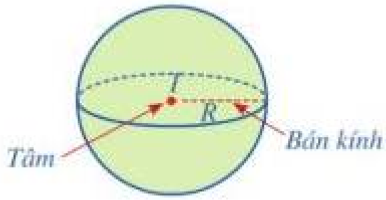
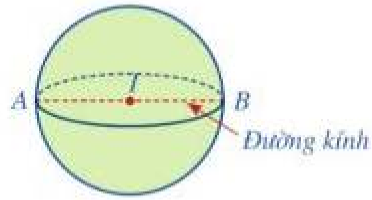
BÀI 3
PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

1. Định nghĩa mặt cầu

Cho điểm I và số dương R. Mặt cầu tâm I bán kính R là tập hợp tất cả các điểm trong không gian cách điểm I một khoảng R.





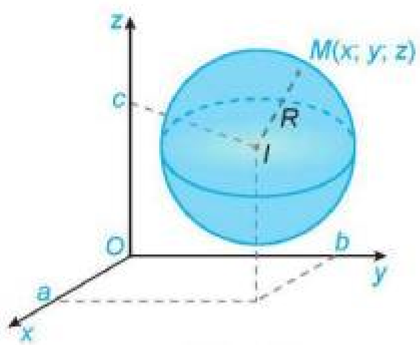
Nhận xét: Cho mặt cầu tâm $S(I;R)$

- Nếu $IM = R$ thì M nằm trên mặt cầu.
- Nếu $IM < R$ thì M nằm trong mặt cầu.
- Nếu $IM > R$ thì M nằm ngoài mặt cầu.

2. Phương trình của mặt cầu

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$, bán kính R có phương trình là:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

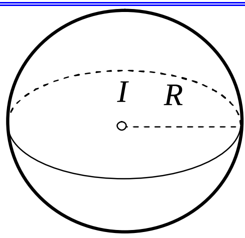


Nhận xét: Phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình của mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

CHỦ ĐỀ 1
PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

DẠNG 1
XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN MẶT CẦU



- Phương trình mặt cầu (S) có dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ thì mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và có bán kính R.
- Phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$ thì để xác định tọa độ tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R ta thức hiện như sau:

+ Xác định tọa độ tâm I : $\begin{cases}-2a=...\\-2b=...\\-2c=...\end{cases}$

+ Xác định bán kính: $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Chú ý:

- Có thể xác định tọa độ tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R của phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ bằng cách nhóm nhân tử để đưa về dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.
- Để một phương trình là một phương trình mặt cầu, cần thỏa mãn hai điều kiện: Hệ số trước x^2, y^2, z^2 phải bằng 1 và $a^2+b^2+c^2-d>0$

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ tâm và bán của của các mặt cầu sau:

a) $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$

b) $(S):\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(-y-1)^2+z^2=9$.

c) $(S): x^2+y^2+z^2+2x-2y+8z-18=0$

d) $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-2=0$

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình mặt cầu? Nếu là phương trình mặt cầu hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

a) $x^2+y^2+z^2-2x-5z+30=0$

b) $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z=0$

c) $x^3+y^3+z^3-2x+6y-9z-10=0$

d) $x^2+y^2+z^2+5=0$

e) $3x^2+2y^2+z^2-2x-2y+2z+1=0$

f) $x^2+y^2-2x+6y-8z-3=0$

g) $x^2+y^2+z^2-6x+8y-2z+10=0$

h) $2x^2+2y^2+2z^2+12x+4y-8z+20=0$

Bài 3. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình: $(S): x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my-2mz+5m^2+9=0$ là phương trình mặt cầu.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình mặt cầu? Nếu là phương trình mặt cầu hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

$(S_1): x^2+y^2+z^2+x-2y+4z-3=0$

$(S_2): 2x^2+2y^2+2z^2-x-y-z=0$

$(S_3): 2x^2+2y^2+2z^2+4x+8y+6z+3=0$

$(S_4): x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z+10=0$.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình mặt cầu? Nếu là phương trình mặt cầu hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

$(S_1): x^2+y^2+z^2-2x=0$

$(S_2): x^2+y^2-z^2+2x-y+1=0$

$(S_3): 2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1$

$(S_4): (x+y)^2=2xy-z^2+1-4x$

Bài 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình:

a) $x^2+y^2+z^2+2x-4y+2(m+1)z+2m^2+6=0$ là phương trình mặt cầu.

b) $x^2+y^2+z^2-2(3-m)x-2(m+1)y-2mz+2m^2+7=0$ không phải là phương trình mặt cầu.

DẠNG 2
LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU DẠNG CƠ BẢN

Phương pháp: Dựa vào giả thiết bài toán, ta xác định được tọa độ tâm $I(a;b;c)$ và độ dài bán kính R.

Các dạng thường gặp:

Dạng 1: Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và đi qua điểm $A(x_A;y_A;z_A)$ thì bán kính

$$R = IA = \sqrt{(x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2 + (z_A - z_I)^2}$$

Dạng 2: Mặt cầu (S) có đường kính AB thì

Tâm $I(a;b;c)$ là trung điểm của AB hay $I\left(\frac{x_A + x_B}{2};\frac{y_A + y_B}{2};\frac{z_A + z_B}{2}\right)$

Bán kính $R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}{2}$

Dạng 3: Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ thì bán kính

$$R = d\left(I,(\alpha)\right) = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Dạng 4: Mặt cầu qua bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng (hay gọi là ngoại tiếp tứ diện $ABCD$).

Gọi (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ $(*)$

Thay tọa độ 4 điểm A, B, C, D vào $(*)$ thì ta được hệ phương trình với 4 ẩn số a, b, c, d

Giải tìm a, b, c, d.

Suy ra tâm $I(a,b,c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình của (S), biết:

a) mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;-2)$ và bán kinh bằng 3.

b) mặt cầu (S) có tâm $I(1;-4;3)$ và đi qua điểm $A(5;-3;2)$.

c) mặt cầu (S) có đường kính AB, với $A(1;1;1)$ và $B(1;-1;3)$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình của (S), biết:

a) mặt cầu (S) đi qua 4 điểm $A(2;0;0), B(1;3;0), C(-1;0;3), D(1;2;3)$.

b) mặt cầu (S) đi qua 3 điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$ và có tâm I nằm trên mặt phẳng Oxy.

c) mặt cầu (S) đi qua 2 điểm $A(1;1;2), B(3;2;-3)$ và có tâm I thuộc Ox.

d) mặt cầu (S) đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình của (S), biết:

a) mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$ và bán kinh bằng 2.

b) mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$ và đi qua điểm $A(1;2;3)$.

c) mặt cầu (S) có đường kính AB, với $A(2;-1;-3)$ và $B(0;3;-1)$.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình của (S), biết:

a) mặt cầu (S) có tâm $A(1;2;-3)$ và tiếp xúc với trục Ox.

b) mặt cầu (S) có tâm nằm trên mặt phẳng (Oyz) và đi qua các điểm $A(0;8;0), B(4;6;2), C(0;12;4)$.

c) mặt cầu (S) có tâm là $A(-2;-4;5)$ và cắt trục Oz tại hai điểm B, C sao cho ΔABC vuông.

DẠNG 3
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MỘT ĐIỂM VỚI MẶT CẦU

Cho mặt cầu tâm $S(I;R)$

- Nếu $IM = R$ thì M nằm trên mặt cầu.
- Nếu $IM < R$ thì M nằm trong mặt cầu.
- Nếu $IM > R$ thì M nằm ngoài mặt cầu.

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=4$ và ba điểm $M(2;4;3), N(0;-1;2), Q(3;5;2)$. Xét vị trí tương đối của các điểm M, N, Q với mặt cầu (S).

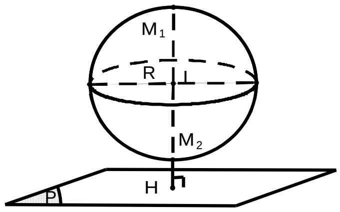
Bài 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-3)$, $B(-3;-2;-5)$. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $AM^2+BM^2=30$ là một mặt cầu (S). Tìm bán kính R của mặt cầu (S).

Bài 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm A, B cố định có độ dài AB là 4. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA = 3MB$ là một mặt cầu. Tính bán kính mặt cầu đó.

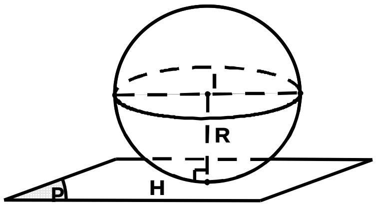
DẠNG 4
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT PHẲNG VỚI MẶT CẦU

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P) và có $d = IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P). Khi đó:

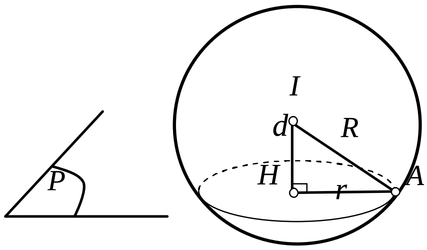
- Nếu $d > R$: Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.



- Nếu $d = R$: Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu. Lúc đó (P) là mặt phẳng tiếp diện của (S) và H là tiếp điểm.



- Nếu $d < R$: mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm H và bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$.



Chú ý: Cho mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(x_I; y_I; z_I)$ và bán kính R. Để xét vị trí tương đối của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S), ta làm như sau:

- Tính $d(I;(P)) = \dfrac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{|\vec{n}_{(P)}|}$
- So sánh với bán kính R

  + Nếu $d(I;(P)) > R$ thì mặt phẳng không cắt mặt cầu

  + Nếu $d(I;(P)) = R$ thì mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu

  + Nếu $d(I;(P)) < R$ thì mặt phẳng cắt mặt cầu

Bài 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xét vị trí tương đối của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) biết:

a) mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4$ và mặt phẳng $(P): x+y-z+4=0$.

b) mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-8=0$ và mặt phẳng $(P): 2x+3y+z+17=0$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S):

a) có tâm $I(2;1;-4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): x-2y+2z-7=0$.

b) có tâm $A(1;2;3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): x-2y+2z+3=0$.

Bài 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

Bài 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $M(2;3;3)$, $N(2;-1;-1)$, $P(-2;-1;3)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x+3y-z+2=0$.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+5=0$. Viết mặt phẳng tiếp xúc với (S) và song song với mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-11=0$.

Bài 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x-2y-2z-5=0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=4$. Viết phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S).

DẠNG 5
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI MẶT CẦU

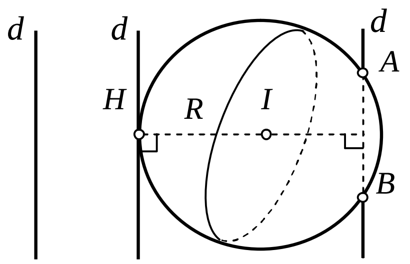
Cho mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R và đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}$, điểm $M \in d$. Để xét vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mặt cầu (S), ta làm như sau:

- Tính $d(I;d)=\dfrac{\left|\left[\vec{u};\overrightarrow{MI}\right]\right|}{|\vec{u}|}$
- So sánh với bán kính R

+ Nếu $d(I;d)>R$ thì đường thẳng d không cắt mặt cầu (S)

+ Nếu $d(I;d)=R$ thì đường thẳng d tiếp xúc với mặt cầu (S) tại H.

+ Nếu $d(I;d)<R$ thì đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt *A, B.*



Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, tìm vị trí tương đối của đường thẳng Δ và mặt cầu (S)

a) mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=9$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$.

b) mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=1$ và đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2+t\\ y=1+mt\\ z=-2t\end{cases}$. Tính giá trị của m để đường thẳng Δ tiếp xúc mặt cầu (S).

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho điểm $I(1;-2;3)$ và đường thẳng *d* có phương trình $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$. Lập phương trình mặt cầu tâm *A*, tiếp xúc với *d*.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu tâm $I(2;3;-1)$ sao cho mặt cầu cắt đường thẳng (d) có phương trình: $(d)\begin{cases} x=11+2t \\ y=t \\ z=-25-2t \end{cases}$ tại hai điểm A, B sao cho $AB=16$.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$ mặt phẳng $(P): 2x+6y+z-3=0$ cắt trục Oz và đường thẳng $d: \frac{x-5}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-6}{-1}$ lần lượt tại A và B. Viết phương trình mặt cầu đường kính AB.

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $I(1;0;0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{1}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB đều.

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu (S_1), (S_2) có phương trình lần lượt là $(S_1): x^2+y^2+z^2=25$, $(S_2): x^2+y^2+(z-1)^2=4$. Một đường thẳng d vuông góc với véc tơ $\vec{u}=(1;-1;0)$ tiếp xúc với mặt cầu (S_2) và cắt mặt cầu (S_1) theo một đoạn thẳng có độ dài bằng 8. Tìm vectơ chỉ phương của d.

Bài 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $E(1;1;1)$, mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=4$ và mặt phẳng $(P): x-3y+5z-3=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB là tam giác đều. Viết phương trình của đường thẳng Δ.

Bài 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $E(1;1;1)$, mặt phẳng $(P): x-3y+5z-3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=4$. Gọi Δ là đường thẳng qua E, nằm trong mặt phẳng (P) và cắt (S) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $AB=2$. Viết phương trình đường thẳng Δ.

Bài 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z-3=0$ và hai điểm $M(1;1;1)$, $N(-3;-3;-3)$. Mặt cầu (S) đi qua M, N và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm Q. Biết rằng Q luôn thuộc một đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

Bài 11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3^2$, mặt phẳng $(P): x-y+z+3=0$ và điểm $N(1;0;-4)$ thuộc (P). Một đường thẳng Δ đi qua N nằm trong (P) cắt (S) tại hai điểm A, B thỏa mãn $AB=4$. Gọi $\vec{u}(1;b;c)$, $(c>0)$ là một vecto chỉ phương của Δ, tính tổng $b+c$.

Bài 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y-z+9=0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C). Tìm tọa độ tâm K và bán kính r của đường tròn (C).

Bài 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$ và hình nón (H) có đỉnh $A(3;2;-2)$ và nhận AI làm trục đối xứng với I là tâm mặt cầu. Một đường sinh của hình nón (H) cắt mặt cầu tại M, N sao cho $AM=3AN$. Viết phương trình mặt cầu đồng tâm với mặt cầu (S) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón (H).

Trả lời: ………………..

Bài 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): z+2=0$, $K(0;0;-2)$, đường thẳng $d: \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$. Lập phương trình mặt cầu tâm thuộc đường thẳng d và cắt mặt phẳng (P) theo thiết diện là đường tròn tâm K, bán kính $r=\sqrt{5}$.

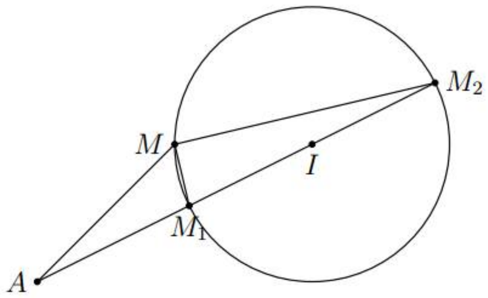
Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;-3;0)$, $C(-2;1;1)$, $D(0;-1;3)$. Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, đường tròn đó có bán kính r bằng bao nhiêu?

Bài 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và một điểm $M(2;3;1)$. Từ M kẻ được vô số các tiếp tuyến tới (S), biết tập hợp các tiếp điểm là đường tròn (C). Tính bán kính r của đường tròn (C).

DẠNG 6
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU

Bài toán. Cho điểm A và mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R, M là điểm di động trên (S). Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của AM.

Phương pháp giải



Xét A nằm ngoài mặt cầu (S). Gọi M_1, M_2 lần lượt là giao điểm của đường thẳng AI với mặt cầu (S) $(AM_1 < AM_2)$ và (α) là mặt phẳng đi qua M và đường thẳng AI. Khi đó (α) cắt (S) theo một đường tròn lớn (C).

Ta có $\widehat{M_1MM_2} = 90^\circ$, nên $\widehat{AMM_2}$ và $\widehat{AM_1M}$ là các góc tù, nên trong các tam giác AMM_1 và AMM_2 ta có $AI - R = AM_1 \le AM \le AM_2 = AI + R$

Tương tự với A nằm trong mặt cầu ta có $R - AI \le AM \le R + AI$

Vậy $\min AM = |AI - R|, \max AM = R + AI$

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $d: \begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 5 = 0$. Tìm tọa độ điểm M trên (S) sao cho $d(M, d)$ đạt GTLN.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z + 15 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 100$. Đường thẳng Δ qua A, nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B. Viết phương trình đường thẳng Δ để độ dài AB lớn nhất.

Bài 3. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{2}$ và $\Delta_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$. Tính diện tích mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, đồng thời tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

Bài 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=2t\\y=t\\z=4\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=3-t'\\y=t'\\z=0\end{cases}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Bài 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(8;5;-11), B(5;3;-4), C(1;2;-6)$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=9$. Gọi điểm $M(a;b;c)$ là điểm trên (S) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tìm $a+b$.

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(0\,;0\,;2)$, $B(1\,;1;\,0)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-1)^2=\frac{1}{4}$. Xét điểm M thay đổi thuộc (S). Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức MA^2+2MB^2.

Bài 7. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 5 điểm $A(1;0;0)$, $B(-1;1;0)$, $C(0;-1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;3;0)$. M là điểm thay đổi trên mặt cầu $(S):x^2+(y-1)^2+z^2=1$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|+3\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\right|$.

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ và điểm $A(5;3;-2)$. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A và luôn cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt M,N. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=AM+4AN$.

Bài 9. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ và mặt cầu (S): $(x+3)^2+(y+4)^2+(z+5)^2=729$. Cho biết điểm $A(-2;-2;-7)$, điểm B thuộc giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng $(P):2x+3y+4z-107=0$. Khi điểm M di động trên đường thẳng d đạt giá trị nhỏ nhất, hãy tính giá trị biểu thức $MA+MB$.

Bài 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y+z-1=0$, đường thẳng $(d):\frac{x-15}{1}=\frac{y-22}{2}=\frac{z-37}{2}$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-8x-6y+4z+4=0$. Một đường thẳng (Δ) thay đổi cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A,B sao cho $AB=8$. Gọi A', B' là hai điểm lần lượt thuộc mặt phẳng (P) sao cho AA', BB' cùng song song với (d). Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $AA'+BB'$.

Bài 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1):x^2+y^2+z^2=1$, $(S_2):x^2+(y-4)^2+z^2=4$ và các điểm $A(4;0;0)$, $B\left(\frac{1}{4};0;0\right)$, $C(1;4;0)$, $D(4;4;0)$. Gọi M là điểm thay đổi trên (S_1), N là điểm thay đổi trên (S_2). Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=MA+2ND+4MN+4BC$.

Bài 12. Cho x, y, z, a, b, c là các số thực thay đổi thỏa mãn $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=1$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$.

Bài 13. Cho a, b, c, d, e, f là các số thực thỏa mãn $\begin{cases}(d-1)^2+(e-2)^2+(f-3)^2=1\\(a+3)^2+(b-2)^2+c^2=9\end{cases}$. Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=\sqrt{(a-d)^2+(b-e)^2+(c-f)^2}$ lần lượt là M, m. Tính $M-m$

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho điểm M nằm ngoài mặt cầu $S(O;R)$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $OM < R.$ **B.** $OM = R.$ **C.** $OM > R.$ **D.** $OM \le R.$

Câu 2. Trong không gian $Oxyz,$ cho mặt cầu $(S): x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=6.$ Đường kính của (S) bằng

A. $\sqrt{6}$ **B.** 12 **C.** $2\sqrt{6}$ **D.** 3

Câu 3. Mặt cầu (S): $3x^2+3y^2+3z^2-6x+12y+2=0$ có bán kính bằng:

A. $\frac{\sqrt{7}}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{7}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{21}}{3}$. **D.** $\sqrt{\frac{13}{3}}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-2;1;-3)$. **B.** $(-4;2;-6)$. **C.** $(4;-2;6)$. **D.** $(2;-1;3)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=9$ có bán kính bằng

A. 3. **B.** 81. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-4;0)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của (S) là

A. $(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=9$. **B.** $(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=9$.

C. $(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=3$. **D.** $(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=3$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-1)^2=16$. Bán kính của (S) là:

A. 32 **B.** 8 **C.** 4 **D.** 16

Câu 8. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$. Tâm của (S) có tọa độ là:

A. $(-2;-4;6)$. **B.** $(2;4;-6)$. **C.** $(-1;-2;3)$. **D.** $(1;2;-3)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-8x+10y-6z+49=0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. $R=1$. **B.** $R=7$. **C.** $R=\sqrt{151}$. **D.** $R=\sqrt{99}$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu đó.

A. $I(-1;2;-3)$; $R=2$. **B.** $I(-1;2;-3)$; $R=4$. **C.** $I(1;-2;3)$; $R=2$. **D.** $I(1;-2;3)$; $R=4$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trong các mặt cầu dưới đây, mặt cầu nào có bán kính $R=2$?

A. $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-3=0$. **B.** $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-10=0$.

C. $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+2=0$. **D.** $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+5=0$.

Câu 12. Cho các phương trình sau:

$(x-1)^2+y^2+z^2=1;$

$x^2+(2y-1)^2+z^2=4;$

$x^2+y^2+z^2+1=0;$

$(2x+1)^2+(2y-1)^2+4z^2=16.$

Số phương trình là phương trình mặt cầu là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi I là tâm mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-2)^2=4$. Độ dài $\left|\overrightarrow{OI}\right|$ bằng:

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}$.`

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;3;0)$ và bán kính bằng 2. Phương trình của mặt cầu (S) là:

A. $(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=2$. **B.** $(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=4$.

C. $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=4$. **D.** $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=2$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và đi qua điểm $M(4;0;0)$. Phương trình của (S) là

A. $x^2+y^2+(z+3)^2=25$. **B.** $x^2+y^2+(z+3)^2=5$.

C. $x^2+y^2+(z-3)^2=25$. **D.** $x^2+y^2+(z-3)^2=5$.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;7), B(-3;8;-1)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình là

A. $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=\sqrt{45}$. **B.** $(x-1)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=45$.

C. $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=\sqrt{45}$. **D.** $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=45$.

Câu 17. Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu (S) tâm $A(2;1;0)$, đi qua điểm $B(0;1;2)$?

A. $(S): (x+2)^2+(y+1)^2+z^2=8$. **B.** $(S): (x-2)^2+(y-1)^2+z^2=8$.

C. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=64$.   **D.** $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+z^2=64$.

Câu 18. Trong không gian Oxyz cho điểm $I(2;3;4)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và đi qua A có phương trình là:

A. $(x+2)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=3$.   **B.** $(x+2)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=9$.

C. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=45$.   **D.** $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=3$.

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3), B(5;4;-1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9$.   **B.** $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=6$.

C. $(x+3)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=9$.   **D.** $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=36$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;-2;5)$, $N(-1;6;-3)$. Mặt cầu đường kính MN có phương trình là:

A. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=6$.   **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6$.

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=36$.   **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=36$.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) qua bốn điểm $A(3;3;0)$, $B(3;0;3)$, $C(0;3;3)$, $D(3;3;3)$. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.   **B.** $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$.

C. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$.   **D.** $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$. Cho tứ diện đều $ABCD$ có $A(0;1;2)$ và hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (BCD) là $H(4;-3;-2)$. Tìm tọa độ tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $I(3;-2;-1)$.   **B.** $I(2;-1;0)$.   **C.** $I(3;-2;1)$.   **D.** $I(-3;-2;1)$.

Câu 23. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm O và cắt các tia Ox,Oy,Oz lần lượt tại các điểm A,B,C khác O thỏa mãn tam giác ABC có trọng tâm là điểm $G(-6;-12;18)$. Tọa độ tâm của mặt cầu (S) là

A. $(9;18;-27)$.   **B.** $(-3;-6;9)$.   **C.** $(3;6;-9)$.   **D.** $(-9;-18;27)$.

Câu 24. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-\cos\alpha)^2+(y-\cos\beta)^2+(z-\cos\gamma)^2=4$ với α,β và γ lần lượt là ba góc tạo bởi tia Ot bất kì với 3 tia Ox,Oy và Oz. Biết rằng mặt cầu (S) luôn tiếp xúc với hai mặt cầu cố định. Tổng diện tích của hai mặt cầu cố định đó bằng

A. 40π.   **B.** 4π.   **C.** 20π.   **D.** 36π.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I, cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB=2\sqrt{3}$

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=20$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$. **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox. Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM?

A. $(x-1)^2+y^2+z^2=\sqrt{13}$. **B.** $(x-1)^2+y^2+z^2=13$.

C. $(x+1)^2+y^2+z^2=13$. **D.** $(x+1)^2+y^2+z^2=17$.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ đỉnh $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 4;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 6)$, $A(2;\ 4;\ 6)$. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Viết phương trình mặt cầu (S') có tâm trùng với tâm của mặt cầu (S) và có bán kính gấp 2 lần bán kính của mặt cầu (S).

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=56$. **B.** $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$.

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=14$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-12=0$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có phương trình là

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=4$. **B.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=13$.

C. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9$. **D.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=10$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=4$. Một mặt cầu (S') có tâm $I'(9;1;6)$ và tiếp xúc ngoài với mặt cầu (S). Phương trình mặt cầu (S') là

A. $(x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=64$. **B.** $(x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=144$.

C. $(x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=36$. **D.** $(x+9)^2+(y+1)^2+(z+6)^2=25$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC. Viết phương trình mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (α).

A. $x^2+y^2+z^2=81$. **B.** $x^2+y^2+z^2=1$. **C.** $x^2+y^2+z^2=9$. **D.** $x^2+y^2+z^2=25$.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-22=0$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+6z+14=0$. Khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P) bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=1$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z+1=0$. Tìm bán kính r đường tròn giao tuyến của (S) và (P).

A. $r=\frac{1}{3}$. **B.** $r=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $r=\frac{1}{2}$. **D.** $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$. Đường tròn giao tuyến của (S) với mặt phẳng (Oxy) có bán kính là

A. $r=3$. **B.** $r=\sqrt{5}$. **C.** $r=\sqrt{6}$. **D.** $r=\sqrt{14}$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S)tâm $I(a;b;c)$ bán kính bằng 1, tiếp xúc mặt phẳng (Oxz). Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

A. $|a|=1$. **B.** $a+b+c=1$. **C.** $|b|=1$. **D.** $|c|=1$.

Câu 35. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=4$ và mặt phẳng (P): $4x-3y-m=0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung.

A. $m=1$. **B.** $m=-1$ hoặc $m=-21$.

C. $m=1$ hoặc $m=21$. **D.** $m=-9$ hoặc $m=31$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo một đường tròn bán kính bằng 3.

A. $(Q): y+3z=0$. **B.** $(Q): x+y-2z=0$. **C.** $(Q): y-z=0$. **D.** $(Q): y-2z=0$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=45$ và mặt phẳng $(P): x+y-z-13=0$. Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có tâm $I(a;b;c)$ thì giá trị của $a+b+c$ bằng

A. -11. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, ho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$, mặt phẳng $(P): 4x+3y+m=0$. Giá trị của m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S).

A. $\left[\begin{array}{l} m>11 \\ m<-19 \end{array}\right.$. **B.** $-19<m<11$. **C.** $-12<m<4$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<-12 \end{array}\right.$.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-a)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+2z=1$. Giá trị của a để (P) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn (C)

A. $-\frac{17}{2}\le a\le\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{17}{2}<a<\frac{1}{2}$. **C.** $-8<a<1$. **D.** $-8\le a\le 1$.

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-10=0$, mặt phẳng $(P): x+2y-2z+10=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (P) tiếp xúc với (S).

B. (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn khác đường tròn lớn.

C. (P) và (S) không có điểm chung.

D. (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn lớn.

Câu 41. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\mathrm{P}): \mathrm{m}x+2\mathrm{y}-\mathrm{z}+1=0$ (m là tham số). Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $(\mathrm{S}):(\mathrm{x}-2)^2+(\mathrm{y}-1)^2+\mathrm{z}^2=9$ theo một đường tròn có bán kính bằng 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m?

A. $\mathrm{m}=\pm1$. **B.** $\mathrm{m}=\pm2+\sqrt{5}$. **C.** $\mathrm{m}=\pm4$. **D.** $\mathrm{m}=6\pm2\sqrt{5}$.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+3y+z-11=0$. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm H, khi đó H có tọa độ là:

A. $H(-3;-1;-2)$. **B.** $H(-1;-5;0)$. **C.** $H(1;5;0)$. **D.** $H(3;1;2)$.

Câu 43. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) có phương trình $2x+y-z-1=0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4$. Xác định bán kính r của đường tròn là giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S).

A. $r=\dfrac{2\sqrt{42}}{3}$. **B.** $r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ **C.** $r=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$. **D.** $r=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;-1)$ và đi qua điểm $A(2;1;2)$. Mặt phẳng nào dưới đây tiếp xúc với (S) tại A?

A. $x+y+3z-9=0$ **B.** $x+y-3z+3=0$ **C.** $x+y-3z-8=0$ **D.** $x-y-3z+3=0$

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P): $x-2y-2z-2=0$ có phương trình là

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$.

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1)$ và cắt mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+7=0$ theo một đường tròn có đường kính bằng 8. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=81$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=5$.

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$.

Câu 47. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(3;1;0)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+1=0$?

A. $(x+3)^2+(y+1)^2+z^2=3$. **B.** $(x+3)^2+(y+1)^2+z^2=9$.

C. $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=3$. **D.** $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=9$.

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+2z+2=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình của mặt cầu (S)

A. $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=8$ **B.** $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=10$

C. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=8$ **D.** $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-3;0;1)$. Mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng $(P): x-2y-2z-1=0$ theo một thiết diện là một hình tròn. Diện tích của hình tròn này bằng π. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=4$. **B.** $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=25$.

C. $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=5$. **D.** $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=2$.

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;\,2;\,-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

A. $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$. **B.** $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

C. $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=34$. **D.** $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$.

Câu 51. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(6;2;-5)$, $B(-4;0;7)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A.

A. $(P): 5x+y-6z+62=0$. **B.** $(P): 5x+y-6z-62=0$.

C. $(P): 5x-y-6z-62=0$. **D.** $(P): 5x+y+6z+62=0$.

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng $(P): 2x-2y+z+7=0$. Biết mp(Q) cắt mặt cầu $(S): x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$ theo một đường tròn có bán kính $r=3$. Khi đó mặt phẳng (Q) có phương trình là:

A. $x-y+2z-7=0$. **B.** $2x-2y+z+17=0$.

C. $2x-2y+z+7=0$. **D.** $2x-2y+z-17=0$.

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) chứa trục Ox và cắt mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$ theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 3 có phương trình là:

A. $y-2z=0$. **B.** $y+2z=0$. **C.** $y+3z=0$. **D.** $y-3z=0$.

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2z-2=0$ và điểm $K(2;2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng chứa tất cả các tiếp điểm của các tiếp tuyến vẽ từ K đến mặt cầu (S).

A. $2x+2y+z-4=0$. **B.** $6x+6y+3z-8=0$.

C. $2x+2y+z+2=0$ **D.** $6x+6y+3z-3=0$.

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$ và mặt phẳng $(\alpha): x+4y+z\text{-}11=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P), biết (P) song song với giá của vectơ $\vec{v}=(1;6;2)$, vuông góc với (α) và tiếp xúc với (S).

A. $\left[\begin{array}{l} x-2y+z+3=0 \\ x-2y+z-21=0 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} 3x+y+4z+1=0 \\ 3x+y+4z-2=0 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} 4x-3y-z+5=0 \\ 4x-3y-z-27=0 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} 2x-y+2z+3=0 \\ 2x-y+2z-21=0 \end{array}\right.$.

Câu 56. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$, mặt phẳng $(\alpha): x+4y+z-11=0$. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với (α), (P) song song với giá của vecto $\vec{v}=(1;6;2)$ và (P) tiếp xúc với (S). Lập phương trình mặt phẳng (P).

A. $2x-y+2z-2=0$ và $x-2y+z-21=0$. **B.** $x-2y+2z+3=0$ và $x-2y+z-21=0$.

C. $2x-y+2z+3=0$ và $2x-y+2z-21=0$. **D.** $2x-y+2z+5=0$ và $2x-y+2z-2=0$.

Câu 57. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=6$ đồng thời song song với hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-1}$, $d_2: \frac{x}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{-1}$.

A. $\left[\begin{array}{l} x-y+2z-3=0 \\ x-y+2z+9=0 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x+y+2z-3=0 \\ x+y+2z+9=0 \end{array}\right.$ **C.** $x+y+2z+9=0$ **D.** $x-y+2z+9=0$

Câu 58. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $d: \frac{x-4}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+4}{-4}$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x-3)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$. Khi đó (P) song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. $3x-y+2z=0$. **B.** $-2x+2y-z+4=0$.

C. $x+y+z=0$ **D.** Đáp án khác.

Câu 59. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=2$ và hai đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}$; $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của một mặt phẳng tiếp xúc với (S), song song với d và Δ?

A. $y+z+3=0$ **B.** $x+z+1=0$ **C.** $x+y+1=0$ **D.** $x+z-1=0$

Câu 60. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$, đường thẳng $\Delta:\frac{x-6}{-3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{2}$ và điểm $M(4;3;1)$. Trong các mặt phẳng sau mặt phẳng nào đi qua M, song song với Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S)?

A. $2x-2y+5z-22=0$. **B.** $2x+y+2z-13=0$.

C. $2x+y-2z-1=0$. **D.** $2x-y+2z-7=0$.

Câu 61. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ và mặt phẳng $(\alpha):4x+3y-12z+10=0$. Lập phương trình mặt phẳng (β) thỏa mãn đồng thời các điều kiện: Tiếp xúc với (S); song song với (α) và cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương.

A. $4x+3y-12z-78=0$. **B.** $4x+3y-12z-26=0$.

C. $4x+3y-12z+78=0$. **D.** $4x+3y-12z+26=0$.

Câu 62. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ và đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng (P), (P') chứa d và tiếp xúc với (S) tại T, T'. Tìm tọa độ trung điểm H của TT'.

A. $H\left(-\frac{7}{6};\frac{1}{3};\frac{7}{6}\right)$. **B.** $H\left(\frac{5}{6};\frac{2}{3};-\frac{7}{6}\right)$. **C.** $H\left(\frac{5}{6};\frac{1}{3};-\frac{5}{6}\right)$. **D.** $H\left(-\frac{5}{6};\frac{1}{3};\frac{5}{6}\right)$.

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$, $B(0;0;2)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$. Số mặt phẳng chứa hai điểm A, B và tiếp xúc với mặt cầu (S) là

A. 1 mặt phẳng. **B.** 2 mặt phẳng. **C.** 0 mặt phẳng. **D.** Vô số mặt phẳng.

Câu 64. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x+2}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{-1}$ và và mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-67=0$. Số điểm chung của Δ và (S) là:

A.3. **B.**0. **C.** 1 **D.** 2.

Câu 65. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases} x=2+t \\ y=1+mt \\ z=-2t \end{cases}$ và mặt cầu. $(S):(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=1$. Giá trị của m để đường thẳng Δ không cắt mặt cầu (S) là:

A. $m > \frac{15}{2}$.hoặc $m < \frac{5}{2}$ **B.** $m = \frac{15}{2}$.hoặc $m = \frac{5}{2}$

C. $\frac{5}{2} < m < \frac{15}{2}$. **D.** $m \in \mathbb{R}$.

Câu 66. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=1$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+mt \\ z = -2t \end{cases}$. Giá trị của m để đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt là:

A. $m \in \mathbb{R}$. **B.** $m > \frac{15}{2}$.hoặc $m < \frac{5}{2}$

C. $m = \frac{15}{2}$.hoặc $m = \frac{5}{2}$ **D.** $\frac{5}{2} < m < \frac{15}{2}$.

Câu 67. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với trục Oy là:

A. $(x-1)^2+(y+2)^2(z-3)^2=9$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2(z-3)^2=\sqrt{10}$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2(z+3)^2=10$. **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2(z-3)^2=10$.

Câu 68. Trong không gian $Oxyz$, biết mặt cầu (S) có tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y+2z+9=0$ tại điểm $H(a;b;c)$. Giá trị của tổng $a+b+c$ bằng

A. 2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** -2.

Câu 69. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;0;2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I, tiếp xúc với đường thẳng d. Bán kính của (S) bằng

A. $\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{30}}{3}$. **D.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính $R=5$, có tâm I thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với trục Oy. Biết rằng I có tung độ dương. Điểm nào sau đây thuộc mặt cầu (S)?

A. $M(-1;-2;1)$. **B.** $N(1;2;-1)$. **C.** $P(-5;2;-7)$. **D.** $Q(5;-2;7)$.

Câu 71. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;6;2)$ và $B(2;-2;0)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z=0$. Xét đường thẳng d thay đổi thuộc (P) và đi qua B, gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d. Biết rằng khi d thay đổi thì H thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A. $R=\sqrt{3}$ **B.** $R=2$ **C.** $R=1$ **D.** $R=\sqrt{6}$

Câu 72. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d):\frac{x}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{1}$ và hai mặt phẳng $(P):x-2y+2z=0$; $(Q):x-2y+3z-5=0$. Mặt cầu (S) có tâm I là giao điểm của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P). Mặt phẳng (Q) tiếp xúc với mặt cầu (S). Viết phương trình mặt cầu (S).

A. $(S):(x+2)^2+(y+4)^2+(z+3)^2=1$.
B. $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=6$.
C. $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=\frac{2}{7}$.
D. $(S):(x-2)^2+(y+4)^2+(z+4)^2=8$.

Câu 73. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$, $B(2;2;1)$ và mặt phẳng $(P):x+y+2z=0$. Mặt cầu (S) thay đổi qua A,B và tiếp xúc với (P) tại H. Biết H chạy trên 1 đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

A. $3\sqrt{2}$.
B. $2\sqrt{3}$.
C. $\sqrt{3}$.
D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 74. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $M(x_0;y_0;z_0)\in d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=2-3t\end{cases}$.

Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $D(1;1;2)$. Tổng $T=x_0^2+y_0^2+z_0^2$ bằng

A. 30.
B. 26.
C. 20.
D. 21.

Câu 75. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-2y+z+3=0$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=9$ và đường thẳng $d:\frac{x}{-2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{2}$. Cho các phát biểu sau đây:

I. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm phân biệt.

II. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

III. Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.

IV. Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại một điểm.

Số phát biểu đúng là:

A. 4.
B. 1.
C. 2.
D. 3.

Câu 76. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=14$ và mặt phẳng $(\alpha):x+3y+2z-5=0$. Biết đường thẳng Δ nằm trong (α), cắt trục Ox và tiếp xúc với (S). Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của Δ?

A. $\vec{u}=(4;-2;1)$.
B. $\vec{v}=(2;0;-1)$.
C. $\vec{m}=(-3;1;0)$.
D. $\vec{n}=(1;-1;1)$.

Câu 77. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu (S) tâm $I(5;-3;5)$, bán kính $R=2\sqrt{5}$. Từ một điểm A thuộc mặt phẳng (P) kẻ một đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại B. Tính OA biết $AB=4$.

A. $OA=\sqrt{11}$. **B.** $OA=5$. **C.** $OA=3$. **D.** $OA=\sqrt{6}$.

Câu 78. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc $d:\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=2-3t \end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua $D(1;1;2)$. Tổng $T=x_0^2+y_0^2+z_0^2$ bằng

A. 30 **B.** 26 **C.** 20 **D.** 21

Câu 79. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(0;0;3), B(-2;0;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+2z+8=0$. Hỏi có bao nhiêu điểm C trên mặt phẳng (α) sao cho tam giác ABC đều?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** Vô số.

Câu 80. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1;3;9)$ bán kính bằng 3. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai trục Ox, Oz sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S), đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{13}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S), giá trị $AM.AN$ bằng

A. 39. **B.** $12\sqrt{3}$. **C.** 18. **D.** $28\sqrt{3}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 81. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=16$ và điểm $A(1;2;-1)$.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R=4$.

b) Điểm $A(1;2;-1)$ nằm bên trong mặt cầu (S).

c) Phương trình mặt cầu (S_1) có đường kính IA là $(x-1)^2+y^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{17}{4}$.

d) Phương trình mặt phẳng (Q) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm $N(1;-2;-4)$ có dạng $ax+by+z+d=0$. Khi đó $2025a+2026b+d=4051$

Câu 82. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$ và điểm $A(0;2;-3)$.

a) Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$, bán kính $R=3$.

b) Điểm $A(0;2;-3)$ nằm ngoài mặt cầu.

c) Phương trình đường thẳng đi qua tâm I và điểm A là: $\begin{cases} x=-1+t \\ y=1+t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=-2+t \end{cases}$

d) Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua tâm I và song song với mặt phẳng $(P):x+y+z-3=0$ có dạng $ax+by+z+d=0$. Khi đó $2025a+2026b+d=4053$

Câu 83. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y+1=0$ có tâm I và bán kính R.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R=2$.

b) Bán kính của mặt cầu (S) là đoạn IM với điểm $M(1;1;2)$.

c) Mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(0;1;-2)$ và $B(2;-1;-4)$.

d) Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P):x+y-z-2=0$.

Câu 84. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình: $x^2+y^2+z^2+4x-2y+1=0$.

a) Đường kính mặt cầu (S) bằng 4.

b) Mặt cầu (S) đi qua điểm $A(-1;3;0)$.

c) Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng (Oyz) bằng 2.

d) Mặt phẳng $(P):x+2y-2z-2=0$ tiếp xúc với mặt cầu (S).

Câu 85. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;2),B(1;0;3)$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc trục Ox và đi qua hai điểm A,B.

a) Bán kính của mặt cầu (S) là $R = IA = IB$.

b) $I(1;0;0))$

c) Mặt cầu (S) có phương trình là :$(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 9$.

d) Điểm $M(x;y;z)$thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $P = MA^2 + MB^2 + MI^2$đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị biểu thức $T = x + 3y + 3z = 5$.

Câu 86. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}$ và mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;0)$. Đường thẳng *d* cắt mặt cầu (S) tại hai điểm *A, B* sao cho $AB = 8$.

a) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(3;2;0)$ và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là $x + 2y + 2z + 7 = 0$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông của I trên đường thẳng d. Khi đó $H(1;1;2)$.

c) Mặt cầu (S)có bán kính $R = 4$.

d) Phương trình mặt cầu (S): $(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 16$

Câu 87. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;0;2)$, $B(1;1;0)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = \frac{1}{4}$.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(0;\ 0;\ 1)$ và bán kính $R = \frac{1}{2}$.

b) Điểm A nằm ngoài mặt cầu (S).

c) Phương trình mặt cầu tâm A và đi qua B là: $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$

d) Điểm M thay đổi thuộc (S), giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA^2 + 2MB^2$ bằng $\frac{15}{4}$.

Câu 88. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;1;1), B(1;0;-3), C(-1;-2;-3)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0$.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;0;1)$, bán kính $R = 2$.

b) $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-8;8;-4)$

c) Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $ax + by + z + d = 0$. Khi đó $a - b + d = 5$.

d) Mặt phẳng (ABC) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính bằng $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Câu 89. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz,* cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 2 = 0$ và điểm $I(-1;\ 2;\ -1)$. Biết mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) có diện tích là 25π.

a) Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) bằng 3.

b) Bán kính đường tròn (C) bằng 4.

c) Gọi $H(x_0;y_0;z_0)$ là tọa độ tâm đường tròn (C). Khi đó $2024x_0+2025y_0+2026z_0=6075$

d) Phương trình mặt cầu (S) là $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=\sqrt{34}$

Câu 90. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$, mặt phẳng $(P):x+2y-2z+8=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=3-t\end{cases}$.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;1;-1)$, bán kính $R=3$.

b) Điểm $M(1;3;5)$ nằm ngoài mặt cầu (S).

c) Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $\sqrt{5}$.

d) Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A,B. Khi đó, diện tích tam giác IAB bằng $\frac{\sqrt{182}}{5}$.

Câu 91. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-1)$ cắt đường thẳng $(d):\frac{x-11}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+25}{-2}$ tại hai điểm A,B sao cho $AB=16$.

a) Đường thẳng (d) có vecto chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;-2)$.

b) Mặt phẳng (P) chứa $I(2;3;-1)$ và vuông góc với đường thẳng (d) có phương trình là $2x+y-2z+9=0$.

c) Mặt cầu (S) có bán kính bằng 17.

d) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289$

Câu 92. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$ và điểm $M(-1;0;2)$.

a) $IM=3$.

b) Phương trình mặt cầu tâm I và đi qua điểm M có phương trình là: $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$.

c) Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm M là $2x+2y+z=0$.

d) Phương trình mặt cầu tâm I, cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho độ dài đoạn $AB=2\sqrt{3}$ là $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$.

Câu 93. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm I và đi qua bốn điểm $A(2;0;0),B(1;3;0),C(-1;0;3),D(1;2;3)$.

a) Mặt cầu (S) có bán kính bằng IA.

b) Mặt cầu (S) có tọa độ tâm I là $I(0;1;1)$.

c) Mặt cầu (S) có bán kính bằng 3.

d) Mặt cầu (S) có phương trình: $x^2+(y+1)^2+(z+1)^2=9$.

Câu 94. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$.

a) Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;-1)$.

b) Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;0;2)$ và bán kính $R=2$.

c) Điểm $A(1;2;3)$ nằm ngoài mặt cầu.

d) Số điểm chung của đường thẳng Δ và mặt cầu (S) bằng 0.

Câu 95. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-1)^2=5$ và hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.

b) $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}\right]=(-5;5;0)$

c) Đường thẳng AB cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt.

d) Điểm M thay đổi thuộc (S), biểu thức $2MA^2+3MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 108 (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 96. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-4)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=169$.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(-4;-3;1)$.

b) Diện tích mặt cầu (S) bằng 676π.

c) Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y-2z-39=0$.

d) Mặt cầu (S) cắt trục Oz tại hai điểm phân biệt A, B, khi đó $AB=12$.

Câu 97. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d: \frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+4}{-5}$ và $d': \frac{x+1}{3}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-4}{-1}$.

a) Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d=(2;3;-5)$.

b) Đường thẳng d' có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_{d'}=(-3;2;1)$.

c) Phương trình đường vuông góc chung của d và d' có dạng $\begin{cases} x=at \\ y=bt \\ z=c+t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$, khi đó $a+b+c=1$.

d) Phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng $(d),(d')$ là $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=3$

Câu 98. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{2}$ và hai mặt phẳng $(P):x+2y-2z-2=0$, $(Q):x+2y-2z+4=0$.

a) Mặt phẳng (P) có một vec tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(1;2;-2)$.

b) Phương trình tham số của Δ là $\begin{cases}x=2-3t\\ y=1+2t\\ z=1+2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

c) Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I(x_0;y_0;z_0)$ thuộc đường thẳng Δ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P),(Q)$. Khi đó $x_0+y_0+z_0=4$.

d) Gọi (S) là mặt cầu có tâm I thuộc đường thẳng Δ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P),(Q)$. Khi đó, phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=1$.

Câu 99. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:x=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P):3x+y-z-5=0$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng d và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn lớn nhất có bán kính $r=5$.

a) Mặt phẳng $(P):3x+y-z-5=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;1;-1)$.

b) Đường thẳng d có phương trình tham số là $\begin{cases}x=t\\ y=1+2t\\ z=2-t\end{cases}$.

c) $d(I,(P))=5$.

d) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=25$.

Câu 100. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Gọi (S) là mặt cầu đi qua ba điểm A,B,C và có tâm $I(a;b;c)$ nằm trên mặt phẳng (Oxy).

a) $I(a;b;0)$

b) $I(2;1;0)$

c) Đường kính của mặt cầu (S) bằng $2\sqrt{26}$

d) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=104$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 101. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình: $x^2+y^2+z^2+4mx+2my-2mz+9m^2-28=0$ là phương trình mặt cầu?

Trả lời: ………………..

Câu 102. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá nguyên của m để phương trình: $x^2+y^2+z^2+2(m+2)x-2(m-1)z+3m^2-5=0$ là phương trình một mặt cầu?

Trả lời: ………………..

Câu 103. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2my+3m^2-2m=0$ với m là tham số. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu.

Trả lời: ………………..

Câu 104. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-2025;2025)$ để phương trình $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0$ là phương trình mặt cầu?

Trả lời: ………………..

Câu 105. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1;0;0)$, $B(0;0;2)$, $C(0;-3;0)$. Gọi R bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Tính R^2.

Trả lời: ………………..

Câu 106. Trong không gian $Oxyz$, gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng tọa độ. Tính $P=a-b+c$.

Trả lời: ………………..

Câu 107. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (Oxy) tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-3)^2+y^2+(z-2)^2=m^2+1$ (m là tham số). Tính giá trị của m^2.

Trả lời: ………………..

Câu 108. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Gọi R là bán kính của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy). Tính R^2.

Trả lời: ………………..

Câu 109. Trong không gian $Oxyz$, gọi (S) là mặt cầu đi qua điểm $D(0;1;2)$ và tiếp xúc với các trục Ox, Oy, Oz tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ trong đó $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$. Gọi R là bán kính của (S). Tính R^2.

Trả lời: ………………..

Câu 110. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $C(0;0;3)$, $B(0;2;0)$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2=MB^2+MC^2$ là mặt cầu có bán kính R. Tính R^2.

Trả lời: ………………..

Câu 111. Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cầu (S) có phương trình dạng $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2az+10a=0$. Tính tổng các giá trị thực của a để mặt cầu (S) có chu vi đường tròn lớn bằng 8π.

Trả lời: ………………..

Câu 112. Cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x-2y-z+9=0$. Tính bán kính của đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S).

Trả lời: ………………..

Câu 113. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y-2z-1=0$ và điểm $M(1;-2;0)$. Mặt cầu tâm M, bán kính bằng $\sqrt{3}$ cắt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng thập phân chữ số thứ hai).

Trả lời: ………………..

Câu 114. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+2y+z-m^2-3m=0$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$. Tính tổng các giá trị của m để (P) tiếp xúc với (S).

Trả lời: ………………..

