

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: **TOÁN HỌC** (môn chuyên)

Thời gian làm bài: 150 phút (đề gồm 1 trang, có 5 bài)

Bài 1. (2,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{x+5}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{2}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ (với $x \geq 0, x \neq 1$).

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2x + 3m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 20$.

Bài 2. (2,25 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + y^2 - 2x - 2y = 0 \\ x^2 + 2xy - 3 = \sqrt{x+y+1} \end{cases}$$

2) Cho $P(x)$ là đa thức bậc ba thỏa mãn $(x+2)P(x+1) = (x-1)P(x+2)$, với mọi số thực x và $P(3) = 6$. Chứng tỏ $P(2) = 0$ và xác định đa thức $P(x)$.

Bài 3. (2,0 điểm)

1) Chứng minh trong 37 số nguyên dương bất kỳ, luôn tìm được 7 số có tổng chia hết cho 7.

2) Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho với mọi số nguyên dương a, b thì hai số $a + 8b$ và $6a + 43b$ hoặc cùng chia hết cho p hoặc cùng không chia hết cho p .

Bài 4. (0,75 điểm)

1) Cho các số thực dương a, b . Chứng minh $a^3 + b^3 \geq a^2b + b^2a$.

2) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca \geq 3$. Chứng minh

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + 3abc \geq 9.$$

Bài 5. (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC (với $AB < BC < AC$) có I, J, M lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC . Gọi D là giao điểm của hai đường tròn $(I; IA)$ và $(J; JA)$, với D khác A .

1) Chứng minh tứ giác $AIMJ$ là hình bình hành và ba điểm B, D, C thẳng hàng.

2) Tiếp tuyến của $(I; IA)$ tại A cắt đường thẳng MJ tại điểm K và cắt $(J; JA)$ tại điểm P , với P khác A . Tiếp tuyến của $(J; JA)$ tại A cắt $(I; IA)$ tại điểm Q , với Q khác A . Gọi E là điểm đối xứng với A qua D . Chứng minh tứ giác $ADMK$ nội tiếp đường tròn và $\widehat{PAQ} + \widehat{PEQ} = 180^\circ$.

3) Gọi S và T lần lượt là giao điểm của đường thẳng PQ với hai đường thẳng BC và AD . Chứng minh $TP \cdot SQ = TQ \cdot SP$.

-HẾT-

Thí sinh được sử dụng máy tính cầm tay không có chức năng soạn thảo văn bản; không được sử dụng tài liệu.

Họ và tên của thí sinh: Số báo danh: Chữ ký của giám thị 1: ...

LỜI GIẢI THAM KHẢO VÀ BÌNH LUẬN ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TỈNH ĐỒNG NAI

Năm học: 2025 - 2026

Môn thi: TOÁN CHUYÊN

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Đậu Văn Huy Hoàng*, Nguyễn Thái Hưng[†], Trần Thị Thu Nga[‡]

Ngày 30 tháng 5 năm 2025

Bài 1 (2 điểm).

- 1) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{x+5}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{2}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ (với $x \geq 0, x \neq 1$).
- 2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2x + 3m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 20$.

Lời giải.

1) Ta có

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x+5}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{2}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+2} \\ &= \left[\frac{x+5}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{2}{\sqrt{x}-1} \right] \cdot (\sqrt{x}+2) \\ &= \frac{x+5-2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \cdot (\sqrt{x}+2) \\ &= \frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-1} \\ &= \sqrt{x}-1. \end{aligned}$$

*Giáo viên tại trường Phổ thông Năng khiếu ĐHQG-HCM

[†]GV tại Trung tâm Star Education - TPHCM

[‡]Giáo viên tại THCS Tân Phong - Biên Hòa - Đồng Nai

- 2) Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta' = 1 - 3m - 1 = -3m > 0$ hay $m < 0$.
Theo định lý Viète, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = 3m + 1 \end{cases}.$$

Khi đó

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 2^3 - 3 \cdot (3m + 1) \cdot 2 = 8 - 18m - 6 = 2 - 18m.$$

Vì vậy

$$x_1^3 + x_2^3 = 20$$

$$2 - 18m = 20$$

$$m = -1 \text{ (Thỏa mãn } m < 0 \text{)}.$$

Vậy $m = -1$.

