PHẠM TRẦN LÊ DUY – TRỊNH THÀNH MINH

CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ KẾT HỢP BẤT ĐẲNG THỨC – CÂU CHẶN ĐIỂM 10 TRONG CÁC BÀI KIỂM TRA, KÌ THI

Biên Soạn Lần Đầu Vào Năm 2025

"Toán học, nếu nhìn nhận một cách đúng đắn, không chỉ sở hữu sự thật, mà còn có một vẻ đẹp tối cao – một vẻ đẹp lạnh lùng và khắc khổ, giống như một tác phẩm điêu khắc." – ***Bertrand Russell***

LỜI NÓI ĐẦU

Trong quá trình đổi mới giáo dục, đặc biệt là trong **Chương Trình Giáo Dục Phổ Thông 2018**, việc phát triển năng lực vận dụng kiến thức toán học vào thực tế là một yêu cầu quan trọng. Không chỉ dừng lại ở việc giải các bài toán khô khan, học sinh THCS ngày nay cần được tiếp cận với những bài toán gắn liền với đời sống, vừa rèn luyện tư duy logic, vừa kích thích hứng thú học tập.

Trong đó, **bất đẳng thức** – một phần kiến thức thường bị xem là khó – lại chính là công cụ mạnh mẽ để giải quyết nhiều bài toán.Trong đó, bất đẳng thức sẽ được lồng ghép vào các bài toán thực tế có yếu tố tối ưu, quãng đường hoặc hình học phẳng, không gian. Khi được trình bày một cách hợp lý, những bài toán này không những giúp học sinh hiểu sâu hơn bản chất của bất đẳng thức, mà còn phát triển kỹ năng suy luận, lập luận và giải quyết vấn đề – những năng lực cốt lõi của môn Toán.

Xuất phát từ nhu cầu đó, chúng tôi thực hiện file tài liệu:
"Các bài toán thực tế kết hợp bất đẳng thức – Chặn điểm 10 trong bài các bài kiểm tra, kì thi" nhằm tuyển chọn, thiết kế và phân tích một số bài toán tiêu biểu, giúp học sinh:

- Nắm vững và vận dụng linh hoạt các bất đẳng thức cơ bản (Cauchy, AM-GM, bất đẳng thức cộng, tích...)
- Thấy được vai trò của bất đẳng thức trong việc giải quyết các vấn đề tối ưu trong đời sống (tính hiệu quả, chi phí, khoảng cách, thời gian...)
- Nâng cao khả năng phân tích đề bài, xây dựng mô hình toán học và trình bày lời giải mạch lạc, sáng tạo.

Cuốn tài liệu nhỏ này xin dành tặng những bộ óc trẻ say mê toán học và là một gợi ý giảng dạy tâm huyết gửi đến quý thầy cô. Ước mong rằng, nó sẽ là chiếc "sạc dự phòng" nạp đầy năng lượng, giúp các bạn học sinh tự tin ôn luyện và bứt phá trong kỳ thi tuyển sinh quan trọng sắp tới.

Hy vọng rằng qua tài liệu này, học sinh sẽ không còn thấy bất đẳng thức là khô khan hay trừu tượng, mà thay vào đó là một công cụ "sắc bén" để chạm gần hơn đến điểm 10 – không chỉ trên bài kiểm tra mà cả trong tư duy và sự trưởng thành toán học.

Chúc các em học sinh học tốt, ôn luyện hiệu quả và đạt kết quả cao nhất trong kỳ thi tuyển sinh sắp tới!

Xin chân thành cảm ơn bạn Trịnh Thành Minh đã luôn sát cánh chỉnh sửa và cung cấp nhiều tư liệu quý giá. Mặc dù đã dồn nhiều tâm huyết, sản phẩm đầu tay chắc chắn còn nhiều thiếu sót. Rất mong nhận được sự góp ý chân thành của các độc giả để tài liệu ngày một hoàn thiện hơn và sẽ ra thêm nhiều tài liệu hay hơn nữa. Mọi người có thể góp ý qua đây:

Email: leduyphamtran2712@gmail.com

Zalo: 096 197 4135

Hà Nội, tháng 8 năm 2025

Phạm Trần Lê Duy

Khóa 8, 10A1, THPT Xuân Phương

Mục Lục

CHUYÊN ĐỀ 1: CÁC BẤT ĐẲNG THỨC THƯỜNG GẶP VÀ CÁCH CHỨNG MINH

I. Bất đẳng thức Cô-si 2 số

- Với 2 số không âm a và b, bất đẳng thức Cô-si được viết như sau: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

- Cách chứng minh:

Ta có: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ với mọi a,b dương => $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$ => $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ => $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b

- Bất đẳng thức phụ: $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$. Các độc giả tự chứng minh bất đẳng thức phụ này

Bất đẳng thức phụ: $\frac{1}{ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2}$. Các độc giả tự chứng minh bất đẳng thức phụ này

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b

- Bất đẳng thức phụ: $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$. Các độc giả tự chứng minh bất đẳng thức phụ này dựa theo bất đẳng thức $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$

II. Bất đẳng thức Cô-si 3 số

- Với 3 số thực không âm a, b, và c thì bất đẳng thức Cô-si được viết như sau: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$.
- Cách chứng minh:
Đặt $a = x^3$; $b = y^3$; $c = z^3$ => $3\sqrt[3]{abc} = 3xyz$

Cách 1: Xét hiệu
$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0$
⇨ $x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 + z^3 - 3xyz - 3x^2y - 3xy^2 \geq 0$
⇨ $(x + y)^3 + z^3 - 3xy(x + y + z) \geq 0$
⇨ $(x + y + z)[(x+y)^2 - (x+y)z + z^2] - 3xy(x + y + z) \geq 0$
⇨ $(x + y + z)(x^2 + 2xy + y^2 - xz - yz - 3xy + z^2) \geq 0$
⇨ $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz) \geq 0$
⇨ $(x + y + z)\left[\frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2 + \frac{1}{2}(z-x)^2\right] \geq 0$ (luôn đúng)
⇨ $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$ => $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = c

Cách 2: Hằng đẳng thức
Ta có hằng đẳng thức: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$
=> $x + y + z > 0$ (x, y, z không âm) và $\frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2 + \frac{1}{2}(z-x)^2 \geq 0$
=> $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$ => $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = c
- Bất đẳng thức phụ của Cô-si 3 số: $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$

III. Bất đẳng thức Bunhiacopxki

- Cho a, b, c, d là các số thực, bất đẳng thức Bunhiacopxki được viết như sau:
$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$
- Cách chứng minh:
Ta có:
$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$
⇨ $(ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2 \geq (ac)^2 + 2abcd + (bd)^2$

⇨ $(ad)^2 + (bc)^2 \geq 2abcd$
⇨ $(ad)^2 + (bc)^2 - 2abcd \geq 0$
⇨ $(ad - bc)^2 \geq 0$ (luôn đúng)
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ac = bd hay $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

IV. Bất đẳng thức Mincopxki

- Cho a, b, c, d là các số thực, bất đẳng thức Mincopxki được viết như sau:
$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}$.
- Cách chứng minh:
Ta có:
$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}$
⇨ $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ac + 2bd$
⇨ $2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq 2ac + 2bd$
⇨ $\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq ac + bd$ (1)
Nếu $ac + bd \leq 0$ thì (1) luôn đúng
Nếu $ac + bd > 0$ thì (1):
⇨ $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$ (Bất đẳng thức Bunhiacopxki)
Các độc giả xem phần **III** để chứng minh.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

V. Phương pháp tam thức bậc hai

- Giá trị nhỏ nhất: $A^2 + x \geq x$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi A = 0
- Giá trị lớn nhất: $-A^2 + x \leq x$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi A = 0
Dùng dạng $B.A^2$ sau đó dựa vào điều kiện để đánh giá

CHUYÊN ĐỀ 2: BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

2.1: Bài toán liên quan đến thể tích, diện tích xung quanh,..

- Đây là một dạng bài rất quen thuộc và được nhiều trường ra trong câu cuối đề thi giữa kì, cuối kì. Vậy nên nếu muốn được điểm 10 thì các độc giả cần phải nắm vững dạng bài này.

- Dạng bài sẽ liên quan xung quanh đến hình hộp chữ nhật, hình lập phương

Công thức hay dùng:

Diện tích xung quanh HHCN: $C_{đáy}$ x h = 2(a + b) x h (a là chiều dài, b là chiều rộng, h là chiều cao)

Diện tích toàn phần HHCN: $S_{xq} + 2S_{đáy}$ = 2(a + b) x h + ab

Thể tích HHCN: V = abh

Diện tích xung quanh HLP: $S_{đáy}$ x 4 = a x a x 4 (a là độ dài một cạnh của hình vuông)

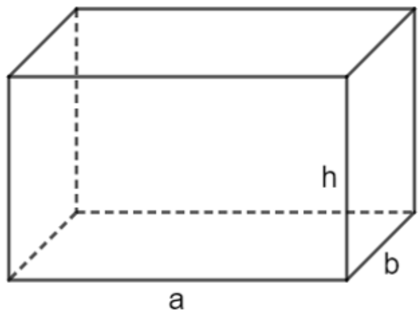
Diện tích toàn phần HLP: $S_{đáy}$ x 6 = a x a x 6

Thể tích HLP: a^3

Bài Tập

Bài 1: Một hình hộp chữ nhật có chiều cao 8cm, diện tích xung quanh là 192cm^2. Tính các kích thước của đáy để hình hộp chữ nhật có diện tích lớn nhất.

Lời giải



Gọi chiều dài và chiều rộng của đáy lần lượt là a và b (cm) (a, b > 0)

Ta có: S_{xq} = 2.8(a + b) = 192 => a + b = 12 => b = 12 – a

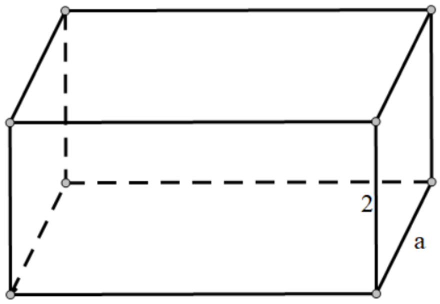
Ta có: V = 8ab nên V lớn nhất khi và chỉ khi ab lớn nhất.

⇨ $ab = a(12 - a) = -a^2 + 12a = -(a - 6)^2 + 36 \leq 36$
⇨ Max ab = 36 => V = 288 cm^3

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = 6 => b = 6 => Đáy của hình hộp chữ nhật là hình vuông có cạnh là 6cm

Bài 2: Thầy Minh muốn chế tạo một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có thể tích 500cm^3, chiều cao là 2cm. Thầy Minh đang tìm kích thước đáy của hộp sao cho sử dụng ít vật liệu nhất. Hãy giúp thầy Minh.

Lời giải



Ta có V = 500 cm^3 và chiều cao là 2cm

Gọi chiều rộng của đáy hộp là a (cm) (a > 0)

⇨ Chiều dài của đáy hộp là $\frac{500}{2a} = \frac{250}{a}$ (cm)

$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 2(a + \frac{250}{a}).2 + 2a.2 = 500 + 2a + \frac{250}{a}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si 2 số cho 2 số thực dương 2a và $\frac{250}{a}$ ta có:

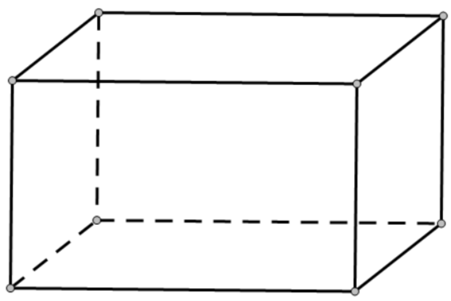
$2a + \frac{250}{a} \geq 2\sqrt{2a.\frac{250}{a}} = 20\sqrt{5} \Rightarrow S_{tp} \geq 500 + 20\sqrt{5}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $2a = \frac{250}{a} \Rightarrow 2a^2 = 250 \Rightarrow a^2 = 125 \Rightarrow a = 5\sqrt{5}$

Vậy chiều rộng của đáy là hộp là $5\sqrt{5}$ cm và chiều dài của đáy hộp là $\frac{250}{5\sqrt{5}} = 10\sqrt{5}$ thì sử dụng ít vật liệu nhất.

Bài 3: Thầy Duy muốn xây một bể chứa nước có dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 36m^3. Đáy bể có dạng hình chữ nhật với chiều rộng là x (m), chiều dài gấp đôi chiều rộng. Thầy Duy muốn phần diện tích cần xây (bao gồm diện tích xung quanh và đáy bể) là nhỏ nhất để tiết kiệm chi phí thì x phải bằng bao nhiêu?

Lời giải



Chiều dài gấp đôi chiều rộng => chiều dài là 2x (m)

$S_{đáy}$ bể là: $2x.x = 2x^2$ (m^2)

Chiều cao của bể là: $\frac{36}{2x^2} = \frac{18}{x^2}$ (m)

S_{xq} bể là: $2(x + 2x).\frac{18}{x^2} = \frac{108}{x}$ (m^2)

S cần xây là: $S_{xq} + S_{đáy} = 2x^2 + \frac{108}{x} = 2x^2 + \frac{54}{x} + \frac{54}{x}$

Áp dụng bất đẳng Cô-si 3 số cho $2x^2$; $\frac{54}{x}$; $\frac{54}{x}$ (vì x > 0)

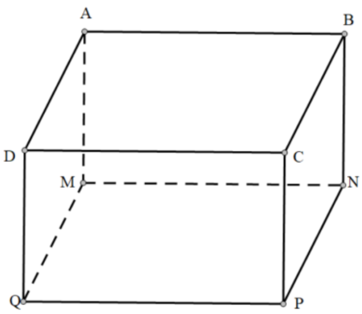
$2x^2 + \frac{54}{x} + \frac{54}{x} \geq 3\sqrt[3]{2x^2.\frac{54}{x}.\frac{54}{x}} = 54$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2x^2 = \frac{54}{x}$ => x = 3

Vậy diện tích cần sơn nhỏ nhất khi x = 3

Bài 4: Gia đình chị Huyền muốn xây một cái bể chứa nước nhỏ ở góc vườn để chủ động tưới rau, bể có dạng hình hộp chữ nhật với mặt đáy MNPQ là hình vuông (hình vẽ). Hãy tìm độ dài cạnh MN của mặt đáy và chiều cao AM của bể sao cho tổng diện tích các mặt làm bể (bao gồm 4 mặt xung quanh và một mặt đáy) là nhỏ nhất, biết rằng thể tích của bể là $4m^3$.

Lời giải



Gọi độ dài cạnh đáy MN của bể là x (m) (x > 0)

Gọi độ dài chiều cao AM của bể là y (m) (y > 0)

V = 4 (m^3) => $x^2y = 4$ => $y = \frac{4}{x^2}$

Tổng diện tích các mặt của bể bơi là: $S = 4xy + x^2 = x^2 + \frac{16}{x}$ (m^2)

Cách 1:

$S = x^2 + \frac{16}{x} = x^2 - 4x + 4 + \frac{4x^2 + 16}{x} - 4 = (x-2)^2 + \frac{4(x-2)^2}{x} + 12 \geq 12$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $(x - 2)^2 = 0$ => x = 2 => y =1

Cách 2:

$S = x^2 + \frac{16}{x} = x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x}$

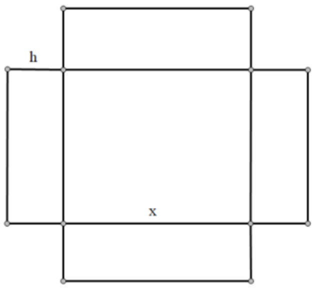
Áp dụng bất đẳng Cô-si 3 số cho x^2; $\frac{8}{x}$; $\frac{8}{x}$ (Vì $x > 0$)

$x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x} \geq 3\sqrt[3]{x^2.\frac{8}{x}.\frac{8}{x}} = 12$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = \frac{8}{x}$ => $x = 2$ => $y = 1$

Vậy để tổng diện tích các mặt của bể nhỏ nhất thì độ dài cạnh mặt đáy và chiều cao của bể lần lượt là 2m và 1m

Bài 5: Một chiếc hộp không nắp được làm từ một mảnh bìa theo hình vẽ. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x (cm), chiều cao h (cm) và thể tích là $500cm^3$. Tính độ dài cạnh hình vuông x sao cho chiếc hộp làm ra tốn ít bìa nhất.



Lời giải

Ta có $V = 500\ cm^3$ => x.x.h = 500 => $h = \frac{500}{x^2}$ (cm)

Diện tích để làm hộp là: $S = S_{xq} + S_{đáy} = 4xh + x^2 = \frac{2000}{x} + x^2 = \frac{1000}{x} + \frac{1000}{x} + x^2$

Áp dụng bất đẳng Cô-si 3 số cho x^2; $\frac{1000}{x}$; $\frac{1000}{x}$ (vì $x > 0$)

$\frac{1000}{x} + \frac{1000}{x} + x^2 \geq 3\sqrt[3]{x^2.\frac{1000}{x}.\frac{1000}{x}} = 300$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{1000}{x} = x^2$ => $x = 10$

Vậy độ dài hình vuông là 10 thì chiếc hộp làm ra tốn ít bìa nhất

Bài 6: Xét các hình hộp chữ nhật có thể tích $27cm^3$ mà đáy là hình vuông cạnh a (cm) và chiều cao h (cm). Tìm hình hộp có diện tích toàn phần nhỏ nhất.

Lời giải

Ta có $V = 27\ (cm^3)$ => a.a.h = 27 => $h = \frac{27}{a^2}$

Diện tích toàn phần của hộp là: $S_{xq} + 2S_{đáy} = 4a.h + 2a^2 = \frac{108}{a} + 2a^2 = \frac{54}{a} + \frac{54}{a} + 2a^2$

Áp dụng bất đẳng Cô-si 3 số cho $2a^2$; $\frac{54}{a}$; $\frac{54}{a}$ (vì x > 0)

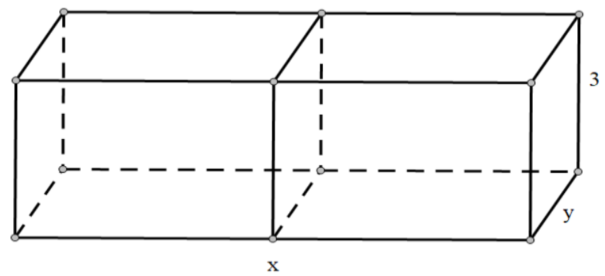
$\frac{54}{a} + \frac{54}{a} + 2a^2 \geq 3\sqrt[3]{2a^2.\frac{54}{a}.\frac{54}{a}} = 18$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $2a^2 = \frac{54}{a}$ => a = 3

Vậy hình hộp nhỏ nhất cần tìm là hình lập phương có kích thước 3 cm

Bài 7: Cô Lan muốn thiết kế một bể cá bằng kính không có nắp với thể tích $72dm^3$ và chiều cao là 3 dm, chiều dài x (dm), chiều rộng y (dm). Một vách ngăn (là mặt kính) ở giữa, chia bể cá thành hai ngăn như hình vẽ. Tính x, y để bể cá tốn ít nguyên liệu nhất (tính cả tấm kính ở giữa), coi bề dày các tấm kính như nhau và không ảnh hưởng đến thể tích của bể.

Lời giải



Ta có thể tích của bể là 72 dm^3 => 3xy = 72 => xy = 24

S bể cá là: 6x + 9y + xy = 6x + 9y + 24

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si 2 số cho 6x; 9y (x, y > 0)

$6x + 9y \geq 2\sqrt{6x.9y} = 2\sqrt{54xy} = 72$ => $S \geq 72 + 24 = 96$

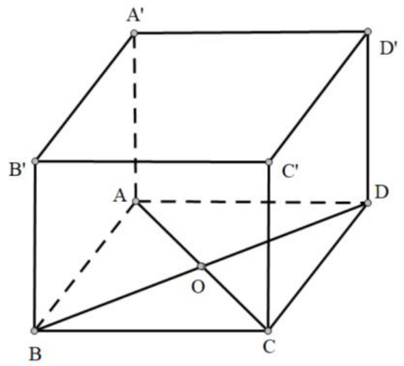
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: xy = 24 và 6x = 9y

⇨ x = 6 và y = 4

Vậy x = 6 và y = 4 thì thỏa mãn đề bài

Bài 8: Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A′B′C′D′ có đáy là hình thoi. Biết thể tích là $1280cm^3$ và chiều cao là 20 cm. Tính giá trị nhỏ nhất của diện tích xung quanh.

Lời giải



Ta đặt AC = 2x; BD = 2y (x, y > 0)

$S_{đáy}$ ABCD là: S = $\frac{1}{2}.2x.2y$ = 2xy (cm^2)

Ta có V = S.h => 1280 = S.20 => S = 64 (cm^2)

⇨ 2xy = 64 => xy = 32

S_{xq} là: 4.20.AB = 80AB

Để S_{xq} đạt giá trị nhỏ nhất thì AB phải nhỏ nhất

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Ta có AC ⊥ BD tại O

Xét ΔOAB vuông tại O có:

$AB^2 = OA^2 + OB^2 = x^2 + y^2$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số x^2; y^2 (Vì x, y > 0)

$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2y^2} = 2xy = 2.32 = 64$

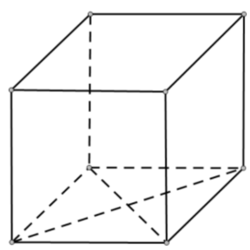
⇨ $AB^2 \geq 64$ => $AB \geq 8$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x = y => ABCD là hình vuông

Min S_{xq} là: 4.20.8 = 640 (cm^2)

Bài 9: Công ty bác Vũ sản xuất thùng gỗ muốn thiết kế số lượng lớn thùng đựng hàng hóa bên trong, dạng hình lăng trụ tứ giác đều không nắp với thể tích là 62,5dm^3. Để tiết kiệm vật liệu làm thùng, người thi công cần thiết kế thùng sao cho tổng diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy là nhỏ nhất. Hỏi diện tích có giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi độ dài cạnh đáy của hình lăng trụ là x (dm)(x > 0).

Ta có V = 62,5 => x.x.h = 62,5 => h = $\frac{62,5}{x^2}$ (dm)

S_{xq} hình lăng trụ đứng là: 4xh + x^2 = $\frac{250}{x}$ + x^2 = $\frac{125}{x}$ + $\frac{125}{x}$ + x^2

Áp dụng bất đẳng Cô-si 3 số cho x^2; $\frac{125}{x}$; $\frac{125}{x}$ (vì x > 0)

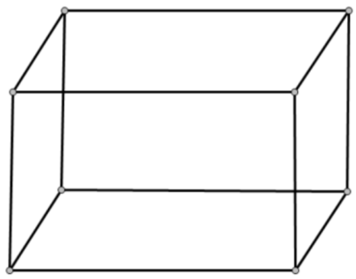
$\frac{125}{x} + \frac{125}{x} + x^2 \geq 3\sqrt[3]{x^2.\frac{125}{x}.\frac{125}{x}} = 75$

Dấu '=" xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = \frac{125}{x}$ => x = 5

Vậy diện tích gỗ nhỏ nhất để sản xuất thùng là 75dm^2 khi độ dài cạnh đáy là 5dm

Bài 10: Gia đình bác Hòa muốn xây một hồ chứa nước dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 400m^3. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp bốn lần chiều rộng. Giá thuê nhân công xây bể là 500.000 đồng/m^2 (bao gồm cả diện tích tường và đáy bể). Hỏi chi phí thuê nhân công thấp nhất mà bác Hòa phải trả để xây hồ chứa nước là bao nhiêu triệu đồng?

Lời giải



Gọi chiều rộng của đáy bể là x (m)(x > 0)

Gọi chiều cao của hình hộp chữ nhật là y (m)(y > 0)

Chiều dài của bể là: 4x (m)

Ta có V = 400 => 4xy = 400 => xy =100 => y = $\frac{100}{x}$

$S_{\text{cần xây}}$ là: $S_{xq} + S_{\text{đáy}}$ = 2(x + 4x).y + $4x^2$ = $4x^2 + 10.\frac{100}{x} = 4x^2 + \frac{1000}{x}$

Cách 1:

Ta có: $4x^2 + \frac{1000}{x} = (4x^2 + 100) + \frac{1000}{x} - 100$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số $4x^2$; 100 (Vì x > 0)

$(4x^2 + 100) + \frac{1000}{x} - 100 \geq 2\sqrt{4x^2.100} + \frac{1000}{x} - 100 = 40x + \frac{1000}{x} - 100$

⇨ $S_{\text{cần xây}} \geq 40x + \frac{1000}{x} - 100 \geq 2\sqrt{40x.\frac{1000}{x}} - 100 = 300$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $4x^2 = 100$ và $40x = \frac{1000}{x}$

⇨ x = 5 thì Min $S_{\text{cần xây}} = 300$

Vậy chi phí thấp nhất thuê nhân công là: 300.500000 = 150000000 đồng = 150 triệu đồng

Cách 2:

Ta có: $4x^2 + \frac{1000}{x} = 4x^2 + \frac{500}{x} + \frac{500}{x}$

Áp dụng bất đẳng Cô-si 3 số cho $4x^2$; $\frac{500}{x}$; $\frac{500}{x}$ (vì x > 0)

$4x^2 + \frac{500}{x} + \frac{500}{x} \geq 3\sqrt[3]{4x^2.\frac{500}{x}.\frac{500}{x}} = 300$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $4x^2 = \frac{500}{x}$ => x = 5

⇨ Min $S_{\text{cần xây}} = 300$ thì x = 5

Vậy chi phí thấp nhất thuê nhân công là: 300.500000 = 150000000 đồng = 150 triệu đồng

Bài 11: Một đội thợ cần xây một bể chứa $108m^3$ nước có dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông và không có nắp. Hỏi chiều dài cạnh đáy và chiều cao của lòng bể bằng bao nhiêu để số viên gạch dùng xây bể là ít nhất? Biết thành bể và đáy bể đều được xây bằng gạch, độ dày của thành bể và đáy là như nhau, các viên gạch có kích thước như nhau và số viên gạch trên đơn vị diện tích là bằng nhau.

Lời giải

Gọi độ dài đáy của hình hộp chữ nhật là x (m)(x > 0)

Gọi chiều cao của hình hộp chữ nhật là h (m)(h > 0)

Ta có V = 108 m^3 => x.x.h = 108 => $h = \frac{108}{x^2}$ (m)

S_{tp} không nắp là: $4xh + x^2 = \frac{432}{x} + x^2 = \frac{216}{x} + \frac{216}{x} + x^2$

Áp dụng bất đẳng Cô-si 3 số cho x^2; $\frac{216}{x}$; $\frac{216}{x}$ (vì x > 0)

$\frac{216}{x} + \frac{216}{x} + x^2 \geq 3\sqrt[3]{x^2.\frac{216}{x}.\frac{216}{x}} = 108$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x^2 = \frac{216}{x}$ => x = 6 => h = 3

Vậy độ dài đáy là 6m và chiều cao là 3m của lòng bể thì số viên gạch dùng xây bể là ít nhất

Bài 12: Ông Bắc muốn xây một bể chứa nước dạng hình hộp chữ nhật, đáy bể hình vuông, thể tích bể 13,5 m^3. Giá tiền mua gạch để lát mặt đáy và mặt xung quanh bể là 100000 đồng/m^2. Hỏi ông Bắc nên xây bể có cạnh đáy là bao nhiêu để chi phí mua gạch là ít nhất?

Lời giải

Gọi cạnh của đáy bể là x (m)(x > 0)

Gọi chiều cao của bể là y (m)(y > 0)

Ta có V = 13,5 m^3 => x.x.y = 13,5 => y = $\frac{13,5}{x^2}$ (m)

Đổi 100000 đồng = 100 nghìn đồng

Số tiền lát gạch đáy bể là: $100.x^2 = 100x^2$ (nghìn đồng)

Số tiền lát 4 mặt xung quanh của bể là: 100.4xy = 100.4x.$\frac{13,5}{x^2}$ = $\frac{5400}{x}$ (nghìn đồng)

Tổng số tiền lát gạch là: $100x^2 + \frac{5400}{x}$ (nghìn đồng)

Ta có: $100x^2 + \frac{5400}{x} = 100x^2 + \frac{2700}{x} + \frac{2700}{x}$

Áp dụng bất đẳng Cô-si 3 số cho $100x^2$; $\frac{2700}{x}$; $\frac{2700}{x}$ (vì x > 0)

$100x^2 + \frac{2700}{x} + \frac{2700}{x} \geq 3\sqrt[3]{100x^2.\frac{2700}{x}.\frac{2700}{x}} = 2700$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $100x^2 = \frac{2700}{x}$ => x = 3

Vậy ông Bắc nên xây bể có cạnh đáy là 3 m để chi phí mua gạch là ít nhất.

Bài 13: Một gia đình muốn cải tạo ao nước có dạng hình hộp chữ nhật nhỏ thành hồ nước lớn hơn. Họ dự định xây hồ mới có dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài gấp hai lần chiều rộng và người ta tính được có thể tích bằng $\frac{62500}{3}$ m^3. Theo thị trường xây dựng, giá tiền xây dựng bình quân là 350000 đồng/m^2 (bao gồm cả đáy và thành hồ). Hỏi chi phí thấp nhất mà gia đình đó phải trả để xây dựng hồ nước trên là bao nhiêu tiền?

Lời giải

Gọi chiều rộng của hình chữ nhật đáy hồ là x (m)(x > 0)

Gọi chiều cao của hồ là y (m)(y > 0)

Chiều dài của hình chữ nhật là 2x (m)

Ta có V = $\frac{62500}{3}$ m^3 => 2x.x.y = $\frac{62500}{3}$ => y = $\frac{31250}{3x^2}$

S cần xây dựng là: $S_{\text{cần xây}} = 2x^2 + 2(2x + x)y = 2x^2 + 6xy = 2x^2 + \frac{62500}{x}$

$S_{\text{cần xây}} = 2x^2 + \frac{62500}{x} = (2x^2 + 1250) + \frac{62500}{x} - 1250$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số $2x^2$; 1250 (Vì $x > 0$)

$(2x^2 + 1250) + \frac{62500}{x} - 1250 \geq 2\sqrt{2x^2.1250} + \frac{62500}{x} - 1250 = 100x + \frac{62500}{x} - 1250$

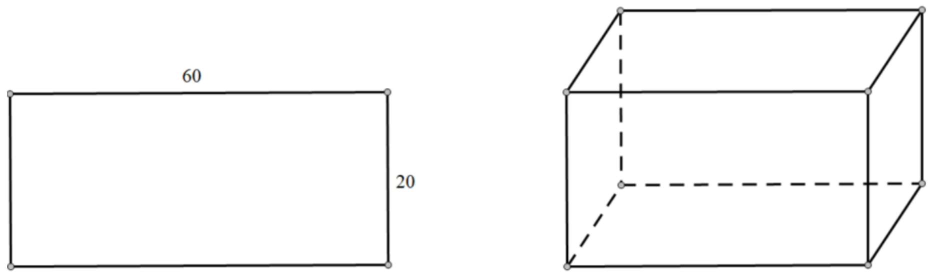
⇨ $S_{\text{cần xây}} \geq 100x + \frac{62500}{x} - 1250 \geq 2\sqrt{100x.\frac{62500}{x}} - 1250 = 3750$

⇨ Min $S_{\text{cần xây}} = 3750$

Vậy chi phí thấp nhất mà gia đình đó phải trả để xây dựng là: 350000.3750 = 1312500000 đồng

Bài 14: Từ một tấm tôn hình chữ nhật có chiều rộng 20cm, chiều dài 60cm, người ta chế tạo thành mặt xung quanh của một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật sao cho chiều rộng của tấm tôn bằng chiều cao của chiếc hộp. Thể tích lớn nhất có thể của chiếc hộp là bao nhiêu?

Lời giải



Gọi chiều rộng của đáy hộp là x (cm)(x>0)

Chiều dài của đáy hộp là $30 - x$ (cm)

Khi đó: $V = x.(30 - x).20$ (cm^3)

Áp dụng bất đẳng thức phụ: $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$ cho x và $30 - x$ (Vì $x > 0$)

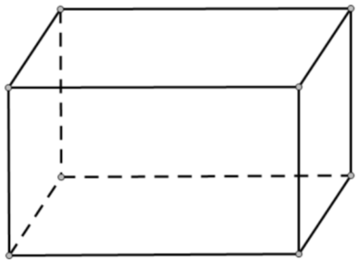
$V \leq 20.\frac{(x + 30 - x)^2}{4} = 4500$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x = 30 - x \Rightarrow x = 15$

Vậy thể tích lớn nhất của chiếc hộp là 4500 cm^3

Bài 15: Một học sinh được giao thiết kế một cái hộp dạng hình hộp chữ nhật thỏa mãn: Tổng của chiều dài và chiều rộng bằng 12cm, tổng của chiều rộng và chiều cao là 24cm. Giáo viên yêu cầu học sinh ấy thiết kế sao cho thể tích cái hộp lớn nhất, giá trị lớn nhất ấy bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi chiều rộng là: x (cm)($0 < x < 12$)

Chiều dài là: 12 – x (cm)

Chiều cao là: 24 – x (cm)

$V_{\text{chiếc hộp}}$ là: x(12 – x)(24 – x) (cm^3)

Ta có: $V = x(12 - x)(24 - x) = \frac{1}{(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})} . x.(\sqrt{3} - 1)(2 - \sqrt{3})(12 - x)(24 - x)$

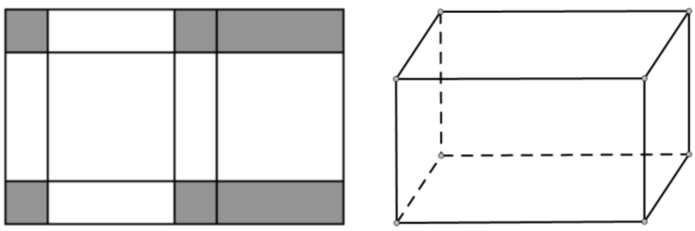
Áp dụng bất đẳng thức phụ Cô-si 3 số cho x; $(\sqrt{3} - 1)(12 - x)$; $(2 - \sqrt{3})(24 - x)$ (Vì x > 0)

$$V \le \frac{1}{(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})} . \left[\frac{x + (\sqrt{3}-1)(12-x) + (2-\sqrt{3})(24-x)}{3}\right]^3 \le \frac{1}{(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})} . \left[\frac{36 - 12\sqrt{3}}{3}\right]^3 = 384\sqrt{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x = (\sqrt{3} - 1)(12 - x) = (2 - \sqrt{3})(24 - x) \Rightarrow x = 12 - 4\sqrt{3}$

Vậy $V_{max} = 384\sqrt{3}$ khi $x = 12 - 4\sqrt{3}$

Bài 16: Với tấm nhôm hình chữ nhật có kích thước 5dm, 8dm (bề dày không đáng kể). Người ta phân chia tấm nhôm như hình vẽ và cắt bỏ một phần (phần tô tậm là phần bị cắt bỏ) để gấp lại được một cái hình hộp chữ nhật có nắp (xem hình vẽ bên). Tìm x (dm) để thể tích chứa của khối hộp chữ nhật là lớn nhất.



Lời giải

⇨ V = x(5 – 2x)(4 – x)

Áp dụng bất đẳng thức phụ Cô-si 3 số cho x; (5 – 2x); (4 – x) (Vì x > 0)

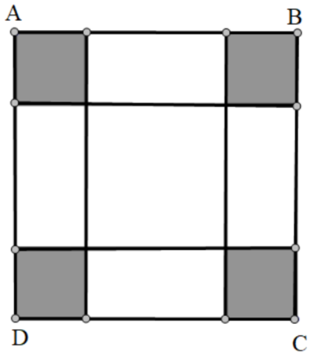
$V = x(5 - 2x)(4 - x) = \frac{1}{3}.3x(5 - 2x)(4 - x) \le \frac{1}{3}.\left(\frac{3x + 5 - 2x + 4 - x}{3}\right)^3 = 9$ (dm^3)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $3x = 5 - 2x = 4 - x \Rightarrow x = 1$

Vậy x = 1 thì thể tích chứa của khối hộp chữ nhật là lớn nhất

Bài 17: Một miếng bìa hình vuông ABCD có cạnh 6dm. Ở mỗi góc của hình vuông người ta cắt đi một hình vuông nhỏ cạnh x rồi gấp bìa để được một hình hộp chữ nhật (không có nắp). Tính cạnh x của hình vuông nhỏ để hộp có thể tích lớn nhất.

