ĐẠI HỌC QUỐC GIA
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 01 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM 2025
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU
Môn thi: TOÁN (Chuyên)
Thời gian làm bài:150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1 (2 điểm). Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m = 0$ (m là tham số).

a) Chứng minh rằng với mọi m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.
b) Chứng minh $x_1^4 + x_2^4 > \frac{9}{2}$.
c) Chứng minh $\left(x_1 + \sqrt{x_1^2+1}\right)\left(x_2 + \sqrt{x_2^2+1}\right) = 1$ khi và chỉ khi $m = -1$.

Câu 2 (1.5 điểm). Người ta muốn ghi bốn số thực ở bốn đỉnh của hình vuông $ABCD$ (mỗi đỉnh một số) thỏa mãn:

i) Bốn số được ghi là đôi một phân biệt;
ii) Tổng hai số được ghi ở hai đầu của cạnh AB là 0;
iii) Tổng hai số được ghi ở hai đầu của ba cạnh còn lại là ba giá trị phân biệt: 1, 2, 3.

a) Hãy chỉ ra một cách ghi thỏa mãn các điều kiện trên.
b) Trong các cách ghi thỏa mãn các điều kiện trên, tìm cách ghi có tổng bình phương của các số ở bốn đỉnh là nhỏ nhất.

Câu 3 (2 điểm). Cho các số nguyên dương m, n thỏa mãn: $m^2 + m + n^2$ chia hết cho tích mn (1).

a) Chứng minh không tồn tại m, n thỏa mãn (1) khi $n = 3$.
b) Tìm m, n thỏa mãn (1) biết m chia hết cho n.
c) Ký hiệu d là ước chung lớn nhất của m và n. Chứng minh nếu m, n thỏa mãn (1) thì $m = d^2$.

Câu 4 (3 điểm). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có $\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$ và điểm D trên cung nhỏ AC sao cho $CD > AB$. Đường trung trực của DB cắt AB tại E; đường trung trực của DC cắt AC tại F.

a) Chứng minh các điểm A, D, E, F thuộc một đường tròn và đường tròn này đi qua tâm O của (O).
b) Chứng minh rằng tam giác DBE và tam giác DCF đồng dạng. Chứng minh rằng đường cao qua D của tam giác DEF và đường cao qua A của tam giác ABC cắt nhau trên (O).
c) Ký hiệu (I) là đường tròn tâm I, đi qua các điểm A, D, E, F. Tiếp tuyến của (I) tại O cắt tiếp tuyến của (O) tại D ở S. Gọi R là trung điểm OD và K là giao điểm của SI với đường tròn ngoại tiếp tam giác SDO ($K \neq S$). Chứng minh $\widehat{RKD} = 90°$ và DK đi qua trung điểm của IR.

Câu 5 (1.5 điểm). Cho bảng ô vuông kích thước 2×9 và số nguyên dương $k \leq 18$. Hai ô của bảng được gọi là *kề bên* nếu chúng có một cạnh chung. Hai bạn An và Bình chơi trò "Truy Tìm Tàu Ngầm" như sau: Trước khi trò chơi bắt đầu, An chọn một ô trên bảng và không cho Bình biết. Ở mỗi lượt chơi:

- An phải chọn một ô mới, kề bên với ô đã chọn trước đó, và không cho Bình biết;
- Sau khi An chọn xong, Bình chọn k ô của bảng và hỏi An: trong k ô này có ô An vừa chọn hay không? Nếu có thì Bình thắng, nếu không thì hai bạn lại chơi lượt tiếp theo.

a) Xét $k = 4$. Chứng minh rằng Bình có thể thắng sau không quá 8 lượt chơi.
b) Xét $k = 2$. Chứng minh rằng Bình có thể thắng sau không quá 16 lượt chơi.

