TRƯỜNG THCS NAM TỪ LIÊM	**ĐỀ KIỂM TRA ĐỘI TUYỂN LẦN I**
TỔ KHOA HỌC TỰ NHIÊN	**NĂM HỌC 2025 - 2026**
	Môn: TOÁN 9
ĐỀ CHÍNH THỨC	*Thời gian làm bài: 150 phút*

Bài I (*5,0 điểm*).

1) Giải phương trình sau $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{5}{16}$.

2) Cho a,b,c là các số thực khác 0 thỏa mãn các điều kiện

$$(a+1)^2=b^2+1; \qquad (b+1)^2=c^2+1; \qquad (c+1)^2=a^2+1.$$

Tính giá trị của biểu thức $P=(a-b)(b-c)(c-a)$.

Bài II (*5,0 điểm*).

1) Cho các số nguyên a,b thỏa mãn $a^2+ab+4b^2$ chia hết cho 9.

Chứng minh $a+2b$ chia hết cho 3 và $a^2-ab+4b^2$ chia hết cho 9.

2) Cho hai số nguyên dương m,n và số nguyên tố p thoả mãn $p=\frac{m+n}{2}+5\sqrt{mn}$.

Chứng minh $p+12m$ và $p+12n$ là các số chính phương.

Bài III (*2,0 điểm*).

1) Gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất. Giả sử xúc xắc xuất hiện mặt b chấm.

Tính xác suất để phương trình $x^2+bx+3=0$ có hai nghiệm phân biệt.

2) Với các số thực a,b,c không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{2}{1+4ca}$.

Bài IV (*6,0 điểm*). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB<AC$. Gọi I là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác ABC. Điểm P thuộc cạnh AB sao cho đường thẳng IP vuông góc với đường thẳng IB.

1) Chứng minh $IA\cdot IP=IC\cdot PA$.

2) Gọi K là điểm sao cho A là trung điểm của IK.

Chứng minh tam giác APK đồng dạng với tam giác IPC.

3) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng IC và IP; Q là chân đường vuông góc kẻ từ I xuống PC. Chứng minh AQ đi qua trung điểm của đoạn thẳng MN.

Bài V (*2,0 điểm*).

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ sao cho x, y nguyên tố cùng nhau và

$$4(x^3-x)=y^3-y.$$

2) Trong một bảng ô vuông kích thước 100×100 ta điền vào mỗi ô một dấu $(+)$. Ta tiến hành biến đổi như sau: mỗi lần đổi ta đổi dấu tất cả các ô trong cùng một hàng hoặc trong cùng một cột (dấu $(+)$ thành $(-)$ và ngược lại). Hỏi sau một số hữu hạn bước biến đổi như trên, trên bảng có đúng 2026 dấu $(-)$ hay không? Vì sao?

----------------**HẾT**----------------

Lưu ý: *- Thí sinh KHÔNG được sử dụng tài liệu và máy tính bỏ túi khi làm bài.*

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.......................................Số báo danh:....................................

Họ, tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 1: Họ, tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 2:

Chương 1

CHỌN ĐỘI TUYỂN THCS NAM TỪ LIÊM

Bài tập 1 **(LIM Olympic - THCS Nam Từ Liêm - Bài 1)**

1. Giải phương trình sau $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}=\dfrac{5}{16}$
2. Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn các điều kiện

$$(a+1)^2=b^2+1;\ (b+1)^2=c^2+1;\ (c+1)^2=a^2+1.$$

Tính giá trị của biểu thức $P=(a-b)(b-c)(c-a)$.

Lời giải.

1. Phương trình đã cho tương đương $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}\right)^2+\dfrac{2}{x(x+2)}=\dfrac{5}{16}$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{2}{x^2+2x}\right)^2+\dfrac{2}{x^2+2x}=\dfrac{5}{16}.$

Đặt $\dfrac{2}{x^2+2x}=t$, phương trình trở thành $t^2+t-\dfrac{5}{16}=0\Leftrightarrow\left(x+\dfrac{5}{4}\right)\left(x-\dfrac{1}{4}\right)=0$

- Với $t=\dfrac{1}{4}\Rightarrow x^2+2x-8=0\Rightarrow x=2$ hoặc $x=-4$.
- Với $t=\dfrac{-5}{4}\Rightarrow 5x^2+10x+8=0\Rightarrow 5(x+1)^2+3=0$ (Vô lý).

Vậy phương trình có nghiệm $x=2$ hoặc $x=-4$.