Lời giải



Gọi cạnh hình vuông nhỏ là x (dm)($x > 0$)

Ta có: $V = x(6 - 2x)^2 = 4x(3 - x)^2$

⇨ $\frac{V}{2} = 2x(3 - x)(3 - x)$

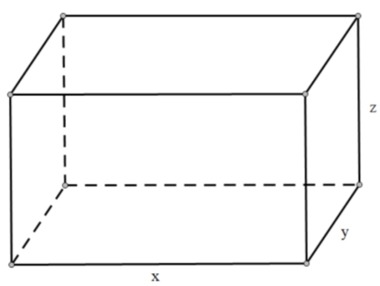
Ba số nguyên dương $2x$, $3 - x$, $3 - x$ có tổng không đổi bằng 6 nên tích của chúng lớn nhất khi:

$2x = 3 - x = 3 - x \Rightarrow x = 1$

⇨ $V = 1(6 - 2.1)^2 = 16$ (dm^3)

Vậy cạnh của hình vuông nhỏ bằng 1dm thì hộp có thể tích lớn nhất

Bài 18: Gọi x, y, z là chiều dài, chiều rộng và chiều cao của thùng giấy dạng hình hộp chữ nhật không có nắp trên (hình vẽ). S là tổng diện tích xung quanh và đây còn lại. Trong các thùng có cùng diện tích S, tim tổng $x + y + z$ theo S của chiếc thùng có thể tích lớn nhất.(Các độc giả tự làm)



Lời giải

Ta có: $S = xy + 2xz + 2yx$

Áp dụng bất đẳng thức phụ Cô-si 3 số cho xy; 2xz; 2yz

$xy + 2xz + 2yx \geq 3\sqrt[3]{4x^2y^2z^2} \Rightarrow S^3 \geq 9.4x^2y^2z^2 \Rightarrow \left(\frac{S}{3}\right)^3 \geq 4x^2y^2z^2 = 4V^2$

⇨ $V \le \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{S}{3}\right)^3}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: xy = 2xz = 2yz => $x = y = 2z = \sqrt{\frac{S}{3}}$

⇨ $x + y + z = \frac{5}{2}.\sqrt{\frac{S}{3}} = \frac{5\sqrt{3S}}{6}$

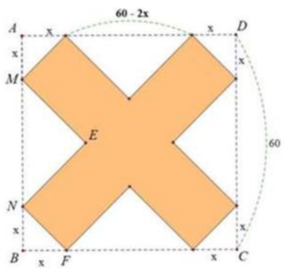
Bài 19: Gia đình nhà bạn An muốn làm bể cá cảnh có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, đáy là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và có thể tích bằng $1m^3$. Biết rằng chi phí để làm mặt đáy là 500000 đồng/m^2 và đắt gấp đôi chi phí làm các mặt xung quanh. Em hãy tính xem, gia đình bạn An cần chi tối thiểu bao nhiêu tiền để làm bể cá nói trên (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)? (Các độc giả tự làm)

Bài 20: Một xưởng sản xuất những thùng bằng kẽm hình hộp chữ nhật không có nắp và có các kích thước x, y, z (dm). Biết tỉ số hai cạnh đáy là x : y = 1 : 3 thể tích của hộp bằng 18 lít. Để tốn ít vật liệu nhất thì kích thước của thùng là bao nhiêu? (Các độc giả tự làm)

Bài 21: Ông Huy muốn xây một bể chứa nước dạng hình hộp chữ nhật, phần nắp ô có diện tích bằng 20% diện tích của đáy bể. Biết đáy bể là một hình chữ Nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, biết bể có thể chứa tối đa 10m nước và là 500000 đồng/m . Số tiền trả ít nhất cho nhân công mà ông phải trả là bao nhiêu? (Các độc gải tự làm)

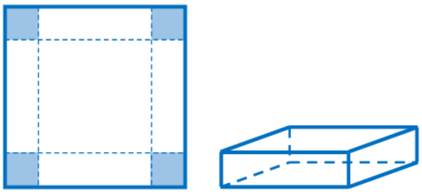
Bài 22: Ông An muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng khối hộp chữ nhật không nắp với thể tích $288m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/m^2. Nếu ông An biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông An trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể đó là bao nhiêu? (Các độc giả tự làm)

Bài 23: Từ hình vuông có cạnh bằng 60 cm bạn Châu cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ. Sau đó bạn Châu gập thành hộp để đồ có dạng hình hộp chữ nhật không nắp. Tìm x để thể tích của khối hộp lớn nhất. (Các độc giả tự làm)



Bài 24: Từ một hình vuông cạnh bằng 6, bạn An cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ. Sau đó bạn An gập lại thành hộp quà có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp. Tìm x để khối hộp có thể tích lớn nhất. (Các độc giả tự làm)

Bài 25: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 18 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất? (Các độc giả tự làm)



Bài 26: Một trang trại chăn nuôi dự định xây dựng một hầm biogas với thể tích 12m^3 để chứa chất thải chăn nuôi và tạo khí sinh học. Dự kiến hầm chứa có dạng hình hộp chữ nhật có chiều sâu gấp rưỡi chiều rộng. Hãy xác định các kích thước đáy (dài, rộng) của hầm biogas để thi công tiết kiệm nguyên vật liệu nhất (không tính đến bề dày của thành bể) (Các độc giả tự làm)

Bài 27: Ông Huy xây một hồ nước dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích 18m^3, đáy hồ là một hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây hồ là 500000 đồng/m^2. Chi phí thấp nhất để xây hồ là bao nhiêu? (Các độc giả tự làm)

Bài 28: Một người muốn xây một cái bể chứa nước, dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 288dm^2. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/m^2. Nếu người đó biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi người đó trả chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây dựng bể đó là bao nhiêu? (Các độc giả tự làm)

Bài 29: Anh Minh muốn xây dựng một hố ga không có nắp đậy dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chứa được 3200cm^3, tỉ số giữa chiều cao và chiều rộng của hố ga bằng 2. Xác định diện tích đáy của hố ga để khi xây hố tiết kiệm được nguyên vật liệu nhất. (Các độc giả tự làm)

Bài 30: Ông Bình đặt thợ làm một bể cá, nguyên liệu bằng kính trong suốt, không có nắp đậy dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chứa được 220500cm^3 nước. Biết tỉ lệ giữa chiều cao và chiều rộng của bể bằng 3. Xác định diện tích đáy của bể cá để tiết kiệm nguyên vật liệu nhất. (Các độc giả tự làm)

Bài 31: Người ta muốn thiết kế một bể cá theo dạng khối lăng trụ tứ giác đều, không có nắp trên, làm bằng kính, thể tích 8m^3 . Giá mỗi m^2 kính là 600000 đồng/m^2 . Gọi t là số tiền tối thiểu phải trả. Hãy tính giá trị của t. (Các độc giả tự làm)

Bài 32: Người ta cần xây một bể chứa nước sản xuất dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 200m^3. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chi phí để xây bể là 300 nghìn đồng/m^2 (chi phí được tính theo diện tích xây dựng, bao gồm diện tích đáy và diện tích xung quanh, không tính chiều dày của đáy và diện tích xung quanh, không tính chiều dày của đáy và thành bể). Hãy xác định chi phí thấp nhất để xây bể (làm tròn đến đơn vị triệu đồng). (Các độc giả tự làm)

Bài 33: Ông An muốn xây một bể nước dạng hình hộp chữ nhật có nắp với dung tích 3000 lít. Đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây hồ là 500000 đồng cho mỗi mét vuông. Hỏi chi phí thấp nhất ông An cần bỏ ra để xây bể nước là bao nhiêu? (Các độc giả tự làm)

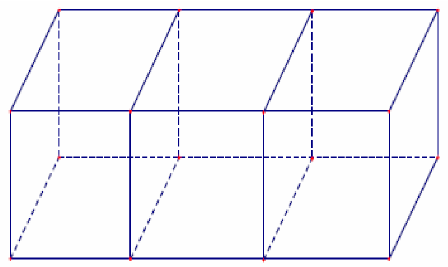
Bài 34: Từ một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước 40cm và 60cm người ta cắt bỏ bốn hình vuông ở bốn góc để gập lại được một cái hộp không nắp. Để thể tích hộp đó lớn nhất thì cạnh của hình vuông cắt bỏ xấp xỉ bằng bao nhiêu? (Các độc giả tự làm)

Bài 35: Một hộp đựng Chocolate bằng kim loại có hình dạng lúc mở nắp như hình vẽ dưới đây. Một phần tư thể tích phía trên của hộp được rải một lớp bơ sữa ngọt, phần còn lại phía dưới chứa đầy chocolate nguyên chất. Với kích thước như hình vẽ, gọi $x = x_0$ là giá trị làm cho hộp kim loại có thể tích lớn nhất, khi đó thể tích chocolate nguyên chất có giá trị V_0 bằng bao nhiêu? (Các độc giả tự làm)

Bài 36: Một bác thợ gò hàn làm một chiếc thùng hộp chữ nhật không nắp bằng tôn có thể tích 666,5 dm^3. Chiếc thùng có đáy là hình vuông cạnh x (dm), chiều cao là h (dm) . Để làm chiếc thùng bác thợ phải cắt một miếng tôn như hình vẽ. Tìm x để bác thợ gò hàn sử dụng ít nguyên liệu nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm). (Các độc giả tự làm)

Bài 37: Ông Hưng dự định sử dụng hết 6,5m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)? (Các độc giả tự làm)

Bài 38: Một người xây nhà xưởng hình hộp chữ nhật có diện tích mặt sàn là 1152m^2 và chiều cao cố định. Người đó xây các bức tường xung quanh và bên trong để ngăn nhà xưởng thành ba phòng hình chữ nhật có kích thước như nhau (không kể trần nhà). Vậy cần phải xây các phòng theo kích thước nào để tiết kiệm chi phí nhất (bỏ qua độ dày các bức tường). (Các độc giả tự làm)



Bài 39: Một người bán gạo muốn đóng một thùng tôn đựng gạo có thể tích không đổi bằng 10 m^3, thùng tôn hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông, không nắp. Trên thị trường, giá tôn làm đáy thùng là 90 000 đồng/m^2 và giá tôn làm thành xung quanh thùng là 40 000 đồng/m^2. Hỏi người bán gạo đó cần đóng thùng đựng gạo với cạnh đáy bằng bao nhiêu để chi phí mua nguyên liệu là nhỏ nhất?

Bài 40: Để thiết kế một chiếc bể cá hình hộp chữ nhật không nắp có chiều cao là 60 cm, thể tích 96 000 cm^3. Người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70 000 VNĐ/m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành 100 000 VNĐ/m^2. Tính chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá.

2.2: Bài toán liên quan đến các hình đặc biệt

- Đây là một dạng bài rất quen thuộc, khó hơn so với hình không gian khác và được nhiều trường ra trong câu cuối đề thi giữa kì, cuối kì. Vậy nên nếu muốn được điểm 10 thì các độc giả cần phải nắm vững dạng bài này.

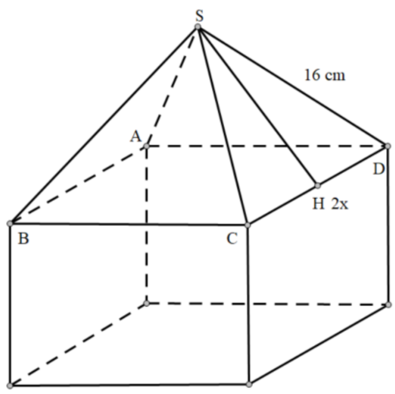
- Dạng bài sẽ xoay quanh các hình như là hình trụ, hình cầu, hình nón, hình lăng trụ, hình chóp,…….

Lưu ý: các công thức sẽ không được nhắc đến trong bài. Vì vậy các độc giả cần phải nắm vững được các loại công thức của hình

Bài Tập

Bài 1: Bạn Nam làm một căn nhà đồ chơi bằng gỗ có phần mái là một chóp tứ giác đều. Biết các cạnh bên của mái nhà bạn Namdùng các thanh gỗ có chiều dài 16 cm. Bạn Nam dự định dùng giấy màu để phủ kín phần mái nhà. Gọi độ dài cạnh đáy của phần mái là 2x (cm). Hỏi diện tích giấy màu cần sử dụng nhiều nhất là bao nhiêu?

Lời giải



Kẻ SH ⊥CD tại H suy ra H là trung điểm của CD => CH = HD = $\frac{CD}{2}$ = x (cm)(0 < x < 16)

Xét ΔSHD vuông tại H:

SH = $\sqrt{SD^2 - HD^2} = \sqrt{16^2 - x^2} = \sqrt{256 - x^2}$

S_{xq} phần mái là: $S_{xq} = 4x\sqrt{256 - x^2} = 4\sqrt{x^2(256 - x^2)}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si 2 số dạng $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ cho x^2; $256 - x^2$ (Vì x > 0)

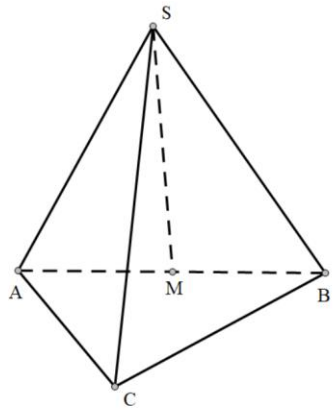
$4\sqrt{x^2(256 - x^2)} \leq 4\frac{x^2 + 256 - x^2}{2} = 512$ (cm^2)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x^2 = 256 - x^2 \Rightarrow x = 8\sqrt{2}$

Vậy diện tích giấy màu cần sử dụng nhiều nhất là 512 cm^2

Bài 2: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có các cạnh bên đều bằng 6 cm, độ dài cạnh đáy là x (cm). Tìm x để diện tích xung quanh của hình chóp đều đó là lớn nhất.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của AB => SM là đường trung đoạn của hình chóp S.ABC

Ta có AB = AC = BC = x => $SM^2 = SB^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 6^2 - \frac{x^2}{4}$ => SM = $\frac{1}{2}\sqrt{4.6^2 - x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{144 - x^2}$

S_{xq} hình chóp là: $\frac{3x}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{144 - x^2} = \frac{3x}{4}\sqrt{144 - x^2} = \frac{3}{4}x\sqrt{144 - x^2}$

Áp dụng bất đẳng thức phụ: ab ≤ $\frac{a^2 + b^2}{2}$ cho x và $\sqrt{144 - x^2}$ (Vì x > 0)

$x\sqrt{144 - x^2} \leq \frac{x^2 + 144 - x^2}{2} = 72$

- ⇨ $S_{xq} \leq \frac{3}{4}.72 = 54$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x = \sqrt{144 - x^2}$ => $x = 6\sqrt{2}$

Vậy $x = 6\sqrt{2}$ thì diện tích xung quang của hình chop đều là lớn nhất

Bài 3: Một cửa hàng xăng dầu định làm một bể dự trữ xăng hình trụ có thể tích là 25m^3 bằng thép. Để diện tích thép cần dùng tốn ít nhất thì cửa hàng nên làm bồn có chiều cao là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)?

Lời giải

Để diện tích thép cần dùng tốn ít nhất thì diện tích toàn phần của bồn phải nhỏ nhất

Ta có $V = \pi R^2 h$ => $h = \frac{V}{\pi R^2}$

$S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi(R^2 + Rh) = 2\pi\left(R^2 + R\frac{V}{\pi R^2}\right) = 2\pi\left(R^2 + \frac{V}{\pi R}\right) = 2\pi\left(R^2 + \frac{V}{2\pi R} + \frac{V}{2\pi R}\right)$

Lại có: $\frac{V}{2\pi R}.\frac{V}{2\pi R} = \frac{V}{4\pi^2 R^2} = \frac{625}{4\pi^2}$ không đổi

- ⇨ S_{tp} nhỏ nhất khi $\left(R^2 + \frac{V}{2\pi R} + \frac{V}{2\pi R}\right)$ nhỏ nhất
- ⇨ $R^2 = \frac{V}{2\pi R}$ => $V = 2\pi R^3$ => $\pi R^2 h = 2\pi R^3$ => $h = 2R$

Mà $2\pi R^3 = 25$ => $R^3 \approx 3.98$ => $R \approx 1,58$ => $h \approx 3,16$ (m)

Vậy để diện tích thép tốn ít nhất thì cửa hành cần làm bồn có chiều cao là 3,16m

Bài 4: Người ta cần làm một cái bồn chứa nước dạng hình trụ có thể tích 1000 lít bằng inox để chứa nước, tính bán kính của hình trụ đó sao cho diện tích toàn phần của bồn chứa đó là nhỏ nhất.

Lời giải

Đổi 1000 lít = 1 (m^3)

Ta có: $V = \pi R^2 h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{\pi R^2}$

S_{tp} của bồn là: $2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R^2 + 2\pi R.\frac{1}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + \frac{2}{R} = 2\pi R^2 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}$

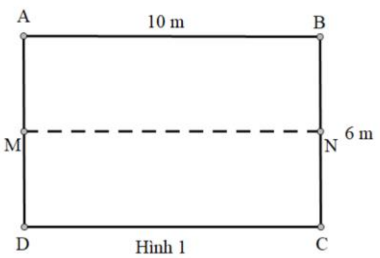
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si 3 số cho $2\pi R^2; \frac{1}{R}; \frac{1}{R}$ (Vì x > 0)

$2\pi R^2 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \geq 3\sqrt[3]{2\pi R^2.\frac{1}{R}.\frac{1}{R}} = 3\sqrt[3]{2\pi}$

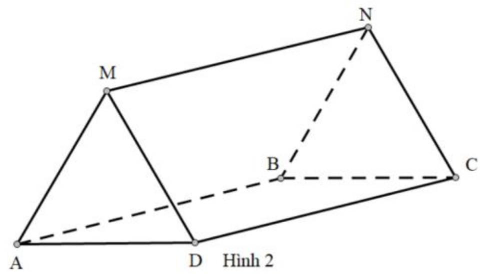
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $2\pi R^2 = \frac{1}{R} \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$

Vậy $R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ thì diện tích toàn phần của bồn chứa là nhỏ nhất

Bài 5: Trong buổi tham quan dã ngoại, mỗi lớp khối 9 được chuẩn bị một mảnh bạt hình chữ nhật ABCD cùng loại, có chiều dài 10m và chiều rộng 6m, với M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC (hình 1).



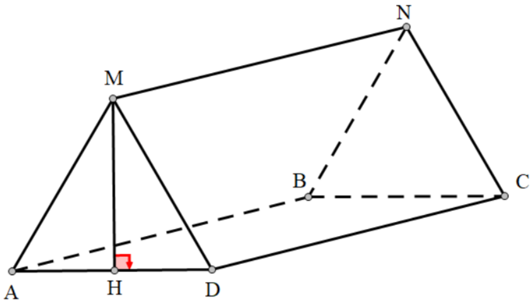
Hình 1



Hình 2

Mỗi lớp sử dụng tấm bạt như trên để dựng thành chiếc lều có dạng hình lăng trụ đứng tam giác (hình 2); hai đáy hình lăng trụ là hai tam giác cân: ΔAMD và ΔBNC, với độ dài cạnh đáy của hai tam giác cân này là x (m). (Tấm bạt chỉ sử dụng để dựng thành hai mái lều, không trải thành đáy lều). Tìm x để thể tích không gian trong lều là lớn nhất.

Lời giải



Kẻ MH vuông góc với AD của ΔAMD

Vì ΔAMD cân tại M => H là trung điểm của AD => HA = HD = $\frac{AD}{2} = \frac{x}{2}$ (0 < x < 6)

MH = $\sqrt{AM^2 - HD^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{36 - x^2}}{2}$

$S_{\Delta AMD}$ là: $\frac{1}{2}$AD.MH = $\frac{1}{2}x.\frac{\sqrt{36-x^2}}{2} = \frac{x\sqrt{36-x^2}}{4}$ (m^2)

V lăng trụ là: $S_{\Delta AMD}$.MN = 10. $\frac{x\sqrt{36-x^2}}{4} = \frac{5}{2}x\sqrt{36 - x^2}$ (m^3)

Đặt A = = $\frac{5}{2}x\sqrt{36 - x^2}$ => $A^2 = \frac{25}{4}x^2(36 - x^2)$

Áp dụng bất đẳng thức phụ: $ab \le \frac{(a+b)^2}{4}$ cho x^2 và $36 - x^2$ (Vì x > 0)

$x^2(36 - x^2) \le \frac{(x^2 + 36 - x^2)^2}{4}$ => $A^2 \le \frac{25}{4}\left[\frac{(x^2+36-x^2)^2}{4}\right] = 2025$

⇨ A ≤ 45

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x^2 = 36 - x^2$ => $x = 3\sqrt{2}$

Vậy $x = 3\sqrt{2}$ thì thể tích không gian trong lầu là lớn nhất

Bài 6: Một miếng tôn phẳng hình vuông với kích thước a cm, người ta cắt đi ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh bằng x cm để uốn thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Phải cắt như thế nào để hình hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất?

Lời giải

Ciều cao là x (cm)(x > 0)

Chiều dài cạnh của miếng tôn sau khi cắt là a – 2x (cm)

Thể tích của hình hộp là: V = x(a – 2x)(a – 2x) = $\frac{1}{4}$.4x(a – 2x)(a – 2x)

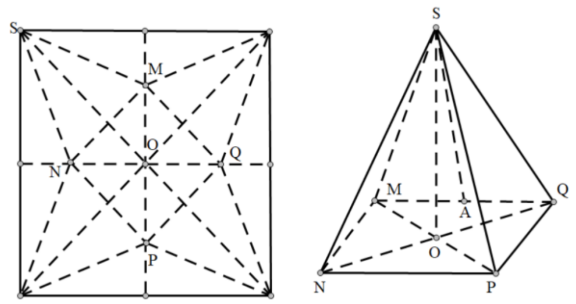
Áp dụng bất đẳng thức phụ Cô-si 3 số cho 4x; (a – 2x); (a – 2x) (Vì x > 0)

$4x(a - 2x)(a - 2x) \le (\frac{4x + a - 2x + a - 2x}{3})^3 = \frac{8a^2}{27}$

⇨ $V \le \frac{1}{4}.\frac{8a^2}{27} = \frac{2a^2}{27}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ: 4x = a – 2x = a – 2x => x = $\frac{a}{6}$

Bài 7: Cắt một miếng giấy hình vuông có cạnh bằng 20cm, ở mỗi góc cắt đi một hình vuông nhỏ cạnh x (cm). Tìm x để hình chóp tứ giác đều có thể tích lớn nhất.



Lời giải

Ta có: OA = $\frac{1}{2}$.20 = 10 (cm) => AM = OA – OM = 10 – x; MN = 2OM = 2x (0 < x < 10)

$S_{đáy}$ của hình chóp S.MNPQ là: $S_{đáy} = \frac{1}{2}.MN^2 = \frac{1}{2}.(2x)^2 = 2x^2$

Ta lại có: $SM^2 = SA^2 + SM^2$

⇨ h = SO = SM = OM = $\sqrt{SA^2 + AM^2}$ – OM = $\sqrt{10^2 + (10 - x)^2}$ – x = $\sqrt{200 - 20x}$

V của hình chóp S.MNPQ là: $V = \frac{1}{3}.2x^2\sqrt{200 - 20x}$

⇨ $V^2 = \frac{4}{9}x^4(200 - 20x) = \frac{4}{9.5^4}.5x.5x.5x.5x(200 - 20x)$

Áp dụng bất đẳng thức phụ Cô-si 5 số dạng: abcde ≤ $\left(\frac{a+b+c+d+e}{5}\right)^5$ cho 5x; 5x; 5x; 5x; 200 – 20x

$5x.5x.5x.5x(200 - 2x) \le \left(\frac{5x + 5x + 5x + 5x + 200 - 2ox}{5}\right)^5 = 40^5$

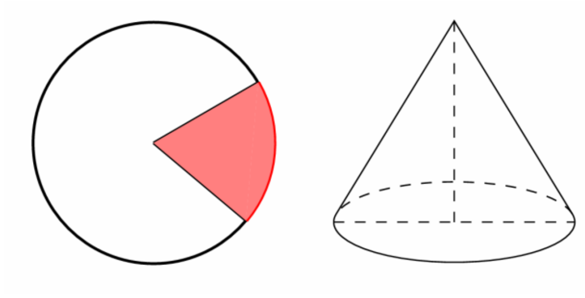
⇨ $V^2 \le \frac{4}{9.5^4}.40^5 = \frac{2^{18}.10}{9}$ => $V \le \frac{512\sqrt{10}}{3}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi 5x = 200 – 20x => x = 8

Vậy x = 8 thì hình chop tứ giác đều có thể tích lớn nhất

Lưu ý: Bài này sẽ ít xuất hiện trong các đề thi, đề kiểm tra vì chứng minh bất đẳng thức phụ Cô-si 5 số rất dài và lâu.

Bài 8: Với một tấm tôn hình tròn có bán kính R = 6 cm. Người ta muốn làm một cái phễu bằng cách cắt một phần (dạng hình quạt) của hình tròn như hình bên dưới. Thể tích lớn nhất của hình nón có được khi người ta cắt cung tròn của hình quạt có chiều dài là bao nhiêu?



Lời giải

Gọi chiều dài cung tròn được ghép tạo thành hình nón là x (cm)(x > 0)

⇨ Đường tròn đáy của hình nón có độ dài là x (cm)
⇨ Bán kính R của hình trong sẽ trở thành đường sinh của hình nón

Gọi bán kính đáy là r (cm)(r > 0)

⇨ $2\pi r = x \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$

Chiều cao của hình nón là: $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$

Thể tích của hình nón là: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}.\frac{x^2}{4\pi^2}.\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$

Ta có: $V^2 = \frac{\pi^2}{9}.\frac{x^2}{4\pi^2}.\frac{x^2}{4\pi^2}.\frac{x^2}{4\pi^2}.\left(R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức phụ Cô-si 5 số dạng: $abcd \le \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$ cho: $\frac{x^2}{4\pi^2}; \frac{x^2}{4\pi^2}; \frac{x^2}{4\pi^2}; \left(R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)$

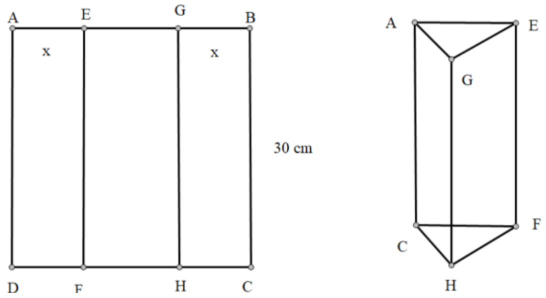
$$\frac{x^2}{4\pi^2}.\frac{x^2}{4\pi^2}.\frac{x^2}{4\pi^2}.\left(R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \le \left(\frac{\frac{x^2}{4\pi^2} + \frac{x^2}{4\pi^2} + \frac{x^2}{4\pi^2} + R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}{4}\right)^4 = \frac{R^8}{27}$$

⇨ $V^2 \le \frac{\pi^2}{9}.\frac{R^8}{27}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x^2}{4\pi^2} = R^2 \Rightarrow x = 4\sqrt{6}\pi$

Vậy cung tròn của hình quạt dài $4\sqrt{6}\pi$ thì thể tích của hình nón là lớn nhất

Bài 9: Một xưởng sản xuất Bình Minh trên cạnh AB của tấm thép hình vuông ABCD có cạnh 30cm, người ta lấy hai điểm E, G sao cho AE = GB = x (cm). Gấp hình vuông theo hai cạnh EF và GH sao cho cạnh AD trùng cạnh BC như hình vẽ tạo thành hình lăng trụ đứng khuyết đáy. Tìm x để thể tích lăng trụ lớn nhất.



Lời giải

Ta có: EG = 30 – 2x (cm)

Kẻ đường cao AK của ΔAGE => K là trung điểm GE => KE = GE : 2 = 15 – x (cm)

Ta có AE > KE => x > 15 – x => x > $\frac{15}{2}$

Ta dễ dàng tính được AK = $\sqrt{30x - 225}$

$S_{đáy}$ AGE là: (15 – x) $\sqrt{30x - 225}$

V lăng trụ là: 30(15 – x) $\sqrt{30x - 225}$ = $10\sqrt{15}.3.\sqrt{2x - 15}.\sqrt{15 - x}.\sqrt{15 - x}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si 3 số cho (2x – 15); (15 – x); (15 – x)

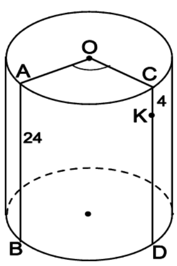
$3\sqrt[3]{(2x - 15)(15 - x)(15 - x)} \leq$ 2x – 15 +15 – x + 15 – x = 15

- ⇨ $(2x - 15)(15 - x)(15 - x) \leq 5^3$ => $\sqrt{(2x - 15)(15 - x)(15 - x)} \leq 5\sqrt{5}$
- ⇨ $V \leq 10\sqrt{15}.3.\ 5\sqrt{5} = 750\sqrt{3}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: 2x – 15 = 15 – x => x = 10

Vậy x = 10 thì thể tích lăng trụ lớn nhất

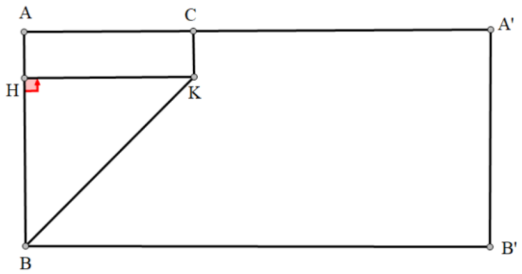
Bài 10: Cho hình trụ có bán kính đáy 9 cm và chiều cao 24 cm (như hình vẽ bên). Biết AB và CD là hai đường sinh sao cho ∠AOC = 128°Điểm K trên CD sao cho CK = 4 cm. Một con kiến bò từ B đến K. Tính độ dài ngắn nhất mà kiến phải bò (làm tròn kết quả đến cm).



Lời giải

Gọi bán kính hình trụ là R. Độ dài của cung nhỏ AC là:

$l = \frac{\pi Rn}{180} = \frac{32\pi}{5}$ (cm)



Cắt mặt xung quanh của hình trụ theo đường sinh AB rồi trải phẳng ra ta được một hình chữ nhật (hình bên)

BK trên mặt xung quanh của hình trụ có dạng cong nhưng sau khi trải phẳng ra ta được đoạn thẳng BK.

Xét ΔHBK vuông tại H ta có:

$BK^2 = BH^2 + HK^2$

⇨ $BK = \sqrt{20^2 + \left(\frac{32\pi}{5}\right)^2} \approx 28$ cm

Vậy độ dài ngắn nhất mà kiến phải bò khoảng 28cm

Bài 11: Một người có một dải duy băng dài 130 cm, người đó cần bọc dải duy băng đỏ đó quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10 cm của dải duy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (như hình vẽ minh họa).Hỏi dải duy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích lớn nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi bán kính đáy của hình trụ là x (cm)(x > 0)

Gọi chiều cao của hình trụ là h (cm)(h > 0)

Gọi chiều dài dải ruy băng cần bọc quanh hình trụ là L (cm)(L > 0)

Độ dài dải ruy băng cần bọc quanh hình trụ là: L = 130 – 10 = 120 (cm)

⇨ L = 2(4x + 2h) => h = 30 – 2x

V hình trụ là: $\pi r^2 h = \pi x^2(30 - 2x) = \pi.x.x.(30 - 2x)$

Áp dụng bất đẳng thức phụ Cô-si 3 số cho x; x; 30 – 2x (Vì x > 0)

$x.x.(30 - 2x) \le \left(\frac{x + x + 30 - 2x}{3}\right)^3 = 1000$

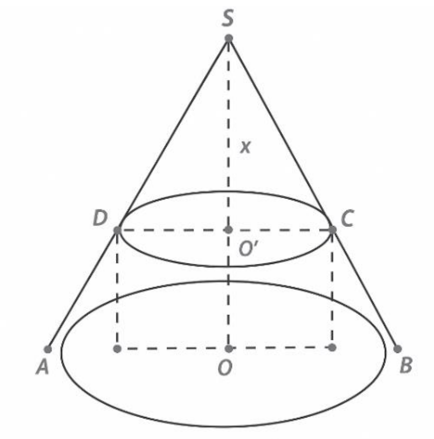
=> $V \le 1000\pi$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: x = 30 – 2x => x = 10 (cm)

Vậy dải ruy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích lớn nhất là 1000π cm^3

Bài 12: Cho hình nón tròn xoay (N) có đỉnh S và đáy là hình tròn tâm O bán kính r nằm trên mặt phẳng (P), đường cao SO = h. Điểm O' thay đổi trên đoạn SO sao cho SO' = x (0 < x < h). Hình trụ tròn xoay (T) có đáy thứ nhất là hình tròn tâm O bán kính r' (0 < r '< r) nằm trên mặt phẳng (P), đáy thứ hai là hình tròn tâm O' bán kính r' nằm trên mặt phẳng (Q), (Q) vuông góc với SO tại O' (đường tròn đáy thứ hai của (T) là giao tuyến của (Q) với mặt xung quanh của (N)). Hãy xác định giá trị của x để thể tích phần không gian nằm phía trong (N) nhưng phía ngoài của (T) đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



(Điểm A và B nằm trên (O))

Theo định lý Thales ta có: $\frac{x}{h} = \frac{r'}{r}$ (0 < x < h)

V hình trụ là: $V = \pi r'^2(h-x) = \pi\frac{(xr)^2}{h^2}.(h-x)$ (đvđtt)

Vì thể tích khối nón không đổi nên để phần thể tích không nằm phía trong (N) nhưng phía ngoài (T) đạt giá trị nhỏ nhất thì thể tích hình trụ là lớn nhất

$V = \pi\frac{(xr)^2}{h^2}.(h-x) = \frac{\pi r^2}{h^2}.x^2(h-x) = \frac{\pi r^2}{h^2}.4.\frac{x}{2}.\frac{x}{2}.(h-x)$

Áp dụng bất đẳng thức phụ Cô-si 3 số cho $\frac{x}{2}; \frac{x}{2}; (h-x)$

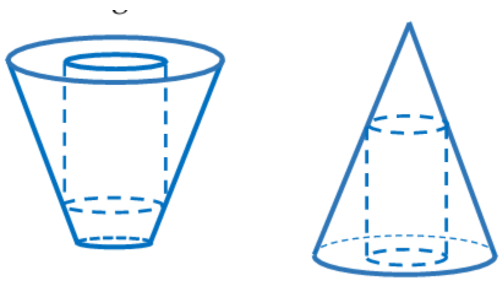
$\frac{x}{2}.\frac{x}{2}.(h-x) \le \left(\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+h-x}{3}\right)^3 = \frac{h^3}{27}$

⇨ $V \le \frac{\pi r^2}{h^2}.4.\frac{h^3}{27} = \frac{4\pi r^2 h}{27}$

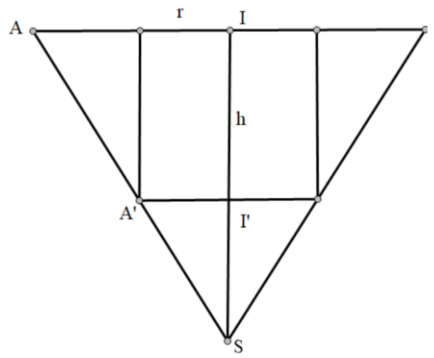
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{x}{2} = h - x \Rightarrow x = \frac{2}{3}h$

Vậy $x = \frac{2}{3}h$ thì thể tích phần không gian nằm phía trong (N) nhưng phía ngoài của (T) đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 13: Khi sản xuất hộp mì tôm, các nhà sản xuất luôn để một khoảng trống ở dưới đáy hộp để nước chảy xuống dưới và ngấm vào vắt mì, giúp mì chín. Hình vẽ dưới mô tả cấu trúc của một hộp mì tôm (hình vẽ chỉ mang tính chất minh họa). Vắt mì tôm có hình một khối trụ, hộp mì tôm có dạng hình nón cụt được cắt ra bởi hình nón có chiều cao 9 cm và bán kính đáy 6 cm. Nhà sản xuất đang tìm cách để sao cho vắt mì tôm có thể tích lớn nhất trong hộp với mục đích thu hút khách hàng. Tìm thể tích lớn nhất đó?



Lời giải



Ta có mặt cắt qua trục hình nón như hình vẽ trên

Gọi chiều cao của hình trụ là h (h > 0)(cm)

Gọi bán kính đáy của hình trụ là r (r > 0)(cm)

Ta có: ΔSAI ~ ΔSA'I' => $\frac{SI}{SI'} = \frac{AI}{A'I'}$ => $\frac{9}{9-h} = \frac{6}{r}$ => h = 9 – $\frac{3r}{2}$

V khối trụ là: V = π.r².h = π.r².$\left(9 - \frac{3r}{2}\right)$ = π$\left(-\frac{3r^3}{2} + 9r^2\right)$

Ta có: $\left(-\frac{3r^3}{2} + 9r^2\right)$ = -$\left(\frac{3r^3}{2} - 9r^2\right)$ = -(r² – 8r +16)($\frac{3}{2}$r + 3) = -(r – 4)²($\frac{3}{2}$r + 3) + 48

Vì r > 0 => $\frac{3}{2}$r > 0 => $\frac{3}{2}$r + 3 > 0

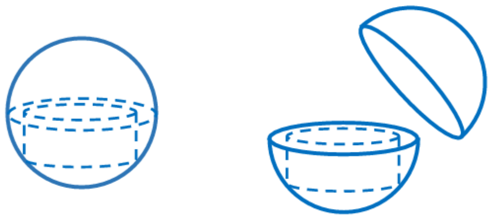
⇨ -(r – 4)²($\frac{3}{2}$r + 3) ≤ 0 => -(r – 4)²($\frac{3}{2}$r + 3) + 48 ≤ 48

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: r – 4 = 0 => r = 4 => h = 3

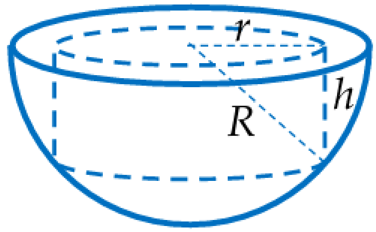
V_{max} = π.4².3 = 48π (cm³)

Vậy thể tích lớn nhất là 48π cm³

Bài 14: Công ty mĩ phẩm chuẩn bị ra một mẫu sản phẩm dưỡng da mới mang tên Ngọc Trai với thiết kế là một khối cầu như viên ngọc trai khổng lồ, bên trong là một khối trụ nằm trong nửa khối cầu để đựng kem dưỡng, như hình vẽ (hình ảnh chỉ mang tính chất minh họa). Theo dự kiến, nhà sản xuất có dự định để khối cầu có bán kính là $R = 3\sqrt{3}$ cm. Tìm thể tích lớn nhất của khối trụ đựng kem để thể tích thực ghi trên bìa hộp là lớn nhất (với mục đích thu hút khách hàng).



