

Câu I (4,0 điểm).

1. Rút gọn biểu thức $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{2(1-x)}{\sqrt{x}-1}$, với $x > 0$ và $x \neq 1$.

2. Cho ba số a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 9$; $a + b + c = 59$ và $abc = 4$. Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{1}{\sqrt{ab} + \sqrt{c} - 8} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{a} - 8} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{b} - 8}$.

Câu II (2,0 điểm). Trong một hộp có chứa 2025 viên bi có cùng kích thước và khối lượng (mỗi viên bi chỉ có đúng một màu) trong đó có 750 viên bi màu đỏ, 700 viên bi màu xanh, 502 viên bi màu tím và 73 viên bi còn lại là các viên bi màu vàng hoặc màu trắng (mỗi màu có ít nhất 1 viên bi).

1. Lấy ngẫu nhiên 1 viên bi trong hộp. Tính xác suất để lấy được viên bi màu xanh.

2. Người ta lấy ra từ hộp 134 viên bi bất kì. Chứng minh rằng trong số các viên bi vừa lấy ra có ít nhất 21 viên bi cùng màu.

Câu III (3,0 điểm).

1. Giải phương trình $x^2 + \sqrt{x+2025} = x + \sqrt{x^2 + 2025}$.

2. Cho phương trình $3x^2 + 2(2m^2 - 4m + 3)x + 1 - m = 0$ (m là tham số). Tìm điều kiện của tham số m để phương trình đã cho có 2 nghiệm trái dấu. Khi đó, chứng minh giá trị tuyệt đối của nghiệm âm lớn hơn nghiệm dương.

Câu IV (2,0 điểm). Lúc 8 giờ sáng, một người đi xe đạp từ địa điểm A đến địa điểm B với khoảng cách là 15 km . Sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường, do xe bị hỏng nên người đó phải dừng lại sửa xe mất 30 phút rồi đi tiếp trên đoạn đường còn lại với vận tốc kém vận tốc lúc đầu là 5 km/h . Khi đến B , người đó nghỉ lại 20 phút rồi trở về A với vận tốc bằng một nửa vận tốc đi trên $\frac{1}{3}$ quãng đường AB đầu tiên. Biết người đó trở về A lúc 11 giờ 15 phút sáng cùng ngày. Hỏi xe đạp hỏng lúc mấy giờ?

Câu V (2,0 điểm). Cho 2 số tự nhiên a, b thỏa mãn: $\frac{a^3}{a+b}$ và $\frac{b^3}{a+b}$ đều là số nguyên tố. Chứng minh rằng $a^2 + 3ab + 3a + b + 1$ là số chính phương.

Câu VI (7,0 điểm).

1. Cho đường tròn tâm O bán kính R và điểm P cố định ($0 < OP < R$). Hai dây cung AB và CD của (O) thay đổi sao cho AB vuông góc với CD tại P . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AC, AD . Đường thẳng FP cắt BC tại N .

a) Chứng minh $\widehat{EOF} = \widehat{CBD}$ và $PN^2 = BN \cdot NC$.

b) Chứng minh F luôn nằm trên một đường tròn cố định.

c) Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{AC \cdot AD + BC \cdot BD}{AC \cdot BC + AD \cdot BD}$, biết $AB = R\sqrt{3}, OP = \frac{R}{2}$.

2. Cho tam giác ABC , điểm M thay đổi nằm trong tam giác ABC và D, E, F là hình chiếu của điểm M lần lượt trên BC, CA, AB . Gọi a, b, c, x, y, z lần lượt là độ dài các đoạn thẳng BC, CA, AB, MD, ME, MF . Tìm vị trí của điểm M để biểu thức $P = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

===== HẾT =====