Câu 115. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=4$ và mặt phẳng $(P): x+my+z-3m-1=0$. Tính tổng các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có đường kính bằng 2.

Trả lời: ………………..

Câu 116. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+m-3=0$. Tìm số thực của tham số m để mặt phẳng $(\beta): 2x-y+2z-8=0$ cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π.

Trả lời: ………………..

Câu 117. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x-y+z-2=0$ và $(Q): 2x-y+z+1=0$. Có bao nhiêu mặt cầu đi qua $A(1;-2;1)$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P),(Q)$?

Trả lời: ………………..

Câu 118. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $I(0;2;3)$. Tính bán kính mặt cầu tâm I tiếp xúc với trục Oy.

Trả lời: ………………..

Câu 119. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (S) là mặt cầu đi qua hai điểm $A(3;-1;2), B(1;1;-2)$ và có tâm thuộc trục Oz. Bán kính của mặt cầu (S) là R. Giá trị R^2 bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 120. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$ và I là hình chiếu vuông góc của $M(3;1;2)$ trên trục Ox. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và đi qua điểm M. Độ dài bán kính mặt cầu bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 121. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm là điểm $A(1;2;-3)$ và đi qua điểm $B(3;-2;1)$. Gọi $M(1;b;-3)$ là điểm thuộc mặt cầu biết $b \in \mathbb{N}^*$. Tung độ điểm M có giá trị bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 122. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;-4;3)$ và tiếp xúc với trục Ox. Bán kính của mặt cầu trên bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 123. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có bán kính bằng 2, tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) và có tâm nằm trên tia Ox. Hoành độ của tâm mặt cầu (S) bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 124. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có phương trình: $(x-a)^2 + y^2 + (z-c)^2 = 16$ đi qua hai điểm O và $M(1;0;1)$. Tính $a+c$

Trả lời: ………………..

Câu 125. Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;3)$ và có đúng một điểm chung với mặt phẳng (Oxy). Gọi một giao điểm của mặt cầu (S) với trục Oz là $A(a;b;c)$ $(c>1)$. Tổng $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 126. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(6;5;4)$ và mặt cầu (S) đi qua M, tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy). Gọi R là bán kính của mặt cầu (S), giá trị nhỏ nhất của R bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 127. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1), B(3;1;-2)$. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $AM^2 + BM^2 = 30$ là một mặt cầu (S) có bán kính R. Tính R^2.

Trả lời: ………………..

Câu 128. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1), B(3;1;-2)$. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $\frac{MA}{MB}=2$ là một mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$. Tính giá trị của biểu thức $3a+3b+c$.

Trả lời: ………………..

Câu 129. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;1), B(1;-1;2)$. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $\widehat{AMB}=90^0$ là một mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$. Tính giá trị của biểu thức $2025a+2b+2c$.

Trả lời: ………………..

Câu 130. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y-2z+3=0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích 2π. Phương trình mặt cầu (S) có dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, khi đó giá trị của biểu thức $a+b+c+R^2$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 131. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+z+7=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4z-10=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) theo một giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng 6π. Biết phương mặt phẳng (Q) có dạng: $x+by+cz+d=0$, khi đó giá trị của biểu thức $T=b+c+d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 132. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ và mặt phẳng $(\alpha): 4x+3y-12z+10=0$. Mặt phẳng (β) thỏa mãn đồng thời các điều kiện: tiếp xúc với (S); song song với (α) và cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương. Biết phương mặt phẳng (β) có dạng: $4x+by+cz+d=0$, khi đó giá trị của biểu thức $T=b+c+d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 133. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(Q): x-2y+z-5=0$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2+y^2+(z+2)^2=15$. Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π? Biết phương mặt phẳng (P) có dạng: $x+by+cz+d=0$, khi đó giá trị của biểu thức $T=b+c+d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 134. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$ và điểm $A(2;3;4)$. Tập hợp điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) là mặt phẳng có phương trình dạng: $x+by+cz+d=0$. Tính giá trị của biểu thức $T=b+c+d$.

Trả lời: ………………..

Câu 135. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(2;-2;2)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z+2)^2=1$. Điểm M di chuyển trên mặt cầu (S) đồng thời thỏa mãn $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AM}=6$. Tập hợp điểm M là mặt phẳng có phương trình dạng: $2x+by+cz+d=0$. Tính giá trị của biểu thức $T=b+c+d$.

Trả lời: ………………..

Câu 136. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ và điểm $A(2;2;2)$. Xét các điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho đường thẳng AM luôn tiếp xúc với (S). Tập hợp điểm M là mặt phẳng có phương trình dạng: $x+by+cz+d=0$. Tính giá trị của biểu thức $T=b+c+d$.

Trả lời: ………………..

Câu 137. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$. Biết rằng (ABC) đi qua điểm $M\left(\frac{1}{7};\frac{2}{7};\frac{3}{7}\right)$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{72}{7}$. Tính $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

Trả lời: ………………..

Câu 138. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(2;1;4)$, $N(5;0;0)$, $P(1;-3;1)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M,N,P. Tìm c biết rằng $a+b+c<5$.

Trả lời: ………………..

Câu 139. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-1)^2=4$ và điểm $A(2;2;2)$. Từ A kẻ ba tiếp tuyến AB, AC, AD với B, C, D là các tiếp điểm. Biết phương trình mặt phẳng (BCD) có dạng: $2x+by+cz+d=0$. Tính giá trị của biểu thức $T=b+c+d$.

Trả lời: ………………..

Câu 140. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu (S): $x^2+y^2+(z-1)^2=25$ và (S'): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc (S') và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π. Biết phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $x+by+cz+d=0$. Tính giá trị của biểu thức $T=b+c+d$.

Trả lời: ………………..

Câu 141. Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt cầu $(S_1):(x+3)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=1$, $(S_2):x^2+(y-2)^2+(z-4)^2=4$ và $(S_3):x^2+y^2+z^2+4x-4y-1=0$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3)?

Trả lời: ………………..

Câu 142. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(-3;1;1), B(1;-1;5)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z+11=0$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A,B và tiếp xúc với (P) tại điểm C. Biết C luôn thuộc một đường tròn (T) cố định. Tính bán kính r của đường tròn (T).

Trả lời: ………………..

Câu 143. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P):2x-2y-z-4=0$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc với (P) tại điểm $H(a;b;c)$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c$.

Trả lời: ………………..

Câu 144. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$ (m là tham số) và đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=4+2t\\y=3+t\\z=3+2t\end{cases}$. Biết đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB=8$. Tìm giá trị của m.

Trả lời: ………………..

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 145. Cho x,y,z là ba số thực thỏa $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z-11=0$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=2x+2y-z$.

Câu 146. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha):2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Đường thẳng Δ qua A, nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B. Để độ dài AB nhỏ nhất thì phương trình đường thẳng Δ có dạng $\dfrac{x+3}{a}=\dfrac{y-3}{11}=\dfrac{z+3}{b}$. Tính giá trị biểu thức $T=a+b$.

Câu 147. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;0;2)$, $B(3;0;2)$ và mặt cầu $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn bán kính nhỏ nhất có dạng $3x+by+cz+d=0$. Tính giá trị biểu thức $T=b+c+d$.

Câu 148. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Giả sử $M\in(P)$ và $N\in(S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}(1;0;1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN^2.

Câu 149. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\ y=-1+t\\ z=-t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$. Mặt phẳng chứa d và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là dạng $ax+y+cz+d=0$. Tính giá trị biểu thức $T=2025a+2026c+d$.

Câu 150. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6),B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Mặt phẳng $(P):ax+by+cz-2=0$ đi qua A,B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$

Câu 151. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;4),B(0;0;1)$ và mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=4$. Mặt phẳng $(P):ax+by+cz-4=0$ đi qua A,B và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$?

Câu 152. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$, điểm $A(0;0;2)$. Phương trình mặt phẳng $(P):ax+2y+cz+d=0$ qua A và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có diện tích nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $T=a+c+d$.

Câu 153. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là $x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+7=0$. Cho ba điểm A, M, B nằm trên mặt cầu (S) sao cho $\widehat{AMB}=90°$. Diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

Câu 154. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=8$. Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M, cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi S là diện tích lớn nhất của tam giác OAB. Tính S^2.

Câu 155. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1:\begin{cases}x=4-2t\\y=t\\z=3\end{cases},(t\in\mathbb{R}), d_2:\begin{cases}x=1\\y=t'\\z=-t'\end{cases},(t'\in\mathbb{R})$. Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng $(d_1),(d_2)$ có tâm $I(a;b;c)$. Tính giá trị biểu thức $T=2a+b+c$.

Câu 156. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=4$ có tâm I và mặt phẳng $(P):2x-y+2z+2=0$. Gọi tọa độ điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc (P) sao cho đoạn IM ngắn nhất. Tính giá trị biểu thức $T=3a+6b+9c$.

Câu 157. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1;-2;1)$; bán kính $R=4$ và đường thẳng $d:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{-1}$. Mặt phẳng (P) chứa d và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có diện tích nhỏ nhất. Biết phương trình mặt phẳng (P) có dạng $x+by+cz+d=0$. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$.

Câu 158. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;-1;3), B(-2;-8;-4)$, $C(2;-1;1)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$. Gọi $M(x_M;y_M;z_M)$ là điểm trên (S) sao cho biểu thức $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P=x_M+y_M$.

Câu 159. Cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$ và hai điểm $A(1;1;3)$, $B(21;9;-13)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho $3MA^2+MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T=a.b.c$ bằng bao nhiêu?

Câu 160. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm A, B thay đổi trên mặt cầu $x^2+y^2+(z-1)^2=25$ thỏa mãn $AB=6$. Giá trị lớn nhất của biểu thức OA^2-OB^2 bằng bao nhiêu?

Câu 161. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; M là điểm thay đổi trên (S). Gọi m,n là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2MA^2-MB^2$. Tính giá trị $T=m-n.$

Câu 162. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=3$. Xét điểm M thay đổi thuộc mặt cầu (S), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng bao nhiêu?

Câu 163. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(2;1;3)$, $C(0;2;-3)$, $D\left(2;0;\sqrt{7}\right)$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu $(S):(x+2)^2+(y-4)^2+z^2=39$ thỏa mãn $MA^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=8$. Biết rằng đoạn thẳng MD đạt giá trị lớn nhất. Tính MD^2.

Câu 164. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;2)$ và $B(3;4;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1):(x-1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=25$ với $(S_2): x^2+y^2+z^2-2x-2y-14=0$. M, N là hai điểm thuộc (P) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ bằng bao nhiêu?

Câu 165. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-4=0$ và hai điểm $A(4;2;4)$, $B(1;4;2)$. MN là dây cung của mặt cầu thỏa mãn $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{u}=(0;1;1)$ và $MN=4\sqrt{2}$. Tính giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$.

Câu 166. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi điểm $M(a;b;c)$ (với a, b, c là các phân số tối giản) thuộc mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z-7=0$ sao cho biểu thức $T=2a+3b+6c$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó giá trị biểu thức $P=2a-b+c$ bằng bao nhiêu?

Câu 167. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;2;-2)$; $B(3;-3;3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{2}{3}$. Khi độ dài OM lớn nhất, tính OM^2.

Câu 168. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+\dfrac{9}{2}=0$ và hai điểm $A(0;2;0)$, $B(2;-6;-2)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (S) thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ có giá trị nhỏ nhất. Tổng $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

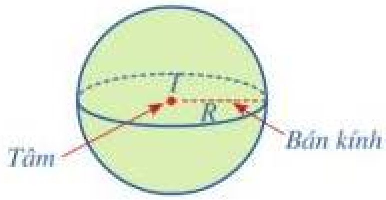
Câu 169. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=1$. Điểm $M\in(S)$ có tọa độ dương; mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) tại M cắt các tia Ox; Oy; Oz tại các điểm A, B, C. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\left(1+OA^2\right)\left(1+OB^2\right)\left(1+OC^2\right)$ bằng bao nhiêu?

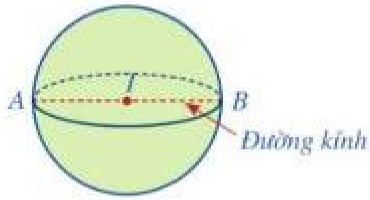
Câu 170. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, Cho điểm $A(2t;2t;0)$, $B(0;0;t)$ (với $t>0$). Điểm P di động thỏa mãn $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}=3$. Biết rằng có giá trị $t=\dfrac{a}{b}$ với a, b nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản sao cho OP đạt giá trị lớn nhất bằng 3. Khi đó giá trị của $Q=2a+b$ bằng bao nhiêu?

BÀI 3
PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

1. Định nghĩa mặt cầu

Cho điểm I và số dương R. Mặt cầu tâm I bán kính R là tập hợp tất cả các điểm trong không gian cách điểm I một khoảng R.





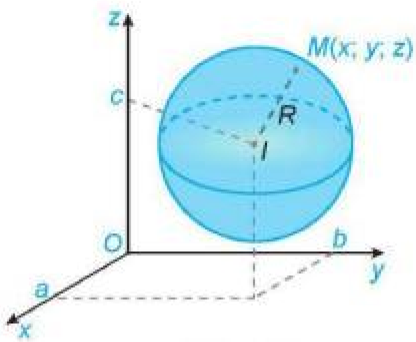
Nhận xét: Cho mặt cầu tâm $S(I;R)$

- Nếu $IM = R$ thì M nằm trên mặt cầu.
- Nếu $IM < R$ thì M nằm trong mặt cầu.
- Nếu $IM > R$ thì M nằm ngoài mặt cầu.

2. Phương trình của mặt cầu

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$, bán kính R có phương trình là:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

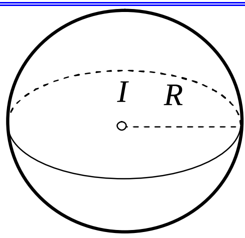


Nhận xét: Phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình của mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

CHỦ ĐỀ 1
PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

DẠNG 1
XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN MẶT CẦU



- Phương trình mặt cầu (S) có dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ thì mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và có bán kính R.
- Phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$ thì để xác định tọa độ tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R ta thức hiện như sau:

+ Xác định tọa độ tâm I : $\begin{cases}-2a=...\\-2b=...\\-2c=...\end{cases}$

+ Xác định bán kính: $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Chú ý:

- Có thể xác định tọa độ tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R của phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ bằng cách nhóm nhân tử để đưa về dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.
- Để một phương trình là một phương trình mặt cầu, cần thỏa mãn hai điều kiện: Hệ số trước x^2, y^2, z^2 phải bằng 1 và $a^2+b^2+c^2-d>0$

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ tâm và bán của của các mặt cầu sau:

a) $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$

b) $(S):\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(-y-1)^2+z^2=9$.

c) $(S): x^2+y^2+z^2+2x-2y+8z-18=0$

d) $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-2=0$

Lời giải

a) $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$

Mặt cầu $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ có tâm là $I(a;b;c)$.

Suy ra, mặt cầu (S) có tâm là $I(1;-2;3)$.

b) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(-y-1)^2+z^2=9 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2+z^2=9$

Mặt cầu (S) có tâm $I\left(\frac{1}{2};-1;0\right)$, bán kính $R=3$.

c) $(S): x^2+y^2+z^2+2x-2y+8z-18=0$

Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ với $a=\frac{2}{-2}=-1,\ b=\frac{-2}{-2}=1,\ c=\frac{8}{-2}=-4$ nên $I(-1;1;-4)$.

Mặt cầu (S) có bán kính là $R=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-4)^2-(-18)}=6$.

d) $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-2=0$

Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ với $a=\frac{-2}{-2}=1,\ b=\frac{-4}{-2}=2,\ c=\frac{2}{-2}=-1$ nên $I(1;2;-1)$.

Mặt cầu (S) có bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2-(-2)}=2\sqrt{2}$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình mặt cầu? Nếu là phương trình mặt cầu hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

a) $x^2+y^2+z^2-2x-5z+30=0$

b) $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z=0$

c) $x^3+y^3+z^3-2x+6y-9z-10=0$

d) $x^2+y^2+z^2+5=0$

e) $3x^2+2y^2+z^2-2x-2y+2z+1=0$

f) $x^2+y^2-2x+6y-8z-3=0$

g) $x^2+y^2+z^2-6x+8y-2z+10=0$

h) $2x^2+2y^2+2z^2+12x+4y-8z+20=0$

Lời giải

a) $x^2+y^2+z^2-2x-5z+30=0$

Ta có $a=1,\ b=0,\ c=\frac{5}{2},\ d=30$.

Do $a^2+b^2+c^2-d=1+0+\frac{25}{4}-30<0$ nên phương trình đã cho không phải là phương trình mặt cầu.

b) $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z=0$

Ta có $a=2,\ b=-1,\ c=1,\ d=0$.

Do $a^2+b^2+c^2-d=4+1+1-0=6>0$ nên phương trình đã cho là phương trình mặt cầu. Khi đó mặt cầu có tâm $I(2;-1;1)$ và bán kính $R=\sqrt{6}$.

c) $x^3+y^3+z^3-2x+6y-9z-10=0$

Do phương trình $x^3+y^3+z^3-2x+6y-9z-10=0$ có chứa x^3 nên phương trình đã cho không phải là phương trình mặt cầu.

d) $x^2+y^2+z^2+5=0$

Ta có $a=0,\ b=0,\ c=0,\ d=5$.

Do $a^2+b^2+c^2-d=0+0+0-5<0$ nên phương trình đã cho không phải là phương trình mặt cầu.

e) $3x^2+2y^2+z^2-2x-2y+2z+1=0$

Phương trình $3x^2+2y^2+z^2-2x-2y+2z+1=0$ không phải là phương trình của một mặt cầu vì các hệ số của x^2 và y^2 khác nhau.

f) $x^2+y^2-2x+6y-8z-3=0$

Phương trình $x^2+y^2-2x+6y-8z-3=0$ không phải là phương trình của một mặt cầu vì không có biểu thức y^2.

g) $x^2+y^2+z^2-6x+8y-2z+10=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2.3.x+2.4.y-2.1.z+10=0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=16$

Vậy phương trình đã cho là phương trình mặt cầu tâm $I(3;-4;1)$ bán kính $R=\sqrt{16}=4$.

h) $2x^2+2y^2+2z^2+12x+4y-8z+20=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+6x+2y-4z+10=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2.3.x+2.1.y-2.2.z+10=0$

$\Leftrightarrow (x+3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$.

Vậy phương trình đã cho là phương trình mặt cầu tâm $I(-3;-1;2)$ bán kính $R=\sqrt{4}=2$.

Bài 3. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình: $(S): x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my-2mz+5m^2+9=0$ là phương trình mặt cầu.

Lời giải

Ta có $a=m+2; b=-2m; c=m; d=5m^2+9$

Ta có điều kiện xác định mặt cầu là $a^2+b^2+c^2-d>0$

$\Leftrightarrow (m+2)^2+4m^2+m^2-5m^2-9>0 \Leftrightarrow m^2+4m-5>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-5 \\ m>1 \end{array}\right.$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình mặt cầu? Nếu là phương trình mặt cầu hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

$(S_1): x^2+y^2+z^2+x-2y+4z-3=0$

$(S_2): 2x^2+2y^2+2z^2-x-y-z=0$

$(S_3): 2x^2+2y^2+2z^2+4x+8y+6z+3=0$

$(S_4): x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z+10=0$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu (S) có hai dạng là:

(1) $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$;

(2) $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$.

Từ đây ta có dấu hiệu nhận biết nhanh chóng, hoặc thực hiện phép biến đổi đưa phương trình cho trước về một trong hai dạng trên.

• $(S_1): x^2+y^2+z^2+x-2y+4z-3=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=1 \\ c=-2 \\ d=-1 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2-d=\dfrac{25}{4}>0$ nên phương trình đã cho là phương trình mặt cầu. Khi đó mặt cầu (S_1) có tâm $I\left(-\dfrac{1}{2};-1;-2\right)$ và bán kính $R=\sqrt{\dfrac{25}{4}}=\dfrac{5}{2}$.

• $(S_2): 2x^2+2y^2+2z^2-x-y-z=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{2}z=0$

$\Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{4} \\ b=\dfrac{1}{4} \\ c=\dfrac{1}{4} \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2-d=\dfrac{3}{4}>0$ nên phương trình đã cho là phương trình mặt cầu. Khi đó mặt cầu (S_2) có tâm $I\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)$ và bán kính $R=\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

• $(S_3): 2x^2+2y^2+2z^2+4x+8y+6z+3=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x+4y+3z+\dfrac{3}{2}=0$

$\Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \\ c=-\dfrac{3}{2} \\ d=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2-d=\dfrac{29}{4}>0$ nên phương trình đã cho là phương trình mặt cầu. Khi đó mặt cầu (S_3) có tâm $I\left(-1;-2;-\dfrac{3}{2}\right)$ và bán kính $R=\sqrt{\dfrac{29}{4}}=\dfrac{\sqrt{29}}{2}$.

- $(S_4): x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z+10=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \\ d=10 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2-d<0$ nên phương trình đã cho không phải là phương trình mặt cầu.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình mặt cầu? Nếu là phương trình mặt cầu hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

$(S_1): x^2+y^2+z^2-2x=0$

$(S_2): x^2+y^2-z^2+2x-y+1=0$

$(S_3): 2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1$

$(S_4): (x+y)^2=2xy-z^2+1-4x$

Lời giải

- $(S_1): x^2+y^2+z^2-2x=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2-d=1>0$ nên phương trình đã cho là phương trình mặt cầu. Khi đó mặt cầu (S_1) có tâm $I(1;0;0)$ và bán kính $R=\sqrt{1}=1$.
- $(S_2): x^2+y^2-z^2+2x-y+1=0$

vì hệ số của x^2, y^2, z^2 lần lượt là $1,1,-1$ nên phương trình đã cho không phải là phương trình mặt cầu.

- $(S_3): 2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2xy-2x+1=0$

vì chứa tích $-2xy$ nên phương trình đã cho không phải là phương trình mặt cầu.

- $(S_4): (x+y)^2=2xy-z^2+1-4x \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+4x-1=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=-1 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2-d=5>0$ nên phương trình đã cho là phương trình mặt cầu. Khi đó mặt cầu (S_4) có tâm $I(-2;0;0)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.

Bài 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình:

a) $x^2+y^2+z^2+2x-4y+2(m+1)z+2m^2+6=0$ là phương trình mặt cầu.

b) $x^2+y^2+z^2-2(3-m)x-2(m+1)y-2mz+2m^2+7=0$ không phải là phương trình mặt cầu.

Lời giải

a) Ta có: $\begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=-(m+1) \\ d=2m^2+6 \end{cases}$

để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu thì:

$a^2+b^2+c^2-d>0$

$\Leftrightarrow 1+4+(m+1)^2-\left(2m^2+6\right)>0$

$\Leftrightarrow -m^2+2m>0$

$\Leftrightarrow 0<m<2$

Vậy $0<m<2$ là giá trị cần tìm.

b) Ta có: $\begin{cases} a=3-m \\ b=m+1 \\ c=m \\ d=2m^2+7 \end{cases}$

để phương trình đã cho không phải là phương trình mặt cầu thì:

$a^2+b^2+c^2-d\le 0$

$\Leftrightarrow (3-m)^2+(m+1)^2+m^2-\left(2m^2+7\right)\le 0$

$\Leftrightarrow m^2-4m+3\le 0$

$\Leftrightarrow 1\le m\le 3$

Vậy $1\le m\le 3$ là giá trị cần tìm.

DẠNG 2
LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU DẠNG CƠ BẢN

Phương pháp: Dựa vào giả thiết bài toán, ta xác định được tọa độ tâm $I(a;b;c)$ và độ dài bán kính R.

Các dạng thường gặp:

Dạng 1: Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và đi qua điểm $A(x_A;y_A;z_A)$ thì bán kính

$$R=IA=\sqrt{(x_A-x_I)^2+(y_A-y_I)^2+(z_A-z_I)^2}$$

Dạng 2: Mặt cầu (S) có đường kính AB thì

Tâm $I(a;b;c)$ là trung điểm của AB hay $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

Bán kính $R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}{2}$

Dạng 3: Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ thì bán kính

$$R=d(I,(\alpha))=\frac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Dạng 4: Mặt cầu qua bốn điểm A,B,C,D không đồng phẳng (hay gọi là ngoại tiếp tứ diện $ABCD$).

Gọi (S) có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ $(*)$

Thay tọa độ 4 điểm A,B,C,D vào $(*)$ thì ta được hệ phương trình với 4 ẩn số a,b,c,d

Giải tìm a,b,c,d.

Suy ra tâm $I(a,b,c)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình của (S), biết:

a) mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;-2)$ và bán kinh bằng 3.

b) mặt cầu (S) có tâm $I(1;-4;3)$ và đi qua điểm $A(5;-3;2)$.

c) mặt cầu (S) có đường kính AB, với $A(1;1;1)$ và $B(1;-1;3)$.

Lời giải

a) Phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính bằng R: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Ta có mặt cầu tâm $I(0;1;-2)$ bán kính bằng 3 có phương trình là $(S): x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$.

b) Mặt cầu có tâm $I(1;-4;3)$ và đi qua điểm $A(5;-3;2)$ nên có bán kính $R=IA=3\sqrt{2}$

Vậy phương trình mặt cầu (S) cần tìm là: $(x-1)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=18$.

c) Gọi I là tâm của mặt cầu đường kính AB. Khi đó là trung điểm đoạn thẳng $AB \Rightarrow I(1;0;2)$

Bán kính của mặt cầu là: $R=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{(1-1)^2+(-1-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=2$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình của (S), biết:

a) mặt cầu (S) đi qua 4 điểm $A(2;0;0), B(1;3;0), C(-1;0;3), D(1;2;3)$.

b) mặt cầu (S) đi qua 3 điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$ và có tâm I nằm trên mặt phẳng Oxy.

c) mặt cầu (S) đi qua 2 điểm $A(1;1;2), B(3;2;-3)$ và có tâm I thuộc Ox.

d) mặt cầu (S) đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ.

Lời giải

a) Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D. Khi đó:

$$\begin{cases} AI^2=BI^2 \\ AI^2=CI^2 \\ AI^2=DI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2+b^2+c^2=(a-1)^2+(b-3)^2+c^2 \\ (a-2)^2+b^2+c^2=(a+1)^2+b^2+(c-3)^2 \\ (a-2)^2+b^2+c^2=(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-3b=-3 \\ a-c=-1 \\ a-2b-3c=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow I(0;1;1)$$

Bán kính: $R=IA=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$.

b) Gọi tâm $I(a;b;c)$ và phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

Do $I\in(Oxy) \Leftrightarrow c=0 \Leftrightarrow (S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by+d=0$.

Ta có: $\begin{cases} A\in(S) \\ B\in(S) \\ C\in(S) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+4b-d=21 \\ 2a-6b-d=11 \\ 4a+4b-d=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \\ d=-21 \end{cases}. \Rightarrow R=\sqrt{26}$

Vậy $I(-2;1;0). R=\sqrt{26}$

c) Gọi $I(a;0;0)\in Ox \Rightarrow \overrightarrow{IA}(1-a;1;2); \overrightarrow{IB}(3-a;2;-3)$.

Do (S) đi qua hai điểm A, B nên $IA=IB \Leftrightarrow \sqrt{(1-a)^2+5}=\sqrt{(3-a)^2+13} \Leftrightarrow 4a=16 \Leftrightarrow a=4$

$\Rightarrow (S)$ có tâm $I(4;0;0)$, bán kính $R=IA=\sqrt{14}$.

$\Rightarrow (S): (x-4)^2+y^2+z^2=14 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-8x+2=0.$

d) Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu (S).

Mặt cầu (S) tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ

$d\left(I,(Oxy)\right)=d\left(I,(Oyz)\right)=d\left(I,(Oxz)\right) \Leftrightarrow |a|=|b|=|c|=R \quad (1)$

Mặt cầu (S) đi qua $A(1;-1;4)$

$$\Rightarrow \begin{cases} IA=R \\ a>0;c>0;b<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2=R^2 \\ a>0;c>0;b<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+(b+1)^2+(c-4)^2=R^2 \\ a=c=-b=R>0 \quad (do(1)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+(-a+1)^2+(a-4)^2=a^2 \\ a=c=-b=R>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2-12a+18=0 \\ a=c=-b=R>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-6a+9=0 \\ a=c=-b=R>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=c=3 \\ b=-3 \\ R=3 \end{cases} \Rightarrow (S):(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9.$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình của (S), biết:

a) mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$ và bán kính bằng 2.

b) mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$ và đi qua điểm $A(1;2;3)$.

c) mặt cầu (S) có đường kính AB, với $A(2;-1;-3)$ và $B(0;3;-1)$.

Lời giải

a) Phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính bằng R: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$ và bán kính bằng 2 là: $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=4$.

b) Ta có $R=IA=\sqrt{(1-1)^2+(2-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}$

vậy phương trình mặt cầu tâm I và đi qua điểm A có phương trình là

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5$

c) Tâm I mặt cầu là trung điểm của AB

$I(1;1;-2)$ bán kính $R=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+4}=\frac{1}{2}\sqrt{24}$

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=6$

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình của (S), biết:

a) mặt cầu (S) có tâm $A(1;2;-3)$ và tiếp xúc với trục Ox.

b) mặt cầu (S) có tâm nằm trên mặt phẳng (Oyz) và đi qua các điểm $A(0;8;0),B(4;6;2),C(0;12;4)$.

c) mặt cầu (S) có tâm là $A(-2;-4;5)$ và cắt trục Oz tại hai điểm B, C sao cho ΔABC vuông.

Lời giải

a) Ta có: $R=d(A,Ox)=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$.

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $A(1;2;-3)$, bán kính $R=\sqrt{13}$ có phương trình là:

$$(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=13.$$

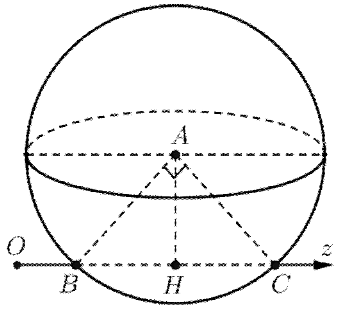
b) Gọi tâm mặt cầu là $I(0;b;c)\in(Oyz)$. Do $A(0;8;0),B(4;6;2),C(0;12;4)$ thuộc mặt cầu nên

Khi đó $IA=IB=IC \Leftrightarrow (b-8)^2+c^2=16+(b-6)^2+(c-2)^2=(b-12)^2+(c-4)^2$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} b-c=2 \\ b+c=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=7 \\ c=5 \end{cases}$. Vậy $I(0;7;5);R=IA=\sqrt{26}$

Phương trình mặt cầu là $x^2+(y-7)^2+(z-5)^2=26$.

c)



Do $AB=AC$ nên ΔABC vuông tại A. Gọi H trung điểm BC suy ra $AH=BH=HC$.

Do đó H là hình chiếu của điểm A lên trục Oz.

Ta có: $AB^2=AH^2+BH^2=2AH^2$

$\Rightarrow R=AH\sqrt{2}=d(A,Oz).\sqrt{2}=\sqrt{{x_A}^2+{y_A}^2}.\sqrt{2}=2\sqrt{10}$

Vậy mặt cầu có phương trình: $(x+2)^2+(y+4)^2+(z-5)^2=40$

DẠNG 3
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MỘT ĐIỂM VỚI MẶT CẦU

Cho mặt cầu tâm $S(I;R)$

- Nếu $IM=R$ thì M nằm trên mặt cầu.
- Nếu $IM<R$ thì M nằm trong mặt cầu.
- Nếu $IM>R$ thì M nằm ngoài mặt cầu.

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=4$ và ba điểm $M(2;4;3), N(0;-1;2), Q(3;5;2)$. Xét vị trí tương đối của các điểm M,N,Q với mặt cầu (S).

Lời giải

Mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=4$ có tâm $I(2;4;1)$, bán kính $R=2$.

Ta có:

$IM=\sqrt{(2-2)^2+(4-4)^2+(3-1)^2}=2\Rightarrow IN=R$, do đó M nằm trên mặt cầu.

$IN=\sqrt{(0-2)^2+(-1-4)^2+(2-1)^2}=\sqrt{30}>2\Rightarrow IN>R$, do đó N nằm ngoài mặt cầu.

$IQ=\sqrt{(3-2)^2+(5-4)^2+(2-1)^2}=\sqrt{3}<2\Rightarrow IQ<R$, do đó M nằm trong mặt cầu.

Bài 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-3)$, $B(-3;-2;-5)$. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $AM^2+BM^2=30$ là một mặt cầu (S). Tìm bán kính R của mặt cầu (S).

Lời giải

Gọi tọa độ điểm $M(x;y;z)$.

Theo đề bài: $AM^2+BM^2=30$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z+3)^2+(x+3)^2+(y+2)^2+(z+5)^2=30$

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2+4x+4y+16z+18=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x+2y+8z+9=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+1)^2+(z+4)^2=9$ là phương trình của mặt cầu (S), có tâm $I(-1;-1;-4)$ và bán kính $R=3$.

Bài 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm A,B cố định có độ dài AB là 4. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA=3MB$ là một mặt cầu. Tính bán kính mặt cầu đó.

Lời giải

Gọi I thỏa mãn $\overrightarrow{IA}-9\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Ta có: $MA=3MB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2=9\overrightarrow{MB}^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2=9\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

$\Leftrightarrow IA^2-9IB^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}-9\overrightarrow{IB}\right)=8MI^2\ (1)$

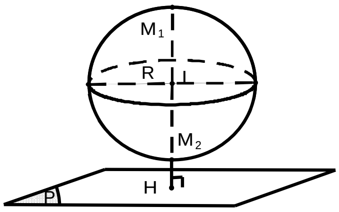
Vì $\overrightarrow{IA}-9\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BI}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$ nên $IB=\frac{1}{2};IA=\frac{9}{2}$.

Từ (1) suy ra $\Leftrightarrow 8MI^2=18 \Leftrightarrow MI=\frac{3}{2}$ suy ra M thuộc mặt cầu (S) có tâm là I và bán kính $R=\frac{3}{2}=1,5$.

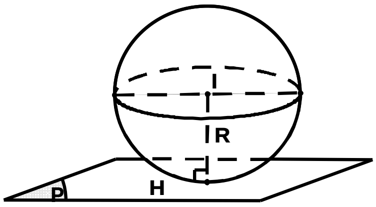
DẠNG 4
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT PHẲNG VỚI MẶT CẦU

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P) và có $d = IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P). Khi đó:

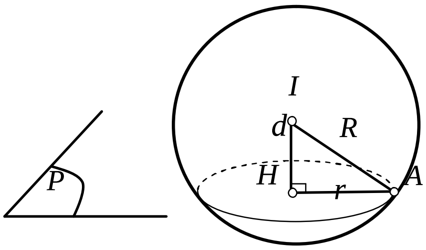
- Nếu $d > R$: Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.



- Nếu $d = R$: Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu. Lúc đó (P) là mặt phẳng tiếp diện của (S) và H là tiếp điểm.



- Nếu $d < R$: mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm H và bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$.



Chú ý: Cho mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(x_I; y_I; z_I)$ và bán kính R. Để xét vị trí tương đối của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S), ta làm như sau:

- Tính $d(I;(P)) = \dfrac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{|\vec{n}_{(P)}|}$
- So sánh với bán kính R

+ Nếu $d(I;(P)) > R$ thì mặt phẳng không cắt mặt cầu

+ Nếu $d(I;(P)) = R$ thì mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu

+ Nếu $d(I;(P)) < R$ thì mặt phẳng cắt mặt cầu

Bài 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xét vị trí tương đối của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) biết:

a) mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4$ và mặt phẳng $(P): x+y-z+4=0$.

b) mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-8=0$ và mặt phẳng $(P): 2x+3y+z+17=0$.

Lời giải

a) $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4$ và $(P): x+y-z+4=0$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$, bán kính $R=\sqrt{4}=2$ và $d(I,(P))=\dfrac{|1+2+3+4|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{3}}>R$

Vậy mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.

b) $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-8=0$ và $(P): 2x+3y+z+17=0$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;1)$, bán kính $R=\sqrt{14}$ và $d(I,(P))=\dfrac{|2-6+1+17|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\sqrt{14}$.

Vậy mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S):

a) có tâm $I(2;1;-4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): x-2y+2z-7=0$.

b) có tâm $A(1;2;3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): x-2y+2z+3=0$.

Lời giải

a) Mặt cầu cần tìm có bán kính $R=d(I,(\alpha))=\dfrac{|2-2.1+2.(-4)-7|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=5$.

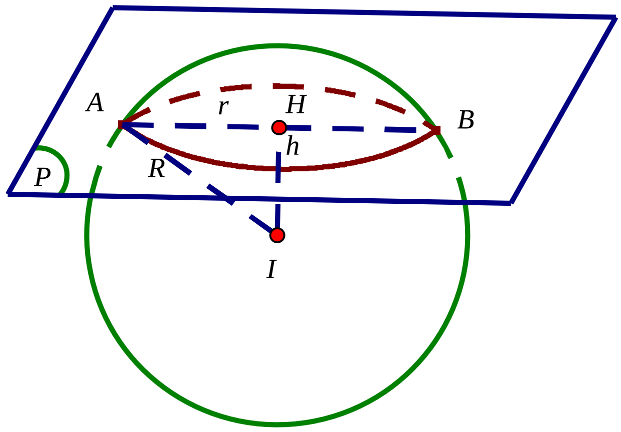
Phương trình mặt cầu cần tìm là $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=25$

b) Mặt cầu tâm A tiếp xúc với mặt phẳng đã cho có bán kính $R=d(A,(\alpha))=\dfrac{|1-2.2+2.3+3|}{\sqrt{1+4+4}}=2$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$.

Bài 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

Lời giải



Gọi h là khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) ta có: $h=d\left(I;(P)\right)=\dfrac{|-1-4-2-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=3$.

Bán kính mặt cầu (S) là: $R=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$.

Phương trình mặt cầu (S) là: $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$.

Bài 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $M(2;3;3)$, $N(2;-1;-1)$, $P(-2;-1;3)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x+3y-z+2=0$.

Lời giải

Giả sử phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Điều kiện: $a^2+b^2+c^2-d>0 (*)$

Vì mặt cầu (S) đi qua 3 điểm $M(2;3;3)$, $N(2;-1;-1)$, $P(-2;-1;3)$ và có tâm I thuộc $mp(P)$ nên ta có hệ phương trình $\begin{cases}4a+6b+6c-d=22\\4a-2b-2c-d=6\\4a+2b-6c+d=-14\\2a+3b-c=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\b=-1\\c=3\\d=-2\end{cases} : T/m(*)$

Vậy phương trình mặt cầu là: $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z-2=0$.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+5=0$. Viết mặt phẳng tiếp xúc với (S) và song song với mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-11=0$.

Lời giải

Ta gọi phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-11=0$ có dạng: $(Q): 2x-y+2z+D=0, (D\neq -11)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;3)$, bán kính $R=\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2-5}=3$

Vì mặt phẳng tiếp xúc với (S) nên ta có :

$d\left(I,(Q)\right)=R\Leftrightarrow\dfrac{\left|2.(-1)-2+2.3+D\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=3\Leftrightarrow\dfrac{\left|2+D\right|}{3}=3$.

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2+D=9\\2+D=-9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D=7\\D=-11\end{array}\right.$. Do $D\neq-11\Rightarrow D=7$.

Vậy mặt phẳng cần tìm là $2x-y+2z+7=0$.

Bài 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x-2y-2z-5=0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=4$. Viết phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S).

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-3)$ và bán kính $R=2$.

Gọi (Q) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S).

Phương trình (Q) có dạng: $x-2y-2z+D=0$ $(D\neq-5)$.

(Q) tiếp xúc với (S) khi và chỉ khi $d\left(I,(Q)\right)=R\Leftrightarrow\dfrac{\left|1-2.(-2)-2.(-3)+D\right|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=2$

$\Leftrightarrow\left|D+11\right|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D+11=6\\D+11=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D=-5\\D=-17\end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện suy ra $D=-17$.

Vậy phương trình của (Q) là $x-2y-2z-17=0\Leftrightarrow-x+2y+2z+17=0$.

DẠNG 5
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI MẶT CẦU

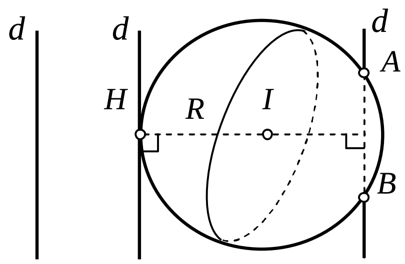
Cho mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R và đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}$, điểm $M \in d$. Để xét vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mặt cầu (S), ta làm như sau:

- Tính $d(I;d) = \dfrac{\left|\left[\vec{u};\overrightarrow{MI}\right]\right|}{|\vec{u}|}$
- So sánh với bán kính R

  + Nếu $d(I;d) > R$ thì đường thẳng d không cắt mặt cầu (S)

  + Nếu $d(I;d) = R$ thì đường thẳng d tiếp xúc với mặt cầu (S) tại H.

  + Nếu $d(I;d) < R$ thì đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt *A*, *B*.



Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, tìm vị trí tương đối của đường thẳng Δ và mặt cầu (S)

a) mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-3}{1}$.

b) mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 1 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$.

Lời giải

a) Mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$ có tâm $I(-1;\,2;\,0)$ bán kính $R = 3$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên Δ thì ta có $H(1+2t;\,2-2t;\,3+t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Khi đó: $\overrightarrow{IH} = (2+2t;\,-2t;\,3+t)$. Một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (2;\,-2;\,1)$.

Ta có: $\overrightarrow{IH}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow 4+4t+4t+3+t = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{7}{9}$.

$\overrightarrow{IH} = \left(\dfrac{4}{9};\dfrac{14}{9};\dfrac{20}{9}\right) \Rightarrow IH = \sqrt{\dfrac{16}{81}+\dfrac{196}{81}+\dfrac{400}{81}} = \dfrac{2\sqrt{17}}{3} \Rightarrow d(I;\,\Delta) = \dfrac{2\sqrt{17}}{3} < R$

Vậy đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt.

b) Đường thẳng Δ đi qua $M=(0;1;2)$ và có VTCP $\vec{u}=(2;1;-1)$

Mặt cầu (S) có tâm $I=(1;0;-2)$ và bán kính $R=2$

Ta có $\overrightarrow{MI}=(1;-1;-4)$ và $\left[\vec{u},\overrightarrow{MI}\right]=(-5;7;-3)$

$$\Rightarrow d(I,\Delta)=\frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{MI}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{\sqrt{498}}{6}$$

Vì $d(I,\Delta)>R$ nên Δ không cắt mặt cầu (S).

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=1$ và đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2+t\\ y=1+mt\\ z=-2t\end{cases}$. Tính giá trị của m để đường thẳng Δ tiếp xúc mặt cầu (S).

Lời giải

Từ phương trình đường thẳng Δ và mặt cầu (S) ta có

$(2+t-1)^2+(1+\text{mt}+3)^2+(-2\text{t}-2)^2=1$

$\Leftrightarrow (1+t)^2+(4+m\text{t})^2+(-2\text{t}-2)^2=1$

$\Leftrightarrow \left(m^2+5\right)t^2+2(5+4m)t+20=0 \quad (1)$

Để Δ tiếp xúc mặt cầu (S) thì (1) có nghiệm kép, hay (1) có $\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta'=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{15}{2}\\ m=\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$ và đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$. Lập phương trình mặt cầu tâm A, tiếp xúc với d.

Lời giải

Đường thẳng (d) đi qua $I(-1;2;-3)$ và có VTCP $\vec{u}=(2;1;-1)\Rightarrow d(A,d)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{AM}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=5\sqrt{2}$

Phương trình mặt cầu là : $(x-1)^2+(y+2)^2(z-3)^2=50$.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu tâm $I(2;3;-1)$ sao cho mặt cầu cắt đường thẳng (d) có phương trình: $(d)\begin{cases}x=11+2t\\ y=t\\ z=-25-2t\end{cases}$ tại hai điểm A, B sao cho $AB=16$.

Lời giải

Đường thẳng (d) đi qua $M(11;\ 0;-25)$ và có VTCP $\vec{u}=(2;1;-2)$

Gọi H là hình chiếu của I trên (d). Có: $IH=d(I,AB)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{MI}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=15$ $R=\sqrt{IH^2+\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2}=17$.

Vậy phương trình mặt cầu: $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289$.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$ mặt phẳng $(P):2x+6y+z-3=0$ cắt trục Oz và đường thẳng $d:\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-6}{-1}$ lần lượt tại A và B. Viết phương trình mặt cầu đường kính AB.

Lời giải

$(P)\cap Oz=A(0;0;3)$

Tọa độ của B là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases}2x+6y+z-3=0\\ \dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-6}{-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+6y+z-3=0\\ 2x-y-10=0\\ y+2z-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=-2\\ z=7\end{cases}\Rightarrow B(4;-2;7)$. Gọi I là trung điểm của $AB\Rightarrow I(2;-1;5)\Rightarrow IA=\sqrt{4+1+4}=3$.

Phương trình mặt cầu đường kính AB là: $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=9$.

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $I(1;0;0)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{1}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm *I* và cắt đường thẳng *d* tại hai điểm *A, B* sao cho tam giác *IAB* đều.

Lời giải

Đường thẳng (Δ) đi qua $M=(1;1;-2)$ và có VTCP $\vec{u}=(1;2;1)$

Ta có $\overrightarrow{MI}=(0;-1;2)$ và $\left[\vec{u},\overrightarrow{MI}\right]=(5;-2;-1)$

Gọi H là hình chiếu của I trên (d). Có: $IH=d(I,AB)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{MI}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\sqrt{5}$.

Xét tam giác *IAB*, có $IH=R.\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow R=\dfrac{2IH}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x+1)^2+y^2+z^2=\dfrac{20}{3}$.

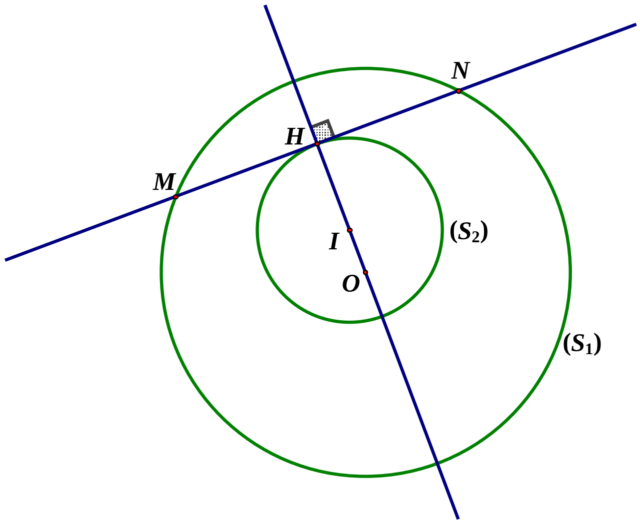
Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu (S_1), (S_2) có phương trình lần lượt là $(S_1):x^2+y^2+z^2=25$, $(S_2):x^2+y^2+(z-1)^2=4$. Một đường thẳng d vuông góc với véc tơ $\vec{u}=(1;-1;0)$ tiếp xúc với mặt cầu (S_2) và cắt mặt cầu (S_1) theo một đoạn thẳng có độ dài bằng 8. Tìm vectơ chỉ phương của d.

Lời giải

Mặt cầu (S_1) có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R_1 = 5$.

Mặt cầu (S_2) có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R_2 = 2$.

Có $OI = 1 < R_1 - R_2$ nên (S_2) nằm trong mặt cầu (S_1).



Giả sử d tiếp xúc với (S_2) tại H và cắt mặt cầu (S_1) tại M, N. Gọi K là trung điểm MN.

Khi đó $IH = R_2 = 2$ và $OH \geq OK$.

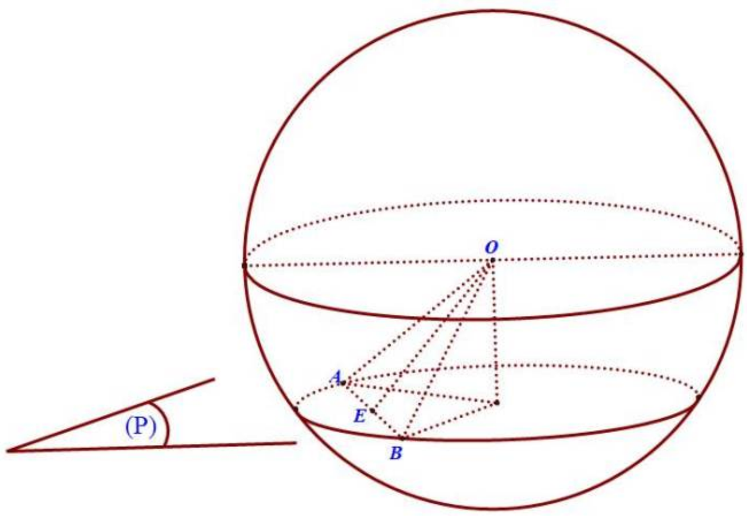
Theo giả thiết $MN = 8 \Rightarrow MK = 4 \Rightarrow OK = \sqrt{R_1^2 - MK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Có $OI = 1$, $IH = 2 \Rightarrow OK = OI + IH \geq OH \geq OK$. Do đó $OH = OK$, suy ra $H \equiv K$, tức d vuông góc với đường thẳng OI.

Đường thẳng d cần tìm vuông góc với véc tơ $\vec{u} = (1;-1;0)$ và vuông góc với $\overrightarrow{OI} = (0;0;1)$ nên có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_3 = \left[\overrightarrow{OI}, \vec{u}\right] = (1;1;0)$.

Bài 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $E(1;1;1)$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 5z - 3 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB là tam giác đều. Viết phương trình của đường thẳng Δ.