Lời giải



Gọi chiều cao hình trụ là h (h > 0)(cm)

Gọi bán kính đáy hình trụ là r (r > 0)(cm)

Theo pytago ta có: $r^2 + h^2 = R^2 = 27 \Rightarrow r^2 = 27 - h^2$

V hình trụ là: $V = \pi r^2 h = \pi(27 - h^2)h$

Ta có: $(27 - h^2)h = -h^3 + 27h = -(h^3 - 27h) = -(h^2 - 6h + 9)(h + 6) + 54 = -(h - 3)^2(h + 6) + 54$

Vì $h > 0 \Rightarrow h + 6 > 0$

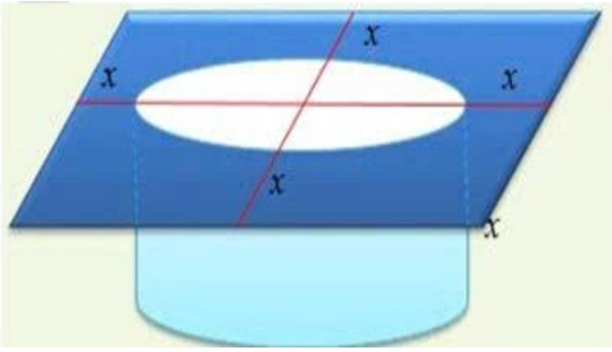
⇨ $-(h - 3)^2(h + 6) + 54 \le 54$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $h - 3 = 0 \Rightarrow h = 3 \Rightarrow r = 3\sqrt{2}$

$V_{max} = \pi.\left(3\sqrt{2}\right)^2.3 = 54\pi$

Vậy thể tích lớn nhất của khối trụ đựng kem để thể tích thực ghi trên bìa hộp là 54π cm^3

Bài 15: Trên một mảnh đất hình vuông có diện tích $81m^2$ người ta đào một cái ao nuôi cá hình trụ có 2 đáy là hình tròn (như hình vẽ) sao cho tâm của hình tròn trùng với tâm của mảnh đất. Ở giữa mép ao và mép mảnh đất người ta để lại một khoảng đất trống để đi lại, biết khoảng cách giữa mép ao và mép mảnh đất là x mét. Biết chiều sâu của ao cũng là x mét. Tìm thể tích lớn nhất ao có thể đạt được.



Lời giải

Gọi bán kính của ao là r (r > 0)(cm)

⇨ Độ sâu của ao là h = x (cm)

Mảnh đất hình vuông có diện tích là 81 m^2 => cạnh của mảnh đất là 9 m

Ta dễ dàng có được: $r = \frac{9-2x}{2} = \frac{9}{2} - x$ (m)

V ao là: $V = \pi r^2 x = \pi\left(\frac{9}{2} - x\right)^2 x$ (m^3)

Ta có: $\left(\frac{9}{2} - x\right)^2 x = \left(\frac{81}{4} - 9x + x^2\right)x = \frac{81x}{4} - 9x^2 + x^3 = x^3 - 9x^2 + \frac{81x}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2(x + 6) + 13{,}5$

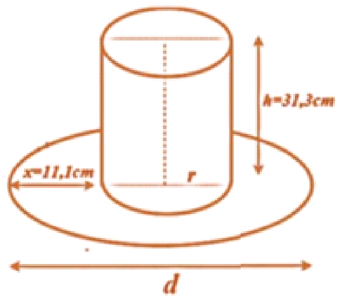
Vì $x - 6 < 0$ mà $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2(x + 6) \leq 0 \Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2(x + 6) + 13{,}5 \leq 13{,}5$

⇨ $V \leq 13{,}5\pi$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

Vậy thể tích lớn nhất ao có thể đạt được là $13{,}5\pi$ m^3

Bài 16: Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật gia gồm phần dạng hình trụ (có tổng diện tích vải là S_2) và phần dạng hình vành khăn (có tổng diện tích vải là S_1) với các kích thước như hình vẽ. Tính tổng (r + d) sao cho biểu thức $P = 3S_2 - S_1$ đạt giá trị lớn nhất (không kể viền, mép, phần thừa).



Lời giải

Ta có: d = 2r +22,2 (cm)

S vải để may phần hình trụ là: $S_1 = 2\pi rh + \pi r^2$

S vải để may phần dạng hình vành khăn là: $S_2 = \frac{\pi d^2}{4} - \pi r^2$

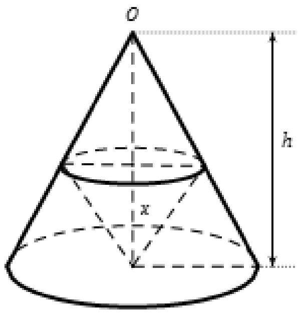
$P = 3S_2 - S_1 = \frac{3\pi d^2}{4} - 4\pi r^2 - 2\pi rh = \frac{3\pi(2r + 22,2)^2}{4} - 4\pi r^2 - 2\pi r.31,3 = \frac{\pi(-4r^2 + 16r + 1478,52)}{4}$

$= \frac{\pi[-4(r-2)^2 + 1494,52]}{4} \le \frac{1494,52\pi}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: r – 2 = 0 => r = 2 => d = 26,2

Vậy r + d = 26,2 thì biểu thức $P = 3S_2 - S_1$ đạt giá trị lớn nhất

Bài 17: Cho khối nón đỉnh O, chiều cao là h. Một khối nón khác có đỉnh là tâm I của đáy và đây là một thiết diện song song với đáy của hình nón đã cho. Để thể tích của khối nón định I lớn nhất thì chiều cao của khối nón này bằng bao nhiêu?



Lời giải

Gọi x là chiều cao cần tìm (x > 0)(cm). R, r lần lượt là chiều cao của khối nón lớn và bé. Khi đó:

$\frac{r}{R} = \frac{h-x}{h} \Rightarrow r = \frac{R(h-x)}{h}$.

Thể tích khối nón đinh I là

$V = \frac{1}{3}\pi\left[\frac{R(h-x)}{h}\right]^2 x = \frac{\pi R^2}{6h^2}(h-x)^2.2x = \frac{\pi R^2}{6h^2}(h-x)(h-x).2x$

Áp dụng bất đẳng thức phụ Cô-si 3 số cho h – x; h – x; 2x

$(h-x)(h-x).2x \le \left(\frac{h-x+h-x+2x}{3}\right)^3 = \frac{8h^3}{27}$

$V \le \frac{\pi R^2}{6h^2}.\frac{8h^3}{27} = \frac{4\pi R^2 h}{81}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: 2x = h – x => $x = \frac{h}{3}$

Bài 18: Với một đĩa phẳng hình tròn bằng thép bán kính R, phải làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của đĩa này và gấp phần còn lại thành một hình nón. Gọi độ dài cung tròn của hình quạt còn lại là x. Tìm x để thể tích khối nón tạo thành nhận giá trị lớn nhất?

Lời giải

Gọi bán kính đáy của hình nón là: r (r > 0)(cm)

Gọi độ dài đường sinh của hình nón là: l (l > 0)(cm)

V khối nón là: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - e^2}$

Với h là chiều cao khối nón. Ta có:

$$r^4(l^2 - r^2) = 4 \cdot \frac{r^2}{2} \cdot \frac{r^2}{2} \cdot (l^2 - r^2) \leq \frac{4}{27}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} + l^2 - r^2\right)^3 = \frac{4}{27} l^6$$

⇨ $r^2\sqrt{l^2 - r^2} \leq \frac{2l^3}{3\sqrt{3}} \Longrightarrow V_{(N)} \leq \frac{2\pi l^3}{9\sqrt{3}}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{r^2}{2} = l^2 - r^2 \Leftrightarrow l^2 = \frac{3r^2}{2}$ (1)

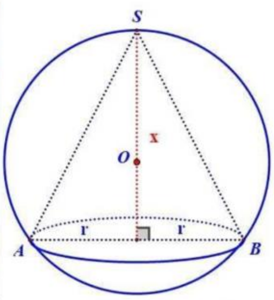
Mà x là chu vi đường tròn đáy hình nón

⇨ $x = 2\pi r$ và đường sinh $l = R$ (2)

Từ (1), (2) => $R^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8\pi^2 R^2}{3} \Longrightarrow x = \frac{2\pi R\sqrt{6}}{3}$

Vậy x = $\frac{2\pi R\sqrt{6}}{3}$ thì thể tích khối nọn tạo thành nhận giá trị lớn nhất

Bài 19: Pha lê là một loại thủy tinh cao cấp có chứa các hợp chất kim loại, đặc biệt là chì oxit (PbO) hoặc barium oxit (BaO), giúp tăng độ trong suốt, độ sáng và khả năng khúc xạ ánh sáng. Nhờ vậy, pha lê có vẻ ngoài lấp lánh hơn so với thủy tinh thông thường. Pha lê thường được dùng để làm một số sản phẩm trang sức hoặc trang trí nội thất. Một quả cầu pha lê được sản xuất bằng cách: Nung chảy pha lê nguyên liệu trong lò ở nhiệt độ khoảng 1400 - 1600°C, để pha lê nóng chảy vào khuôn tròn hoặc dùng kỹ thuật thổi thủy tinh để tạo hình, làm nguội chậm để tránh nứt vỡ. Để quả cầu đạt độ trong suốt hoàn hảo, người thợ cần phun lên bề mặt của quả cầu một lớp chống xước trong suốt.

a) Tính thể tích pha lê nguyên liệu cần để sản xuất một quả cầu đặc và diện tích bề mặt cầu phải phun lớp chống xước, biết đường kính của quả cầu là 18cm (lấy π ≈ 3,14).

b) Để giảm bớt lượng pha lê nguyên liệu và tăng tính thẩm mỹ cho quả cầu pha lê có đường kính 18cm trên, người thợ đã sản xuất ra quả cầu pha lê có phần rỗng là một hình nón với đỉnh S của hình nón nằm trên bề mặt của quả cầu và đáy của hình nón là hình tròn có hai đầu mút đường kính AB nằm trên bề mặt của quả cầu. Tính chiều cao của hình nón rỗng để thể tích pha lê nguyên liệu dùng làm quả cầu là nhỏ nhất?

Lời giải

a) Độc giả tự làm

b) Gọi chiều cao của hình nón rỗng là h (h > 0)(cm)

Gọi I, D lần lượt là giao điểm của SO với AB và đường tròn (O)

=> $\angle SIB = 90°$

=> Dễ dàng chứng minh được: $\Delta SBI \sim \Delta SDB$ => $IB^2 = SI.SD$

V cầu min => V nón max

$V_{nón}$ là: $V = \frac{1}{3}SI\pi r^2 = \frac{1}{3}\pi SI^2.ID$

Đặt SI = x; ID = y => $SI^2.ID = x^2y$

=> SI + ID = SD =18 => x + y =18 => y = 18 – x

=> $x^2y = x^2(18 - x)$

Ta có: $x^2(18 - x) = 4.\frac{x}{2}.\frac{x}{2}.(18 - x)$

Áp dụng bất đẳng thức phụ Cô-si 3 số cho $\frac{x}{2}$; $\frac{x}{2}$; 18 – x (Vì x > 0)

$\frac{x}{2}.\frac{x}{2}.(18 - x) \le \left(\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+18-x}{3}\right)^3 = 216$

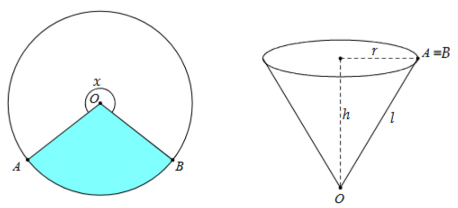
=> $4.\frac{x}{2}.\frac{x}{2}.(18 - x) \le 4.216 = 864$

=> $V_{nón} \le 288\pi$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{x}{2} = 18 - x$ => x = 12 => h = 6

Vậy chiều cao của hình nón rỗng là 6 thì để thể tích pha lê nguyên liệu dùng làm quả cầu là nhỏ nhất?

Bài 20: Cắt bỏ hình quạt tròn AOB từ một mảnh tôn hình tròn có bán kính R = 4cm rồi dán hai bán kính OA, OB với nhau để được một cái phễu có dạnh hình nón. Gọi x là số đo góc ở tâm hình quạt tròn làm phễu (0 < x < 360°). Tìm x để thể tích cái phễu là lớn nhất



Lời giải

Ta có chu vi đáy của cái phễu chính là độ dài cung tròn của mảnh tôn có độ lớn góc ở tâm là x

=> $2\pi r = \frac{2\pi R}{360}.x$ => $x = \frac{r}{90}$ (cm)

Chiều cao phễu là: $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{x}{90}\right)^2} = \frac{\sqrt{360^2 - x^2}}{90}$ (cm)

Thể tích cái phễu là: $V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi}{3}.\left(\frac{x}{90}\right)^2.\frac{\sqrt{360^2 - x^2}}{90} = \frac{\pi}{3.90^3}.x^2.\sqrt{360^2 - x^2}$ (cm³)

Xét $x^2.\sqrt{360^2 - x^2} = \frac{x^2}{2}.\frac{x^2}{2}.\sqrt{360^2 - x^2}$

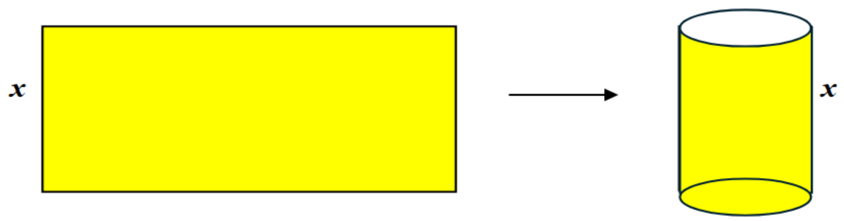
Áp dụng bất đẳng thức phụ Cô-si 3 số cho: $\frac{x^2}{2}$; $\frac{x^2}{2}$; $\sqrt{360^2 - x^2}$ (Vì x > 0)

$$\frac{\pi}{3.90^3}.2\sqrt{\frac{x^2}{2}.\frac{x^2}{2}.(360^2 - x^2)} \leq \frac{128\pi\sqrt{3}}{27}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{x^2}{2} = 360^2 - x^2$ => x = $120\sqrt{6}$

Vậy số đo góc ở tâm hình quạt dùng để làm phễu khoảng $120\sqrt{6}$ độ thì thể tích cái phễu là lớn nhất

Bài 21: Một mảnh tôn hình chữ nhật có chu vi bằng 48 cm và có một cạnh có độ dài là x cm. Người thợ hàn đã gia công và hàn mảnh tôn trên thành hình trụ tròn có đường cao bằng x cm. Hãy tìm độ dài x (cm) để thể tích không gian bên trong hình trụ tròn là lớn nhất? (Giả sử độ dày mảnh tôn và phần hàn giữa 2 mép tôn không đáng kể



Lời giải

Ta có: chu vi đường tròn đáy của hình trụ tạo thành là: 24 – x (cm)

=> Bán kính đường tròn đáy của hình trụ là: R = $\frac{C}{2\pi} = \frac{24-x}{2\pi}$ (cm)

Thể tích của hình trụ tạo ra là:

$$V = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{24-x}{2\pi}\right)^2.x = \frac{(24-x)(24-x)x}{4\pi}\ (cm^3)$$

Áp dụng bất đẳng thức phụ Cô-si 3 số:

$$\frac{(24-x)(24-x)x}{4\pi} \leq \frac{(24-x+24-x+2x)^3}{27.8\pi} = \frac{512}{\pi}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: 2x = 24 – x => x = 8

Vậy x = 8cm thì thể tích không gian bên trong hình trụ tròn là lớn nhất

Bài 22: Một hình chữ nhật có chu vi là 30cm và diện tích là $56cm^2$. Quay hình chữ nhật một vòng quanh một cạnh cố định để được một hình trụ. Tìm thể tích lớn nhất của hình trụ có thể đạt được

Lời giải

Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là a và b (cm)(0 < b ≤ a < 15)

Vì hình chữ nhật có chu vi và diện tích theo thứ tự là 30cm và $56cm^2$ nên ta có:

$$\begin{cases} 2(a+b) = 30 \\ ab = 56 \end{cases} => \begin{cases} a = 8 \\ b = 7 \end{cases}$$

TH1: Quay hình chữ nhật quay cạnh cố định là chiều rộng

=> Hình trụ tạo thành có chiều cao $h_1 = 7$ (=b) và bán kính $r_1 = 8$ (= a)

Thể tích của hình trụ là: $V_1 = \pi r^2{}_1.h_1 = \pi.8^2.7 = 448\pi$ (cm^3)

TH2: Quay hình chữ nhật quay cạnh cố định là chiều dài

=> Hình trụ tạo thành có chiều cao $h_2 = 8$ (= a) và bán kính $r_2 = 7$ (= b)

Thể tích hình trụ là: $V_2 = \pi r^2{}_2.h_2 = \pi.7^2.8 = 392\pi$ (cm^3)

Vậy thể tích lớn nhất có thể đạt được của hình trụ khi quay quanh cạnh cố định của hình chữ nhật là 448π (cm^3)

Bài 23: Để thiết kế bể bơi phù hợp với cả người lớn và trẻ em, người ta thường thiết kế phần đáy của bể có độ dốc khoảng 5 độ so với phương nằm ngang. Biết rằng mặt trên của bể là một hình chữ nhật có diện tích là $400m^2$, chỗ nông nhất của bể bằng $\frac{1}{16}$ chiều rộng của bể. Khi xây dựng, người ta thường tính tiền công dựa vào thể tích của bể. Hỏi kích thước của bể là bao nhiêu để thể tích của bể là nhỏ nhất? Nếu người ta bơm nước cách thành của bể là 50cm thì mực nước sâu nhất của bể là bao nhiêu? Cho biết tan5° = 0,09

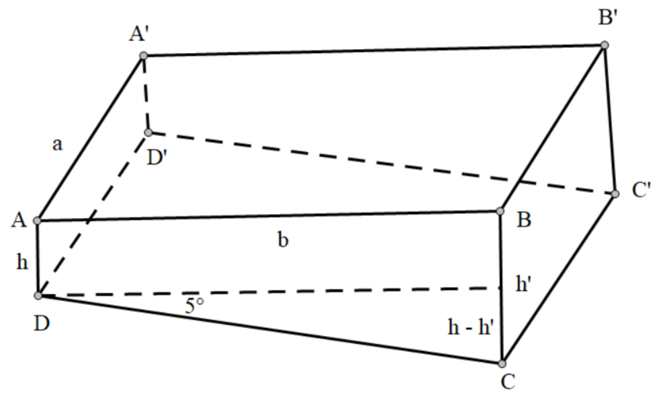
Lời giải

Gọi chiều rộng của bể là: a (m)(a > 0)

Gọi chiều dài của bể là: b (m)(b > a > 0)

Gọi chỗ nông nhất của bể là h (m)(h > 0)

Gọi chỗ sâu nhất của bể là h’ (m)(h’ > 0)



Bể có dạng lăng trụ đứng ABCD.A’B’C’D’ đặt nằm ngang, đáy của lăng trụ là hình thang vuông ABCD, chiều cao của lăng trụ là chiều rộng của bể

Theo đề bài ta có ab = 400 => $b = \frac{400}{a}$, $h = \frac{a}{16}$

$h' - h = b.\tan 5° = \frac{400}{a}.0{,}09 = \frac{36}{a}$ => $h' = \frac{36}{a} + \frac{a}{16}$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(h + h')b = \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{16} + \frac{36}{a}\right).\frac{400}{a} = \left(\frac{2a}{16} + \frac{36}{a}\right).\frac{200}{a}$ (m^2)

$V = S_{ABCD}.a = \left(\frac{2a}{16} + \frac{36}{a}\right).\frac{200}{a}.a = 200\left(\frac{2a}{16} + \frac{36}{a}\right) \geq 200.2\sqrt{\frac{2a}{16}.\frac{36}{a}} = 600\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $a = 12\sqrt{2} \approx 17$ (m)

=> $b \approx 23,6$ (m), $h \approx 1,06$ (m), $h' \approx 3,18$ (m)

Vậy thể tích của bể nhỏ nhất là $600\sqrt{2}$ m^3 khi chiều rộng của bể là 17m, chiều dài của bể là 23,6m, chỗ nông nhất của bể là 1,06m, chỗ sâu nhất của bể là 3,18m. Khi mực nước cách thành bể là 50cm thì mực nước sâu nhất của bể là 3,18 – 0,5 = 2,68 (m)

Bài 24: Cần thiết kế các thùng dạng hình trụ có nắp đậy để đựng sản phẩm đã chế biến có dung tích V (cm^3) Hãy xác định bán kính đường tròn đáy của hình trụ theo thể tích để tiết kiệm vật liệu nhất. (Các độc giả tự làm)

Bài 25: Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng V và diện tích toàn phần phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy bằng bao nhiêu? (Các độc giả tự làm)

Bài 26: Một nhà sản suất cần thiết kế một thùng đựng dầu nhớt hình trụ có nắp đậy với dung tích là 2000dm^3 Để tiết kiệm nguyên liệu nhất thì bán kính của nắp đậy phải bằng bao nhiêu?(Các độc giả tự làm)

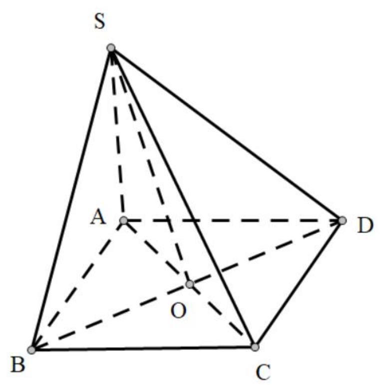
Bài 27: Một nhà máy cần thiết kế một chiếc bể đựng nước hình trụ bằng tôn có thể tích là 64π (m^3). Tìm bán kính đáy r của hình trụ sao cho hình trụ được làm ra tốn ít nhiên liệu nhất.

Bài 28: Một người thợ làm một cái bồn chứa dầu hình trụ có bán kính đáy r (m), chiều cao h (m) và thể tích bằng a (m^3) (a là một số dương không đổi). Để giảm giá thành sản phẩm, người thợ phải tính toán tỉ số giữa r và h sao cho diện tích diện tích toàn phần của bồn chứa là nhỏ nhất.

a) Em hãy cho biết tỉ số đó là bao nhiêu?

b) Vật liệu làm bồn chứa dầu là Tôn 2mm, chi phí trung bình (gồm: vật liệu + nhân công) là 120000 đồng cho 1 mét vuông (tính theo diện tích toàn phần bồn chứa). Biết a = 0,8 m3. Tính chi phí làm bồn chứa dầu có giá thành thấp nhất (bỏ qua hao hụt khi cắt tôn và các phần liên kết).

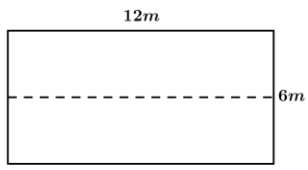
Bài 29: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng a; SA = SB = SC = a . Khi đó thể tích của khối chóp S.ABCD lớn nhất bằng bao nhiêu? (Các độc giả tự làm)

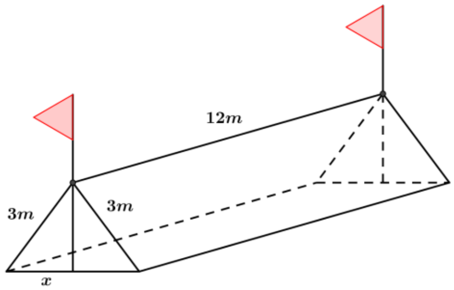


Bài 30: Người ta cắt một tờ giấy hình vuông có cạnh bằng $\sqrt{2}$ để gấp thành một hình chóp tứ giác đều sao cho bốn đỉnh của hình vuông dán lại thành đỉnh của hình chóp. Tính cạnh đáy của khối chóp để thể tích của nó lớn nhất. (Các độc giả tự làm)

Bài 31: Với một đĩa tròn bằng thép tráng men phải làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của đĩa này và gập phần còn lại thành hình nón. Cung tròn của hình quạt bị cắt đi phải bằng bao nhiêu độ để hình nón có thể tích cực đại? (Các độc giả tự làm)

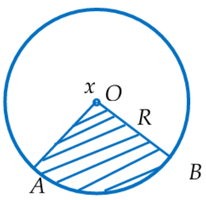
Bài 32: Trong một đợt tổ chức cho học sinh tham gia dã ngoại ngoài trời. Để có thể có chỗ nghỉ ngơi trọng quá trình tham quan dã ngoại, các bạn học sinh đã dựng trên mặt đất bằng phẳng 1 chiếc lều bằng bat từ một tấm bạt hình chữ nhật có chiều dài là 12m và chiều rộng là 6m bằng cách: Gập đôi tấm bạt lại theo đoạn nối trung điểm hai sanh là chiều rộng của tấm bạt sao cho hai mép chiều dài còn lại của tấm bạt sát đất và cách nhau x(m)(xem hình vẽ). Tìm x để khoảng không gian phía trong lều là lớn nhất? (Các độc giả tự làm)

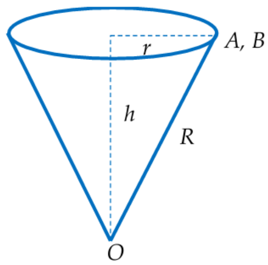




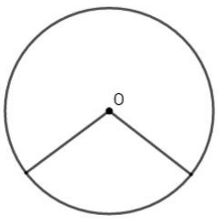
Bài 33: Chú Khang dự định sử dụng hết $5m^2$ kính để làm bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)? (Các độc giả tự làm)

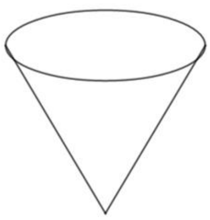
Bài 34: Cắt bỏ hình quạt tròn AOB (hình phẳng có nét gạch trong hình dưới) từ một mảnh các tông hình tròn bán kính R rồi dán hai bán kính OA và OB của quạt hình tròn lại với nhau để được một cái phễu có dạng của một hình nón. Gọi x là số đo góc ở tâm của hình quạt tròn dùng làm phễu, $0 < x < 2\pi$ Tìm x để khối nón có thể tích lớn nhất? (Các độc giả tự làm)





Bài 35: Bác Dũng có một tấm thép mỏng hình tròn, tâm O, bán kính 4dn. Bác định cắt ra một hình quạt tròn tâm O, quấn rồi hàn ghép hai mép của hình quạt tròn lại để tạo thành một đồ vật dạng mặt nón tròn xoay (tham khảo hình vẽ). Dung tích lớn nhất có thể của đồ vật mà bác Bính tạo ra bằng bao nhiêu? (bỏ qua phần mối hàn và độ dày của tấm thép). (Các độc giả tự làm)





Bài 36: Trong các hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính R, hãy tìm hình trụ có thể tích lớn nhất. (Các độc giả tự làm

CHUYÊN ĐỀ 3: BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN KINH TẾ, SỰ TỐI ƯU

- Đây là một dạng bài rất quen thuộc và được nhiều trường ra trong câu cuối đề thi giữa kì, cuối kì. Vậy nên nếu muốn được điểm 10 thì các độc giả cần phải nắm vững dạng bài này.

- Dạng toán này cần độc giả cần phải có sự tư duy nhanh nhẹn, ứng biến được mọi tình huống

Bài Tập

Bài 1: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, cô Hằng đã nhận thấy rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $P(n) = 8-2n$ (kg). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

Lời giải

Cân nặng của n con cá khi thu hoạch là $F(n) = (8-2n).n$ (kg, $n \in N^*$)

Ta có $F(n) = -2n^2 + 8n = -2(n-2)^2 + 8 \leq 8$ (kg)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $n - 2 = 0 \Rightarrow n = 2$ (tmdk)

Vậy phải thả 2 con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất

Bài 2: Một xưởng sản xuất mỗi tháng sản xuất ra x (tấn) sản phẩm. Chi phí sản xuất và tiêu thụ sản phẩm này là $C = 100 + 2x$ (triệu đồng). Biết rằng nếu sản xuất x (tấn) sản phẩm thì giá bán mỗi tấn sản phẩm là $50 - x$ (triệu đồng). Hỏi mỗi tháng xưởng phải sản xuất bao nhiêu tấn hàng để lợi nhuận thu được cao nhất?

Lời giải

Lợi nhuận trong tháng là $L = x(50 - x) - (100 + 2x)$

$$= -x^2 + 48x - 100$$

$$= -(x - 24)^2 + 476 \leq 476$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x - 24 = 0 \Rightarrow x = 24$

Vậy mỗi tháng xưởng phải sản xuất 24 tấn hàng để lợi nhuận thu được cao nhất

Bài 3: Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin 12V được cho bởi công thức $P = 12I - 0,5I^2$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Tìm công suất tối đa của mạch điện

Lời giải

$I \geq 0$ thì $P = 12I - 0,5I^2 = -0,5(I - 12)^2 + 72 \leq 72$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $I - 12 = 0 \Rightarrow I = 12$

Vậy công suất tối đa của mạch điện là 72W khi cường độ dòng điện là = 12A

Bài 4: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được tính theo công thức $H(x) = 0,025x^2(30 - x)$, trong đó x (miligam) là lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân. Tính lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân trên để huyết áp của bệnh nhân giảm nhiều nhất, từ đó bác sĩ sẽ đưa ra phương án điều trị phù hợp nhất

Lời giải

Ta có $H(x) = 0,025x^2(30 – x) = 0,0025x^2.10.(30 – x)$

Áp dụng bất đẳng thức phụ Cô-si 2 số cho 10; 30 – x (Vì x > 0)

$10.(30 – x) \le \frac{(10 + 30 - x)^2}{4} = \frac{1}{4}[x(40 - x)]^2 \le \frac{1}{4}\left[\frac{(x + 40 - x)^2}{4}\right]^2 = \frac{1}{4}.160000$

$H(x) \le 0,0025.\frac{1}{4}.160000 = 10$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: x = 40 – x và 30 – x = 10 => x = 20

Vậy lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân trên để huyết áp giảm nhiều nhất là x = 20 miligam

Bài 5: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,035x^2(15 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất?

Lời giải

Ta có: $G(x) = 0,035x^2(15 - x) = \frac{1}{2}.0,035x.x.(30 – 2x)$

Áp dụng bất đẳng thức phụ Cô-si 3 số cho x; x; 30 – 2x (Vì x > 0)

$x.x.(30 – 2x) \le \left(\frac{x + x + 30 - 2x}{3}\right)^3 = 1000$

$G(x) \le \frac{1}{2}0,035.1000 = \frac{35}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: x = 30 – 2x => x = 10

Vậy liều lượng cần tiêm là 10 miligam cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất

Bài 6: Khi loại thuốc A được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ mg/l của thuốc trong máu sau x phút (kể từ khi bắt đầu tiêm) được xác định bởi công thức $C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$ đưa ra những lời khuyên và cách xử lí phù hợp cho bệnh nhân, ta cần tìm khoảng thời gian mà nồng độ của thuốc trong máu đang tăng. Em hãy cho biết hàm nồng độ thuốc trong máu C(x) đạt giá trị cực đại là bao nhiêu trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

Lời giải

Xét $\frac{1}{C(x)} = \frac{x^2 + 2}{30x} = \frac{x}{30} + \frac{2}{30x}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si 2 số cho: $\frac{x}{30}; \frac{2}{30x}$ (Vì x > 0)

$\frac{x}{30} + \frac{2}{30x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{30}.\frac{2}{30x}} = \frac{\sqrt{2}}{15}$ với $0 < x < 6$

=> $C(x) \leq \frac{15\sqrt{2}}{2} \approx 10,6$ (mg/l)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $0 < x < 6$ và $\frac{x}{30} = \frac{2}{30x}$ => $x = \sqrt{2}$

Vậy nồng độ thuốc trong máu đạt giá trị cực đại là 10,6 mg/l trong khoảng 6 phút sau khi tiêm

Bài 7: Cửa hàng chuyên kinh doanh máy tính. Mỗi loại máy tính có giá nhập vào một chiếc là 18 triệu đồng và bán ra với giá 22 triệu đồng. Với giá bán như trên thì một năm số lượng máy tính bán được dự kiến là 500 chiếc. Để tăng thêm lượng tiêu thụ máy tính này, cửa hàng dự định giảm giá bán và ước lượng cứ giảm 200 nghìn đồng một chiếc thì số lượng máy tính bán ra trong một năm sẽ tăng 50 chiếc. Vậy cửa hàng phải bán với giá bao nhiêu sau khi giảm giá lợi nhuận thu được sẽ cao nhất?

Lời giải

Đổi 200 nghìn đồng = 0,2 triệu đồng

Gọi giá mới mà cửa hàng bán một chiếc máy tính là: x (triệu đồng)($x > 18$)

Số lượng máy tính bán ra được trong một năm là: $500 + 50\left(\frac{22 - x}{0,2}\right) = 6000 - 250x$ (chiếc)

Lợi nhuận mà cửa hàng thu được khi bán giá mới là:

$$(6000 - 250x)(x - 18) = -250x^2 + 10500x - 108000$$

$$= -250(x^2 - 42x + 432)$$

$$= -250(x - 21)^2 + 2250 \leq 2250$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x - 21 = 0$ => $x = 21$ (tm)

Vậy giá bán mới một chiếc máy tính của cửa hàng là 21 triệu đồng, giá trị lợi nhuận thu được cao nhất là 2250 (triệu đồng)

Bài 8: Một doanh nghiệp chuyên kinh doanh sản phẩm của Apple. Hiện nay, doanh nghiệp đang tập trung chiến lược kinh doanh điện thoại iPhone 16 Pro Max với chi phí mua vào là 23 triệu đồng và bán ra với giá 27 triệu đồng mỗi chiếc. Với giá bán này thì số lượng điện thoại mà khách hàng mua trong một tháng là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng điện thoại đang bán chạy này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng, theo tỉ lệ cứ giảm 100 nghìn đồng mỗi chiếc điện thoại thì số lượng điện thoại bán ra trong mỗi tháng sẽ tăng thêm 20 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải bán với giá mới là bao nhiêu để sau khi giảm giá lợi nhuận thu được sẽ cao nhất?

Lời giải

Gọi giá mới mà cửa hàng bán một chiếc iphone là: x (triệu đồng)($x > 23$)

Số lượng iphone bán ra được trong một năm là:

$600 + 20\left(\frac{27 - x}{0,1}\right) = 6000 - 200x$ (chiếc)

Lợi nhuận mà cửa hàng thu được khi bán giá mới là:

$(6000 – 200x)(x – 23) = -200x^2 + 10600x – 138000$

$= -2(100x^2 – 5300x + 265^2) + 2450$

$= -2(10x – 265)^2 + 2450 \leq 2450$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $10x – 265 = 0 \Rightarrow x = 26,5$ (tm)

Vậy giá bán mới một chiếc máy tính của cửa hàng là 26,5 triệu đồng, giá trị lợi nhuận thu được cao nhất là 2450 (triệu đồng)

Bài 9: Một khách sạn có 100 phòng cùng giá tiền cho thuê. Qua khảo sát ta thấy rằng nếu ban đầu mỗi phòng khách sạn cho thuê với giá 480000 đồng trong một ngày thì luôn kín các phòng, tuy nhiên khi tăng giá phòng lên x% ($x \geq 0$) so với mức giá ban đầu thì số lượng phòng cho thuê giảm đi $\frac{4x}{5}$ phòng. Hỏi khách sạn phải niên yết giá tiền thuê phòng mỗi ngày là bao nhiêu để khách sạn đạt doanh thu một ngày cao nhất?

Lời giải

Số tiền phòng mới là: 480 + 480x% = 480 + 4,8x (nghìn đồng)

Số phòng cho thuê là: $100 - \frac{4x}{5}$ (phòng)

Số tiền thu được là: $(480 + 4,8x)(100 - \frac{4x}{5}) = -\frac{96}{25}x^2 + 96x + 48000$

$= -\frac{96}{25}\left(x - \frac{25}{2}\right)^2 + 48600 \leq 48600$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x - \frac{25}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{25}{2} = 12,5\%$

Vậy danh thu nhiều nhất trong một ngày là 48600000 đồng.

Bài 10: Một công ty du lịch dự định tổ chức một tour du lịch xuyên Việt nhân kỷ niệm ngày giải phóng hoàn toàn miền Nam 30 - 4. Công ty dự định nếu giá tour là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 200 người tham gia. Để thu hút nhiều người tham gia, công ty sẽ quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá 100 nghìn đồng/1 tour thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải giảm giá tour bao nhiêu để doanh thu từ tour xuyên Việt đó là lớn nhất

Lời giải

Gọi số lần giảm giá 100000 đồng/1 tour để thu được doanh thu lớn nhất là x (lần)

Sau x lần giảm thì giá của một tour là: 2000000 − 100000x (đồng).

Vì sau x lần giảm giá thì có thêm 20x người tham gia nên tổng số người tham gia sau x lần giảm giá là: 200 + 20x (người)

Tổng doanh thu sau x lần giảm giá là: $S = (2000000 - 100000x)(200 + 20x)$

$$= 100000.20.(20-x)(10+x)$$

$$= 2000000.(-x^2 +10x +200)$$

Xét $x^2 - 10x + 200 = (x - 5)^2 + 225$

Vì $(x - 5)^2 + 225 \geq 225$ nên $2000000.(-x^2 +10x +200) \leq 2000000.225 = 450000000$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

Giá tour khi đó là: $2000000 - 100000.5 = 1500000$ (đồng)

Hỏi công ty phải giảm giá tour 5 lần thdoanh thu từ tour xuyên Việt đó là lớn nhất

Bài 11: Một cửa hàng bán sản phẩm A với giá 200000 đồng mỗi chiếc. Để tăng doanh số bán hàng, cửa hàng quyết định giảm giá sản phẩm. Với mỗi lần giảm giá 10000 đồng, cửa hàng sẽ bán thêm được 20 sản phẩm. Biết rằng khi cửa hàng không giảm giá, họ bán được 100 sản phẩm. Hãy tính mức giảm giá sao cho cửa hàng thu được doanh thu lớn nhất.