Nhận xét: Đây là một câu hỏi dễ nhằm giúp học sinh đạt được mức điểm trên liệt, chỉ đòi hỏi kĩ năng cơ bản về biến đổi biểu thức chứa căn và áp dụng định lý Viète.

Bài 2 (2,0 điểm).

- 1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + y^2 - 2x - 2y = 0 \\ x^2 + 2xy - 3 = \sqrt{x + y + 1} \end{cases}.$$
- 2) Cho $P(x)$ là đa thức bậc ba thỏa mãn $(x + 2)P(x + 1) = (x - 1)P(x + 2)$, với mọi số thực x và $P(3) = 6$. Chứng tỏ $P(2) = 0$ và xác định đa thức $P(x)$.

Lời giải.

- 1) Biến đổi phương trình đầu, ta được

$$y(x + y) - 2(x + y) = 0$$

$$(x + y)(y - 2) = 0$$

$$x = -y \text{ hoặc } y = 2.$$

- Nếu $x = -y$, thay vào phương trình thứ hai, ta được

$$-y^2 - 3 = 1 \text{ hay } y^2 + 4 = 0.$$

Phương trình trên vô nghiệm vì $y^2 + 4 > 0$ với mọi y .

- Nếu $y = 2$, thay vào phương trình thứ hai, ta được

$$\begin{aligned}
 x^2 + 4x - 3 &= \sqrt{x+3} \\
 x^2 + 4x - 5 + 2 - \sqrt{x+3} &= 0 \\
 (x-1)(x+5) + \frac{4-(x+3)}{2+\sqrt{x+3}} &= 0 \\
 (x-1)(x+5) - \frac{x-1}{2+\sqrt{x+3}} &= 0 \\
 (x-1) \left(x+5 - \frac{1}{2+\sqrt{x+3}} \right) &= 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Từ điều kiện $x \geq -3$, ta suy ra

$$x + 5 - \frac{1}{2 + \sqrt{x+3}} \geq -3 + 5 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 0.$$

Vì vậy, từ (1), ta thu được $x = 1$.

Thử lại ta thấy $(x; y) = (1; 2)$ thỏa mãn hệ phương trình ban đầu. Vậy hệ phương trình có duy nhất nghiệm $(x; y) = (1; 2)$.

2) Thay $x = 1$ vào

$$(x+2)P(x+1) = (x-1)P(x+2), \tag{2}$$

ta được $3P(2) = 0 \cdot P(3) = 0$, kéo theo $P(2) = 0$. Thay $x = -2$ vào (2), ta được

$$0 \cdot P(-1) = -3 \cdot P(0),$$

dẫn đến $P(0) = 0$. Thay $x = -1$ vào (2), ta được

$$P(0) = -2 \cdot P(1).$$

Hơn nữa $P(0) = 0$ nên $P(1) = 0$. Như vậy $P(x)$ có 3 nghiệm $x \in \{0; 1; 2\}$, mà $P(x)$ là đa thức bậc ba nên $P(x)$ có dạng

$$P(x) = ax(x-1)(x-2), \quad a \neq 0. \tag{3}$$

Thay $x = 3$ vào (3) và kết hợp với $P(3) = 6$, ta được $6 = 6a$ hay $a = 1$. Thử lại và ta nhận

$$P(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x.$$

Nhận xét: Đây là một câu gồm 2 ý là hệ phương trình và đa thức. Nhìn chung đây là một câu khó, mang tính phân loại tốt.

- Ở ý 1), học sinh cần phát hiện được việc phân tích thành nhân tử ở vế trái của phương trình đầu tiên. Từ đó có thể tìm được $x = -y$ và $y = 2$. Trường hợp $y = 2$ khó nhất, nhân lượng liên hợp là một hướng xử lý phù hợp, tuy nhiên học sinh sẽ gặp khó khăn khi giải quyết phương trình

$$x + 5 - \frac{1}{2 + \sqrt{x+3}} = 0.$$

Mấu chốt để xử lý đó chính là sử dụng điều kiện $x \geq -3$ để chứng tỏ vế trái lớn hơn 0, dẫn đến phương trình vô nghiệm.