Lời giải



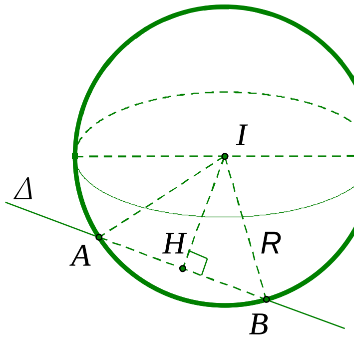
Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ bán kính $R=2$. Tam giác OAB là tam giác đều có cạnh bằng 2. Gọi M là trung điểm AB ta có $OM=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$, mặt khác $\overrightarrow{OE}(1;1;1)\Rightarrow OE=\sqrt{3}$. Vậy điểm M trùng điểm E. Gọi $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của Δ ta có: $\vec{u}\perp\overrightarrow{OE}$ và $\vec{u}\perp\vec{n}$ (với $\vec{n}(1;-3;5)$ là vectơ pháp tuyến của (P) vì $\Delta\subset(P)$).

$\left[\vec{n},\overrightarrow{OE}\right]=(-8;4;4)$, chọn $\vec{u}=-\dfrac{1}{4}\left[\vec{n},\overrightarrow{OE}\right]=(2;-1;-1)$.

Vậy đường thẳng Δ đi qua E, có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2;-1;-1)$ có phương trình là: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Bài 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $E(1;1;1)$, mặt phẳng $(P):x-3y+5z-3=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=4$. Gọi Δ là đường thẳng qua E, nằm trong mặt phẳng (P) và cắt (S) tại 2 điểm phân biệt A,B sao cho $AB=2$. Viết phương trình đường thẳng Δ.

Lời giải



$(S):x^2+y^2+z^2=4\Rightarrow$ Tâm $I(0;0;0)$; bán kính $R=2$.

$(P):x-3y+5z-3=0\Rightarrow$ véctơ pháp tuyến của $(P):\vec{n}_P=(1;-3;5)$.

Gọi H là hình chiếu của I lên $\Delta\Rightarrow AH=BH=\dfrac{AB}{2}=1$.

Xét ΔIAH vuông tại $H\Rightarrow IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$.

Mặt khác ta có $\overrightarrow{IE}=(1;1;1)\Rightarrow IE=\sqrt{3}=IH\Rightarrow H\equiv E\Rightarrow IE\perp\Delta$.

Đường thẳng Δ đi qua $E(1;1;1)$; vuông góc với IE và chứa trong (P) nên:

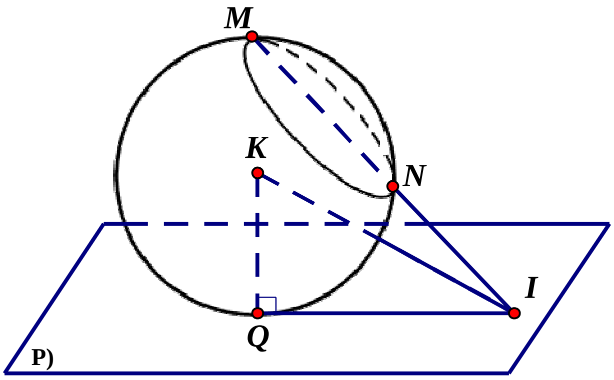
Véctơ chỉ phương của $\Delta:\vec{n}_\Delta=\left[\vec{n}_P;\overrightarrow{IE}\right]=(-8;4;4)$.

$\Rightarrow$ véctơ $\vec{u}=(2;-1;-1)$ cũng là véctơ chỉ phương của Δ.

Phương trình đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-t \\ z = 1-t \end{cases}$.

Bài 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z-3=0$ và hai điểm $M(1;1;1)$, $N(-3;-3;-3)$. Mặt cầu (S) đi qua M, N và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm Q. Biết rằng Q luôn thuộc một đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

Lời giải



Đường thẳng MN có phương trình là: $MN: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 1+t \end{cases}$.

Gọi $I = MN \cap (P)$ khi đó tọa độ điểm I ứng với t thỏa mãn:

$1+t+1+t-1-t-3=0 \Leftrightarrow t-2=0 \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow I(3;3;3) \Rightarrow IM = 2\sqrt{3},\ IN = 6\sqrt{3}$.

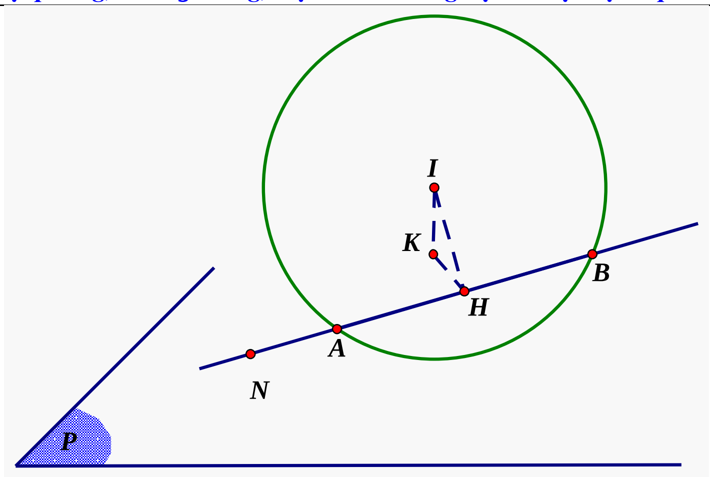
Do mặt cầu (S) đi qua M, N và tiếp xúc với đường thẳng IQ tại điểm Q nên ta có:

$IQ^2 = IM.IN = KI^2 - R^2 \Rightarrow IQ^2 = IM.IN = 36 \Leftrightarrow IQ = 6$

Vậy Q luôn thuộc đường tròn tâm I bán kính $R = 6$.

Bài 11. Trong không gian *Oxyz*, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 3^2$, mặt phẳng $(P): x-y+z+3=0$ và điểm $N(1;0;-4)$ thuộc (P). Một đường thẳng Δ đi qua N nằm trong (P) cắt (S) tại hai điểm A, B thỏa mãn $AB = 4$. Gọi $\vec{u}(1;b;c)$, $(c>0)$ là một vecto chỉ phương của Δ, tính tổng $b+c$.

Lời giải



Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1)$ bán kính $R=3$.

Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng Δ và mặt phẳng (P).

Suy ra H là trung điểm của đoạn AB nên AH = $2 \Rightarrow d(I,\Delta)=IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{5}$ và $IK=d(I,(P))=\dfrac{|1-2+1+3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

Ta có $\left.\begin{matrix} IK \perp (P) \\ \Delta \subset (P) \end{matrix}\right\} \Rightarrow IK \perp \Delta$ mà $IH \perp \Delta \Rightarrow \Delta \perp KH$

hay $KH=d(K,\Delta)$ và $KH=\sqrt{IH^2-IK^2}=\sqrt{2}$.

Do $IK \perp (P)$ nên phương trình tham số đường thẳng $IK:\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=1+t \end{cases} \Rightarrow K(1+t;2-t;1+t)$.

Mà $K \in (P) \Rightarrow 1+t-2+t+1+t+3=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow K(0;3;0)$

Từ đây ta có $KH=d(K,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{KN},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{(4b-3c)^2+(-c-4)^2+(b+3)^3}}{\sqrt{1+b^2+c^2}}=\sqrt{2}$ (*).

Mặt khác ta có $\Delta \subset (P) \Rightarrow \vec{u} \perp \overrightarrow{n_P} \Rightarrow \vec{u}.\overrightarrow{n_P}=0 \Leftrightarrow 1-b+c=0 \Leftrightarrow b=c+1$.

Thay vào (*) ta được

$\sqrt{(c+4)^2+(-c-4)^2+(c+4)^3}=\sqrt{2}\sqrt{1+(c+1)^2+c^2}$

$\Leftrightarrow 3c^2-24c+48=4c^2+4c+4$

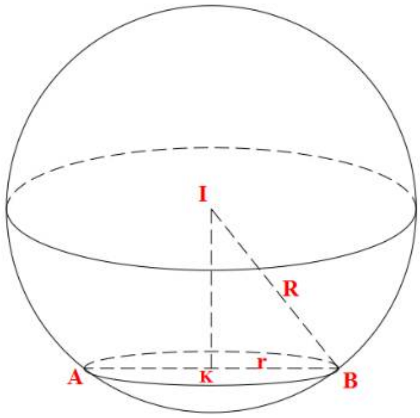
$\Leftrightarrow c^2-20c-44=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{matrix} c=22\,(N) \\ c=-2\,(L) \end{matrix}\right.$

Suy ra $b=23 \Rightarrow b+c=45$.

Bài 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y-z+9=0$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C). Tìm tọa độ tâm K và bán kính r của đường tròn (C).

Lời giải



• Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-2;1)$; $R=10$.

• Khoảng cách từ I đến (P) là $IK=d\left(I;(P)\right)=\dfrac{|6+4-1+9|}{3}=6$.

• Đường thẳng qua $I(3;-2;1)$ vuông góc với (P) có phương trình tham số là $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-2-2t \\ z=1-t \end{cases}$ khi đó Tọa độ tâm K là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-2-2t \\ z=1-t \\ 2x-2y-z+9=0 \end{cases} \Rightarrow K(-1;2;3)$.

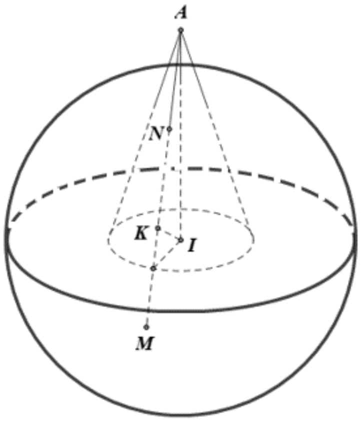
• Bán kính: $r=\sqrt{R^2-IK^2}=\sqrt{100-36}=8$.

Bài 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$ và hình nón (H) có đỉnh $A(3;2;-2)$ và nhận AI làm trục đối xứng với I là tâm mặt cầu. Một đường sinh của hình nón (H) cắt mặt cầu tại M, N sao cho $AM=3AN$. Viết phương trình mặt cầu đồng tâm với mặt cầu (S) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón (H).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\dfrac{71}{3}$



Gọi hình chiếu vuông góc của I trên MN là K.

Dễ thấy $AN = NK = \frac{1}{3}AM$, mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = 5$

Có $AM.AN = AI^2 - R^2 = 4 \Rightarrow AN^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow KN = AN = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow IK = \sqrt{IN^2 - KN^2} = \frac{\sqrt{213}}{3}$.

Nhận thấy mặt cầu đồng tâm với mặt cầu (S) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón (H) chính là mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ có bán kính $IK = \frac{\sqrt{213}}{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{71}{3}$.

Bài 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): z + 2 = 0$, $K(0;0;-2)$, đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. Lập phương trình mặt cầu tâm thuộc đường thẳng d và cắt mặt phẳng (P) theo thiết diện là đường tròn tâm K, bán kính $r = \sqrt{5}$.

Lời giải

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (0;0;1)$.

Viết lại phương trình của đường thẳng d dưới dạng tham số: $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$.

Gọi I là tâm của mặt cầu cần lập. Vì $I \in d$ nên giả sử $I(t;t;t)$. Có $\overrightarrow{IK} = (-t;-t;-2-t)$.

Thiết diện của mặt cầu và mặt phẳng (P) là đường tròn tâm K nên ta có $IK \perp (P)$. Suy ra $\overrightarrow{IK}$ và $\vec{n} = (0;0;1)$ cùng phương. Do đó tồn tại số thực k để $\overrightarrow{IK} = k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} -t = k.0 \\ -t = k.0 \\ -2-t = k.1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ k = -2 \end{cases}$.

Suy ra $I(0;0;0)$. Tính được $d(I,(P)) = 2$.

Gọi R là bán kính mặt cầu. Ta có: $R = \sqrt{r^2 + [d(I,(P))]^2} = 3$.

Vậy mặt cầu cần tìm có phương trình: $x^2+y^2+z^2=9$.

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;-3;0)$, $C(-2;1;1)$, $D(0;-1;3)$. Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, đường tròn đó có bán kính r bằng bao nhiêu?

Lời giải

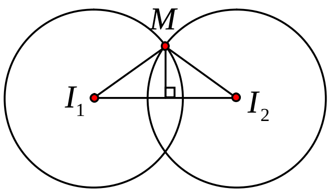
Gọi $M(x;y;z)$ là tập hợp các điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta có

$\overrightarrow{AM}=(x;y+1;z-2)$, $\overrightarrow{BM}=(x-2;y+3;z)$, $\overrightarrow{CM}=(x+2;y-1;z-1)$, $\overrightarrow{DM}=(x;y+1;z-3)$.

Từ giả thiết: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=1\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=1\\ \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x(x-2)+(y+1)(y+3)+z(z-2)=1\\ x(x+2)+(y+1)(y-1)+(z-1)(z-3)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z+2=0\\ x^2+y^2+z^2+2x-4z+1=0\end{cases}$$

Suy ra quỹ tích điểm M là đường tròn giao tuyến của mặt cầu tâm $I_1(1;-2;1)$, $R_1=2$ và mặt cầu tâm $I_2(-1;0;2)$, $R_2=2$.

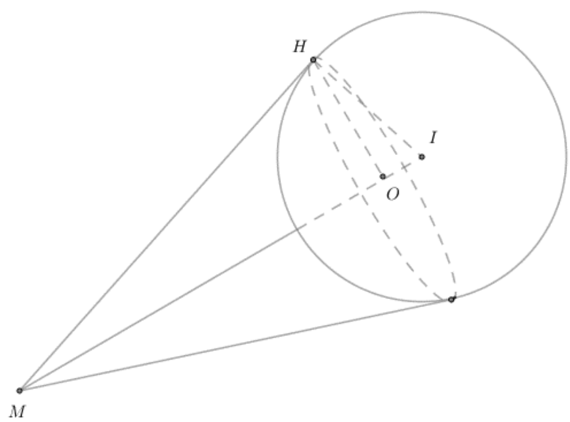


Ta có: $I_1I_2=\sqrt{5}$.

Dễ thấy: $r=\sqrt{R_1^2-\left(\dfrac{I_1I_2}{2}\right)^2}=\sqrt{4-\dfrac{5}{4}}=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

Bài 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và một điểm $M(2;3;1)$. Từ M kẻ được vô số các tiếp tuyến tới (S), biết tập hợp các tiếp điểm là đường tròn (C). Tính bán kính r của đường tròn (C).

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;0)$ và bán kính $R=2$.

Ta có $\overrightarrow{IM}=(1;2;1)$ và $IM=\sqrt{6}$.

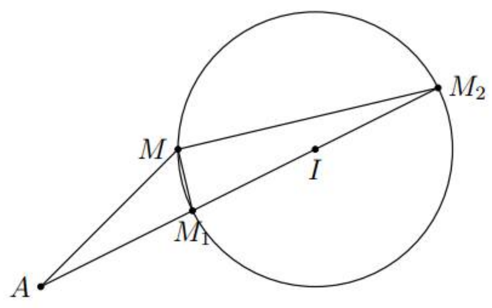
Gọi H là một tiếp điểm tùy ý khi kẻ tiếp tuyến từ M đến mặt cầu, khi đó $MH=\sqrt{IM^2-R^2}=\sqrt{2}$. Gọi O là tâm của đường tròn (C) khi đó $IM\perp HO$ và $HO=r$.

Ta có $HI.HM=HO.IM\Rightarrow r=\dfrac{HI.HM}{IM}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

DẠNG 6
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU

Bài toán. Cho điểm A và mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R, M là điểm di động trên (S). Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của AM.

Phương pháp giải



Xét A nằm ngoài mặt cầu (S). Gọi M_1, M_2 lần lượt là giao điểm của đường thẳng AI với mặt cầu $(S)\left(AM_1 < AM_2\right)$ và (α) là mặt phẳng đi qua M và đường thẳng AI. Khi đó (α) cắt (S) theo một đường tròn lớn (C).

Ta có $\widehat{M_1MM_2} = 90^\circ$, nên $\widehat{AMM_2}$ và $\widehat{AM_1M}$ là các góc tù, nên trong các tam giác AMM_1 và AMM_2 ta có $AI - R = AM_1 \le AM \le AM_2 = AI + R$

Tương tự với A nằm trong mặt cầu ta có $R - AI \le AM \le R + AI$

Vậy $\min AM = |AI - R|, \max AM = R + AI$

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $d: \begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 5 = 0$.

Tìm tọa độ điểm M trên (S) sao cho $d(M, d)$ đạt GTLN.

Lời giải

Ta có: $d(I, d) = 1 = R$ suy ra (S) tiếp xúc với d và tiếp điểm là $H(2;2;-1)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên $d \Rightarrow$H(2; 2; -1).

Đường thẳng IH có pt: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Tọa độ giao điểm của IH và (S) là: $A(0;2;-1)$, $B \equiv H(2;2;-1)$.

Ta có: $d(A,(d)) = AH = 2 \ge d(B,(P)) = BH = 0$.

$\Rightarrow d(A,(d)) = 2 \ge d(M,(d)) \ge d(B,(d)) = 0$.

Vậy $M(0;2;-1)$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Đường thẳng Δ qua A, nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B. Viết phương trình đường thẳng Δ để độ dài AB lớn nhất.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$, bán kính $R=10$. Do $d(I,(\alpha))<R$ nên Δ luôn cắt (S) tại A, B.

Khi đó $AB=\sqrt{R^2-\left(d(I,\Delta)\right)^2}$. Do đó, AB lớn nhất thì $d\left(I,(\Delta)\right)$ nhỏ nhất nên Δ qua H, với H là hình chiếu vuông góc của I lên (α). Phương trình $BH: \begin{cases} x=2+2t \\ y=3-2t \\ z=5+t \end{cases}$

$H\in(\alpha)\Rightarrow 2(2+2t)-2(3-2t)+5+t+15=0 \Leftrightarrow t=-2 \Rightarrow H(-2;\ 7;\ 3)$.

Do vậy $\overrightarrow{AH}=(1;4;6)$ là véc tơ chỉ phương của Δ. Phương trình của $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$

Bài 3. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\Delta_1: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ và $\Delta_2: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. Tính diện tích mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, đồng thời tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

Lời giải

Gọi $A;B$ là hai điểm thuộc lần lượt Δ_1 và Δ_2 sao cho AB là đoạn thẳng vuông góc chung giữa 2 đường.

Gọi M là trung điểm AB. Dễ có mặt cầu tâm M bán kính $R=\dfrac{AB}{2}$ tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là mặt cầu có bán kính bé nhất.

Ta có tọa độ theo tham số của $A;B$ lần lượt là:

$A(2t_1-1;t_1-1;2t_1-1)$ và $B(2t_2+1;2t_2+1;t_2+1)$ $\Rightarrow \overrightarrow{AB}(2t_2-2t_1+2;2t_2-t_1+2;t_2-2t_1+2)$.

Có $\overrightarrow{u_1}(2;1;2)$ và $\overrightarrow{u_2}(2;2;1)$ lần lượt là 2 vectơ chỉ phương của Δ_1 và Δ_2 nên $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2t_2-2t_1+2).2+(2t_2-t_1+2).1+(t_2-2t_1+2).2=0 \\ (2t_2-2t_1+2).2+(2t_2-t_1+2).2+(t_2-2t_1+2).1=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8t_2-9t_1+10=0 \\ 9t_2-8t_1+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1=\dfrac{10}{17} \\ t_2=\dfrac{-10}{17} \end{cases} \Rightarrow A\left(\dfrac{3}{17};\dfrac{-7}{17};\dfrac{3}{17}\right); B\left(\dfrac{-3}{17};\dfrac{-3}{17};\dfrac{7}{17}\right)\ \overrightarrow{AB}\left(\dfrac{-6}{17};\dfrac{4}{17};\dfrac{4}{17}\right).$$

$$R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{(-6)^2+4^2+4^2}}{17}=\dfrac{\sqrt{17}}{17}.$$

Bán kính mặt cầu cần tính là $R=\dfrac{\sqrt{17}}{17}$.

Bài 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=2t\\y=t\\z=4\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=3-t'\\y=t'\\z=0\end{cases}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải

Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(2;1;0)$.

Đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(-1;1;0)$.

Để phương trình mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất và đồng thời tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2 khi và chỉ khi:

Tâm mặt cầu (S) nằm trên đoạn thẳng vuông góc chung của 2 đường thẳng d_1 và d_2, đồng thời là trung điểm của đoạn thẳng vuông góc chung.

Gọi điểm $M(2t;t;4)$ thuộc d_1; gọi điểm $N(3-t';t';0)$ thuộc d_2 với MN là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2.

Ta có $\overrightarrow{MN}=(3-t'-2t;t'-t;-4)$.

MN là đoạn thẳng vuông góc chung $\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_1}=0\\\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2.(3-t'-2t)+t'-t=0\\(-1).(3-t'-2t)+t'-t=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}t'+5t=6\\2t'+t=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\t'=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M(2;1;4)\\N(2;1;0)\end{cases}$.

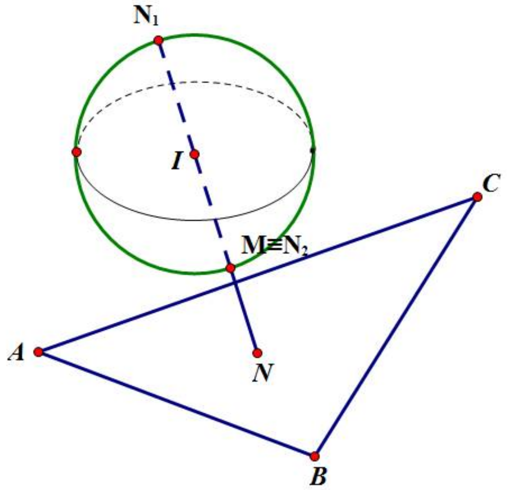
Gọi điểm I là tâm mặt cầu (S), do đó điểm I là trung điểm MN .

$\Rightarrow I(2;1;2)\Rightarrow R=IM=IN=2$.

Suy ra mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$.

Bài 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(8;5;-11),B(5;3;-4),C(1;2;-6)$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=9$. Gọi điểm $M(a;b;c)$ là điểm trên (S) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tìm $a+b$.

Lời giải



Gọi N là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{NA}-\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC}=\vec{0}$, suy ra $N(-2;0;1)$.

Khi đó: $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NA}\right)-\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}\right)-\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}\right)\right|=\left|\left(\overrightarrow{NA}-\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC}\right)-\overrightarrow{MN}\right|=MN$.

Suy ra $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất khi MN nhỏ nhất. Mặt cầu (S) có tâm $I(2;4;-1)$, suy ra:

$\overrightarrow{NI}=(4;4;-2)=(2;2;-1)$. Phương trình $NI=\begin{cases}x=2+2t\\y=4+2t\\z=-1-t\end{cases}$. Thay phương trình NI vào phương trình (S)

ta được: $(2t)^2+(2t)^2+(-t)^2=9\Leftrightarrow t^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-1\end{array}\right.$.

Suy ra NI cắt (S) tại hai điểm phân biệt $N_1(3;6;-2),N_2(0;2;0)$.

Vì $NN_1>NN_2$ nên MN nhỏ nhất khi và chỉ khi $M\equiv N_2$. Vậy $M(0;2;0)$ là điểm cần tìm.

Suy ra: $a+b=2.$

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(0;0;2)$, $B(1;1;0)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-1)^2=\frac{1}{4}$. Xét điểm M thay đổi thuộc (S). Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức MA^2+2MB^2.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R=\frac{1}{2}$.

Gọi K là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}\Rightarrow K\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Ta có

$$MA^2+2MB^2=\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KB}\right)^2$$
$$=3MK^2+KA^2+2KB^2+2\overrightarrow{MK}\left(\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}\right)=3MK^2+KA^2+2KB^2.$$

Biểu thức MA^2+2MB^2 đạt GTNN khi và chỉ khi MK đạt giá trị nhỏ nhất.

Với M thay đổi thuộc (S) ta có $MK_{\min} = |KI - R| = \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

Vậy $\left(MA^2 + 2MB^2\right)_{\min} = 3MK_{\min}^2 + KA^2 + 2KB^2 = \frac{3}{4} + \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \frac{19}{4}$.

Bài 7. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 5 điểm $A(1;0;0)$, $B(-1;1;0)$, $C(0;-1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;3;0)$. M là điểm thay đổi trên mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| + 3\left|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}\right|$.

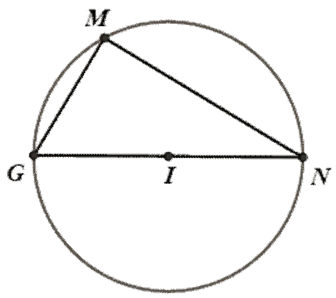
Lời giải

Mặt cầu (S): tâm $I(0;1;0)$ bán kính $R = 1$

Gọi trọng tâm tam giác ABC là $G(0;0;0)$, trung điểm DE là $N(0;2;0)$

do G, N đều nằm trên (S) và I là trung điểm GN nên GN là đường kính của (S)

$$P = 2\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| + 3\left|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}\right| = 2\left|3\overrightarrow{MG}\right| + 3\left|2\overrightarrow{MN}\right|$$
$$= 6MG + 6MN = 6(MG + MN)$$



Ta có: $(MG + MN)^2 \le 2\left(MG^2 + MN^2\right) = 2GN^2 = 8$

Suy ra $MG + MN \le 2\sqrt{2}$

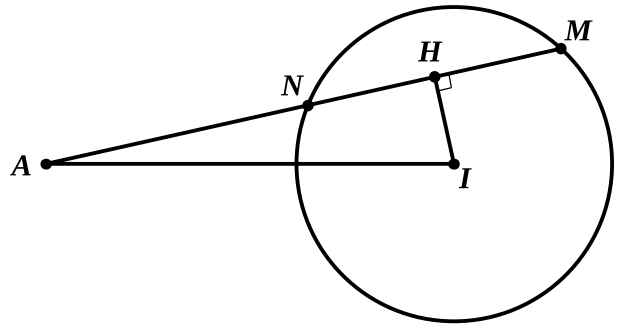
Vậy giá trị lớn nhất của P là $12\sqrt{2}$.

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0$ và điểm $A(5;3;-2)$. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A và luôn cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt M, N. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = AM + 4AN$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;1)$, bán kính $R = 3$.

$AI = \sqrt{34} > R \Rightarrow A$ nằm ngoài mặt cầu (S).



Do hai điểm M, N nằm ở vị trí hai đầu một dây cung nên để $S_{\min}$ thì N nằm giữa A và M. Gọi H là trung điểm $MN \Rightarrow IH \perp MN, NH = \frac{1}{2}MN$

$S = 4(AH - NH) + AH + NH = 5AH - 3NH$

$S = 5\sqrt{AI^2 - IH^2} - 3\sqrt{R^2 - IH^2} = 5\sqrt{34 - x^2} - 3\sqrt{9 - x^2}, x = IH$

Xét hàm số $f(x) = 5\sqrt{34 - x^2} - 3\sqrt{9 - x^2}, (0 \le x < 3)$

$f'(x) = \frac{-5x}{\sqrt{34 - x^2}} + \frac{3x}{\sqrt{3^2 - x^2}} = x\left(\frac{-5}{\sqrt{34 - x^2}} + \frac{3}{\sqrt{3^2 - x^2}}\right)$

Xét $\left(\frac{-5}{\sqrt{34 - x^2}} + \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}}\right) > 0$

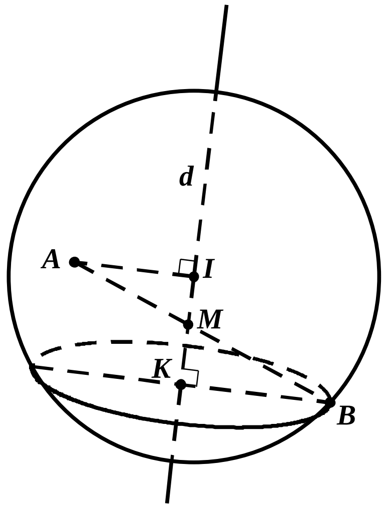
$\Leftrightarrow 5\sqrt{9 - x^2} < 3\sqrt{34 - x^2} \Leftrightarrow 225 - 25x^2 < 9.34 - 9x^2 \Leftrightarrow 16x^2 + 81 > 0$ (luôn đúng)

Suy ra : $f'(x) \ge 0, \forall x \in [0;3), f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0;3)$

Suy ra $\min\limits_{[0;3)} f(x) = f(0) = 5\sqrt{34} - 9$.

Bài 9. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ và mặt cầu (S): $(x+3)^2 + (y+4)^2 + (z+5)^2 = 729$. Cho biết điểm $A(-2;-2;-7)$, điểm B thuộc giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng $(P): 2x + 3y + 4z - 107 = 0$. Khi điểm M di động trên đường thẳng d đạt giá trị nhỏ nhất, hãy tính giá trị biểu thức $MA + MB$.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(-3;-4;-5)$ và bán kính $R=27$.

Đường thẳng d có 1 véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;3;4)\Rightarrow d\perp(P)$.

Gọi K là giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng d. Vì $I\in d$ nên K là tâm của đường tròn giao tuyến và $KB\perp d$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(1;2;-2)\Rightarrow IA=3$ và $\overrightarrow{IA}.\vec{u}=0\Rightarrow IA\perp d$.

Ta tính được $IK=\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|2.(-3)+3.(-4)+4(-5)-107|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}=5\sqrt{29}$ và $KB=\sqrt{R^2-IK^2}=2$.

Do M di động trên đường thẳng d (trục của đường tròn giao tuyến) và B thuộc đường tròn giao tuyến nên biểu thức $MA+MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $M=AB\cap d$.

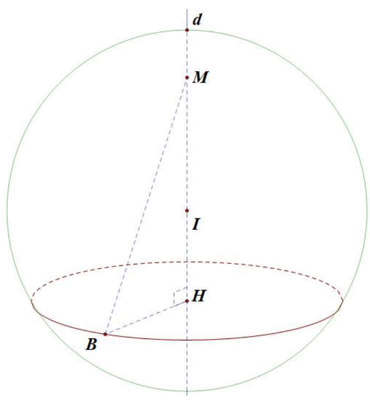
Khi đó, ta có $\dfrac{MI}{MK}=\dfrac{IA}{KB}=\dfrac{3}{2}$ và $MI+MK=IK=5\sqrt{29}$.

Suy ra $MI=3\sqrt{29}$, $MK=2\sqrt{29}$.

Ta có $AM=\sqrt{IA^2+MI^2}=3\sqrt{30}\Rightarrow BM=\dfrac{2}{3}AM=2\sqrt{30}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA+MB$ là $AM+BM=3\sqrt{30}+2\sqrt{30}=5\sqrt{30}$.

Cách 2:



Ta có (S) có tâm $I(-3;-4;-5)$, bán kính $R=27$.

Dễ thấy d đi qua $I(-3;-4;-5)$ và vuông góc với (P).

(P) cắt (S) theo đường tròn có bán kính $r=2$.

$M\in d \Leftrightarrow M(1+2t;2+3t;3+4t)$.

Ta có $T=MA+MB=MA+\sqrt{MH^2+r^2}$.

Lại có $MH=d(M;(P))=\dfrac{|29t-87|}{\sqrt{29}}=\left|\sqrt{29}t-3\sqrt{29}\right|$.

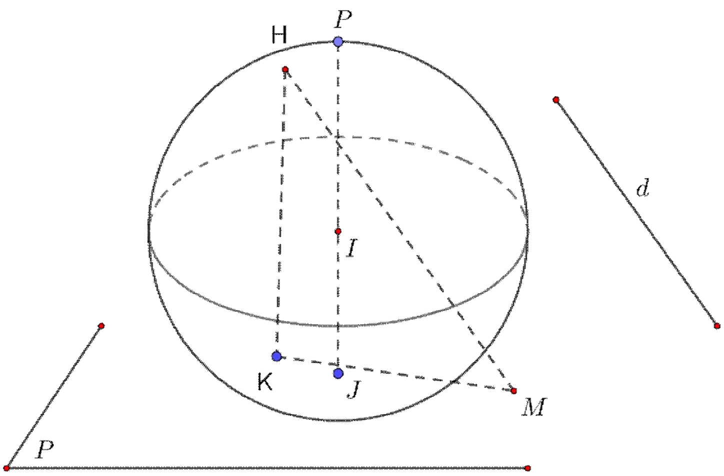
Suy ra $T=\sqrt{29t^2+116t+125}+\sqrt{29(t-3)^2+4}=\sqrt{29}\sqrt{(t+2)^2+\dfrac{9}{29}}+\sqrt{29}\sqrt{(t-3)^2+\dfrac{4}{29}}$.

Xét $\vec{u}=\left(t+2;\dfrac{3}{\sqrt{29}}\right),\vec{v}=\left(3-t;\dfrac{2}{\sqrt{29}}\right)\Rightarrow\vec{u}+\vec{v}=\left(5;\dfrac{5}{\sqrt{29}}\right)$.

Do đó $T=\sqrt{29}\left(|\vec{u}|+|\vec{v}|\right)\ge\sqrt{29}\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=5\sqrt{50}$.

Bài 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y+z-1=0$, đường thẳng $(d):\dfrac{x-15}{1}=\dfrac{y-22}{2}=\dfrac{z-37}{2}$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-8x-6y+4z+4=0$. Một đường thẳng (Δ) thay đổi cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A,B sao cho $AB=8$. Gọi A', B' là hai điểm lần lượt thuộc mặt phẳng (P) sao cho AA', BB' cùng song song với (d). Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $AA'+BB'$.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(4;3;-2)$ và bán kính $R=5$.

Gọi H là trung điểm của AB thì $IH\perp AB$ và $IH=3$ nên H thuộc mặt cầu (S') tâm I bán kính $R'=3$.

Gọi M là trung điểm của $A'B'$ thì $AA'+BB'=2HM$, M nằm trên mặt phẳng (P).

Mặt khác ta có $d(I;(P))=\dfrac{4}{\sqrt{3}}<R$ nên (P) cắt mặt cầu (S) và $\sin(d;(P))=\sin\alpha=\dfrac{5}{3\sqrt{3}}$. Gọi K là hình chiếu của H lên (P) thì $HK=HM.\sin\alpha$.

Vậy để $AA'+BB'$ lớn nhất thì HK lớn nhất

$\Leftrightarrow HK$ đi qua I nên $HK_{\max} = R' + d\left(I;(P)\right) = 3 + \dfrac{4}{\sqrt{3}} = \dfrac{4+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

Vậy $AA' + BB'$ lớn nhất bằng $2\left(\dfrac{4+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right).\dfrac{3\sqrt{3}}{5} = \dfrac{24+18\sqrt{3}}{5}$.

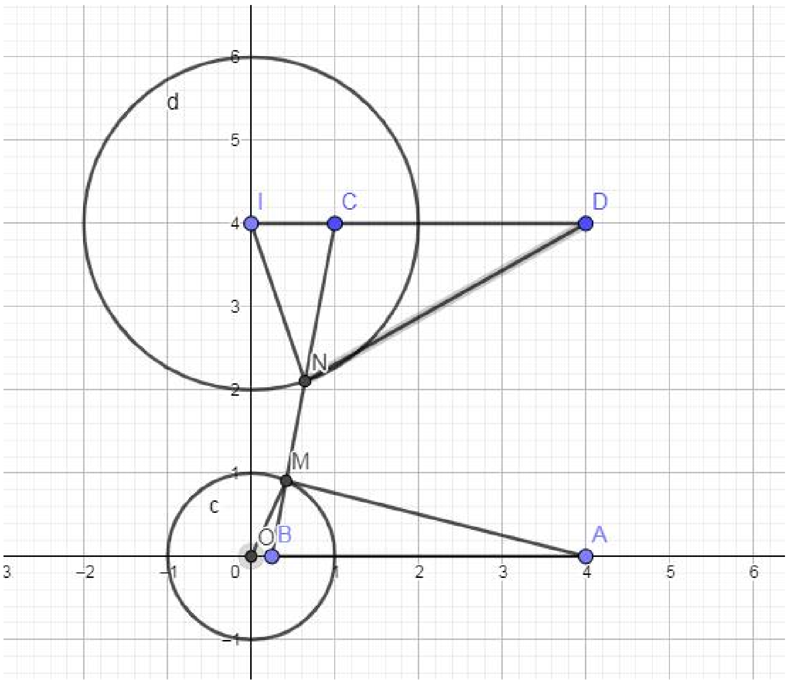
Bài 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $(S_2): x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 4$ và các điểm $A(4;0;0)$, $B\left(\dfrac{1}{4};0;0\right)$, $C(1;4;0)$, $D(4;4;0)$. Gọi M là điểm thay đổi trên (S_1), N là điểm thay đổi trên (S_2). Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = MA + 2ND + 4MN + 4BC$.

Lời giải

$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nên (S_1) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R_1 = 1$

$(S_2): x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 4$ nên (S_2) có tâm $I(0;4;0)$ và bán kính $R_2 = 2$

Vậy các điểm $A(4;0;0)$, $B\left(\dfrac{1}{4};0;0\right)$, $C(1;4;0)$, $D(4;4;0)$, $O(0;0;0)$ và $I(0;4;0)$ cùng thuộc (Oxy)



Nhận thấy $OB.OA = OM^2$ suy ra OM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB

Do đó ΔMOB đồng dạng ΔAOM

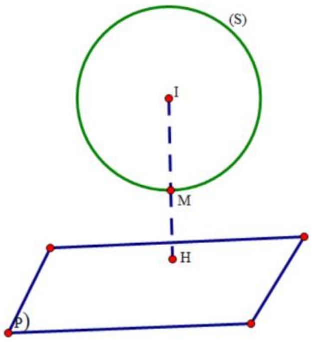
$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{OA}{OM} = 4 \Rightarrow MA = 4MB$$

Hoàn toàn tương tự $\dfrac{ND}{NC} = \dfrac{DI}{NI} = 2 \Rightarrow ND = 2NC$

$$Q = MA + 2ND + 4MN + 4BC = 4(MB + NC + MN) + 4BC \geq 4BC + 4BC = 8BC = 2\sqrt{265}$$

Bài 12. Cho x, y, z, a, b, c là các số thực thay đổi thỏa mãn $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=1$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$.

Lời giải



Gọi $M(x;y;z) \Rightarrow M$ thuộc mặt cầu (S) tâm $I(-1;-1;2)$ bán kính $R=1$

Gọi $H(a;b;c) \Rightarrow H$ thuộc mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$

Ta có $d(I,(P))=\dfrac{|-1-1+2-3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}>R \Rightarrow (P)$ và (S) không có điểm chung

$P=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=MH^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi vị trí của M và H như hình vẽ

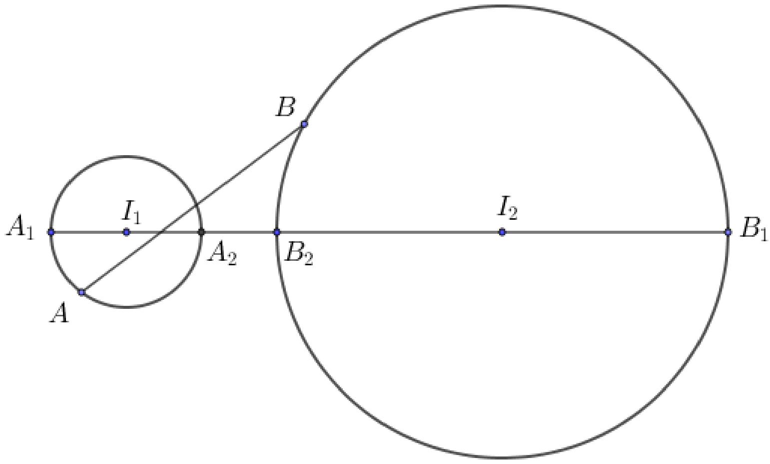
Khi đó $HI=d(I,(P))=\sqrt{3} \Rightarrow HM=HI-R=\sqrt{3}-1$

Do đó $P_{\min}=(\sqrt{3}-1)^2=4-2\sqrt{3}$.

Bài 13. Cho a,b,c,d,e,f là các số thực thỏa mãn $\begin{cases}(d-1)^2+(e-2)^2+(f-3)^2=1\\(a+3)^2+(b-2)^2+c^2=9\end{cases}$. Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=\sqrt{(a-d)^2+(b-e)^2+(c-f)^2}$ lần lượt là M, m. Tính $M-m$

Lời giải

Gọi $A(d,e,f)$ thì A thuộc mặt cầu $(S_1):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$ có tâm $I_1(1;2;3)$, bán kính $R_1=1$, $B(a,b,c)$ thì B thuộc mặt cầu $(S_2):(x+3)^2+(y-2)^2+z^2=9$ có tâm $I_2(-3;2;0)$, bán kính $R_2=3$. Ta có $I_1I_2=5>R_1+R_2 \Rightarrow (S_1)$ và (S_2) không cắt nhau và ở ngoài nhau.



Dễ thấy $F = AB$, AB max khi $A \equiv A_1, B \equiv B_1 \Rightarrow$ Giá trị lớn nhất bằng $I_1I_2 + R_1 + R_2 = 9$.

AB min khi $A \equiv A_2, B \equiv B_2 \Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất bằng $I_1I_2 - R_1 - R_2 = 1$.

Vậy $M - m = 8$

PHẦN B

TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho điểm M nằm ngoài mặt cầu $S(O;R)$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $OM < R.$ **B.** $OM = R.$ **C.** $OM > R.$ **D.** $OM \le R.$

Lời giải

Chọn C.

M nằm ngoài mặt cầu $S(O;R) \Leftrightarrow OM > R$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=6$. Đường kính của (S) bằng

A. $\sqrt{6}$ **B.** 12 **C.** $2\sqrt{6}$ **D.** 3

Lời giải

Chọn C.

Ta có bán kính của (S) là $\sqrt{6}$ nên đường kính của (S) bằng $2\sqrt{6}$.

Câu 3. Mặt cầu (S): $3x^2+3y^2+3z^2-6x+12y+2=0$ có bán kính bằng:

A. $\frac{\sqrt{7}}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{7}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{21}}{3}$. **D.** $\sqrt{\frac{13}{3}}$.

Lời giải

Chọn D.

Biến đổi $3x^2+3y^2+3z^2-6x+12y+2=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+4y+\frac{2}{3}=0$ có tâm $I(1;-2;0)$, bán kính $R=\sqrt{\frac{13}{3}}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-2;1;-3)$. **B.** $(-4;2;-6)$. **C.** $(4;-2;6)$. **D.** $(2;-1;3)$.

Lời giải

Chọn D.

Mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4$ có tâm $I(2;-1;3)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=9$ có bán kính bằng

A. 3. **B.** 81. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình mặt cầu tâm $I\left(a;b;c\right)$ và bán kính bằng R: $\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2+\left(z-c\right)^2=R^2$.

Do đó $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=9$ có bán kính $R=3$

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-4;0)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của (S) là

A. $(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=9$.

B. $(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=9$.

C. $(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=3$.

D. $(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=3$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình mặt cầu tâm $I\left(a;b;c\right)$ và bán kính bằng R: $\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2+\left(z-c\right)^2=R^2$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-4;0)$ có bán kính 3 có phương trình là $(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=9$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-1)^2=16$. Bán kính của (S) là:

A. 32 **B.** 8 **C.** 4 **D.** 16

Lời giải

Chọn C.

Từ phương trình mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-1)^2=16 \Rightarrow$ Bán kính $R=\sqrt{16}=4$

Câu 8. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$. Tâm của (S) có tọa độ là:

A. $(-2;-4;6)$. **B.** $(2;4;-6)$. **C.** $(-1;-2;3)$. **D.** $(1;2;-3)$.

Lời giải

Chọn C.

Tâm của (S) có tọa độ là: $(-1;-2;3)$

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $\left(S\right):x^2+y^2+z^2-8x+10y-6z+49=0$. Tính bán kính R của mặt cầu $\left(S\right)$.

A. $R=1$. **B.** $R=7$. **C.** $R=\sqrt{151}$. **D.** $R=\sqrt{99}$.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình mặt cầu: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ $\left(a^2+b^2+c^2-d>0\right)$ có tâm $I\left(a;b;c\right)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Ta có $a=4$, $b=-5$, $c=3$, $d=49$. Do đó $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=1$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $\left(x-1\right)^2+\left(y+2\right)^2+\left(z-3\right)^2=4$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu đó.

A. $I(-1;2;-3)$; $R=2$. **B.** $I(-1;2;-3)$; $R=4$. **C.** $I(1;-2;3)$; $R=2$. **D.** $I(1;-2;3)$; $R=4$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu đã cho có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=2$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trong các mặt cầu dưới đây, mặt cầu nào có bán kính $R=2$?

A. $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-3=0$. **B.** $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-10=0$.

C. $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+2=0$. **D.** $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+5=0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ có bán kính là $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

Trong đáp án C ta có: $\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=-1 \\ d=2 \end{cases} \Rightarrow R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{4}=2$.

Câu 12. Cho các phương trình sau:

$(x-1)^2+y^2+z^2=1;$

$x^2+(2y-1)^2+z^2=4;$

$x^2+y^2+z^2+1=0;$

$(2x+1)^2+(2y-1)^2+4z^2=16.$

Số phương trình là phương trình mặt cầu là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $(2x+1)^2+(2y-1)^2+4z^2=16 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=4$

$(x-1)^2+y^2+z^2=1$ là phương trình của một mặt cầu.

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi I là tâm mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-2)^2=4$. Độ dài $\left|\overrightarrow{OI}\right|$ bằng:

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}$.`

Lời giải

Chọn A.

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;2) \Rightarrow \overrightarrow{OI}=(0;0;2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{OI}\right|=2.$

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;3;0)$ và bán kính bằng 2. Phương trình của mặt cầu (S) là:

A. $(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=2$. **B.** $(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=4$.

C. $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=4$. **D.** $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=2$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-1;3;0)$ và bán kính bằng $R=2$ có dạng:

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2+z^2=4$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và đi qua điểm $M(4;0;0)$. Phương trình của (S) là

A. $x^2+y^2+(z+3)^2=25$. **B.** $x^2+y^2+(z+3)^2=5$.

C. $x^2+y^2+(z-3)^2=25$. **D.** $x^2+y^2+(z-3)^2=5$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và bán kính R là: $x^2+y^2+(z+3)^2=R^2$.

Ta có: $M\in(S) \Rightarrow 4^2+0^2+(0+3)^2=R^2 \Leftrightarrow R^2=25$.

Vậy phương trình cần tìm là: $x^2+y^2+(z+3)^2=25$.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;7), B(-3;8;-1)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình là

A. $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=\sqrt{45}$. **B.** $(x-1)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=45$.

C. $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=\sqrt{45}$. **D.** $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=45$.

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm AB ta có $I(-1;3;3)$ là tâm mặt cầu.

Bán kính $R=IA=\sqrt{(1+1)^2+(-2-3)^2+(7-3)^2}=\sqrt{45}.$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=45$.

Câu 17. Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu (S) tâm $A(2;1;0)$, đi qua điểm $B(0;1;2)$?

A. $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+z^2=8$. **B.** $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=8$.

C. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=64$.   **D.** $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+z^2=64$.

Lời giải

Chọn B

Vì mặt cầu (S) có tâm $A(2;1;0)$, đi qua điểm $B(0;1;2)$ nên mặt cầu (S) có tâm $A(2;1;0)$ và nhận độ dài đoạn thẳng AB là bán kính.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2:0;2)$. $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-2)^2+0^2+2^2}=2\sqrt{2}$. Suy ra: $R=2\sqrt{2}$.

Vậy: $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=8$.

Câu 18. Trong không gian Oxyz cho điểm $I(2;3;4)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và đi qua A có phương trình là:

A. $(x+2)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=3$.   **B.** $(x+2)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=9$.

C. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=45$.   **D.** $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=3$.

Lời giải

Chọn D

Bán kính mặt cầu là $R=IA=\sqrt{3}$.

Phương trình mặt cầu tâm $I(2;3;4)$ và $R=IA=\sqrt{3}$ là $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=3$

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3), B(5;4;-1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9$.   **B.** $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=6$.

C. $(x+3)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=9$.   **D.** $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=36$.

Lời giải

Chọn A.

+ Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(3;3;1)$.

$\overrightarrow{AB}(4;2;-4) \Rightarrow AB=\sqrt{16+4+16}=6$

+ Mặt cầu đường kính AB có tâm $I(3;3;1)$, bán kính $R=\dfrac{AB}{2}=3$ có phương trình là:

$(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;-2;5)$, $N(-1;6;-3)$. Mặt cầu đường kính MN có phương trình là:

A. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=6$.   **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6$.

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=36$.   **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=36$.

Lời giải

Chọn D

Tâm I của mặt cầu là trung điểm đoạn $MN \Rightarrow I(1;2;1)$.

Bán kính mặt cầu $R=\frac{MN}{2}=\frac{\sqrt{(-1-3)^2+(6+2)^2+(-3-5)^2}}{2}=6$.

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=36$.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) qua bốn điểm $A(3;3;0)$, $B(3;0;3)$, $C(0;3;3)$, $D(3;3;3)$. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$.

C. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$. **D.** $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0\left(a^2+b^2+c^2-d>0\right)$

Vì mặt cầu đi qua 4 điểm nên:

$$\begin{cases}18-6a-6b+d=0\\18-6a-6c+d=0\\18-6b-6c+d=0\\27-6a-6b-6c+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6a-6b+d=-18\\-6a-6c+d=-18\\-6b-6c+d=-18\\-6a-6b-6c+d=-27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\b=\frac{3}{2}\\c=\frac{3}{2}\\d=0\end{cases}$$

Suy ra tâm $I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ bán kính $R=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$. Cho tứ diện đều $ABCD$ có $A(0;1;2)$ và hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (BCD) là $H(4;-3;-2)$. Tìm tọa độ tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $I(3;-2;-1)$. **B.** $I(2;-1;0)$. **C.** $I(3;-2;1)$. **D.** $I(-3;-2;1)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $I(a;b;c)\Rightarrow \overrightarrow{IA}=(-a;1-b;2-c);\overrightarrow{IH}=(4-a;-3-b;-2-c)$

$ABCD$ là tứ diện đều nên tâm I của mặt cầu ngoại tiếp trùng với trọng tâm tứ diện

$$\Rightarrow \overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{IH} \Rightarrow \begin{cases} -a = -3(4-a) \\ 1-b = -3(-3-b) \\ 2-c = -3(-2-c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow I(3;-2;-1).$$

Câu 23. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm O và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C khác O thỏa mãn tam giác ABC có trọng tâm là điểm $G(-6;-12;18)$. Tọa độ tâm của mặt cầu (S) là

A. $(9;18;-27)$. **B.** $(-3;-6;9)$. **C.** $(3;6;-9)$. **D.** $(-9;-18;27)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi tọa độ các điểm trên ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt là $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a, b, c > 0$.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} \frac{a}{3} = -6 \\ \frac{b}{3} = -12 \\ \frac{c}{3} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -18 \\ b = -36 \\ c = 54 \end{cases}$.