Lời giải

Gọi số lần giảm 10000 đồng là x ($x \in N$; $0 \leq x < 20$)

Giá bán mỗi sản phẩm sau khi giảm giá là: $200-10x$ (nghìn đồng)

Số lượng sản phẩm bán ra sau khi giảm giá là: $100+20x$ (chiếc)

Doanh thu P(x) của cửa hàng được tính bằng cách nhân giá bán mỗi sản phẩm với số lượng sản phẩm bán ra: $P(x) = (200 - 10x)(100 + 20x)$

$$= 200(100 + 20x)-10x(100 + 20x)$$

$$= 20000 + 4000x - 1000x - 200x^2$$

$$= 20000 + 3000x -200x^2$$

$$= -200(x^2 -15x +7,5^2) + 31250$$

$$= -200(x -7,5)^2 +31250 \leq 31250$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x = 7,5$

Do x phải là số nguyên dương nên $x = 7:5$ không thỏa mãn

Ta thấy rằng $P(x) = -200(x - 7,5)^2 + 31250$ lớn nhất khi $(x - 7,5)^2$ nhỏ nhất

Do giá trị của T(x) phụ thuộc $x -7,5$ và x nguyên nên ta xét các trường hợp sau:

TH1: Với $x - 7,5 > 0$ hay $x > 7,5$

Mà x nguyên dương và $(x -7,5)^2$ nhỏ nhất nên ta chọn $x = 8$

Khi đó P(8) = 31200 (nghìn đồng)

Với x −7,5 < 0 hay x < 7,5

Mà x nguyên dương và $(x - 7,5)^2$ nhỏ nhất nên ta chọn x = 7

Khi đó P(7) = 31200 (nghìn đồng)

Vậy cửa hàng nên giảm giá 70000 đồng hoặc 80000 đồng

Bài 12: Hằng ngày, mực nước của hồ thủy điện lên xuống theo lượng mưa và lượng nước sông, suối đổ về. Trong cơn bão Yagi, lúc 8 giờ sáng, người ta bắt đầu quan sát và đo được mực nước trong hồ lên xuống sau t (giờ) theo công thức $h(t) = 24t + 5t^2 - \frac{t^3}{3}$ (m). Để đảm bảo an toàn của hồ thì khi mực nước lên cao nhất hồ sẽ phải xả nước. Hỏi cần thông cho các hộ dân di dời vào thời điểm nào, biết theo quy định trước khi xả lũ phải thông báo cho các hộ dên trước 5 giờ

Lời giải

Ta có $h(t) = 24t + 5t^2 - \frac{t^3}{3} = -\left(\frac{t}{3} + 3\right)(t - 12)^2 + 432 \le 432$ (với mọi $t \ge 0$)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: t – 12 = 0 => t =12

=> Sau 12 giờ kể từ thời điểm 8 giờ sáng tức là 20 giờ thì mực nước của hồ sẽ lên cao nhất

Vậy cần thông báo cho các hộ dân di dời trước 15 giờ

Bài 13: Anh Hoàng chạy bộ ngược chiều gió trên một quãng đường có đội dài s (km), với vận tốc gió thổi 6 (km/h). Vận tốc của anh Hoàng khi không có gió là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao trong t giờ là $E(v) = cv^3t$ trong đó c là hằng số, E được tính bằng Jun. Vận tốc của anh Hoàng khi không có gió là bao nhiêu để năng lượng tiêu hao là ít nhất?

Lời giải

Vận tốc của anh Hoàng khi chạy ngược chiều gió là: v – 6 (km/h) (v > 6)

Thời gian để anh Hoàng chạy hết quãng đường s km là: $t = \frac{s}{v - 6}$ (giờ)

Năng lượng tiêu hao là: $E(v) = c.v^3.\frac{s}{v - 6} = s.c.\frac{v^3}{v - 6}$

Xét: $\frac{v^3}{v - 6} - 243 = \frac{v^3 - 243v + 1458}{v - 6} = \frac{(v + 18)(v - 9)^2}{v - 6} \ge 0$

=> $E(v) \ge 243$ với mọi v > 6

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: v – 9 = 0 => v = 9

Vậy để năng lượng tiêu hao ít nhất thì anh Hoàng cần chạy với vận tốc là 9 km/h

Bài 14: Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản uất 8000 quả bóng tennis. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy móc có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho giám sát. Sô tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ (người này sẽ giám sát tất cả các máy hoạt động). Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí sản xuất là thấp nhất?

Lời giải

Gọi số máy móc công ty nên sử dụng là x (máy)($x \in N^*$)

Trong một giờ, số quả bóng tennis sản xuất được là: 30x (quả bóng)

Số giờ để sản xuất 8000 quả bóng là: $\frac{8000}{30x}$ (giờ)

Mỗi giờ phải trả 192 nghìn đồng cho người giám sát và chi phí thiết lập cho mỗi máy là 200 nghìn đồng nên chi phí sản xuất là: $200000x + 192000.\frac{8000}{30x} = 200000x + \frac{51200000}{x}$ (đồng)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số: 200000x; $\frac{51200000}{x}$ (Vì x > 0)

$200000x + \frac{51200000}{x} \geq 2\sqrt{200000x.\frac{51200000}{x}} = 6400000$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $200000x = \frac{51200000}{x}$ => x = 16

Vậy số máy móc công ty nên sử dụng là 16 máy để chi phí sản xuất là thấp nhất

Bài 15: Trong đợt ủng hộ đồng bào bị bão lũ, sạt lở đất, khối 6 của một trường ủng hộ được số tiền như sau: Số tiền của lớp 6A gấp 1,8 lần số tiền của lớp 6B. Số tiền của lớp 6B gấp 1,25 lần số tiền lớp 6C. Số tiền lớp 6C gấp 1,1 lần số tiền lớp 6D. Số tiền của lớp 6E bằng nghịch đảo số tiền của lớp 6D. Tính số tiền ít nhất mà khối 6 ủng hộ được. Biết số tiền của lớp 6D ủng hộ không nhỏ hơn 2 triệu đồng.

Lời giải

Gọi số tiền ủng hộ của lớp 6D là: x (triệu đồng) ($x \geq 2$)

Số tiền ủng hộ của lớp 6C là: 1,1x (triệu đồng)

Số tiền ủng hộ của lớp 6B là: 1,25.1,1x = 1,375x (triệu đồng)

Số tiền ủng hộ của lớp 6A là: 1,8.1,375x = 2,475x (triệu đồng)

Số tiền ủng hộ của lớp 6E là: $\frac{1}{x}$ (triệu đồng)

Tổng số tiền cả khối 6 ủng hộ là: $x + 1{,}1x + 1{,}375x + 2{,}475x + \frac{1}{x} = 5{,}95x + \frac{1}{x} = \left(x + \frac{1}{4x}\right) + 5{,}7x$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si 2 số: x; $\frac{1}{4x}$ (Vì x > 0)

$\left(x + \frac{1}{4x}\right) + 5{,}7x \geq 2\sqrt{\frac{1}{x}.\frac{x}{4}} + 5{,}7.2 = 12{,}4$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x = \frac{1}{4x}$ => $x^2 = 4$ => x = 2

Vậy số tiền ít nhất mà khối 6 ủng hộ được là 12,4 triệu đồng và khi đó số tiền lớp 6D ủng hộ là 2 triệu đồng

Bài 16: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể sau t giờ được cho bởi công thức c(t) = $\frac{2t}{t^2+1}$ (mg/l). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Lời giải

Xét $\frac{1}{c(t)} = \frac{t^2+1}{2t} = \frac{t}{2} + \frac{1}{2t} \geq b\sqrt{\frac{t}{2}.\frac{1}{2t}} = 1$ với t > 0

=> c(t) ≤ 1 (mg/l)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: t > 0 và $\frac{t}{2} = \frac{1}{2t}$ => t = 1

Vậy sau khi tiêm thuốc 1 giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất

Bài 17: Một cửa hàng bán 3 loại trái cây: táo, cam và quýt. Mỗi ngày, số lượng hộp quả táo, hộp quả cam và hộp quả quýt nhập về được ký hiệu lần lượt là x; y; z (x; y; z là các số tự nhiên). Cửa hàng có các thông tin và điều kiện như sau:

• Chi phí nhập mỗi hộp quả táo là 100000 đồng, mỗi hộp quả cam là 200000 đồng và mỗi hộp quả quýt là 100000 đồng

• Tổng chi phí nhập không được vượt quá 1000000 đồng

• Cửa hàng phải nhập đủ cả 3 loại trái cây

• Cửa hàng cần nhập ít nhất 3 hộp quả táo và cam cộng lại

Lợi nhuận (lãi) thu về từ việc bán mỗi loại trái cây là: 200000 đồng cho mỗi hộp quả táo, 300000 đồng cho mỗi hộp quả cam và 100000 đồng cho mỗi hộp quả quýt. Giả định rằng tất cả số trái cây nhập về đều được bán hết trong ngày, hãy chỉ ra phương án nhập hàng giúp người bán hàng có được lợi nhuận cao nhất

Lời giải

Ta có hệ điều kiện: $\begin{cases} x + 2y + z \leq 10 \\ x + y \geq 3 \\ x, y, z \in N^* \end{cases}$ và tìm GTLN của S = 2x + 4y + z

Ta có S = 2x + 3y + z = 2(x + 2y + z) – y – z ≤ 2.10 – 1 – 1 = 18 (vì y ≥ 1; z ≥ 1)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ: x = 7, y = 1, z = 1

Bài 18: Phiên chợ hè Lotus sử dụng hai loại thẻ: loại thẻ giá 3000 đồng và loại thẻ giá 4000 đồng. Vào dịp nghỉ hè, bạn An muốn dùng hết số tiền tiết kiệm của mình để mua x thẻ loại giá 3000 đồng và y thẻ loại giá 4000 đồng. Tìm số cách mua có đủ cả hai loại thẻ nếu tiền tiết kiệm của bạn An là 2023000 đồng

Lời giải

Ta có phương trình 3000x + 4000y = 2023000 => 3x + 4y = 2023

=> y = $\frac{2023 - 3x}{4} \geq 1$ => $1 \leq x \leq \frac{2019}{3} = 673$

Ta có: y = $\frac{2023 - 3x}{4} = \frac{2024 - 4x - 1 + x}{4} = 506 - x + \frac{x - 1}{4}$

Để y nguyên thì x – 1 chia hết cho 4 => x = 1 + 4k với k ∈ N

=> y = 505 – 3k

Do đó $1 \leq 1 + 4k \leq 673$ hay $0 \leq k \leq 168$

Vậy có 169 cách mua để có đủ hai loại thẻ. Chẳng hạn với k = 0 ta có x = 1; y = 505 nên ta mua 1 thẻ 3000 và 505 thẻ 4000

Bài 19: Một công ty cân thuê xe để vận chuyển 100 tấn hàng. Đơn vị cho thuê xe chỉ có hai loại xe. Loại xe thứ nhất mỗi xe chở được 18 tấn hàng, có giá thuê là 18 triệu đồng cho mỗi lượt vận chuyển. Loại xe thứ hai mỗi xe chở được 12 tấn hàng, có giá thuê là 12 triệu đồng cho mỗi lượt vận chuyển. Hỏi chi phí thuê xe nhỏ nhất mà công ty phải trả để vận chuyển 100 tấn hàng là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi số xe 18 tấn và 12 tấn cần dùng là x (xe) và y (xe) (x, y ∈ N)

Chi phí thuê xe là 18x + 12y (triệu đồng)

Để chở hết 100 tấn hàng thì $18x + 12y \geq 100$

Dễ thấy 18x +12y chia hết 6 nên $18x + 12y \geq 102$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: x = 5, y = 1.

Vậy chi phí thuê xe nhỏ nhất là 102 triệu đồng

Bài 20: Trong một xưởng cơ khí đang có sẵn những thanh thép dài 7,4m. Một công trình xây dựng đang cần có 1000 đoạn thép dài 0,7m và 2000 đoạn thép dài 0,5m (cùng kích cỡ với thanh thép 7,4m). Em hãy tìm xem cần dùng bao nhiêu thanh thép 7,4m để thỏa mãn yêu cầu trên với chi phí tiết kiệm nhất.

Lời giải

Muốn tiết kiệm vật liệu nhất thì ta phải cắt mỗi thanh 7,4 thành a đoạn 0,7m và b đoạn 0,5m sao cho không có phần dư

Ta có 0,7a + 0,5b = 7,4 hay 7a + 5b = 74 (1)(a, b ∈ N, $0 < a \leq 10, 0 < b \leq 14$)

(1) => b = 15 – a - $\frac{1 + 2a}{5}$ => 1 + 2a chia hết cho 5 => a = 2 thì b = 12, a = 7 thì b = 5

Như vậy ta có hai cách cắt sao cho tiết kiệm nhất

• Cách 1: Cắt 2 đoạn 0,7m và 12 đoạn 0,5m

• Cách 2: Cắt 7 đoạn 0,7m và 7 đoạn 0,5m

Gọi x và y lần lượt là số thanh sắt cắt theo cách 1 và cách 2

Ta có $\begin{cases} 2x + 7y = 1000 \\ 12x + 5y = 2000 \end{cases}$ => $\begin{cases} x = 121 \\ y = 108 \end{cases}$

Như vậy ta cắt được 2x + 7y = 998 đoạn 0,7m và 12x + 5y = 1992 đoạn 0,5m

=> Ta chỉ cần cắt thêm 1 thanh 7;4 theo cách 1 thì đủ yêu cầu đặt ra.

Vậy ta cần cắt 122 thanh thành 2 đoạn 0,7m và 12 đoạn 0,5m và cắt 108 thanh thành 7 đoạn 0,7m và 7 đoạn 0,5m

Bài 21: Sau kì thi tuyển sinh vào 10 kết thúc, vì làm môn Toán không được như mong đợi bạn Minh đã rủ 13 bạn đi uống nước, biết rằng có 4 bạn uống Coca và 9 bạn uống Pepsi. Gọi x, y lần lượt số lon mà mỗi bạn uống được 13 lon. Biết giá tiền mỗi lon cũng chính là bình phương số lon tiêu thụ, tính GTNN mà bạn minh phải trả?

Lời giải

Ta có: $4x + 9y = 13$ và tìm GTNN của $4x^2 + 9y^2$

Đặt A là số tiền mà bạn Minh phải trả (đô)

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$13A = (4 + 9)(4x^2 + 9y^2) \geq (2.2x + 3.3y)^2 = (4x + 9y)^2 = 13^2$

=> $A \geq 13$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} \frac{2x}{2} = \frac{3y}{3} \\ 4x + 9y = 13 \end{cases}$ => $x = y = 1$

Bài 22: Một trang trại nuôi 100 con gà. Mỗi con gà đẻ trung bình 250 quả trứng mỗi năm. Giá bán mỗi quả trứng là 3000 đồng. Chủ trang trại nhận thấy có thể tăng số lượng gà để tăng doanh thu khi bán trứng nên chủ trang trại đã nuôi thêm một số con gà nữa. Nhưng với mỗi 1 con gà tăng thêm thì số trứng thu về trên mỗi con lại giảm 2 quả so với trước do ảnh hưởng về điều kiện sống (coi mỗi con gà đẻ được số trứng như nhau). Hỏi nên bổ sung ít nhất bao nhiêu con gà để doanh thu từ bán trứng đạt cao nhất? Tính doanh thu tối đa có thể đạt được.

Lời giải

Gọi số gà cần bổ sung là x (con)($x \in N$)

Tổng số gà sau khi bổ sung là: 100 + x (con)

Sản lượng trung bình mỗi con là: 250 – 2x (quả)

Tổng số trứng là: (100 + x)(250 – 2x) (quả)

Doanh thu đạt được là: 3000.(100 + x)(250 – 2x)

Xét (100 + x)(250 – 2x) = $-2x^2 + 50x + 25000 = -2\left(x - \frac{25}{2}\right)^2 + 25312,5 \leq 25312,5$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x - \frac{25}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{25}{2}$

Mà x là số tự nhiên và x nhỏ nhất => x = 12

Doanh thu tối đa có thể đạt được là: 3000.25312,5 = 75937500 đồng

Vậy cần bổ sung ít nhất 12 con gà để doanh thu tối đa có thể đạt được 75937500 đồng

Bài 23: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 000 000 đồng/tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ tăng thêm giá cho thuê mỗi căn hộ 50 000 đồng/tháng thì sẽ có 1 căn hộ bị bỏ trống. Hỏi hàng tháng công ty muốn thu được số tiền cho thuê nhà nhiều nhất thì công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu tiền?

Lời giải

Gọi giá thuê mới của mỗi căn hộ là x (nghìn đồng, x > 0)

Số tiền tăng lên khi cho thuê với giá mới là: x – 2000 (nghìn đồng)

Số căn hộ bị bỏ trống khi cho thuê giá mới là: $\frac{x-2000}{50}.1 = \frac{x}{50} - 40$ (căn)

Số căn cho thuê được với giá mới là: $50 - \left(\frac{x}{50} - 40\right) = 90 - \frac{x}{5}$ (căn)

Số tiền cho thuê thu được hàng tháng là: $\left(90 - \frac{x}{50}\right)x$ (nghìn đồng)

Ta có: $\left(90 - \frac{x}{50}\right)x = 90x - \frac{x^2}{50} = \frac{-1}{50}(x - 2250)^2 + 101250 \leq 101250$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: x – 2250 = 0 => x = 2250

Vậy hàng tháng công ty muốn thu được số tiền cho thuê nhà nhiều nhất là 101250 nghìn đồng thì công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ giá 2250 nghìn đồng

Bài 24: Một công ty cho thuê xe có 100 chiếc xe. Hiện tại, giá thuê mỗi chiếc xe là 500 nghìn đồng một ngày và tất cả các xe đều được thuê hết. Biết rằng, cứ mỗi lần công ty tăng giá thuê xe thêm 50 nghìn đồng mỗi ngày thì sẽ có 5 chiếc xe không được thuê nữa. Hỏi công ty nên tăng giá thuê xe thành bao nhiêu để doanh thu của công ty trong một ngày là lớn nhất?

Lời giải

Gọi số lần tăng giá thuê là x ($x \in \mathbb{N}$)

Giá thuê mỗi chiếc xe là: 500 + 50x (nghìn đồng)

Số lượng xe sẽ được thuê là: 100 – 5x (xe)

Doanh thu của công ty là: (500 + 50x)(100 – 5x)

Xét $(500 + 50x)(100 – 5x) = -250x^2 + 2500x + 50000 = -250(x – 5)^2 + 56250 \leq 56250$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x – 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

Giá thuê mỗi chiếc sẽ sau khi tăng là: 500 + 50.5 = 750 (nghìn đồng)

Vậy công ty nên tăng giá thuê xe thành 750 nghìn đồng để doanh thu của công ty một ngày là lớn nhất

Bài 25: Một doanh nghiệp chuyên kinh doanh xe điện xanh Sài Gòn. Giá nhập vào một chiếc là 18 triệu đồng và bán ra với giá 22 triệu đồng một xe. Với giá bán như trên thì một năm số lượng xe bán được dự kiến là 500 chiếc. Để tăng thêm lượng tiêu thụ dòng xe này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước lượng cứ giảm 200 nghìn đồng một xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng 50 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải bán với giá bao nhiêu để sau khi giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ cao nhất.

Lời giải

Đổi 200 nghìn đồng = 0,2 triệu đồng

Gọi số lần giảm 200 nghìn đồng là x ($x \in N$)

Giá bán mới của chiếc xe là: 22 – 0,2x (triệu đồng)

Số lượng xe được bán ra là: 500 + 50x (xe)

Lợi nhuận thu được là: (22 – 0,2x – 18)(500 + 50x) = (4 – 0,2x)(500 + 50x) (triệu đồng)

Xét $(4 – 0{,}2x)(500 + 50x) = -10x^2 + 100x + 2000 = -10(x – 5)^2 + 2250 \leq 2250$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x – 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

Giá sau khi giảm là: 22 – 0,2.5 = 21 (triệu đồng)

Vậy doanh nghiệp phải bán với giá 21 triệu đồng sau khi giảm giá thì lợi nhuận thu được sẽ cao nhất

Bài 26: Ban phụ huynh của trường THCS Lý Nam Đế dự định chụp ảnh kỷ yếu cho học sinh khối 9 của trường. Một nhóm thợ chụp ảnh báo ban phụ huynh nhà trường mức thu một học sinh là 800 nghìn đồng, khi đó học sinh lớp 9 của nhà trường đăng ký chỉ được 40 em . Vì muốn khuyến khích học sinh lớp 9 nhà trường đăng ký chụp ảnh kỷ yếu nhiều hơn, nhóm chụp ảnh đã điều tra khảo sát và thu được kết quả: Cứ mỗi lần nhóm chụp ảnh thu giảm 20 nghìn đồng một học sinh thì số học sinh đăng ký sẽ tăng 4 em. Hãy tính xem nhóm chụp ảnh sẽ đưa mức thu mỗi học sinh là bao nhiêu để có doanh thu lớn nhất và tính doanh thu lúc đó. (Biết nhà trường có 3 lớp 9, mỗi lớp 9 có khoảng 35 đến 40 em học sinh)

Lời giải

Gọi số lần mà nhóm chụp ảnh giảm là x ($x \in N^*$)

Giá chụp ảnh của một học sinh sau x lần giảm là: 800 – 20x (nghìn đồng)

Số học sinh tham gia sau x lần giảm sẽ là: 40 + 4x (học sinh)

Tổng doanh thu của nhóm chụp ảnh là: $(800 – 20x)(40 + 4x)$ (nghìn đồng)

Xét $(800 – 20x)(40 + 4x) = -80x^2 + 2400x + 32000 = -80(x – 15)^2 + 50000 \leq 50000$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x – 15 = 0 \Rightarrow x = 15$

Giá chụp ảnh của một học sinh sau 15 lần giảm là: $800 – 20.15 = 500$ (nghìn đồng)

Vậy nhóm chụp ảnh cần đưa ra mức thu mỗi học sinh là 500 nghìn đồng để có doanh thu lớn nhất

Bài 27: Một xưởng sản xuất mối tháng sản xuất ra x (tấn) sản phẩm. Chi phí sản xuất và tiêu thụ lượng sản phẩm này là $A = 100 + 2x$ (triệu đồng). Biết rằng nếu sản xuất x (tấn) sản phẩm thì giá bán mỗi tấn sản phẩm là $50 – x$ (triệu đồng). Hỏi mỗi tháng xưởng phải sản xuất bao nhiêu tấn hàng để lợi nhuận thu được cao nhất? (Lợi nhuận thu được bằng số tiền bán sản phẩm trừ đi chi phi sản xuất và tiêu thụ).

Lời giải

Lợi nhuận trong tháng của xưởng sản xuất là: $x(50 – x) – (100 + 2x)$ (triệu đồng)

Xét $x(50 – x) – (100 + 2x) = -x^2 + 48x – 100 = -(x – 24)^2 + 476 \leq 476$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x – 24 = 0 \Rightarrow x = 24$

Vậy mỗi tháng xưởng phải sản xuất 24 tấn hàng để lợi nhuận thu được là cao nhất

Bài 28: Một rạp chiếu phim có 120 ghế, giá vé hiện tại là 100 nghìn đồng mỗi vé. Với giá vé này, tất cả các ghế đều được bán hết cho mỗi suất chiếu. Ban quản lý rạp phim đang xem xét việc tăng giá vé để tối ưu hóa doanh thu. Sau khi thử nghiệm, rạp phim nhận thấy cứ mỗi lần tăng giá thêm 5 nghìn đồng thì số ghế bị bỏ trống sẽ tăng thêm là 4 . Hỏi mức giá vé mới là bao nhiêu để rạp phim đạt doanh thu lớn nhất?

Lời giải

Gọi số lần tăng giá là x ($x \in N$)

Giá tiền 1 vé sau x lần tăng là: $100 + 5x$ (nghìn đồng)

Số ghế đã bán sau x lần tăng giá là: $120 – 4x$ (nghìn đồng)

Tổng số tiền thu được là: $(100 + 5x)(120 – 4x)$ (nghìn đồng)

Xét $(100 + 5x)(120 – 4x) = -20x^2 + 200x + 12000 = -20(x – 5)^2 + 12500 \leq 12500$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x – 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

Giá mới sau khi tăng là: $100 + 5.5 = 125$ (nghìn đồng)

Vậy mức giá vé mới là 125 nghìn đồng thì rạp phim đạt doanh thu lớn nhất

Bài 29: Trong một phiên chợ nông sản sạch, một thương gia có 50 kg táo và luôn bán hết số táo khi bán với giá 40000 đồng /1 kg. Với kinh nghiệm đã từng bán hàng qua các phiên chợ năm trước đó, thương gia thấy rằng cứ tăng giá bán lên x% ($x \geq 0$) so với khi bán hết thì số táo bán được lại giảm đi

0,5x%. Hỏi thương gia đó phải bán táo với giá bao nhiêu tiền 1 kg để số tiền nhận được sau phiên chợ là cao nhất?

Lời giải

Giá tiền 1 kg táo sau khi tăng giá là: 40 + 40x% = 40 + 0,4x (nghìn đồng)

Số kg táo bán được khi giá táo tăng x% là: 50 – 50.0,5x% = 50 – 0,25x (kg)

Tổng số tiền thu được là: (40 + 0,4x)(50 – 0,25x) (nghìn đồng)

Xét $(40 + 0,4x)(50 - 0,25x) = -0,1x^2 + 10x + 2000 = -(x - 50)^2 + 2250 \leq 2250$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: x – 50 = 0 => x = 50

Giá tiền 1 kg táo sau khi tăng giá là: 40 + 0,4.50 = 60 (nghìn đồng)

Vậy thương gia đó phải bán táo với giá là 60 nghìn đồng/kg thì số tiền nhận được sau phiên chợ là lớn nhất

Bài 30: Người ta theo dõi và nhận thấy nếu trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ nuôi x con cá ($x \in N^*$) thì trung bình sau mỗi vụ, mỗi con cá nặng P(x) = 480 – 20x (g). Hỏi cần nuôi bao nhiêu con cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ để sau mỗi vụ thu được khối lượng cá lớn nhất

Lời giải

Khối lượng cá thu được trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ là:

$F(x) = xP(x) = x(480 - 20x) = -20x^2 + 480x = -20(x - 12)^2 + 2280 \leq 2280$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: x – 12 = 0 => x = 12

Vậy cần nuôi 12 con cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ để sau mỗi vụ thu được khối lượng cá nhiều nhất

Bài 31: Một cửa hàng bán quả vải thiều của Bắc Giang với giá bán là 30000 đồng/ 1kg. Giá nhập vào là 16000 đồng/1 kg. Với giá này cửa hàng ước chừng bán được 100 kg/ ngày. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính cứ giảm 1000 đồng/ 1kg thì số vải thiều bán được sẽ tăng thêm là 10kg. Lợi nhuận lớn nhất theo ngày mà cửa hàng có thể đạt được là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi giá tiền mà cửa hàng dự định bán là: x ($16 \leq x \leq 30$)(nghìn đồng)

Số kg vải bán được sẽ là: 100 + (30 – x).10 = 400 – 10x (kg)

Lợi nhuận theo ngày của cửa hàng là: (x – 16)(400 – 10x) (nghìn đồng)

Xét $(x - 16)(400 - 10x) = -10x^2 + 560x - 6400 = -10(x - 28)^2 + 1140 \leq 1140$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: x – 28 = 0 => x = 28

Vậy lợi nhuận lớn nhất theo ngày mà cửa hàng có thể đạt được là 1140 nghìn đồng

Bài 32: Một xe khách chất lượng cao đi từ Cần Thơ đến Hà Nội chở được nhiều nhất 50 hành khách trên một chuyến đi. Theo tính toán của nhà xe, nếu xe chở được x khách thì giá tiền mà mỗi khách phải trả khi đi tuyến đường này là $\left(180 - \frac{3x}{2}\right)^2$ trăm đồng. Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe sao cho tổng số tiền thu được từ hành khách nhiều nhất

Lời giải

Số tiền thu được trên mỗi chuyến xe là: $x\left(180 - \frac{3x}{2}\right)^2$ với $x \in N$, $0 \le x \le 50$

Xét $x\left(180 - \frac{3x}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}.3x\left(180 - \frac{3x}{2}\right)\left(180 - \frac{3x}{2}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức phụ Cô-si 3 số cho: 3k; $\left(180 - \frac{3x}{2}\right)$; $\left(180 - \frac{3x}{2}\right)$

$3x\left(180 - \frac{3x}{2}\right)\left(180 - \frac{3x}{2}\right) \le \left(\frac{3x + 180 - \frac{3x}{2} + 180 - \frac{3x}{2}}{3}\right)^3 = 1728000$

=> $\frac{1}{3}.3x\left(180 - \frac{3x}{2}\right)\left(180 - \frac{3x}{2}\right) \le \frac{1}{3}.1728000 = 576000$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $3x = 180 - \frac{3x}{2} \Rightarrow x = 40$

Tổng số tiền thu được từ hành khách là: $40\left(180 - \frac{3.40}{2}\right)^2 =$

Vậy số hành khách trên mỗi chuyến xe là 40 thì tổng số tiền thu được từ hành khách là nhiều nhất

Bài 33: Doanh nghiệp tư nhân Tân Hưng Yên chuyên kinh doanh xe gắn máy và tay ga các loại. Hiện nay, doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe tay ga Lead với chi phí mua vào một chiếc là 27 (triệu đồng) và bán với giá 40 (triệu đồng) mỗi chiếc. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua là 2000 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 (triệu đồng) mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra sẽ tăng thêm 800 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện việc giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất ?

Lời giải

Gọi giá bán mới của mỗi chiếc Lead mà doanh nghiệp phải xác định để lợi nhuận thu được sau khi giảm giá là cao nhất là: x $(27 < x < 40)$

Số tiền đã giảm là: 40 – x (triệu đồng)

Số lượng xe tăng lên là: 800(40 – x) (xe)

Tổng số sản phẩm bán được là: 2000 + 800(40 – x) = 34000 – 800x (xe)

Doanh thu mà doanh nghiệp đạt được là: (34000 – 800x).x (triệu đồng)

Chi phí mà doanh nghiệp phải bỏ ra là: (34000 – 800x).27 (triệu đồng)

Lợi nhuận mà công ty đạt được là: (34000 – 800x)x – (34000 – 800x).27 = $-800x^2 + 55600x$ – 918000

Xét $-800x^2 + 55600x - 918000 = -800(x - 34{,}75)^2 + 48050 \le 48050$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: x – 34,75 = 0 => x = 34,75

Vậy doanh nghiệp phải bán với giá mới là 34,75 triệu đồng thì lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất

Bài 34: Một công ty nhận sản xuất 400.000 huy chương bạc nhân ngày kỷ niệm lần thứ 30 Apollo 11 đổ bộ lên mặt Trăng. Công ty sở hữu 20 máy, mỗi máy có thể sản xuất 200 huy chương/giờ. Chi phí lắp đặt máy để sản xuất huy chương là 80 USD/máy và tổng chi phí vận hành là 5,76 USD/giờ. Hãy biểu diễn chi phí sản xuất 400.000 huy chương bằng một hàm theo số máy đã dùng. Hãy ước tính số máy mà công ty nên dùng để chi phí nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi số máy mà công ty dùng để chi phí nhỏ nhất là: x $(1 \le x \le 20)(x \in \mathbb{N})$(máy)

Chi phí lắp đặt các máy là 80x (USD)

Chi phí vận hành các máy là: $\frac{400000}{200x}.5{,}76 = \frac{11520}{x}$ (USD)

Tổng chi phí cần chi trả là: $80x + \frac{11520}{x}$ (USD)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si 2 số cho: 80x; $\frac{11520}{x}$ (Vì x > 0)

$$80x + \frac{11520}{x} \ge 2\sqrt{80x.\frac{11520}{x}} = 1920$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $80x = \frac{11520}{x}$ => x = 12

Vậy công ty nên sử dụng 12 máy để sản xuất thì tổng chi phí sẽ nhỏ nhất

Bài 35: Giả sử chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,...) được cho bởi công thức: $C(x) = 0{,}0001x^2 - 0{,}2x + 10000,$ trong đó $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng (1 vạn đồng $=$ 10000 đồng). Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Tỉ số $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn và tổng chi phí $T(x)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí. Tìm chi phí trung bình thấp nhất cho một cuốn tạp chí là bao nhiêu vạn đồng, biết rằng nhu cầu hiện tại xuất bản không quá 30000 cuốn?

Lời giải

Đổi 4 nghìn đồng = 0,4 vạn đồng

Chi phí phát hành cho x cuốn là: 0,4x (vạn đồng)

Tổng chi phí xuất bản và phát hành cho x cuốn tạp chí là: T(x) = C(x) + 0,4x:

$0,0001x^2 – 0,2x + 10000 + 0,4x = 0,0001x^2 + 0,2x + 10000$ (vạn đồng)

Ta có: $M(x) = \frac{T(x)}{x} = 0,0001x + \frac{10000}{x} + 0,2$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si 2 số cho: $0,0001x; \frac{10000}{x}$

$0,0001x + \frac{10000}{x} \geq 2\sqrt{0,0001x + \frac{10000}{x}} = 2$

$M(x) \geq 2 + 0,2 = 2,2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $0,0001x = \frac{10000}{x} \Rightarrow x = 10000$

Vậy chi phí trung bình thấp nhất cho một cuốn tạp là 2,2 vạn đồng

Bài 36: Một cửa hàng trung bình bán được 100 cái tivi mỗi tháng với giá 14 triệu đồng một cái. Chủ cửa hàng nhận thấy rằng, nếu giảm giá bán mỗi cái 500 ngàn đồng thì số lượng tivi bán ra sẽ tăng thêm 10 cái mỗi tháng. Hỏi cửa hàng nên bán với giá bao nhiêu để doanh thu cửa hàng là lớn nhất?

Lời giải

Gọi giá giảm bán mỗi cái tivi là x (triệu đồng)($0 < x < 14$)

Giá sau khi giảm của mỗi cái tivi là: $14 – x$ (triệu đồng)

Do giảm giá bán mỗi cái 500 ngàn đồng thì số lượng tivi bán ra sẽ tăng thêm 10 cái mỗi tthangs nên số lượng tivi bán ra tăng lên bây giờ là: $\frac{10x}{0,5} = 20x$ (cái)

Doanh thu một tháng của cửa hàng là: $(100 + 20x)(14 – x)$

Xét $(100 + 20x)(14 – x) = -20x^2 + 180x + 1400 = -20(x – 4,5)^2 + 1805 \leq 1805$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x – 4,5 = 0 \Rightarrow x = 4,5$

Giá của mỗi cái tivi sau khi giảm là: $14 – 4,5 = 9,5$ (triệu đồng)

Vậy cửa hàng nên bán với giá là 9,5 triệu đồng một cái tivi thì doanh thu cửa hàng là lớn nhất

Bài 37: Một loại vi khuẩn được tiêm một loại thuốc kích thích sự sinh sản. Sau t phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức $B(t) = 1000 + 30t^2 – t^3$ ($0 \leq t \leq 30$). Hỏi sau bao giây thì số vi khuẩn lớn nhất?

Lời giải

Xét $1000 + 30t^2 – t^3 = (t – 20)^2(t + 10) + 5000$ (dùng Casio) ≤ 5000

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $t – 20 = 0 \Rightarrow t = 20$

Vậy sau 20 giây thì số vi khuẩn là lớn nhất

Bài 38: Giám đốc một nhà hát A đang phân vân trong việc xác định mức giá vé xem các chương trình được trình chiếu trong nhà hát. Việc này rất quan trọng nó sẽ quyết định nhà hát thu được bao nhiêu lợi nhuận từ các buổi trình chiếu. Theo những cuốn sổ ghi chép của mình, ông ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là 20 USD/người thì trung bình có 1000 người đến xem. Nhưng nếu tăng thêm 1 USD/người thì sẽ mất 100 khách hàng hoặc giảm đi 1 USD/người thì sẽ có thêm 100 khách hàng trong số trung bình. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 2 USD lợi nhuận cho nhà hát trong các dịch vụ đi kèm. Hãy giúp giám đốc nhà hát này xác định xem cần tính giá vé vào cửa là bao nhiêu để thu nhập là lớn nhất.

Lời giải

Gọi giá vé sau khi điều chỉnh là: 20 + x (x > –20)(USD)

Số khách sau điều chỉnh giá vé là: 1000 – 100x (người)

Tổng thu nhập là: (20 + x + 2)(1000 – 100x) (USD)

Xét: $(22 + x)(1000 - 100x) = -100x^2 - 1200x + 22000 = -100(x + 6)^2 + 25600 \leq 25600$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khiL x + 6 = 0 => x = -6

Giá vé sau khi điều chỉnh là : 20 – 6 = 14 (USD)

Vậy giá vé vào cửa là 14 USD thì thu nhập của nhà hát là lớn nhất

Bài 39: Nếu một doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm trong một tháng ($x \in N^*$; $1 \leq x \leq 5000$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = -0,02x^2 + 440x$ (nghìn đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho mỗi sản phẩm là: $G(x) = \frac{23000}{x} + 190$ (nghìn đồng). Giả sử số sản phẩm sản xuất ra luôn được bán hết. Trong một tháng, doanh nghiệp đó cần sản xuất ít nhất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được lớn hơn 130 triệu đồng?