- Ở ý 2), đây là một câu có thể nhiều học sinh sẽ bỏ qua nếu chưa có cơ hội tiếp xúc nhiều về đa thức. Mấu chốt của bài toán là thay những giá trị x phù hợp để có thể tìm ra nghiệm của $P(x)$. Việc tìm ra nghiệm $x = 2$ và $x = 0$ khá đơn giản vì đã được gợi ý từ việc chứng minh $P(2) = 0$. Tuy nhiên để tìm được nghiệm còn lại là $x = 1$ thì không dễ với nhiều học sinh, điều này thu được thông qua $P(0) = 0$, vì vậy chỉ cần chọn x phù hợp để một vế xuất hiện $P(0)$. Khi đã có đủ 3 nghiệm và giả thiết $P(3) = 6$, học sinh có thể sử dụng định lý Bezout để xác định dạng của $P(x)$ (xem (3)) hoặc có thể giải một hệ 4 ẩn gồm 4 phương trình, rõ ràng cách sử dụng định lý Bezout đơn giản và thể hiện rõ các tính chất về nghiệm của đa thức.

Bài 3 (2 điểm).

- 1) Chứng minh rằng trong 37 số nguyên dương bất kỳ, luôn tìm được 7 số có tổng chia hết cho 7.
- 2) Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho với mọi số nguyên dương a, b thì hai số $a + 8b$ và $6a + 43b$ hoặc cùng chia hết cho p hoặc cùng không chia hết cho p .

Lời giải.

- 1)
 - Nếu trong 37 số nguyên dương này có đủ các số dư từ 0 đến 6 khi chia cho 7, ta chọn 7 số có số dư khi chia cho 7 lần lượt từ 0 đến 6, khi đó tổng của 7 số này chia hết cho 7.
 - Nếu trong 37 số nguyên dương này có không quá 6 số dư khác nhau, vì $37 = 6 \cdot 6 + 1$ nên theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất 7 số có cùng số dư khi chia cho 7. Chọn 7 số này và khi đó tổng của chúng chia hết cho 7.
- 2)
 - Nếu $p = 5$, vì $(6a + 43b) - (a + 8b) = 5a + 35b : 5$ nên $6a + 43b \equiv a + 8b \pmod{5}$. Vì vậy $a + 8b$ và $6a + 43b$ hoặc cùng chia hết cho p hoặc cùng không chia hết cho p .
 - Nếu $p \neq 5$, giả sử tồn tại hai số nguyên dương a, b sao cho $a + 8b$ và $6a + 43b$ đều chia hết cho p . Vì $6a + 43b = 6(a + 8b) - 5b : p$, mà $a + 8b : p$ nên $5b : p$. Hơn nữa $\gcd(p, 5) = 1$ nên $b : p$. Kết hợp với $a + 8b : p$, ta suy ra $a : p$. Như vậy, nếu $a + 8b$ và $6a + 43b$ đều chia hết cho p thì a và b đều chia hết cho p .
 Chọn $b = 1$ và $a = 5p - 8 > 0$, ta có $a + 8b = 5p - 8 + 8 = 5p : p$, theo nhận xét trên thì 1 và $5p - 8$ đều chia hết cho p , vô lý.

Vậy chỉ có duy nhất số nguyên tố $p = 5$ cần tìm.

Nhận xét: Đây là một câu hỏi gồm hai ý là tổ hợp và số học, là hai phân môn mà nhiều học sinh “sợ” và dễ bỏ trống nhất.

- Ở ý 1), đây là một câu hỏi sử dụng nguyên lý Dirichlet để giải quyết. Nhận thấy rằng trường hợp “đẹp nhất” khi chọn 7 số đó là 7 số này nhận đầy đủ số dư từ 0 đến 6 hoặc cả 7 số đều có cùng số dư (khi chia cho 7). Ngoài ra, $37 = 5 \cdot 7 + 2$, vì vậy việc chứng tỏ luôn có 7 số có cùng số dư không khả thi; tuy nhiên, ta hoàn toàn có thể làm “yếu đi” một chút bằng cách loại đi trường hợp đầu

tiên là 7 số nhận đầy đủ số dư từ 0 đến 6; khi đó trong 37 số chỉ nhận không quá 6 số dư khác nhau, mà $37 = 6 \cdot 6 + 1$, đến đây nguyên lý Dirichlet sẽ giúp ta xử lý phần còn lại.