2. Từ các đẳng thức đã cho ta có $\begin{cases}b^2-a^2=2a\\c^2-b^2=2b\\a^2-c^2=2c\end{cases}$

Cộng vế với vế ta được $2(a+b+c)=0$ hay $a+b+c=0$.

Từ đó ta có $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=-abc$.

Ta cũng có $\begin{cases}(b-a)(b+a)=2a\\(c-b)(c+b)=2b\\(a-c)(a+c)=2c\end{cases}$

Ta có nhận xét nếu 2 trong ba số bằng nhau hoặc tổng của hai trong ba số bằng 0 thì cả ba số bằng nhau và bằng 0 (vô lý) nên nhân vế với vế các biểu thức ta có:

$(b-a)(c-b)(a-c)(a+b)(b+c)(c+a)=8abc\Rightarrow(a-b)(b-c)(c-a).(abc)=8abc\Rightarrow P=8.$

Bài tập 2 **(LIM Olympic - THCS Nam Từ Liêm - Bài 2)**

(1) Cho các số nguyên a, b thỏa mãn $a^2 + ab + 4b^2$ chia hết cho 9.

Chứng minh $a + 2b$ chia hết cho 3 và $a^2 - ab + 4b^2$ chia hết cho 9.

(2) Cho hai số nguyên dương m, n và số nguyên tố p thoả mãn $p = \dfrac{m+n}{2} + 5\sqrt{mn}$.

Chứng minh $p + 12m$ và $p + 12n$ là các số chính phương.

Lời giải.

(1) Ta có $a^2 + ab + 4b^2 \vdots 9$ nên $(a+2b)^2 - 3ab \vdots 9 \vdots 3$, mà $3ab$ chia hết cho 3 nên $(a+2b)^2$ chia hết cho 3 nên $a + 2b$ chia hết cho 3 nên $(a+2b)^2$ chia hết cho 9. Mà $(a+2b)^2 - 3ab \vdots 9$ nên $3ab$ chia hết cho 9 nên ab chia hết cho 3.

Từ đó ta có $ab \vdots 3$ và $a + 2b \vdots 3$.

- Với $a \vdots 3$, từ $a + 2b \vdots 3 \Rightarrow b \vdots 3 \Rightarrow a^2 - ab + 4b^2 \vdots 9$.
- Với $b \vdots 3$, từ $a + 2b \vdots 3 \Rightarrow a \vdots 3 \Rightarrow a^2 - ab + 4b^2 \vdots 9$.

Vậy $a + 2b$ chia hết cho 3 và $a^2 - ab + 4b^2$ chia hết cho 9.

(2) Từ giả thiết ta có $2p = m + n + 10\sqrt{mn}$ (*).

Do m, n nguyên dương và p là số nguyên tố nên $10\sqrt{mn} \in \mathbb{Z} \Rightarrow mn$ là số chính phương.

Đặt $(m, n) = d \Rightarrow m \vdots d,\ n \vdots d \Rightarrow \sqrt{mn} \vdots d \Rightarrow 2p \vdots d \Rightarrow d \in \{1, 2, p, 2p\}$.

- Với $d = 1 \Rightarrow (m, n) = 1$, mà mn là số chính phương nên $m = x^2,\ n = y^2$ với x, y nguyên dương. Từ (*) ta có $2p = x^2 + y^2 + 10xy \Rightarrow x^2 + y^2$ chẵn nên x, y cùng tính chẵn lẻ.

  Ta dễ thấy $p > 2$ do $10xy > 4$, khi đó ta có $2p = (x+y)^2 + 8xy$ với $2p$ không chia hết cho 4 mà $(x+y)^2 + 8xy$ luôn chia hết cho 4 với x, y cùng tính chẵn lẻ. Vậy trường hợp này không cho ta nghiệm x, y.
- Với $d = 2 \Rightarrow (m, n) = 2$, mà mn là số chính phương nên $m = 2x^2,\ n = 2y^2$ với x, y nguyên dương. Từ (*) ta có $p = x^2 + y^2 + 10xy$.

  Khi đó ta có $p + 12m = 25x^2 + 10xy + y^2 = (5x + y)^2$ và $p + 12n = x^2 + 10xy + 25y^2 = (x + 5y)^2$ là các số chính phương.
- Với $d = p \Rightarrow (m, n) = p$, mà mn là số chính phương nên $m = px^2,\ n = py^2$ với x, y nguyên dương. Từ (*) ta có $2 = x^2 + y^2 + 10xy$ (Vô lý do $10xy > 2$).
- Với $d = 2p \Rightarrow (m, n) = 2p$, mà mn là số chính phương nên $m = 2px^2,\ n = 2py^2$ với x, y nguyên dương. Từ (*) ta có $1 = x^2 + y^2 + 10xy$ (Vô lý do $10xy > 1$).