Lời giải

Lợi nhuận khi bán hết x sản phẩm là:

$L(x) = F(x) - G(x)x = -0,02x^2 + 440x - (23000 + 190x) = -0,02x^2 + 250x - 23000$ (nghìn đồng)

Lợi nhuận thu được lớn hơn 130 triệu đồng, ta có bất phương trình:

$L(x) > 130.10^3$

$\Rightarrow -0,02x^2 + 250x - 23000 > 130000$

$\Rightarrow 0,02x^2 - 250x + 153000 < 0$

$\Rightarrow 645,31 < x < 11854,69$ (Dùng Casio)

Kết hợp với điều kiện $\Rightarrow 645,31 < x \leq 5000$

$\Rightarrow x_{min} = 646$

Vậy doanh nghiệp cần sản xuất ít nhất 646 sản phẩm

Bài 40: Nếu một doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm trong một tháng ($x \in N^*$; $1 \le x \le 4500$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = -0,01x^2 + 300x$ (nghìn đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho mỗi sản phẩm là $G(x) = \frac{30000}{x} + 200$ (nghìn đồng). Giả sửa số sản phẩm xuất ra luôn được bán hết. Trong một tháng, doanh nghiệp đó cần sản xuất ít nhất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được lớn hơn 100 triệu đồng?

Trích Đề Thi THPTQG 2025 Môn Toán – Mã Đề 0109

Lợi nhuận khi bán hết x sản phẩm là:

$L(x) = F(x) – G(x).x = -0,01x^2 + 300x – (30000 + 200x) = -0,01x^2 + 100x – 30000$

Lợi nhuận thu được lớn hơn 100 triệu đồng, ta có bất phương trình

$L(x) > 10.10^3$

$\Rightarrow -0,01x^2 + 130x – 30000 > 100000$

$\Rightarrow -0,01x^2 + 100x – 130000 > 0$

$\Rightarrow 1535,9 < x < 8464,1$

Kết hợp với điều kiện => $x_{min} = 1536$

Vậy doanh nghiệp cần phải sản xuất ít nhất 1536 sản phẩm

Bài 41: Để gây quỹ từ thiện, câu lạc bộ thiện nguyện của một trườngTHPT tổ chức hoạt động bán hàng với hai mặt hàng là nước chanh và khoai chiên. Câu lạc bộ thiết kế hai thực đơn. Thực đơn 1 có giá 25 nghìn đồng, bao gồm hai cốc nước chanh và một túi khoai chiên. Thực đơn 2 có giá 40 nghìn đồng, bao gồm ba cốc nước chanh và hai túi khoai chiên. Biết rằng câu lạc bộ chỉ làm được không quá 165 cốc nước chanh và 100 túi khoai chiên. Số tiền lớn nhất mà câu lạc bộ có thể nhận được sau khi bán hết hàng bằng bao nhiêu nghìn đồng?

Trích Đề Thi THPTQG 2025 Môn Toán – Mã Đề 0103

Lời giải

Gọi thực đơn 1 mà câu lạc bộ làm được là: x ($x \in N$)

Gọi thực đơn 2 mà câu lạc bộ làm được là: y ($y \in N$)

Số tiền câu lạc bộ nhận được là: $F(x ; y) = 25x + 40y$ (nghìn đồng)

Do câu lạc bộ chỉ làm được không quá 165 cốc nước chanh nên ta có bất phương trình:

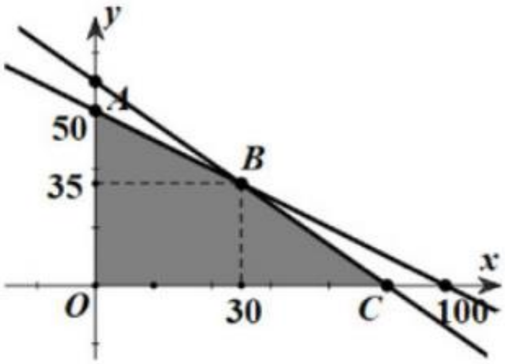
$2x + 3y \le 165$

Do câu lạc bộ chỉ làm được không quá 100 túi khoai tây chiên nên ta có bất phương trình:

$x + 2y \le 100$

Ta có điều kiện như sau: $\begin{cases} 2x + 3y \le 165 \\ x + 2y \le 100 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$

Cách 1: Dùng miền nghiệm



Ta nhận được miền nghiệm của hệ là miền nghiệm tứ giác OABC với O(0; 0), A(0; 50), B(30; 35), C(82,5; 0)

Ta sẽ thay các tọa độ O, A, B, C vào F(x; y)

Như vậy ta có: F(0; 0) = 0, F(0; 50) = 2000; F(30; 35), F(30; 35) = 2150; F(82,5; 0) = 2062,5

Lưu ý: cách này lên lớp 10 các bạn sẽ được học rõ hơn

Vậy số tiền lớn nhất câu lạc bộ nhận được là 2150 nghìn đồng

Cách 2: Ta nhận thấy rằng để số tiền câu lạc bộ nhận được là lớn nhất khi $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + 3y = 165 \\ x + 2y = 100 \end{cases}$

=> (x; y) = (30; 35)

=> F(30; 35) = 2150 nghìn đồng

Vậy số tiền lớn nhất câu lạc bộ nhận được là 2150 nghìn đồng

Bài 42: Tuổi thơ của Minh và bài toán những viên bi

Mỗi người đều có một tuổi thơ đáng nhớ, và Minh cũng không ngoại lệ. Ngày bé, Minh nổi tiếng khắp xã không phải vì chiến thắng, mà vì... là tay bắn bị "thua nhiều nhất" trong các trò chơi dân gian! Tổng cộng, Minh đã thua 2026 viên bi, gồm ba loại: bi thường, bi rồng xanh và bi sắt – lần lượt có số lượng là a, b, và c viên.

Trước khi "thua sạch", Minh từng là một nhà sưu tầm đam mê: lần nào mua bi cũng phải chọn đủ mỗi loại ít nhất 1 viên. Giá tiền cho từng loại bi là:

• Bi thường: 2 nghìn đồng/viên

• Bi rồng xanh: 3 nghìn đồng/viên

•Bi sắt: 7 nghìn đồng/viên

Giả sử Minh đã mua đúng số viên a, b, và c như trên, hãy tìm số lượng viên bi mỗi loại để tổng số tiền Minh phải bỏ ra là ít nhất có thể.

Lời giải

Do Minh đã mua đúng số viên a, b, và c => a + b + c = 2026

Tổng số tiền mà Minh phải bỏ ra là: 2a + 3b + 7c (nghìn đồng)

Đặt S = 2a + 3b + 7c

Ta có: S = 2a + 3b + 7c = 2(a + b + c) + b + 5c = 2.2026 + b + 5c

$S \geq 2.2026 + 1 + 5.1 = 4058$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: a = 2024; b = c = 1

Vậy để tổng số tiền mà Minh phải bỏ ra ít nhất thì bi thường là 2024 viên, bi rồng xanh và bi sắt là 1 viên

Bài 43: Gia đình bạn Tuấn đề ra rằng: cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kilôgam thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipid. Mỗi kilôgam thịt lợn chứ 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất 1,6 kg thịt bò và 1,1kg thịt lợn; giá tiền 1kb thịt bò là 250 nghìn đồng; 1kg thịt lợn là 160 nghìn đồng. Tìm khối lượng thịt mỗi loại mà gia đình bạn Tuấn cần mua để đảm bảo yêu cầu về lượng protein và lipid nhưng chi phí là ít nhất

Lời giải

Gọi số kilôgam thịt bò mà gia đình Tuấn mua là: x (kg)(x > 0)

Gọi số kilôgam thịt lợn mà gia đình Tuấn mua là: y (kg)(y > 0)

Tổng chi phí gia đình Tuấn cần phải chi là: 250x + 160y (nghìn đồng)

Ta có điều kiện: $\begin{cases} 800x + 600y \geq 900 \\ 200x + 400y \geq 400 \\ 0 \leq x \leq 1{,}6 \\ 0 \leq x \leq 1{,}1 \end{cases}$ => $\begin{cases} 8x + 6y \geq 9 \\ x + 2y \geq 2 \\ 0 \leq x \leq 1{,}6 \\ 0 \leq y \leq 1{,}1 \end{cases}$

Ta có: $250x + 160y = 31{,}25(8x + 6y) - 27{,}5y \geq 31{,}25.9 - 27{,}5.1{,}1 = 251$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: x = 0,3; y = 1,1

Vậy để chi phí là thấp nhất thì gia đình Tuấn cần phải mua 0,3 kg thịt bò và 1,1kg thịt lợn

Bài 44: Một cửa hàng điện tử dự định sử dụng số vấn ban đầu không vượt quá 2 tỉ 750 triệu đồng để nhập về hai loại tivi: loại 50 inch và loại 55 inch. Giá nhập và lợi nhuận dự kiến của mỗi loại tivi được tính trong bảng sau:

Loại tivi	Tivi 50 inch	Tivi 55 inch
Số tiền		

Giá nhập vào (triệu đồng/1 tivi)	20	25
Lợi nhuận dự kiến (triệu đồng/1 tivi)	2	3,375

Cửa hàng ước tính rằng tổng nhu cầu tiệu thụ của thị trường sẽ không vượt quá 120 chiếc tivi cả hai loại. Tính số lượng tivi mỗi loại mà cửa hàng nên nhập về lợi nhuận thu được (sau khi bán hết hàng nhập về) là lớn nhất

Lời giải

Gọi số chiếc tivi loại 50 inch cửa hàng nhập là: x (chiếc)($x \in N$)

Gọi số chiếc tivi loại 55 inch cửa hàng nhập là: y (chiếc)($y \in N$)

Lợi nhuận cửa hàng thu được khi đó là $A = 2x + 3{,}375y$ (triệu đồng)

Số tiền để nhập hai loại tivi với lượng như trên là: $20x + 25y$ (triệu đồng)

Do số tiền tối đa để đầu tư hai loại tivi trên 2 tỉ 750 triệu đồng nên ta có bất phương trình:

$20x + 25y \leq 2750$

Do nhu cầu tiêu thụ của thị trường sẽ không quá 120 chiếc tivi cả hai loại nên ta có bất phương trình:

$x + y \leq 120$

Điều kiện x, y thỏa mãn: $\begin{cases} x \in N; y \in N \\ 20x + 25y \leq 2750 \\ x + y \leq 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in N; y \in N \\ 4x + 5y \leq 550 \\ x + y \leq 120 \end{cases}$

$A = 2x + 3{,}375y \Rightarrow 8A = 16x + 27y = 4(x + y) + 3(4x + 5y) \leq 480 + 1650 = 2130$

$\Rightarrow A \leq 266{,}25$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x = 50$; $y = 70$

Vậy cửa hàng nên nhập về 50 cái tivi loại 50 inch và 70 cái tivi loại 55 inch thì lợi nhuận thu được là lớn nhất

Bài 45: Hưởng ứng chương trình "Tình nguyện mùa đông 2024", một đoàn tình nguyện cần thuê xe để chở 28 người và 9 tấn hàng để giúp đỡ đồng bào hai tỉnh Yên Bái và Lào Cai bị ảnh hưởng bởi thiên tai. Nơi thuê xe có hai loại xe A và B, trong đó loại xe A có 10 chiếc và loại xe B có 9 chiếc. Một chiếc xe loại A cho thuê với giá 4 triệu đồng, một chiếc xe loại B cho thuê với giá 3 triệu. Biết rằng mỗi xe loại A có thể chở tối đa 4 người và 0,6 tấn hàng; mỗi xe loại B có thể chở tối đa 2 người và 1,5 tấn hàng. Hỏi đoàn tình nguyện phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí bỏ ra là ít nhất?

Lời giải

Gọi số xe cần thuê loại A là x (xe)($0 \leq x \leq 10$)($x \in N$)

Gọi số xe cần thuê loại B là y (xe)($0 \leq y \leq 9$($y \in N$)

Chi phí cần bỏ ra để thuê xe là: $S = 4x + 3y$ (triệu đồng)

Lượng hàng tối đa chở được là: 0,6x + 1,5y (triệu đồng)

Số người tối đa chở được là: 4x + 2y (người)

Vì có 9 tấn hàng nên ta có: $0,6x + 1,5y \geq 9$

Vì có 28 người nên ta có: $4x + 2y \geq 14$

Điều kiện ràng buộc: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 0,6x + 1,5y \geq 9 \\ 4x + 2y \geq 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 2x + 5y \geq 30 \\ 2x + y \geq 14 \end{cases}$

Ta có: $S = 4x + 3y \Rightarrow 4S = 16x + 12y = (2x + 5y) + 7(2x + y) \geq 30 + 7.14 = 98$

$\Rightarrow S \geq 32$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: x = 5; y = 4

Vậy để chi phí bỏ ra là thấp nhất thì đoàn tình nguyện cần thuê 5 xe loại A và 4 xe loại B

Bài 46: Một trang trại rau sạch ở Đà Lạt mỗi ngày thu hoạch được 1 tấn rau. Mỗi ngày, nếu giá bán rau là 30000 đồng/kg thì bán hết rau, nếu giá bán rau tăng 1000 đồng/kg thì số rau thừa tăng 20 kg. Số rau thừa này được thu mua hết để làm thức ăn chăn nuôi với giá 2000 đồng/kg. Hỏi để mỗi ngày thu được số tiền bán rau lớn nhất thì trang trại đó nên bán rau với giá bao nhiêu nghìn đồng?

Lời giải

Gọi số lần tăng giá là x (lần)(x > 0)

Giá bán mới là: 30000 + 1000x (đồng/kg)

Số lượng rau thừa sau khi tăng giá là: 20x (kg)

Số lượng rau bán cho mọi người là: 1000 – 20x (kg)

Doanh thu khi bán cho mọi người là: (1000 – 20x)(3000 + 1000x) (đồng)

Doanh thu từ số lượng rau thừa là: 2000.20x = 40000x (đồng)

Tổng doanh thu của trang trại là: (1000 – 20x)(3000 + 1000x) + 40000x (đồng)

Xét $(1000 - 20x)(3000 + 1000x) + 40000x = (30000000 + 400000x - 20000x^2) + 40000x$

$= -20000x^2 + 440000x + 30000000$

$= -20000(x - 11)^2 + 32420000 \leq 32420000$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x - 11 = 0 \Rightarrow x = 11$

Giá bán mới là: 30000 + 1000.11 = 41000 (đồng) = 41 (nghìn đồng)

Vậy để mỗi ngày thu được số tiền bán rau lớn nhất thì trang trị nên bán rau với giá 41 nghìn đồng

Bài 47: Trong trung tâm thương mại Lotte thành phố Vinh, có một nhà hàng bán buffet hải sản. Khi nhà hàng bán với giá 200 ngàn đồng một suất thì mỗi ngày nhà hàng bán được 100 suất. Nhà hàng dự định có đợt giảm giá để kích cầu trong dịp cuối năm. Theo khảo sát từ thị trường thì mỗi lần giảm giá 10 ngàn đồng một suất thì nhà hàng bán thêm được 10 suất. Hỏi nhà hàng cần bán với giả mới là bao nhiêu ngàn đồng một suất để doanh thu trong một ngày là lớn nhất?

Lời giải

Gọi số lần giảm giả là x (lần)($x > 0$)

Giá bán mới của mỗi suất buffet là: $200 – 10x$ (ngàn đồng)

Số suất buffet bán được là: $100 + 10x$ (suất)

Doanh thu một ngày của cửa hàng là: $(200 – 10x)(100 + 10x)$ (ngàn đồng)

Xét $(200 – 10x)(100 + 10x) = -100x^2 + 1000x + 20000 = -100(x – 5)^2 + 4500 \leq 4500$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x – 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

Giá bán mới của mỗi suất buffer là: $200 – 10.5 = 150$ (ngàn đồng)

Vậy để doanh thu một ngày là lớn nhất thì nhà hàng cần bán với giá mới là 150 ngàn đồng một suất

Bài 48: Trường THCS Lý Nam Đế dự định tổ chức cho 435 người gồm giáo viên và học sinh tham gia hoạt động trải nghiệm Đảo Ngọc Xanh. Nhà trường đã liên hệ với công ty du lịch để thuê 2 loại xe: loại 35 chỗ ngồi và loại xe 50 chỗ ngồi (không kể lái xe). Biết rằng giá thuê xe loại 35 chỗ ngồi là 3,5 triệu đồng/xe; loại xe 50 chỗ ngồi là 5,3 triệu đồng/xe. Hỏi nhà trường cần thuê mỗi loại bao nhiêu xe để vừa đủ số chỗ ngồi cho 435 người và chi phí thuê xe là thấp nhất?

Lời giải

Gọi số xe loại 35 chỗ là: x ($x \in N^*$)($x \geq 1$)

Gọi số xe loại 50 chỗ là y ($y \in N^*$)($y \geq 1$)

Theo đề bài ta có: $35x + 50y = 435 \Rightarrow x = \frac{435 - 50y}{35}$

Tổng chi phí thuê xe là: $H = 3,5x + 5,2y$ (triệu đồng)

$H = 3,5x + 5,2y = \frac{435 - 50y}{35}.3,5 + 5,2y = 0,2y + 43,5$

Vì $y \geq 1 \Rightarrow 0,2y \geq 0,2 \Rightarrow H \geq 43,5 + 0,2 = 43,7$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $y = 1 \Rightarrow x = 11$

Vậy cần thuê 11 xe loại 35 chỗ và 1 xe loại 50 chỗ thì chi phí thuê là thấp nhất

Bài 49: Một đoàn làm phim cần thuê trực thăng để chở 150 người đến phim trường. Có 2 loại trực thăng: loại A chở được 40 người (không tính cơ trưởng) có giá thuê là 60 triệu đồng trên một chiếc; loại B chở được 10 người (không tính cơ trưởng) có giá thuê là 16 triệu đồng trên một chiếc. Tính chi phí thấp nhất để đoàn làm phim thuê trực thăng chở 150 người đến phim trường

Lời giải

Gọi số cái trực thăng thuê loại A là x (cái)($x \in N$)

Gọi số cái trực thăng thuê loại B là: y (cái)($y \in N$)

Do tổng số ghế ngồi luôn ≥ tổng số người chở được (không tính cơ trưởng) => $40x + 10y \geq 150$ (1)

Gọi chi phí cần chi là A (triệu đồng)

=> $A = 60x + 16y$

Ta có: $x, y \geq 0$

Xét $y = 0$ thì từ (1) => $x_{min} = 4$

=> $A = 240$

Xét $y = 1$ hoặc $y = 2$ thì từ (1) => $x_{min} = 4$

=> $A > 240$

Xét $y = 3$ thì từ (1) => $x_{min} = 3$

=> $A = 228 < 240$

Xét $y \geq 4$ ta có:

$A = 1,5(40x + 10y) + y \geq 229 > 228$

Vậy đoàn làm phim cần thuê 3 cái trực thăng loại A và 3 cái trực tăng loại B để chi phí nhỏ nhất là 228 triệu đồng

Bài 50: Trận bóng đá giao hữu giữa đội tuyển Việt Nam và Singapore ở sân vận động Mỹ Đình có sức chứa 60 000 khán giả. Ban tổ chức bán vé với giả mỗi vẻ là 100 nghìn đồng, số khản giả trung bình đến sân xem bóng đá là 24 000 người. Qua thăm dò dư luận, người ta thấy rằng mỗi khi giá vé giảm thêm 10 nghìn đồng, sẽ có thêm khoảng 3.000 khán giả. Hỏi ban tổ chức nên đặt giá vé là bao nhiêu để doanh thu từ tiền bán vé là lớn nhất với đơn vị tính giá vé là nghìn đồng?

Lời giải

Gọi số lần giảm giá vé là: x (lần)($x > 0$)

Giá vé mới sau khi giảm x lần là: $100 – 10x$ (nghìn đồng)

Số lượng khán giả sau khi giảm giá vé là: $24000 + 3000x$ (người)

Doanh thu từ tiền bán vé là: $(100 – 10x)(24000 + 3000x)$ (nghìn đồng)

Xét $(100 – 10x)(24000 + 3000x) = 2400000 + 60000x – 30000x^2$

$$= -30000(x – 1)^2 + 2430000 \leq 2430000$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: x – 1 = 0 => x = 1

Giá vé bán mới là: 100 – 10.1 = 90 (nghìn đồng)

Vậy ban tổ chức nên đặt giá vé là 90 nghìn đồng để doanh thu từ tiền bán vé là lớn nhất

Bài 51: Một đại lý nhập khẩu trái cây tươi để phân phối cho các cửa hàng. Mỗi lần nhập khẩu trái cây, khoảng chi phí vận chuyển (không đổi) là 25 triệu đồng. Chi phí bảo quản mỗi tạ trái cây trong kho là 80 nghìn đồng/ngày. Thời gian bảo quản tối đa 10 ngày. Biết rằng, kể từ ngày đầu tiên nhập hàng, đại lý sẽ phân phối tới các của hàng 25 tạ trái cây mỗi ngày. Mỗi lần nhập hàng, đại lý phải nhập đủ trái cây cho bao nhiều ngày phân phối để chi phí trung bình cho mỗi ngày thấp nhất (bao gồm chi phí vận chuyển và chi phi bảo quản trong kho)?

Lời giải

Đổi: 80 000 đồng = 0,08 triệu đồng.

Giả sử cần nhập trái cây đủ x ngày để chi phí trung bình cho mỗi ngày thấp nhất $(x \in N^*)(n \leq 10)$

Mỗi ngày phải phân phối đi 25 tạ trái cây nên tổng số trái cây trong một lần nhập là 25x (tạ)

Chi phí bảo quản ngày đầu là: 25x.0,08 (triệu đồng)

Chi phí bảo quản ngày thứ hai là: 25(x – 1).0,08 (triệu đồng)

Chi phí bảo quản ngày thứ ba là: 25(x – 2).0,08 (triệu đồng)

…

Chi phí bảo quản ngày cuối cùng là: 25.0,08 (triệu đồng) (vì chỉ còn 25 tạ cho ngày cuối cùng)

Tổng chi phí bảo quản là:

A = 25x.0,08 + 25(x – 1).0,08 + 25(x – 2).0,08 +…+ 25.0,08

A = 25.0,08.$[x + (x - 1) + (x - 2) + \ldots + 1]$

A = 2.$[x + (x - 1) + (x - 2) + \ldots +1]$

Ta có thể viết x + (x – 1) + (x – 2) +…+ 1 thành tổng 1 + 2 + 3 +…+ x

Áp dụng công thức tính tổng **x** số hạng đầu của cấp số cộng, ta được

1 + 2 + 3 +…+ x = $\frac{x(x+1)}{2}$

=> A = x(x + 1)

Tổng chi phí (gồm phí vận chuyển và bảo quản) là: 25 + x(x + 1) (triệu đồng)

Chi phí trung bình là: B(x) = $\frac{25 + x(x+1)}{x} = \frac{25}{x}$ + x +1

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si 2 số cho: $\frac{25}{x}$; x (Vì x > 0)

$\frac{25}{x} + x \geq 2\sqrt{\frac{25}{x}.x} = 10$

=> B(x) ≥ 10 + 1 = 11

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{25}{x} = x$ => x = 5

Vậy mỗi lần nhập hàng, đại lý phải nhập đủ trái cây cho 5 ngày phân phối để chi phí trung bình cho mỗi ngày là thấp nhất

Bài 52: Một công ty trung bình bán được 600 chiếc máy lọc không khí mỗi tháng với giá 10 triệu đồng một chiếc. Một khảo sát cho thấy nếu giảm giá bán mỗi chiếc 400 nghìn đồng, thì số lượng bán ra tăng thêm khoảng 60 chiếc mỗi tháng. Gọi p (triệu đồng) là giá của mỗi máy, x là số máy bán ra. Khi đó, hàm cầu là p = p(x) và hàm doanh thu là R(p) = p.x. Hỏi công ty phải bán mỗi máy với số tiền bao nhiêu triệu đồng để doanh thu là lớn nhất?

Lời giải

Đổi 400 nghìn đồng = 0,4 triệu đồng

Gọi số lần giảm giá bán mỗi chiếc máy lọc là t (lần)(t > 0)

Giá mới sau khi giảm t lần là: 10 – 0,4t (triệu đồng)

Số lượng máy bán ra sau khi giảm giá là: 600 + 60t (chiếc)

Doanh thu của cửa hàng là: (600 + 60t)(10 – 0,4t) (triệu đồng)

Xét (600 + 60t)(10 – 0,4t) = $-24t^2$ + 360t + 6000 = $-24(t – 7,5)^2$ + 7350

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: t – 7,5 = 0 => t = 7,5

Giá mới là: 10 – 0,4.7,5 = 7 (triệu đồng)

Vậy công ty phải bán mỗi máy với số tiền là 7 triệu đồng để doanh thu lớn nhất

Bài 53: Người quản lí của một khu chung cư có 100 căn hộ cho thuê nhận thấy rằng tất cả các căn hộ sẽ có người thuê nếu giá thuê một căn hộ là 8 triệu đồng một tháng. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thuê căn hộ thêm 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Người quản lí nên đặt giá thuê (triệu đồng) mỗi căn hộ là bao nhiêu để doanh thu là lớn nhất?

Lời giải

Gọi số lần tăng giá x (lần)(0 < x < 100)

Mỗi lần tăng giá thì số căn hộ cho thuê là: 100 – x (căn)

Số tiền thuê căn hộ sau mỗi lần tăng là: 8000000 + 100000x (triệu đồng)

Tổng số tiền cho thuê căn hộ 1 tháng là: (8000000 + 100000x)(100 – x) (triệu đồng)

Xét (8000000 + 100000x)(100 – x) = $-100000x^2$ + 2000000x + 800000000

$$= -100000(x – 10)^2 + 810000000 \leq 810000000$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x – 10 = 0 \Rightarrow x = 10$

Vậy người quản lý nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là 10 triệu đồng để doanh thu là lớn nhất

Bài 54: Một công ty kinh doanh trong lĩnh vực vận tải đang vận hành một đội gồm 35 xe chở hàng cùng loại với lợi nhuận trung bình của mỗi xe là 1 triệu đồng một ngày. Để mở rộng mô hình kinh doanh, công ty dự định bổ sung một số xe chở hàng cùng loại với xe đang vận hành. Công ty đã tiến hành khảo sát và phân tích thị trường, kết quả cho thấy: cứ bổ sung một xe chở hàng cùng loại vào hoạt động thì lợi nhuận trung bình của mỗi xe trong cả đội lại giảm đi 20 nghìn đồng một ngày. Hỏi công ty nên bổ sung bao nhiêu xe chở hàng cùng loại để lợi nhuận trung bình mỗi ngày của đội xe lớn nhất?

Lời giải

Gọi số xe bổ sung là x (xe)($x \in N^*$)

Số xe sau khi bổ sung là: 35 + x (xe)

Vì cứ bổ sung một xe chở hàng cùng loại vào hoạt động thì lợi nhuận trung bình của mỗi xe trong cả đội lại giảm đi 20 nghìn đồng một ngày nên lợi nhuận mỗi xe mỗi ngày giảm: 20x (nghìn đồng)

Lợi nhuận trung bình mỗi xe ban đầu là 1 triệu đồng một ngày nên lợi nhuận trung bình mỗi xe sau khi giảm là: 1000 – 20x (nghìn đồng)

Tổng lợi nhuận trung bình của cả độ là: $L(x) = (35 + x)(1000 – 2x)$ (nghìn đồng)

Xét $(35 + x)(1000 – 20x) = -20x^2 + 300x + 35000 = -20\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + 36125 \leq 36125$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x - \frac{15}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{15}{2} = 7,5$

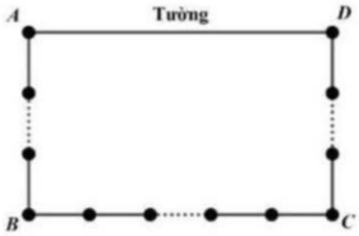
Vì $x \in N^* \Rightarrow x = 7$ hoặc $x = 8$

Xét $x = 7 \Rightarrow L(x) = 36120$

Xét $x = 8 \Rightarrow L(x) = 36120$

Vậy công ty nên bổ sung 7 xe hoặc 8 xe chở hàng cùng loại để lợi nhuận trung bình mỗi ngày của đội xe là lớn nhất

Bài 55: Bác An có 100 chiếc cọc gôc bằng nhau, bác muốn dùng để đóng cọc làm hàng rào quay thành một mảnh vườn hình chữ nhật có một phía tận dụng tường (như hình vẽ). Các cọc cách nhau 1 m, tại có các vị trí góc A, B, C, D đều có cọc. Tính diện tích mảnh vườn lớn nhất mà bác An có thể quay được?



Lời giải

Đặt AB = CD = x (m); BC = y (m)($x, y \in N^*$)

Số cọc bằng: $2x + y + 1 = 100 \Rightarrow y = 99 - 2x$

Diện tích mảnh vườn là: $S = xy$ (m^2)

Cách 1: Ta có: $xy = x(99 - 2x) = -2x^2 + 99x$

Xét $P = S - 1225 = -2x^2 + 99x - 1225 = (x - 25)(49 - 2x)$

Với $x \in N^*$, ta xét các trường hợp sau:

TH1: Với $x > 25 \Rightarrow x - 25 > 0; 49 - 2x < 0 \Rightarrow P < 0$

TH2: Với $x = 25 \Rightarrow P = 0$

TH3: $x < 25 \Rightarrow x \le 24 \Rightarrow 2x \le 48$

$\Rightarrow x - 25 < 0; 49 - 2x > 0 \Rightarrow P < 0$

$\Rightarrow P \le 0 \Rightarrow S \le 1225$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x = 25 \Rightarrow y = 49$

Cách 2: Xét $xy = x(99 - 2x) = -2x^2 + 99x = -2(x - 24,75)^2 + 1225,125 \le 1225,125$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x - 24,75 = 0 \Rightarrow x = 24,75$

Vì $x \in N^*$, ta xét với x = 24; x = 25; x = 26

Với $x = 24 \Rightarrow S_{max} = 1224$

Với $x = 25 \Rightarrow S_{max} = 1225$

Với $x = 26 \Rightarrow S_{max} = 1222$

$\Rightarrow S_{max} = 1225$ khi x = 25

Vậy diện tích mảnh vườn lớn nhất mà bác An có thể quay được là $1225m^2$

Bài 56: Một doanh nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Giả sử khi sản xuất và bán hết x sản phẩm đó (với $0 < x \le 400$), khi đó tổng số tiền doanh nghiệp thu được là $f(x) = 400x - x^2$ (đơn vị: chục nghìn đồng). Mức thuế phụ trên một đơn vị sản phẩm bán được là t (chục nghìn đồng)(với 0 < t

< 100). Tìm mức thuế t sao cho nhà nước nhận được số tiền thuế phụ thu lớn nhất và doanh nghiệp cũng thu được lợi nhuận theo mức thuế phụ thu đó. (Biết rằng: Lợi nhuận = Tổng doanh thu – Chi phí – Thuế)

Lời giải

Khi sản xuất và bán hết x sản phẩm đó ($0 < x \le 400$) lợi nhuận của doanh nghiệp là:

$L(x) = f(x) - g(x) - t.x = (400x - x^2) - (x^2 + 280x + 10) - t.x$

$L(x) = -2x^2 + 120x - 10 - t.x = -2x^2 + (120 - t)x - 10$

$L(x) = -2\left[x^2 - 2.\frac{120-t}{4} + \left(\frac{120-t}{4}\right)^2\right] + 2.\left(\frac{120-t}{4}\right)^2 - 10$

$L(x) = -2\left(x - \frac{120-t}{4}\right)^2 + \frac{(120-t)^2}{8} - 10 \le \frac{(120-t)^2}{8} - 10$

Do đó L(x) đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{120-t}{4}$ (Với $0 < x \le 400$)

Số tiền thuế nhà nước thu được từ doanh nghiệp là: $T(t) = t.x = t.\frac{120-t}{4}$

Xét $t.\frac{120-t}{4} = \frac{-1}{4}t^2 + 30t = \frac{-1}{4}(t - 60)^2 + 900 \le 900$ (Với $0 < t < 100$)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $t - 60 = 0 \Rightarrow t = 60$

$\Rightarrow x = 15$ (sản phẩm)

Vậy mực thuế phụ thu trên một đơn vị sản phẩm sao cho nhà nước nhận được số tiền thuế phụ thu lớn nhất khi t = 60. Khi đó, mức thuế phụ thu là 600000 đồng/sản phẩm, doanh nghiệp sản xuất và bán hết 60 sản phẩm

Bài 57: Kim cương là một khoáng sản quý, có rất nhiều giá trị và được sử dụng với nhiều mục đích khác nhau. Giá của một viên kim cương thường rất cao và phụ thuộc vào rất nhiều yếu tố. Giả sử rằng giá của viên kim cương tỉ lệ với bình phương khối lượng của nó. Khi đem một viên kim cương cắt thành ba phần và vẫn bán với giá như trên (theo đúng tỉ lệ trên) thì tổng số tiền thu được tăng hay giảm đi? Trong trường hợp nào, giá bán của viên kim cương tổng cộng giảm nhiều nhất? và giảm bao nhiêu?

Lời giải

Giả sử viên kim cương ban đầu có khối lượng là m. Giá bán của viên kim cương tỉ lệ với bình phương khối lượng, nên giá bán là km^2 với k là một hằng số.

Khi cắt viên kim cương thành ba phần có khối lượng lần lượt là a; b; c sao cho $a + b + c = m$.

Giá bán của ba phần này lần lượt là: ka^2, kb^2, kc^2

Tổng giá bán của ba phần là: $ka^2 + kb^2 + kc^2 = k(a^2 + b^2 + c^2)$

Ta cần so sánh km^2 và $k(a^2 + b^2 + c^2)$

Vì m = a + b + c, ta có: $m^2 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$

Do đó: $m^2 > a^2 + b^2 + c^2$

Điều này có nghĩa là $km^2 > k(a^2 + b^2 + c^2)$

Vậy tổng số tiền thu được sau khi cắt giảm đi so với giá bán của viên kim cương ban đầu

Sau khi giảm giá nhiều nhất xảy ra khi $a^2 + b^2 + c^2$ nhỏ nhất, tức là $a = b = c = \frac{m}{3}$

Trong trường hợp này, tổng giá bán là: $k\left[\left(\frac{m}{3}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^2\right] = k\frac{m^2}{3}$

So với giá bán ban đầu km^2, giá bán giảm đi $km^2 - k\frac{m^2}{3} = \frac{2}{3}km^2$

Vậy giá bán giảm đi $\frac{2}{3}$ so với giá bán ban đầu và giảm giá nhiều nhất khi chia thàng 3 phần bằng nhau

Bài 58: Một tập đoàn phát động cuộc thi chạy bộ và bơi lội trực tuyến để nhân viên có thể tham gia và ghi nhận thành tích mọi lúc mọi nơi. Thể lệ dành cho vận động viên (VĐV) như sau:

• Mục tiêu chính: Hoàn thành tối thiểu 14km chạy bộ và 5km bơi

• Nếu tham gia trong các ngày thường (từ thứ 2 đến thứ 6), VĐV cần chạy 1km và bơi 400m

• Nếu tham gia trong các ngày cuối tuần (thứ 7 và Chủ nhật), VĐV cần chạy 2km và bơi 1km

• Số calo tiêu thụ được ở mỗi ngày thường và ngày cuối tuần được BTC quy đổi lần lượt là 220 calo và 630 calo

• Cuộc thi diễn ra trong tối đa hai tuần, VĐV hoàn thành mục tiêu chính với lượng calo tiêu thụ ít nhất đoạt huy chương Vàng

Em hãy nêu một chiến thuật để VĐV có thể đoạt huy chương Vàng

Lời giải

Gọi số ngày thường và số ngày cuối tuần mà VĐV tham gia lần lượt là x, y (ngày)($x, y \in N^*$)

VĐV cần hoàn thành tối thiểu 14km chạy bộ nên: $x + 2y \geq 14 \Rightarrow 2y \geq 14 - x \geq 4 \Rightarrow y \geq 2$

VĐV cần hoàn thành tối thiểu 5km bơi nên: $0,4x + y \geq 5$

Trong 2 tuần, có 10 ngày thưởng nên $0 \leq x \leq 10$ và có 4 ngày cuối nên $0 \leq y \leq 4$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 220x + 630y$

Ta có: $P = 220x + 630y = 220(x + 2y) + 190y \geq 220.14 + 190.2 = 3460$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x = 10$ và $y = 2$

Vậy chiến thuật để VĐV đoạt huy chương Vàng là tham gia toàn bộ 10 ngày thường và 2 ngày cuối tuần trong thời gian hai tuần diễn ra cuộc thi

Bài 59: 3 người cùng cất tài liệu quan trọng vào một cái két. Hỏi phải làm cho cái két ít nhất bao nhiêu ổ khoá và bao nhiêu chìa để két chỉ mở được nếu có mặt ít nhất 2 trong số 3 người trên

Lời giải

Vì két chỉ mở được nếu có mặt ít nhac 2 người nên số ổ khóa phải lớn hơn hoặc bằng 2

TH1: Làm 2 ổ khóa

- Nếu làm 3 chìa thì sẽ có 2 người có cùng một loại chìa, 2 người này không mở được két

- Nếu làm nhiều hone 3 chìa thì ít nhất có 1 người 2 chìa khác loại, vậy chỉ cần một người này đã mở được két

TH2: Làm 3 ổ khóa

- Nếu làm tổng số 3 chìa thì phải đủ 3 người mới mở được két

- Nếu làm 4 hoặc 5 chìa thì có ít nhất 2 người không mở được két

- Nếu làm 6 chìa (mỗi ổ khóa 2 chìa), chia cho 3 người sao cho mỗi người cầm 2 chìa của hai ổ khóa khác nhau thì chỉ cần 2 người là có thể mở được két

Vậy ít nhất phải làm 3 ổ khóa và mỗi ổ khóa 2 chìa

Bài 60: Một cửa hàng phân phối bán ra 1000 sản phẩm mỗi năm. Mỗi lần đặt hàng có chi phí là 50 USD và chi phí lưu kho là 2 USD cho một sản phẩm mỗi năm. Hãy tìm số lượng hàng hóa cần đặt mỗi lần để tối thiểu hóa tổng chi phí đặt hàng và lưu kho

Lời giải

Gọi số lượng hàng hóa đặt mỗi lần là: x (x > 0)

Vì hàng tồn kho luôn giảm dần từ x sản phẩm đến 0 sản phẩm nên chi phí lưu kho là: $\frac{x+0}{2}.2$ = x (USD)

Chi phí đặt hàng của cửa hàng là: $\frac{1000}{x}.50 = \frac{50000}{x}$ (USD)

Tổng chi phí của cửa hàng là: P = x + $\frac{50000}{x}$ (USD)

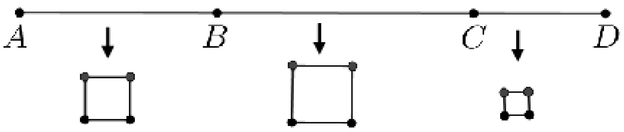
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si 2 số cho: x; $\frac{50000}{x}$ (Vì x > 0)

x + $\frac{50000}{x} \geq 2\sqrt{x.\frac{50000}{x}} = 200\sqrt{5}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: : x = $\frac{50000}{x}$ => x = $100\sqrt{5} \approx 224$

Vậy số lượng hàng hóa cần đặt mỗi lần là khoảng 224 sản phẩm để tối thiểu hóa tổng chi phí

Bài 61: Chuẩn bị đón năm mới, bạn Lan dự định trang trí bảng tin của lớp bằng các họa tiết hình vuông. Để tạo ra các hình vuông, bạn Lan cắt mỗi đoạn dây dài 60 cm thành 3 đoạn nhỏ. Sau đó mỗi đoạn nhỏ được uốn lại thành một hình vuông (hình bên dưới). Hỏi phải chia đoạn dây thành 3 phần có độ dài như thế nào để tổng diện tích các hình vuông có giá trị nhỏ nhất.