----------HẾT----------

- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu;*
- *Giám thị không giải thích gì thêm.*

ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH **ĐÁP ÁN CHÍNH THỨC**	KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM 2025 TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU Môn thi: TOÁN (Chuyên) *Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)*

Câu 1 (2 điểm). Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+2m=0$ (m là tham số).

a) Chứng minh rằng với mọi m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

b) Chứng minh $x_1^4+x_2^4>\frac{9}{2}$.

c) Chứng minh $\left(x_1+\sqrt{x_1^2+1}\right)\left(x_2+\sqrt{x_2^2+1}\right)=1$ khi và chỉ khi $m=-1$.

Lời giải.

a) (0.5 điểm) Ta có: $\Delta'=(m+1)^2-2m=m^2+1>0$. Do đó, phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.

b) (0.75 điểm) Áp dụng định lý Vi-ét: $x_1+x_2=2(m+1), x_1x_2=2m$.
Ta có: $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4(m+1)^2-4m=(2m+1)^2+3\geq 3$.
Áp dụng BĐT BCS: $2(x_1^4+x_2^4)\geq (x_1^2+x_2^2)^2\geq 9$. Suy ra $x_1^4+x_2^4\geq\frac{9}{2}$.
Dấu bằng chỉ xảy ra khi $m=-\frac{1}{2}$ và $x_1^2=x_2^2$. Điều kiện thứ hai tương đương với $x_1=x_2$ (do $x_1+x_2=2m\neq 0$) – không thể xảy ra do hai nghiệm phân biệt.

c) (0.5 điểm) Khi $\left(x_1+\sqrt{x_1^2+1}\right)\left(x_2+\sqrt{x_2^2+1}\right)=1$ thì

$$\left(x_1+\sqrt{x_1^2+1}\right)=\frac{1}{\left(x_2+\sqrt{x_2^2+1}\right)}=\left(-x_2+\sqrt{x_2^2+1}\right)$$

Cách 1: Suy ra $x_1+x_2+\frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}=(x_1+x_2)\left(1+\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}\right)=0$.
Để ý rằng $\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}>|x_1|+|x_2|\geq x_2-x_1$ nên $1+\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}>0$. Ta suy ra $x_1+x_2=0$, nói cách khác, $m=-1$.

Cách 2: Suy ra $x_1+x_2=\sqrt{x_2^2+1}-\sqrt{x_1^2+1}$
Do vai trò của x_1 và x_2 tương tự nhau nên tương tự ta có $x_1+x_2=\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}$
Cộng hai vế lại ta thu được $x_1+x_2=0$, nói cách khác, $m=-1$.

(0.25 điểm) Ngược lại, khi $m=-1$ phương trình có hai nghiệm $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$. Thử lại ta thấy hai nghiệm thỏa mãn đẳng thức đã cho.

Câu 2 (1.5 điểm). Người ta muốn ghi bốn số thực ở bốn đỉnh của hình vuông $ABCD$ (mỗi đỉnh một số) thỏa mãn:

i) Bốn số được ghi là đôi một phân biệt;
ii) Tổng hai số được ghi ở hai đầu của cạnh AB là 0;
iii) Tổng hai số được ghi ở hai đầu của ba cạnh còn lại là ba giá trị phân biệt: 1, 2, 3.

a) Hãy chỉ ra một cách ghi thỏa mãn các điều kiện trên.
b) Trong các cách ghi thỏa mãn các điều kiện trên, tìm cách ghi có tổng bình phương của các số ở bốn đỉnh là nhỏ nhất.

Lời giải.

a) (0.5 điểm) Một cách ghi thỏa mãn ở các đỉnh A, B, C, D theo thứ tự đó là $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{2}{3}$.
b) (1 điểm) Giả sử ta có một cách ghi thỏa mãn các điều kiện trên. Do tổng hai số ở đỉnh A và B bằng 0 nên chúng có dạng x và $-x$. Đặt y và z lần lượt là hai số ghi ở đỉnh C và D. Ta có $(x+y)+(-x+z)=(y+z)$ và $1+2=3$. Suy ra $y+z=3$. Do vai trò của x và $-x$ là như nhau nên không mất tính tổng quát, giả sử $x+y=1$ và $-x+z=2$. Từ đây ta suy ra một cách ghi bốn số ở các đỉnh A, B, C, D thỏa mãn điều kiện là $x, -x, 2+x, 1-x$ (chẳng hạn, để bốn giá trị này đôi một phân biệt, ta có thể chọn $x=\frac{1}{3}$ và thu được cách ghi ở a)).
Từ lập luận ở trên, ta suy ra được bốn giá trị ở trên bốn đỉnh phải có dạng $x, -x, 2+x, 1-x$.
Tổng bình phương bốn số có dạng $4x^2+2x+5=\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}$, nhỏ nhất là $\frac{19}{4}$ khi $x=-\frac{1}{4}$.
Lưu ý: Nếu không chỉ ra vai trò tương tự giữa x và $-x$ thì sẽ có hai bộ số thỏa mãn và dẫn đến cùng một giá trị nhỏ nhất