- Ở ý 2), đây là một câu hỏi lạ và mới, nhiều học sinh sẽ rất hoang mang khi đọc được ý “ $a + 8b$ và $6a + 43b$ hoặc cùng chia hết cho p hoặc cùng không chia hết cho p ”. Việc đầu tiên cần là giả sử trường hợp “tốt nhất” xảy ra, đó là cả hai số đều chia hết cho p . Lập luận để “thu gọn” phép chia hết, ta dễ dàng thu được $5b : p$, từ đây ta được $5 : p$ hoặc $b : p$. Trường hợp $p = 5$ thỏa mãn và rất dễ dàng kiểm tra. Trong khi đó với trường hợp $b : p$, ta sẽ suy ra được $a : p$. Vì vậy ta có được một nhận xét quan trọng rằng nếu $a + 8b$ và $6a + 43b$ đều chia hết cho p thì $a, b : p$. Từ đây ta thấy rằng chỉ cần chỉ ra được một cặp $(a; b)$ sao cho a hoặc b không chia hết cho p và $a + 8b : p$, ta sẽ loại được ngay trường hợp này. Ở đây ta chỉ ra một cách chọn đơn giản nhất là với $b = 1$, khi đó $a + 8b = a + 8$, ta chỉ cần chọn $a = 5p - 8$ (mục đích chọn $5p$ để a dương).

Bài 4 (0,75 điểm).

- a) Cho các số thực dương a, b . Chứng minh $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$.
- b) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca \geq 3$. Chứng minh

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + 3abc \geq 9.$$

Lời giải.

1) Ta có

$$a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a + b) = (a + b)(a^2 - 2ab + b^2) = (a + b)(a - b)^2. \quad (4)$$

Vì $(a - b)^2 \geq 0$ và $a + b > 0$ (do a, b dương) nên $(a + b)(a - b)^2 \geq 0$. Từ (4), ta được

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2.$$

2) Áp dụng ý 1), ta có

$$\begin{aligned} 2(a^3 + b^3 + c^3) + 3abc &= (a^3 + b^3) + (b^3 + c^3) + (c^3 + a^3) + 3abc \\ &\geq (a^2b + ab^2) + (b^2c + bc^2) + (c^2a + ca^2) + 3abc \\ &= (a^2b + ab^2 + abc) + (b^2c + bc^2 + abc) + (c^2a + ca^2 + abc) \\ &= ab(a + b + c) + bc(a + b + c) + ca(a + b + c) \\ &= (a + b + c)(ab + bc + ca). \end{aligned} \quad (5)$$

Ta có $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \geq 9$, do đó $a + b + c \geq 3$. Từ (5), ta thu được

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + 3abc \geq 3 \cdot 3 = 9.$$

Nhận xét: Đây là một cách bất đẳng thức tương đối vừa phải, không quá khó nhưng ý 2) cũng thực sự thử thách với nhiều học sinh. Biểu thức $2(a^3 + b^3 + c^3)$ cho ta nghĩ tới việc tách thành

$$(a^3 + b^3) + (b^3 + c^3) + (c^3 + a^3).$$

Từ đây áp dụng ý 1) và tiến hành phân tích thành nhân tử biểu thức vừa đánh giá, ta sẽ thấy được ngay phần việc còn lại (rất đơn giản để xử lý). Một khó khăn trong bước này là rất nhiều học sinh không đoán được việc đi phân tích thành nhân tử mà lại cứ tiếp tục đi đánh giá, làm cho bài toán trở nên rối rắm hơn. Một số đẳng thức liên quan:

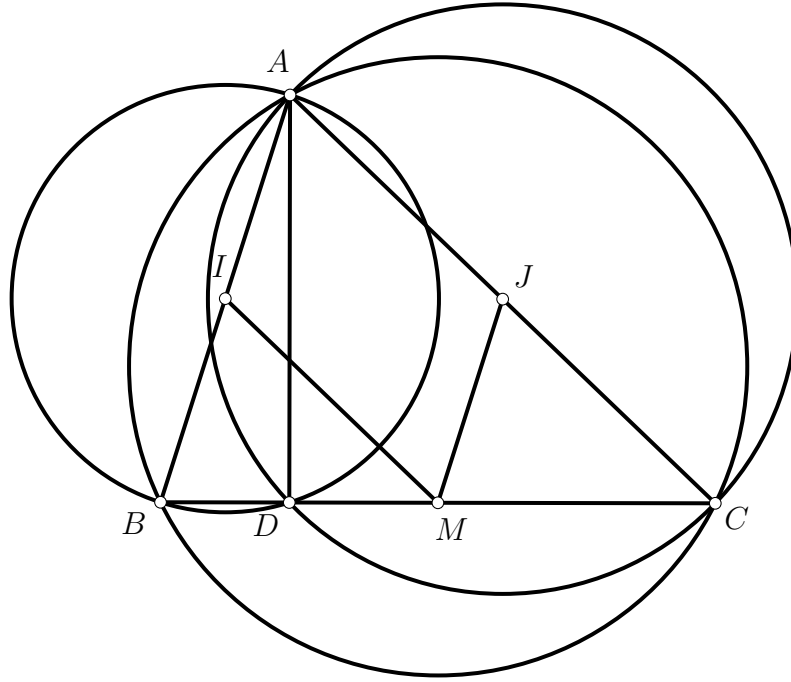
- $a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 3abc = (a + b + c)(ab + bc + ca).$
- $a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 2abc = (a + b)(b + c)(c + a).$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$

Bài 5. Cho tam giác nhọn ABC (với $AB < BC < AC$) có I, J, M lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC . Gọi D là giao điểm của hai đường tròn $(I; IA)$ và $(J; JA)$, với $D \neq A$.

- 1) Chứng minh tứ giác $AIMJ$ là hình bình hành và ba điểm B, D, C thẳng hàng.
- 2) Tiếp tuyến của $(I; IA)$ tại A cắt đường thẳng MJ tại điểm K và cắt $(J; JA)$ tại điểm P , với $P \neq A$. Tiếp tuyến của $(J; JA)$ tại A cắt $(I; IA)$ tại điểm Q , với $Q \neq A$. Gọi E là điểm đối xứng với A qua D . Chứng minh tứ giác $ADMK$ nội tiếp đường tròn và $\widehat{PAQ} + \widehat{PEQ} = 180^\circ$.
- 3) Gọi S và T lần lượt là giao điểm của đường thẳng PQ với hai đường thẳng BC và AD . Chứng minh $TP \cdot SQ = TQ \cdot SP$.

Lời giải.

1)



Trước tiên, ta chứng minh $AIMJ$ là hình bình hành. Ta có M là trung điểm của BC , J là trung điểm của AC nên MJ là đường trung bình của tam giác ABC . Suy ra