Lời giải

Gọi độ dài các đoạn dây lần lượt là: a, b, c (cm)(a, b, c > 0)

Theo đề bài, a + b + c = 60

Tổng diện tích các hình vuông là: S = $\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{b}{4}\right)^2 + \left(\frac{c}{4}\right)^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{16}$ (cm^2)

Áp dụng bất đẳng thức phụ Cô-si 2 số:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{16} \geq \frac{(a+b+c)^2}{48} = \frac{60^2}{48} = 75$$

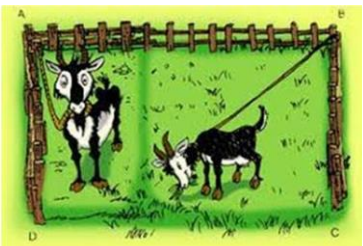
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: a = b = c = 20

Vậy để tổng diện tích nhỏ nhất thì cần chia thành 3 đoạn dây bằng nhau có độ dài mỗi đoạn là 20cm

Bài 62: Một vườn hình chữ nhật ABCD có AB = 40m; AD = 30m. Người ta muốn buộc hai con dê ở hai góc vườn A, B. Có hai cách buộc:
a) Mỗi dây thừng dài 20m

b) Một dây thừng dài 30m và dây thừng kia dài 10m

Hỏi với cách buộc nào thì diện tích cỏ mà cả hai con dê có thể ăn được sẽ lớn hơn?



Lời giải

Theo các buộc thứ nhất thì diện tích cỏ dành cho mỗi con dê là bằng nhau

Mỗi diện tích là $\frac{1}{4}$hình tròn bán kính 20m

$\frac{1}{4}\pi.20^2 = 100\pi$ (m^2)

Cả hai diện tích là $200\pi m^2$

Theo cách buộc thứ hai, thì diện tích cỏ dành cho con dê buộc A là: $\frac{1}{4}\pi.30^2 = 225\pi$ (m^2)

Diện tích cỏ dành cho con dê buộc ở B là: $\frac{1}{4}\pi.10^2 = 25\pi$ (m^2)

Diện tích cỏ dành cho hai con dê là: $225\pi + 25\pi = 250\pi$ (m^2)

Vậy cách buộc thứ hai, diện tích cỏ hai con dê ăn được nhiều hơn

Bài 63: Có hai hãng điện thoại tính phí gọi cho các thuê bao cố định như sau:

Hãng	Thuê bao (đồng)	Gọi nội hạt (đồng/phút)	Gọi đi động cùng mạng (đồng/phút)	Gọi đi động mạng khác (đồng/phút)
Hãng A	22 000	220	790	1 090
Hãng B	39 000	200	800	891

Biết cước phí hàng tháng bằng tổng tiền thuê bao, cước phí gọi nột hạt và cước phí gọi di động. Với cách tính phí như trên thì một khác hàng mỗi tháng gọi bình quân 6 giờ nội hạt, 3 giờ di động cùng mạng và 2 giờ đi động mạng khác nên sử dụng mạng của hang nào sẽ rẻ hơn?

Lời giải

Cước phí hàng tháng của hãng A là: 22 000 + 220.360 + 790.180 + 1 090.120 = 374 200 (đồng)

Cước phí hàng tháng của hãng B là: 39 000 + 200.360 + 800.180 + 891.120 = 361 920 (đồng)

Vậy dùng mạng của hãng B sẽ rẻ hơn

CHUYÊN ĐỀ 4: BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN HÌNH HỌC PHẲNG

- Đây là một dạng bài rất quen thuộc và được nhiều trường ra trong câu cuối đề thi giữa kì, cuối kì. Vậy nên nếu muốn được điểm 10 thì các độc giả cần phải nắm vững dạng bài này.

- Dạng toán này cần độc giả cần phải có sự tư duy nhanh nhẹn, ứng biến được mọi tình huống

Bài Tập

Bài 1: THCS Tây Mỗ muốn làm một sân Pickleball hình chữ nhật có diện tích $200m^2$ và phải rào lại bằng một số vật liệu. Chi phí rào mỗi mét chiều dài là 300 nghìn đồng, mỗi mét chiều rộng là 600 nghìn đồng. Hỏi nên chọn làm sân có chiều dài và chiều rộng như thế nào để chi phí ít nhất?

Lời giải

Gọi chiều dài là: x (m)(x > 0)

Gọi chiều rộng là: y (m)(y > 0)

Diện tích sân là: xy = 200 (m^2)

Chi phí để làm rào là: 2(300x + 600y) (nghìn đồng)

Xét A = 2(300x + 600y)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si 2 số cho 300x; 600y (Vì x, y > 0)

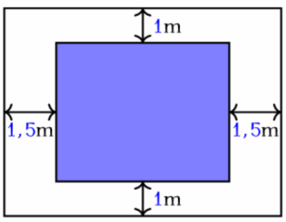
$300x + 600y \geq 2\sqrt{300x.600y} = 12000$

$A \geq 2.12000 = 24000$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} xy = 200 \\ 300x = 600y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \end{cases}$

Vậy nhà trường nên chọn làm sân có chiều dài 20m và chiều rộng là 10m để chi phí là thấp nhất

Bài 2: Cô Thảo Linh dự định dành ra một thửa đất hình chữ nhật trong mảnh đất lớn của nhà để làm bể bơi và phần còn lại làm lối đi (hình vẽ). Biết tổng diện tích thửa đất hình chữ nhật là $864m^2$. Cô Linh nên chọn kích thước của bể bơi là bao nhiêu để diện tích bể bơi là lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó



Lời giải

Gọi kích thước thừa đất cần dùng lần lượt là x và y (m)(x ≥ y; x > 3; y > 2)

Diện tích cần dùng là: xy (m^2)

=> xy = 864

Diện tích bể bơi là: S = (x – 3)(y – 2) (m^2)

Xét (x – 3)(y – 2) = xy – (2x + 3y) = 870 – (2x + 3y)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si 2 số cho: 2x; 3y (Vì x, y > 0)

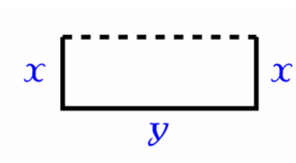
$2x + 3y \geq 2\sqrt{2x.3y} = 144$

=> $S \leq 870 - 144 = 726$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} 2x = 3y \\ xy = 864 \end{cases}$ => $\begin{cases} x = 36 \\ y = 24 \end{cases}$

Vậy cô Linh nên chọn kích thước của bể bơi là 36m và 24m để diện tích bể bơi lớn nhất là 726m^2

Bài 3: Máng trượt của một cầu trượt cho trẻ em được uốn từ một tám kim loại có bề rộng 80cm, mặt cắt được mô tả ở vẽ. Nhà thiết kế khuyến cáo, diện tích của mặt cắt càng lớn thì càng đảm bảo an toàn cho trẻ em. Gọi S là diện tích của mặt cắt, với x bằng bao nhiêu thì diện tích máng trượt lớn nhất mà vẫn đảm bảo an toàn



Lời giải

Do tấm kim loại có bề rộng 80cm nên: 2x + y = 80 => y = 80 – 2x

Để có thể thiết kế máng trượt thì y > 0 => 0 < x < 40

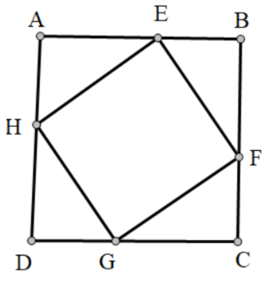
Diện tích của máng trượt là: S = xy (cm^2)

Xét $xy = x(80 - 2x) = -2x^2 + 80x = -2(x - 20)^2 + 800 \leq 800$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: x – 20 = 0 => x = 20

Vậy với x = 20 thì diện tích máng trượt lớn nhất mà vẫn đảm bảo an toàn

Bài 4: Cô Tú có mảnh vườn hình vuông ABCD có cạnh bằng 10m. Ở bốn góc vườn, bác Bình muốn trồng hoa thành các hình tam giác vuông bằng nhau (hình vẽ). Hãy tính khoảng cách từ góc vườn A đến vị trí E sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất.



Lời giải

Ta có: $\Delta AEH = \Delta AFD = \Delta ACGE = \Delta ADHG$

=> $HE = FE = FG = GH$ và $\angle AEH = \angle DFE$ mà $\angle AEH + \angle FED = 90°$

Lại có: $\angle AEH + \angle FED + \angle HDF = 180°$ => $\angle HDF = 90°$

=> EFGH là hình vuông

Đặt $AE = x$ (m)($0 < x < 10$)

ΔAEH vuông tại A có:

$HE^2 = AH^2 + HE^2 = (10 - x)^2 + x^2$

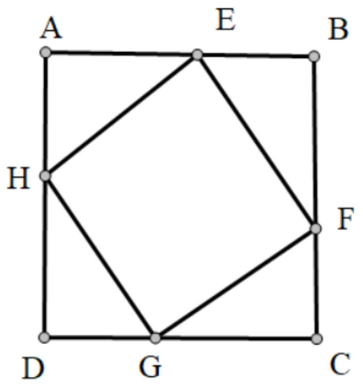
Xét $(10 - x)^2 + x^2 = 2x^2 - 20x + 100 = 2(x - 5)^2 + 50 \geq 50$

=> $HE \geq 5\sqrt{2}$ => $C_{EFGH} = 4HE$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x - 5 = 0$ => $x = 5$

Vậy khoảng cách từ A đến vị trí E là 5m để tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất

Bài 5: Một mảnh đất hình vuông ABCD cạnh 30m. Người ta xây dựng một vườn hoa dạng hình vuông EFGH có các đỉnh E, F, G, H thuộc các cạnh của hình vuông ABCD (hình vẽ). Xác định vị trí điểm E trên cạnh AB để diện tích vườn hoa nhỏ nhất



Lời giải

Đặt $AE = x$ ($0 \leq x \leq 30$)

$S_{EFGH} = S_{ABCD} - 4S_{AEH} = 900 - 2x(30 - x)$ (m^2)

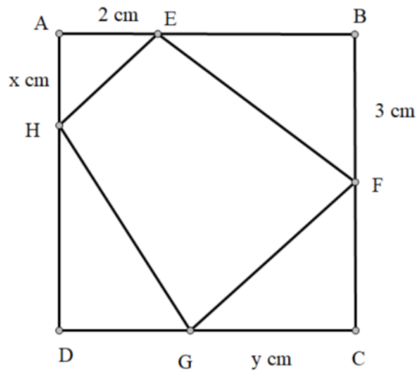
Xét $900 - 2x(30 - x) = 2x^2 - 60x + 900 = 2(x - 15)^2 + 450 \geq 450$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x - 15 = 0$ => $x = 15$

=> AE = 15m => E là trung điểm của AB

Vậy E thuộc cạnh AB sao cho E là trung điểm của AB thì diện tích vườn hoa nhỏ nhất

Bài 6: Cho một tấm nhôm hình vuông có cạnh 6cm, Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Tính tổng x + y để diện tích hình thang EFGH đạt giá trị nhỏ nhất



Lời giải

Ta có: S_{EFGH} nhỏ nhất khi và chỉ khi: $S = S_{AEH} + S_{CGF} + S_{DGH}$ lớn nhất

Ta có: 2S = 2x + 3y + (6 – x)(6 – y) = xy – 4x – 3y + 36

Lại có: ΔAEH ~ ΔCGF => $\frac{AE}{CG} = \frac{AH}{CF}$ => $\frac{2}{y} = \frac{x}{3}$ => xy = 6

=> 2S = 42 – $\left(4x + \frac{18}{x}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si 2 số choL 4x; $\frac{18}{x}$ (Vì x > 0)

$4x + \frac{18}{x} \geq 2\sqrt{4x.\frac{18}{x}} = 12\sqrt{2}$

=> $2S \leq 42 - 12\sqrt{2}$ => $S \leq 21 - 6\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $4x = \frac{18}{x}$ => $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ => $y = 2\sqrt{2}$

Vậy $x + y = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

Bài 7: Bác Hoa muốn làm một số chiếc khăn sữa hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 40cm để quàng vào cổ cho con gái nhỏ. Bác nên chọn kích thước mỗi chiếc khăn sữa là bao nhiêu để diện tích chiếc khăn là lớn nhất? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của cm)

Lời giải

Gọi chiều rộng của chiếc khăn hình chữ nhật là: x (m)(x > 0)

Chiều dài của hình chữ nhật là: $\sqrt{40^2 - x^2}$ (m)

Diện tích hình chữ nhật là: $S = x\sqrt{40^2 - x^2} = \sqrt{x^2(1600 - x^2)}$

Áp dụng bất đẳng thức phụ Cô-si 2 số:

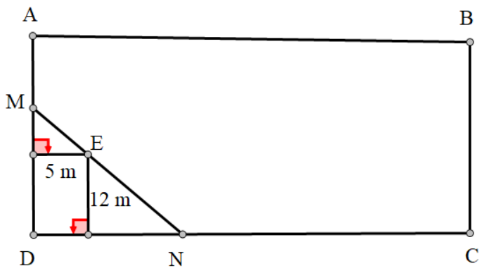
$\sqrt{x^2(1600 - x^2)} \le \frac{1}{2}(x^2 + 1600 - x^2) = 800$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x^2 = 1600 - x^2$ => $x \approx 28$

Chiều dài của hình chữ nhật là: $\sqrt{40^2 - 800} \approx 28$ (cm)

Vậy bác nên chọn chiếc khăn sữa hình vuông với kích thước mỗi cạnh xấp xỉ 28cm

Bài 8: Nhà anh Thịnh có một cái ao nuôi cá hình chữ nhật ABCD . Khi thả cá giống, anh giăng lưới quây lại ở một góc ao (nhu hình vẽ). Biết rằng lưới được giăng theo một đường thẳng từ một vị trí M một vị trí N ở bờ AD và phải đi qua một cái cọc cố định đã cắm sẵn ở vị trí E ở bờ AB đến . Biết rằng khoảng cách từ cọc E đến bờ , AB AD lần lượt là 5 m và 12 m. Hỏi diện tích nhỏ nhất của phần góc ao có thể quây được là bao nhiêu?



Lời giải

Gọi khoảng cách từ E đến AB, AD lần lượt là EH, EK

Đặt KN = x (m)(x > 0)

Có: ΔKEN ~ ΔHME => $\frac{KE}{KN} = \frac{HM}{HE}$ => $\frac{12}{x} = \frac{HM}{5}$ => HM = $\frac{60}{x}$ (m)

S_{AMN} là: $S_{AMN} = \frac{1}{2}AM.AN = \frac{1}{2}\left(12 + \frac{60}{x}\right).(5 + x) = \left(6 + \frac{30}{x}\right).(5 + x)$ (m^2)

Xét $\left(6 + \frac{30}{x}\right).(5 + x) = 60 + 6x + \frac{150}{x}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si 2 số cho: $6x; \frac{150}{x}$ (Vì x > 0)

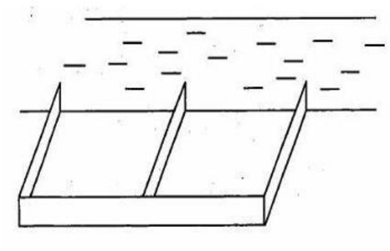
$6x + \frac{150}{x} \ge 2\sqrt{6x.\frac{150}{x}} = 60$

=> $S_{AMN} \ge 60 + 60 = 120$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $6x = \frac{150}{x}$ => x = 5

Vậy diện tích nhỏ nhất phần góc ao AMN mà anh Thịnh có thể quây được là $120m^2$

Bài 9: Một người nông dân có 18000000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 70000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.



Lời giải

Gọi chiều dài của hàng rào song song với bờ sông là x (m)(x > 0)

Goị chiều rộng của mỗi hàng rào vuông góc với bờ sông là y (m)(y > 0)

Chi phí bỏ ra để làm hàng rào là 18000000 đồng nên ta có phương trình:

$70000x + 150000y = 18000000 \Rightarrow y = \frac{1800 - 7x}{15}$

Diện tích mảnh đất là: $S = xy = x\left(\frac{1800 - 7x}{15}\right)$ (m^2)

Xét $x\left(\frac{1800 - 7x}{15}\right) = \frac{7}{15}x^2 + 120x = \frac{-7}{15}\left(x - \frac{900}{7}\right)^2 + \frac{54000}{7} \leq \frac{54000}{7}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x - \frac{900}{7} = 0 \Rightarrow x = \frac{900}{7}$

Vậy diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào là $\frac{54000}{7}m^2$

Bài 10: Chú Bình mua 100m lưới thép gai để rào lại mảnh vườn nhà mình. Biết mảnh vườn có dạng hình chữ nhật và đã cớ sẵn mảng tường gạch làm một cạnh cho hàng rào của vườn. Hỏi với 100m thép gai trên, diện tích của vườn lớn nhất mà chú Bình rào được là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi độ dài của mảng tường gạch là x (m)(x > 0)

Độ dài cạnh còn lại của hàng rào là: $\frac{100 - x}{2}$ (m)

Diện tích của mảnh vườn là: $S = x.\frac{100 - x}{2}$ (m^2)

Xét $x.\frac{100 - x}{2} = \frac{-x^2 + 100x}{2} = \frac{-(x - 50)^2 + 2500}{2} \leq 1250$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x - 50 = 0 \Rightarrow x = 50$

Vậy diện tích của vườn lớn nhất mà chú Bình rào được là $1250m^2$

Bài 11: Ông Minh có 2400m hàng rào và muốn rào lại cánh đồng hình chữ nhật tiếp giáp với một con sông. Ông không cần rào cho phía giáp bờ sông. Hỏi ông có thể rào được cánh đồng với diện tích lớn nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi hai kích thước của hình chữ nhật là x và y (m)($0 < x, y < 2400$)

=> $2x + y = 2400$

Diện tích của mảnh vườn là: $S = xy = \frac{1}{2}.2x.y$ (m^2)

Áp dụng bất đẳng thức phụ Cô-si 2 số

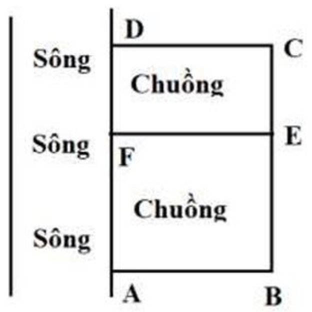
$2x.y \leq \frac{(2x+y)^2}{4} = \frac{2400^2}{4} = 1440000$

=> $S \leq 720000$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} 2x + y = 2400 \\ 2x = y \end{cases}$ => $\begin{cases} x = 600 \\ y = 1200 \end{cases}$

Vậy ông có thể rào được cánh đồng với diện tích lớn nhất là $720000m^2$

Bài 12: Một trang trại nhà bác Thành Minh nuôi gia cầm muốn rào thành chuồng có dạng hình chữ nhật sát với nhau và sát một con sông, một chuồng nuôi gà và một chuồng nuôi vịt (Như hình vẽ). Biết rằng gia đình bác Thành Minh đã có sẵn 240 m hàng rào. Hỏi diện tích lớn nhất có thể bao quanh chuồng là bao nhiêu? (Biết rằng không rào bờ sông AD)



Lời giải

Xét hình chữ nhật ABCD như hình vẽ thì ta cần rào là các cạnh AB, BC, CD, EF

Theo bài ra ta có: AB + EF + CD + BC = 240 => 3AB + BC = 240

Diện tích của 2 chuồng chính là diện tích của hình chữ nhất ABCD nên ta có:

$S_{ABCD} = AB.BC$ (m^2)

Đặt AB = x ($x > 0$)

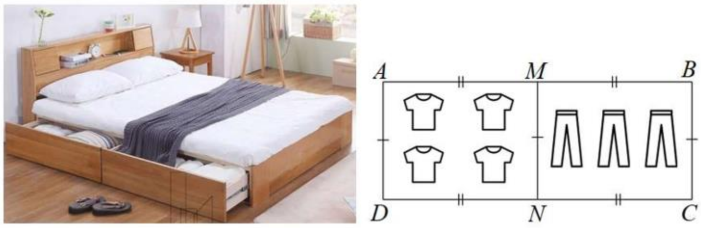
=> BC = 240 – 3x

Xét S_{ABCD} = AB.BC = x(240 – 3x) = 240x – 3x^2 = -3(x – 40)^2 + 4800 ≤ 4800

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: x – 40 = 0 => x = 40

Vậy diện tích lớn nhất có thể bao quanh chuồng là 40m^2

Bài 13: Một xưởng nội thất dự trù 216 nghìn đồng để sản xuất ngăn kéo chứa đồ cho một chiếc giường. Ngăn kèo gồm hai khoang có dạng hình chữ nhật với kích thước bằng nhau, trong đó vật liệu làm hai thanh AB, CD có đơn giá 45 nghìn đồng/mét và vật liệu làm ba thanh AD, BC, MN có đơn giá 80 nghìn đồng/mét. Tìm độ dài hai đoạn AB và AD để diện tích chứa đồ là lớn nhất, coi độ dày của các thanh gỗ là không đáng kể.



Lời giải

Đặt AB = x; AD = y (x, y > 0)

Theo đề bài ta có: 2x.45 + 3y.80 = 216 => y = $\frac{36-15x}{40}$

Diện tích chứ đồ là: S = xy = x. $\frac{36-15x}{40}$ = $\frac{36x-15x^2}{40}$= –0,375(x – 1,2)^2 + 0,54 ≤ 0,54

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: x – 1,2 = 0 => x = 1,2 => y = 0,45

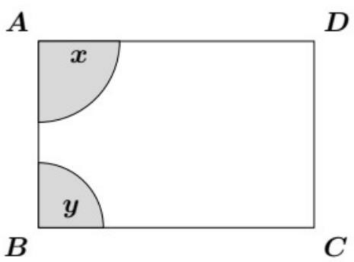
Vậy AB = 1,2m và AD = 0,45m thì diện tích chứa đồ lớn nhất

Bài 14: Một mảnh vườn hình chữ nhật ABCD có chiều rộng AB = 23 mét và chiều dài AD = 34 mét. Cô Ngọc Hà buộc hai con dê ở hai góc vườn A và B. Biết rằng số mét dài của mỗi sợi dây buộc là số nguyên và tổng chiều dài hai sợi dây buộc đúng bằng chiều dài cạnh AB. Hỏi chiều dài mỗi sợi dây buộc dê bằng bao nhiêu mét thì diện tích cỏ mà cả hai con dê có thể ăn được là lớn nhất?

Lời giải

Gọi chiều dài hai sợi dây buộc dê ở A và B lần lượt là x và y (x; y ∈ N*)

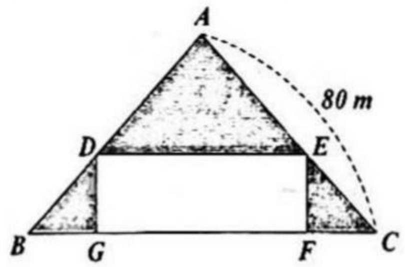
Theo đề bài ta có: x + y = 23



- Khi buộc một con dê ở A thì phần cỏ con dê đó có thể ăn được là một phần tư hình trong tâm A, bán kính x mét với $x \in N^*$
- Khi buộc một con dê ở B thì phần cỏ con dê đó có thể ăn được là một phần tư hình trong tâm B, bán kính y mét với $y \in N^*$

Do đó: diện tích phần cỏ cả hai con dê có thể ăn được là:
$S = \frac{\pi}{4}(x^2 + y^2) = \frac{\pi}{4}[(x+y)^2 - 2xy] = \frac{\pi}{4}(529 - 2xy)$ (m^2) (1)
Ta có $4xy + (x - y)^2 = (x + y)^2 \Rightarrow 4xy + (x - y)^2$ (2)
Mặt khác $x \in N^*$, $y \in N^*$ và $x + y = 23 \Rightarrow x \neq y$
Từ (1) => S lớn nhất nếu xy nhỏ nhất. Kết hợp (2) thì xy nhỏ nhất nếu $|x - y|$ lớn nhất
Mà x + y = 23 nên $x \in N^*$, $y \in N^*$ nên $|x - y|$ lớn nhất nếu x = 1; y = 22 hoặc x = 22; y = 1
Vậy khi chiều dài một sợi dây là 1 mét và chiều dài dây còn lại là 22 mát thì diện tích phần cỏ hai con dê ăn được lớn nhất là: $S_{max} = \frac{\pi}{4}(529 - 2.1.22) = \frac{485\pi}{4}$ (m^2)

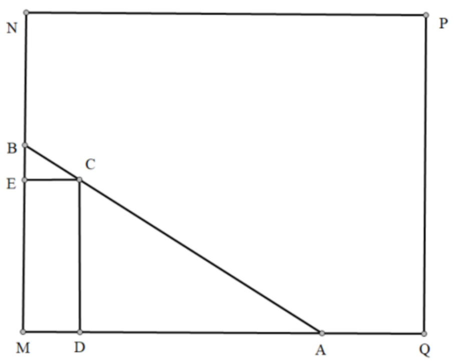
Bài 15: Bác Minh có một mảnh vườn hình tam giác vuông cản ABC với AB = AC = 80M. Bác dự định đào một cái ao hình chữ nhật DEFG sao cho vị trí D nằm trên cạnh vườn AB; vị trí E nằm trên cạnh vườn AC; hai vị trí G và F nằm trên cạnh vườn BC như hình vẽ. Hỏi diện tích lớn nhất của cái ao là bao nhiêu?



Lời giải

Đặt AE = x (m)(0 < x < 80) => EC = 80 – x (m)
ΔADE vuông cân tại A và ΔEFC vuông cân tại F
$\Rightarrow DE = AE\sqrt{2} = x\sqrt{2}$ (m)
$EF = \frac{EC}{\sqrt{2}} = \frac{80 - x}{\sqrt{2}}$ (m)
Diện tích của ao là: $S = DE.EF = x\sqrt{2}.\frac{80 - x}{\sqrt{2}} = x(80 - x)$ (m^2)
Xét $x(80 - x) = 80x - x^2 = -(40 - x)^2 + 1600 \leq 1600$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: 40 – x = 0 => x = 40
Vậy diện tích lớn nhất của ao là $1600m^2$

Bài 16: Cho hình chữ nhật MNPQ có MQ > MN > 20 M. Qua điểm C nằm trong hình chữ nhật vẽ một đường thẳng cắt đoạn thẳng , MQMN theo thứ tự tại A và B. Biết điểm C cách MQ một khoảng bằng 8 m và cách MN một khoảng bằng 1 m. Tính độ dài ngắn nhất của đoạn thẳng AB.



Lời giải

Cách 1: Đặt MA = a, MB = b (a, b > 0)

Gọi D, E tương ứng là hình chiếu của C trên MQ, MN

=> CD // MB và CE // MA

Theo định lý Thales: $\frac{1}{a} + \frac{8}{b} = \frac{BC}{BA} + \frac{CA}{BA} = 1$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si 2 số:

$BA^2 = a^2 + b^2 = (a^2 + 25) + (b^2 + 100) - 125 \geq 10a + 20b - 125$

$= 10\left(a + \frac{25}{a}\right) + 20\left(b + \frac{100}{b}\right) - 250\left(\frac{1}{a} + \frac{8}{b}\right) - 125 = 10.10 + 20.20 - 250 - 125 = 125$

=> $AB = 5\sqrt{5}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} a = \frac{25}{a} \\ b = \frac{100}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 10 \end{cases}$

Cách 2: Ta có:

$AB^2 = MA^2 + MB^2 = a^2 + b^2 = (a^2 + b^2).1 = (a^2 + b^2)\left(\frac{1}{a} + \frac{8}{b}\right)^2 = (a^2 + b^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{64}{b^2} + \frac{16}{ab}\right)$

$= 1 + \frac{64a^2}{b^2} + \frac{16a}{b} + \frac{b^2}{a^2} + 64 + \frac{16b}{a} = 65 + \left(\frac{64a^2}{b^2} + \frac{8b}{a} + \frac{8b}{a}\right) + \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{8a}{b} + \frac{8a}{b}\right)$

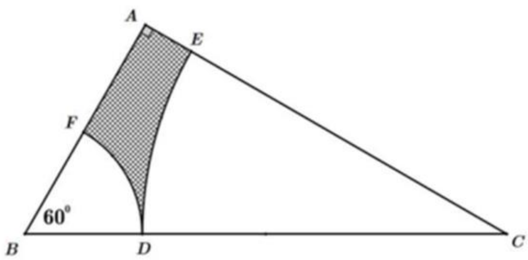
$\geq 65 + 3\sqrt[3]{\frac{64a^2}{b^2}.\frac{8b}{a}.\frac{8b}{a}} + 3\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}.\frac{8a}{b}.\frac{8a}{b}} = 65 + 48 + 12 = 125$

=> $AB = 5\sqrt{5}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{8}{b} = 1 \\ \frac{64a^2}{b} = \frac{8b}{a} \\ \frac{b^2}{a^2} = \frac{8a}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 10 \end{cases}$

Vậy độ dài ngắn nhất của đoạn thẳng AB là $5\sqrt{5}$ m

Bài 17: Cho ΔABC vuông tại A có ∠B = 60° và AB = 3cm. Lấy một điểm F tùy ý trên cạnh AB sao cho BF > 1cm. Vẽ một phần đường tròn tâm B, bán kính BF cắ BC tại D. Tiếp tục, vẽ một phần đường tròn tâm C, bán kính CD cắt cạnh AC tại E. Tìm vị trí điểm F trên AB để diện tích phần tô đậm là lớn nhất?



Lời giải

Gọi độ dài BF bằng x (cm)(1 < x < 3) => BD = x (cm); CD = 6 – x (cm)

Diện tích hình quạt BFD là: $S_1 = \frac{1}{6}\pi.x^2$ (cm^2)

Diện tích hình quạt CED là: $S_2 = \frac{1}{12}\pi(6 - x)^2$ (cm^2)

Vì diện tích tam giác ABC không điểm nên để diện tích phần tô đậm lớn nhất thì $S = S_1 + S_2$ phải nhỏ nhất

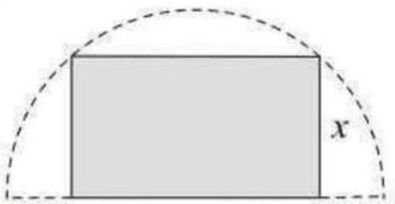
$S = \frac{1}{6}\pi.x^2 + \frac{1}{12}\pi(6 - x)^2 = \frac{1}{12}\pi[2x^2 + (6 - x)^2]$ (cm^2)

Xét $\frac{1}{12}\pi[2x^2 + (6 - x)^2] = \frac{1}{4}\pi(x^2 - 4x + 12) = \frac{1}{4}\pi[(x - 2)^2 + 8] \geq 2\pi$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: x – 2 = 0 => x = 2

Vậy F thuộc AB sao cho BF = 2cm thì diện tích phần tô đậm là lớn nhất

Bài 18: Từ một miếng tôn hình bán nguyệt có diện tích $\frac{\pi}{2}m^2$, cần cắt bỏ phần tôn với tổng diện tích bao nhiêu mét vuông để thu được phần còn lại có dạng hình chữ nhật với diện tích lớn nhất? Cắt bỏ phần tôn với tổng diện tích bao nhiêu mét vuông? Miếng tôn có bán kính 1 mét



Lời giải

Diện tích phần tôn hình chữ nhật còn lại là: $S = 2x\sqrt{1 - x^2}$ (m^2)

Áp dụng bất đẳng thức phụ Cô-si 2 số cho: 2x; $\sqrt{1 - x^2}$ (Vì x > 0)

$2x\sqrt{1 - x^2} \leq x^2 + (1 - x^2) = 1$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $2x = \sqrt{1 - x^2}$ => $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy cần cắt bỏ phần tân với tổng diện tích là $\frac{\pi}{2} - 1$ (m^2)

Bài 19: Cho một trang giấy biết phần màu xám trong hình vẽ dưới đây chứa một đoạn văn bản có diện tích 384 cm^2 . Biết rằng trang giấy được căn lề trái 2 cm, lề phải 2 cm, lề trên 3 cm và lề dưới 3 cm. Tìm chiều dài và chiều rộng của trang giấy để trang giấy có diện tích nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi chiều dài và chiều rộng của phần màu xám chứa đoạn văn bản lần lượt là x, y (cm)(x, y > 0)

Ta có: xy = 384 => $y = \frac{384}{x}$

Diện tích của trang giấy là: S = (x + 6)(y + 4) (cm^2)

Xét $(x + 6)(y + 4) = xy + 4x + 6y + 24 = 408 + 4x + 6.\frac{384}{x} = 4x + \frac{2304}{x} + 408$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si 2 số cho: 4x; $\frac{2304}{x}$ (Vì x > 0)

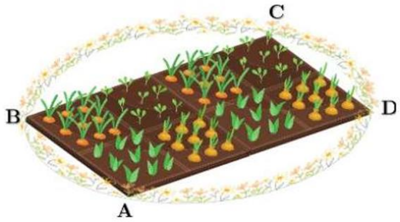
$4x + \frac{2304}{x} \geq \sqrt{4x.\frac{2304}{x}} = 192$

=> $S \geq 192 + 408 = 600$

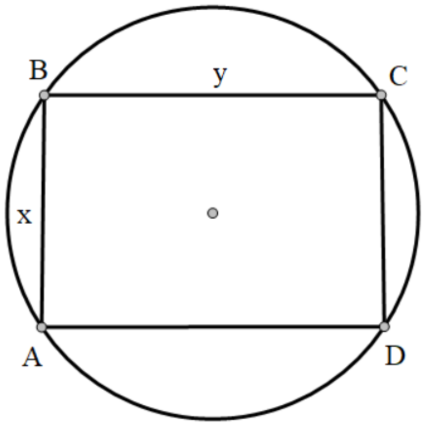
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $4x = \frac{2304}{x}$ => x = 24 => y = 16

Vậy chiều dài và chiều rộng của trang giấy lần lượt là 24cm và 16cm thì trang giấy có diện tích nhỏ nhất

Bài 20: Người ta muốn làm một vườn rau có dạng hình chữ nhật ABCD có diện tích 640 m^2, để tạo thêm cảnh quan xung quanh đẹp hơn, người ta mở rộng thêm bốn phần diện tích để trồng hoa, tạo thành một đường tròn đi như hình vẽ, biết tâm hình tròn trùng với giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật. Khi đó chọn kích thước cạnh ABCD như thế nào để diện tích của bốn phần đất trồng hoa nhỏ nhất?



Lời giải



\

Đường kính của đường tròn là: $\sqrt{x^2 + y^2}$ (m)

=> Bán kính của đường tròn là: $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}$ (m)

Diện tích đường tròn là: S = $\pi.\frac{x^2 + y^2}{4}$ (m^2)

Diện tích của hình chữ nhật là S_{HCN} = xy = 640 (m^2)

Diện tích phần đất trồng hoa là: $S' = S - S_{HCN} = \pi.\frac{x^2 + y^2}{4} - xy$

Vì $(x - y)^2 \geq 0$ với mọi x, y => $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$ => $x^2 + y^2 \geq 2xy$ => $\frac{x^2 + y^2}{4} \geq \frac{xy}{2} > 0$

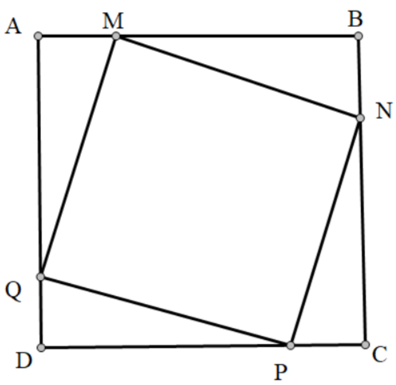
.$\frac{\pi(x^2 + y^2)}{4} \geq \frac{\pi xy}{2}$ => $\frac{\pi(x^2 + y^2)}{4} - xy \geq \frac{\pi xy}{2} - xy$

=> $S' \geq \frac{\pi xy}{2} - xy = 320\pi - 640$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x = y = 8\sqrt{10}$

Vậy khi ABCD là hình vuông và mỗi cạnh có độ dài là $8\sqrt{10}$ m thì diện tích bố phần đất trồng hoa nhỏ nhất

Bài 21: Nhà bác Hương có một mảnh sân hình vuông có cạnh là 16 m. Bác Hương muốn lát gạch màu đỏ có dạng hình vuông MNPQ để trang trí lên mảnh sân hình vuông (nhu hình vẽ bên). Tìm vị trí của điểm M ,N, P, Q lần lượt trên các cạnh của mảnh sân để hình vuông MNPQ có diện tích nhỏ nhất.