Câu 3 (2 điểm). Cho các số nguyên dương m, n thỏa mãn: m^2+m+n^2 chia hết cho tích mn (1).

a) Chứng minh không tồn tại m, n thỏa mãn (1) khi $n=3$.
b) Tìm m, n thỏa mãn (1) biết m chia hết cho n.
c) Ký hiệu d là ước chung lớn nhất của m và n. Chứng minh nếu m, n thỏa mãn (1) thì $m=d^2$.

Lời giải.

a) (0.75 điểm) Khi $n=3$, điều kiện (1) trở thành $m^2+m+9 \vdots 3m$.
Do $m^2+m \vdots m$ và $3m \vdots m$, ta suy ra $9 \vdots m$. Suy ra $m=9, 3$ hoặc 1. Thử lại ta thấy cả ba giá trị trên đều không thỏa mãn yêu cầu.
Vậy không tồn tại m thỏa mãn (1) khi $n=3$.
b) (0.75 điểm) Do $m \vdots n$, tồn tại số nguyên dương k sao cho $m=kn$.
Điều kiện (1) trở thành $k^2n^2+kn+n^2 \vdots kn^2$.
Vì $k^2n^2+n^2 \vdots n^2$ và $kn^2 \vdots n^2$, ta suy ra $kn \vdots n^2$, từ đó suy ra $k \vdots n$ (2).
Mặt khác, từ $k^2n^2+kn \vdots kn$ và $kn^2 \vdots kn$, ta suy ra $n^2 \vdots kn$, từ đó suy ra $n \vdots k$ (3).
Từ (2), (3) suy ra $n=k$ hay $m=n^2$. Thế vào (1) thu được $n^4+n^2+n^2 \vdots n^3$, suy ra $2n^2 \vdots n^3$ hay $n=2$ hoặc 1. Thử lại ta thấy $m=4, n=2$ hoặc $m=n=1$ thỏa mãn (1).
c) (0.5 điểm) Do d là ước chung lớn nhất của m và n nên tồn tại a, b nguyên tố cùng nhau và $m=ad, n=bd$. Điều kiện (1) trở thành $a^2d^2+ad+b^2d^2 \vdots abd^2$.
Do $a^2d^2+b^2d$^2 và abd^2 đều $\vdots d$^2, ta suy ra $ad \vdots d^2$, từ đây suy ra $a \vdots d$ (4).
Do a^2d^2+ad và abd^2 đều $\vdots ad$, ta suy ra $b^2d^2 \vdots ad$, từ dây suy ra $b^2d \vdots a$. Mà a và b nguyên tố cùng nhau nên $d \vdots a$ (5).
Từ (4), (5) suy ra $a=d$ hay $m=ad=d^2$.

Câu 4 (3 điểm). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có $\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$ và điểm D trên cung nhỏ AC sao cho $CD > AB$. Đường trung trực của DB cắt AB tại E; đường trung trực của DC cắt AC tại F.

a) Chứng minh các điểm A, D, E, F thuộc một đường tròn và đường tròn này đi qua tâm O của (O).
b) Chứng minh rằng tam giác DBE và tam giác DCF đồng dạng. Chứng minh rằng đường cao qua D của tam giác DEF và đường cao qua A của tam giác ABC cắt nhau trên (O).
c) Ký hiệu (I) là đường tròn tâm I, đi qua các điểm A, D, E, F. Tiếp tuyến của (I) tại O cắt tiếp tuyến của (O) tại D ở S. Gọi R là trung điểm OD và K là giao điểm của SI với đường tròn ngoại tiếp tam giác SDO $(K \neq S)$. Chứng minh $\widehat{RKD} = 90°$ và DK đi qua trung điểm của IR.

