

Vậy $x = \frac{13}{9}$ là nghiệm của phương trình.

G. MỘT SỐ BÀI TRÍCH TRONG ĐỀ THI TUYỂN SINH

Bài 1: (TS Thanh Hóa 2024-2025) Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$

1. Rút gọn biểu thức P .
2. Tìm tất cả các giá trị của x để $P < 0$.

Bài 2: (TS Hà Nam 2024-2025) Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} - \frac{2x+12}{x-9}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 9$

1. Rút gọn biểu thức A .
2. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 13 - 4\sqrt{3}$.

Bài 3: (TS Hà Nội 2024-2025) Cho hai biểu thức: $A = \frac{x}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{2x-3}{x-3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 9$

1. Tính giá trị biểu thức A khi $x = 16$.
2. Chứng minh $B = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$.
3. Tìm tất cả các giá trị của x để $A - B < 0$.

Bài 4: (TS Thái Bình 2024-2025)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{3\sqrt{x}+6}{x-4}$ với $x > 0$ và $x \neq 4$

1. Tính giá trị biểu thức A khi $x = 16$.
2. Rút gọn B .
3. So sánh biểu thức $\frac{A}{B}$ với 3.

Bài 5: (TS Nghệ An 2024-2025)

- a) Tính $A = \sqrt{36} - 2\sqrt{16} + \sqrt{25}$
- b) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+6} \right) \cdot \frac{x+6\sqrt{x}}{5}$ với $x > 0$

Bài 6: (TS Quảng Ninh 2024-2025)

- a) Thực hiện phép tính $A = 2\sqrt{9} - \sqrt{25}$
- b) Rút gọn biểu thức $B = \frac{1}{\sqrt{x}+3} + \frac{1}{\sqrt{x}-3} - \frac{6}{x-9}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 9$

Bài 7: (TS Phú Yên 2024-2025)

Chứng minh rằng $(2 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(2 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = 3 + 4\sqrt{2}$

Bài 8: (TS Sơn La 2024-2025)

Tính giá trị của biểu thức $P = \sqrt{81} - \sqrt{49} + \sqrt{9}$

Bài 9: (TS Bình Dương 2024-2025)

Tính giá trị của biểu thức $M = 2\sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{20}$

Bài 10: (TS Sóc Trăng 2024-2025)

Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{18} + \sqrt{2}}{\sqrt{8}}$

Bài 11: (TS Vĩnh Phúc 2024-2025) Cho biểu thức: $A = \frac{3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}+2}\right) + \frac{9}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0$

1. Rút gọn biểu thức A .
2. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Bài 12: (TS Nam Định 2024-2025)

a) Chứng minh đẳng thức: $\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \sqrt{12} = 2\sqrt{5}$

b) Rút gọn biểu thức: $F = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1}\right)$ với $x > 0$ và $x \neq 1$

Bài 13: (TS Nam Định 2023-2024)

a) Chứng minh đẳng thức $\sqrt{27} - 2\sqrt{12} + \sqrt{4-2\sqrt{3}} = -1$.

b) Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{9-\sqrt{x}}{x-9} + \frac{2}{\sqrt{x}+3}\right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 9$.

Bài 14: (TS Hậu Giang 2024-2025)

a) Tính giá trị biểu thức: $A = 5\sqrt{3} - \sqrt{27}$

b) Cho biểu thức $B = \frac{8}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$. Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 4$

c) Cho biểu thức: $C = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{3x+4}{x-4}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$. Tìm x để $C = \frac{2}{3}$.

Bài 15: (TS Đắk Lắk 2024-2025)

1. Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt{4} - 2\sqrt{9} + \sqrt{25}$.

2. Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-4} - \frac{1}{\sqrt{x}+2}\right) \cdot (x-4)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$

Bài 16: (TS Lạng Sơn 2024-2025)

a) Tính giá trị các biểu thức sau

$$A = \sqrt{16} + \sqrt{4} \qquad B = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} - \sqrt{3} \qquad C = (\sqrt{8} + \sqrt{2})\sqrt{2}.$$

b) Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{3}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$

- 1) Rút gọn biểu thức P
- 2) Tìm các giá trị của x để P

Bài 17: (TS Đồng Nai 2024-2025)

Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{2}{x-1}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$. Tìm x để P đạt giá trị lớn nhất.

Bài 18: (TS Hòa Bình 2024-2025)

1. Rút gọn các biểu thức $A = \sqrt{25} - \sqrt{4}$

$$B = \frac{2}{\sqrt{5}-1} + \frac{2}{\sqrt{5}+1}.$$

2. Giải phương trình $\sqrt{x-2} = 3$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$

Bài 19: (TS Thái Nguyên 2024-2025)

a) Không dùng máy tính cầm tay, rút gọn biểu thức $A = 2\sqrt{(\sqrt{3}+2)^2} - \sqrt{12} + 2020.$

b) Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{x+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{1-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$

1) Rút gọn biểu thức P 2) So sánh giá trị của biểu thức P với 1.**Bài 20: (TS Long An 2024-2025)**

a) Tính giá trị biểu thức $A = 2\sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{32}.$

b) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{x+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + 1 \right) \cdot \left(\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - 1 \right)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

c) Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 1$

Bài 21: (TS Phú Thọ 2024-2025)

Cho hai biểu thức: $A = 2\sqrt{x} + 1$ và $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{x+\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{x+2\sqrt{x}+1}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 4.$

b) Rút gọn biểu thức $B.$

c) Tìm x để $A + B = 5.$

Bài 22: (TS Hà Tĩnh 2024-2025) Rút gọn các biểu thức

a) $A = \sqrt{12} + 3\sqrt{3}.$

b) $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ với $x > 0.$

Bài 23: (TS Bà Rịa – Vũng Tàu 2024-2025)

Rút gọn các biểu thức $A = \frac{3}{2-\sqrt{3}} - \sqrt{75} + \frac{2\sqrt{33}}{\sqrt{11}}.$

Bài 24: (TS Trà Vinh 2024-2025)

Tính giá trị biểu thức $A = 3\sqrt{18} - 2\sqrt{50} + \sqrt{32}.$

Bài 25: (TS Hải Phòng 2024-2025)

Cho các biểu thức: $A = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} - \sqrt{3} + \sqrt{12}$ và $B = \left(\frac{3}{1-\sqrt{x}} + \frac{1}{1+\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{1+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 1$

a) Rút gọn các biểu thức $A, B.$

b) Tìm các giá trị của x sao cho $B > 2.$

Bài 26: (TS Quảng Bình 2024-2025)

a) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{28} - \sqrt{175} + 67.$

b) Cho biểu thức $B = \frac{2}{\sqrt{x}+3} + \frac{3}{\sqrt{x}-3} - \frac{2\sqrt{x}+12}{x-9}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 9$

1) Rút gọn biểu thức B

2) Tìm tất cả các giá trị của x để $B < \frac{1}{2}$.

Bài 27: (TS Lào Cai 2024-2025)

Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{8}{x-4}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$

- 1) Rút gọn biểu thức P
- 2) Tìm tất cả các giá trị của x để $P \geq 1$.