Vậy $p + 12m$ và $p + 12n$ là các số chính phương.

Bài tập 3 **(LIM Olympic - THCS Nam Từ Liêm - Bài 3)**

(1) Gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất. Giả sử xúc xắc xuất hiện mặt b chấm. Tính xác suất để phương trình $x^2 + bx + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

(2) Với các số thực a, b, c không âm thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{1+ab} + \dfrac{1}{1+bc} + \dfrac{2}{1+4ca}$.

Lời giải.

(1) Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 6$.

Xét biến cố A : Gieo xúc xắc xuất hiện mặt b chấm sao cho phương trình $x^2 + bx + 3$ có hai nghiệm phân biệt.

Để phương trình $x^2 + bx + 3$ có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta = b^2 - 12 > 0$ hay $b^2 > 12$. Mà $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ nên lúc này b chỉ có thể có các giá trị là $4, 5, 6$. Suy ra nên số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $n(A) = 3$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

(2)

- Do $ab, bc, ca \geq 0$ nên $\dfrac{1}{1+ab} + \dfrac{1}{1+bc} + \dfrac{2}{1+4ac} \leq 1 + 1 + 2$

  $\Rightarrow P \leq 4$. Dấu "=" xảy ra tại $a = c = 0, b = 1$.

- Áp dụng bất đẳng thức phụ $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \geq \dfrac{4}{x+y}$ và $4xy \leq (x+y)^2$ ta có

  $$P = \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{2}{1+4ca} \geq \frac{4}{2+b(a+c)} + \frac{2}{1+(a+c)^2} = \frac{4}{2+b(1-b)} + \frac{2}{1+(1-b)^2}.$$

  Giả sử $b = min\{a, b, c\} \Rightarrow b \leq \dfrac{1}{3}$.

  Ta chứng minh $P \geq 3$

  $$\Leftrightarrow \frac{4}{2+b(1-b)} + \frac{2}{1+(1-b)^2} \geq 3$$

  $$\Leftrightarrow \frac{b^2(3b^2 - 9b + 8)}{(2-b)(b+1)(b^2 - 2b + 2)} \geq 0 \text{ (luôn đúng do } 0 \leq b \leq \frac{1}{3})$$

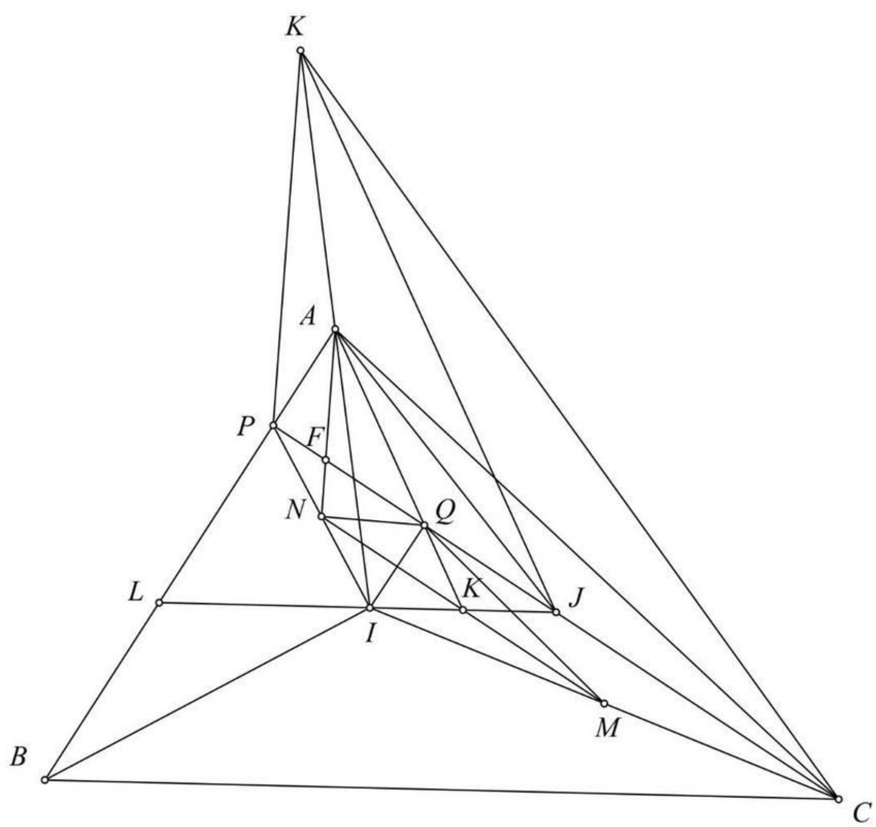
  Vậy $P \geq 3$. Dấu "=" xảy ra tại $a = c = \dfrac{1}{2}, b = 0$.