Gọi phương trình mặt cầu (S) cần tìm là: $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2ny - 2pz + q = 0$. Vì (S) qua các điểm O, A, B, C nên ta có hệ:

$$\begin{cases} q = 0 \\ 36m + q = -18^2 \\ 72n + q = -36^2 \\ -108p + q = -54^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -9 \\ n = -18 \\ p = 27 \\ q = 0 \end{cases}.$$

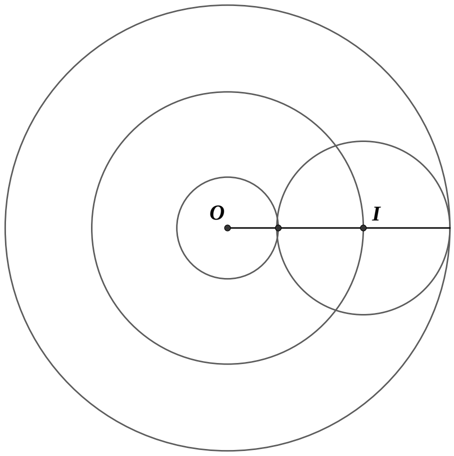
Vậy tọa độ tâm mặt cầu (S) là $(-9;-18;27)$.

Câu 24. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - \cos\alpha)^2 + (y - \cos\beta)^2 + (z - \cos\gamma)^2 = 4$ với α, β và γ lần lượt là ba góc tạo bởi tia Ot bất kì với 3 tia Ox, Oy và Oz. Biết rằng mặt cầu (S) luôn tiếp xúc với hai mặt cầu cố định. Tổng diện tích của hai mặt cầu cố định đó bằng

A. 40π. **B.** 4π. **C.** 20π. **D.** 36π.

Lời giải

Chọn A



Ta dễ dàng chứng minh được: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Mặt cầu (S) có tâm $I(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$.

Suy ra tâm I thuộc mặt cầu (S') có tâm $\mathrm{O}(0;0;0), \mathrm{R} = \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = 1$

Mặt cầu (S) luôn tiếp xúc với hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$.

Mặt cầu (S_1) có tâm là O, bán kính $R_1 = |OI - R| = |1-2| = 1$.

Mặt cầu (S_2) có tâm là O, bán kính $R_2 = OI + R = 1 + 2 = 3$.

Vậy tổng diện tích hai mặt cầu bằng $4\pi\left(R_1^2 + R_2^2\right) = 4\pi\left(1^2 + 3^2\right) = 40\pi$.

Câu 25. Trong không gian *Oxyz*, cho điểm $I(1;-2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm *I*, cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.

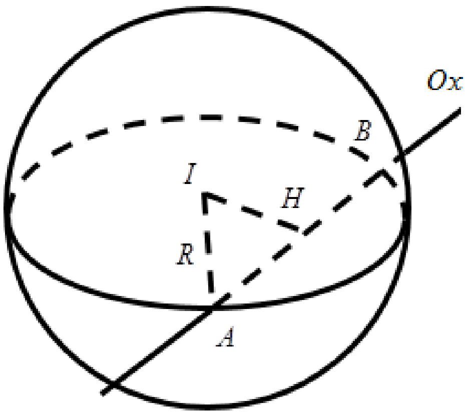
B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 20$.

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$.

D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm AB suy ra H là hình chiếu vuông góc của I lên Ox nên $H(1;0;0)$.

$IH = \sqrt{13} \Rightarrow R = IA = \sqrt{IH^2 + AH^2} = 4$.

Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox. Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM ?

A. $(x-1)^2+y^2+z^2=\sqrt{13}$. **B.** $(x-1)^2+y^2+z^2=13$.

C. $(x+1)^2+y^2+z^2=13$. **D.** $(x+1)^2+y^2+z^2=17$.

Lời giải

Chọn B

Với điểm $M(1;-2;3)$ thì hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox là $I(1;0;0)$

Có $IM=\sqrt{13}$ vậy phương trình mặt cầu tâm $I(1;0;0)$ bán kính IM là: $(x-1)^2+y^2+z^2=13$

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ đỉnh $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 4;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 6)$, $A(2;\ 4;\ 6)$. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Viết phương trình mặt cầu (S') có tâm trùng với tâm của mặt cầu (S) và có bán kính gấp 2 lần bán kính của mặt cầu (S).

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=56$. **B.** $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$.

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=14$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-12=0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Vì (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ nên ta có:

$$\begin{cases}2^2+0^2+0^2-2.a.2-2.b.0-2.c.0+d=0\\0^2+4^2+0^2-2.a.0-2.b.4-2.c.0+d=0\\0^2+0^2+6^2-2.a.0-2.b.0-2.c.6+d=0\\2^2+4^2+6^2-2.a.2-2.b.4-2.c.6+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4a+d=-4\\-8b+d=-16\\-12c+d=-36\\-4a-8b-12c+d=-56\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\\c=3\\d=0\end{cases}$$

$\Rightarrow\ x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0\Rightarrow I(1;\ 2;\ 3)$ và $R=\sqrt{14}\ \Rightarrow R'=2\sqrt{14}$.

Vậy: mặt cầu (S') có tâm $I(1;\ 2;\ 3)$ và $R'=2\sqrt{14}:(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=56$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có phương trình là

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=4$. **B.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=13$.

C. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9$. **D.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=10$.

Lời giải

Chọn B

Gọi M là hình chiếu của I trên $Oy\Rightarrow M(0;1;0)$

Mặt cầu (S) tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có bán kính $IM=\sqrt{13}$.

Vậy (S) có phương trình $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=13$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=4$. Một mặt cầu (S') có tâm $I'(9;1;6)$ và tiếp xúc ngoài với mặt cầu (S). Phương trình mặt cầu (S') là

A. $(x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=64$. **B.** $(x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=144$.

C. $(x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=36$. **D.** $(x+9)^2+(y+1)^2+(z+6)^2=25$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $I(1;1;0), R=2$. $II'=10$.

Gọi R' là bán kính của mặt cầu (S').

Theo giả thiết, ta có $R'+R=II' \Leftrightarrow R'=II'-R=8$.

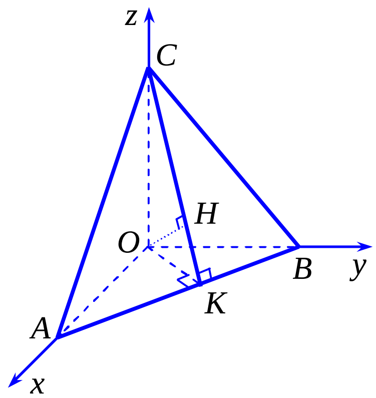
Khi đó phương trình mặt cầu (S'): $(x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=64$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC. Viết phương trình mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (α).

A. $x^2+y^2+z^2=81$. **B.** $x^2+y^2+z^2=1$. **C.** $x^2+y^2+z^2=9$. **D.** $x^2+y^2+z^2=25$.

Lời giải

Chọn C



Ta có H là trực tâm tam giác ABC $\Rightarrow OH\perp(ABC)$.

Thật vậy :

$\begin{cases} OC\perp OA \\ OC\perp OB \end{cases} \Rightarrow OC\perp AB$ (1)

Mà $CH\perp AB$ (vì H là trực tâm tam giác ABC) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB\perp(OHC)$ $\Rightarrow AB\perp OH$ (*)

Tương tự $BC\perp(OAH)$ $\Rightarrow BC\perp OH$. (**)

Từ (*) và (**) suy ra $OH \perp (ABC)$.

Khi đó mặt cầu tâm O tiếp xúc mặt phẳng (ABC) có bán kính $R = OH = 3$.

Vậy mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (α) là $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 22 = 0$ và mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 6z + 14 = 0$. Khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P) bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

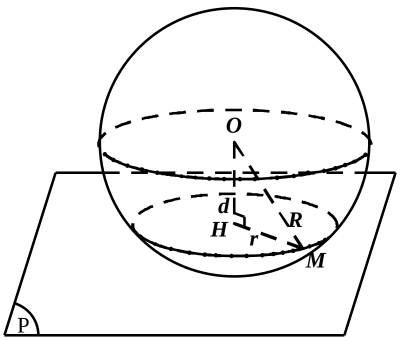
Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$. Vậy $d(I,(P)) = \dfrac{|3-2+6+14|}{\sqrt{9+4+36}} = 3.$.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$. Tìm bán kính r đường tròn giao tuyến của (S) và (P).

A. $r = \dfrac{1}{3}$. **B.** $r = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $r = \dfrac{1}{2}$. **D.** $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R = 1$.

Khoảng cách $d(O,(P)) = \dfrac{1}{3}$.

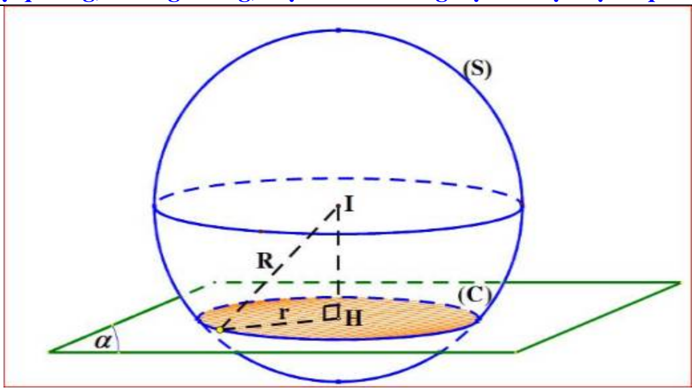
Bán kính đường tròn giao tuyến là $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$. Đường tròn giao tuyến của (S) với mặt phẳng (Oxy) có bán kính là

A. $r = 3$. **B.** $r = \sqrt{5}$. **C.** $r = \sqrt{6}$. **D.** $r = \sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$.

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (Oxy) là $d=3$, suy ra bán kính đường tròn giao tuyến cần tìm là

$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{5}$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính bằng 1, tiếp xúc mặt phẳng (Oxz). Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

A. $|a|=1$. **B.** $a+b+c=1$. **C.** $|b|=1$. **D.** $|c|=1$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình mặt phẳng (Oxz): $y=0$.

Vì mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính bằng 1 tiếp xúc với (Oxz) nên ta có:

$d(I;(Oxz))=1 \Leftrightarrow |b|=1$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=4$ và mặt phẳng (P): $4x-3y-m=0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung.

A. $m=1$. **B.** $m=-1$ hoặc $m=-21$.

C. $m=1$ hoặc $m=21$. **D.** $m=-9$ hoặc $m=31$.

Lời giải

Chọn C

Ta có mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=4$ có tâm $I(2;-1;-2)$, bán kính $R=2$.

Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung khi và chỉ khi mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) $\Leftrightarrow d(I,(P))=R \Leftrightarrow \dfrac{|4.2-3.(-1)-m|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2 \Leftrightarrow |11-m|=10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=21 \end{array}\right.$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo một đường tròn bán kính bằng 3.

A. $(Q): y+3z=0$. **B.** $(Q): x+y-2z=0$. **C.** $(Q): y-z=0$. **D.** $(Q): y-2z=0$.

Lời giải

Chọn D

(Q) chứa trục Ox nên có dạng $By+Cz=0\ (B^2+C^2\neq 0)$.

(S) có tâm $I(1;-2;-1)$ và bán kính $R=3$.

Bán kính đường tròn giao tuyến $r=3$.

Vì $R=r$ nên $I\in(Q)$.

$\Leftrightarrow -2B-C=0$ vì B, C không đồng thời bằng 0 nên chọn $B=1\Rightarrow C=-2$.

Vậy $(Q): y-2z=0$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=45$ và mặt phẳng $(P): x+y-z-13=0$. Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có tâm $I(a;b;c)$ thì giá trị của $a+b+c$ bằng

A. -11. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $A(1;2;-1)$ và bán kính $R=3\sqrt{5}$.

Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có tâm $I(a;b;c)\Rightarrow I$ là hình chiếu của

A lên mp(P) $\Leftrightarrow \begin{cases} I\in(P) \\ \overrightarrow{IA}=k\overrightarrow{n_P} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-c-13=0 \\ 1-a=k \\ 2-b=k \\ -1-c=-k \end{cases} \Rightarrow (1-k)+(2-k)-(-1+k)-13=0 \Leftrightarrow k=-3$

$\Rightarrow I(4;5;-4)$.

Vậy $a+b+c=5$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, ho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$, mặt phẳng $(P): 4x+3y+m=0$. Giá trị của m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S).

A. $\left[\begin{array}{l} m>11 \\ m<-19 \end{array}\right.$. **B.** $-19<m<11$. **C.** $-12<m<4$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<-12 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn B

$(S): x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$ có tâm $I(1;0;1)$ và bán kính $R=3$

(P) cắt mặt cầu $(S)\Leftrightarrow d[I;(P)]<R\Leftrightarrow \dfrac{|4.1+3.0+m|}{\sqrt{4^2+3^2}}<3$

$\Leftrightarrow |m+4|<15 \Leftrightarrow -19<m<11$

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-a)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ và mặt phẳng $(P):2x+y+2z=1$. Giá trị của a để (P) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn (C)

A. $-\frac{17}{2} \le a \le \frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{17}{2} < a < \frac{1}{2}$. **C.** $-8<a<1$. **D.** $-8 \le a \le 1$.

Lời giải

ChọnC

$(S):(x-a)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ có tâm $I(a;2;3)$ và có bán kính $R=3$

(P) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn $(C) \Leftrightarrow d\left[I;(P)\right]<R$

$\Leftrightarrow \frac{|2.a+2+2.3-1|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}<3 \Leftrightarrow |2a+7|<9 \Leftrightarrow -8<a<1$

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-10=0$, mặt phẳng $(P):x+2y-2z+10=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (P) tiếp xúc với (S).

B. (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn khác đường tròn lớn.

C. (P) và (S) không có điểm chung.

D. (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn lớn.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I=(2;-1;-1)$, bán kính $R=\sqrt{4+1+1-(-10)}=\sqrt{16}=4$

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là: $d(I,(P))=\frac{|2+2.(-1)-2(-1)+10|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{12}{3}=4$

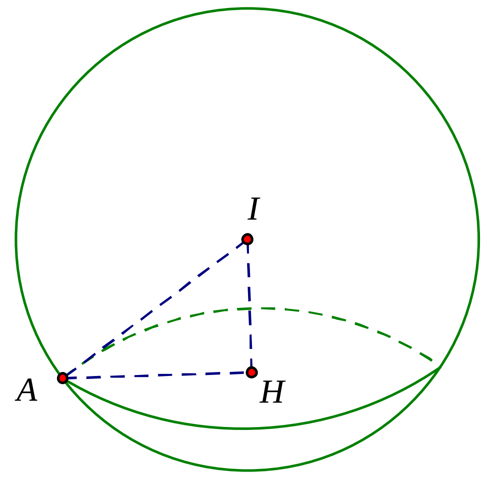
Ta thấy: $d(I,(P))=R$, vậy (P) tiếp xúc với (S).

Câu 41. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):mx+2y-z+1=0$ (m là tham số). Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=9$ theo một đường tròn có bán kính bằng 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m ?

A. $m=\pm 1$. **B.** $m=\pm 2+\sqrt{5}$. **C.** $m=\pm 4$. **D.** $m=6\pm 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D



Từ $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=9$ ta có tâm $I=(2;1;0)$ bán kính $R=3$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P) và $(P)\cap(S)=C(H;r)$ với $r=2$

Ta có $IH=d\left(I;(P)\right)\Leftrightarrow IH=\dfrac{|2m+2-0+1|}{\sqrt{m^2+4+1}}=\dfrac{|2m+3|}{\sqrt{m^2+5}}$

Theo yêu cầu bài toán ta có $R^2=IH^2+r^2\Leftrightarrow 9=\dfrac{(2m+3)^2}{m^2+5}+4$

$\Leftrightarrow m^2-12m+16=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=6-2\sqrt{5}\\ m=6+2\sqrt{5}\end{array}\right.$.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+3y+z-11=0$. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm H, khi đó H có tọa độ là:

A. $H(-3;-1;-2)$. **B.** $H(-1;-5;0)$. **C.** $H(1;5;0)$. **D.** $H(3;1;2)$.

Lời giải

Chọn D

(S) có tâm $I(1;-2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm $H\Rightarrow H$ là hình chiếu của I lên (P)

Đường thẳng đi qua $I(1;-2;1)$ và vuông góc với (P) là $d:\begin{cases}x=1+2t\\ y=-2+3t\,(t\in R)\\ z=1+t\end{cases}$

$H(1+2t;3t-2;1+t)\in d$

$H\in(P)\Leftrightarrow 2(1+2t)+3(3t-2)+(1+t)-11=0\Leftrightarrow t=1$

$\Rightarrow H(3;1;2)$

Câu 43. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) có phương trình $2x+y-z-1=0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4$. Xác định bán kính r của đường tròn là giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S).

A. $r=\dfrac{2\sqrt{42}}{3}$. **B.** $r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ **C.** $r=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$. **D.** $r=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;-2)$ và bán kính $R=2$. Gọi d là khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (α).

Ta có $d=d\left(I,(\alpha)\right)=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Khi đó ta có: $r=\sqrt{R^2-d^2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;-1)$ và đi qua điểm $A(2;1;2)$. Mặt phẳng nào dưới đây tiếp xúc với (S) tại A?

A. $x+y+3z-9=0$ **B.** $x+y-3z+3=0$ **C.** $x+y-3z-8=0$ **D.** $x-y-3z+3=0$

Lời giải

Chọn B.

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm. Khi đó, (P) tiếp xúc với (S) tại A khi chỉ khi (P) đi qua $A(2;1;2)$ và nhận vectơ $\overrightarrow{IA}=(-1;-1;3)$ làm vectơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng (P) là $-x-y+3z-3=0 \Leftrightarrow x+y-3z+3=0$.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P): $x-2y-2z-2=0$ có phương trình là

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$.

Lời giải

Chọn C.

Vì mặt cầu tâm $I(-1;2;1)$ tiếp xúc với mặt phẳng (P): $x-2y-2z-2=0$ nên bán kính

$$R=d\left(I,(P)\right)=\frac{|-1-2.2-2.1-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=3 \Rightarrow (S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9.$$

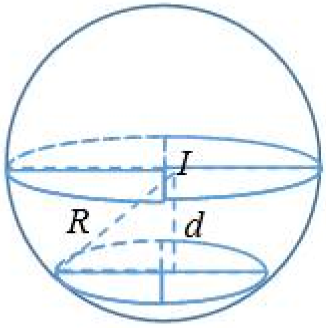
Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1)$ và cắt mặt phẳng $(P):2x-y+2z+7=0$ theo một đường tròn có đường kính bằng 8. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=81$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=5$.

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$.

Lời giải

Chọn D.



Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là

$$d=d\left(I,(P)\right)=\frac{|2.1-2+2.1+7|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=3.$$

Đường tròn giao tuyến có đường kính bằng 8 nên bán kính đường tròn là $r=4$.

Bán kính của mặt cầu (S) là $R=\sqrt{d^2+r^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$.

Câu 47. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(3;1;0)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+1=0$?

A. $(x+3)^2+(y+1)^2+z^2=3$. **B.** $(x+3)^2+(y+1)^2+z^2=9$.

C. $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=3$. **D.** $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=9$.

Lời giải

Chọn D.

Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và tiếp xúc với (P) có R là bán kính. Khi đó ta có:

$$d\left(I,(P)\right)=R\Rightarrow R=\frac{|2.3+2.1-0+1|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}\Leftrightarrow R=3.$$

Vậy phương trình của (S) là $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=9$.

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+2z+2=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình của mặt cầu (S)

A. $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=8$ **B.** $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=10$

C. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=8$ **D.** $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$

Lời giải

Chọn D.

Gọi R,r lần lượt là bán kính của mặt cầu (S) và đường tròn giao tuyến

Ta có $R^2=r^2+\left(d\left(I,(P)\right)\right)^2=1+\left(\frac{|2.2+1.1+2.1+2|}{\sqrt{2^2+1+2^2}}\right)^2=10$

Mặt cầu (S) tâm $I(2;1;1)$ bán kính $R=\sqrt{10}$ là $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$.

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-3;0;1)$. Mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng $(P): x-2y-2z-1=0$ theo một thiết diện là một hình tròn. Diện tích của hình tròn này bằng π. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=4$. **B.** $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=25$.

C. $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=5$. **D.** $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=2$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi S, r lần lượt là diện tích hình tròn và bán kính hình tròn.

Ta có: $S=\pi r^2=\pi \Rightarrow r=1$

$d\left(I;(P)\right)=\frac{|-3-2.0-2.1-1|}{\sqrt{1+4+4}}=2$

(S) có tâm $I(-3;0;1)$ và bán kính $R=\sqrt{d^2\left(I;(P)\right)+r^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

Phương trình mặt cầu (S) là: $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=5$.

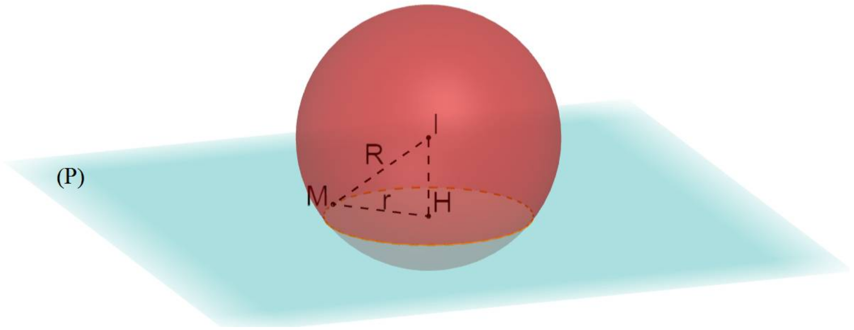
Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz,* cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;\,2;\,-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

A. $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$. **B.** $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

C. $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=34$. **D.** $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$.

Lời giải

Chọn D.



Gọi M là điểm nằm trên đường tròn giao tuyến của (S) và (P). Ta có $IM = R$. Áp dụng công thức tính bán kính mặt cầu trong trường hợp mặt cầu (S) giao với mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r là: $IM^2 = R^2 = d^2_{(I;(P))} + r^2$ $\quad (*)$

Ta có: $d_{(I;(P))} = \dfrac{|-1-2.2+2.(-1)-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = 3 = IH$.

Từ $(*) \Rightarrow R^2 = 3^2 + 5^2 = 34$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) thỏa mãn yêu cầu đề bài là $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34$.

Câu 51. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(6;2;-5)$, $B(-4;0;7)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A.

A. $(P): 5x + y - 6z + 62 = 0$.
B. $(P): 5x + y - 6z - 62 = 0$.
C. $(P): 5x - y - 6z - 62 = 0$.
D. $(P): 5x + y + 6z + 62 = 0$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi I là trung điểm của AB $\Rightarrow I(1;1;1)$.

Mặt cầu (S) có đường kính AB nên có tâm là điểm I.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A nên mặt phẳng (P) đi qua A và nhận $\overrightarrow{IA} = (5;1;-6)$ là vectơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P): $5(x-6) + 1(y-2) - 6(z+5) = 0 \Leftrightarrow 5x + y - 6z - 62 = 0$.

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 7 = 0$. Biết mp(Q) cắt mặt cầu $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$ theo một đường tròn có bán kính $r = 3$. Khi đó mặt phẳng (Q) có phương trình là:

A. $x - y + 2z - 7 = 0$.
B. $2x - 2y + z + 17 = 0$.
C. $2x - 2y + z + 7 = 0$.
D. $2x - 2y + z - 17 = 0$.

Lời giải

Chọn D

(S) có tâm $I(0;-2;1)$ và bán kính $R = 5$

Gọi M là hình chiếu vuông góc của I lên (Q)

(Q) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính $r = 3$

$\Rightarrow IM = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

$(Q) // (P): 2x - 2y + z + 7 = 0 \Rightarrow (Q): 2x - 2y + z + m = 0 \, (m \neq 7)$

$d\left[I;(Q)\right]=\dfrac{\left|2.0-2.(-2)+1.1+m\right|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=IM=4$

$\Leftrightarrow |m+5|=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=7 \\ m=-17 \end{array}\right.$

Vậy $(Q): 2x-2y+z-17=0$

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) chứa trục Ox và cắt mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$ theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 3 có phương trình là:

A. $y-2z=0$. **B.** $y+2z=0$. **C.** $y+3z=0$. **D.** $y-3z=0$.

Lời giải

Chọn A

$(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$ có tâm $I(1;-2;-1)$ và bán kính $R=3$

(P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r=3=R$

$\Rightarrow I \in (P)$

Chọn điểm $M(1;0;0) \in Ox \Rightarrow \overrightarrow{IM}=(0;2;1)$

$\vec{n}=\left[\vec{a};\overrightarrow{IM}\right]=(0;-1;2)$

(P) qua $O(0;0;0)$ và có VTPT $\vec{n}=(0;-1;2) \Rightarrow (P): y-2z=0$

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2z-2=0$ và điểm $K(2;2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng chứa tất cả các tiếp điểm của các tiếp tuyến vẽ từ K đến mặt cầu (S).

A. $2x+2y+z-4=0$. **B.** $6x+6y+3z-8=0$.

C. $2x+2y+z+2=0$ **D.** $6x+6y+3z-3=0$.

Lời giải

Chọn A.

$(S): x^2+y^2+(z+1)^2=3 \Rightarrow$ mặt cầu tâm $I(0;0;-1)$, $R=\sqrt{3}$.

Do $\overrightarrow{IK}=(2;2;1), IK=3>R \Rightarrow K$ nằm ngoài mặt cầu. Suy ra từ K vẽ được vô số tiếp tuyến đến mặt cầu và khoảng cách từ K đến các tiếp điểm bằng nhau.

Gọi E là 1 tiếp điểm $\Rightarrow IE \perp EK \Rightarrow \Delta IKE$ vuông tại $E \Rightarrow KE=\sqrt{IK^2-IE^2}=\sqrt{6} \Rightarrow E$ thuộc mặt cầu tâm K bán kính $R'=\sqrt{6}$.

Tọa độ điểm E thỏa mãn hệ

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2z-2=0 \\ (x-2)^2+(y-2)^2+z^2=6 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+z^2+2z-2=(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=6$

$\Leftrightarrow 4x+4y+2z+4=0 \Leftrightarrow 2x+2y+z+2=0.$

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$ và mặt phẳng $(\alpha): x+4y+z\text{-}11=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P), biết (P) song song với giá của vectơ $\vec{v}=(1;6;2)$, vuông góc với (α) và tiếp xúc với (S).

A. $\left[\begin{array}{l} x-2y+z+3=0 \\ x-2y+z-21=0 \end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l} 3x+y+4z+1=0 \\ 3x+y+4z-2=0 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} 4x-3y-z+5=0 \\ 4x-3y-z-27=0 \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} 2x-y+2z+3=0 \\ 2x-y+2z-21=0 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn D.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-3;2)$ và bán kính $R=4$.

Vì mặt phẳng (P) song song với giá của vectơ $\vec{v}=(1;6;2)$, vuông góc với (α) nên có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{n_{(\alpha)}},\vec{v}\right]=(2;-1;2)$.

Mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+D=0$.

Vì (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên ta có:

$$d(I;(P))=R \Leftrightarrow \frac{|2.1+3+2.2+D|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=4 \Leftrightarrow |D+9|=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=-21 \\ D=3 \end{array}\right..$$

Vậy phương trình mặt phẳng (α) là: $\left[\begin{array}{l} 2x-y+2z+3=0 \\ 2x-y+2z-21=0 \end{array}\right.$

Câu 56. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$, mặt phẳng $(\alpha): x+4y+z-11=0$. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với (α), (P) song song với giá của vecto $\vec{v}=(1;6;2)$ và (P) tiếp xúc với (S). Lập phương trình mặt phẳng (P).

A. $2x-y+2z-2=0$ và $x-2y+z-21=0$.

B. $x-2y+2z+3=0$ và $x-2y+z-21=0$.

C. $2x-y+2z+3=0$ và $2x-y+2z-21=0$.

D. $2x-y+2z+5=0$ và $2x-y+2z-2=0$.

Lời giải

Chọn C

(S) có tâm $I(1;-3;2)$ và bán kính $R=4$. Véc tơ pháp tuyến của (α) là $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;4;1)$.

Suy ra VTPT của (P) là $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{n_\alpha},\vec{v}\right]=(2;-1;2)$.

Do đó (P) có dạng: $2x-y+2z+d=0$.

Mặt khác (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I,(P))=4$

Hay $\frac{|2+3+4+d|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d=-21 \\ d=3 \end{array}\right.$.

Câu 57. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=6$ đồng thời song song với hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-1}$, $d_2:\frac{x}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{-1}$.

A. $\left[\begin{array}{l} x-y+2z-3=0 \\ x-y+2z+9=0 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x+y+2z-3=0 \\ x+y+2z+9=0 \end{array}\right.$ **C.** $x+y+2z+9=0$ **D.** $x-y+2z+9=0$

Lời giải

Chọn B.

Đường thẳng d_1 có vtcp $\overrightarrow{u_1}(3;-1;-1)$, đường thẳng d_2 có vtcp $\overrightarrow{u_2}(1;1;-1)$. Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (α) cần tìm. Do (α) song song với hai đường thẳng d_1,d_2 nên $\vec{n}\perp\overrightarrow{u_1}$ và $\vec{n}\perp\overrightarrow{u_2}$, từ đó ta chọn $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(2;2;4)$. Suy ra $(\alpha):x+y+2z+c=0$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$, bán kính $R=\sqrt{6}$.

(α) tiếp xúc với $(S)\Leftrightarrow d(I;(\alpha))=\sqrt{6}\Leftrightarrow\frac{|c-3|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} c-3=6 \\ c-3=-6 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} c=9 \\ c=-3 \end{array}\right.$.

Câu 58. Trong không gian *Oxyz*, cho mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $d:\frac{x-4}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+4}{-4}$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$. Khi đó (P) song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. $3x-y+2z=0$. **B.** $-2x+2y-z+4=0$.

C. $x+y+z=0$ **D.** Đáp án khác.

Lời giải

Chọn D.

Véc tơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(3;1;-4)$, véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-3;1)$ và bán kính $R=3$.

Vì (P) chứa d nên $\vec{u}.\vec{n}=0$ và (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I;(P))=3$.

Ta chỉ xét phương trình $\vec{u}.\vec{n}=0$. Lấy hai điểm nằm trên đường thẳng d là $M(4;0;-4)$ và $N(1;-1;0)$.

Ta nhận thấy: $M(4;0;-4)$ và $N(1;-1;0)$ không thỏa mãn đáp án $A;B;C$.

Vây, đáp án là D.

Câu 59. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=2$ và hai đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}$; $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của một mặt phẳng tiếp xúc với (S), song song với d và Δ?

A. $y+z+3=0$ **B.** $x+z+1=0$ **C.** $x+y+1=0$ **D.** $x+z-1=0$

Lời giải

Chọn B.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;1-2)$; $R=\sqrt{2}$.

Véctơ chỉ phương của d: $\vec{u}_d=(1;2;-1)$. Véctơ chỉ phương của Δ: $\vec{u}_\Delta=(1;1;-1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng cần viết phương trình.

Ta có $\left[\vec{u}_d,\vec{u}_\Delta\right]=(-1;0;-1)$ nên chọn một véctơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(1;0;1)$.

Mặt phẳng (P) có phương trình tổng quát dạng: $x+z+D=0$.

Do (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I;(P))=R\Leftrightarrow\frac{|-1-2+D|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow|D-3|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D=5\\D=1\end{array}\right.$.

Chọn (P): $x+z+1=0$.

Câu 60. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$, đường thẳng $\Delta:\frac{x-6}{-3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{2}$ và điểm $M(4;3;1)$. Trong các mặt phẳng sau mặt phẳng nào đi qua M, song song với Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S)?

A. $2x-2y+5z-22=0$. **B.** $2x+y+2z-13=0$.

C. $2x+y-2z-1=0$. **D.** $2x-y+2z-7=0$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Gọi $\vec{n}=(2a;b;c)$ là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) cần lập, $a^2+b^2+c^2\neq0$.

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-3;2;2)$.

Mặt phẳng (P) song song với Δ nên ta có $\vec{n}.\vec{u}=0\Leftrightarrow-6a+2b+2c=0\Leftrightarrow c=3a-b$.

Mặt phẳng (P) đi qua M và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ nên phương trình có dạng:

$2a(x-4)+b(y-3)+(3a-b)(z-1)=0\Leftrightarrow2ax+by+(3a-b)z-11a-2b=0$ (*)

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=1$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) $\Leftrightarrow d(I,(P))=1 \Leftrightarrow \dfrac{3|b|}{\sqrt{4a^2+b^2+(3a-b)^2}}=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{3|b|}{\sqrt{13a^2+2b^2-6ab}}=1 \Leftrightarrow 3|b|=\sqrt{13a^2+2b^2-6ab}$.

$\Leftrightarrow 9b^2=13a^2+2b^2-6ab \Leftrightarrow 13a^2-6ab-7b^2=0 \Leftrightarrow (a-b)(13a+7b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ 13a=-7b \end{array}\right.$.

Với $a=b$, chọn $a=1, b=1$, thay vào $(*)$ ta được pt$(P_1): 2x+y+2z-13=0$.

Ta có $N(6;2;2)\in\Delta$. Dễ thấy $N\notin(P_1)$, suy ra $(P_1): 2x+y+2z-13=0$ song song với Δ.

Với $13a=-7b$, chọn $a=7, b=-13$, thay vào $(*)$ ta được pt$(P_2): 14x-13y+34z-51=0$.

Ta có $N(6;2;2)\in\Delta$, dễ thấy $N\notin(P_2)$, suy ra $(P_2): 14x-13y+34z-51=0$ song song với Δ.

Cách 2: (Trắc nghiệm)

Gọi (P) là mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}$.

Vì (P) đi qua $M(4;3;1)$ nên phương án **A**, **C** bị loại.

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-3;2;2)$. (P) song song với đường thẳng Δ nên $\vec{n}.\vec{u}=0$. Do đó phương án **D** bị loại.

Vậy phương án **B** là phương án thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 61. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ và mặt phẳng $(\alpha): 4x+3y-12z+10=0$. Lập phương trình mặt phẳng (β) thỏa mãn đồng thời các điều kiện: Tiếp xúc với (S); song song với (α) và cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương.

A. $4x+3y-12z-78=0$.   **B.** $4x+3y-12z-26=0$.

C. $4x+3y-12z+78=0$.   **D.** $4x+3y-12z+26=0$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=4$.

Mặt phẳng (β) song song với (α) nên có phương trình dạng $4x+3y-12z+c=0\ (c\neq 10)$.

(β) tiếp xúc với $(S) \Leftrightarrow d(I;(\beta))=R \Leftrightarrow \dfrac{|4.1+3.2-12.3+c|}{\sqrt{4^2+3^2+12^2}}=4 \Leftrightarrow \dfrac{|-26+c|}{13}=4$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -26+c=52 \\ -26+c=-52 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=78 \\ c=-26 \end{array}\right.$

Nếu $c = 78$ thì $(\beta): 4x + 3y - 12z + 78 = 0$. Mặt phẳng (β) cắt trục Oz ở điểm $M\left(0;0;\frac{13}{2}\right)$ có cao độ dương.

Nếu $c = -26$ thì $(\beta): 4x + 3y - 12z - 26 = 0$. Mặt phẳng (β) cắt trục Oz ở điểm $M\left(0;0;-\frac{13}{6}\right)$ có cao độ âm.

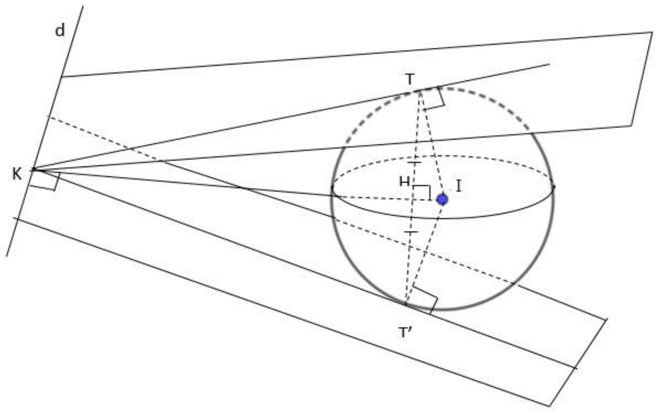
Vậy $(\beta): 4x + 3y - 12z + 78 = 0$.

Câu 62. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng (P), (P') chứa d và tiếp xúc với (S) tại T, T'. Tìm tọa độ trung điểm H của TT'.

A. $H\left(-\frac{7}{6};\frac{1}{3};\frac{7}{6}\right)$. **B.** $H\left(\frac{5}{6};\frac{2}{3};-\frac{7}{6}\right)$. **C.** $H\left(\frac{5}{6};\frac{1}{3};-\frac{5}{6}\right)$. **D.** $H\left(-\frac{5}{6};\frac{1}{3};\frac{5}{6}\right)$.

Lời giải

Chọn C



Mặt cầu (S) tâm $I(1;0;-1)$, bán kính $R = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2 - 1} = 1$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên d.

$K \in d$ nên ta có thể giả sử $K(t; 2+t; -t)$

$\overrightarrow{IK} = (t-1; 2+t; -t+1)$, $\overrightarrow{u_d} = (1;1;-1)$ là một véctơ chỉ phương của đường thẳng d

$IK \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{IK}.\overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow t - 1 + 2 + t + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 0. \Rightarrow K(0;2;0)$

ΔITK vuông tại T có TH là đường cao nên $IT^2 = IH.IK$.

$\Leftrightarrow IH = \frac{1}{\sqrt{6}}$ $\left(IK = \sqrt{6}\right) \Rightarrow \overrightarrow{IH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{IK}$. Giả sử $H(x;y;z)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\frac{1}{6}.(-1) \\ y-0=\frac{1}{6}.2 \\ z+1=\frac{1}{6}.1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{6} \\ y=\frac{1}{3} \\ z=\frac{-5}{6} \end{cases} \text{ Vậy } H\left(\frac{5}{6};\frac{1}{3};\frac{-5}{6}\right)$$

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$, $B(0;0;2)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$. Số mặt phẳng chứa hai điểm A, B và tiếp xúc với mặt cầu (S) là

A. 1 mặt phẳng. **B.** 2 mặt phẳng. **C.** 0 mặt phẳng. **D.** Vô số mặt phẳng.

Lời giải

Chọn A

Gọi phương trình mặt phẳng là: $(P): Ax+By+Cz+D=0\left(A^2+B^2+C^2\neq 0\right)$.

Theo đề bài, mặt phẳng qua A, B nên ta có:

$\begin{cases} A+D=0 \\ 2C+D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2C \\ D=-2C \end{cases}$. Vậy mặt phẳng (P) có dạng: $2Cx+By+Cz-2C=0$.

(S) có tâm $I(1,1,0)$ và $R=1$.

Vì (P) tiếp xúc với (S) nên $d_{(I,(P))}=R \Leftrightarrow \dfrac{2C+B-2C}{\sqrt{5C^2+B^2}}=1 \Leftrightarrow B^2=5C^2+B^2 \Leftrightarrow C=0$.

Suy ra $A=D=0$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(P): y=0$.

Câu 64. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$ và và mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-67=0$. Số điểm chung của Δ và (S) là:

A.3. **B.**0. **C.** 1 **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng Δ đi qua $M=(-2;0;3)$ và có VTCP $\vec{u}=(-1;1;-1)$

Mặt cầu (S) có tâm $I=(1;2;-3)$ và bán kính *R*=*9*

Ta có $\overrightarrow{MI}=(3;2;-6)$ và $\left[\vec{u},\overrightarrow{MI}\right]=(-4;-9;-5)$

$$\Rightarrow d(I,\Delta)=\frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{MI}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{366}}{3}$$

Vì $d(I,\Delta)<R$ nên Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt.

Câu 65. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases} x=2+t \\ y=1+mt \\ z=-2t \end{cases}$ và mặt cầu. $(S):(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=1$. Giá trị của m để đường thẳng Δ không cắt mặt cầu (S) là:

A. $m>\dfrac{15}{2}$.hoặc $m<\dfrac{5}{2}$ **B.** $m=\dfrac{15}{2}$.hoặc $m=\dfrac{5}{2}$

C. $\dfrac{5}{2}<m<\dfrac{15}{2}$. **D.** $m\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

Từ phương trình đường thẳng Δ và mặt cầu (S) ta có

$(2+t-1)^2+(1+\text{mt}+3)^2+(-2\text{t}-2)^2=1$

$\Leftrightarrow(1+t)^2+(4+m\text{t})^2+(-2\text{t}-2)^2=1$

$\Leftrightarrow\left(m^2+5\right)t^2+2(5+4m)t+20=0$ (1)

Để Δ không cắt mặt cầu (S) thì (1) vô nghiệm, hay (1) có $\Delta'<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m>\dfrac{15}{2} \\ m<\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$.

Câu 66. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=1$ và đường thẳng $\Delta:\begin{cases} x=2+t \\ y=1+mt \\ z=-2t \end{cases}$. Giá trị của m để đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt là:

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m>\dfrac{15}{2}$.hoặc $m<\dfrac{5}{2}$

C. $m=\dfrac{15}{2}$.hoặc $m=\dfrac{5}{2}$ **D.** $\dfrac{5}{2}<m<\dfrac{15}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Từ phương trình đường thẳng Δ và mặt cầu (S) ta có

$(2+t-1)^2+(1+\text{mt}+3)^2+(-2\text{t}-2)^2=1$

$\Leftrightarrow(1+t)^2+(4+m\text{t})^2+(-2\text{t}-2)^2=1$

$\Leftrightarrow\left(m^2+5\right)t^2+2(5+4m)t+20=0$ (1)

Để Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt thì (1) có hai nghiệm phân biệt, hay (1) có

$\Delta'>0\Leftrightarrow\dfrac{5}{2}<m<\dfrac{15}{2}$.

Câu 67. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với trục Oy là:

A. $(x-1)^2+(y+2)^2(z-3)^2=9$.
B. $(x-1)^2+(y+2)^2(z-3)^2=\sqrt{10}$.
C. $(x+1)^2+(y-2)^2(z+3)^2=10$.
D. $(x-1)^2+(y+2)^2(z-3)^2=10$.

Lời giải

Chọn D

Gọi M là hình chiếu của $I(1;-2;3)$ lên Oy, ta có: $I(0;-2;0)$.

$\overrightarrow{IM}=(-1;0;-3)\Rightarrow R=d(I,Oy)=IM=\sqrt{10}$ là bán kính mặt cầu cần tìm

Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2+(y+2)^2(z-3)^2=10$.

Câu 68. Trong không gian Oxyz, biết mặt cầu (S) có tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y+2z+9=0$ tại điểm $H(a;b;c)$. Giá trị của tổng $a+b+c$ bằng

A. 2.
B. -1.
C. 1.
D. -2.

Lời giải

Chọn B.

$\overrightarrow{n_P}=(1;-2;2)$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng OH $\Rightarrow OH:\begin{cases}x=t\\y=-2t\\z=2t\end{cases}$

$\Rightarrow H(t;-2t;2t)$

$H\in(P)\Rightarrow t-2.(-2t)+2.2t+9=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow H(-1;2;-2)\Rightarrow a+b+c=-1$

Câu 69. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;0;2)$ và đường thẳng d: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I, tiếp xúc với đường thẳng d. Bán kính của (S) bằng

A. $\dfrac{5}{3}$.
B. $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.
C. $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$.
D. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi $H(1+2t;-t;t)$ là hình chiếu của I trên đường thẳng d.

Có $\overrightarrow{IH}=(2t;-t;t-2)$; vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(2;-1;1)$.

Vì H là hình chiếu vuông góc của I trên d nên $\overrightarrow{IH}\perp\vec{u}\Leftrightarrow\overrightarrow{IH}.\vec{u}=0$

$\Leftrightarrow 2t.2+(-t).(-1)+(t-2).1=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\overrightarrow{IH}=\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3};-\dfrac{5}{3}\right)\Rightarrow IH=\dfrac{\sqrt{30}}{3}$.

Bán kính của mặt cầu (S) là $R=IH=\dfrac{\sqrt{30}}{3}$.

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính $R=5$, có tâm I thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với trục Oy. Biết rằng I có tung độ dương. Điểm nào sau đây thuộc mặt cầu (S)?

A. $M(-1;-2;1)$. **B.** $N(1;2;-1)$. **C.** $P(-5;2;-7)$. **D.** $Q(5;-2;7)$.

Lời giải

Chọn B.

Điểm I thuộc đường thẳng d nên có tọa độ dang: $I(1+2t;-t;-2+t)$

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với trục Oy nên $d(I,Oy)=R\Leftrightarrow\sqrt{(1+2t)^2+(-2+t)^2}=5$

$\Leftrightarrow\sqrt{5t^2+5}=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=-2\end{array}\right.$

Với $t=2$ ta có $I(5;-2;0)$ (Loại).

Với $t=-2$ ta có $I(-3;2;-4)$ (Thỏa mãn).

Nên mặt cầu (S) có phương trình là: $(x+3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=25$.

Thay tọa độ các điểm trong các phương án vào phương trình mặt cầu, nhận thấy điểm $N(1;2;-1)$ thỏa mãn.

Câu 71. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;6;2)$ và $B(2;-2;0)$ và mặt phẳng $(P):x+y+z=0$. Xét đường thẳng d thay đổi thuộc (P) và đi qua B, gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d. Biết rằng khi d thay đổi thì H thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A. $R=\sqrt{3}$ **B.** $R=2$ **C.** $R=1$ **D.** $R=\sqrt{6}$

Lời giải

Chọn D.

Gọi I là trung điểm của $AB\Rightarrow I(3;2;1)$

$$d(I;(P))=\frac{|3+2+1|}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I(3;2;1)$ và bán kính $R'=\dfrac{AB}{2}=3\sqrt{2}$

Ta có $H\in(S)$. Mặt khác $H\in(P)$ nên $H\in(C)=(S)\cap(P)$

Bán kính của đường tròn (C) là $R=\sqrt{(R')^2-d^2(I;(P))}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$.

Câu 72. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d):\frac{x}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{1}$ và hai mặt phẳng $(P):x-2y+2z=0$; $(Q):x-2y+3z-5=0$. Mặt cầu (S) có tâm I là giao điểm của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P). Mặt phẳng (Q) tiếp xúc với mặt cầu (S). Viết phương trình mặt cầu (S).

A. $(S):(x+2)^2+(y+4)^2+(z+3)^2=1$.

B. $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=6$.

C. $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=\frac{2}{7}$.

D. $(S):(x-2)^2+(y+4)^2+(z+4)^2=8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I\in(d)\Rightarrow I(2t;3+t;2+t)$.

$I\in(P)\Rightarrow(P):2t-2(3+t)+2(2+t)=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow I(2;4;3)$

(Q) tiếp xúc với (S) nên $R=d(I,(Q))=\sqrt{\frac{2}{7}}$.

Vậy $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=\frac{2}{7}$.

Câu 73. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$, $B(2;2;1)$ và mặt phẳng $(P):x+y+2z=0$. Mặt cầu (S) thay đổi qua A,B và tiếp xúc với (P) tại H. Biết H chạy trên 1 đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

A. $3\sqrt{2}$.

B. $2\sqrt{3}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Chọn B.

Có $A(1;1;1),B(2;2;1)$ $\Rightarrow$ Phương trình AB: $\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=1\end{cases}$

Gọi K là giao điểm của AB và (P) $\Rightarrow$ $K(-1;-1;1)$

Có Mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) tại H.

$\Rightarrow$ HK là tiếp tuyến của (S)

$\Rightarrow$ $KH^2=\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB}=12\Rightarrow KH=2\sqrt{3}$ không đổi

$\Rightarrow$ Biết H chạy trên 1 đường tròn bán kính $2\sqrt{3}$ không đổi

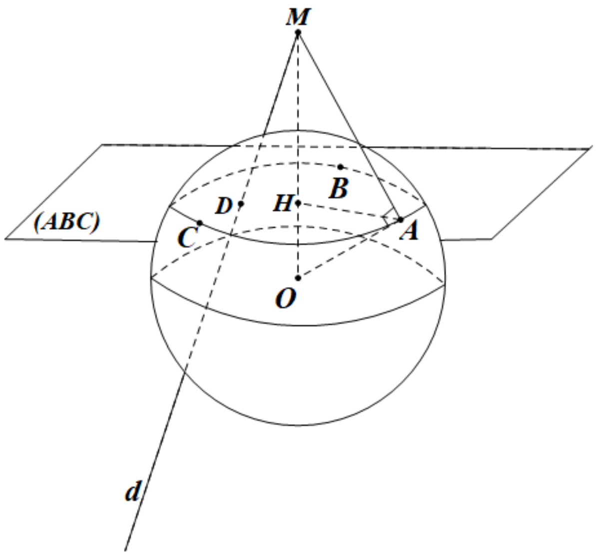
Câu 74. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $M\left(x_0;y_0;z_0\right)\in d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=2-3t\end{cases}$.

Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $D(1;1;2)$. Tổng $T=x_0^2+y_0^2+z_0^2$ bằng

A. 30. **B.** 26. **C.** 20. **D.** 21.

Lời giải

Chọn B.



Ta có: $M\left(x_0;y_0;z_0\right)\in d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=2-3t\end{cases}\Rightarrow x_0+y_0+z_0=4$.

Mặt cầu có phương trình $x^2+y^2+z^2=9\Rightarrow$ tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R=3$.

MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu $\Rightarrow MO\perp(ABC)$.