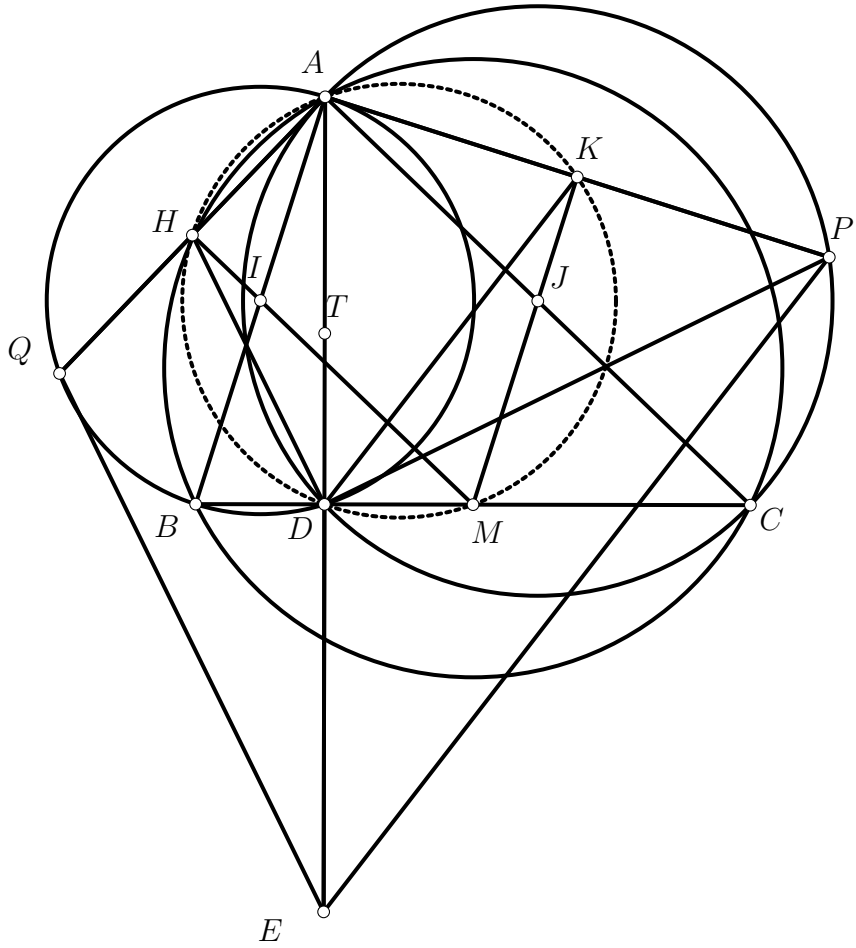
$$MJ \parallel AB. \quad (6)$$

Ta có M là trung điểm của BC , I là trung điểm của AB nên MI là đường trung bình của tam giác ABC . Suy ra

$$MI \parallel AC. \quad (7)$$

Từ (6) và (7), ta kết luận $AIMJ$ là hình bình hành. Tiếp theo, ta chứng minh B, D, C thẳng hàng. Vì D nằm trên $(I; IA)$ (đường tròn đường kính AB) và D nằm trên $(J; JA)$ (đường tròn đường kính AC) nên $\widehat{ADB} = 90^\circ$ và $\widehat{ADC} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{ADB} + \widehat{ADC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, kéo theo B, D, C thẳng hàng.

2)



Ta chứng minh $ADMK$ nội tiếp đường tròn. Từ (6), ta có $MJ \parallel AB$. Hơn nữa $AB \perp AP$ (AP là tiếp tuyến tại A của $(I; IA)$) nên $MJ \perp AP$. Kết hợp điều trên với $JA = JP$, ta suy ra MJ là đường trung trực của AP . Từ đây suy ra $MK \perp AP$ hay $\widehat{AKM} = 90^\circ$. Xét tứ giác $ADMK$, ta có

$$\widehat{ADM} + \widehat{AKM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

Suy ra $ADMK$ nội tiếp.

Gọi H là giao điểm của MI và AQ . Chứng minh tương tự như trên, ta có MH là đường trung trực của AQ và $AHMK$ nội tiếp. Kết hợp với $ADMK$ nội tiếp, ta suy ra A, H, D, M, K cùng nằm trên một đường tròn.

Ta chứng minh $\widehat{PAQ} + \widehat{PEQ} = 180^\circ$. Ta có H là trung điểm của AQ (MH là đường trung trực của AQ), D là trung điểm của AE nên HD là đường trung bình của tam giác AEQ . Suy ra $HD \parallel QE$, từ đó thu được $\widehat{QEA} = \widehat{HDA}$ (hai góc ở vị trí đồng vị).

Ta có K là trung điểm của AP (MK là đường trung trực của AP), D là trung điểm của AE nên KD là đường trung bình của tam giác AEP . Suy ra $KD \parallel PE$, dẫn đến $\widehat{PEA} = \widehat{KDA}$ (hai góc ở vị trí đồng vị).