Lời giải.

a) (1 điểm) Do E thuộc trung trực của DB nên $EB = ED$, suy ra tam giác BED cân ở E, suy ra $\widehat{AED} = 2\widehat{ABD}$. Tương tự với F ta có $\widehat{AFD} = 2\widehat{ACD}$. Do $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$, ta có $\widehat{AED} = \widehat{AFD}$, suy ra tứ giác $AEFD$ nội tiếp.
Ta có $\widehat{AOD} = 2\widehat{ACD} = \widehat{AFD}$, suy ra tứ giác $AOFD$ nội tiếp. Từ đây ta suy ra năm điểm A, D, E, F, O cùng nằm trên một đường tròn.

b) (1 điểm) Hai tam giác cân DBE và DCF có góc ở đáy $\widehat{DBE} = \widehat{DCF}$ nên chúng đồng dạng.
Gọi T là giao điểm của EF và BC. Do $\widehat{DEF} = \widehat{DBC}$, tứ giác $DEBT$ nội tiếp, suy ra $\widehat{BTE} = \widehat{BDE} = \widehat{ABD}$.
Để ý rằng góc tạo bởi đường cao kẻ từ A của tam giác ABC và đường cao kẻ từ D của tam giác DEF bằng góc tạo bởi EF và BC, góc $\widehat{BTE}$, và góc này bằng $\widehat{ABD}$. Từ đây ta suy ra giao điểm của hai đường cao này nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD, là (O).

c) (1 điểm) Gọi M là trung điểm OS. Do tam giác SDO vuông tại D nên đường tròn ngoại tiếp tam giác SDO chính là đường tròn đường kính OS – cũng là đường tròn tâm M bán kính $MO = MD$. Từ đây suy ra tam giác MOI bằng tam giác MDI, suy ra MI là trung trực của OD và MD là tiếp tuyến của (I) tại D.
Do MI là trung trực của OD nên M, R, I thẳng hàng và $\widehat{IRO} = 90°$. Mặt khác, $\widehat{IKO} = 90°$ do K thuộc đường tròn đường kính OS. Vậy tứ giác $IKRO$ nội tiếp đường tròn đường kính IO, suy ra $\widehat{RKS} = \widehat{IOR}$. Tứ giác $OKDS$ nội tiếp đường tròn đường kính OS nên $\widehat{DKS} = \widehat{DOS}$.
Từ đây suy ra $\widehat{RKD} = \widehat{RKS} + \widehat{DKS} = \widehat{IOR} + \widehat{DOS} = \widehat{IOS} = 90°$.
Gọi N là giao điểm của DK với IR.
Tam giác DRN vuông ở R có RK là đường cao nên $NR^2 = NK.ND$ (2).
Ta có $\widehat{IKN} = \widehat{DKS} = \widehat{DOS} = \widehat{DIN}$ (dấu bằng thứ ba là do tứ giác $DIOM$ nội tiếp đường tròn đường kính IM). Từ đây, tam giác NKI đồng dạng với tam giác NID theo trường hợp góc-góc, suy ra $\frac{NK}{NI} = \frac{NI}{ND}$ hay $NI^2 = NK.ND$ (3).
Từ (2), (3) suy ra $NI = NR$ hay DK đi qua trung điểm N của IR.