$\Rightarrow(ABC)$ đi qua $D(1;1;2)$ có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{OM}\left(x_0;y_0;z_0\right)$ có phương trình dạng:

$x_0(x-1)+y_0(y-1)+z_0(z-2)=0$.

MA là tiếp tuyến của mặt cầu tại $A\Rightarrow\Delta MOA$ vuông tại $A\Rightarrow OH.OM=OA^2=R^2=9$.

Gọi H là hình chiếu của O lên (ABC) $(OH+OM=HM)$, ta có:

$$d(O;(ABC))=OH=\frac{\left|-x_0-y_0-2z_0\right|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=\frac{\left|x_0+y_0+z_0+z_0\right|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=\frac{\left|z_0+4\right|}{OM}\Rightarrow OH.OM=\left|z_0+4\right|.$$

$\Rightarrow\left|z_0+4\right|=9\Leftrightarrow z_0=5\vee z_0=-13$.

* Với $z_0=5\Rightarrow M(0;-1;5)\Rightarrow T=26$ nhận do: $OM=\sqrt{26};OH=\dfrac{\left|z_0+4\right|}{OM}=\dfrac{9}{\sqrt{26}}$;

$pt(ABC):-y+5z-9=0\Rightarrow MH=d(M;(ABC))=\dfrac{17}{\sqrt{26}}$.

$\Rightarrow OH + HM = OM$.

* Với $z_0 = -13 \Rightarrow M(6;11;-13) \Rightarrow$ loại do: $OM = \sqrt{326}; OH = \dfrac{9}{\sqrt{326}}$;

$(ABC): 6x + 11y - 13z + 9 = 0 \Rightarrow MH = d(M;(ABC)) = \dfrac{335}{\sqrt{326}}$.

$\Rightarrow OH + HM \neq OM$.

Câu 75. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 9$ và đường thẳng $d: \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+1}{2}$. Cho các phát biểu sau đây:

I. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm phân biệt.

II. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

III. Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.

IV. Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại một điểm.

Số phát biểu đúng là:

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-3;0)$, bán kính $R = 3$.

Phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases} x = -2t \\ y = -2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x = -2t \\ y = -2 + t \\ z = -1 + 2t \\ (x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow 9t^2 + 2t - 6 = 0 \ (1)$.

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt nên d cắt (S) tại 2 điểm phân biệt.

$d(I,(P)) = \dfrac{|2.1 - 2.(-3) + 0 + 3|}{3} = \dfrac{11}{3} > R \Rightarrow$ (P) và (S) không có điểm chung.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x = -2t \\ y = -2 + t \\ z = -1 + 2t \\ 2x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \dfrac{3}{2}$. d cắt (P) tại một điểm.

Vậy có 3 phát biểu đúng.

Câu 76. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=14$ và mặt phẳng $(\alpha): x+3y+2z-5=0$. Biết đường thẳng Δ nằm trong (α), cắt trục Ox và tiếp xúc với (S). Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của Δ?

A. $\vec{u}=(4;-2;1)$. **B.** $\vec{v}=(2;0;-1)$. **C.** $\vec{m}=(-3;1;0)$. **D.** $\vec{n}=(1;-1;1)$.

Lời giải

Chọn B.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;4)$ và bán kính $R=\sqrt{14}$.

Ta có $d(I,(\alpha))=\sqrt{14}=R \Rightarrow (\alpha)$ tiếp xúc với (S).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $(\alpha) \Rightarrow H(1;0;2)$

Gọi $A=\Delta\cap Ox \Rightarrow A(a;0;0)$ và $\overrightarrow{AH}=(a-1;0;-2)$

Đường thẳng Δ nằm trong (α), cắt trục Ox và tiếp xúc với (S) nên $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{n_\alpha}$. Tức là

$a-1+0-4=0 \Leftrightarrow a=5 \Rightarrow \overrightarrow{AH}=(4;0;-2)$ cùng phương với $\vec{v}=(2;0;-1)$.

Câu 77. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu (S) tâm $I(5;-3;5)$, bán kính $R=2\sqrt{5}$. Từ một điểm A thuộc mặt phẳng (P) kẻ một đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại B. Tính OA biết $AB=4$.

A. $OA=\sqrt{11}$. **B.** $OA=5$. **C.** $OA=3$. **D.** $OA=\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn A

Khoảng cách từ điểm I đến mp(P) là: $d(I;(P))=\dfrac{|5-2.(-3)+2.5-3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=6$.

AB tiếp xúc với (S) tại B nên tam giác AIB vuông tại B, do đó ta có:

$IA=\sqrt{IB^2+AB^2}=\sqrt{R^2+AB^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2+4^2}=6=d(I;(P)) \Rightarrow A$ là hình chiếu của I lên (P)

Đường thẳng IA đi qua $I(5;-3;5)$ có VTCP $\vec{u}=\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;-2;2)$ có phương trình $\begin{cases} x=5+t \\ y=-3-2t \\ z=5+2t \end{cases}$

Có $A=IA\cap(P) \Rightarrow 5+t-2(-3-2t)+2(5+2t)-3=0 \Rightarrow t=-2 \Rightarrow A(3;1;1) \Rightarrow OA=\sqrt{11}$.

Câu 78. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc $d:\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=2-3t \end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua $D(1;1;2)$. Tổng $T=x_0^2+y_0^2+z_0^2$ bằng

A. 30   **B.** 26   **C.** 20   **D.** 21

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính R. Gọi $M(1+t_0;1+2t_0;2-3t_0)\in d$.

Gỉa sử $T(x;y;z)\in(S)$ là một tiếp điểm của tiếp tuyến MT với mặt cầu (S). Khi đó

$$OT^2+MT^2=OM^2$$
$$\Leftrightarrow 9+\left[x-(1+t_0)\right]^2+\left[y-(1+2t_0)\right]^2+\left(z-(2-3t_0)\right)^2=(1+t_0)^2+(1+2t_0)^2+(2-3t_0)^2$$
$$\Leftrightarrow (1+t_0)x+(1+2t_0)+(2-3t_0)z-9=0.$$

Suy ra phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $(1+t_0)x+(1+2t_0)y+(2-3t_0)z-9=0$

Do $D(1;1;2)\in(ABC)$ nên $1+t_0+1+2t_0+2.(2-3t)-9=0\Leftrightarrow t_0=-1\Rightarrow M(0;-1;5)$.

Vậy $T=0^2+(-1)^2+5^2=26$.

Câu 79. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(0;0;3),B(-2;0;1)$ và mặt phẳng $(\alpha):2x-y+2z+8=0$. Hỏi có bao nhiêu điểm C trên mặt phẳng (α) sao cho tam giác ABC đều?

A. 2.   **B.** 1.   **C.** 0.   **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C.

Gọi (P) mặt phẳng trung trực của AB, khi đó phương trình của (P) là: $x+z-1=0$.

Ta có $\overrightarrow{n_P}=(1;0;1),\overrightarrow{n_\alpha}=(2;-1;2)$ nên $\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_\alpha}\right]=(1;0;-1)$.

Gọi d là giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng (α). Chọn $\overrightarrow{u_d}=(1;0;-1)$

và điểm $M(1;10;0)\in d$ nên phương trình tham số của d là: $\begin{cases}x=1+t\\y=10\\z=-t\end{cases}$.

Do tam giác ABC đều nên $CA=CB$ hay C thuộc mặt phẳng trung trực của AB mà $C\in(\alpha)$ nên $C\in(P)\cap(\alpha)=d$ suy ra tọa độ C có dạng $C(1+t;10;-t)$.

Do ΔABC đều nên $AC=AB$, thay tọa độ các điểm ta có:

$$\sqrt{(1+t-0)^2+(10-0)^2+(-t-3)^2}=\sqrt{(-2-0)^2+(0-0)^2+(1-3)^2}\Leftrightarrow t^2+4t+51=0\,(*)$$

Do phương trình $(*)$ vô nghiệm nên không tồn tại điểm C thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 80. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1;3;9)$ bán kính bằng 3. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai trục Ox, Oz sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S), đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\dfrac{13}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S), giá trị $AM.AN$ bằng

A. 39. **B.** $12\sqrt{3}$. **C.** 18. **D.** $28\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B.

+) Đặt $M(a;0;0)$ và $N(0;0;b)$.

Nhận xét: (S) tiếp xúc (Oxz) mà $MN \subset (Oxz)$ tiếp xúc (S)

$\Rightarrow MN$ tiếp xúc (S) tại tiếp điểm của (S) và (Oxz) $\Rightarrow A(1;0;9)$.

+) $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = (a-1;\ 0;\ -9) \\ \overrightarrow{AN} = (-1;\ 0; b-9) \end{cases} \Rightarrow \dfrac{a-1}{-1} = \dfrac{-9}{b-9} \Rightarrow (a-1)(b-9) = 9$.

+) Khi đó $OIMN$ có ΔOMN vuông tại O, $(IMN) \perp (OMN)$ (do $IA \subset (IMN)$, $IA \perp (OMN)$)

$\Rightarrow$ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp $OIMN$ bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔIMN bằng $\dfrac{13}{2}$

Suy ra: $\dfrac{1}{2}.3.MN = \dfrac{IM.IN.MN}{4.\dfrac{13}{2}} \Leftrightarrow IM.IN = 39\ (1)$.

Mà $IM = \sqrt{(a-1)^2 + 3^2 + 9^2} = \sqrt{(a-1)^2 + 90}$.

$IN = \sqrt{1^2 + 3^2 + (b-9)^2} = \sqrt{10 + \dfrac{81}{(a-1)^2}}$.

Thay vào (1) ta được: $\left[(a-1)^2 + 90\right]\left[10 + \dfrac{81}{(a-1)^2}\right] = 1521 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 27$.

Ta có $\begin{cases} AM = \sqrt{(a-1)^2 + 81} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \\ AN = \sqrt{1 + (b-9)^2} = \sqrt{1+3} = 2 \end{cases} \Rightarrow AM.AN = 12\sqrt{3}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 81. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=16$ và điểm $A(1;2;-1)$.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R=4$.

b) Điểm $A(1;2;-1)$ nằm bên trong mặt cầu (S).

c) Phương trình mặt cầu (S_1) có đường kính IA là $(x-1)^2+y^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{17}{4}$.

d) Phương trình mặt phẳng (Q) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm $N(1;-2;-4)$ có dạng $ax+by+z+d=0$. Khi đó $2025a+2026b+d=4051$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R=4$.

b) Ta có $IA=\sqrt{(1-1)^2+(2+2)^2+(-1)^2}=\sqrt{17}>4 \Rightarrow$ điểm $A(1;2;-1)$ nằm bên ngoài mặt cầu (S).

c) Gọi $M(a;b;c)$ là trung điểm $IA \Rightarrow M\left(1;0;-\frac{1}{2}\right)$

Bán kính mặt cầu (S_1) là $R_1=\frac{IA}{2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$

Phương trình mặt cầu (S_1) có đường kính IA là $(x-1)^2+y^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{17}{4}$

d) mặt phẳng (Q) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm $N(1;-2;-4)$ nên nhận $\overrightarrow{IN}=(0;0;-4)=-4(0;0;1)$ là vectơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua $N(1;-2;-4)$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{IN}=(0;0;1)$ là :

$0.(x-1)+0.(y+2)+1.(z+4)=0 \Leftrightarrow z+4=0$

$\Rightarrow 2025a+2026b+d=4$

Câu 82. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$ và điểm $A(0;2;-3)$.

a) Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$, bán kính $R=3$.

b) Điểm $A(0;2;-3)$ nằm ngoài mặt cầu.

c) Phương trình đường thẳng đi qua tâm I và điểm A là: $\begin{cases} x=-1+t \\ y=1+t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=-2+t \end{cases}$

d) Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua tâm I và song song với mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ có dạng $ax+by+z+d=0$. Khi đó $2025a+2026b+d=4053$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$

Phương trình mặt cầu tâm $I(-1;1;-2)$, bán kính $R=3$

b) Ta có: $(0+1)^2+(2-1)^2+(-3+2)^2=3=R=3$, do đó điểm A nằm trên mặt cầu.

c) $I(-1;1;-2), A(0;2;-3) \Rightarrow \overrightarrow{IA}=(1;1;1)$

Phương trình đường thẳng đi qua tâm I và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{IA}$ là: $\begin{cases} x=-1+t \\ y=1+t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=-2+t \end{cases}$

d) mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng nên phương trình mặt phẳng (Q) là $x+y+z+D=0$

Mà $I\in(Q) \Rightarrow -1+1-2+D=0 \Rightarrow D=2$

Do đó phương trình mặt phẳng (Q) là $x+y+z+2=0$

$\Rightarrow 2025a+2026b+d=4053$

Câu 83. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+1=0$ có tâm I và bán kính R.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R=2$.

b) Bán kính của mặt cầu (S) là đoạn IM với điểm $M(1;1;2)$.

c) Mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(0;1;-2)$ và $B(2;-1;-4)$.

d) Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x+y-z-2=0$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

a) Mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+1=0$ có $a=1$, $b=-2$, $c=0$, $d=1$

$\Rightarrow$ tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=2$.

b) Xét $M(1;1;2)$: $1^2+1^2+2^2-2.1+4.1+1=9$ do đó M không nằm trên (S)

Vậy bán kính mặt cầu (S) không là đoạn IM.

c) Mặt cầu (S) nhận AB làm đường kính thì $\frac{AB}{2}=R$ và tâm I là trung điểm của AB.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-2;-2)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-2)^2}=2\sqrt{3}\Rightarrow\frac{AB}{2}=\sqrt{3}\neq R=2$

d) Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x+y-z-2=0 \Leftrightarrow R=d(I,(P))$.

Ta có $d(I,(P))=\frac{|1+(-2)-0-2|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\sqrt{3}\neq R=2$.

Câu 84. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình: $x^2+y^2+z^2+4x-2y+1=0$.

a) Đường kính mặt cầu (S) bằng 4.

b) Mặt cầu (S) đi qua điểm $A(-1;3;0)$.

c) Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng (Oyz) bằng 2.

d) Mặt phẳng $(P): x+2y-2z-2=0$ tiếp xúc với mặt cầu (S).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) $x^2+y^2+z^2+4x-2y+1=0 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2+z^2=4$

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;1;0)$ và bán kính $R=2$.

Đường kính mặt cầu bằng $2R=4$.

b) Ta có: $IA=\sqrt{(-1+2)^2+(3-1)^2+0^2}=\sqrt{5}>R$ nên mặt cầu (S) không đi qua điểm A.

c) Mặt phẳng (Oyz) có phương trình: $x=0$. Khi đó $d(I;(Oyz))=|-2|=2$

d) Ta có: $d(I;(P))=\frac{|-2+2.1-2.0-2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{2}{3}<R$ nên mặt phẳng (P) không tiếp xúc với mặt cầu (S).

Câu 85. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;2), B(1;0;3)$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc trục Ox và đi qua hai điểm A, B.

a) Bán kính của mặt cầu (S) là $R=IA=IB$.

b) $I(1;0;0))$

c) Mặt cầu (S) có phương trình là :$(x+1)^2+y^2+z^2=9$.

d) Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $P=MA^2+MB^2+MI^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị biểu thức $T=x+3y+3z=5$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)

ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Vì mặt cầu (S) đi qua hai điểm A,B nên bán kính của mặt cầu (S) là $R=IA=IB$.

b) Vì tâm $I\in Ox$ nên toạ độ điểm $I(a;0;0))$.

Vì $A\in(S),B\in(S)$ nên ta có:

$IA=IB\Leftrightarrow(3-a)^2+1+4=(1-a)^2+0+9\Leftrightarrow 9-6a+a^2+5=1-2a+a^2+9\Leftrightarrow a=1$.

Ta có tâm $I(1;0;0))$, bán kính $R=IB=\sqrt{9}=3$.

c) mặt cầu (S) có bán kính $R=IA=IB=3$,tâm $I(1;0;0))$,

Do đó mặt cầu (S) có phương trình là : $(x-1)^2+y^2+z^2=9$

d): Gọi K là điểm thõa mãn $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KI}=\vec{0}\Leftrightarrow K\left(\frac{5}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$

$$P=MA^2+MB^2+MI^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MI}^2=\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KI}\right)^2$$
$$=3.MK^2+KA^2+KB^2+KI^2+2\overrightarrow{MK}\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KI}\right)=3MK^2+KA^2+KB^2+KI^2$$

Mà $M\in(Oyz)\Rightarrow MA^2+MB^2+MI^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của K lên mặt phẳng $(Oyz)\Rightarrow M\left(0;\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$.

Vậy $T=x+3y+3z=0+3.\frac{1}{3}+3.\frac{5}{3}=6$.

Câu 86. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+2}{2}$ và mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;0)$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB=8$.

a) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(3;2;0)$ và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là $x+2y+2z+7=0$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông của I trên đường thẳng d. Khi đó $H(1;1;2)$.

c) Mặt cầu (S) có bán kính $R=4$.

d) Phương trình mặt cầu (S): $(x-3)^2+(y-2)^2+z^2=16$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Đúng: Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $I(3;2;0)$ và vuông góc với đường thẳng d nhận $\vec{u}=(1;2;2)$ là vectơ pháp tuyến có phương trình:

$$1(x-3)+2(y-2)+2(z-0)=0 \Leftrightarrow x+2y+2z-7=0$$

b) Gọi $H=d\cap(P)$ khi đó $H\in d\Rightarrow H(-1+t;-3+2t;-2+2t)$

Mặt khác $H\in(P)\Rightarrow -1+t+2(-3+2t)+2(-2+2t)-7=0\Rightarrow t=2$ nên $H(1;1;2)$

c) Ta có $IH=\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2+(0-2)^2}=3\Rightarrow R=\sqrt{IH^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

d) mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;0)$ và bán kính $R=5$.

nên (S): $(x-3)^2+(y-2)^2+z^2=25$.

Câu 87. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;0;2)$, $B(1;1;0)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-1)^2=\frac{1}{4}$.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(0;\ 0;\ 1)$ và bán kính $R=\frac{1}{2}$.

b) Điểm A nằm ngoài mặt cầu (S).

c) Phương trình mặt cầu tâm A và đi qua B là: $x^2+y^2+(z-2)^2=4$

d) Điểm M thay đổi thuộc (S), giá trị nhỏ nhất của biểu thức MA^2+2MB^2 bằng $\frac{15}{4}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(0\ ;0\ ;1)$, bán kính $R=\frac{1}{2}$

b) $IA=1$, $R=\frac{1}{2}$, $IA>R$ nên A nằm ngoài mặt cầu (S).

c) Mặt cầu tâm $A(0;0;2)$ và đi qua $B(1;1;0)$ có bán kính $AB=\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$

Do đó có phương trình là: $x^2+y^2+(z-2)^2=6$

d) Gọi K là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}\Rightarrow K\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right)$

Ta có: $MA^2+2MB^2=\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KB}\right)^2$

$=3MK^2+KA^2+2KB^2+2\overrightarrow{MK}\left(\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}\right)=3MK^2+KA^2+2KB^2$.

Biểu thức MA^2+2MB^2 có giá trị nhỏ nhất khi MK có giá trị nhỏ nhất khi

Với M thay đổi thuộc (S) ta có $MK_{\min}=|KI-R|=\left|1-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$

Vậy $\left(MA^2+2MB^2\right)_{\min}=3MK_{\min}^2+KA^2+2KB^2=\frac{3}{4}+\frac{8}{3}+\frac{4}{3}=\frac{19}{4}$

Câu 88. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;1;1), B(1;0;-3), C(-1;-2;-3)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0$.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;0;1)$, bán kính $R=2$.

b) $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-8;8;-4)$

c) Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $ax+by+z+d=0$. Khi đó $a-b+d=5$.

d) Mặt phẳng (ABC) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính bằng $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) $x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-1)$, bán kính $R=2$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-4), \overrightarrow{AC}=(-1;-3;-4) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-8;8;-4)=-4(2;-2;1)$

c) Ta có: $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-8;8;-4)=-4(2;-2;1)$ nên mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-2;1)$.

phương trình mặt phẳng (ABC) đi qua $A(0;1;1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-2;1)$ là:

$2(x-0)-2(y-1)+1.(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x-2y+z+1=0$.

$\Rightarrow a-b+d=5$

d) Ta có $d(I,(ABC))=\frac{|2.1-2.0-1+1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1}}=\frac{2}{3}$.

Vậy bán kính đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (ABC) và mặt cầu (S) là:

$$r=\sqrt{R^2-\left[d(I,(ABC))\right]^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 89. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;\,2;\,-1)$. Biết mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) có diện tích là 25π.

a) Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) bằng 3.

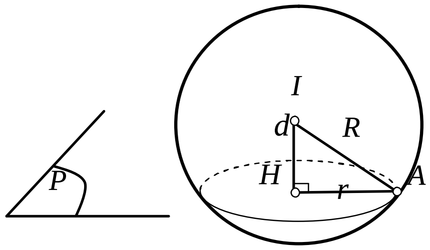
b) Bán kính đường tròn (C) bằng 4.

c) Gọi $H(x_0;y_0;z_0)$ là tọa độ tâm đường tròn (C). Khi đó $2024x_0+2025y_0+2026z_0=6075$

d) Phương trình mặt cầu (S) là $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=\sqrt{34}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**



a) Ta có $d(I;(P))=\dfrac{|-1-2.2+2.(-1)-2|}{\sqrt{1+(-2)^2+2^2}}=3$

b) Ta có đường tròn (C) có diện tích là $S=\pi.r^2 \Leftrightarrow 25\pi=\pi.r^2 \Rightarrow r=5$

c) Gọi $H(x_0;y_0;z_0)$ là tọa độ tâm đường tròn (C).

Ta có phương trình $IH:\begin{cases}x=-1+t\\y=2-2t\\z=-1+2t\end{cases}$

Vậy tọa độ là H là nghiệm của hệ $\begin{cases}x=-1+t\\y=2-2t\\z=-1+2t\\x-2y+2z-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=0\\z=1\\t=1\end{cases} \Rightarrow H(0;0;1)$.

$\Rightarrow 2024x_0+2025y_0+2026z_0=2026$

d) Ta có bán kính mặt cầu (S) là: $R^2=\left[d(I;(P))\right]^2+r^2=3^2+5^2=34$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$

Câu 90. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$, mặt phẳng $(P):x+2y-2z+8=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=3-t\end{cases}$.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;1;-1)$, bán kính $R=3$.

b) Điểm $M(1;3;5)$ nằm ngoài mặt cầu (S).

c) Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $\sqrt{5}$.

d) Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A,B. Khi đó, diện tích tam giác IAB bằng $\dfrac{\sqrt{182}}{5}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$

Suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;1)$, bán kính $R=3$.

b) Ta có $IM=\sqrt{(1-2)^2+(3+1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{33}>R=3$ nên điểm M nằm ngoài mặt cầu.

c) Ta có $h=d(I,(P))=\dfrac{|2-2-2+8|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=2<3$.

Suy ra mặt phẳng $(P): x+2y-2z+8=0$ cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn.

Bán kính đường tròn giao tuyến là $r=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

d) Đường thẳng d có vecto chỉ phương $\vec{u}=(1;1;-1)$, đi quan điểm $N(1;0;3)$.

$\overrightarrow{IN}=(-1;1;2)$, $\left[\vec{u},\overrightarrow{IN}\right]=(3;-1;2)$. Gọi H là trung điểm của AB

$$IH=d(I,d)=\frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{IN}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\sqrt{\frac{14}{3}}$$

$$AH=\sqrt{IA^2-IH^2}=\frac{\sqrt{39}}{3}$$

$$\Rightarrow AB=2AH=\frac{2\sqrt{39}}{3}$$

Diện tích tam giác IAB là: $S_{\Delta IAB}=\dfrac{1}{2}IH.AB=\dfrac{1}{2}.\sqrt{\dfrac{14}{3}}.\dfrac{2\sqrt{39}}{3}=\dfrac{\sqrt{182}}{3}$.

Câu 91. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-1)$ cắt đường thẳng $(d):\dfrac{x-11}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+25}{-2}$ tại hai điểm A,B sao cho $AB=16$.

a) Đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;-2)$.

b) Mặt phẳng (P) chứa $I(2;3;-1)$ và vuông góc với đường thẳng (d) có phương trình là $2x+y-2z+9=0$.

c) Mặt cầu (S) có bán kính bằng 17 .

d) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;-2)$.

b) Vì mặt phẳng (P) chứa $I(2;3;-1)$ và vuông góc với đường thẳng (d) nên (P) nhận vectơ chỉ phương của (d) là $\vec{u}=(2;1;-2)$ làm vectơ pháp tuyến. Khi đó, phương trình mặt phẳng (P) là $2(x-2)+1(y-3)-2(z+1)=0$ hay $2x+y-2z-9=0$.

c) Gọi H là hình chiếu của I lên đường thẳng (d) nên IH và (d) vuông góc với nhau.

Gọi mặt phẳng (P) chứa $I(2;3;-1)$ và vuông góc với đường thẳng (d) có phương trình là $2x+y-2z-9=0$.

Suy ra, H là giao điểm của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P)

Vì H thuộc đường thẳng (d) nên $H(2t+11,t,-2t-25)$

Mặt khác, H thuộc mặt phẳng (P) nên tọa độ $H(2t+11,t,-2t-25)$ thỏa mãn

$2(2t+11)+t-2(-2t-25)-9=0$ hay $t=-7$

Khi đó, điểm $H(-3,-7,-11)$ và $IH=\sqrt{(-3-2)^2+(-7-3)^2+(-11+1)^2}=15$

mặt cầu (S) có bán kính là: $R=\sqrt{IH^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{15^2+\left(\frac{16}{2}\right)^2}=17$.

d) phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-1)$ và bán kính $R=17$ là

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=17^2=289.$$

Câu 92. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$ và điểm $M(-1;0;2)$.

a) $IM=3$.

b) Phương trình mặt cầu tâm I và đi qua điểm M có phương trình là: $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$.

c) Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm M là $2x+2y+z=0$.

d) Phương trình mặt cầu tâm *I*, cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho độ dài đoạn $AB=2\sqrt{3}$ là $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) $IM=\sqrt{9}=3$

b) Phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R=IM=3$ có dạng

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

Suy ra $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.

c) Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm M đi qua $M(-1;0;2)$ và nhận $\overline{IM}(-2;2;-1)$ làm vecto pháp tuyến là $-2x+2y-z=0 \Leftrightarrow 2x-2y+z=0$.

d) Gọi H là trung điểm AB suy ra H là hình chiếu vuông góc của I lên Ox nên $H(1;0;0)$

Khi đó $IH=\sqrt{13} \Rightarrow R=IA=\sqrt{IH^2+AH^2}=4$.

Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$.

Câu 93. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm I và đi qua bốn điểm $A(2;0;0), B(1;3;0), C(-1;0;3), D(1;2;3)$.

a) Mặt cầu (S) có bán kính bằng IA.

b) Mặt cầu (S) có tọa độ tâm I là $I(0;1;1)$.

c) Mặt cầu (S) có bán kính bằng 3.

d) Mặt cầu (S) có phương trình: $x^2+(y+1)^2+(z+1)^2=9$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Vì mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A,B,C,D nên có bán kính tâm bằng $IA=IB=IC=ID$.

b) c) d)

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua bốn điểm A,B,C,D. Khi đó:

$$\begin{cases} AI^2=BI^2 \\ AI^2=CI^2 \\ AI^2=DI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2+b^2+c^2=(a-1)^2+(b-3)^2+c^2 \\ (a-2)^2+b^2+c^2=(a+1)^2+b^2+(c-3)^2 \\ (a-2)^2+b^2+c^2=(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-3b=-3 \\ a-c=-1 \\ a-2b-3c=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow I(0;1;1).$$ Bán kính: $R=IA=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$.

Vậy mặt cầu (S) có phương trình: $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$

Câu 94. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

a) Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;-1)$.

b) Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;0;2)$ và bán kính $R=2$.

c) Điểm $A(1;2;3)$ nằm ngoài mặt cầu.

d) Số điểm chung của đường thẳng Δ và mặt cầu (S) bằng 0.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;-2)$

b) $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z+2)^2=4$

Vậy mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$ và bán kính $R=2$.

c) $\overrightarrow{IA}=(0;2;5) \Rightarrow \left|\overrightarrow{IA}\right|=\sqrt{0^2+2^2+5^2}=\sqrt{29}>2 \Rightarrow$ điểm A nằm ngoài mặt cầu.

d) Đường thẳng Δ đi qua $M(0;1;2)$ và nhận $\vec{u}=(2;1;-2)$ làm một vectơ chỉ phương.

$d(I,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{MI}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\dfrac{\sqrt{498}}{6}>R \Rightarrow \Delta$ không cắt $(S) \Rightarrow$ số điểm chung của đường thẳng Δ và mặt cầu (S) bằng 0.

Câu 95. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-1)^2=5$ và hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.

b) $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}\right]=(-5;5;0)$

c) Đường thẳng AB cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt.

d) Điểm M thay đổi thuộc (S), biểu thức $2MA^2+3MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 108 (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

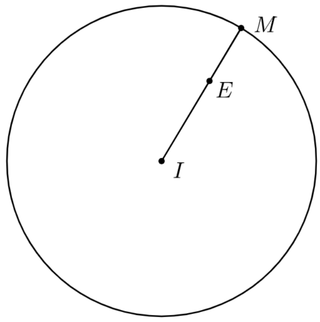
a) $(S): x^2+y^2+(z-1)^2=5$

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-5;5;-5), \overrightarrow{AI}=(-2;2;-3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}\right]=(-5;-5;0)$

c) Ta có: $d_{(I,AB)}=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\dfrac{\sqrt{(-5)^2+(-5)^2+0^2}}{\sqrt{(-5)^2+5^2+(-5)^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}<R=\sqrt{5}$ nên đường thẳng AB cắt (S) tại hai điểm phân biệt.

d) Mặt cầu có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.



Gọi E là điểm thỏa mãn: $2\overrightarrow{EA}+3\overrightarrow{EB}=\vec{0}\Rightarrow E(-1;1;1),\overrightarrow{EB}=(-2;2;-2),\overrightarrow{EA}=(3;-3;3)$

Xét $P=2MA^2+3MB^2=2\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}\right)^2+3\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}\right)^2$

$=2ME^2+4\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{EA}+2EA^2+3ME^2+6\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{EB}+3EB^2$

$=5ME^2+2EA^2+3EB^2+2\overrightarrow{ME}.\left(\underbrace{2\overrightarrow{EA}+3\overrightarrow{EB}}_{\vec{0}}\right)=5ME^2+2EA^2+3EB^2$

Biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi ME đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $\overrightarrow{IE}=(-1;1;0)\Rightarrow IE=\sqrt{2}<R$ suy ra E nằm trong mặt cầu nên

$ME_{\min}=R-IE=\sqrt{5}-\sqrt{2}$ với $EB=2\sqrt{3},EA=3\sqrt{3}$

Vậy $P_{\min}=5ME_{\min}{}^2+2EA^2+3EB^2=5.\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2+2.\left(2\sqrt{3}\right)^2+3.\left(3\sqrt{3}\right)^2\approx 108$

Câu 96. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-4)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=169$.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(-4;-3;1)$.

b) Diện tích mặt cầu (S) bằng 676π.

c) Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y-2z-39=0$.

d) Mặt cầu (S) cắt trục Oz tại hai điểm phân biệt A,B, khi đó $AB=12$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(4;3;-1)$ và bán kính $R=13$.

b) Diện tích mặt cầu bằng $S_{mc}=4.\pi.R^2=4.\pi.13^2=676\pi$.

c) Ta có $d(I,(P))=\dfrac{\left|1.4-2.3-2.(-1)-39\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=13=R$ nên mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng.

d) Gọi H là hình chiếu của I lên trục Oz nên $H(0;0;-1)$ và H là trung điểm của AB

$\overrightarrow{IH}=(-4;-3;0)\Rightarrow IH=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2+0^2}=5$.

Ta có $AH=\sqrt{R^2-IH^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$.

Do H là trung điểm của AB nên $AB=2IH=2.12=24$.

Câu 97. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+4}{-5}$ và $d':\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-4}{-1}$.

a) Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d=(2;3;-5)$.

b) Đường thẳng d' có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_{d'}=(-3;2;1)$.

c) Phương trình đường vuông góc chung của d và d' có dạng $\begin{cases}x=at\\y=bt\\z=c+t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$, khi đó $a+b+c=1$.

d) Phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng $(d),(d')$ là $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=3$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+4}{-5}$

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d=(2;3;-5)$.

b) $d':\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-4}{-1}$

Đường thẳng d' có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_{d'}=(3;-2;-1)=-(-3;2;1)$.

c) Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d=(2;3;-5)$.

Đường thẳng d' có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_{d'}=(3;-2;-1)$.

Gọi $M\in d\Rightarrow M(2+2m;3+3m;-4-5m)$ và $N\in d'\Rightarrow N(-1+3n;4-2n;4-n)$.

Khi đó ta có $\overrightarrow{MN}=(-3+3n-2m;1-2n-3m;8-n+5m)$.

MN là đường vuông góc chung của d và d' khi và chỉ khi $\begin{cases}MN\perp d\\MN\perp d'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_d}=0\\\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_{d'}}=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2(-3+3n-2m)+3.(1-2n-3m)-5(8-n+5m)=0\\3(-3+3n-2m)-2.(1-2n-3m)-1(8-n+5m)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-38m+5n=43\\-5m+14n=19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-1\\n=1\end{cases}$.

Suy ra $M(0;0;1),N(2;2;3)\Rightarrow\overrightarrow{MN}=(2;2;2)=2(1;1;1)$

Phương trình đường vuông góc chung của d và d' đi qua $M(0;0;1)$ và có VTCP $\overrightarrow{MN}=(1;1;1)$ là

$$\begin{cases} x=t \\ y=t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=1+t \end{cases}$$

$\Rightarrow a+b+c=1$

d) Gọi I là trung điểm của suy ra $I(1;1;2)$ và $IM=IN=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$.

Khi đó mặt cầu tâm I, bán kính $R=\sqrt{3}$ tiếp xúc với hai đường thẳng d, d' lần lượt tại M và N

Do MN là khoảng cách giữa hai đường thẳng d, d' nên mặt cầu đường kính MN là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với hai đường thẳng d, d'.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=3$.

Câu 98. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{2}$ và hai mặt phẳng $(P): x+2y-2z-2=0$, $(Q): x+2y-2z+4=0$.

a) Mặt phẳng (P) có một vec tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(1;2;-2)$.

b) Phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x=2-3t \\ y=1+2t \; (t\in\mathbb{R}) \\ z=1+2t \end{cases}$.

c) Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I(x_0;y_0;z_0)$ thuộc đường thẳng Δ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P),(Q)$. Khi đó $x_0+y_0+z_0=4$.

d) Gọi (S) là mặt cầu có tâm I thuộc đường thẳng Δ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P),(Q)$. Khi đó, phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=1$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Mặt phẳng (P) có một vec tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(1;2;-2)$.

b) Ta có: phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x=2-3t \\ y=1+2t \; (t\in\mathbb{R}) \\ z=1+2t \end{cases}$.

c) d) Vì $I\in\Delta\Rightarrow I(2-3t;1+2t;1+2t)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2-3t;1+2t;1+2t)$ thuộc Δ và tiếp xúc với $(P),(Q)$ nên ta có:

$d\left(I,(P)\right)=d\left(I,(Q)\right)\Leftrightarrow \dfrac{\left|(2-3t)+2(1+2t)-2(1+2t)-2\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\dfrac{\left|(2-3t)+2(1+2t)-2(1+2t)+4\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}$

$\Leftrightarrow |-3t|=|-3t+6|\Rightarrow t=1$.

Suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(-1;3;3)$ và bán kính $R=1$.

$\Rightarrow x_0+y_0+z_0=5$

Phương trình mặt cầu (S) là $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$.

Câu 99. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: x=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 3x+y-z-5=0$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng d và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn lớn nhất có bán kính $r=5$.

a) Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;1;-1)$.

b) Đường thẳng d có phương trình tham số là $\begin{cases} x=t \\ y=1+2t \\ z=2-t \end{cases}$.

c) $d\left(I,(P)\right)=5$.

d) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=25$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) $(P): 3x+y-z-5=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;1;-1)$.

b) Ta có: $d: x=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}\Rightarrow d:\begin{cases} x=t \\ y=1+2t \\ z=2-t \end{cases}$

c) Do giao tuyến của (S) và (P) là đường tròn lớn nên $I\in(P)\Rightarrow d\left(I,(P)\right)=0$.

d) Ta có $I\in d\Rightarrow I(t;1+2t;2-t)$

Theo giả thiết $I=d\cap(P)$ nên tọa độ điểm I thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P)

Thay tọa độ điểm I vào (P) ta có :

$3t+(1+2t)-(2-t)-5=0\Leftrightarrow 6t-6=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow I(1;3;1)$

Vì $(S)\cap(P)$ theo giao tuyến là đường tròn lớn có bán kính $r=5$ nên ta có bán kính mặt cầu (S) là $R=r=5$.

Vậy mặt cầu có phương trình là: $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=25$.

Câu 100. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Gọi (S) là mặt cầu đi qua ba điểm A,B,C và có tâm $I(a;b;c)$ nằm trên mặt phẳng (Oxy).

a) $I(a;b;0)$

b) $I(2;1;0)$

c) Đường kính của mặt cầu (S) bằng $2\sqrt{26}$

d) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=104$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Ta có: $I(a;b;c)\in(Oxy)\Rightarrow c=0\Rightarrow I(a;b;0)$

b) c) d) Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$, với tọa độ tâm $I(a;b;c)$.

Ta có: $I(a;b;c)\in(Oxy)\Rightarrow c=0$

$$\begin{cases}A\in(S)\\B\in(S)\\C\in(S)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2a-4b+d=-21\\-2a+6b+d=-11\\-4a-4b+d=-17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=1\\d=-21\end{cases}$$

Do đó tâm $I(-2;1;0)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{4+1+0+21}=\sqrt{26}$.

Đường kính của mặt cầu (S) bằng $2R=2\sqrt{26}$

Mặt cầu (S) có phương trình là $(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=26$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 101. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình: $x^2+y^2+z^2+4mx+2my-2mz+9m^2-28=0$ là phương trình mặt cầu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 7

Ta có $x^2+y^2+z^2+4mx+2my-2mz+9m^2-28=0$

$\Leftrightarrow (x+2m)^2+(y+m)^2+(z-m)^2=28-3m^2$ (1).

(1) là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow 28-3m^2>0 \Leftrightarrow -\sqrt{\dfrac{28}{3}}<m<\sqrt{\dfrac{28}{3}}$.

Do m nguyên nên $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$.

Vậy có 7 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 102. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá nguyên của m để phương trình: $x^2+y^2+z^2+2(m+2)x-2(m-1)z+3m^2-5=0$ là phương trình một mặt cầu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 7

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi

$(m+2)^2+(m-1)^2-3m^2+5>0$

$\Leftrightarrow m^2-2m-10<0$

$\Leftrightarrow -1-\sqrt{11}<m<1+\sqrt{11}$

Theo bài ra $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{-2;-1;0;1;2;3;4\}\Rightarrow$ có 7 giá trị của m nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 103. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2my+3m^2-2m=0$ với m là tham số. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1

Giả sử $x^2+y^2+z^2-4x+2my+3m^2-2m=0$ là phương trình mặt cầu.

Khi đó tâm mặt cầu là $I(2;-m;0)$, và bán kính $R=\sqrt{4+m^2-(3m^2-2m)}=\sqrt{-2m^2+2m+4}$. với điều kiện $-2m^2+2m+4>0\Leftrightarrow m\in(-1;2)$.

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{0;1\}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của m bằng 1.

Câu 104. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-2025;2025)$ để phương trình $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0$ là phương trình mặt cầu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2022

Điều kiện để phương trình $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0$ là phương trình mặt cầu là: $(m+2)^2+4m^2-19m+6>0\Leftrightarrow 5m^2-15m+10>0\Leftrightarrow m<1$ hoặc $m>2$.

Vì $m\in\mathbb{Z}, m\in(-2025;2025)$ nên $m=\{3;4;...;2023;2024\}$

Vậy có 2022 giá trị của m nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 105. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1;0;0)$, $B(0;0;2)$, $C(0;-3;0)$. Gọi R bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Tính R^2.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3,5

Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

Phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Vì O, A, B, C thuộc (S) nên ta có: $\begin{cases}d=0\\1+2a+d=0\\4-4c+d=0\\9+6b+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\b=-\dfrac{3}{2}\\c=1\\d=0\end{cases}$.

Vậy bán kính mặt cầu (S) là: $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{4}+1}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}\Rightarrow R^2=\dfrac{14}{4}=3,5$.

Câu 106. Trong không gian $Oxyz$, gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng tọa độ. Tính $P=a-b+c$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 9

Vì mặt cầu tâm I tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ nên $d(I,(Oyz))=d(I,(Ozx))=d(I,(Oxy))$

$\Leftrightarrow |a|=|b|=|c| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=b=c\\a=b=-c\\a=-b=c\\a=-b=-c\end{array}\right.$

Nhận thấy chỉ có trường hợp $a=-b=c$ thì phương trình $AI=d\left(I,(Oxy)\right)$ có nghiệm, các trường hợp còn lại vô nghiệm.

Thật vậy:

Với $a=-b=c$ thì $I(a;-a;a)$

$AI=d\left(I,(Oyx)\right)\Leftrightarrow(a-1)^2+(a-1)^2+(a-4)^2=a^2 \Leftrightarrow a^2-6a+9=0 \Leftrightarrow a=3$

Khi đó $P=a-b+c=9$.

Câu 107. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (Oxy) tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-3)^2+y^2+(z-2)^2=m^2+1$ (m là tham số). Tính giá trị của m^2.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

Mặt cầu (S): $(x-3)^2+y^2+(z-2)^2=m^2+1$ có tâm $I(3;0;2)$, bán kính $R=\sqrt{m^2+1}$.

(S) tiếp xúc với $(Oxy)\Leftrightarrow d\left(I,(Oxy)\right)=R$

$\Leftrightarrow 2=\sqrt{m^2+1}\Leftrightarrow m^2=3$

Câu 108. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Gọi R là bán kính của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy). Tính R^2.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 26

Gọi tâm mặt cầu là: $I(x;\ y;\ 0)$.

$$\begin{cases}IA=IB\\IA=IC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+4^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2+1^2}\\\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+4^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2+3^2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(y-2)^2+4^2=(y+3)^2+1^2\\x^2-2x+1+16=x^2-4x+4+9\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}10y=10\\2x=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases}$$

$R=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+4^2}=\sqrt{26}\Rightarrow R^2=26$.

Câu 109. Trong không gian $Oxyz$, gọi (S) là mặt cầu đi qua điểm $D(0;1;2)$ và tiếp xúc với các trục Ox, Oy, Oz tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ trong đó $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$. Gọi R là bán kính của (S). Tính R^2.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 50

Gọi I là tâm của mặt cầu (S). Vì (S) tiếp xúc với các trục Ox, Oy, Oz tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ nên ta có $IA\perp Ox$, $IB\perp Oy$, $IC\perp Oz$ hay A, B, C tương ứng là hình chiếu của I trên Ox, Oy, $Oz \Rightarrow I(a;b;c)$.

$\Rightarrow$ Mặt cầu (S) có phương trình: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$.

Vì (S) đi qua A, B, C, D nên ta có: $\begin{cases} a^2=b^2=c^2=d \ (1) \\ 5-2b-4c+d=0 \ (2) \end{cases}$.

Vì $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ nên $0<d\neq 1$. Mặt khác, từ $(1)\Rightarrow R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{2d}$.

• TH1: Từ $(1)\Rightarrow b=c=\sqrt{d}$. Thay vào $(*)$: $5-6\sqrt{d}+d=0\Leftrightarrow d=25$ (nhận).

$\Rightarrow R=\sqrt{2.25}=5\sqrt{2}$.

• TH2: Từ $(1)\Rightarrow b=c=-\sqrt{d}$. Thay vào $(*)$: $5+6\sqrt{d}+d=0$ (vô nghiệm).

• TH3: Từ $(1)\Rightarrow b=\sqrt{d}$, $c=-\sqrt{d}$. Thay vào $(*)$: $5+2\sqrt{d}+d=0$ (vô nghiệm).

• TH4: Từ $(1)\Rightarrow b=-\sqrt{d}$, $c=\sqrt{d}$. Thay vào $(*)$: $5-2\sqrt{d}+d=0$ (vô nghiệm).

Vậy mặt cầu (S) có bán kính $R=5\sqrt{2}\Rightarrow R^2=50$.

Câu 110. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $C(0;0;3)$, $B(0;2;0)$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2=MB^2+MC^2$ là mặt cầu có bán kính R. Tính R^2.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Giả sử $M(x;y;z)$.

Ta có: $MA^2=(x-1)^2+y^2+z^2$; $MB^2=x^2+(y-2)^2+z^2$; $MC^2=x^2+y^2+(z-3)^2$.

$MA^2=MB^2+MC^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+z^2=x^2+(y-2)^2+z^2+x^2+y^2+(z-3)^2$

$\Leftrightarrow -2x+1=(y-2)^2+x^2+(z-3)^2$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=2$.

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2=MB^2+MC^2$ là mặt cầu có bán kính là $R=\sqrt{2}\Rightarrow R^2=2$.

Câu 111. Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cầu (S) có phương trình dạng $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2az+10a=0$. Tính tổng các giá trị thực của a để mặt cầu (S) có chu vi đường tròn lớn bằng 8π.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 10

Đường tròn lớn có chu vi bằng 8π nên bán kính của (S) là $\frac{8\pi}{2\pi}=4$.

Từ phương trình của (S) suy ra bán kính của (S) là $\sqrt{2^2+1^2+a^2-10a}$.

Do đó: $\sqrt{2^2+1^2+a^2-10a}=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=11 \end{array}\right.$.

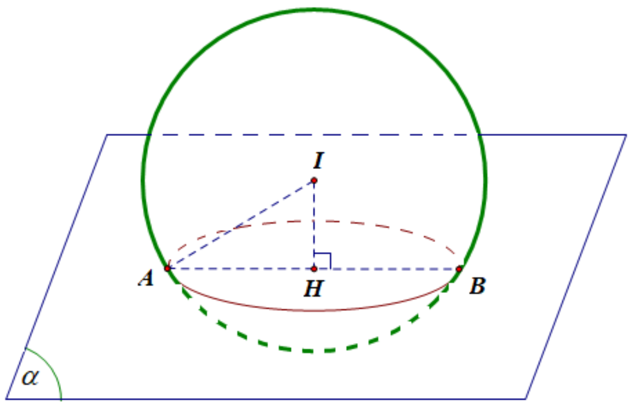
Vậy tổng các giá trị thực của a là: $-1+11=10$

Câu 112. Cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x-2y-z+9=0$. Tính bán kính của đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 8



Gọi I là tâm mặt cầu (S), H là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (α) và AB là một đường kính của đường tròn (C).

Dễ thấy $I(3;-2;1)$, $IA=10$, $IH=d(I,(\alpha))=6$ suy ra $HA=\sqrt{IA^2-IH^2}=8$.

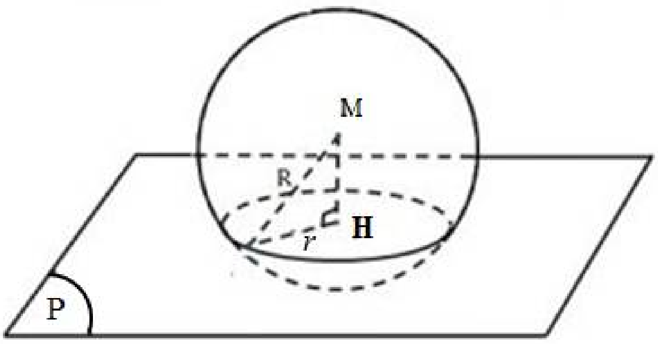
Vậy bán kính đường tròn (C) bằng 8.

Câu 113. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y-2z-1=0$ và điểm $M(1;-2;0)$. Mặt cầu tâm M, bán kính bằng $\sqrt{3}$ cắt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng thập phân chữ số thứ hai).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $1,41$



Mặt cầu tâm tâm M , bán kính bằng $R=\sqrt{3}$ cắt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn tâm H , bán kính r suy ra $r=\sqrt{R^2-MH^2}$.

Với $MH=d\left(M,(P)\right)=\dfrac{\left|2.1-(-2)-2.0-1\right|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=1.$

Suy ra $r=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}=\sqrt{2}\approx 1,41.$

Câu 114. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+2y+z-m^2-3m=0$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$. Tính tổng các giá trị của m để (P) tiếp xúc với (S).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -3

Ta có $(S):\begin{cases} I(1;-1;1) \\ R=3 \end{cases}$.

Để (P) tiếp xúc với (S) thì $d\left(I;(P)\right)=R \Leftrightarrow \dfrac{\left|1-m^2-3m\right|}{3}=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2+3m-10=0 \\ m^2+3m+8=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-5 \end{array}\right.$.

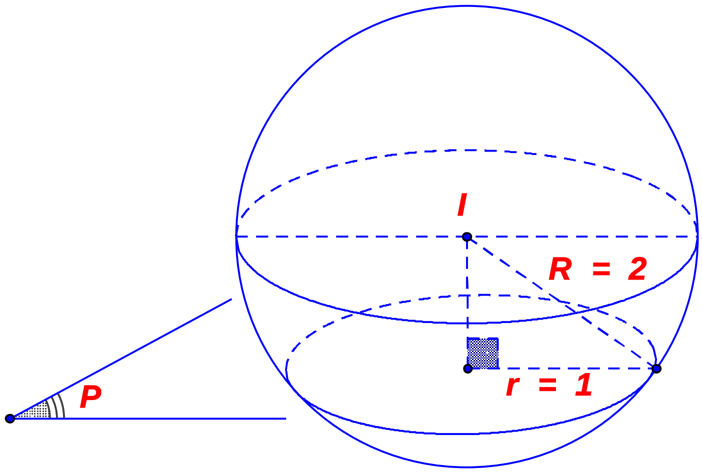
Vậy tổng các giá trị của m là: $2-5=-3$

Câu 115. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=4$ và mặt phẳng $(P):x+my+z-3m-1=0$. Tính tổng các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có đường kính bằng 2 .