Bài tập 4 **(LIM Olympic - THCS Nam Từ Liêm - Bài 4)**

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$. Gọi I là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác ABC. Điểm P thuộc cạnh AB sao cho đường thẳng IP vuông góc với đường thẳng IB.

1. Chứng minh $IA \cdot IP = IC \cdot PA$.
2. Gọi K là điểm sao cho A là trung điểm của IK. Chứng minh tam giác APK đồng dạng với tam giác IPC.
3. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng IC và IP; Q là chân đường vuông góc kẻ từ I xuống PC. Chứng minh AQ đi qua trung điểm của đoạn thẳng MN.

Lời giải.



1. Ta có $\angle IPA = 90^\circ + \angle IBA = \dfrac{180^\circ + \angle ABC}{2} = \dfrac{180^\circ + 180^\circ - \angle BAC - \angle ACB}{2} = 180^\circ - \angle IAC - \angle ICA = \angle AIC$. Từ đó ta có $\triangle API \backsim \triangle AIC \Rightarrow IA.IP = IC.PA$.
2. Từ $\triangle API \backsim \triangle AIC \Rightarrow \angle PIA = \angle ICA \Rightarrow \angle PIC = \angle PIA + \angle AIC = \angle ACI + \angle AIC = 180^\circ - \angle IAC = 180^\circ - \angle IAP = \angle PAK$.

   Và cũng từ cặp tam giác đồng dạng trên ta có $\dfrac{AP}{AI} = \dfrac{PI}{IC} \Rightarrow \dfrac{AP}{AK} = \dfrac{IP}{IC}$.

   Từ đó ta có $\triangle APK \backsim \triangle IPC$ (c.g.c).

(3) Gọi L, J lần lượt là trung điểm PB, PC. Khi đó dễ thấy K là trung điểm LI do $INJM$ là hình bình hành và NK là trung trực IQ do $QN = NI$, $MQ = MI$.

Ta có $\angle ILP = 2\angle LBI = \angle ABC \Rightarrow IL//BC$ mà $LJ//BC$ nên ba điểm I, L, J thẳng hàng.

Gọi PQ cắt AN tại F. Từ ý 2 kết hợp với $AN//KP$ và các tam giác cân ta có

$\angle PAN = \angle APK = \angle IPC = \angle NQP \Rightarrow \angle PAF = \angle NQF$

$\Rightarrow \triangle NFQ \backsim \triangle PFA$ (g.g) $\Rightarrow \triangle NFP \backsim \triangle QFA$ (c.g.c)

Từ hai cặp tam giác đồng dạng trên ta dễ có $\angle NQA + \angle NPA = 180^\circ$.

Mà $\angle NPA = 180^\circ - \angle LPI = 180^\circ - \angle LIP = \angle NIK = \angle NQK$

$\Rightarrow \angle NQK + \angle NQA = 180^\circ \Rightarrow A$, Q, K thẳng hàng.

Bài tập 5 **(LIM Olympic - THCS Nam Từ Liêm - Bài 5)**

(1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) sao cho x, y nguyên tố cùng nhau và

$$4(x^3 - x) = y^3 - y.$$

(2) Trong một bảng ô vuông kích thước 100×100 ta điền vào mỗi ô một dấu $(+)$. Ta tiến hành biến đổi như sau: mỗi lần đổi ta đổi dấu tất cả các ô trong cùng một hàng hoặc trong cùng một cột (dấu $(+)$ thành $(-)$ và ngược lại). Hỏi sau một số hữu hạn bước biến đổi như trên, trên bảng có đúng 2026 dấu $(-)$ hay không? Vì sao?

Lời giải.

(1) Với $x = 1 \Rightarrow y = 1$ và ngược lại với $y = 1$ ta cũng có $x = 1$.

Xét trường hợp $x, y \geq 2$.

Từ giả thiết ta có $60x^3 = 64x^3 - y^3 - 4x + y = (4x - y)(16x^2 + 4xy + y^2 - 1)$.

Do $x, y \geq 2$ nên ta dễ có $4x - y > 0$.

Ta có $(x, y) = 1 \Rightarrow (x^3, 4x - y) = 1 \Rightarrow 60 \,\vdots\, (4x - y)$

$\Rightarrow d = 4x - y \in U(60) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$.