Ta có

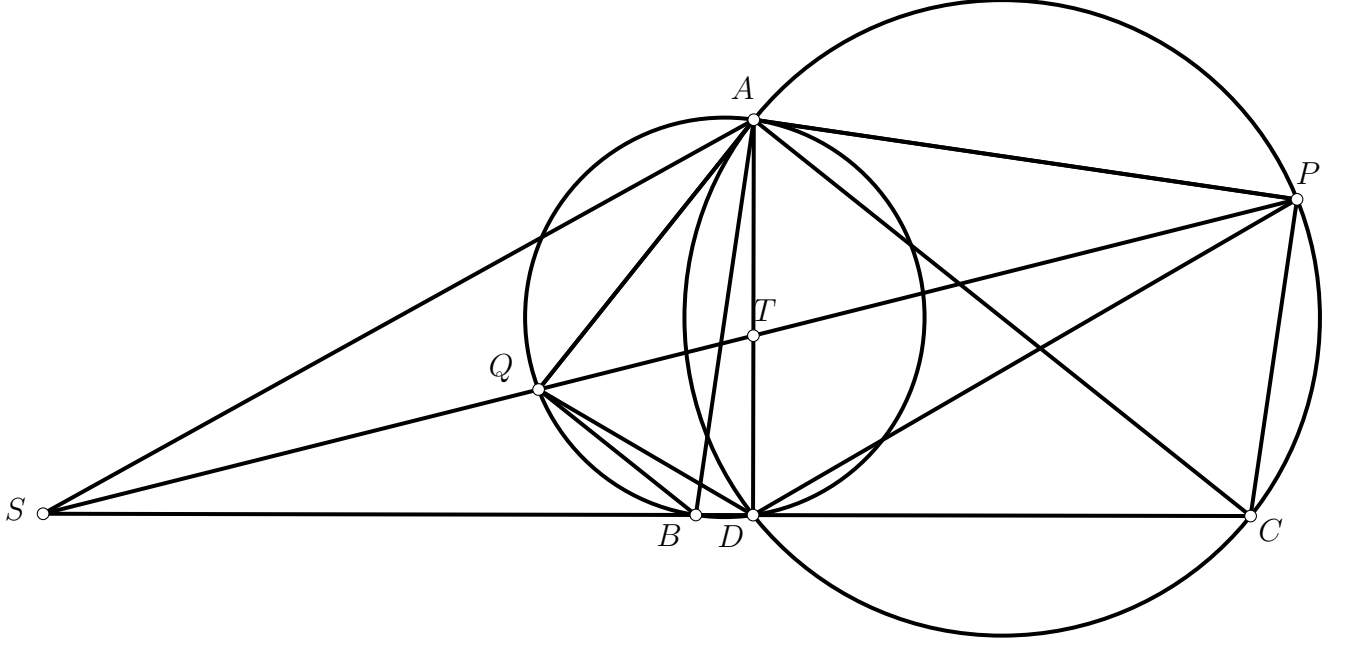
$$\widehat{PEQ} = \widehat{PEA} + \widehat{QEA} = \widehat{KDA} + \widehat{HDA} = \widehat{HDK}. \quad (8)$$

Hơn nữa

$$\widehat{HDK} + \widehat{PAQ} = \widehat{HDK} + \widehat{HAK} = 180^\circ \text{ (do } A, H, D, K \text{ cùng nằm trên một đường tròn)}. \quad (9)$$

Từ (8) và (9), ta suy ra $\widehat{PAQ} + \widehat{PEQ} = 180^\circ$.

3)



Ta cần chứng minh

$$\frac{TP}{TQ} = \frac{SP}{SQ}.$$

Ta có

$$\widehat{QDT} = \widehat{QDA} = \widehat{QBA} \text{ (do } AQBD \text{ nội tiếp)} \quad (10)$$

và

$$\widehat{PDT} = \widehat{PDA} = \widehat{PCA} \text{ (do } APCD \text{ nội tiếp)}. \quad (11)$$

Xét tam giác ABQ vuông tại Q và tam giác ACP vuông tại P , ta có $\widehat{QAB} = \widehat{PAC}$ (cùng phụ $\widehat{BAC}$). Suy ra $\triangle ABQ \sim \triangle ACP$, dẫn đến

$$\widehat{QBA} = \widehat{PCA}. \quad (12)$$

Từ (10), (11) và (12), ta suy ra $\widehat{QDT} = \widehat{PDT}$, kéo theo DT là tia phân giác trong của $\widehat{QDP}$, vì vậy

$$\frac{TP}{TQ} = \frac{DP}{DQ}. \quad (13)$$

Ta có $DS \perp DT$ nên DS là tia phân giác ngoài của $\widehat{QDP}$, suy ra

$$\frac{SP}{SQ} = \frac{DP}{DQ}. \quad (14)$$

Từ (13) và (14), ta kết luận $\frac{TP}{TQ} = \frac{SP}{SQ}$ hay $TP \cdot SQ = TQ \cdot SP$.