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1



Mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=4$ có tâm $I(2;4;1)$, bán kính $R=2$.

Ta có $d(I,(P))=\dfrac{|2+4m+1-3m-1|}{\sqrt{1+m^2+1}}=\dfrac{|m+2|}{\sqrt{m^2+2}}$

Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có đường kính bằng 2 nên bán kính đường tròn giao tuyến $r=1$.

Ta có $R^2=d^2(I,(P))+r^2 \Leftrightarrow 4=\dfrac{(m+2)^2}{m^2+2}+1 \Leftrightarrow m^2+4m+4=3(m^2+2) \Leftrightarrow 2m^2-4m+2=0 \Leftrightarrow m=1$.

Câu 116. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+m-3=0$. Tìm số thực của tham số m để mặt phẳng $(\beta):2x-y+2z-8=0$ cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -1

Ta có $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+m-3=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=17-m$.

(S) là phương trình của mặt cầu thì $17-m>0 \Leftrightarrow m<17$.

Khi đó $I(-1;2;3)$; $R=\sqrt{17-m}$ lần lượt là tâm và bán kính của (S).

Để mặt phẳng $(\beta):2x-y+2z-8=0$ cắt (S) theo thiết diện là một đường tròn có chu vi bằng 8π thì đường tròn đó có bán kính $r=4$.

Ta có $R^2=d^2(I,(\beta))+r^2 \Leftrightarrow 17-m=16+2 \Leftrightarrow m=-1$ (thỏa mãn điều kiện).

Câu 117. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):2x-y+z-2=0$ và $(Q):2x-y+z+1=0$. Có bao nhiêu mặt cầu đi qua $A(1;-2;1)$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P),(Q)$?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 0

Ta có $M\left(0;0;2\right)\in\left(P\right)\Rightarrow d\left(\left(P\right);\left(Q\right)\right)=d\left(\text{M};\left(Q\right)\right)=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$d\left(\text{A};\left(P\right)\right)=\dfrac{\sqrt{6}}{2};d\left(\text{A};\left(Q\right)\right)=\sqrt{6}\Rightarrow d\left(\text{A};\left(Q\right)\right)=d\left(\text{A};\left(P\right)\right)+d\left(\left(Q\right);\left(P\right)\right)$

Vậy không có mặt cầu thỏa yêu cầu bài toán

Câu 118. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $I\left(0;2;3\right)$. Tính bán kính mặt cầu tâm I tiếp xúc với trục Oy.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

Gọi H hình chiếu vuông góc của I lên trục Oy $\Rightarrow H\left(0;2;0\right)$.

Mặt cầu tâm I tiếp xúc với trục Oy nên mặt cầu có bán kính $R=IH=3$.

Câu 119. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi $\left(S\right)$ là mặt cầu đi qua hai điểm $A\left(3;-1;2\right),B\left(1;1;-2\right)$ và có tâm thuộc trục Oz. Bán kính của mặt cầu $\left(S\right)$ là R. Giá trị R^2 bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 11

Gọi tâm của mặt cầu là $I\left(a;b;c\right)$. Vì $I\in Oz$ nên $I\left(0;0;c\right)$.

Mặt cầu đi qua A,B nên có $IA=IB\Leftrightarrow IA^2=IB^2\Leftrightarrow 9+1+\left(c-2\right)^2=1+1+\left(c+2\right)^2\Leftrightarrow c=1$.

Bán kính mặt cầu $R=IA=\sqrt{11}\Rightarrow R^2=11$.

Câu 120. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $M\left(1;-2;3\right)$ và I là hình chiếu vuông góc của $M\left(3;1;2\right)$ trên trục Ox. Gọi $\left(S\right)$ là mặt cầu có tâm I và đi qua điểm M. Độ dài bán kính mặt cầu bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

Hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox là $I\left(1;0;0\right)\Rightarrow IM=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3$

Câu 121. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm là điểm $A\left(1;2;-3\right)$ và đi qua điểm $B\left(3;-2;1\right)$. Gọi $M\left(1;b;-3\right)$ là điểm thuộc mặt cầu biết $b\in\mathbb{N}^*$. Tung độ điểm M có giá trị bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 8

Mặt cầu (S) đi qua $B(3;-2;1)$ nên bán kính $R = AB$

$\Leftrightarrow R = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-2)^2 + (1+3)^2} \Leftrightarrow R = 6$

Vậy phương trình của mặt cầu (S) là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 36$.

Thay tọa độ điểm $M(1;b;-3)$ vào phương trình mặt cầu (S), ta có:

$$(1-1)^2 + (b-2)^2 + (-3+3)^2 = 36 \Leftrightarrow (b-2)^2 = 36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b-2=6 \\ b-2=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=8 \\ b=-4 \end{array}\right.$$

Vì $b > 0$ nên nhận $b = 8$.

Câu 122. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;-4;3)$ và tiếp xúc với trục Ox. Bán kính của mặt cầu trên bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án 5

Gọi R là bán kính của mặt cầu (S) và H là hình chiếu của I trên trục Ox suy ra $H(2;0;0)$ và $R = IH = \sqrt{(2-2)^2 + (0+4)^2 + (0-3)^2} = 5$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-4;3)$ và bán kính là $R = 5$.

Câu 123. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz,$ mặt cầu (S) có bán kính bằng $2,$ tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) và có tâm nằm trên tia $Ox.$ Hoành độ của tâm mặt cầu (S) bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Gọi I là tâm mặt cầu (S). Vì tâm I nằm trên tia Ox nên $I(a;0;0),\ (a>0)$.

Vì mặt cầu (S) có bán kính bằng $2,$ tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) nên ta có:

$$d(I,(Oyz)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|a|}{1} = 2 \Leftrightarrow |a| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=-2 \end{array}\right. .$$

Do $a > 0$ nên ta nhận $a = 2$, loại $a = -2$ suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(2,0,0)$.

Câu 124. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có phương trình: $(x-a)^2 + y^2 + (z-c)^2 = 16$ đi qua hai điểm O và $M(1;0;1)$. Tính $a+c$

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1

Vì mặt cầu (S) đi qua $O(0;0;0)$ nên: $a^2 + c^2 = 16$. (1)

Vì mặt cầu (S) đi qua $M(1;0;1)$ nên: $(1-a)^2+(1-c)^2=16$. (2)

$(2)\Leftrightarrow a^2+c^2-2(a+c)+2=16$ (3).

Thay (1) vào (3) $\Rightarrow 16-2(a+c)+2=16 \Leftrightarrow a+c=1 \Rightarrow a=1-c$.

Thay $a=1-c$ vào (1) $\Rightarrow (1-c)^2+c^2=16 \Rightarrow c=\dfrac{1\pm\sqrt{31}}{2}$ $\Rightarrow$ Có tồn tại mặt cầu (S) thỏa mãn đề bài.

Vậy $a+c=1$.

Câu 125. Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;3)$ và có đúng một điểm chung với mặt phẳng (Oxy). Gọi một giao điểm của mặt cầu (S) với trục Oz là $A(a;b;c)$ $(c>1)$. Tổng $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 5

Ta có $(Oxy): z=0$.

Mặt cầu (S) có đúng một điểm chung với mặt phẳng (Oxy) $\Leftrightarrow R=\mathrm{d}(I,(Oxy))=3$.

Suy ra $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$. Cho $x=y=0 \Rightarrow 1^2+2^2+(z-3)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=5 \\ z=1 \end{array}\right.$.

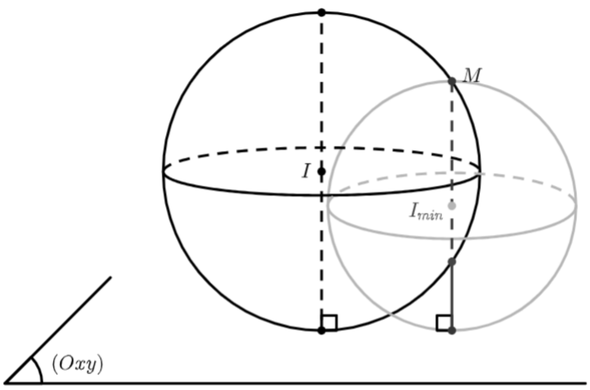
Vì $c>1$ nên $A(0;0;5) \Rightarrow a+b+c=5$.

Câu 126. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(6;5;4)$ và mặt cầu (S) đi qua M, tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy). Gọi R là bán kính của mặt cầu (S), giá trị nhỏ nhất của R bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2



Gọi d là khoảng cách từ M đến mặt phẳng (Oxy) $\Rightarrow d=4$.

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc (Oxy) và luôn đi qua M nên ta có đánh giá: $2R\ge d \Leftrightarrow 2R\ge 4 \Leftrightarrow R\ge 2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của R là: 2.

Câu 127. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1), B(3;1;-2)$. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $AM^2 + BM^2 = 30$ là một mặt cầu (S) có bán kính R. Tính R^2.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $12,5$

Gọi tọa độ điểm $M(x;y;z)$.

Ta có: $AM^2 + BM^2 = 30$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2+(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=30$

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-4x-10y+2z-10=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-5y+z-5=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$ là phương trình của mặt cầu (S), có tâm $I\left(1;\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)$ và bán kính $R=\frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow R^2=12,5$.

Câu 128. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1), B(3;1;-2)$. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $\frac{MA}{MB}=2$ là một mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$. Tính giá trị của biểu thức $3a+3b+c$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 10

Gọi tọa độ điểm $M(x;y;z)$.

Ta có: $\frac{MA}{MB}=2$

$\Leftrightarrow MA^2=4MB^2$

$\Leftrightarrow (1-x)^2+(2-y)^2+(1-z)^2=4\left[(3-x)^2+(1-y)^2+(-2-z)^2\right]$

$\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+3z^2-22x-4y+18z-50=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-\frac{22}{3}x-\frac{4}{3}y+6z-\frac{50}{3}=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{11}{3} \\ b = \dfrac{2}{3} \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow 3a + 3b + c = 10$$

Câu 129. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;1), B(1;-1;2)$. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $\widehat{AMB} = 90^0$ là một mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$. Tính giá trị của biểu thức $2025a + 2b + 2c$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Gọi tọa độ điểm $M(x;y;z)$.

$\overrightarrow{MA} = (-1-x;-y;1-z)$

$\overrightarrow{MB} = (1-x;-1-y;2-z)$

Ta có: $\widehat{AMB} = 90^0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

$\Leftrightarrow (-1-x)(1-x) + (-y)(-1-y) + (1-z)(2-z) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + y - 3z + 1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -\dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow 2025a + 2b + 2c = 2$$

Câu 130. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích 2π. Phương trình mặt cầu (S) có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$, khi đó giá trị của biểu thức $a + b + c + R^2$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Gọi R, r lần lượt là bán kính của mặt cầu và đường tròn giao tuyến. Theo giải thiết ta có:

$$\pi r^2 = 2\pi \Leftrightarrow r^2 = 2$$

Mặt khác $d(I,(P))=1$ nên $R^2=r^2+\left[d(I,(P))\right]^2=3$.

Vậy phương trình mặt cầu là $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$.

$\Rightarrow a+b+c+R^2=2$

Câu 131. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+z+7=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4z-10=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) theo một giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng 6π. Biết phương mặt phẳng (Q) có dạng: $x+by+cz+d=0$, khi đó giá trị của biểu thức $T=b+c+d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -6

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$, bán kính $R=\sqrt{15}$.

Gọi r là bán kính của đường tròn giao tuyến. Ta có $2\pi r=6\pi \Leftrightarrow r=3$.

Do $(Q)//(P) \Rightarrow (Q):x-2y+z+d=0 \quad (d\neq 7)$.

Ta có: $d(I,(Q))=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{6} \Leftrightarrow \dfrac{|d-1|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=7 \quad (\text{loai}) \\ d=-5 \ (\text{nhan}) \end{array}\right.$

Vậy $(Q):x-2y+z-5=0$.

$\Rightarrow T=b+c+d=-6$

Câu 132. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ và mặt phẳng $(\alpha):4x+3y-12z+10=0$. Mặt phẳng (β) thỏa mãn đồng thời các điều kiện: tiếp xúc với (S); song song với (α) và cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương. Biết phương mặt phẳng (β) có dạng: $4x+by+cz+d=0$, khi đó giá trị của biểu thức $T=b+c+d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 69

Mặt cầu (S) có: tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+3^2+2}=4$.

Vì $(\alpha)||(\beta)$ nên phương trình mp (α) có dạng: $4x+3y-12z+d=0,(d\neq 10)$.

Vì (β) tiếp xúc mặt cầu (S) nên: $d_{(I,(\beta))}=R \Leftrightarrow \dfrac{|4.1+3.2-12.3+d|}{\sqrt{4^2+3^2+(-12)^2}}=4 \Leftrightarrow |d-26|=52 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=-26 \\ d=78 \end{array}\right.$.

Do (β) cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương nên chọn $d=78$.

Vậy mp (β): $4x+3y-12z+78=0$.

$\Rightarrow T=b+c+d=69$

Câu 133. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(Q): x-2y+z-5=0$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=15$. Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π? Biết phương mặt phẳng (P) có dạng: $x+by+cz+d=0$, khi đó giá trị của biểu thức $T=b+c+d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 6

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{15}$.

Đường tròn có chu vi bằng 6π nên có bán kính $r=\dfrac{6\pi}{2\pi}=3$.

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng:

$x-2y+z+D=0,\ D\neq -5$.

Vì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π nên

$d(I;(P))=\sqrt{R^2-r^2}\Leftrightarrow d(I;(P))=\sqrt{6}$

$$\Leftrightarrow \frac{|1-2.0-2+D|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\sqrt{6}\Leftrightarrow |D-1|=6\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}D-1=6\\ D-1=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}D=7\\ D=-5\end{array}\right..$$

Đối chiếu điều kiện ta được $D=7$. Do đó phương trình mặt phẳng $(P): x-2y+z+7=0$.

$\Rightarrow T=b+c+d=6$

Câu 134. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$ và điểm $A(2;3;4)$. Tập hợp điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) là mặt phẳng có phương trình dạng: $x+by+cz+d=0$. Tính giá trị của biểu thức $T=b+c+d$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -5

Dễ thấy A nằm ngoài mặt cầu (S). Tâm mặt cầu là $I(1;2;3)$.

Đường thẳng AM tiếp xúc với $(S)\Leftrightarrow AM\perp IM\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{IM}=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-1)+(y-3)(y-2)+(z-4)(z-3)=0$

$\Leftrightarrow (x-1-1)(x-1)+(y-2-1)(y-2)+(z-3-1)(z-3)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-(x+y+z-7)=0$

$\Leftrightarrow x+y+z-7=0$ (Do $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=0$).

Vậy tập hợp điểm M cần tìm là mặt phẳng có phương trình: $x+y+z-7=0$

$\Rightarrow T=b+c+d=-5$

Câu 135. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(2;-2;2)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z+2)^2=1$. Điểm M di chuyển trên mặt cầu (S) đồng thời thỏa mãn $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AM}=6$. Tập hợp điểm M là mặt phẳng có phương trình dạng: $2x+by+cz+d=0$. Tính giá trị của biểu thức $T=b+c+d$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 13

Gọi điểm $M(x;y;z)\in(S)$ là điểm cần tìm.

Khi đó: $x^2+y^2+(z+2)^2=1 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+4z+4=1 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=-4z-3 \quad (1)$

Ta có: $\overrightarrow{OM}=(x;y;z)$ và $\overrightarrow{AM}=(x-2;y+2;z-2)$.

Suy ra $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AM}=6 \Leftrightarrow x(x-2)+y(y+2)+z(z-2)=6$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z=6 \quad (2)$

Thay (1) vào (2) ta được

$-4z-3-2x+2y-2z-6=0 \Leftrightarrow 2x-2y+6z+9=0$.

Vậy tập hợp điểm M cần tìm là mặt phẳng có phương trình $2x-2y+6z+9=0$

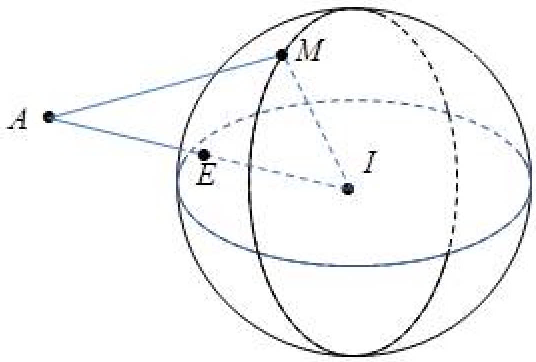
$\Rightarrow T=b+c+d=13$

Câu 136. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ và điểm $A(2;2;2)$. Xét các điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho đường thẳng AM luôn tiếp xúc với (S). Tập hợp điểm M là mặt phẳng có phương trình dạng: $x+by+cz+d=0$. Tính giá trị của biểu thức $T=b+c+d$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -2



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$, bán kính $R=1$.

Ta luôn có $\widehat{AMI}=90^\circ$, suy ra điểm M thuộc mặt cầu (S_1) tâm E là trung điểm của AI đường kính AI.

Với $E\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$, bán kính $R_1 = IE = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Phương trình mặt cầu $(S_1):\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4} \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0$

Vậy điểm M có tọa độ thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1\\ x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+2=0\\ x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0\end{cases}$$

Trừ theo vế hai phương trình cho nhau ta được: $x+y+z-4=0$.

$\Rightarrow T=b+c+d=-2$

Câu 137. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a,\, b,\, c>0$. Biết rằng (ABC) đi qua điểm $M\left(\frac{1}{7};\frac{2}{7};\frac{3}{7}\right)$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{72}{7}$. Tính $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $3,5$

Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Vì điểm $M\left(\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7}\right)$ thuộc mặt phẳng (ABC)

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{1}{7}\right)}{a}+\frac{\left(\frac{2}{7}\right)}{b}+\frac{\left(\frac{3}{7}\right)}{c}=1 \Rightarrow \frac{1}{7a}+\frac{2}{7b}+\frac{3}{7c}=1 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=7$$

Mặt khác mặt phẳng (ABC) tiếp xúc với $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{72}{7}$

$\Rightarrow$ khoảng cách từ tâm $I(1,2,3)$ của cầu tới mặt phẳng (ABC) là $\sqrt{\frac{72}{7}}$

$$\Rightarrow d\left(I,(ABC)\right)=\frac{\left|\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\sqrt{\frac{72}{7}} \text{ mà } \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=7$$

$$\Rightarrow d\left(I,(ABC)\right)=\frac{|7-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\sqrt{\frac{72}{7}} \Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{7}{2}=3,5.$$

Câu 138. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(2;1;4)$, $N(5;0;0)$, $P(1;-3;1)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M,N,P. Tìm c biết rằng $a+b+c<5$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Giả sử mặt cầu (S) đã cho có phương trình dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Từ đề bài ta có:

$M(2;1;4)\in(S)\Leftrightarrow -4a-2b-8c+d=-21\ (1)$

$N(5;0;0)\in(S)\Leftrightarrow -10a+d=-25\ (2)$.

$P(1;-3;1)\in(S)\Leftrightarrow -2a+6b-2c+d=-11\ (3)$.

Hình chiếu của điểm $I(a;b;c)$ lên mặt phẳng (Oyz) là $H(0;b;c)\Rightarrow \overrightarrow{HI}=(a;0;0)\Rightarrow HI=|a|$.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(Oyz)\Rightarrow IH=|a|=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}\Leftrightarrow b^2+c^2-d=0(4)$.

Từ (1); (2); (3) ta có:

$$\begin{cases} b=2-a \\ c=a-1 \\ d=10a-25 \end{cases}.$$

Thế vào phương trình (4) ta được: $a^2-8a+15=0\Leftrightarrow a=5\vee a=3$.

Trường hợp 1: $a=5\Rightarrow b=-3, c=4\Rightarrow a+b+c=6>5\Rightarrow$ loại.

Trường hợp 1: $a=3\Rightarrow b=-1, c=2\Rightarrow a+b+c=4<5\Rightarrow$ nhận.

Vậy $c=2$ thỏa yêu cầu đề.

Câu 139. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-1)^2=4$ và điểm $A(2;2;2)$. Từ A kẻ ba tiếp tuyến AB, AC, AD với B, C, D là các tiếp điểm. Biết phương trình mặt phẳng (BCD) có dạng: $2x+by+cz+d=0$. Tính giá trị của biểu thức $T=b+c+d$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -2

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R=2$.

Có $\overrightarrow{IA}=(2;2;1)\Rightarrow IA=3$.

Tam giác ABI vuông tại B nên ta có $AB=\sqrt{IA^2-IB^2}=\sqrt{5}$.

Gọi $H(x;y;z)$ là chân đường cao kẻ từ B của tam giác ABI.

Ta có: $IB^2 = IH.IA \Rightarrow IH = \dfrac{IB^2}{IA} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow IH = \dfrac{4}{9}.IA$.

Từ suy ra được $\overrightarrow{IH} = \dfrac{4}{9}\overrightarrow{IA} \Rightarrow \begin{cases} x-0 = \dfrac{4}{9}.2 \\ y-0 = \dfrac{4}{9}.2 \\ z-1 = \dfrac{4}{9}.1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8}{9} \\ y = \dfrac{8}{9} \\ z = \dfrac{13}{9} \end{cases} \Rightarrow H\left(\dfrac{8}{9};\dfrac{8}{9};\dfrac{13}{9}\right)$.

Mặt phẳng (BCD) vuông góc với đường thẳng IA nên nhận $\overrightarrow{IA} = (2;2;1)$ làm vectơ pháp tuyến. Hơn nữa mặt phẳng (BCD) đi qua điểm H.

Vậy (BCD) có phương trình: $2.\left(x-\dfrac{8}{9}\right)+2.\left(y-\dfrac{8}{9}\right)+1.\left(z-\dfrac{13}{9}\right)=0 \Leftrightarrow 2x+2y+z-5=0$.

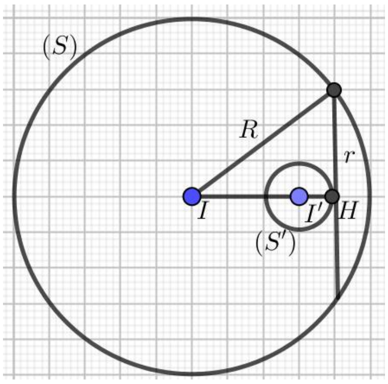
$\Rightarrow T = b+c+d = -2$

Câu 140. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu (S): $x^2+y^2+(z-1)^2 = 25$ và (S'): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = 1$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc (S') và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π. Biết phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $x+by+cz+d=0$. Tính giá trị của biểu thức $T = b+c+d$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -10



Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R=5$, mặt cầu (S') có tâm $I'(1;2;3)$, bán kính $R'=1$

Vì $I'I = 3 < R-R' = 4$ nên mặt cầu (S') nằm trong mặt cầu (S).

Mặt phẳng (P) tiếp xúc (S') $\Rightarrow d(I',(P)) = R' = 1$; (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π (suy ra bán kính đường tròn là $r=3$) nên $d(I,(P)) = \sqrt{R^2-r^2} = 4$.

Nhận thấy $d(I,(P)) - d(I',(P)) = I'I$ nên tiếp điểm H của (P) và (S') cũng là tâm đường tròn giao của (P) và (S). Khi đó, (P) là mặt phẳng đi qua H, nhận $\overrightarrow{II'} = (1;2;2)$ làm vecto pháp tuyến.

Ta có: $\overrightarrow{IH}=\frac{4}{3}\overrightarrow{II'}\Leftrightarrow\begin{cases}x_H=\frac{4}{3}\\ y_H=\frac{8}{3}\\ z_H=\frac{11}{3}\end{cases}\Rightarrow H\left(\frac{4}{3};\frac{8}{3};\frac{11}{3}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (P): $x-\frac{4}{3}+2\left(y-\frac{8}{3}\right)+2\left(z-\frac{11}{3}\right)=0\Leftrightarrow x+2y+2z-14=0$.

$\Rightarrow T=b+c+d=-10$

Câu 141. Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt cầu $(S_1):(x+3)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=1$, $(S_2):x^2+(y-2)^2+(z-4)^2=4$ và $(S_3):x^2+y^2+z^2+4x-4y-1=0$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3)?

Trả lời: ………………..

Lời giải

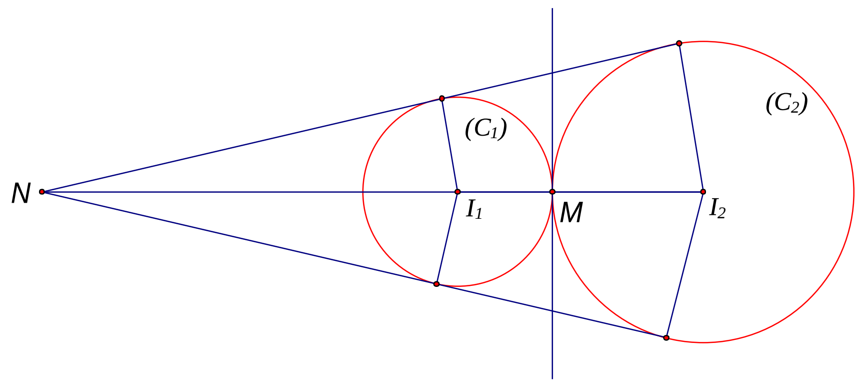
Đáp án: 2

Ta có: $(S_1):\begin{cases}I_1(-3;2;4)\\ R_1=1\end{cases}$, $(S_2):\begin{cases}I_2(0;2;4)\\ R_2=2\end{cases}$, $(S_3):\begin{cases}I_3(-2;2;0)\\ R_2=3\end{cases}$

$\Rightarrow I_1I_2=3=R_1+R_2\Rightarrow(S_1),(S_2)$ tiếp xúc với nhau tại M.

Ta có $\overrightarrow{MI_2}=2\overrightarrow{I_1M}=\frac{2}{3}\overrightarrow{I_1I_2}\Rightarrow M(-2;2;4)$

Cắt hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$ theo phương chứa đường nối tâm của chúng ta có thiết diện là hai đường tròn lớn $(C_1),(C_2)$.



Trường hợp 1: Mặt phẳng qua M vuông góc với I_1I_2 có phương trình là $(\alpha):x+2=0$ mà $d(I_3;(\alpha))=0\Rightarrow(\alpha)$ không tiếp xúc với $(S_3)\Rightarrow$ **LOẠI.**

Trường hợp 2: N là tâm vị tự ngoài của $(C_1),(C_2)$ $\Rightarrow\overrightarrow{NI_2}=2\overrightarrow{NI_1}=2\overrightarrow{I_1I_2}\Rightarrow N(-6;2;4)$.

Gọi (P) là mặt phẳng tiếp xúc với 3 mặt cầu. (P) qua N và có vtpt là $\vec{n}(1;a;b)$

$\Rightarrow(P):x+6+a(y-2)+b(z-4)=0$ $\Leftrightarrow(P):x+ay+bz-2a-4b+6=0$.

Có: $\begin{cases} d\left(I_1;(P)\right)=1 \\ d\left(I_2;(P)\right)=2 \\ d\left(I_3;(P)\right)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3=\sqrt{1+a^2+b^2} \\ 6=2\sqrt{1+a^2+b^2} \\ |4b-4|=3\sqrt{1+a^2+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=\dfrac{13}{4} \\ b=-\dfrac{5}{4} \end{array}\right.$

Với $b=\dfrac{13}{4} \Rightarrow a^2=-\dfrac{41}{16}$ (loại)

Với $b=-\dfrac{5}{4} \Rightarrow a^2=\dfrac{103}{16} \Rightarrow a=\pm\dfrac{\sqrt{103}}{4}$

Vậy có 2 mặt phẳng tiếp xúc với 3 mặt cầu $\left(S_1\right)$, $\left(S_2\right)$, $\left(S_3\right)$.

Câu 142. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(-3;1;1)$, $B(1;-1;5)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+11=0$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C. Biết C luôn thuộc một đường tròn (T) cố định. Tính bán kính r của đường tròn (T).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 4

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;-2;4)$ và mp (P) có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-1;2)$. Do đó AB vuông góc với (P).

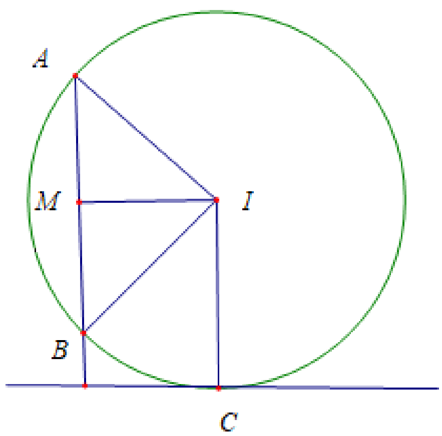
Giả sử mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B nên ta có

$\begin{cases} 9+1+1+6a-2b-2c+d=0 \\ 1+1+25-2a+2b-10c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a-2b-2c+d=-11 \\ 2a-2b+10c-d=27 \end{cases}$.

Suy ra $8a-4b+8c=16 \Leftrightarrow 2a-b+2c=4$.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) nên ta có $d\left(I,(P)\right)=\dfrac{|2a-b+2c+11|}{3}=5$.



Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;-2;4) \Rightarrow AB=\sqrt{16+4+16}=6$. Goi M là trung điểm AB ta có

$d(C,AB)=IM=\sqrt{5^2-3^2}=4$. Vậy C luôn thuộc một đường tròn (T) cố định có bán kính $r=4$..

Câu 143. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y-z-4=0$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc với (P) tại điểm $H(a;b;c)$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 5

Tọa độ điểm H là hình chiếu của điểm I trên mặt phẳng (P).

Phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) là: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-2t \\ z=3-t \end{cases}$.

Tọa độ điểm H là giao điểm của d và (P), ta có: $2(1+2t)-2(2-2t)-(3-t)-4=0 \Leftrightarrow t=1$

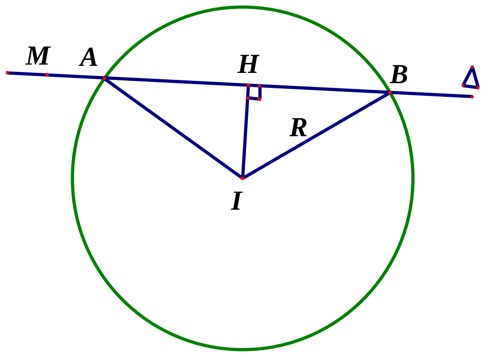
Vậy $H(3;0;2) \Rightarrow T=a+b+c=5$

Câu 144. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$ (m là tham số) và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=4+2t \\ y=3+t \\ z=3+2t \end{cases}$. Biết đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=8$. Tìm giá trị của m.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -12



Gọi H là trung điểm đoạn thẳng $AB \Rightarrow IH \perp AB$, $HA=4$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2\,;3\,;0)$, bán kính $R=\sqrt{13-m}$, $(m<13)$.

Đường thẳng Δ đi qua $M(4\,;3\,;3)$ và có 1 véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(2\,;1\,;2)$.

Ta có: $\overrightarrow{IM}=(6\,;0\,;3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{IM}, \vec{u}\right]=(-3;-6\,;6) \Rightarrow IH=d(I,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IM}, \vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=3$.

Ta có: $R^2=IH^2+HA^2 \Leftrightarrow 13-m=3^2+4^2 \Leftrightarrow m=-12$.

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 145. Cho x, y, z là ba số thực thỏa $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z-11=0$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=2x+2y-z$.

Lời giải

Ta có: $P=2x+2y-z \Leftrightarrow 2x+2y-z-P=0 \quad (1)$.

Lại có: $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z-11=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=25 \quad (2)$

Xét trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, ta thấy (1) là phương trình của một mặt phẳng, gọi là $mp(\alpha)$ và (2) là phương trình của một mặt cầu (S) tâm $I(2;-3;1)$, bán kính $R=5$.

Giá trị lớn nhất của $P=2x+2y-z$ là giá trị lớn nhất của P để (α) và (S) có điểm chung, điều này tương đương với $d(I,(\alpha)) \le R \Leftrightarrow \dfrac{|2.2+2.(-3)-1.1-P|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} \le 5 \Leftrightarrow |P+3| \le 15 \Leftrightarrow -18 \le P \le 12.$

Vậy $\max P=12$.

Câu 146. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Đường thẳng Δ qua A, nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B. Để độ dài AB nhỏ nhất thì phương trình đường thẳng Δ có dạng $\dfrac{x+3}{a}=\dfrac{y-3}{11}=\dfrac{z+3}{b}$. Tính giá trị biểu thức $T=a+b$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$, bán kính $R=10$. Do $d(I,(\alpha))<R$ nên Δ luôn cắt (S) tại A, B.

Khi đó $AB=\sqrt{R^2-(d(I,\Delta))^2}$. Do đó, AB nhỏ nhất thì $d(I,(\Delta))$ lớn nhất nên Δ là đường thẳng nằm trong (α), qua A và vuông góc với AI. Do đó Δ có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{n_\alpha}\right]=(16;11;-10)$

Vậy, phương trình của $\Delta: \dfrac{x+3}{16}=\dfrac{y-3}{11}=\dfrac{z+3}{-10}$.

$\Rightarrow T=a+b=6$

Câu 147. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;0;2)$, $B(3;0;2)$ và mặt cầu $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn bán kính nhỏ nhất có dạng $3x+by+cz+d=0$. Tính giá trị biểu thức $T=b+c+d$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$, bán kính $R=5$. Do $IA=\sqrt{17}<R$ nên AB luôn cắt (S). Do đó (α) luôn cắt (S) theo đường tròn (C) có bán kính $r=\sqrt{R^2-(d(I,(\alpha)))^2}$. Đề bán kính r nhỏ nhất

$\Leftrightarrow d(I,(P))$ lớn nhất.

Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mp(ABC).

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;-3;-2)$ suy ra (ABC) có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-1;4;-5)$

(α) có véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\vec{n},\overrightarrow{AB}\right]=(-9-6;-3)=-3(3;2;1)$

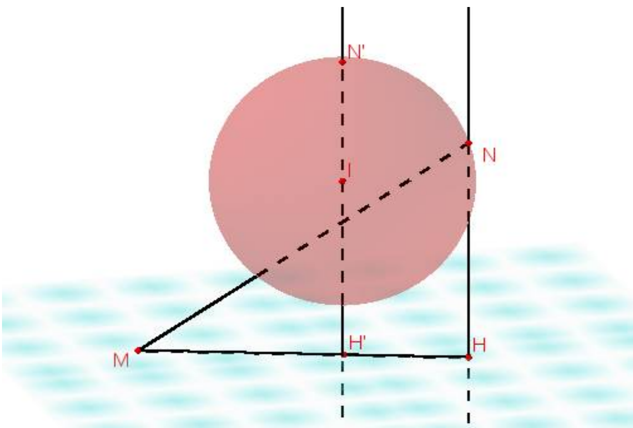
Phương trình $(\alpha):3(x-2)+2(y-1)+1(z-3)=0 \Leftrightarrow 3x+2y+z-11=0$.

$\Rightarrow T=b+c+d=-8$

Câu 148. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Giả sử $M\in(P)$ và $N\in(S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}(1;0;1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN^2.

Lời giải

Cách 1



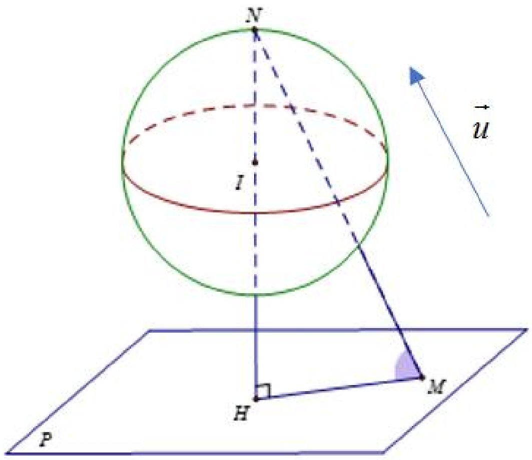
Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}=(1;-2;2)$. Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và bán kính $r=1$. Nhận thấy rằng góc giữa $\vec{u}$ và $\vec{n}$ bằng 45°. Vì $d(I;(P))=2>1=r$ nên (P) không cắt (S).

Gọi H là hình chiếu của N lên (P) thì $\widehat{NMH}=45^\circ$ và $MN=\dfrac{NH}{\sin 45^\circ}=NH\sqrt{2}$ nên MN lớn nhất khi và chỉ khi NH lớn nhất. Điều này xảy ra khi $N\equiv N'$ và $H\equiv H'$ với N' là giao điểm của đường thẳng d qua I, vuông góc (P) và H' là hình chiếu của I lên (P).

Lúc đó $NH_{\max}=N'H'=r+d(I;(P))=3$ và $MN_{\max}=\dfrac{NH_{\max}}{\sin 45^\circ}=3\sqrt{2}\Rightarrow MN^2=18$.

Cách 2

(S) có tâm $I(-1;2;1)$ và bán kính $R=1$. Ta có: $\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|-1-2.2+2.1-3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=2>R$.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của N trên mặt phẳng (P) và α là góc giữa MN và NH.

Vì $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\vec{u}$ nên góc α có số đo không đổi, $\alpha = \widehat{HNM}$.

Có $HN = MN.\cos\alpha \Rightarrow MN = \dfrac{1}{\cos\alpha}.HN$ nên MN lớn nhất $\Leftrightarrow$ HN lớn nhất

$\Leftrightarrow HN = d\left(I,(P)\right) + R = 3$.

Có $\cos\alpha = \left|\cos\left(\vec{u}, \overrightarrow{n_P}\right)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nên $MN = \dfrac{1}{\cos\alpha}HN = 3\sqrt{2} \Rightarrow MN^2 = 18$.

Câu 149. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=-t \end{cases},(t\in\mathbb{R})$. Mặt phẳng chứa d và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là dạng $ax+y+cz+d=0$. Tính giá trị biểu thức $T=2025a+2026c+d$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;1;0)$ và bán kính $R=2$.

Gọi H là hình chiếu của I trên d.

$H\in d \Leftrightarrow H(1+2t;-1+t;-t)$; $\overrightarrow{IH}=(-2+2t;-2+t;-t)$.

Véctơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{u_d}=(2;1;-1)$.

$\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{u_d}=0 \Leftrightarrow 2(-2+2t)+1(-2+t)+t=0 \Leftrightarrow t=1$. Suy ra $H(3;0;-1) \Rightarrow IH=\sqrt{2}$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có bán kính r. Ta có

$r=\sqrt{R^2-\left[d\left(I,(P)\right)\right]^2}=\sqrt{4-\left[d\left(I,(P)\right)\right]^2}$.

Mà $d\left(I,(P)\right)\le IH=\sqrt{2}$ nên $r=\sqrt{4-\left[d\left(I,(P)\right)\right]^2}\ge\sqrt{4-IH^2}=\sqrt{4-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2}$.

Suy ra $min\, r=\sqrt{2}$, đạt được khi $IH\perp(P)$.

Khi đó mặt phẳng (P) đi qua $H(3;0;-1)$ nhận $\overrightarrow{IH}=(0;-1;-1)$ làm một véctơ pháp tuyến.

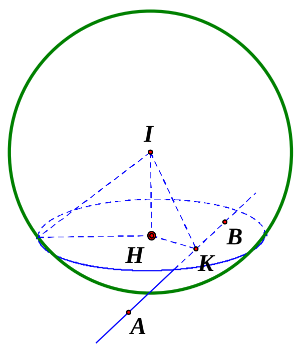
Phương trình mặt phẳng (P) là: $0(x-3)-1(y-0)-1(z+1)=0 \Leftrightarrow y+z+1=0$.

$\Rightarrow T=2025a+2026c+d=2027$

Câu 150. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6), B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Mặt phẳng $(P): ax+by+cz-2=0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$

Lời giải

Cách 1:



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=5$.

Mặt phẳng (P) có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P=(a;b;c)$

Theo giả thiết $B(0;1;0)\in(P): b-2=0 \Leftrightarrow b=2$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;3;-6)$ cùng phương với $\vec{u}=(1;-1;2)$.

Phương trình đường thẳng $AB:\begin{cases}x=t\\ y=1-t\\ z=2t\end{cases}$

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến. K là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng AB, H là hình chiếu vuông góc của I lên (P)

Ta có: $K\in AB \Rightarrow K(t;1-t;2t) \Rightarrow \overrightarrow{IK}=(t-1;-t-1;2t-3)$

$IK\perp AB \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IK}=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow \overrightarrow{IK}=(0;-2;-1)$.

$r=\sqrt{R^2-d^2(I,(P))}=\sqrt{25-d^2(I,(P))}=\sqrt{25-IH^2}$.

Ta có: $r_{\min} \Leftrightarrow IH_{\max}$.

Mà $IH\le IK \Rightarrow IH_{\max}=IK \Leftrightarrow H\equiv K \Rightarrow (P)\perp IK \Rightarrow \vec{n}_P$ và $\overrightarrow{IK}$ cùng phương.

$\Rightarrow \vec{n}_P=k.\overrightarrow{IK} \Rightarrow \begin{cases}a=0\\ b=-2k\\ c=-k\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=0\\ k=-1\\ c=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=0\\ c=1\end{cases} \Rightarrow T=a+b+c=0+2+1=3.$

Cách 2:

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$

Ta có $\begin{cases} A\in(P) \\ B\in(P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2b+6c-2=0 \\ b-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2-2c \\ b=2 \end{cases}$

Bán kính của đường tròn giao tuyến là $r=\sqrt{R^2-\left[d\left(I;(P)\right)\right]^2}=\sqrt{25-\left[d\left(I;(P)\right)\right]^2}$

Bán kính của đường tròn giao tuyến nhỏ nhất khi và chỉ khi $d\left(I;(P)\right)$ lớn nhất

Ta có $d\left(I,(P)\right)=\dfrac{|a+2b+3c-2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|2-2c+4+3c-2|}{\sqrt{(2-2c)^2+2^2+c^2}}=\sqrt{\dfrac{(c+4)^2}{5c^2-8c+8}}$

Xét $f(c)=\sqrt{\dfrac{(c+4)^2}{5c^2-8c+8}} \Rightarrow f'(c)=\dfrac{-48c^2-144c+192}{\left(5c^2-8c+8\right)^2\sqrt{\dfrac{(c+4)^2}{5c^2-8c+8}}}$

$f'(c)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=1 \\ c=-4 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{5}$	$\searrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Vậy $d\left(I;(P)\right)$ lớn nhất bằng $\sqrt{5}$ khi và chỉ khi $c=1 \Rightarrow a=0, b=2 \Rightarrow a+b+c=3$.

Câu 151. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;4), B(0;0;1)$ và mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=4$. Mặt phẳng $(P): ax+by+cz-4=0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$?

Lời giải

Ta có: (S) có tâm $I(-1;1;0)$ và bàn kính $R=2$.

Do $A,B\in(P) \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+4c-4=0 \\ c-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2b-12 \\ c=4 \end{cases} \Rightarrow (P): -2(b+6)x+by+4z-4=0.$

Gọi r là bán kính của đường tròn là giao tuyến của (P) và $(S) \Rightarrow r=\sqrt{R^2-d^2\left(I,(P)\right)}$, để r đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow d\left(I,(P)\right)$ đạt giá trị lớn nhất. Mà $d\left(I,(P)\right)=\dfrac{|3b+8|}{\sqrt{5b^2+48b+160}}$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{3x+8}{\sqrt{5x^2+48x+160}}$; $f'(x)=\dfrac{32x+288}{\left(\sqrt{5x^2+48x+160}\right)^3}$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-9$.

Bảng xét biến thiên:

x	$-\infty$		-9		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-1,34$	$\searrow$	$f(-9)\approx -1,66$	$\nearrow$	$1,34$

suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ là

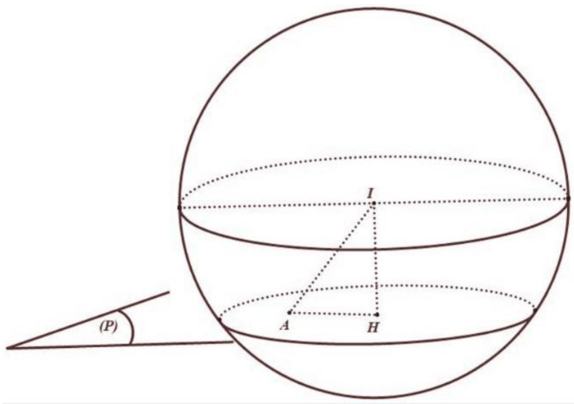
x	$-\infty$		-9		$-\dfrac{8}{3}$		$+\infty$
$\left\|f(x)\right\|$	$1,34$	$\nearrow$	$f(-9)\approx 1,66$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1,34$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $x=-9 \Rightarrow b=-9 \Rightarrow a=6 \Rightarrow T=1$.

Kết luận: $T=1$.

Câu 152. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$, điểm $A(0;0;2)$. Phương trình mặt phẳng $(P): ax+2y+cz+d=0$ qua A và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có diện tích nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $T=a+c+d$.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=3$.

Ta có $IA=\sqrt{6}<R \Rightarrow A$ nằm trong mặt cầu (S).

Do đó mặt phẳng (P) qua A luôn cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có bán kính $r=\sqrt{R^2-IH^2}$ (với H là hình chiếu của $I(1;2;3)$ trên (P)).

Ta luôn có $IA \ge IH \Rightarrow \sqrt{R^2-IH^2} \ge \sqrt{R^2-IA^2} \Rightarrow r \ge \sqrt{R^2-IA^2}$.

Diện tích của hình tròn (C) nhỏ nhất khi bán kính r nhỏ nhất, tức là $r=\sqrt{R^2-IA^2} \Leftrightarrow H \equiv A$.

Khi đó $IA \perp (P) \Rightarrow$ mặt phẳng (P) nhận $\overrightarrow{IA}=(-1;-2;-1)$ làm một VTPT.

Vậy phương trình mặt phẳng (P): $-x-2y-(z-2)=0 \Leftrightarrow x+2y+z-2=0$..

$\Rightarrow T=a+c+d=0$

Câu 153. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là $x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+7=0$. Cho ba điểm A, M, B nằm trên mặt cầu (S) sao cho $\widehat{AMB}=90°$. Diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=4 \Rightarrow (S)$ có tâm $I(1;1;3)$ và bán kính $R=2$.

Bài ra A, M, B nằm trên mặt cầu (S) và $\widehat{AMB}=90° \Rightarrow AB$ qua $I \Rightarrow AB=2R=4$.

Ta có $S_{AMB}=\dfrac{1}{2}MA.MB \le \dfrac{MA^2+MB^2}{4}=\dfrac{AB^2}{4}=4$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow MA=MB=\dfrac{AB}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ và $AB=4$.

Do đó diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng 4.

Câu 154. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=8$. Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M, cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A,B. Gọi S là diện tích lớn nhất của tam giác OAB. Tính S^2.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $O=(0;0;0)$, bán kính $R=2\sqrt{2}$.

Ta có $OM=1 \Rightarrow M$ nằm trong mặt cầu. Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow OI \perp AB$.

Đặt $x=OI \le OM \Rightarrow 0<x\le 1$.

Khi đó $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}OI.AB=OI\sqrt{R^2-OI^2}=x\sqrt{8-x^2}=f(x)$.

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2(4-x^2)}{\sqrt{8-x^2}}(0<x\le 1)$, ta có bảng biến thiên

x	0		1
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{7}$

Vậy $\max S_{\Delta OAB}=\sqrt{7}$ khi $OI=1$ hay $I\equiv M$.

$\Rightarrow S^2 = 7$

Câu 155. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1:\begin{cases} x = 4-2t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}, (t \in \mathbb{R}), d_2:\begin{cases} x = 1 \\ y = t' \\ z = -t' \end{cases}, (t' \in \mathbb{R})$. Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng $(d_1),(d_2)$ có tâm $I(a;b;c)$. Tính giá trị biểu thức $T = 2a+b+c$.

Lời giải

Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với $(d_1),(d_2)$ là mặt cầu có đường kính là đoạn vuông góc chung của $(d_1),(d_2)$. Lấy $A(4-2t;t;3) \in d_1; B(1;t';-t') \in d_2$. A,B là đoạn vuông góc chung khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_{d_1}} = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_{d_2}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5t+t' = -6 \\ -t+2t' = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = -1 \end{cases}.$$

Khi đó $A(2;1;3); B(1;-1;1)$. Suy ra tâm $I\left(\dfrac{3}{2};0;2\right)$, bán kính $R = \dfrac{3}{2}$.

$\Rightarrow T = 2a+b+c = 5$

Câu 156. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2 = 4$ có tâm I và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+2 = 0$. Gọi tọa độ điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc (P) sao cho đoạn IM ngắn nhất. Tính giá trị biểu thức $T = 3a+6b+9c$.

Lời giải

Ta có tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $\mathrm{R} = 2$.

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) ngắn nhất khi M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

Đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-t \\ z = 2t \end{cases}$. Khi đó tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-t \\ z = 2t \\ 2x-y+2z+2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-t \\ z = 2t \\ 2(1+2t)-(-2-t)+2(2t)+2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{4}{3} \\ z = -\dfrac{4}{3} \\ t = -\dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

$\Rightarrow T = 3a+6b+9c = -21$

Câu 157. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1;-2;1)$; bán kính $R=4$ và đường thẳng $d:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{-1}$. Mặt phẳng (P) chứa d và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có diện tích nhỏ nhất. Biết phương trình mặt phẳng (P) có dạng $x+by+cz+d=0$. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$.

Lời giải

Gọi $H(2t;1-2t;-1-t)$ là hình chiếu của I lên đường thẳng d.

Ta có: $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{u_d}=0 \Rightarrow 2(2t-1)-2(3-2t)-(-2-t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{3} \Rightarrow H\left(\frac{4}{3};-\frac{1}{3};-\frac{5}{3}\right)$.

Vì $IH=\sqrt{10}<4=R \Rightarrow$ d cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm phân biệt.

Mặt phẳng (Q) bất kì chứa d luôn cắt (S) theo một đường tròn bán kính r.