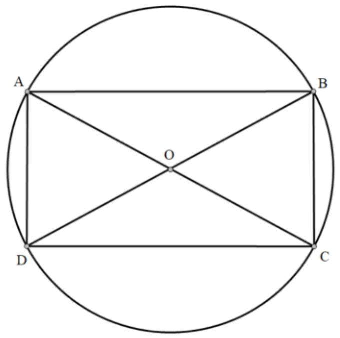
Lời giải

Gọi cái sân đó là hình vuông ABCD, phần lát gạch đỏ trang trí là hình vuông MNPQ

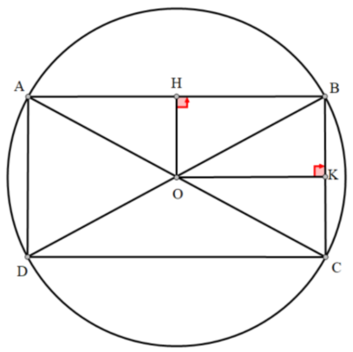
Ta dễ dành chứng minh được: ΔAMQ = ΔBNM = ΔCPN = ΔDQP

Diện tích hình vuông MNPQ có diện tích nhỏ nhất khi tổng diện tích 4 tam giác vuông ở 4 góc hình vuông ABCD lớn nhất.
Gọi S là tổng diện tích 4 tam giác vuông ở 4 góc hình vuông ABCD
Tổng diện tích 4 tam giác là: S = 2.AM.AQ (m^2)
Mà AM + AQ = AM + MB = 16 (m)
Ta có: $(AM – MB)^2 \geq 0$
=> $AM^2 + MB^2 \geq 2.AM.MB$
=> $(AM + MB)^2 \geq 4.AM.MB$
=> $2.AM.MB \leq \frac{(AM+MB)^2}{2} = 128$
=> $S \leq 128$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: AM = MB = 8
=> M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA
Vậy khi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA thì hình vuông MNPQ có diện tích nhỏ nhất

Bài 22: Một mảnh vườn hình chữ nhật ABCD có diện tích 961 m^2. Người ta muốn mở rộng thêm 4 phần đất sao cho tạo thành đường tròn đi qua các điểm của hình chữ nhật như hình vẽ. Biết tâm đường tròn trùng với tâm hình chữ nhật ABCD. Tính diện tích nhỏ nhất của 4 phần đất được mở rộng (lấy $\pi \approx 3,14$ và kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



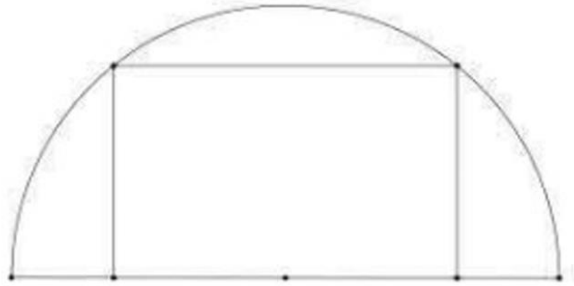
Lời giải



Gọi H và K lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ O lên AB và BC
Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là x, y (m)(x > y > 0)
Diện tích hình chữ nhật là: $S_{ABCD} = xy = 961$
Ta có OA = OB = R => ΔOAB cân tại O mà OH là đường cao
=> OH đồng thời là đường trung trực => AH = HB = $\frac{x}{2}$
Tương tự ta có: BK = BC = $\frac{y}{2}$
Ta dễ dàng chứng minh: OHBK là hình chữ nhật => OH = BK = $\frac{y}{2}$
Xét ΔOHA vuông tại H có:
$OA^2 = AH^2 + OH^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$
=> $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = R^2$
Diện tích phần mở rộng là: $S = S_{(O)} – S_{ABCD} = \frac{\pi(x^2+y^2)}{4} – xy \geq \frac{2\pi xy}{4} – xy \geq 480,5\pi – 961 = 547,77$ m^2

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: x = y = 31
Vậy diện tích nhỏ nhất của 4 phần đất được mở rộng là 547,77 m^2

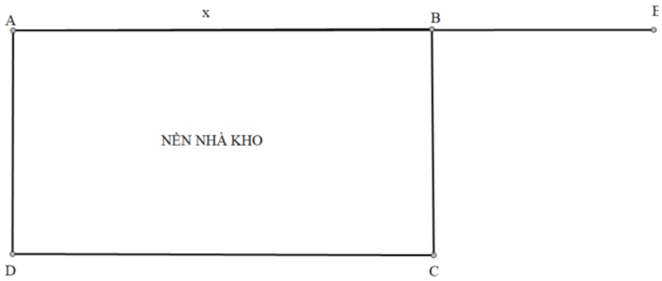
Bài 23: Từ một nửa hình tròn có bán kính 10 cm người ta cắt đi những phần thừa để có được hình chữ nhật (như hình vẽ bên). Hình chữ nhật này có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?



Lời giải
Gọi độ dài cạnh hình chữ nhật không nằm dọc theo đường kính đường tròn là x (cm) (0 < x < 10)
Độ dài cạnh hình chữ nhật nằm dọc trên đường tròn là: $2\sqrt{10^2 - x^2}$ (cm)
Diện tích hình chữ nhật là: S = $2x\sqrt{10^2 - x^2}$ (cm^2)
Áp dụng bất đẳng thức phụ Cô-si 2 số:
$2x\sqrt{10^2 - x^2} = x^2 + 10^2 - x^2 = 100$
=> S ≤ 100
Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: x = $\sqrt{10^2 - x^2}$ => x = $5\sqrt{2}$
Vậy hình chữ nhật có diện tích lớn nhất là 100cm^2

Bài 24: Trên một khu đất có một bức tường hình chữ nhật với chiều dài 12 m, người ta dự định xây dựng một nhà kho có nền là hình chữ nhật với diện tích 56 m^2. Tính theo chiều dài bức tường, chi phí sửa 1 m tường cũ bằng 25% chi phí 1 m tường mới, tiền công tháo dỡ 1 m tường cũ với vật liệu mới. Để tiết kiệm chi phí xây dựng thì nên giữ lại bao nhiêu mét tường cũ và tận dụng vật liệu bao nhiêu mét tường đã tháo dỡ? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)

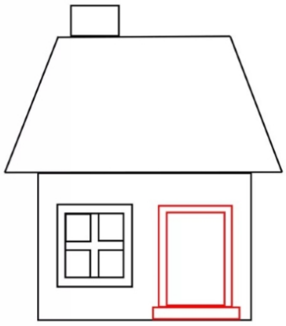
Lời giải



Gọi bức tường dài 12 (m) là AE (AE = 12m)
Phần tường cũ giữ lại là x (m) (AB = x m)
Phần tường đã tháo dỡ là 12 – x (m) (BE = 12 – x)
Gọi ABCD là phần nền nhà kho hình chữ nhật
Khi đó BC = $\frac{56}{x}$ = AD, AB = CD = x
Phần tường AB cần sửa lại, phần tường BE tháo dỡ sẽ xây tiếp vào phần tường nhà kho thuộc đoạn BC, CD, DA
Gọi a là chi phí xây 1 m tường mới (cũng chính là tiền công xây 1 m tường mới với vật liệu mới)
Tổng chi phí xây dựng tường nhà kho là:
T = AB.a.25% + BE.a.50% + (BC + CD + DA – BE).a
$= a.\left[\frac{x}{4} + \frac{12-2x}{2} + \left(\frac{56}{x} + x + \frac{56}{x}\right) - (12 - x)\right] = a\left(\frac{112}{x} + \frac{7x}{4} - 6\right)$
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si 2 số cho: $\frac{112}{x}; \frac{7x}{4}$ (Vì x > 0)

$\frac{112}{x} + \frac{7x}{4} \geq 2\sqrt{\frac{112}{x}.\frac{7x}{4}} = 28$
=> $T \geq 22a$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{112}{x} = \frac{7x}{4}$ => $x = 8$
Vậy giữ lại 8 m tường cũ tận dụng vật liệu của 4 m tường tháo dỡ

Bài 25: Khi làm nhà kho, bác An muốn cửa sổ có dạng hình chữ nhật với chu vi bằng 4m (như hình vẽ).



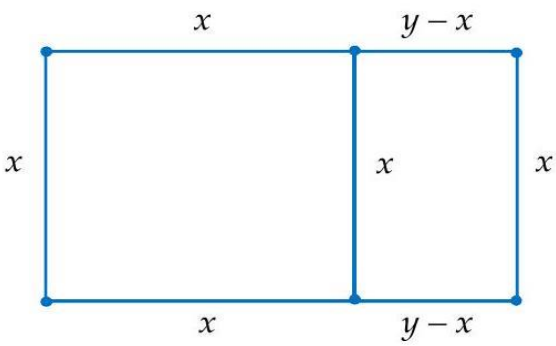
Tìm kích thước khung của sổ sao cho diện tích cửa sổ lớn nhất (để hứng được nhiều ánh sáng nhất)?

Lời giải

Gọi chiều dài khung sổ là x (m)(x > 0)
Gọi chiều rộng khung sổ là y (m)(y > 0)
Ta có: $x + y = 2$ => $y = 2 – x$
$S_{\text{khung sổ}} = x.y = x(2 – x)$ (m^2)
Xét $x(2 – x) = -x^2 + 2x = -(x – 1)^2 + 1 \leq 1$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x – 1 = 0$ => $x = 1$ => $y = 1$
Vậy chiều dài bằng chiều rộng là 1 m thì diện tích khung cửa sổ là lớn nhất

Bài 26: Kỳ thi THPT Quốc gia năm 2016 vừa kết thúc, Nam đỗ vào trường Đại học Bách Khoa Hà Nội. Kỳ I của năm nhất gần qua, kỳ II sắp đến. Hoàn cảnh không được tốt nên gia đình rất lo lắng về việc đóng học phí cho Nam, kỳ I đã khó khăn, kỳ II càng khó khăn hơn. Gia đình đã quyết định bán một phần mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 50 m, lấy tiền lo cho việc học của Nam cũng như tương lai của em. Mảnh đất còn lại sau khi bán là một hình vuông cạnh bằng chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật ban đầu. Tìm số tiền lớn nhất mà gia đình Nam nhận được khi bán đất, biết giá tiền 1m^2 đất khi bán là 1500000 VN đồng.

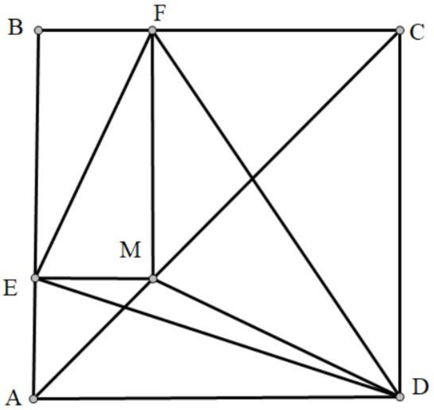
Lời giải



Gọi chiều rộng và chiều dài của mảnh đất hình chữ nhật ban đầu lần lượt là x, y (m)(x , y > 0)
Chu vi mảnh đất hình chữ nhật ban đầu là 50 m => $2(x + y) = 50$ => $y = 25 – x$
Mảnh đất được bán là một hình chữ nhật có diện tích là: $S = x(y – x)$ (m^2)
Xét $x(y – x) = x(25 – x – x) = 25x – x^2 = -2(x – 6,25)^2 + 78,125 \leq 78,125$
=> $S \leq 78,125$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x – 6,25 = 0$ => $x = 6,25$ => $y = 18,75$
Vậy ố tiền lớn nhất mà gia đình Nam nhận được khi bán đất là: $78,125.1500000 = 117187500$ (đồng)

Bài 27: Cho hình vuông ABCD có diện tích bằng 2025. Xét điểm M thay đổi trên đường chéo AC. Gọi E, F lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M lên các cạnh AB, AC của hình vuông ABCD. Tìm vị trí điểm M trên AC để diện tích tam giác DEF có giá trị nhỏ nhất

Lời giải



Ta có: $S_{DEF} = S_{DME} + S_{DMF} + S_{MEF}$

Mà $S_{DME} = S_{AME}$ (chung đáy ME, đường cao bằng nhau)

$S_{DMF} = S_{CMF}$ (chung đáy MF, đường cao bằng nhau)

=> $S_{DEF} = S_{AME} + S_{CMF} + S_{MEF} = S_{AEFC} = S_{ACB} - S_{EBF} = \frac{1}{2}S_{ABCD} - \frac{1}{2}BE.BF$

Áp dụng bất đẳng thức phụ Cô-si 2 số:

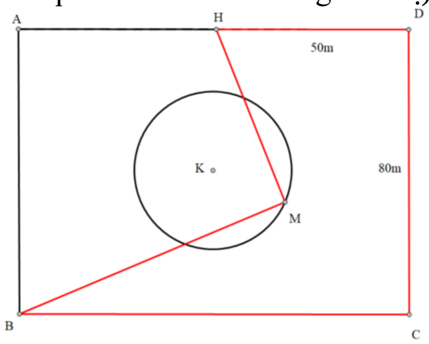
$\frac{1}{2}BE.EF \le \frac{(BE+BF)^2}{8} = \frac{AB^2}{8} = \frac{1}{8}S_{ABCD}$

=> $S_{DEF} \le \frac{1}{2}S_{ABCD} - \frac{1}{8}S_{ABCD} = \frac{3}{8}S_{ABCD} = \frac{3}{8}.2025 = \frac{6075}{8}$

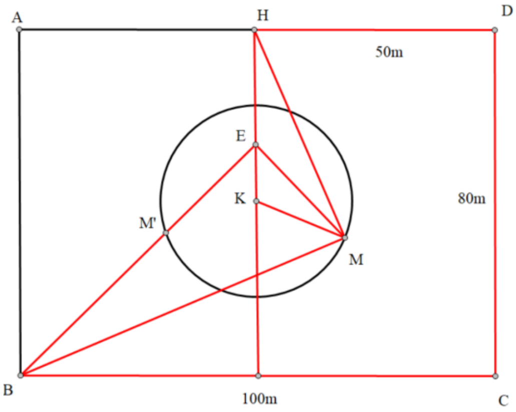
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: BE = BF => M là trung điểm của AC

Vậy M là trung điểm của AC thì S_{DEF} nhỏ nhất là $\frac{6075}{8}$

Bài 28: Trên sân vận động, người ta tổ chức một cuộc thi chạy. Sân vận động dạng hình chữ nhật ABCD có các kích thước AB = 80m, AD = 100m. Ở chính giữa sân người ta vẽ một đường tròn có tâm trung với tâm của hình chữ nhật, bán kính bằng 20m như hình vẽ. Lấy H là trung điểm AD. Mỗi vận động viên cần xuất phát từ một điểm m trên đường tròn và chạy theo cung đường: M → B → C → D → H → M → B. Tính quãng đường ngắn nhất mà một vận động viên cần chạy (đơn bị mét, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

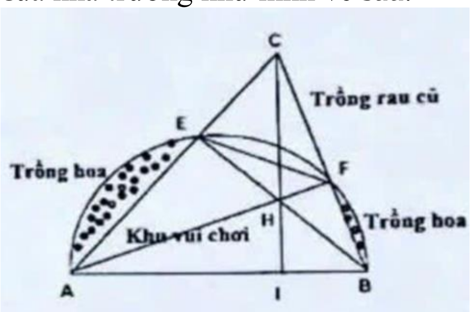


Lời giải



Tổng chiều dài đường chạy là:
S = MB + BC + CD + DH + HM + MB = 2MB + HM + 230
=> Để quãng đường chạy ngắn nhất thì 2MB + MH phải nhỏ nhất
Ý tưởng (nháp): Ta cần tìm 1 điểm E cố định, sao cho MH = 2ME, khi đó 2MB + MH = 2(MB + ME). Áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta có MB + ME ≥ BE và có được giá trị nhỏ nhất cần tìm
Ta có KM = 20, KH = $\frac{1}{2}$CD = 40
Gọi E là điểm nằm trên đoạn KH sao cho KE = 10
Khi đó: $\frac{KE}{KM} = \frac{KM}{KH} = \frac{1}{2}$
Dễ dàng chứng minh được: ΔKEM ~ ΔKMH
=> $\frac{EM}{MH} = \frac{KE}{KM} = \frac{1}{2}$ => MH = 2ME
Khi đó: 2MB + MH = 2MB + 2ME = 2(MB + ME) ≥ 2BE
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: MB + ME = BE khi M trùng M'
Xét ΔBEF vuông cân tại F có
BF = EF = 50 => BE = $50\sqrt{2}$ => 2MB + HM ≥ $100\sqrt{2}$
Vậy quãng đường chạy ngắn nhất mà một vận động viên cần thực hiện là $100\sqrt{2} + 230 \approx 371$m

Bài 29: Học sinh khối 9 của trường Thực nghiệm A đã thiết kế 1 khuôn viên vui chơi trên mảnh đất của nhà trường như hình vẽ sau:



Cho AB = 50m cố định, EF = 25m và EF di chuyển trên nửa đường tròn đường kính AB
Diện tích trồng hoa là phần diện tích chấm, diện tích trồng rau củ là diện tích đất hình tam giác CEF, diện tích khu vui chơi là phần đất có diện tích tứ giác AEFB
Yêu cầu của nhà trường ưu tiên phần đất vui chơi cho học sinh. Tính diện tích lớn nhất của phần vui chơi đó bằng bao nhiêu mét vuông? (Kết quả làm tròn số đến hàng đơn vị)

Lời giải

Đặt AB = c, BC = a, AC = b
ΔCEF ~ ΔCAB => $\frac{CF}{CA} = \frac{EF}{AB} = cosC = 0,5$
=> $S_{CEF} = 0,5^2.S_{CAB} = 0,25.S_{CAB}$
=> $S_{AEFB} = 0,75.S_{ABC}$
Ta có: cosC = $\frac{EC}{BC}$
+) $AB^2 - AE^2 = BC^2 - EC^2$ hay $AE^2 - EC^2 = AB^2 - BC^2$
+) AE – EC = $\frac{c^2 - a^2}{b}$, AE + EC = b => EC = $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$

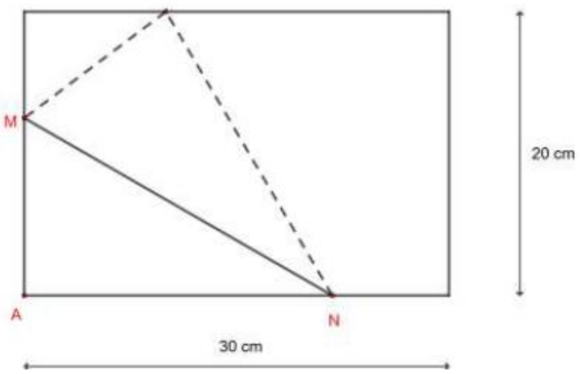
=> CosC = $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ nên $c^2 = a^2 + b^2 - ab \geq ab$

Diện tích tam giác ABC: $S_{ABC} = \frac{BE.AC}{2} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}ab \leq \frac{\sqrt{3}}{4}.c^2$

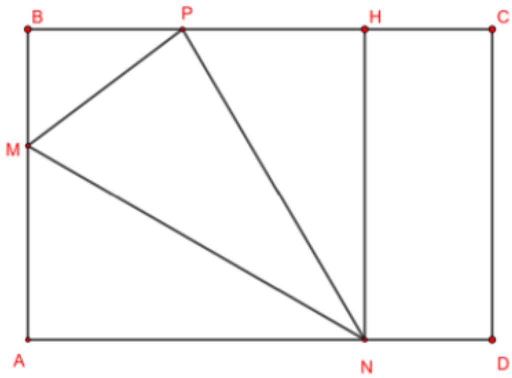
=> $S_{AEFB} \leq 0{,}75.\frac{\sqrt{3}}{4}.c^2 \approx 812$

Vậy diện tích lớn nhất của phần vui đó bằng khoảng 812 mét vuông

Bài 30: Một tờ giấy có kích thước 30 cm x 20 cm được gấp theo đoạn thẳng MN sao cho góc A của tờ giấy chạm vào mép trên của tờ giấy (M và N là hai điểm thuộc hai cạnh chung đỉnh A của hình chữ nhật như hình vẽ sau). Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng MN



Lời giải



Gọi H là hình chiếu của N trên BC

Đặt AM = x => MP = x, MB = 20 – x

$$\Rightarrow BP = \sqrt{MP^2 - MB^2} = \sqrt{x^2 - (20-x)^2} = \sqrt{40x - 400}\ (10 < x < 20)$$

Vì $\Delta BMP \sim \Delta HPN \Rightarrow \frac{BP}{HN} = \frac{BM}{HP}$ hay $HP = \frac{HN.BM}{BP} = \frac{20(20-x)}{\sqrt{40x-400}}$

Và $AN = BH = BP + HP = \sqrt{40x-400} + \frac{20(20-x)}{\sqrt{40x-400}} = \frac{20x}{\sqrt{40x-400}}$

=> $MN = \sqrt{MA^2 + AN^2} = \sqrt{x^2 + \frac{400x^2}{40x-400}} = \sqrt{\frac{x^3}{x-10}}$

Đặt y = x – 10 (0 < y < 10). Khi đó

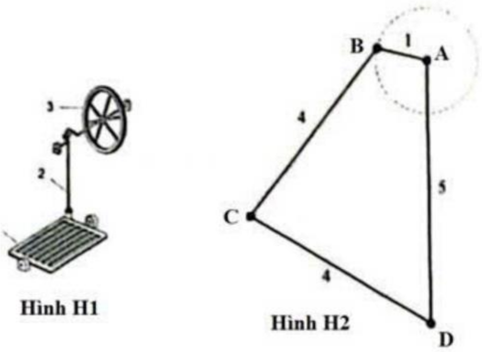
$\frac{x^3}{x-10} = \frac{(y+10)^3}{y} = \frac{y^3+30y^2+300y+1000}{y} = y^2 + 30y + \frac{1000}{y} + 300 = (y^2 - 10y + 25) + 40\left(y - 10 + \frac{25}{y}\right) + 675 = (y-5)^2 + 40\left(\sqrt{y} - \frac{5}{\sqrt{y}}\right)^2 + 675$

Do đó $MN \geq 15\sqrt{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của đoạn MN bằng $15\sqrt{3}$ cm

Bài 31: Cơ cấu biến đổi chuyển động tay quay thanh lắc được ứng dụng trong nhiều loại máy như máy khâu đạp chân, máy dệt, xe tự đẩy… (Hình H1)

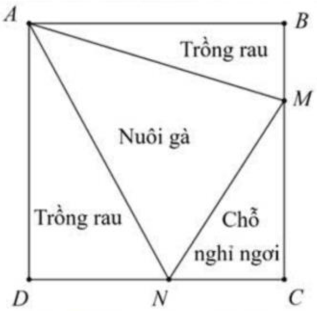
(Hình H2) Cấu tạo chính của cô cấu tay quay thanh lắc gồm giá đỡ AD cố định, tay quay AB, thanh truyền BC và thanh lắc DC. Khi tay quay AB quay quanh trục A thông qua thanh truyền BC làm thanh lắc CD lắc qua lắc lại quanh trục D (hình vẽ). Gọi anpha là góc tạo bởi hai vị trí thanh lắc DC. Tìm giá trị lớn nhất của anpha (làm tròn đến độ), biết AB = 1, BC = 4, CD = 4, AD = 5



Lời giải

Theo giả thiết giá đỡ AD cố định
Đoạn AB quay quanh A, thanh DC lắc qua lắc lại quanh trục D
Xét ΔADC có 2 cạnh chiều dài không đổi là DC = 4, DA = 5. Cạnh AC thay đổi
Ta có: BC – BA ≤ AC ≤ AB + BC hay 3 ≤ AC ≤ 5
Đặt $\alpha_1 = \angle ADC$ khi AC = 3
Đặt $\alpha_2 = \angle ADC$ khi AC = 5
Ta được $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$

Bài 32: Bác Hoa có mảnh đất dạng hình vuông ABCD diện tích $64m^2$, bác dự định chia mảnh đất này thành bốn phần như hình vẽ, trong đó phần đất dạng tam giác CMN có diện tích không thay đổi là 2 m^2 sẽ dựng mái che để nghỉ ngơi, hai phần đất dạng tam giác AND và ABM để trồng rau, phần còn lại để quay nuôi gà. Em hãy xác định giúp bác Hoa vị trí các điểm M, N trên cạnh BC, CD sao cho diện tích đất để trồng rau là lớn nhất



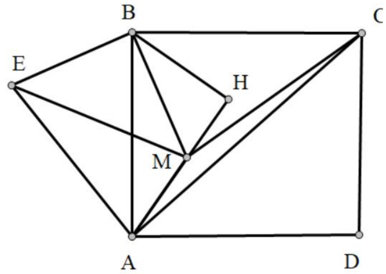
Lời giải

Ta có AB = BC = CD = DA = 8 (m)
Đặt MC = x, NC = y (0 < x, y < 8)
Vì diện tích ΔCMN là 2 m^2 => xy = 4
Diện tích trồng rau là: $\frac{1}{2}.8.(8 - x) + \frac{1}{2}.8.(8 - y) = 64 - 4(x + y)$ (m^2)
Theo bất đẳng thức Cô-si 2 số ta có: $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 4$
=> 64 – 4(x + y) ≤ 64 – 4.4 = 48
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: x = y = 2
Vậy $M \in BC$, $N \in CD$ sao cho MC = NC = 2 m thì diện tích trồng rau lớn nhất

Bài 33: Tại một viện bảo tàng có một sa bàn hình vuông, mô tả trận đánh mà quân ta cắm cờ chiến thắng ở một điểm cách ba đỉnh liên tiếp của hình vuông là 1m; 2ml 3m. Diện tích của sa bàn là bao nhiêu? (Kết quả tính theo m^2 và làm tròn hai chữ số thập phân)

Lời giải

Ta giả sử sa bàn là hình vuông ABCD
Gọi điểm cách ba điểm liên tiếp của hình vuông là M => MA = 1; MB = 2; MC = 3
Vẽ tam giác MBE vuông cân tại B (E khác phía C) như hình vẽ sau:



Ta có: ΔAEB = ΔCMB => AE = CM = 3

=> ME = MB$\sqrt{2}$ = 2$\sqrt{2}$

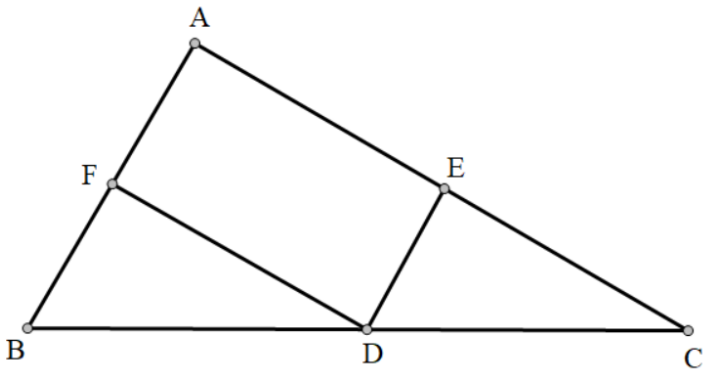
ΔAME có: $AE^2 = 3^2 = (2\sqrt{2})^2 + 1^2 = ME^2 = MA^2$
=> ΔAME vuông tại M mà ∠EMB = 45°
Nên ∠AMB = ∠AME + ∠EMB = 90° + 45° = 135°
Vẽ BH vuông góc với AM tại H => ∠BMH = 45° => ΔBHM vuông cân tại H
BH = HM = $\frac{BM}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, AH = AM + MH = 1 + $\sqrt{2}$

AB = $\sqrt{BH^2 + HA^2} = \sqrt{2 + (1 + \sqrt{2})^2} = \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$

$S_{\text{sa bàn}} = AB^2 = 5 + 2\sqrt{2} \approx 7{,}83\ m^2$

Bài 34: Một tấm bài carton dạng tam giác ABC diện tích là S. Tại một điểm D thuộc cạnh BC người ta cắt theo hai đường thẳng lần lượt song song với hai cạnh AB và AC để phần bìa còn lại là một hình bình hành có một đỉnh là A. Tính diện tích hình bình hành lớn nhất đó

Lời giải



Giả sử độ dài đoạn thẳng BC là a và độ dài đoạn thẳng CD là x với 0 < x < a

Vì DE // AB => ΔCDE ~ ΔCBA => $\frac{CE}{CE} = \frac{CD}{CB} = \frac{x}{a} => \frac{S_{CDE}}{S_{CBA}} = \frac{x^2}{a^2} => S_{CDE} = \frac{x^2}{a^2}.S_{CBA}$

Vì DF // AB => ΔBDF ~ ΔBCA => $\frac{BD}{BC} = \frac{BF}{BA} = \frac{a-x}{a} => \frac{S_{BDF}}{S_{BCA}} = \frac{(a-x)^2}{a} => S_{BDF} = \frac{(a-x)^2}{a}.S_{BCA}$

Vậy $S_{AEDF} = S_{ABC} - S_{BDF} - S_{CDE} = S_{ABC}.\left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{(a-x)^2}{a^2}\right]$

Để S_{AEDF} lớn nhất thì $\frac{x^2}{a^2} - \frac{(a-x)^2}{a^2}$ nhỏ nhất

Xét $\frac{x^2}{a^2} - \frac{(a-x)^2}{a^2} = \frac{a^2 - 2ax + 2x^2}{a^2} = \frac{2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2}}{a^2} \geq \frac{\left(\frac{a^2}{2}\right)}{a^2} = \frac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x - \frac{a}{2} = 0 => x = \frac{a}{2}$

Với x = $\frac{a}{2} => S_{ADEF} = \frac{1}{2}.S_{ABC} = \frac{S}{2}$

Vậy diện tích hình bình hành lớn nhất đó là $\frac{S}{2}$

Bài 35: Một mảnh vải hình vuông có độ dài cạnh là c (với c < 1). Lấy một cạnh mảnh vải hình vuông cố định, người ta cắt mảnh vải đó thành một mảnh vải hình tam giác với độ dài ba cạnh lần lượt là a, b, c thỏa mãn a + b + c = 1 và biểu thức P = $\frac{a+b}{abc}$ có giá trị nhỏ nhất. Hãy xác định kích thước của mảnh vải hình tam giác đó

Lời giải

Vì a, b, c là 3 cạnh của tam giác và a + b + c = 1 nên 0 < a, b, c < 1

Ta có:

P = $\frac{a+b}{abc} = \frac{a+b}{c}.\frac{1}{ab} \geq \frac{a+b}{c}.\frac{4}{(a+b)^2} = \frac{4}{c(a+b)}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si 2 số:

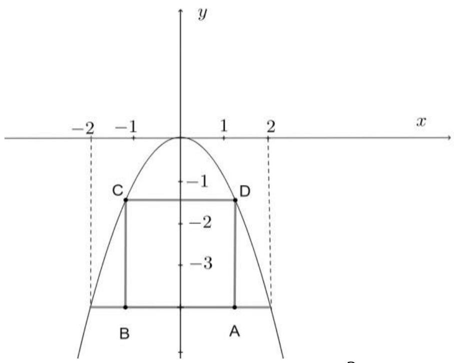
(a + b) + c ≥ $2\sqrt{(a+b).c}$ => 1 ≥ $2\sqrt{(a+b).c}$ => $\frac{1}{2} \geq \sqrt{(a+b).c}$

=> (a + b).c ≤ $\frac{1}{4}$ => $\frac{4}{c(a+b)} \geq 16$

=> P ≥ 16

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} a = b \\ a + b = c \\ a + b + c = 1 \end{cases}$ => $\begin{cases} a = b = \frac{1}{4} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$

Bài 36: Cửa hầm lò khai thác than có dạng một parabol, khoảng cách từ điểm cao nhất của cửa đến mặt đất là 4 mét, khoảng cách giữa hai chân cửa là 4 mét. Người ta muốn gia cố cho cửa lò bằng một khung thép hình chữ nhật sao cho hai đỉnh dưới của khung thép chạm đất, hai đỉnh trên của khung thép chống vào mái hầm (hình vẽ minh họa). Tìm kích thước của khung thép sao cho diện tích của hình chữ nhật tạo bởi khung thép lớn nhất.



Đặt hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ Parabol có dạng y = ax^2

Khoảng cách từ điểm cao nhất của cửa đến mặt đất là 4m, khoảng cách giữa 2 chân cửa là 4m nên parabol đi qua điểm (2; -4)

=> -4 = $a.2^2$ => a = -1

=> Parabol có dạng y = $-x^2$

Gọi độ dài AB = CD = 2k (0 < k < 2)

Khi đó: 4 đỉnh của khung thép hình chữ nhật có tọa độ là:

A(k; -4); B(-k; -4); C(-k; k^2); D(k; k^2)

=> BC = 4 – k^2

Diện tích hình chữ nhật AVCD là S = AB.BC = 2k(4 – k^2)

Xét 2k(4 – k^2) = $-2k^3 + 8k$

Ta bấm Casio: 580: Menu 9 – 2 – 3

: 880 : Home – Phương trình – Phương trình – $ax^3 + bx^2 + cx + d$

Khi đó ta thấy được: cực đại y = $\frac{32\sqrt{3}}{9}$

Như vậy, ta xét: $-2k^3 + 8k - \frac{32\sqrt{3}}{9} = -2\left(k^3 - 4k + \frac{16}{3\sqrt{3}}\right)$

$= -2\left[k\left(k^2 - 2.k.\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3}\right) + \frac{4}{\sqrt{3}}k^2 - \frac{16}{3}k + \frac{16}{3\sqrt{3}}\right] = -2\left[k\left(k - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}\left(k^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}k + \frac{4}{3}\right)\right]$

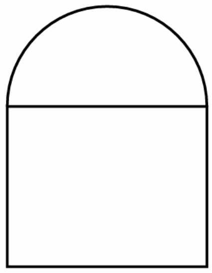
$= -2\left[k\left(k - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}\left(k - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\right] = -2\left(k + \frac{4}{\sqrt{3}}\right)\left(k - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \leq 0$

=> 2k(4 – k^2) ≤ $\frac{32\sqrt{3}}{9}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $k - \frac{2}{\sqrt{3}} = 0$ => $k = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Vậy diện tích lớn nhất của khung thép là $\frac{32\sqrt{3}}{9}$ m^2

Bài 37: Bác Nam muốn làm một cửa sổ khuôn gỗ, phía trên có dạng nửa hình tròn, phía dưới có dạng hình chữ nhật. Biết rằng đường kính của nửa hình tròn cũng là cạnh phía trên của hình chữ nhật và tổng độ dài của khuôn gỗ (các đường đậm trong hình bên, bỏ qua độ rộng của cạnh khuôn gỗ) là 8m. Em hãy giúp bác An tính độ dài các cạnh của hình chữ nhật để cửa sổ có diện tích lớn nhất



Lời giải

Gọi đường kính của nửa hình tròn là x (m)($0 < x < 8$)

Khi đó bán kính là $\frac{x}{2}$ (m)

Gọi cạnh còn lại của hình chữ nhật là y (m)($0 < y < 8$)

Tổng độ dài của khuôn gỗ là: $\frac{\pi x}{2} + x + 2y = 8 \Rightarrow y = 4 - \left(\frac{\pi + 2}{4}\right)x$

Diện tích cửa sổ là: $S = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + xy$ (m^2)

Xét $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + xy = \frac{\pi x^2}{8} + xy = \frac{\pi x^2}{8} + x\left[4 - \left(\frac{\pi + 2}{4}\right)x\right] = \frac{-\pi - 4}{8}\left(x - \frac{16}{\pi + 4}\right)^2 + \frac{32}{\pi + 4} \le \frac{32}{\pi + 4}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x - \frac{16}{\pi + 4} = 0 \Rightarrow x = \frac{16}{\pi + 4} \Rightarrow y = \frac{8}{\pi + 4}$

Bài 38: Xưa kia có tể tướng nổi tiếng thông thai. Đến khi cáo quan về quê tể tướng được nhà vua ban thưởng bằng cách cho một đoạn dây dài 300m và nói: "Hãy căng sợi dây này thành hình chữ nhật sao cho hai đầu dây chạm vào nhau. Khi đó, mảnh đất hình chữ nhật sẽ thuộc về ngươi". Hỏi tể tướng sẽ căng sợi dây như nào để mảnh đất có diện tích lớn nhất

Lời giải

Gọi kích thước của hình chữ nhật là x, y (m)($0 < x, y < 150$)

$\Rightarrow 2(x + y) = 300 \Rightarrow x + y = 150$ (m)

Ta có $S = xy \le \frac{(x + y)^2}{4} = 75$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x = y = 75$

Vậy tể tướng cần căng sợi dây bao quanh hình vuông có độ dài cạnh là 75m để mảnh đất có diện tích lớn nhất

Bài 39: Từ một sợi dây thép dài 16 dm, người ta uốn thành một hình chữ nhật. Trong các hình chữ nhật có thể uốn được thành hình nào có diện tích lớn nhất

Lời giải

Goi a, b là kích thước của hình chữ nhật ($a, b > 0$)

Ta có $a + b = 8$

Lại có $S = ab \le \frac{(a + b)^2}{4} = 16$ (dm^2)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = 4$

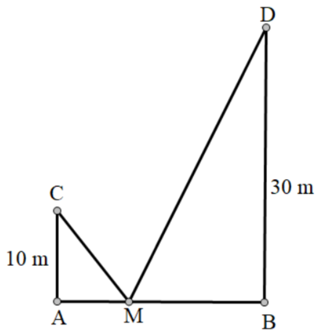
Vậy hình chữ nhật có thể uốn thành hình vuông có cạnh là 4dm thì diện tích lớn nhất

Bài 40: Một dây thép AC có chiều dài 6m được chia thành hai phần AB và BC. Mỗi phần đều được uốn thành một hình vuông. Hỏi phải chia sợi dây thép ban đầu thế nào để tổng diện tích hai hình vuông thu được sau khi uốn là nhỏ nhất?