Nhận xét:

- i. Ở câu đầu tiên, ta chứng minh tứ giác $AIMJ$ là hình bình hành bằng cách chứng minh hai cặp cạnh đối song song. Ý tưởng này xuất phát từ việc giả thiết cho 3 trung điểm của 3 cạnh tam giác. Giả thiết đó sẽ cho ta các đường trung bình của tam giác và ta suy ra được các đường song song (và các đoạn thẳng có độ dài bằng nhau). Tiếp theo, ta chứng minh B, D, C thẳng hàng bằng cách chứng minh $\widehat{BDC}$ là góc bẹt. Mấu chốt là sử dụng giả thiết D cùng nằm trên hai đường tròn có đường kính là AB và AC để suy ra các góc vuông. Ngoài ra, ta có thể chứng minh B, D, C thẳng hàng thông qua điểm phụ. Gọi D' là giao điểm thứ hai của BD và $(I; IA)$. Khi đó, ta chỉ cần chứng minh D' cũng thuộc $(J; JA)$ (bằng cách chứng minh $\widehat{AD'C} = 90^\circ$).
- ii. Ở câu thứ hai, do đã có sẵn $\widehat{ADM} = 90^\circ$ nên ta chỉ cần chứng minh thêm $\widehat{AKM} = 90^\circ$. Để chứng minh $\widehat{AKM} = 90^\circ$, chỉ cần chứng minh $MJ \perp AP$ bằng cách dựa vào tính song song của đường trung bình MJ trong tam giác ABC . Sau khi chứng minh được $MJ \perp AP$, ta có thể suy ra MJ là trung trực của AP để chuẩn bị câu tiếp theo.
- iii. Tiếp theo ta cần chứng minh một đẳng thức về góc. Ta cần biến đổi $\widehat{PEQ}$. Với giả thiết D là trung điểm AE , ta kết hợp thêm K là trung điểm AP , ta có thể chứng minh $EP \parallel DK$. Đây là một bước chứng minh quan trọng để biến đổi góc $\widehat{PEQ}$. Ta có thể suy nghĩ tương tự về EQ , do đó, ta cần gọi thêm H là giao điểm của MI và AQ để chứng minh $EQ \parallel DH$. Lúc này ta có $EQ \parallel DE, EP \parallel DK$ nên ta có thể biến đổi $\widehat{PEQ} = \widehat{HDK}$.
- iv. Câu cuối cùng ta cần chứng minh $\frac{TP}{TQ} = \frac{SP}{SQ}$. Do các điểm T, P, S, Q thẳng hàng nên ta nghĩ đến mô hình phân giác trong - phân giác ngoài. Ta có thể dùng thước đo góc để thử nghiệm và dự đoán DT là phân giác trong $\widehat{PDQ}$.
- v. Một số tính chất khai thác thêm cho bài toán: SA tiếp xúc với đường tròn đường kính AM ; Tiếp tuyến tại A, E của (APQ) cùng đi qua S ; AD và tiếp tuyến tại H, K của (ADM) đồng quy.
- vi. Ta có thể nhìn nhận câu cuối cùng dưới góc nhìn mô hình “tứ giác điều hòa”: Cho tam giác ABC nội tiếp (O) . Hai tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại D . AD cắt lại (O) tại E , cắt BC tại F . Chứng minh rằng $\frac{FA}{FE} = \frac{DA}{DE}$. Để chứng minh bài toán này, ta cần xây dựng các đường phân giác như sau: Gọi M là trung điểm BC , chứng minh $OMEA$ nội tiếp, rồi suy ra MF là phân giác $\widehat{AME}$.

— HẾT —