Khi đó $r^2=R^2-d^2(I,(Q)) \geq R^2-d^2(I,d)=16-10=6$.

Do vậy mặt phẳng (P) chứa d cắt mặt cầu theo một đường tròn có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi

$d(I,(P))=d(I,d)$ hay mặt phẳng (P) đi qua H nhận $\overrightarrow{IH}=\left(\frac{1}{3};\frac{5}{3};-\frac{8}{3}\right)$ làm vectơ pháp tuyến, do đó

(P) có phương trình $x+5y-8z-13=0$.

$\Rightarrow T=a+b+c=-16$

Câu 158. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;-1;3), B(-2;-8;-4)$, $C(2;-1;1)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$. Gọi $M(x_M;y_M;z_M)$ là điểm trên (S) sao cho biểu thức $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P=x_M+y_M$.

Lời giải

Gọi J là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{JA}-2\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{JO}+3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OJ}=3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow J(3;6;9)$.

Mà $3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MJ}+\left(3\overrightarrow{JA}-2\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}\right)$ nên $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MJ}\right|$

Do đó $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|_{\min} \Leftrightarrow \left|2\overrightarrow{MJ}\right|_{\min}$.

Mặt khác: (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=\sqrt{14}$ và $IJ=2\sqrt{14}>R \Rightarrow$ điểm J nằm ngoài mặt cầu nên IJ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm M_1, M_2.

Phương trình đường thẳng $(IJ):\begin{cases}x=1+2t\\ y=2+4t, t\in\mathbb{R}\\ z=3+6t\end{cases}$.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+4t \\ z=3+6t \\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=\dfrac{1}{2} \\ t_2=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Suy ra $M_1(2;4;6), M_2(0;0;0), M_1J=\sqrt{14}; M_2J=3\sqrt{14}$.

Vậy $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|_{\min} \Leftrightarrow \left|2\overrightarrow{MJ}\right|_{\min} \Leftrightarrow M\equiv M_1$.

$P=x_M+y_M=2+4=6$.

Câu 159. Cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$ và hai điểm $A(1\,;\,1\,;3)$, $B(21\,;\,9\,;\,-13)$. Điểm $M(a\,;\,b\,;\,c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho $3MA^2+MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T=a.b.c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi điểm I thỏa mãn $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Rightarrow I(6\,;3\,;-1)$.

Khi đó $3MA^2+MB^2=3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=4MI^2+3IA^2+IB^2+2\overrightarrow{MI}.\left(3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)$

$=4MI^2+3IA^2+IB^2$.

Do $3IA^2+IB^2$ không đổi vì ba điểm $A;B;I$ cố định nên $3MA^2+MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất. Khi đó M là giao điểm của đường thẳng IJ với mặt cầu (S), ($J(2\,;1\,;3)$ là tâm của mặt cầu (S)).

Ta có phương trình đường thẳng IJ là $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1+t \\ z=3-2t \end{cases} \Rightarrow IJ\cap(S)=\left[\begin{array}{l} M_1(4;\,2\,;1) \\ M_2(0\,;0\,;5) \end{array}\right.$.

Kiểm tra $IM_1<IM_2\,(3<9)$ nên $M_1(4;2;1)$ là điểm cần tìm. Vậy $T=a.b.c=8$.

Câu 160. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm A, B thay đổi trên mặt cầu $x^2+y^2+(z-1)^2=25$ thỏa mãn $AB=6$. Giá trị lớn nhất của biểu thức OA^2-OB^2 bằng bao nhiêu?

Lời giải

Mặt cầu $x^2+y^2+(z-1)^2=25$ có tâm $I(0;0;1)$.

Vì A,B cùng thuộc mặt cầu tâm I nên $IA=IB$.

$OA^2-OB^2=\left(\overrightarrow{OA}\right)^2-\left(\overrightarrow{OB}\right)^2=\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA}\right)^2-\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

$=2\overrightarrow{OI}\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}\right)=2\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{BA}=2OI.BA.\cos\varphi$, với $\varphi=\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{BA}\right)$.

Suy ra biểu thức OA^2-OB^2 đạt GTLN khi và chỉ khi $\varphi=0$.

Vậy $\max\left(OA^2-OB^2\right)=2.1.6.\cos 0=12$.

Câu 161. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; M là điểm thay đổi trên (S). Gọi m,n là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2MA^2-MB^2$. Tính giá trị $T=m-n$.

Lời giải

Xét điểm I sao cho: $2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Giả sử $I(x;y;z)$, ta có:

$\overrightarrow{IA}(4-x;3-y;1-z),\overrightarrow{IB}(3-x;1-y;3-z)$.

Do đó: $2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}2(4-x)=3-x\\2(3-y)=1-y\\2(1-z)=3-z\end{cases}\Leftrightarrow I(5;5;-1)$.

Do đó: $P=2MA^2-MB^2=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

$=2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{IA}^2+4\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}-\left(\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IB}^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}\right)$

$=\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{IA}^2-\overrightarrow{IB}^2+2\overrightarrow{MI}\left(2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}\right)=MI^2+2IA^2-IB^2+2\overrightarrow{MI}\left(2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}\right)$

$=MI^2+2IA^2-IB^2$.

Do I cố định nên IA^2,IB^2 không đổi. Vậy P lớn nhất (nhỏ nhất) $\Leftrightarrow MI^2$ lớn nhất (nhỏ nhất). $\Leftrightarrow MI$ lớn nhất (nhỏ nhất) $\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đường thẳng IK (với $K(1;2;-1)$ là tâm của mặt cầu (S)) với mặt cầu (S).

Ta có: MI đi qua $I(5;5;-1)$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{KI}(4;3;0)$.

Phương trình của MI là: $\begin{cases}x=1+4t\\y=2+3t\\z=-1.\end{cases}$

Tọa độ điểm M cần tìm ứng với giá trị t là nghiệm của phương trình:

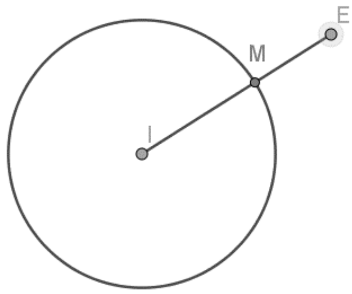
$(1+4t-1)^2+(2+3t-2)^2+(-1+1)^2=9\Leftrightarrow 25t^2=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{3}{5}\\t=-\dfrac{3}{5}.\end{array}\right.$

Với $t=\dfrac{3}{5}\Rightarrow M_1\left(\dfrac{17}{5};\dfrac{19}{5};-1\right)\Rightarrow M_1I=2$ (min).

Với $t=-\dfrac{3}{5}\Rightarrow M_1\left(-\dfrac{7}{5};\dfrac{1}{5};-1\right)\Rightarrow M_2I=8$ (max). Vậy $\begin{cases}m=P_{\max}=48\\n=P_{\min}=-12\end{cases}\Rightarrow m-n=60$.

Câu 162. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=3$. Xét điểm M thay đổi thuộc mặt cầu (S), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;3;3)$ bán kính $R=\sqrt{3}$.

Gọi E là điểm thỏa mãn: $2\overrightarrow{EA}+3\overrightarrow{EB}=\vec{0}$. Suy ra $E(-1;1;1)$.

Xét $P=2MA^2+3MB^2=2\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}\right)^2+3\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}\right)^2=5ME^2+2EA^2+3EB^2$.

P đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi ME đạt giá trị nhỏ nhất.

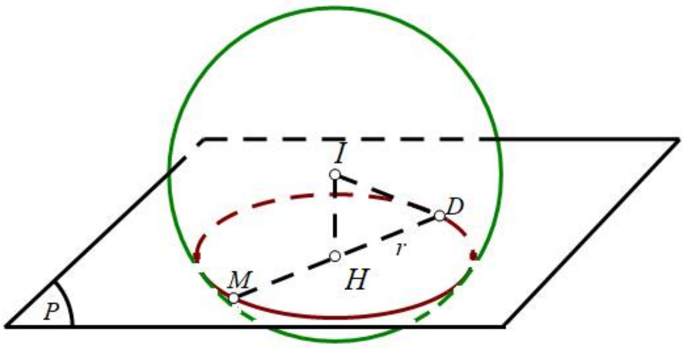
$IE=2\sqrt{3}>R$ suy ra điểm E nằm ngoài mặt cầu nên ME nhỏ nhất bằng

$IE-R=2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

Vậy $P=2MA^2+3MB^2=5ME^2+2EA^2+3EB^2=105$.

Câu 163. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(2;1;3)$, $C(0;2;-3)$, $D\left(2;0;\sqrt{7}\right)$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu $(S):(x+2)^2+(y-4)^2+z^2=39$ thỏa mãn $MA^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=8$. Biết rằng đoạn thẳng MD đạt giá trị lớn nhất. Tính MD^2.

Lời giải



+ Mặt cầu $(S):(x+2)^2+(y-4)^2+z^2=39$ có tâm là $I(-2;4;0)$, bán kính $R=\sqrt{39}$.

Gọi $M(x,y,z)\in(S)$. Ta có: $x^2+y^2+z^2=19-4x+8y$.

$MA^2=(x-1)^2+y^2+z^2=20-6x+8y$.

$\overrightarrow{MB}=(2-x;1-y;3-z)$; $\overrightarrow{MC}=(-x;2-y;-3-z)$.

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=-2x+x^2+2-3y+y^2-9+z^2=19-4x+8y-2x-3y-7=-6x+5y+12$.

Suy ra $MA^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=-18x+18y+44$.

Theo giả thiết $MA^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=8\Leftrightarrow -18x+18y+44=8\Leftrightarrow -x+y+2=0$.

Do đó $M \in (P): -x+y+2=0$.

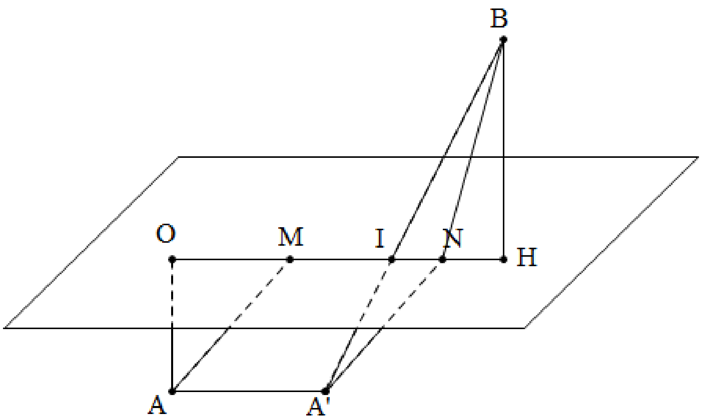
Ta có $d(I;(P)) = \frac{|8|}{\sqrt{2}} = \sqrt{32} < \sqrt{39}$ nên mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính R_1 với $R_1 = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{39-32} = \sqrt{7}$.

Mặt khác ta có $\begin{cases} D, M \in (P) \\ D, M \in (S) \end{cases} \Rightarrow D, M \in (\mathrm{C})$.

Do đó độ dài MD lớn nhất bằng $MD = 2R_1 = 2\sqrt{7} \Rightarrow MD^2 = 28$.

Câu 164. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $\mathrm{A}(0;0;2)$ và $\mathrm{B}(3;4;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 25$ với $(S_2): \mathrm{x}^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14 = 0$. M, N là hai điểm thuộc (P) sao cho $MN = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Từ $\begin{cases} (S_1): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 25 \quad (1) \\ (S_2): \mathrm{x}^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14 = 0 \quad (2) \end{cases}$

Lấy (1) trừ (2), ta được $6z = 0$ hay

$(P): z = 0$ tức là $(P) \equiv (Oxy)$.

Dễ thấy A, B nằm khác phía đối với (P), hình chiếu của A trên (P) là O, hình chiếu của B trên (P) là $H(3;4;0)$.

Lấy A' sao cho $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN}$.

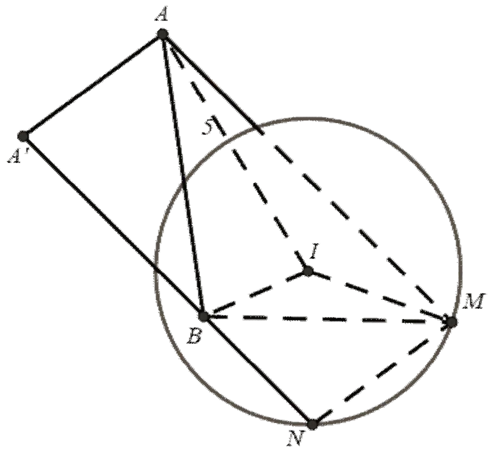
Khi đó $AM + BN = A'N + BN \geq A'B$ và cực trị chỉ xảy ra khi $\overrightarrow{MN}$ cùng phương $\overrightarrow{OH}$.

Lấy $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{OH}}{\left|\overrightarrow{OH}\right|} = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; 0\right)$.

Khi đó vì $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN}$ nên $A'\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; 0\right)$. Do đó $AM + BN = A'N + BN \geq A'B = 5$.

Câu 165. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-4=0$ và hai điểm $A(4;2;4)$, $B(1;4;2)$. MN là dây cung của mặt cầu thỏa mãn $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{u}=(0;1;1)$ và $MN=4\sqrt{2}$. Tính giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$.

Lời giải



Tâm $I(1;2;0)$, bán kính $R=3$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(3;0;4)\Rightarrow IA=5$, $\overrightarrow{IB}=(0;2;2)\Rightarrow IB=2\sqrt{2}$ nên điểm $A(4;2;4)$ nằm ngoài mặt cầu (S) và điểm $B(1;4;2)$ nằm trong mặt cầu (S).

Do $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{u}=(0;1;1)$ suy ra $\overrightarrow{MN}=(0;k;k), k>0$ do $MN=4\sqrt{2}$ suy ra $\overrightarrow{MN}=(0;4;4)$.

Gọi $A'=T_{\overrightarrow{MN}}(A)$, suy ra $A'=(4;6;8)$. Khi đó $AMNA'$ là hình bình hành nên $AM=A'N$

Ta có $|AM-BN|=|A'N-BN|\le A'B$, dấu bằng xảy ra khi A', N, B thẳng hàng $\Leftrightarrow N$ là giao điểm của mặt cầu với đường thẳng $A'B$. (Điểm N luôn tồn tại).

$\overrightarrow{A'B}=(-3;-2;-6)$ suy ra $A'B=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+(-6)^2}=7$.

Vậy $|AM-BN|_{\min}=A'B=7$.

Câu 166. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi điểm $M(a;b;c)$ (với a, b, c là các phân số tối giản) thuộc mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z-7=0$ sao cho biểu thức $T=2a+3b+6c$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó giá trị biểu thức $P=2a-b+c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z-7=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=16$.

$M(a;b;c)\in(S)\Leftrightarrow(a-1)^2+(b-2)^2+(c-2)^2=16$.

Ta có: $|2(a-1)+3(b-2)+6(c-2)|\le\sqrt{(2^2+3^2+6^2).\left[(a-1)^2+(b-2)^2+(c-2)^2\right]}$.

$\Leftrightarrow |2a+3b+6c-20|\le 28 \Rightarrow 2a+3b+6c-20\le 28 \Rightarrow 2a+3b+6c\le 48$.

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases} 2a+3b+6c=48 \\ \dfrac{a-1}{2}=\dfrac{b-2}{3} \\ \dfrac{a-1}{2}=\dfrac{c-2}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+3b+6c=48 \\ 3a-2b=-1 \\ 3a-c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{15}{7} \\ b=\dfrac{26}{7} \\ c=\dfrac{38}{7} \end{cases}$

Vậy $P=2a-b+c=2.\dfrac{15}{7}-\dfrac{26}{7}+\dfrac{38}{7}=6$.

Câu 167. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;2;-2)$; $B(3;-3;3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{2}{3}$. Khi độ dài OM lớn nhất, tính OM^2.

Lời giải

Gọi $M(x;y;z)$.

Ta có $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 3MA=2MB \Leftrightarrow 9MA^2=4MB^2$

$\Leftrightarrow 9\left[(x+2)^2+(y-2)^2+(z+2)^2\right]=4\left[(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2\right]$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+12x-12y+12z=0$

$\Leftrightarrow (x+6)^2+(y-6)^2+(z+6)^2=108$.

Như vậy, điểm M thuộc mặt cầu (S) tâm $I(-6;6;-6)$ và bán kính $R=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$.

Do đó OM lớn nhất bằng $OI+R=\sqrt{(-6)^2+6^2+(-6)^2}+6\sqrt{3}=12\sqrt{3} \Rightarrow OM^2=432$.

Câu 168. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+\dfrac{9}{2}=0$ và hai điểm $A(0;2;0)$, $B(2;-6;-2)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (S) thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ có giá trị nhỏ nhất. Tổng $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+\dfrac{9}{2}=0 \Leftrightarrow (S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=\dfrac{3}{2}$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$, bán kính $R=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Vì $IA=\sqrt{2}>R$ và $IB=\sqrt{82}>R$ nên hai điểm A, B nằm ngoài mặt cầu (S).

Gọi K là trung điểm đoạn thẳng AB thì $K(1;-2;-1)$ và K nằm ngoài mặt cầu (S).

Ta có: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}\right).\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KB}\right)$

$=MK^2+\overrightarrow{MK}.\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}\right)+\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB}=MK^2-KA^2$.

Suy ra $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất khi MK^2 nhỏ nhất, tức là MK nhỏ nhất.

Đánh giá: $IM + MK \geq IK \Rightarrow R + MK \geq IK \Rightarrow MK \geq IK - R$.

Suy ra MK nhỏ nhất bằng $IK - R$, xảy ra khi I, M, K thẳng hàng và M nằm giữa hai điểm I, K.

Như vậy M là giao điểm của đoạn thẳng IK và mặt cầu (S).

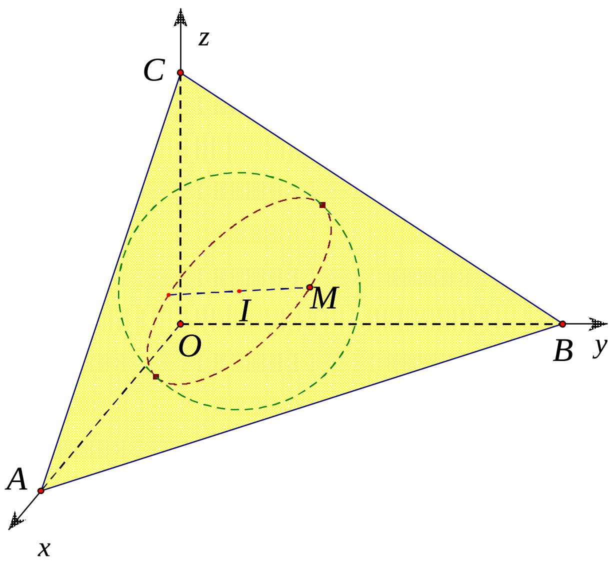
Có $\overrightarrow{IK} = (2;-4;-2)$, $IK = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{6} = 4R = 4IM$.

Suy ra $\overrightarrow{IK} = 4\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 4(a+1) \\ -4 = 4(b-2) \\ -2 = 4(c-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy $a + b + c = 1$.

Câu 169. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Điểm $M \in (S)$ có tọa độ dương; mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) tại M cắt các tia Ox; Oy; Oz tại các điểm A, B, C. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = (1 + OA^2)(1 + OB^2)(1 + OC^2)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



(S) có tâm (O) và bán kính $R = 1$.

Theo đề bài ta có $A(a,0,0); B(0,b,0); C(0,0,c)$; $(a,b,c > 0)$ khi đó phương trình mặt phẳng (P) là:

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

(P) tiếp xúc với (S) tại $M \in (S) \Leftrightarrow d(O;(P)) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}} = 1$

$\Leftrightarrow abc = \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \geq \sqrt{3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}} \Rightarrow abc \geq 3\sqrt{3}$ (1) vì $(a,b,c > 0)$.

Khi đó: $T = (1 + OA^2)(1 + OB^2)(1 + OC^2) = (1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)$

$\Rightarrow T = 1 + a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2c^2 = 1 + a^2 + b^2 + c^2 + 2a^2b^2c^2$

Mặt khác $1+a^2+b^2+c^2+2a^2b^2c^2 \geq 1+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+2a^2b^2c^2 \geq 64 \quad (2) \Rightarrow T \geq 64$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 64 khi (1) và (2) xảy ra dấu bằng $\Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}$.

Câu 170. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, Cho điểm $A(2t;2t;0)$, $B(0;0;t)$ (với $t>0$). Điểm P di động thỏa mãn $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}=3$. Biết rằng có giá trị $t=\frac{a}{b}$ với a, b nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản sao cho OP đạt giá trị lớn nhất bằng 3. Khi đó giá trị của $Q=2a+b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi $P(x;y;z)$, ta có: $\overrightarrow{OP}=(x;y;z)$, $\overrightarrow{AP}=(x-2t;y-2t;z)$, $\overrightarrow{BP}=(x;y;z-t)$

Vì $P(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}=3$

$$\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+3z^2-4tx-4ty-2tz-3=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-\frac{4}{3}tx-\frac{4}{3}ty-\frac{2}{3}tz-1=0$$

Nên P thuộc mặt cầu tâm $I\left(\frac{2t}{3};\frac{2t}{3};\frac{t}{3}\right)$, $R=\sqrt{t^2+1}$.

Ta có $OI=t<R$ nên O thuộc phần không gian phía trong mặt cầu.

Để $OP_{\max}$ thì P, I, O thẳng hàng và $OP=OI+R$.

Suy ra $OP_{\max}=OI+R \Leftrightarrow 3=t+\sqrt{t^2+1}$. Từ đó tìm được $t=\frac{4}{3}$ Suy ra $a=4, b=3$

Vậy, $Q=2a+b=11$.

CHỦ ĐỀ 2
ỨNG DỤNG MẶT CẦU TRONG THỰC TIỄN

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MỘT ĐIỂM VỚI MẶT CẦU

Cho mặt cầu tâm $S(I;R)$

- Nếu $IM = R$ thì M nằm trên mặt cầu.
- Nếu $IM < R$ thì M nằm trong mặt cầu.
- Nếu $IM > R$ thì M nằm ngoài mặt cầu.

2. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT PHẲNG VỚI MẶT CẦU

Cho mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(x_I;y_I;z_I)$ và bán kính R . Để xét vị trí tương đối của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S), ta làm như sau:

- Tính $d(I;(P)) = \dfrac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{|\vec{n}_{(P)}|}$
- So sánh với bán kính R

  \+ Nếu $d(I;(P)) > R$ thì mặt phẳng không cắt mặt cầu

  \+ Nếu $d(I;(P)) = R$ thì mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu

  \+ Nếu $d(I;(P)) < R$ thì mặt phẳng cắt mặt cầu

3. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI MẶT CẦU

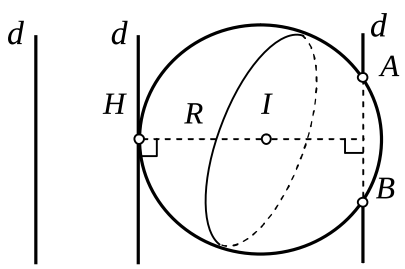
Cho mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R và đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}$, điểm $M \in d$. Để xét vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mặt cầu (S), ta làm như sau:

- Tính $d(I;d) = \dfrac{\left|\left[\vec{u};\overrightarrow{MI}\right]\right|}{|\vec{u}|}$
- So sánh với bán kính R

  \+ Nếu $d(I;d) > R$ thì đường thẳng d không cắt mặt cầu (S)

  \+ Nếu $d(I;d) = R$ thì đường thẳng d tiếp xúc với mặt cầu (S) tại H.

  \+ Nếu $d(I;d) < R$ thì đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B.



PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, một thiết bị phát sóng đặt tại vị trí $A(2;0;0)$. Vùng phủ sóng của thiết bị có bán kính bằng 1.

a) Hỏi vị trí $M(2;1;1)$ có thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên hay không?

b) Hỏi vị trí $N(2;1;0)$ có thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên hay không?

c) Hỏi vị trí $Q\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ có thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên hay không?

Bài 2. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Vinaphone được đặt ở vị trí $I(1;-2;-3)$ và được thiết kế bán kính phủ sóng là $5000m$.

a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian.

b) Nhà bạn Minh Hiền và bạn Trúc Linh có vị trí tọa độ lần lượt là $M(1;2;0)$ và $N(-3;1;0)$. Hỏi Minh Hiền và Trúc Linh dùng điện thoại tại nhà thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này không?

Bài 3. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng rađa của Nga được đặt trên bán đảo Crimea ở vị trí $I(-2;1;-1)$ và được thiết kế phát hiện máy bay của địch ở khoảng cách tối đa $500km$.

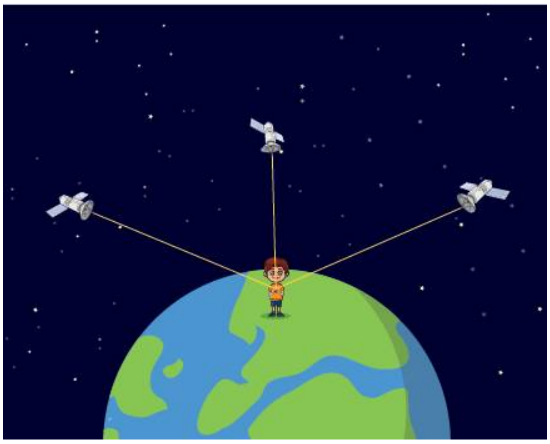
a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của rađa trong không gian.

b) Hai chiếc máy bay do thám của Mỹ và Anh đang bay ở vị trí có tọa độ lần lượt là $M\left(-200;100;-250\right)$ và $N\left(350;-100;300\right)$. Hỏi rađa của Nga có thể phát hiện ra hai chiếc máy bay do thám của Mỹ và Anh không?

Bài 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I\left(21;35;50\right)$ và ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng là 4 km. Nếu người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí $I\left(21;35;50\right)$ đến vị trí $D\left(5121;658;0\right)$. Hãy tìm vị trí cuối cùng trên đoạn ID sao cho người đi biển có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng (kết quả làm tròn tới chữ số thập phân thứ hai).

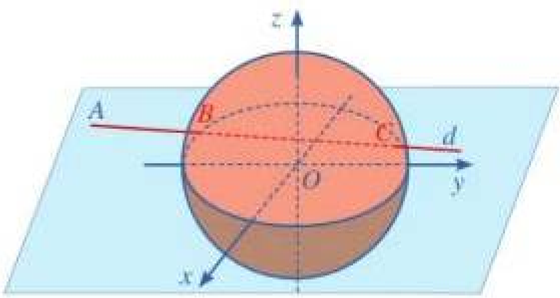
Bài 5. Giả sử Trái Đất có dạng hình cầu bán kính bằng $6,4.10^6$ m. Bạn Minh Hiền đang đứng trên mặt đất. Có 3 vệ tinh báo về máy chủ tiếp nhận thông tin rằng vệ tinh thứ nhất đang cách Minh Hiền 3.10^6 m, vệ tinh thứ hai đang cách Minh Hiền 4.10^6 m và vệ tinh thứ ba đang cách Minh Hiền 5.10^6 m. Biết rằng trong hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho trước với O là tâm Trái Đất (1 đơn vị $=10^6$ m), tại thời điểm vệ tinh thông

báo về máy chủ thì toạ độ của các vệ tinh lần lượt là $I_1(4;4;6)$, $I_2(8;4;3)$ và $I_3(4;9;3)$. Hãy tìm tọa độ vị trí của bạn Minh Hiền (làm tròn đến hàng đơn vị).



Bài 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là km), một máy bay đang ở vị trí $A(3;-2;1)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(2;-5;0)$ trên đường băng. Có một đám mây được mô phỏng bởi mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=16$ tại $M\left(\frac{10}{9};-\frac{25}{9};\frac{7}{9}\right)$. Tính độ cao của máy bay khi đi xuyên qua đám mây để hạ cánh (Giả sử mặt đất ở vị trí máy bay đang bay được coi là mặt phẳng mặt phẳng (Oxy))

Bài 7. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu sân bay Cam Ranh – Khánh Hòa ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa $600km$. Một máy bay của hãng Việt Nam Airlines đang ở vị trí A, chuyển động theo đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x=-1000+100t \\ y=-200+80t \\ z=10 \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ).



a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian.

b) Xác định tọa độ vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa và tọa độ vị trí mà máy bay bay ra khỏi màn hình ra đa.

c) Tính khoảng cách ngắn nhất giữa máy bay với đài kiểm soát không lưu.

PHẦN B

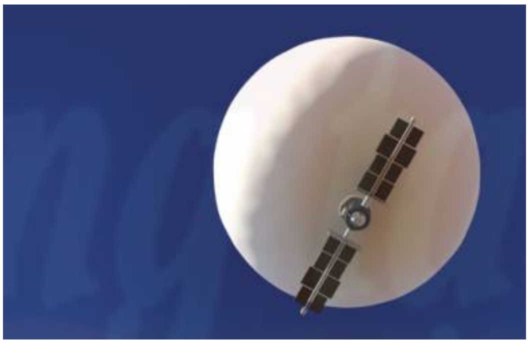
TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, bề mặt của một quả bóng đá dạng hình cầu có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2z-6y-2=0$. Tìm tọa độ tâm I của quả bóng.

A. $I(2;3;-1)$. **B.** $I(2;3;-1)$. **C.** $I(2;3;-1)$. **D.** $I(2;3;-1)$.

Câu 2. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, bề mặt của một quả bóng thám không dạng hình cầu có phương trình $x^2+y^2+z^2-200x-600y-4000z+4099900=0$. Tìm tâm và bán kính mặt cầu.



A. Tâm $I(100;300;2000)$, bán kính $r=100$.

B. Tâm $I(-100;-300;-2000)$, bán kính $r=10$.

C. Tâm $I(100;300;2000)$, bán kính $r=10$.

D. Tâm $I(-100;-300;-2000)$, bán kính $r=100$.

Câu 3. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một quả cầu tại sân bay quốc tế Đà Nẵng có phương trình $x^2+y^2+z^2-10x-20z-18y-190=0$. Bán kính của quả cầu là:

A. 2 mét. **B.** 5 mét. **C.** 3 mét. **D.** 4 mét

Câu 4. Phần mềm mô phỏng thiết bị thám hiểm đại dương có dạng hình cầu trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét). Cho biết tọa độ tâm mặt cầu là $I(360;200;400)$ và bán kính $r=2m$. Viết phương trình mặt cầu.

A. $(x-360)^2+(y-200)^2+(z-400)^2=2$.
B. $(x-360)^2+(y-200)^2+(z-400)^2=4$.
C. $(x+360)^2+(y+200)^2+(z+400)^2=4$.
D. $(x+360)^2+(y+200)^2+(z+400)^2=2$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-6;-1;4)$. Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 2 km. Người sử dụng điện thoại đứng ở điểm nào sau đây thì sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

A. $A(-4;0;2)$ **B.** $B(-5;-2;5)$. **C.** $C(-6;2;2)$ **D.** $D(0;-1;4)$

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-6;-1;4)$. Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 2 km. Người sử dụng điện thoại đứng ở điểm nào sau đây thì **không** sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

A. $A(-5;0;3)$ **B.** $B(-5;-2;5)$. **C.** $C(-6;2;2)$ **D.** $D(-7;-2;3)$

Câu 7. Một vệ tinh quay quanh Trái Đất với độ cao so với mặt đất là 18900 km. Ta xét trong không gian $Oxyz$ với tâm O là tâm Trái Đất, 1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6300 km trên thực tế. Biết bán kính Trái Đất khoảng 6300 km. Phương trình biểu diễn quỹ đạo chuyển động của vệ tinh đó là

A. $x^2+y^2+z^2=4$. **B.** $x^2+y^2+z^2=16$. **C.** $x^2+y^2+z^2=2$. **D.** $x^2+y^2+z^2=5$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị đo là cm), mặt sàn nhà đa năng thuộc mặt phẳng Oxy. Một quả bóng nằm trên mặt sàn nhà đa năng và có tâm $I(12;20;50)$. Khi đó, mặt ngoài của quả bóng (S) có phương trình là:

A. $(x-12)^2+(y-20)^2+(z-50)^2=12^2$. **B.** $(x+12)^2+(y+20)^2+(z+50)^2=12^2$.

C. $(x-12)^2+(y-20)^2+(z-50)^2=20^2$. **D.** $(x-12)^2+(y-20)^2+(z-50)^2=50^2$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là km), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(1;5;5)$ như hình vẽ. Ngọn hải đăng được thiết kế với bán kính phủ sáng là 5 km. Một người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí $I(1;5;5)$ đến vị trí $A(7;14;11)$.Điểm nào sau đây mà người đi biển đi qua và vẫn thuộc vùng phủ sáng của ngọn hải đăng?

A. $M(3;8;7)$. **B.** $N(0;4;8)$. **C.** $P(7;3;0)$. **D.** $Q(7;11;3)$.

Câu 10. Một máy Rađa có tầm hoạt động với bán kính tối đa là 20 km. Ta xét trong không gian $Oxyz$ với tâm O là vị trí máy Rađa, 1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 10 km trên thực tế. Hỏi trong không gian $Oxyz$ trên, vật thể có tọa độ tương ứng với đáp án nào dưới đây sẽ bị Rađa phát hiện?

A. $M(1;0;2)$. **B.** $N(2;-1;1)$. **C.** $P(1;1;\sqrt{2})$. **D.** $Q(3;0;0)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Vettel được đặt ở vị trí $I(1;2;1)$ và được thiết kế bán kinh phủ sóng 5000 mét. Nhà thầy Hùng và cô Linh có vị trí tọa độ lần lượt là $A(3;2;-1)$ và $B(4;-3;5)$.

a) Nhà thầy Hùng và cô Linh cách nhau $7,2(km)$ (kết quả làm tròn đến phần chục của kilômét).

b) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian là:

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=5000^2$$

c) Thầy Hùng dùng điện thoại tại nhà thì không thể sử dụng dịch vụ của trạm Vettel này.

d) Cô Linh dùng điện thoại tại nhà thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm Vettel này.

Câu 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(10;\ 20;\ 30)$ với bán kính phủ sáng là 3 km.

a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là

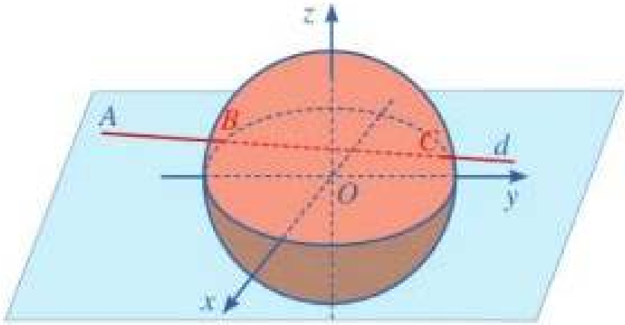
$$(x-10)^2+(y-20)^2+(z-30)^2=9.$$

b) Người đi biển ở vị trí $A(50;20;0)$ nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

c) Người đi biển ở vị trí $B(4030;\ 50;\ 40)$ không nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

d) Nếu hai người đi biển có thể nhìn thấy ánh sáng của ngọn hải đăng thì khoảng cách giữa hai người đó không quá 6 km.

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $O(0;0;0)$, mỗi đơn vị trên trục ứng với 1 km. Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 417 km sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay đang ở vị trí $A(-688;-185;8)$, chuyển động theo theo đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(91;75;0)$ và hướng về đài kiểm soát không lưu.



a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của đài kiểm soát không lưu sân bay là

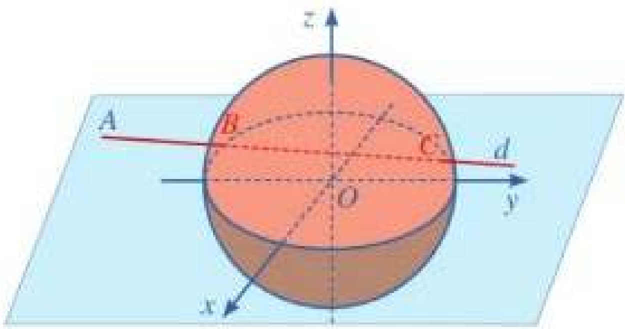
$$x^2+y^2+z^2=417^2$$

b) Máy bay đang ở vị trí A thì sẽ hiển thị trên màn hình ra đa.

c) Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x=-688+91t \\ y=-185+75t\,(t\in\mathbb{R}) \\ z=8 \end{cases}$.

d) Tọa độ vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa là $(-88;415;8)$.

Câu 14. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu của một sân bay ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa $600km$. Một máy bay đang chuyển động với vận tốc 900 km/h theo đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x=-1000+100t \\ y=-300+80t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=100\sqrt{11} \end{cases}$ và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ).



a) Ranh giới vùng phát sóng bên ngoài của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu có bán kính bằng $300km$.

b) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là $x^2+y^2+z^2=360000$.

c) Máy bay đang chuyển động theo đường thẳng d đến vị trí điểm $M\left(-500;100;100\sqrt{11}\right)$. Vị trí này nằm ngoài vùng kiểm soát không lưu của đài kiểm soát không lưu sân bay.

d) Thời gian kể từ khi đài kiểm soát không lưu phát hiện may bay đến khi máy ra khỏi vùng kiểm soát không lưu là $\frac{4}{3}$ giờ.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(1;3;7)$. Trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng là 3 km.

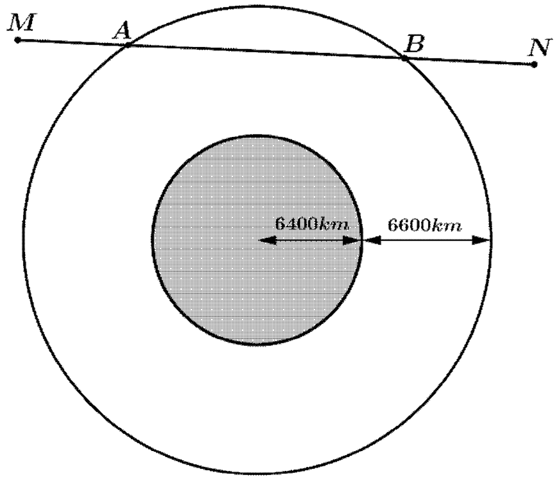
a) Phương trình mặt cầu (S) để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là $(x+1)^2+(y+3)^2+(z+7)^2=9$.

b) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí điểm $A(2;2;7)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

c) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có toạ độ $B(5;6;7)$ thì không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

d) Tính theo đường chim bay, khoảng cách lớn nhất để một người ở vị trí có toạ độ $B(5;6;7)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị kilômét là 8 km.

Câu 16. Các thiên thạch có đường kính lớn hơn 140 m và có thể lại gần Trái Đất ở khoảng cách nhỏ hơn 7 500 000 km được coi là những vật thể có khả năng va chạm gây nguy hiểm cho Trái Đất. Để theo dõi những thiên thạch này, người ta đã thiết lập các trạm quan sát các vật thể bay gần Trái Đất. Giả sử có một hệ thống quan sát có khả năng theo dõi các vật thể ở độ cao không vượt quá 6 600 km so với mực nước biển. Coi Trái Đất là khối cầu có bán kính 6 400 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian có gốc O tại tâm Trái Đất và đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 1000 km. Một thiên thạch (coi như một hạt) chuyển động với tốc độ không đổi theo một đường thẳng từ điểm $M(6;20;0)$ đến điểm $N(-6;-12;16)$.



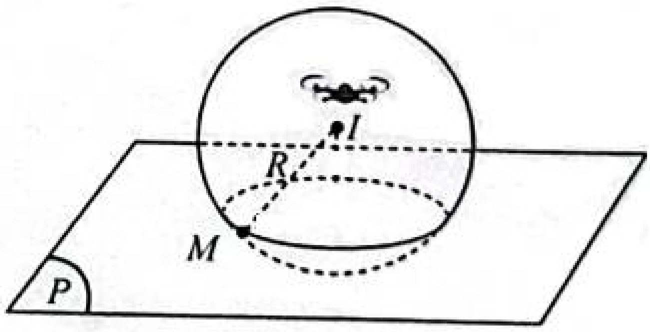
a) Đường thẳng MN có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = 20 + 8t \\ z = -4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

b) Vị trí đầu tiên thiên thạch di chuyển vào phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là điểm $A(-3;-4;12)$.

c) Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng mà thiên thạch di chuyển trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 18 900 km (kết quả làm tròn đến hàng trăm theo đơn vị km).

d) Nếu thời gian di chuyển của thiên thạch trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 3 phút thì thời gian nó di chuyển từ M đến N là 10 phút.

Câu 17. Một khu vực đã được thiết lập một hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét). Một flycam đang phát sóng wifi bao phủ một vùng không gian bên trong mặt cầu có phương trình $(S):(x-30)^2+(y-20)^2+(z-10)^2=900$. Bạn Trúc Linh đang sử dụng sử dụng máy tính tại điểm M nằm trên đường tròn (C) là giao của mặt cầu (S) và mặt đất. Biết mặt đất bằng phẳng và có phương trình $(P): z=0$.



a) Mặt cầu (S) có toạ độ tâm và bán kính là $I(-30;-20;-10)$, $R=30(m)$.

b) Flycam cách mặt đất 10 mét.

c) Khoảng cách từ bạn Trúc Linh đến tâm của đường tròn (C) là $14{,}14$ mét (kết quả làm tròn đến hai chữ số hàng thập phân của mét).

d) Đường tròn (C) có toạ độ tâm là $(30;20;0)$.

Câu 18. Nhân dịp 26-3, lớp 12A thiết kế một lều cắm trại có dạng là một phần mặt cầu và cửa lều là một đường tròn bằng phần mềm 3D trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (như hình vẽ). Biết bề mặt của lều là mặt cầu (S) có tâm $I(4;4;1)$, bán kính $R=4$ và mặt phẳng chứa cửa lều là $(P): y=3$.

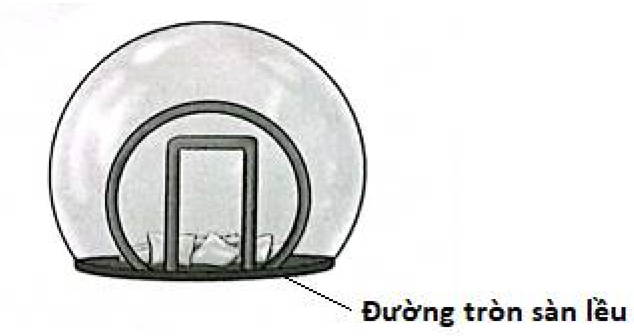
a) Phương trình bề mặt của lều là $(x-4)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=16$.

b) Đường thẳng đi qua tâm I và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là $\begin{cases} x=4 \\ y=4+t \\ z=1-3t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

c) Tâm của đường tròn cửa lều có toạ độ là $(3;3;2)$.

d) Bán kính đường tròn cửa lều là $\sqrt{15}$.

Câu 19. Bạn Minh Hiền thiết kế một lều cắm trại có dạng là một phần mặt cầu và sàn lều là một đường tròn bằng phần mềm 3D trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục là mét). Biết bề mặt của lều là mặt cầu (S) có tâm $I(4;3;1)$, bán kính $R=3$ và mặt phẳng chứa sàn lều là $(Q): z=2$.



a) Phương trình bề mặt của lều là $(x-4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=3$.

b) Đường thẳng đi qua tâm I và vuông góc với mặt phẳng (Q) có phương trình là $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \\ z=1+t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

c) Tâm của đường tròn cửa lều có toạ độ là $(3;4;2)$.

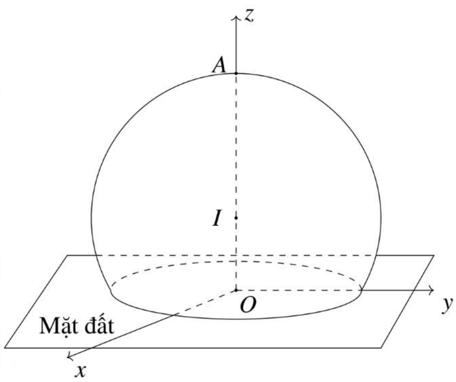
d) Bạn Minh Hiền dự định lót sàn lều bằng thảm nhựa với mức phí 100000 đồng/mét vuông. Khi đó kinh phí cần lót sàn lều là 1056637 đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của đồng/mét vuông).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, một vòm được thiết kế có bề mặt là mặt cầu tâm $I(1;2;20)$, bán kính bằng 50 m và có đáy nằm trên mặt phẳng (Oxy). Chiều cao của vòm là bao nhiêu mét? (biết đơn vị của hệ trục tọa độ là mét)

Trả lời: ………………..

Câu 21. Ericsson Globe (Thuỵ Điển) là toà nhà bán cầu lớn nhất trên thế giới (năm 2020), với hình dạng một quả cầu màu trắng có đường kính 110 m và chiều cao bên trong 85 m, nó có đủ chỗ ngồi cho 16 000 khán giả của các buổi biểu diễn hoà nhạc hoặc 13 850 khán giả của các trận đấu khúc côn cầu trên băng. Giả sử ta biểu diễn mô phỏng của toà nhà Ericsson Globe trong hệ trục toạ độ *Oxyz* bởi một mặt cầu có tâm *I*, đường kính 110 m và *OA* = 85 m như hình vẽ (đơn vị trên trục là mét). Biết phương trình của mặt cầu này có dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, hãy tính giá trị biểu thức $T=a+b+c+R$.



Trả lời: ………………..

Câu 22. Hệ thống định vị toàn cầu GPS là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật trong không gian. Cách thức hoạt động của GPS như sau: Trong cùng một thời điểm, vị trí M của một vật sẽ được xác định bằng 4 vệ tinh cho trước, các vệ tinh này có gắn máy thu tín hiệu, bằng cách so sánh thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận tín hiệu phản hồi thì sẽ xác định được khoảng cách từ các vệ tinh đến vị trí M. Như vậy, vị trí M là giao điểm của 4 mặt cầu có tâm là 4 vệ tinh đã cho. Giả sử trong không gian $Oxyz$, 4 vệ tinh có tọa độ là $A(-1;6;3)$, $B(4;8;1)$, $C(9;6;7)$, $D(-15;18;7)$. Biết khoảng cách từ M đến các vệ tinh lần lượt là $MA=6$, $MB=7$, $MC=12$, $MD=24$. Khi đó tọa độ điểm $M(x_M;y_M;z_M)$. Tính giá trị biểu thức $T=x_M+y_M+z_M$.

Trả lời: ………………..

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-2;1;-4)$. Biết bán kính phủ sóng của trạm là $3\,\text{km}$.

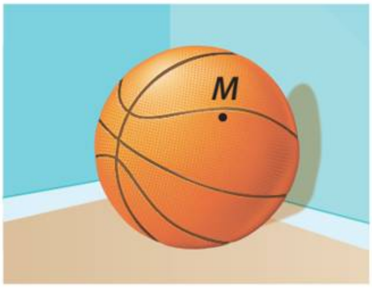
Có 5 người sử dụng điện thoại tại các điểm $A(2;-1;3)$, $B(0;1;-4)$, $C(-2;1;-3)$, $D(0;1;-3)$, $E(-4;-2;1)$. Hỏi trong số 5 người đó, có bao nhiêu người có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

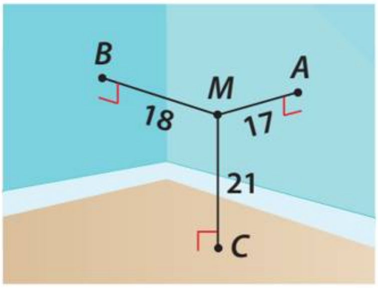
Trả lời: ………………..

Câu 24. Trong hệ trục $Oxyz$ cho trước (đơn vị trên trục là mét), cho một trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600m được đặt ở vị trí $I(200;450;60)$. Tìm giá trị lớn nhất của m (làm tròn đến hàng đơn vị) để một người dùng điện thoại ở vị trí $A(m+100;m+370;0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm nói trên.

Trả lời: ………………..

Câu 25. Một quả bóng rổ được đặt ở một góc của căn phòng hình hộp chữ nhật, sao cho quả bóng chạm và tiếp xúc với hai bức tường và nền nhà của căn phòng đó thì có một điểm trên quả bóng có khoảng cách lần lượt đến hai bức tường và nền nhà là 17 cm, 18 cm, 21 cm (tham khảo hình minh họa). Hỏi độ dài đương kính của quả bóng bằng bao nhiêu cm biết rằng quả bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm? *Kết quả là tròn đến một chữ số thập phân.*





Trả lời: ………………..

CHỦ ĐỀ 2
ỨNG DỤNG MẶT CẦU TRONG THỰC TIỄN

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MỘT ĐIỂM VỚI MẶT CẦU

Cho mặt cầu tâm $S(I;R)$

- Nếu $IM = R$ thì M nằm trên mặt cầu.
- Nếu $IM < R$ thì M nằm trong mặt cầu.
- Nếu $IM > R$ thì M nằm ngoài mặt cầu.

2. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT PHẲNG VỚI MẶT CẦU

Cho mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(x_I;y_I;z_I)$ và bán kính R. Để xét vị trí tương đối của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S), ta làm như sau:

- Tính $d(I;(P)) = \dfrac{|ax_I+by_I+cz_I+d|}{|\vec{n}_{(P)}|}$
- So sánh với bán kính R

  + Nếu $d(I;(P)) > R$ thì mặt phẳng không cắt mặt cầu

  + Nếu $d(I;(P)) = R$ thì mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu

  + Nếu $d(I;(P)) < R$ thì mặt phẳng cắt mặt cầu

3. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI MẶT CẦU

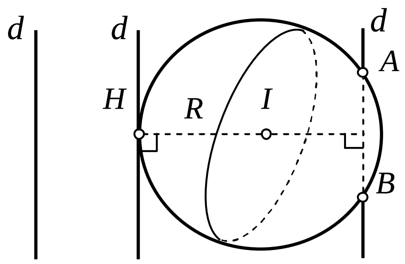
Cho mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R và đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}$, điểm $M \in d$. Để xét vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mặt cầu (S), ta làm như sau:

- Tính $d(I;d) = \dfrac{\left|\left[\vec{u};\overrightarrow{MI}\right]\right|}{|\vec{u}|}$
- So sánh với bán kính R

  + Nếu $d(I;d) > R$ thì đường thẳng d không cắt mặt cầu (S)

  + Nếu $d(I;d) = R$ thì đường thẳng d tiếp xúc với mặt cầu (S) tại H.