Khi thay $y = 4x - d$ vào ta được phương trình $60x^3 - 48dx^2 + 12d^2x - (d^3 - d) = 0$.

Ta thấy $d^3 - d$ phải chia hết cho 12 nên ta loại được các trường hợp $d = 6$, $d = 10$, $d = 30$.

Lại có $x, y \geq 2$ nên $y^3 - y = y^3(1 - \dfrac{1}{y^2}) \geq \dfrac{3y^3}{4}$ nên $\dfrac{3y^3}{4} \leq y^3 - y = 4(x^3 - x) < 4x^3$

nên $y^3 < \dfrac{16x^3}{3} \Rightarrow y < \dfrac{7}{4}x \Rightarrow d = 4x - y > \dfrac{9}{4}x \Rightarrow x < \dfrac{4d}{9}$.

Với việc để ý nếu phương trình mà có nghiệm nguyên dương thì nghiệm đó phải là ước của hệ số tự do và lưu ý khi đó hệ số tự do sau khi rút gọn của ta sẽ là $\dfrac{d^3 - d}{12}$, ta xét các trường hợp.

- Với $d = 1 \Rightarrow 12x(5x^2 - 4x + 1) = 0$ (vô nghiệm $x \geq 2$)

◈ Với $d = 2 \Rightarrow x < \dfrac{8}{9}$ (Loại)

◈ Với $d = 3 \Rightarrow x < \dfrac{12}{9}$ (Loại)

◈ Với $d = 4 \Rightarrow x < \dfrac{16}{9}$ (Loại)

◈ Với $d = 5 \Rightarrow x < \dfrac{20}{9} \Rightarrow x = 2$ (thỏa mãn), suy ra $y = 3$.

◈ Với $d = 12 \Rightarrow x < \dfrac{16}{3} \Rightarrow x \leq 5$ và x là ước của $\dfrac{12^3 - 12}{12} = 143 = 11.13$.
Trường hợp này không có x thỏa mãn.

◈ Với $d = 15 \Rightarrow x < \dfrac{20}{3} \Rightarrow x \leq 6$ và x là ước của $\dfrac{15^3 - 15}{12} = 280 = 2^3.5.7$.
Thử $x = 2, x = 4, x = 5$ đều không thỏa mãn.

◈ Với $d = 20 \Rightarrow x < \dfrac{80}{9} \Rightarrow x \leq 8$ và x là ước của $\dfrac{20^3 - 20}{12} = 665 = 5.7.19$.
Thử $x = 5, x = 7$ đều không thỏa mãn.

◈ Với $d = 60 \Rightarrow x < \dfrac{240}{9} \Rightarrow x \leq 26$ và x là ước của $\dfrac{60^3 - 60}{12} = 17995 = 5.59.61$.
Thử $x = 5$ không thỏa mãn.

Vậy phương trình có cặp nghiệm $(x; y)$ là $(1; 1)$ và $(2; 3)$.

Lưu ý.

Bài toán trên nếu không sử dụng máy tính cầm tay sẽ rất khó để giải, nếu có lời giải hay hơn mong các bạn góp ý dưới phần bình luận.

2 Giả sử sau một số bước biến đổi trên bảng có đúng 2026 dấu $(-)$. Giả sử ở hàng thứ i ta đã biến đổi dấu x_i lần, còn dấu ở cột thứ k ta đã đối dấu y_k lần. Như vậy dấu ở ô $(i; k)$ đã thay đổi $x_i + y_k$ lần. Suy ra tại ô này có dấu $(-) \Leftrightarrow x_i + y_k$ lẻ.

Gọi p là số các số lẻ giữa các số x_i, q là số các số lẻ giữa các số y_k. Khi đó tổng số dấu $(-)$ trong bảng là: $p(100-q)+(100-p)q = 100p+100q-2pq = 2026 \Leftrightarrow (p-50)(q-50) = 1487$.

Ta có $0 \leq p, q \leq 100$ nên $p-50, q-50 \in [-50, 50]$. Số 1487 là số nguyên tố, vì vậy các cặp ước của 1487 là chỉ $(1, 1487)$ hoặc $(-1, -1487)$ (và hoán vị). Không thể có $p-50 = 1, q-50 = 1487$ vì q vượt quá 100; cũng không thể có $p - 50 = -1, q - 50 = -1487$ vì q âm. Do đó không tồn tại cặp p, q thỏa điều kiện.

Vậy **không thể** sau một số hữu hạn bước biến đổi thu được đúng 2026 dấu $(-)$ trên bảng 100×100.