Câu 5 (1.5 điểm). Cho bảng ô vuông kích thước 2×9 và số nguyên dương $k \leq 18$. Hai ô của bảng được gọi là *kề bên* nếu chúng có một cạnh chung. Hai bạn An và Bình chơi trò "Truy Tìm Tàu Ngầm" như sau: Trước khi trò chơi bắt đầu, An chọn một ô trên bảng và không cho Bình biết. Ở mỗi lượt chơi:

- An phải chọn một ô mới, kề bên với ô đã chọn trước đó, và không cho Bình biết;
- Sau khi An chọn xong, Bình chọn k ô của bảng và hỏi An: trong k ô này có ô An vừa chọn hay không? Nếu có thì Bình thắng, nếu không thì hai bạn lại chơi lượt tiếp theo.

a) Xét $k = 4$. Chứng minh rằng Bình có thể thắng sau không quá 8 lượt chơi.
b) Xét $k = 2$. Chứng minh rằng Bình có thể thắng sau không quá 16 lượt chơi.

Lời giải. Đánh số các ô của bảng từ dưới lên trên là: 1, 2, và từ trái qua phải là: 1, 2, …, 9.

a) (1 điểm) Với $k = 4$. Xét cách chơi của Bình như sau:
Ở lượt thứ $i, i = 1, 2, \dots, 8$, Bình kiểm tra bốn ô $\{(i, 1), (i, 2), (i + 1,1), (i + 1,2)\}$.
Giả sử Bình vẫn chưa thắng, nghĩa là ô của An chọn không nằm trong số các ô Bình chọn trong 8 lượt đã qua – nói cách khác, trong lượt i, ô An chọn không đổi qua các cột i và $i + 1$.
Trong lượt 1, ô của An không nằm trong các cột 1, 2. Vậy sau lượt 1, ô của An chọn chỉ có thể nằm trong các cột từ 3 đến 9. Do đó, trong lượt 2, ô của An chỉ có thể đổi sang một trong các cột từ 2 đến 9. Sau lượt 2, ô của An chỉ có thể nằm trong các cột từ 4 đến 9. Cứ tiếp tục như vậy bằng quy nạp ta suy ra được sau lượt 8, ô của An chỉ có thể nằm ở cột 9. Như vậy, ở lượt 8, ô của An chuyển qua sẽ nằm ở cột 8 hoặc 9 mà Bình chọn – mâu thuẫn với giả sử. Nói cách khác, Bình sẽ thắng sau không quá 8 lượt.

b) (0.5 điểm) Với $k = 2$. Gọi một ô của bảng là chẵn nếu tổng tọa độ của nó là chẵn và lẻ nếu tổng tọa độ là lẻ. Để ý rằng mỗi lượt chơi thì An phải thay đổi tính chẵn-lẻ của ô mình chọn.

Xét cách chơi của Bình như sau:
- 8 lượt đầu: lượt thứ $i, i = 1, 2, \dots, 8$, Bình kiểm tra hai ô $\{(i, 1), (i + 1,2)\}$.
- 8 lượt sau: lượt thứ $17 - j, j = 8, 7, \dots ,1$, Bình kiểm tra hai ô $\{(j, 1), (j + 1,2)\}$.
Giả sử Bình chưa thắng sau 18 lượt chơi như trên.

Ta xét hai trường hợp:
- Trường hợp 1: Trong lượt 1 An chọn một ô chẵn. Do cách chọn của Bình, sau lượt 1, ô của An chọn chỉ có thể nằm trong một ô chẵn tròn các cột từ 3 đến 9. Do đó, trong lượt 2, ô của An chỉ có thể đổi sang một trong số các ô lẻ từ cột 2 đến 9. Sau lượt 2, ô của An chỉ có thể nằm trong số các ô lẻ từ cột 4 đến cột 9. Cứ tiếp tục như vậy, bằng quy nạp, ta suy ra được ở lượt thứ 8, Bình chọn được ô của An – mâu thuẫn với giả sử.
- Trường hợp 2: Trong lượt 1 An chọn một ô lẻ. Như vậy ở lượt 9, An đang ở một ô lẻ và từ lượt 9, Bình và An chọn ô có cùng tính lẻ. Từ đây, ta có thể đưa về chứng minh tương tự như Trường hợp 1 với Bình duyệt các ô từ phải qua trái.

Lưu ý: Có thể cho 0.5 điểm ở ý a) và 0.25 điểm ở ý b) nếu chiến thuật đúng nhưng không chứng minh chặt chẽ được.

----------**HẾT**----------