  + Nếu $d(I;d) < R$ thì đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B.



PHẦN A

TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, một thiết bị phát sóng đặt tại vị trí $A(2;0;0)$. Vùng phủ sóng của thiết bị có bán kính bằng 1.

a) Hỏi vị trí $M(2;1;1)$ có thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên hay không?

b) Hỏi vị trí $N(2;1;0)$ có thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên hay không?

c) Hỏi vị trí $Q\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ có thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên hay không?

Lời giải

Vùng phủ sóng của thiết bị là khối cầu (S) có tâm $A(2;0;0)$ và bán kính $R=1$.

a) Do $AM=\sqrt{(2-2)^2+(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}>1$ nên vị trí $M(2;1;1)$ không thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên.

b) Do $AN=\sqrt{(2-2)^2+(1-0)^2+(0-0)^2}=1$ nên vị trí $N(2;1;0)$ thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên.

c) Do $AQ=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-2\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}<1$ nên vị trí $Q\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên.

Bài 2. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Vinaphone được đặt ở vị trí $I(1;-2;-3)$ và được thiết kế bán kính phủ sóng là $5000m$.

a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian.

b) Nhà bạn Minh Hiền và bạn Trúc Linh có vị trí tọa độ lần lượt là $M(1;2;0)$ và $N(-3;1;0)$. Hỏi Minh Hiền và Trúc Linh dùng điện thoại tại nhà thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này không?

Lời giải

a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian là:

$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=25$

b)

• Ta có: $IM=\sqrt{(1-1)^2+(2+2)^2+(0+3)^2}=5$

Vì $IM=R=5$ nên điểm $M(1;2;0)$ nằm trên mặt cầu . Vậy bạn Minh Hiền có thể sử dụng dịch vụ của trạm này.

• Ta có: $IN=\sqrt{(-3-1)^2+(1+2)^2+(0-3)^2}=\sqrt{34}>5$

Vì $IN>R$ nên điểm $N(-3;1;0)$ nằm ngoài mặt cầu . Vậy bạn Trúc Linh không thể sử dụng dịch vụ của trạm này.

Bài 3. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng rađa của Nga được đặt trên bán đảo Crimea ở vị trí $I(-2;1;-1)$ và được thiết kế phát hiện máy bay của địch ở khoảng cách tối đa $500km$.

a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của rađa trong không gian.

b) Hai chiếc máy bay do thám của Mỹ và Anh đang bay ở vị trí có tọa độ lần lượt là $M(-200;100;-250)$ và $N(350;-100;300)$. Hỏi rađa của Nga có thể phát hiện ra hai chiếc máy bay do thám của Mỹ và Anh không?

Lời giải

a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của rađa trong không gian là:

$(x+2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=250000$

b)

• Ta có: $IM=\sqrt{(-200+2)^2+(100-1)^2+(-250+1)^2}\approx 335,6<500$

Vì $IM<R$ nên điểm M nằm trong mặt cầu . Vậy chiếc máy bay do thám của Mỹ có thể bị phát hiện bởi trạm rađa này.

• Ta có: $IN = \sqrt{(350+2)^2+(-100-1)^2+(300+1)^2} \approx 474 < 500$

Vì $IN < R$ nên điểm N nằm trong mặt cầu . Vậy chiếc máy bay do thám của Anh có thể bị phát hiện bởi trạm rađa này.

Bài 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(21;35;50)$ và ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng là 4 km. Nếu người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí $I(21;35;50)$ đến vị trí $D(5121;658;0)$. Hãy tìm vị trí cuối cùng trên đoạn ID sao cho người đi biển có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng (kết quả làm tròn tới chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trên biển của ngọn hải đăng là: $(x-21)^2+(y-35)^2+(z-50)^2=4000^2$.

Ta có $\left|\overrightarrow{ID}\right| = \sqrt{26400629} > 4000$ nên điểm D nằm ngoài mặt cầu.

Đường thẳng ID đi qua điểm $I(21;35;50)$ và nhận $\overrightarrow{ID}=(5100;623;-50)$ làm vectơ chỉ phương nên phương trình tham số của ID là $\begin{cases} x = 21+5100t \\ y = 35+623t \\ z = 50-50t \end{cases}$

Giả sử H là điểm cuối cùng trên ID sao cho người đi đường có thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng. Khi đó $IH = R$.

Do $H \in ID \Rightarrow H(21+5100t;35+623t;50-50t) \Rightarrow \overrightarrow{IH}=(5100t;623t;-50t)$.

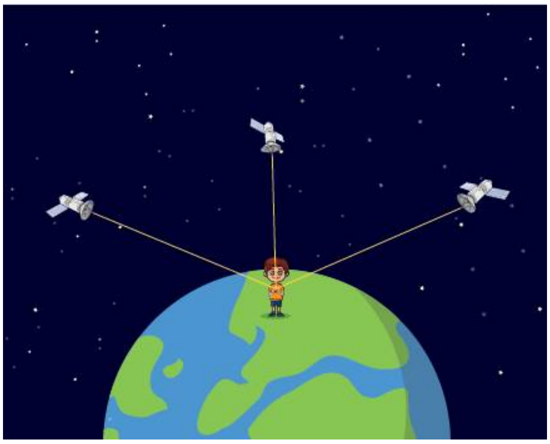
Do $IH = R \Rightarrow \sqrt{(5100t)^2+(623t)^2+(-50t)^2}=4000 \Leftrightarrow \sqrt{26400629t^2}=4000 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \approx 0,78 \\ t \approx -0,78 \end{array}\right.$

Với $t \approx 0,78 \Rightarrow H(3999;520,94;11)$. Nhận thấy $\overrightarrow{IH}$ cùng hướng với $\overrightarrow{ID}$ nên H thuộc đoạn thẳng ID.

Với $t \approx -0,78 \Rightarrow H(-3957;-450,94;89)$. Nhận thấy $\overrightarrow{IH}$ không cùng hướng với $\overrightarrow{ID}$ nên H không thuộc đoạn thẳng ID.

Vậy vị trí cần tìm là $H(3999;520,94;11)$

Bài 5. Giả sử Trái Đất có dạng hình cầu bán kính bằng $6,4.10^6$ m. Bạn Minh Hiền đang đứng trên mặt đất. Có 3 vệ tinh báo về máy chủ tiếp nhận thông tin rằng vệ tinh thứ nhất đang cách Minh Hiền 3.10^6 m, vệ tinh thứ hai đang cách Minh Hiền 4.10^6 m và vệ tinh thứ ba đang cách Minh Hiền 5.10^6 m. Biết rằng trong hệ trục toạ độ *Oxyz* cho trước với *O* là tâm Trái Đất (1 đơn vị $=10^6$ m), tại thời điểm vệ tinh thông báo về máy chủ thì toạ độ của các vệ tinh lần lượt là $I_1(4;4;6)$, $I_2(8;4;3)$ và $I_3(4;9;3)$. Hãy tìm tọa độ vị trí của bạn Minh Hiền (làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Gọi vị trí bạn An là *A* (*x*; *y*; *z*) thì Minh Hiền chính là giao điểm của bốn mặt cầu: Trái Đất và ba mặt cầu tâm lần lượt I_1, I_2, I_3 có bán kính lần lượt là khoảng cách từ các vệ tinh đến Minh Hiền

Ta có phương trình mặt cầu của trái đất là $x^2+y^2+z^2=6,4^2\approx 41$.

Ta có phương trình mặt cầu của vệ tinh thứ nhất là $(x-4)^2+(y-4)^2+(z-6)^2=3^2=9$.

Ta có phương trình mặt cầu của vệ tinh thứ hai là $(x-8)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=4^2=16$.

Ta có phương trình mặt cầu của vệ tinh thứ ba là $(x-4)^2+(y-9)^2+(z-3)^2=5^2=25$.

Ta có hệ $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6,4^2\approx 41 \\ (x-4)^2+(y-4)^2+(z-6)^2=9 \\ (x-8)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=16 \\ (x-4)^2+(y-9)^2+(z-3)^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=6,4^2\approx 41 \\ 8x+8y+12z=100 \\ 16x+8y+6z=114 \\ 8x+18y+6z=122 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=4 \\ z=3 \end{cases}$

Vậy toạ độ bạn Minh Hiền là $A(4;4;3)$ với (1 đơn vị $=10^6$ m).

Bài 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là km), một máy bay đang ở vị trí $A(3;-2;1)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(2;-5;0)$ trên đường băng. Có một đám mây được mô phỏng bởi mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=16$ tại $M\left(\frac{10}{9};-\frac{25}{9};\frac{7}{9}\right)$. Tính độ cao của máy bay khi đi xuyên qua đám mây để hạ cánh (Giả sử mặt đất ở vị trí máy bay đang bay được coi là mặt phẳng mặt phẳng (Oxy))

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;-1)$; $\overline{IM}=\left(-\frac{8}{9};-\frac{16}{9};\frac{16}{9}\right)=-\frac{8}{9}(1;2;-2)$.

Vì (P) tiếp xúc với (S) tại M nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;2;-2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $x-\frac{10}{9}+2\left(y+\frac{25}{9}\right)-2\left(z-\frac{7}{9}\right)=0$ hay $(P):x+2y-2z+6=0$

Giả sử điểm $C(a;b;c)$ là vị trí mà máy bay xuyên qua đám mây để hạ cánh, suy ra $C\in(P)$ và ba điểm A,B,C thẳng hàng, C nằm giữa A và B.

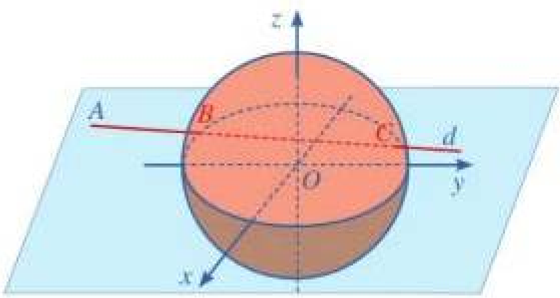
Do đó $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ với $k>0$. Ta có: $\overrightarrow{AC}=(a-3;b+2;c-1),\overrightarrow{AB}=(-1;-3;-1)$.

$$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}a-3=-k\\b+2=-3k\\c-1=-k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3-k\\b=-2-3k\\c=1-k\end{cases}\Rightarrow C(3-k;-2-3k;1-k).$$

$C\in(P)\Rightarrow 3-k+2(-2-3k)-2(1-k)+6=0\Rightarrow k=\frac{3}{5}$ suy ra $C\left(\frac{12}{5};-\frac{19}{5};\frac{2}{5}\right)$.

Vậy tại vị trí C độ cao của máy bay là $\frac{2}{5}$ km.

Bài 7. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu sân bay Cam Ranh – Khánh Hòa ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa $600km$. Một máy bay của hãng Việt Nam Airlines đang ở vị trí A, chuyển động theo đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=-1000+100t\\y=-200+80t\\z=10\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ).



a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian.

b) Xác định tọa độ vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa và tọa độ vị trí mà máy bay bay ra khỏi màn hình ra đa.

c) Tính khoảng cách ngắn nhất giữa máy bay với đài kiểm soát không lưu.

PHẦN B

TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, bề mặt của một quả bóng đá dạng hình cầu có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2z-6y-2=0$. Tìm tọa độ tâm I của quả bóng.

A. $I(2;3;-1)$. **B.** $I(2;3;-1)$. **C.** $I(2;3;-1)$. **D.** $I(2;3;-1)$.

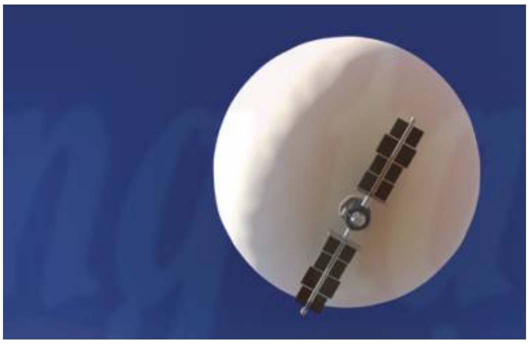
Lời giải

Chọn D.

$x^2+y^2+z^2-4x+2z-6y-2=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=16$

Vậy tọa độ tâm của quả bóng là $I(2;3;-1)$

Câu 2. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, bề mặt của một quả bóng thám không dạng hình cầu có phương trình $x^2+y^2+z^2-200x-600y-4000z+4099900=0$. Tìm tâm và bán kính mặt cầu.



A. Tâm $I(100;300;2000)$, bán kính $r=100$.

B. Tâm $I(-100;-300;-2000)$, bán kính $r=10$.

C. Tâm $I(100;300;2000)$, bán kính $r=10$.

D. Tâm $I(-100;-300;-2000)$, bán kính $r=100$.

Lời giải

Chọn C.

Tâm của mặt cầu là $I(100;300;2000)$ và bán kính $r=\sqrt{100^2+300^2+2000^2-4099900}=10$ m.

Câu 3. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một quả cầu tại sân bay quốc tế Đà Nẵng có phương trình $x^2+y^2+z^2-10x-20z-18y-190=0$. Bán kính của quả cầu là:

A. 2 mét. **B.** 5 mét. **C.** 3 mét. **D.** 4 mét

Lời giải

Chọn D.

$x^2+y^2+z^2-10x-20z-18y-190=0 \Leftrightarrow (x-5)^2+(y-10)^2+(z-9)^2=16$

Vậy bán kính của quả cầu là: 4 mét

Câu 4. Phần mềm mô phỏng thiết bị thám hiểm đại dương có dạng hình cầu trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét). Cho biết tọa độ tâm mặt cầu là $I(360;200;400)$ và bán kính $r=2m$. Viết phương trình mặt cầu.

A. $(x-360)^2+(y-200)^2+(z-400)^2=2$. **B.** $(x-360)^2+(y-200)^2+(z-400)^2=4$.

C. $(x+360)^2+(y+200)^2+(z+400)^2=4$. **D.** $(x+360)^2+(y+200)^2+(z+400)^2=2$.

Lời giải

Chọn B.

Phương trình mặt cầu tâm $I(360;200;400)$ và bán kính $r=2m$ là:

$$(x-360)^2+(y-200)^2+(z-400)^2=4.$$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-6;-1;4)$. Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 2 km. Người sử dụng điện thoại đứng ở điểm nào sau đây thì sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

A. $A(-4;0;2)$ **B.** $B(-5;-2;5)$. **C.** $C(-6;2;2)$ **D.** $D(0;-1;4)$

Lời giải

Chọn B.

Ta có $IA = 3 > 2; IB = \sqrt{3} < 2, IC = \sqrt{13} > 2, ID = 6 > 2$.

Vậy người đứng tại điểm B nằm trong mặt cầu nên sẽ sử dụng được dịch vụ của trạm thu phát sóng điện thoại di động.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-6;-1;4)$. Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 2 km. Người sử dụng điện thoại đứng ở điểm nào sau đây thì **không** sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

A. $A(-5;0;3)$ **B.** $B(-5;-2;5)$. **C.** $C(-6;2;2)$ **D.** $D(-7;-2;3)$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $IA = \sqrt{3} < 2; IB = \sqrt{3} < 2, IC = \sqrt{13} > 2, ID = \sqrt{3} < 2$.

Vậy người đứng tại điểm C nằm ngoài mặt cầu nên sẽ không sử dụng được dịch vụ của trạm thu phát sóng điện thoại di động.

Câu 7. Một vệ tinh quay quanh Trái Đất với độ cao so với mặt đất là 18900 km. Ta xét trong không gian $Oxyz$ với tâm O là tâm Trái Đất, 1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6300 km trên thực tế. Biết bán kính Trái Đất khoảng 6300 km. Phương trình biểu diễn quỹ đạo chuyển động của vệ tinh đó là

A. $x^2+y^2+z^2=4$. **B.** $x^2+y^2+z^2=16$. **C.** $x^2+y^2+z^2=2$. **D.** $x^2+y^2+z^2=5$.

Lời giải

Chọn C.

Khoảng cách từ tâm Trái Đất đến vệ tinh là $18900+6300=25200$ tương ứng bằng 4 đơn vị.

Ta thấy quỹ đạo chuyển động của vệ tinh quanh Trái Đất là một mặt cầu có tâm là tâm Trái Đất có tọa độ là $O(0;0;0)$ và bán kính $R=4$. Do đó phương trình mặt cầu là: $x^2+y^2+z^2=16$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị đo là cm), mặt sàn nhà đa năng thuộc mặt phẳng Oxy. Một quả bóng nằm trên mặt sàn nhà đa năng và có tâm $I(12;20;50)$. Khi đó, mặt ngoài của quả bóng (S) có phương trình là:

A. $(x-12)^2+(y-20)^2+(z-50)^2=12^2$. **B.** $(x+12)^2+(y+20)^2+(z+50)^2=12^2$.

C. $(x-12)^2+(y-20)^2+(z-50)^2=20^2$. **D.** $(x-12)^2+(y-20)^2+(z-50)^2=50^2$.

Lời giải

Chọn D.

Do quả bóng nằm trên mặt sàn nhà đa năng nên mặt ngoài của quả bóng tiếp xúc với mặt phẳng Oxy

Ta có: $d\left(I,(Oxy)\right)=R=50$

Vậy mặt ngoài của quả bóng (S) có phương trình là $(x-12)^2+(y-20)^2+(z-50)^2=50^2$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là km), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(1;5;5)$ như hình vẽ. Ngọn hải đăng được thiết kế với bán kính phủ sáng là 5 km. Một người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí $I(1;5;5)$ đến vị trí $A(7;14;11)$. Điểm nào sau đây mà người đi biển đi qua và vẫn thuộc vùng phủ sáng của ngọn hải đăng?

A. $M(3;8;7)$. **B.** $N(0;4;8)$. **C.** $P(7;3;0)$. **D.** $Q(7;11;3)$.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trong không gian là:

$$(x-1)^2+(y-5)^2+(z-5)^2=25$$

Ta có $\overrightarrow{IM}=(2;3;2)$; $\overrightarrow{IA}=(6;9;6)=3\overrightarrow{IM}$ và $IM=\sqrt{(3-1)^2+(8-5)^2+(7-5)^2}=\sqrt{17}<5$ nên điểm M nằm trong mặt cầu. Vậy người đi biển đi qua điểm M mà vẫn thuộc vùng phủ sáng.

Câu 10. Một máy Rađa có tầm hoạt động với bán kính tối đa là 20 km. Ta xét trong không gian $Oxyz$ với tâm O là vị trí máy Rađa, 1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 10 km trên thực tế. Hỏi trong không gian $Oxyz$ trên, vật thể có tọa độ tương ứng với đáp án nào dưới đây sẽ bị Rađa phát hiện?

A. $M(1;0;2)$. **B.** $N(2;-1;1)$. **C.** $P(1;1;\sqrt{2})$. **D.** $Q(3;0;0)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta thấy quỹ đạo của Rađa là một khối cầu giới hạn bởi mặt cầu (S) có tâm là vị trí máy Rađa có tọa độ là $O(0;0;0)$ và bán kính $R=2$.

Do đó ta có phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=4$.

Vật thể bắt đầu bị phát hiện khi nó nằm trong hoặc trên mặt cầu (S).

Trong 4 đáp án trên ta thấy có đáp án C thỏa mãn phương trình mặt cầu (S) các đáp án còn lại đều nằm ngoài (S).

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Vettel được đặt ở vị trí $I(1;2;1)$ và được thiết kế bán kinh phủ sóng 5000 mét. Nhà thầy Hùng và cô Linh có vị trí tọa độ lần lượt là $A(3;2;-1)$ và $B(4;-3;5)$.

a) Nhà thầy Hùng và cô Linh cách nhau $7,2(km)$ (kết quả làm tròn đến phần chục của kilômét).

b) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian là:

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=5000^2$$

c) Thầy Hùng dùng điện thoại tại nhà thì không thể sử dụng dịch vụ của trạm Vettel này.

d) Cô Linh dùng điện thoại tại nhà thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm Vettel này.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

a) Ta có $A(3;2;-1),B(4;-3;5)\Rightarrow AB=\sqrt{(4-3)^2+(-3-2)^2+(5+1)^2}=\sqrt{52}\approx 7,2(km)$.

b) $5000m=5km$

Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian là:

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$$

c) Do $IA=\sqrt{(3-1)^2+(2-2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{8}<5$ nên điểm $A(2;3;-1)$ nằm trong mặt cầu đó.

Vậy Thầy Hùng có thể sử dụng dịch vụ của trạm này.

d) $IB=\sqrt{(4-1)^2+((-3)-2)^2+(5-1)^2}=\sqrt{50}>5$ nên điểm $B(4;-3;5)$ nằm ngoài mặt cầu đó.

Vậy Cô Linh không thể sử dụng dịch vụ của trạm này.

Câu 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(10;\,20;\,30)$ với bán kính phủ sáng là 3km.

a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là

$$(x-10)^2+(y-20)^2+(z-30)^2=9.$$

b) Người đi biển ở vị trí $A(50;20;0)$ nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

c) Người đi biển ở vị trí $B(4030;\ 50;\ 40)$ không nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

d) Nếu hai người đi biển có thể nhìn thấy ánh sáng của ngọn hải đăng thì khoảng cách giữa hai người đó không quá 6 km.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Mặt cầu (S) tâm $I(10;\ 20;\ 30)$, bán kính $R=3\text{km}=\ 3000\,\text{m}$ có phương trình

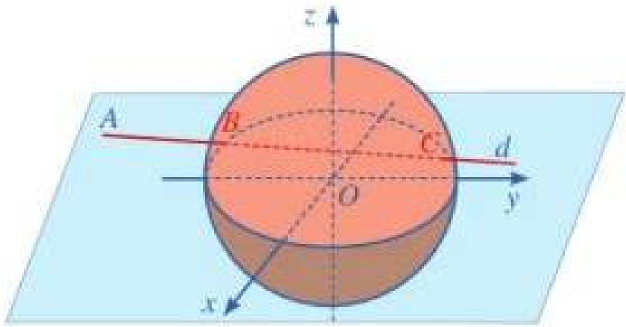
$$(x-10)^2+(y-20)^2+(z-30)^2=3000^2$$

b) Ta có $\overrightarrow{IA}=(40;0;-30)\Rightarrow IA=\sqrt{40^2+0^2+30^2}=50m<R=3000m$ nên điểm A nằm trong mặt cầu (S) nên người đi biển ở vị trí $A(50;20;0)$ nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

c) Sai: Ta có $\overrightarrow{IB}=(4020;30;10)\Rightarrow IB=\sqrt{4020^2+30^2+10^2}\approx 4020{,}12m>R=3000m$ nên điểm B nằm ngoài mặt cầu (S) nên người đi biển ở vị trí $B(4030;\ 50;\ 40)$ không nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

d) Vì bán kính phủ sáng là 3 km nên đường kính phủ sáng là 6 km nên nếu hai người đi biển có thể nhìn thấy ánh sáng của ngọn hải đăng thì hai người đó nằm trong mặt cầu, do đó khoảng cách giữa hai người đó không quá 6 km.

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $O(0;0;0)$, mỗi đơn vị trên trục ứng với 1 km. Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 417 km sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay đang ở vị trí $A(-688;-185;8)$, chuyển động theo theo đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(91;75;0)$ và hướng về đài kiểm soát không lưu.



a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của đài kiểm soát không lưu sân bay là

$$x^2+y^2+z^2=417^2$$

b) Máy bay đang ở vị trí A thì sẽ hiển thị trên màn hình ra đa.

c) Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x=-688+91t \\ y=-185+75t\,(t\in\mathbb{R}) \\ z=8 \end{cases}$.

d) Tọa độ vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa là $(-88;415;8)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của đài kiểm soát không lưu sân bay là

$$x^2+y^2+z^2=417^2$$

b) Ta có:

$O(0;0;0), A(-688;-185;8)\Rightarrow OA=\sqrt{(-688-0)^2+(-185-0)^2+(8-1)^2}=\sqrt{498372}\approx 706>417$

Vậy máy bay đang ở vị trí A thì sẽ không hiển thị trên màn hình ra đa.

c) Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua $A(-688;-185;8)$ và nhận $\vec{u}=(91;75;0)$ làm vectơ chỉ phương là $d:\begin{cases} x=-688+91t \\ y=-185+75t\,(t\in\mathbb{R}) \\ z=8 \end{cases}$.

d) Gọi B là vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa.

Vì $B\in d\Rightarrow B(-688+91t;-185+75t;8)$.

Vì B là vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa nên

$OB=417\Leftrightarrow\sqrt{(-688+91t)^2+(-185+75t)^2+8^2}=417$

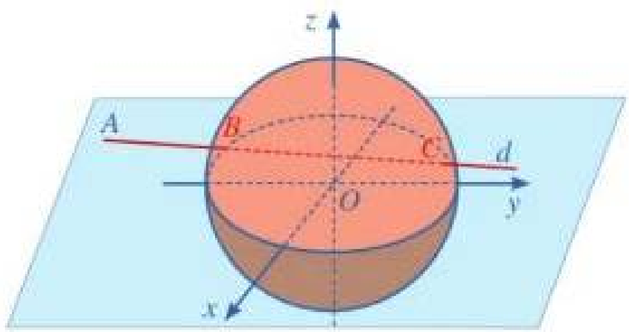
$\Leftrightarrow 13906t^2-152966t+333744=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=8 \end{array}\right.$

Với $t=3\Rightarrow B(-415;40;8)\Rightarrow AB\approx 353,77$ km

Với $t=8 \Rightarrow B(-88;415;8) \Rightarrow AB \approx 848,53$ km

Do $353,77<848,53$ vị trí máy bay xuất hiện sớm nhất là $B(-415;40;8)$.

Câu 14. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu của một sân bay ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa $600km$. Một máy bay đang chuyển động với vận tốc 900 km/h theo đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x=-1000+100t \\ y=-300+80t \\ z=100\sqrt{11} \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ).



a) Ranh giới vùng phát sóng bên ngoài của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu có bán kính bằng $300\,km$.

b) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là $x^2+y^2+z^2=360000$.

c) Máy bay đang chuyển động theo đường thẳng d đến vị trí điểm $M\left(-500;100;100\sqrt{11}\right)$. Vị trí này nằm ngoài vùng kiểm soát không lưu của đài kiểm soát không lưu sân bay.

d) Thời gian kể từ khi đài kiểm soát không lưu phát hiện may bay đến khi máy ra khỏi vùng kiểm soát không lưu là $\frac{4}{3}$ giờ.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Vì đài kiểm soát không lưu của một sân bay ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa 600 km nên ranh giới vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu có bán kính bằng 600 km.

b) Ranh giới vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu tâm $O(0;0;0)$ có bán kính bằng $R=600$ có phương trình là: $x^2+y^2+z^2=360000$

c): Ta có $OM=\sqrt{(-500)^2+(100)^2+\left(100\sqrt{11}\right)^2} \approx 608>600=R$.

Vậy, tại vị trí điểm $M\left(-500;100;100\sqrt{11}\right)$ máy bay nằm ngoài vùng kiểm soát không không lưu của đài kiểm soát không lưu sân bay.

d) Thay $d:\begin{cases}x=-1000+100t\\ y=-300+80t\\ z=100\sqrt{11}\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$ vào phương trình mặt cầu $x^2+y^2+z^2=360000$

$$(100t-1000)^2+(80t-300)^2+\left(100\sqrt{11}\right)^2=360000$$

$$\Leftrightarrow 164t^2-2480t+8400=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=10\Rightarrow B\left(0;500;100\sqrt{11}\right)\\ t=\dfrac{210}{41}\Rightarrow C\left(-\dfrac{20000}{41};\dfrac{4500}{41};100\sqrt{11}\right)\end{array}\right.$$

Quãng đường máy bay di chuyển trong vùng kiểm soát không lưu là:

$$BC=\sqrt{\left(-\frac{20000}{41}\right)^2+\left(\frac{4500}{41}-500\right)^2+\left(100\sqrt{11}-100\sqrt{11}\right)^2}\approx 625\text{ km.}$$

Vậy thời gian máy bay di chuyển theo đường thẳng d và trong phạm vi kiểm soát không lưu của sân bay là: $\dfrac{625}{900}=\dfrac{25}{36}$ giờ.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(1;3;7)$. Trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng là 3 km.

a) Phương trình mặt cầu (S) để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là $(x+1)^2+(y+3)^2+(z+7)^2=9$.

b) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí điểm $A(2;2;7)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

c) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có toạ độ $B(5;6;7)$ thì không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

d) Tính theo đường chim bay, khoảng cách lớn nhất để một người ở vị trí có toạ độ $B(5;6;7)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị kilômét là 8 km.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Phương trình mặt cầu (S) tâm $I(1;3;7)$ bán kính 3 km mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-7)^2=9$.

b) Ta có: $IA=\sqrt{(2-1)^2+(2-3)^2+(7-7)^2}=\sqrt{2}<3$ nên điểm A nằm trong mặt cầu. Vì điểm A nằm trong mặt cầu nên người dùng điện thoại ở vị trí có toạ độ $A(2;2;7)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

c) Ta có: $IB=\sqrt{(5-1)^2+(6-3)^2+(7-7)^2}=5>3$ nên điểm B nằm ngoài mặt cầu. Vậy người dùng điện thoại ở vị trí có toạ độ $B(5;6;7)$ không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

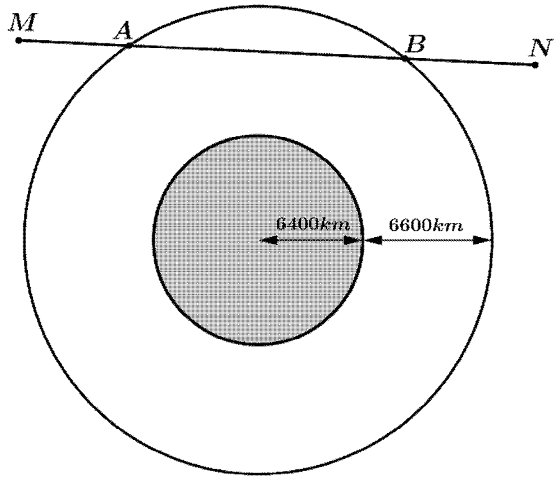
d) Ta có: $\overrightarrow{IB}(4;3;0)$; $IB=\sqrt{(5-1)^2+(6-3)^2+(7-7)^2}=5>3$ nên điểm B nằm ngoài mặt cầu. Phương trình đường thẳng BI dạng: $\begin{cases} x=1+4t \\ y=3+3t \\ z=7 \end{cases}$.

Gọi mặt cầu $(S)\cap BI\equiv E$ suy ra tọa độ E là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x=1+4t \\ y=3+3t \\ z=7 \\ (x-1)^2+(y-3)^2+(z-7)^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=\dfrac{3}{5} \\ x=\dfrac{17}{5} \\ y=\dfrac{24}{5} \\ z=7 \end{cases} \Rightarrow E\left(\dfrac{17}{5};\dfrac{24}{5};7\right) \Rightarrow EB\approx 1{,}7 \\ \begin{cases} t=-\dfrac{3}{5} \\ x=-\dfrac{7}{5} \\ y=\dfrac{6}{5} \\ z=7 \end{cases} \Rightarrow E\left(-\dfrac{7}{5};\dfrac{6}{5};7\right) \Rightarrow EB=8 \end{array}\right.$$

Vậy khoảng cách lớn nhất để một người ở vị trí có toạ độ $B(5;6;7)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị kilômét là 8 km.

Câu 16. Các thiên thạch có đường kính lớn hơn 140 m và có thể lại gần Trái Đất ở khoảng cách nhỏ hơn 7 500 000 km được coi là những vật thể có khả năng va chạm gây nguy hiểm cho Trái Đất. Để theo dõi những thiên thạch này, người ta đã thiết lập các trạm quan sát các vật thể bay gần Trái Đất. Giả sử có một hệ thống quan sát có khả năng theo dõi các vật thể ở độ cao không vượt quá 6 600 km so với mực nước biển. Coi Trái Đất là khối cầu có bán kính 6 400 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian có gốc O tại tâm Trái Đất và đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 1000 km. Một thiên thạch (coi như một hạt) chuyển động với tốc độ không đổi theo một đường thẳng từ điểm $M(6;20;0)$ đến điểm $N(-6;-12;16)$.



a) Đường thẳng MN có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 6+3t \\ y = 20+8t \\ z = -4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

b) Vị trí đầu tiên thiên thạch di chuyển vào phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là điểm $A(-3;-4;12)$.

c) Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng mà thiên thạch di chuyển trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 18 900 km (kết quả làm tròn đến hàng trăm theo đơn vị km).

d) Nếu thời gian di chuyển của thiên thạch trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 3 phút thì thời gian nó di chuyển từ M đến N là 10 phút.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Vectơ chỉ phương của đường thẳng MN là $\overrightarrow{MN} = (-12;-32;16) = -4(3;8;-4)$.

Phương trình tham số của đường thẳng MN là: $\begin{cases} x = 6+3t \\ y = 20+8t \\ z = -4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

b) Để tìm vị trí đầu tiên thiên thạch di chuyển vào phạm vi theo dõi, ta cần tìm điểm giao của đường thẳng MN với mặt cầu có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R = 6,4+6,6 = 13$

Phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 = 13^2$.

Thay $x = 6+3t$; $y = 20+8t$ và $z = -4t$ vào phương trình mặt cầu ta được:

$(6+3t)^2 + (20+8t)^2 + (-4t)^2 = 13^2 \Leftrightarrow 89t^2 + 356t + 267 = 0$

Giải phương trình ta tìm được $t = -3$ hoặc $t = -1$.

Thay $t=-3$ và $t=-1$ vào phương trình tham số của đường thẳng MN ta được hai giao điểm của MN và mặt cầu là $(-3;-4;12)$ và $(3;12;4)$. Nhận thấy từ M đến N thì hoành độ có xu hương giảm dần nên điểm $A(3;12;4)$ sai.

c) Ta có $B(-3;-4;12)$

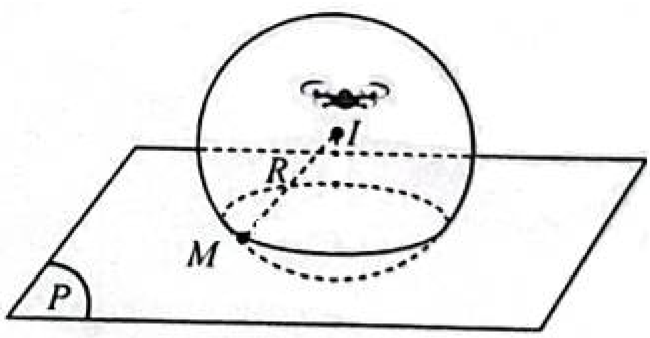
Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng là AB:

$AB=\sqrt{(-3-3)^2+(-4-12)^2+(12-4)^2}=2\sqrt{89}$ tương đương với $\approx 18900\,\text{km}$.

d) Thời gian thiên thạch di chuyển từ M đến N là:

$MN=\sqrt{(6+6)^2+(-12-20)^2+(16-0)^2}=4\sqrt{89}=2AB$ nên do đó $t=\dfrac{MN}{AB}.3\approx 6$ (phút).

Câu 17. Một khu vực đã được thiết lập một hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét). Một flycam đang phát sóng wifi bao phủ một vùng không gian bên trong mặt cầu có phương trình $(S):(x-30)^2+(y-20)^2+(z-10)^2=900$. Bạn Trúc Linh đang sử dụng sử dụng máy tính tại điểm M nằm trên đường tròn (C) là giao của mặt cầu (S) và mặt đất. Biết mặt đất bằng phẳng và có phương trình $(P):z=0$.



a) Mặt cầu (S) có toạ độ tâm và bán kính là $I(-30;-20;-10)$, $R=30(m)$.

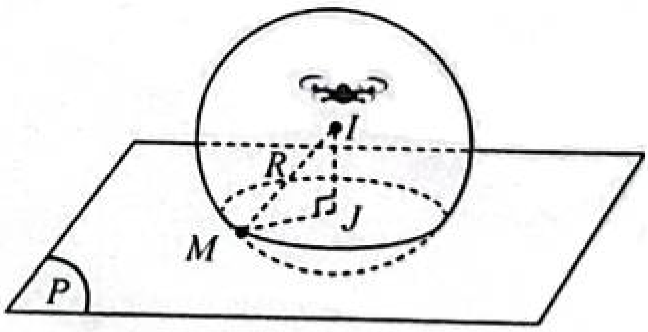
b) Flycam cách mặt đất 10 mét.

c) Khoảng cách từ bạn Trúc Linh đến tâm của đường tròn (C) là $14,14$ mét (kết quả làm tròn đến hai chữ số hàng thập phân của mét).

d) Đường tròn (C) có toạ độ tâm là $(30;20;0)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**



a) Mặt cầu (S) có tâm $I(30;20;10)$ và có bán kính $R=30(m)$

b) Khoảng cách Flycam đến mặt đất chính là khoảng cách từ tâm I đến $(P): z=0$

Do đó: $d(I,(P))=10(m)$

c) Gọi J là tâm của đường tròn (C). Khoảng cách từ bạn Trúc Linh đến tâm của đường tròn (C) chính là MJ

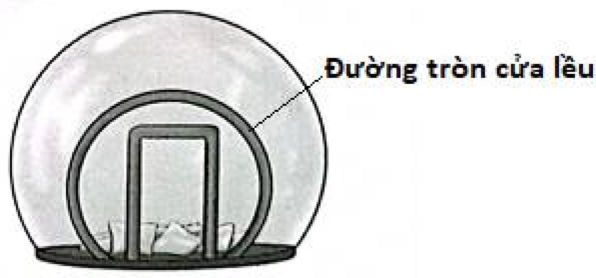
Ta có: $MJ^2=\sqrt{R^2-IJ^2}=\sqrt{R^2-\left[d(I,(P))\right]^2}=\sqrt{900-100}=10\sqrt{2}\approx 14,14(m)$

d) Gọi J là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Ta có: $J\in(P)\Rightarrow J(30;20;0)$

Vậy đường tròn (C) có toạ độ tâm là $J(30;20;0)$

Câu 18. Nhân dịp 26-3, lớp 12A thiết kế một lều cắm trại có dạng là một phần mặt cầu và cửa lều là một đường tròn bằng phần mềm 3D trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (như hình vẽ). Biết bề mặt của lều là mặt cầu (S) có tâm $I(4;4;1)$, bán kính $R=4$ và mặt phẳng chứa cửa lều là $(P): y=3$.



a) Phương trình bề mặt của lều là $(x-4)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=16$.

b) Đường thẳng đi qua tâm I và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là $\begin{cases} x=4 \\ y=4+t \\ z=1-3t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

c) Tâm của đường tròn cửa lều có toạ độ là $(3;3;2)$.

d) Bán kính đường tròn cửa lều là $\sqrt{15}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Phương trình bề mặt của lều là mặt cầu (S) có tâm $I(4;4;1)$ và có bán kính $R=4$

$(x-4)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=16$

b) Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (P). Ta có vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}_d=(0;1;0)$,

do đó phương trình đường thẳng d là: $\begin{cases} x=4 \\ y=4+t \\ z=1 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

c) d) Gọi $M(4;4+t;1)$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

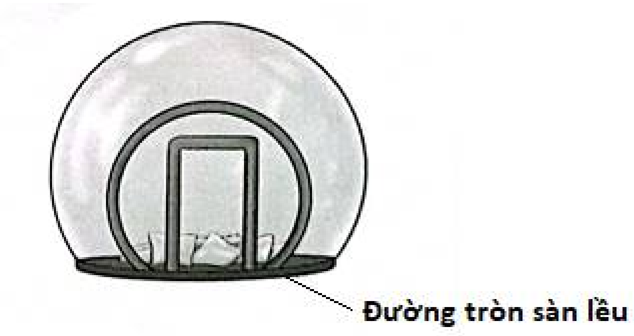
Ta có: $M\in(P)\Rightarrow 4+t=3\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow M(4;3;1)$

Do đó: $IM=\sqrt{(4-4)^2+(3-4)^2+(1-1)^2}=1$

Bán kính đường tròn cửa lều là $r=\sqrt{R^2-IM^2}=\sqrt{16-1}=\sqrt{15}$

Vậy đường tròn cửa lều có tâm $M(4;3;1)$ và bán kính $r=\sqrt{15}$

Câu 19. Bạn Minh Hiền thiết kế một lều cắm trại có dạng là một phần mặt cầu và sàn lều là một đường tròn bằng phần mềm 3D trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục là mét). Biết bề mặt của lều là mặt cầu (S) có tâm $I(4;3;1)$, bán kính $R=3$ và mặt phẳng chứa sàn lều là $(Q): z=2$.



a) Phương trình bề mặt của lều là $(x-4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=3$.

b) Đường thẳng đi qua tâm I và vuông góc với mặt phẳng (Q) có phương trình là $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \\ z=1+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.

c) Tâm của đường tròn cửa lều có toạ độ là $(3;4;2)$.

d) Bạn Minh Hiền dự định lót sàn lều bằng thảm nhựa với mức phí 100000 đồng/mét vuông. Khi đó kinh phí cần lót sàn lều là 1056637 đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của đồng/mét vuông).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Phương trình bề mặt của lều là mặt cầu (S) có tâm $I(4;3;1)$ và có bán kính $R=3$

$(x-4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9$

b) Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (Q). Ta có vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}_d=(0;0;1)$,

do đó phương trình đường thẳng d là: $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \\ z=1+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

c) Gọi $M(4;3;1+t)$ là hình chiếu vuông góc của I trên (Q).

Ta có: $M\in(P)\Rightarrow 1+t=2 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow M(4;3;2)$

Vậy đường tròn sàn lều có tâm $M(4;3;1)$

d) Ta có: $IM=\sqrt{(4-4)^2+(3-3)^2+(2-1)^2}=1$

Bán kính đường tròn sàn lều là $r=\sqrt{R^2-IM^2}=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$

Diện tích đường tròn sàn lều là $S=\pi r^2=\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2=8\pi\left(m^2\right)$

Kinh phí cần lót sàn lều là $8\pi.50000\approx 1256637$ đồng/mét vuông

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, một vòm được thiết kế có bề mặt là mặt cầu tâm $I(1;2;20)$, bán kính bằng 50 m và có đáy nằm trên mặt phẳng (Oxy). Chiều cao của vòm là bao nhiêu mét? (biết đơn vị của hệ trục tọa độ là mét)

Trả lời: ………………..

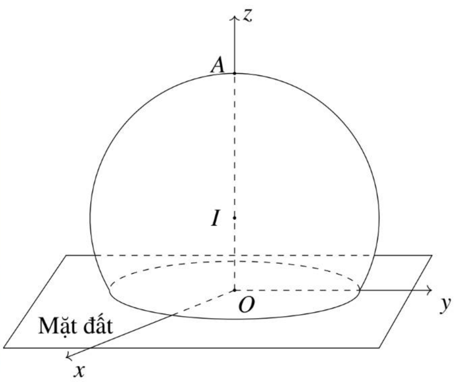
Lời giải

Đáp án: 70

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (Oxy) là 20 m.

Vậy chiều cao của vòm là $20+50=70$ m.

Câu 21. Ericsson Globe (Thuỵ Điển) là toà nhà bán cầu lớn nhất trên thế giới (năm 2020), với hình dạng một quả cầu màu trắng có đường kính 110 m và chiều cao bên trong 85 m, nó có đủ chỗ ngồi cho 16 000 khán giả của các buổi biểu diễn hoà nhạc hoặc 13 850 khán giả của các trận đấu khúc côn cầu trên băng. Giả sử ta biểu diễn mô phỏng của toà nhà Ericsson Globe trong hệ trục toạ độ *Oxyz* bởi một mặt cầu có tâm *I*, đường kính 110 m và *OA* = 85 m như hình vẽ (đơn vị trên trục là mét). Biết phương trình của mặt cầu này có dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, hãy tính giá trị biểu thức $T=a+b+c+R$.



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 85

Theo giả thiết đường kính 110 m nên bán kính $R=55$m.

Ta có $OI=OA-IA=85-55=30$ suy ra $I(0;0;30)$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $x^2+y^2+(z-30)^2=55^2$

$\Rightarrow T=a+b+c+R=85$

Câu 22. Hệ thống định vị toàn cầu GPS là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật trong không gian. Cách thức hoạt động của GPS như sau: Trong cùng một thời điểm, vị trí M của một vật sẽ được xác định bằng 4 vệ tinh cho trước, các vệ tinh này có gắn máy thu tín hiệu, bằng cách so sánh thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận tín hiệu phản hồi thì sẽ xác định được khoảng cách từ các vệ tinh đến vị trí M. Như vậy, vị trí M là giao điểm của 4 mặt cầu có tâm là 4 vệ tinh đã cho. Giả sử trong không gian $Oxyz$, 4 vệ tinh có tọa độ là $A(-1;6;3)$, $B(4;8;1)$, $C(9;6;7)$, $D(-15;18;7)$. Biết khoảng cách từ $M(x_M;y_M;z_M)$ đến các vệ tinh lần lượt là $MA=6$, $MB=7$, $MC=12$, $MD=24$. Tính giá trị biểu thức $T=x_M+y_M+z_M$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Gọi $M(a;b;c)$. Khi đó ta có:

$(a+1)^2+(b-6)^2+(c-3)^2=36 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2a-12b-6c+10=0 \quad (1)$

$(a-4)^2+(b-8)^2+(c-1)^2=49 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-8a-16b-2c+32=0 \quad (2)$

$(a-9)^2+(b-6)^2+(c-7)^2=144 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-18a-12b-14c+22=0 \quad (3)$

$(a+15)^2+(b-18)^2+(c-7)^2=576 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+30a-36b-14c+22=0 \quad (4)$

Giải hệ gồm 4 phương trình trên ta được $a=1;b=2;c=-1$ nên $M(1;2;-1)$.

Vậy $T=1+2+(-1)=2$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-2;1;-4)$. Biết bán kính phủ sóng của trạm là 3 km.

Có 5 người sử dụng điện thoại tại các điểm $A(2;-1;3)$, $B(0;1;-4)$, $C(-2;1;-3)$, $D(0;1;-3)$, $E(-4;-2;1)$. Hỏi trong số 5 người đó, có bao nhiêu người có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

Ta có:

$IA=\sqrt{4^2+(-2)^2+7^2}=\sqrt{69}>3$

$IB=\sqrt{2^2+0^2+0^2}=2<3$.

$IC=\sqrt{0^2+0^2+1^1}=1<3$

$ID=\sqrt{2^2+0^2+1^2}=\sqrt{5}<3$

$IE=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+5^2}=\sqrt{38}>3$.

Vậy có 3 người có thể sử dụng dịch vụ của trạm nói trên.

Câu 24. Trong hệ trục $Oxyz$ cho trước (đơn vị trên trục là mét), cho một trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600m được đặt ở vị trí $I(200;450;60)$. Tìm giá trị lớn nhất của m (làm tròn đến hàng đơn vị) để một người dùng điện thoại ở vị trí $A(m+100;m+370;0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm nói trên.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 512

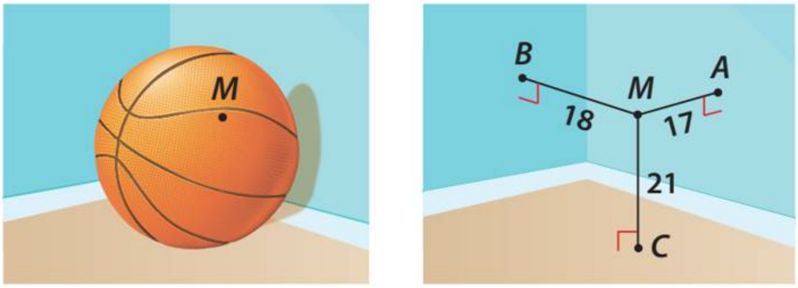
Để một người dùng điện thoại ở vị trí $A(m+100;m+370;0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600m được đặt ở vị trí $I(200;450;60)$ thì

$IA\le 600 \Leftrightarrow (m-100)^2+(m-80)^2+(-60)^2\le 600^2$

$\Leftrightarrow 2m^2-360m-340000\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{180-\sqrt{712400}}{2}\le m\le \dfrac{180+\sqrt{712400}}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của m là $\dfrac{180+\sqrt{712400}}{2} \approx 512$.

Câu 25. Một quả bóng rổ được đặt ở một góc của căn phòng hình hộp chữ nhật, sao cho quả bóng chạm và tiếp xúc với hai bức tường và nền nhà của căn phòng đó thì có một điểm trên quả bóng có khoảng cách lần lượt đến hai bức tường và nền nhà là 17 cm, 18 cm, 21 cm (tham khảo hình minh họa). Hỏi độ dài đường kính của quả bóng bằng bao nhiêu cm biết rằng quả bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm? *Kết quả là tròn đến một chữ số thập phân.*



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $23,9$

Ta đặt hệ trục vào căn phòng sao cho có hai bức tường là mặt $(Oxz),(Oyz)$, và nền là (Oxy).

Vậy bài toán dẫn đến việc tìm đường kính của mặt cầu tiếp xúc với 3 mặt phẳng toạ độ và chứa điểm $M(17;18;21)$.

Ta có thể gọi phương trình mặt cầu là $(S):(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2$, với $a>0$ (do mặt cầu tiếp xúc với các mặt phẳng toạ độ nên $a=b=c=R$).

Do $M(17;18;21)\in(S)$ nên $(17-a)^2+(18-a)^2+(21-a)^2=a^2$

$$\Rightarrow 2a^2-112a+1054=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=28-\sqrt{257} \\ a=28+\sqrt{257} \end{array}\right..$$

Vì quả bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm nên $a=28-\sqrt{257}$ thỏa.

Vậy đường kính quả bóng bằng $2a=56-2\sqrt{257}\approx 23,9(\text{cm})$.