Lời giải

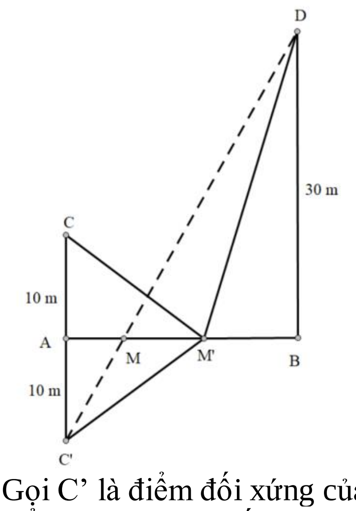
Gọi a là độ dài cạnh hình vuông được uốn từ phần thép AB. Ta có 4a = AB nên a = $\frac{AB}{4}$ (m)
Gọi b là độ dài cạnh hình vuông được uốn từ phần thép BC. Ta có 4b = BC nên b = $\frac{BC}{4}$ (m)
Khi đó a + b = $\frac{AB}{4} + \frac{BC}{4} = \frac{AC}{4} = \frac{3}{2}$ (m)
Diện tích hình vuông cạnh a là a^2 (m^2)
Diện tích hình vuông cạnh b là b^2 (m^2)
Tổng diện tích hai hình vuông là: S = $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{9}{8}$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: a = b
=> AB = BC = 3 (m)
Vậy phải chia sợi dây thép ban đầu thành phần bằng nhau thì tổng diện tích hai hình vuông thu được sau khi uốn là nhỏ nhất

Bài 41: Có hai chiếc cọc cao 10m và 30m đặt vuông góc với mặt đất tại hai vị trí A và B. Biết khoảng cách giữa hai cọc bằng 24m. Người ta đặt một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất, nằm giữa hai chân cọc và di động hay đổi vị trí. Hỏi người ta phải đặt chốt ở vị trí nào trên mặt đất để tổng độ dài của hai sợi dây nối từ chốt đến đỉnh hai cọc là ngắn nhất?



Lời giải

Cách 1:
Đặt AM = x (m)(0 < x < 24)
=> MB = 24 – x (m)
Áp dụng định lý Pytago vào ΔCAM vuông tại A và ΔDBM vuông tại B
CM = $\sqrt{CA^2 + AM^2} = \sqrt{10^2 + x^2}$ và DM = $\sqrt{BD^2 + BM^2} = \sqrt{30^2 + (24 - x)^2}$
Xét CM + DM = $\sqrt{10^2 + x^2} + \sqrt{30^2 + (24 - x)^2}$
Áp dụng bất đẳng thức Mincopxki
$\sqrt{10^2 + x^2} + \sqrt{30^2 + (24 - x)^2} \geq \sqrt{(10 + 30)^2 + (x + 24 - x)^2} = \sqrt{2176} = 8\sqrt{34}$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: 10(24 – x) = 30x => x = 6
Cách 2:



Gọi C' là điểm đối xứng của C qua A => MC = MC'
Để độ dài đường gấp khúc CMD nhỏ nhất thì C'MD nhỏ nhất
Mà đường gấp khúc có độ dài ngắn nhất khi và chỉ khi nó là đường thẳng

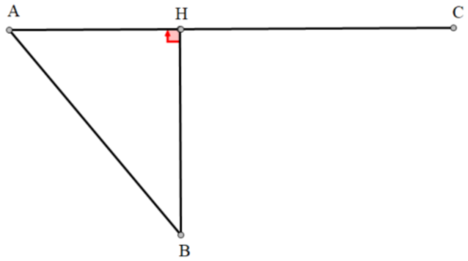
Gọi giao điểm của C’D với AB là M

Ta dễ dàng chứng minh được: ΔAC’M ~ ΔBDM nên $\frac{AM}{BM} = \frac{AC\prime}{BD} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

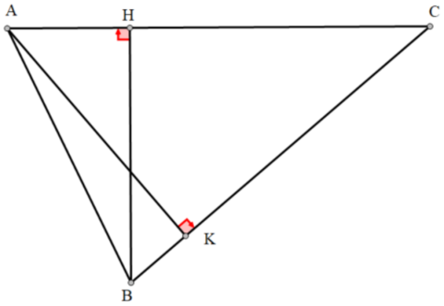
=> $\frac{AM}{AM + BM} = \frac{1}{1 + 3}$ => $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{4}$ => AM = 6 (m)

Vậy phải đặt chốt ở vị trí M cách A một đoạn 6m thì tổng độ dài hai dây ngắn nhất

Bài 41: Một ô tô đang chuyển động trên đường thẳng AC theo hướng từ A đi về phía C với vận tốc 10m/s, một người đứng tại B cách mép đường một khoảng BH = 50 m. Khi khoảng cách giữa người và ô tô là AB = 200 m thì người đó bắt đầu chạy ra đón ô tô (coi ô tô và người chuyển động thẳng đều). Tìm vận tốc tối thiểu và hướng chạy của người tạo với AB góc bao nhiêu để đón được ô tô.



Lời giải



Gọi thời gian từ khi người đó xuất phát đến lúc gặp ô tô là t (giây)(t > 0)

Gọi vận tốc của người đón xe là v (m/s)(v > 0)

Giả sử hai người gặp nhau tại C

Kẻ AK vuông góc với BC.

Ta có: AC = 10t, BC = vt

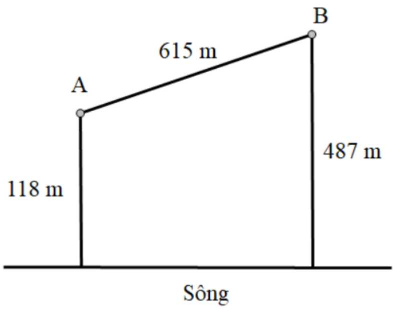
Ta dễ dàng chứng minh được: BC.AK = BH.AC hay AK.vt = 50.10t => v = $\frac{500}{AK}$

Do v nhỏ nhất khi AK lớn nhất. Lại có AK ≤ AB. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi AK trùng với AB

Mà AB không đổi nên v nhỏ nhất khi AK trùng với AB hay BC vuông góc với BA

Vậy người đó chạy theo hướng vuông góc với AB với vận tốc tối thiểu là $\frac{500}{200}$ = 2,5 m/s

Bài 42: Cho hai vị trí A, B cách nhau 615m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118m và 487m. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước và mang về B. Đoạn đường ngắn nhất mà người đó phải đi là bao nhiêu?



Lời giải

Giả sử người đó đi từ A đến M để lấy nước và đi từ M về B

Ta dễ dàng tính được BD = 369, EF = 492

Đặt EM = x (x > 0)
Ta tính được: MF = 492 – x

: AM = $\sqrt{x^2 + 118^2}$

: BM = $\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}$

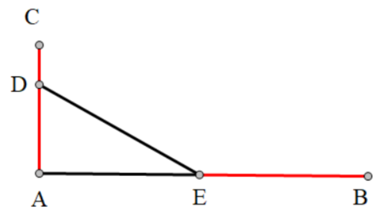
Quãng đường đi lấy nước là: AM + MB = $\sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}$
Áp dụng bất đẳng thức Mincopxk

$\sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} \geq \sqrt{(x + 492 - x)^2 + (118 + 487)^2} \approx 779{,}8$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: 487x = 118(492 – x) => x = $\frac{58056}{605}$

Vậy đoạn đường ngắn nhất mà người đó phải đi là khoảng 779,8 m

Bài 43: Tại cùng một thời điểm, có hai người đang ở vị trí A và B cách nhau 1000m. Người thứ nhất đang ở vị trí B và đi về phía điểm A với vận tốc 1,5m/s. Biết rằng AB và AC vuông góc với nhau. Hãy cho biết sau bao nhiêu giây thì khoảng cách giữa hai người này nhỏ nhất



Lời giải

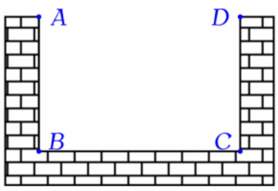
Giả sử sau t giây (t > 0) hai người đi đến hai điểm D, E tương ứng như hình vẽ
Khi đó người thứ nhất đi được BE = 2t (m), người thứ nhất đi được AD = 1.5t (m)
=> AB = AB – BE = 1000 – 2t (m)

Khi đó DE = $\sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{(1{,}5)^2 + (1000 - 2t)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}t^2 - 4000t + 1000^2}$

$= \sqrt{\frac{25}{4}(t - 320)^2 + 360000} \geq \sqrt{360000} = 600$ (m)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: t – 320 = 0 => t = 320
Vậy sau 320 giây thì khoảng cách hai người là nhỏ nhất

Bài 44: Một nương dẫn nước thủy lợi có mặt cắt ngang là hình chữ nhật ABCD (hình vẽ). Với điều kiện lưu lượng nước qua mương cho phép thì diện tích mặt cắt ABCD là 0,48m^2. Để đảm bảo an toàn kĩ thuật, người ta thiết kế sao cho tổng độ dài T = AB + BC + CD ngắn nhất. Khi đó chiều rộng của đáy mương là bao nhiêu (biết chiều rộng phải dưới 1m, làm tròn kết quả đến hàng phần tram)



Lời giải

Đặt BC = x (m)(0 < x < 1)

Ta có AB.BC = 0,48 => AB = $\frac{0{,}48}{BC} = \frac{0{,}48}{x}$ (m)

T = AB + BC + CD = x + $\frac{0{,}96}{x}$ (m)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số

$x + \frac{0{,}96}{x} \geq 2\sqrt{x.\frac{0{,}96}{x}} = \frac{4\sqrt{6}}{5}$

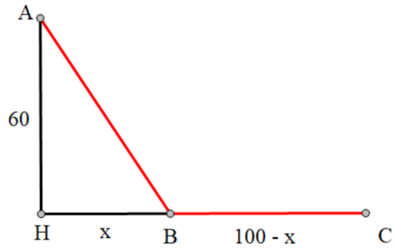
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: x = $\frac{0{,}96}{x}$ => x = $\frac{2\sqrt{6}}{5} \approx 0{,}98$

Vậy chiều rộng của đáy mương khoảng 0,98m

Bài 45: Một nhà máy sản xuất nằm cách hạ lưu 100m và ở phía đối diện của một nhà máy điện (nằm ở hạ lưu). Con sông rộng 60m. Người ta dự định lắp đặt một đường dây diện theo một đường chéo từ nhà máy điện đến bờ sông bên kia và sau đó dọc theo bờ sông tới nhà máy sản xuất. Chi phí để lắp đặt đường dây dưới dòng sông là 3300000 đồng cho mỗi mét. Xác định điểm mà đường dây điện ngoi lên khỏi dòng sông sao cho tổng chi phí lắp đặt dây là tối thiểu

Lời giải

Giả sử nhà máy điện nằm ở điểm A, đường dây điện bắt đầu ngoi lên dòng sông ở điểm B, nhà máy sản xuất đặt tại điểm C như hình vẽ và hình chiếu vuông góc của A lên BC là H



Đặt BH = x (x > 0)

Ta có CH = 100 => BC = 100 – x

AB = $\sqrt{AH^2 + HB^2} = \sqrt{60^2 + x^2}$

Tổng chi phí lắp đặt dây điện là: $3300000\sqrt{60^2 + x^2}$ + 1200000(100 – x) (đồng)

Xét $3300000\sqrt{60^2 + x^2}$ + 1200000(100 – x) = 100000($33\sqrt{60^2 + x^2}$ + 1200 – 12x)

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki:

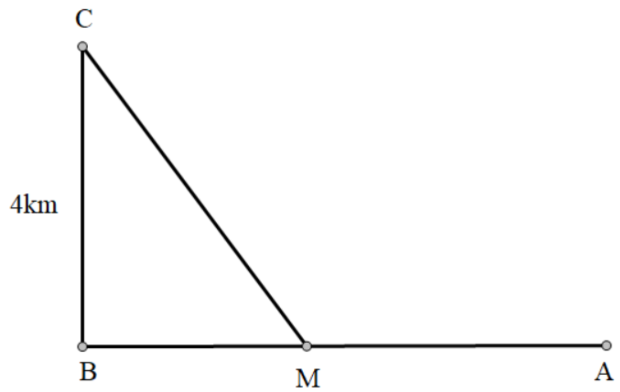
$33\sqrt{60^2 + x^2} = \sqrt{\left[12^2 + \left(3\sqrt{105}\right)^2\right](60^2 + x^2)} \geq \left|12x + 3.60\sqrt{105}\right| \geq 12x + 180\sqrt{105}$

=> $33\sqrt{60^2 + x^2} + 1200 - 12x \geq 180\sqrt{105} + 1200$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $12.60 = 3\sqrt{105}x$ => x = 23,4

Vậy đường dây điện ngoi lên khỏi dòng sông sao cho đoạn BH = 23,4 m thì tổng chi phí lặp đặt dây diện là tối thiểu

Bài 46: Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở Ađến một hòn đảo ở C như hình vẽ. Khoảng cách từ C đến B là 4 km. Bờ biển chạy thẳng từ A đến B với khoảng cách là 10 km. Tổng chi phí lắp đặt cho 1 km dây điện trên biển là 50 triệu đồng, còn trên đất liền là 30 triệu đồng. Xác định vị trí điểm M trên đoạn AB (điểm nối dây từ đất liền ra đảo) để tổng chi phí lắp đặt là nhỏ nhất.



Lời giải

Đặt MB = x (km)($0 \leq x \leq 10$)

=> AM = 10 – x

Ta có MC = $\sqrt{MB^2 + CB^2} = \sqrt{x^2 + 16}$ (km)

Chi phí nối dây điện từ M đến A là: 30(10 – x) (triệu đồng)

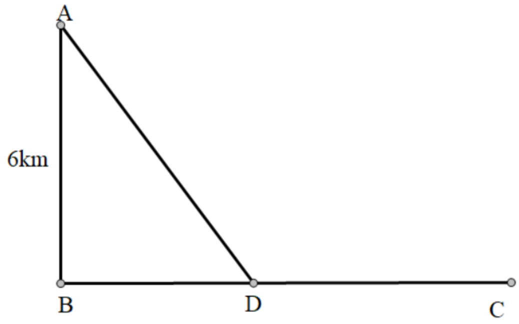
Chi phí nối dây điện từ M đến C là: $50\sqrt{x^2 + 16}$ (triệu đồng)

Tổng chi phí nối dây điện từ A đến C là 30(10 – x) + $50\sqrt{x^2 + 16}$ (triệu đồng)

Để chi phí lắp đặt đường dây điện là nhỏ nhất thì 30(10 – x) + $50\sqrt{x^2 + 16}$ phải đạt giá trị nhỏ nhất

Ta có: $50\sqrt{x^2 + 16} = \sqrt{(x^2 + 4^2)(30^2 + 40^2)} \geq 30x + 4.40 = 30x + 160$
$30(10 - x) + 50\sqrt{x^2 + 16} \geq 300 - 30x + 30x + 160 = 460$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: 40x = 3.40 => x = 3
Vậy để chi phí nhỏ nhất thì điểm M phải nằm cách B một khoảng là 3km

Bài 46: Trong một cuộc thi 2 môn phối hợp gồm chèo thuyền và chạy bộ. Các vận động viên sẽ chèo thuyền từ điểm xuất phát A cách bờ BC 6km sau đó đến bờ tại một vị trí D bất kì rồi chạy về đích C (xem hình minh họa). Biết rằng quãng đường trên bờ BC = 15km, vận tốc chèo thuyền của một vận động viên A là 8km/h và vận tốc chạy trên bờ là 16km/h. Hỏi A nên chèo thuyền về bờ tại vị trí D cách đích C bao nhiêu để tổng thời gian về đích là sớm nhất



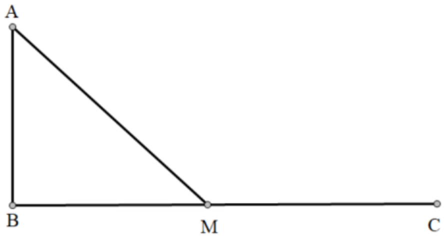
Giả sử BD = x => $\begin{cases} DC = 15 - x \\ AD = \sqrt{x^2 + 36} \end{cases}$ $(0 \leq x \leq 15)$

Tổng thời gian vận động viên về đích là t = $\frac{\sqrt{x^2+36}}{8} + \frac{15-x}{16}$ (h)

Xét $\frac{\sqrt{x^2+36}}{8} + \frac{15-x}{16} = \frac{2\sqrt{x^2+6^2}+15-x}{16} = \frac{\sqrt{\left[1^2+(\sqrt{3})^2\right](x^2+6^2)}+15-x}{18} \geq \frac{x+6\sqrt{3}+15-x}{18} = \frac{15+6\sqrt{3}}{18}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x = 2\sqrt{3}$
Vậy vận động viên A nên chèo thuyền về bờ tại vị trí D cách đích C là $2\sqrt{3}$ km để tổng thời gian về đích là sớm nhất

Bài 47: Trong hình bên, quãng đường AB dài 5 km , quãng đường BC dài 26 km, góc ABC là góc vuông. Một người có kế hoạch đi xe đạp, đi thẳng từ A đến một vị trí M trên quãng đường BC vớ tốc độ 12km/h, sau đó lại đi thẳng từ M đến C với tốc độ 13km/h. Người đó cần chọn vị trí M cách B một khoảng bằng bao nhiêu km để tổng thời gian đi từ A đến M và từ M đến C là ít nhất?



Lời giải

Đặt BM = x (km)$(0 \leq x \leq 26)$
=> AM = $\sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{25 + x^2}$

Tổng thời gian đi là T = $\frac{\sqrt{25+x^2}}{12} + \frac{26-x}{13}$ (giờ)

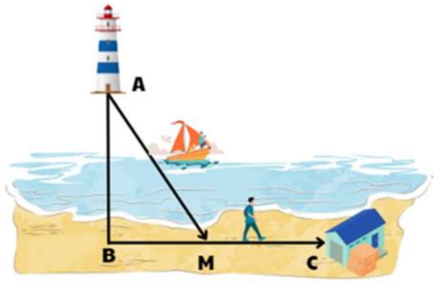
Xét $\frac{\sqrt{25+x^2}}{12} + \frac{26-x}{13} = \frac{13\sqrt{25+x^2}-12x+312}{156} = \frac{\sqrt{169.25+169.x^2}-12x+312}{156} = \frac{\sqrt{(12x+25)^2+(5x-60)^2}-12x+312}{156}$

$\geq \frac{12x+25-12x+312}{156} = \frac{337}{156}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: x = 12

Vậy người đó cần chọn vị trí M cách B một khoảng bằng 12km để tổng thời gian đi từ A đến M và từ M đến C là ít nhất

Bài 48: Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A có khoảng cách đến bờ biển 5 km AB= . Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng 7 km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến M trên bờ biển với vận tốc 4 km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h. Vị trí của điểm M cách B một khoảng bao nhiêu dể người đó đi đến kho nhanh nhất?



Lời giải

Đặt BM = x (km)(0 < x < 7) => MC = 7 – x (km)

Thời gian chèo đò từ A đến M là: $\frac{\sqrt{x^2+25}}{4}$ (h)

Thời gian đi bộ đến C là: $\frac{7-x}{6}$ (h)

Thời gian đi từ A đến kho là: $\frac{\sqrt{x^2+25}}{4}+\frac{7-x}{6}$ (h)

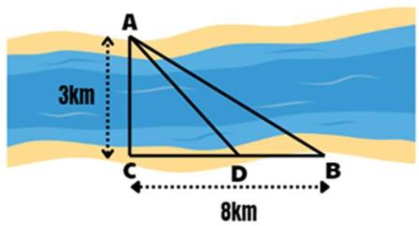
Áp dụng bất đẳng thức BunhiacopxkiL

$\frac{\sqrt{x^2+25}}{4}+\frac{7-x}{6}=\sqrt{(x^2+25)\left(\frac{4}{9}+\frac{5}{9}\right)}+\frac{7-x}{6}\geq\frac{2}{3}.x+\frac{\sqrt{5}}{3}.5+\frac{7-x}{6}\geq\frac{2}{12}.x+5.\frac{\sqrt{5}}{12}+\frac{14-2x}{12}=$
$\frac{14+5\sqrt{5}}{12}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $3\sqrt{5}x = 30 => x = 2\sqrt{5}$

Vậy điểm M cách B một khoảng $2\sqrt{5}$km để người đó đi đến kho nhanh nhất

Bài 49: Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B, hoặc có thể chèo trực tiếp đến B, hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chay đến B. Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chay 8 km/h và quãng đườngBC = 8km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền cua người đàn ông. Tìm khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: giờ) để người đàn ông đến B.



Lời giải

Đặt CD = x (km)(0 < x < 8)

Quãng đường chạy bộ là: DB = 8 – x (km)

Quãng đường chào thuyền là: $\sqrt{9+x^2}$ (km)

Thời gian chạy bộ là: $\frac{8-x}{8}$ (h)

Thời gian chèo thuyền là: $\frac{\sqrt{9+x^2}}{6}$ (h)

Tổng thời gian là người đàn ông cần là: $\frac{\sqrt{9+x^2}}{6}+\frac{8-x}{8}$ (h)

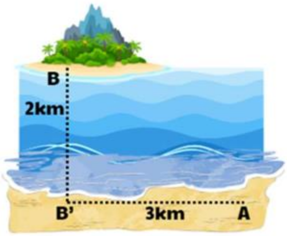
Xét $\sqrt{9 + x^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{16} + \frac{9}{16}\right)(9 + x^2)} \geq \frac{3}{4}.x + \frac{\sqrt{7}}{4}.3$

=> $\frac{\sqrt{9+x^2}}{6} + \frac{8-x}{8} \geq \frac{3x+3\sqrt{7}}{24} + \frac{24-3x}{24} = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $4\sqrt{7}x$ = 12.3 => x = $\frac{9}{\sqrt{7}}$

Vậy khoảng thời gian ngắn nhất để người đến ông đến B là: $1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$ giờ

Bài 50: Một tỉnh dự định làm đường điện từ điểm A trên bờ biển đến điểm B trên một hòn đảo. B cách bờ một khoảng BB' = 2km một khoảng AB' = 3km (hình vẽ). Biết chi phí làm 1 km đường điện trên bờ là 5 tỷ đồng, dưới nước là 13 tỷ đồng. Tìm vị trí điểm C trên đoạn bờ biển AB' sao cho khi làm đường điện theo đường gấp khúc ACB thì chi phí thấp nhất (coi bờ biển là đường thẳng).



Lời giải

Đặt B'C = x (km)(0 ≤ x ≤ 3) => AC = 3 – x (km)

BC = $\sqrt{2^2 + x^2}$ (km)

Tổng số tiền làm đường điện theo đường gấp khúc ACB là: $13\sqrt{2^2 + x^2}$ + 5(3 – x) (tỉ đồng)

Xét $13\sqrt{2^2 + x^2} = \sqrt{169(2^2 + x^2)} = \sqrt{(12^2 + 5^2)(2^2 + x^2)} \geq \sqrt{(24 + 5x)^2} = 24 + 5x$

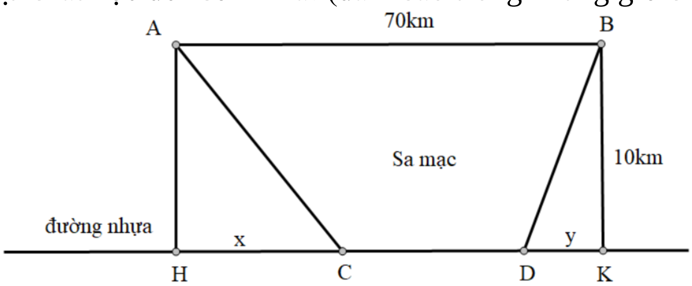
=> $13\sqrt{2^2 + x^2}$ + 5(3 – x) ≥ 24 + 5x + 15 – 5x = 39

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: 12x = 10 => x = $\frac{5}{6}$

Vậy điểm C cách B một khoảng $\frac{5}{6}$km thì đường điện theo gấp khúc ACB có chi phí thấp nhất

Bài 51: Một nhà địa chất học đang ở tại điểm A trên xa mạc. Anh ta muốn đến điểm B và cách A một đoạn là 70 km. Trong sa mac thì xe anh ta chỉ có thể di chuyển với vận tốc là 30 km/h. Nhà địa chất ấy phải đến được điểm B sau 2 giờ. Vì vậy nếu anh ta đi thẳng từ A đến B sẽ không thể đến đúng giờ. May mắn thay

có một con đường nhựa song song với đường nối A và B và cách AB một đoạn 10 km. Trên đường nhựa này thì xe của nhà địa chất học này có thể di chuyển với vận tốc 50 km/h. Làm thế nào để nhà địa chất học đến sớm nhất (đảm bảo trong khung giờ cho phép).



Lời giải

Xét H, K, C, D là các điểm như hình vẽ

Chia quãng đường đi được theo 3 giai đoạn:

Giai đoạn 1: Đi từ A đến C (từ sa mạc đến đường nhựa song song)

Giai đoạn 2: Đi từ C đến D (một quãng đường trên đường nhựa)

Giai đoạn 3: đi từ D đến B (từ điểm kết thức D trên đường nhựa đi tiếp đến B qua xa mạc)

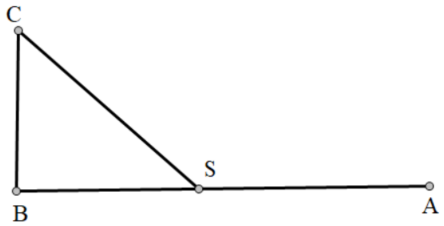
Đặt HC = x (km)(0 < x < 70)

DK = y (km)(0 < y < 70)

Quãng đường đi từ A đến C là: $\sqrt{x^2 + 10^2}$ (km)

Thời gian đi trên sa mạc từ A đến C với vận tốc 30km/h là: $t_1 = \frac{\sqrt{x^2+10^2}}{30}$ (h)
Quãng đường đi từ D đến B là: (km)
Thời gian đi trên sa mạc từ D đến B với vận tốc 30km/h là: $t_2 = \frac{\sqrt{y^2+10^2}}{30}$ (h)
Quãng đường đi từ C đến D là: CD = 70 – (x + y) (km)
Thời gian đi từ C đến D với vận tốc 50km/h là $t_3 = \frac{70-(x+y)}{50}$ (h)
Tổng thời gian mà nhà địa chất học đi từ A đến B là: $\frac{\sqrt{x^2+10^2}}{30} + \frac{\sqrt{y^2+10^2}}{30} + \frac{70-(x+y)}{50}$ (h)
Xét: $\sqrt{x^2+10^2} = \sqrt{(x^2+10)\left(\frac{9}{25}+\frac{16}{25}\right)} \geq \frac{3}{5}.x + \frac{4}{5}.10 \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2+10^2}}{30} = \frac{1}{30}\left(\frac{3x}{5}+8\right)$
: $\sqrt{y^2+10^2} = \sqrt{(y^2+10)\left(\frac{9}{25}+\frac{16}{25}\right)} \geq \frac{3}{5}.y + \frac{4}{5}.10 \Rightarrow \frac{\sqrt{y^2+10^2}}{30} = \frac{1}{30}\left(\frac{3y}{5}+8\right)$
$\Rightarrow \frac{\sqrt{x^2+10^2}}{30} + \frac{\sqrt{y^2+10^2}}{30} + \frac{70-(x+y)}{50} \geq \frac{1}{30}\left(\frac{3x}{5}+8\right) + \frac{1}{30}\left(\frac{3y}{5}+8\right) + \frac{70-(x+y)}{50} = \frac{29}{15}$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: x = y = 7,5
Vậy thời gian mà nhà địa chất đi từ A đến B ít nhất là $\frac{29}{15}$ giờ

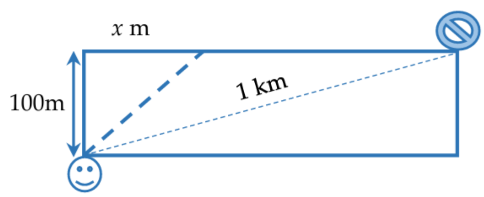
Bài 52: Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C. Khoảng cách ngắn nhất từ C đến B là 1km. Khoảng cách từ B đến A là 4. Mỗi km dây điện đặt dưới nước là mất 5000 USD, còn đặt dưới đất mất 3000 USD. Hỏi điểm S trên bờ cách A bao nhiêu để khi mắc dây điện từ A qua S rồi đến C là ít tốn kém nhất.



Lời giải

Đặt SB = x (km)($0 \leq x \leq 4$) => SA = 4 – x (km)
SC = $\sqrt{BC^2+SB^2} = \sqrt{1^2+x^2} = \sqrt{x^2+1}$
Chi phí lắp đặt là: $5000\sqrt{x^2+1}$ + (4 – x).3000 (USD)
Xét $5000\sqrt{x^2+1} = 5000\sqrt{(x^2+1)\left(\frac{9}{25}+\frac{16}{25}\right)} \geq 5000\left(\frac{3x}{5}+\frac{4}{5}\right)$
$\Rightarrow 5000\sqrt{x^2+1} + (4-x).3000 \geq 5000\left(\frac{3x}{5}+\frac{4}{5}\right) + (4-x).3000 = 16000$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: x = 0,75
=> SA = 4 – 0,75 = 3,25
Vậy điểm S cách A là 3,25km thì để khi mắc dây điện từ A qua S rồi đến C là ít tốn kém nhất

Bài 53: Trong bài thực hành của môn huấn luyện quân sự có tình huống chiến sĩ phải bơi qua một con sông để tấn công một mục tiêu ở phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 100m và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một nửa vận tốc chạy trên bộ. Hãy cho biết chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất, nếu như dòng sông là thẳng, mục tiêu ở cách chiến sĩ 1km theo đường chim bay và chiến sĩ cách bờ bên kia sông 100m?



Lời giải

Đặt vận tốc bơi của chiến sĩ là: v (v > 0)
=> Vận tóc chạy bộ của chiến sĩ là: 2v

Quãng đường bơi của chiến sĩ là: $\sqrt{x^2 + 100^2}$ (m)
Quãng đường chạy bộ của chiến sĩ là: $\sqrt{1000^2 - 100^2} - x = 300\sqrt{11} - x$ (m)
Thời gian mà chiến sĩ đi được đến mục tiêu là: $\frac{\sqrt{x^2+100^2}}{v} + \frac{300\sqrt{11}-x}{2v}$

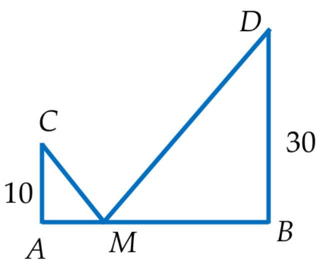
Xét $\frac{\sqrt{x^2+100^2}}{v} + \frac{300\sqrt{11}-x}{2v} = \frac{2\sqrt{x^2+100^2}+300\sqrt{11}-x}{2v} = \frac{2\sqrt{(x^2+100^2)\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)}+300\sqrt{11}-x}{2v}$

$\geq \frac{2\left(\frac{x}{2}+50\sqrt{3}\right)+300\sqrt{11}-x}{2v} = \frac{x+100\sqrt{3}+300\sqrt{11}-x}{2v} = \frac{100\sqrt{3}+300\sqrt{11}}{2v}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x = \sqrt{\frac{10000}{3}}$

Quãng đường bơi của chiến sĩ là: $\sqrt{\left(\frac{10000}{3}\right)^2 + 100^2} = \frac{200}{\sqrt{3}}$

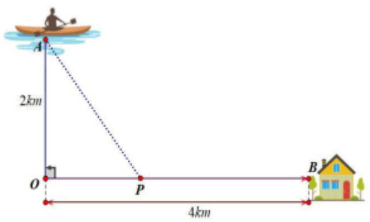
Bài 54: Nhà Văn hóa Thanh niên của thành phố X muốn trang trí đèn dây led gần cổng để đón xuân Đinh Dậu 2017 nên đã nhờ bạn Na đến giúp. Ban giám đốc Nhà Văn hóa Thanh niên chỉ cho bạn Na biết chỗ chuẩn bị trang trí đã có hai trụ đèn cao áp mạ kẽm đặt cố định ở vị trí A và B có độ cao lần lượt là 10 m và 30 m, khoảng cách giữa hai trụ đèn 24 m và cũng yêu cầu bạn Na chọn một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất nằm giữa hai chân trụ đèn để giăng đèn dây led nối đến hai đỉnh C và D của trụ đèn (như hình vẽ). Hỏi bạn Na phải đặt chốt ở vị trí cách trụ đèn B trên mặt đất là bao nhiêu để tổng độ dài của hai sợi dây đèn led ngắn nhất?



Lời giải

Đặt AM = x (m)(0 < x < 24)
=> BM = 24 – x (m)
Độ dài đoạn dây đèn led là: CM + DM = $\sqrt{x^2 + 10^2} + \sqrt{(24 - x)^2 + 30^2}$ (m)
Áp dụng bất đẳng thức Mincopxki:
$\sqrt{x^2 + 10^2} + \sqrt{(24 - x)^2 + 30^2} \geq \sqrt{(x + 24 - x)^2 + (10 + 30)^2} = 8\sqrt{34}$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: 30x = 10(24 – x) => x = 6
=> BM = 24 – 6 = 18 (m)
Vậy bạn Na phải đặt chốt ở vị trí cách trụ đèn B trên mặt đất là 18m thì tổng độ dài hai sợi dây đèn led ngắn nhất

Bài 55: Anh Ba đang trên chiếc thuyền tại vị trí A cách bờ sông 2km, anh dự định chèo thuyền vào bờ và tiếp tục chạy bộ theo một đường thẳng để đến một địa điểm B tọa lạc ven bờ sông, B cách vị trí O trên bờ gần với thuyền nhất là 4km (hình vẽ). Biết rằng anh Ba chèo thuyền với vận tốc 6km/h và chạy bộ trên bờ với vận tốc là 10km/h. Khoảng thời gian ngắn nhất để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là bao nhiêu?



Lời giải

Gọi quãng đường OP là: x (km)(x ≥ 0)

=> PB = 4 – x (km)

AP = $\sqrt{AO^2 + OP^2} = \sqrt{4 + x^2}$ (km)

Thời gian anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là: T = $\frac{\sqrt{4+x^2}}{6} + \frac{4-x}{10}$ (h)

Xét $\sqrt{4 + x^2} = \sqrt{(4 + x^2)\left(\frac{9}{25} + \frac{16}{25}\right)} \geq \frac{3x}{5} + \frac{8}{25}$

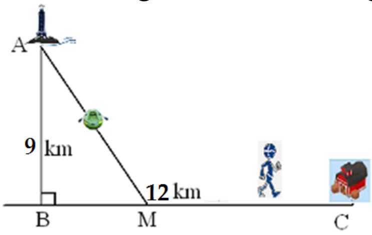
=> $\frac{\sqrt{4+x^2}}{6} + \frac{4-x}{10} \geq \frac{\frac{3x}{5}+\frac{8}{25}}{6} + \frac{4-x}{10} = \frac{34}{75}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: x = 1,5

Thời gian anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là: $\frac{\sqrt{4+1{,}5^2}}{6} + \frac{4-1{,}5}{10} = \frac{2}{3}$ (h)

Vậy khoảng thời gian ngắn nhất để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là $\frac{2}{3}$h

Bài 56: Một ngọn Hải đăng tại vị trí A cách bờ biển một khoảng AB = 9km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng 12 km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến một điểm M trên bờ biển với vận tốc 4km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 8km/h. Xác định khoảng cách x từ M đến B để người canh hải đăng đến kho nhanh nhất ?



Lời giải

Đặt BM = x (km)(0 < x < 12)

=> MC = 12 – x (km)

AM = $\sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{81 + x^2}$ (km)

Thời gian người canh hải đăng chèo đò đi từ A đến M là: $\frac{\sqrt{81+x^2}}{4}$ (h)

Thời gian người canh hải đăng đi bộ từ M đến C là: $\frac{12-x}{8}$ (h)

Thời gian người canh hải đăng đi từ A đến C là: $\frac{\sqrt{81+x^2}}{4} + \frac{12-x}{8}$ (h)

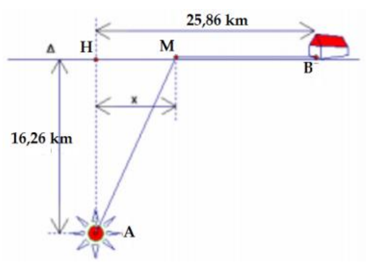
Xét $\sqrt{81 + x^2} = \sqrt{(81 + x^2)\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)} \geq \frac{x}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2}$

=> $\frac{\sqrt{81+x^2}}{4} + \frac{12-x}{8} \geq \frac{\frac{x}{2}+\frac{9\sqrt{3}}{2}}{4} + \frac{12-x}{8} = \frac{12+9\sqrt{3}}{8}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: x = $3\sqrt{3}$

Vậy khoảng cách x = $3\sqrt{3}$ từ M đến B thì người canh hải đăng đến kho nhanh nhất

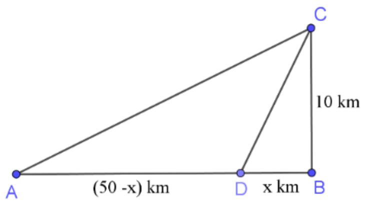
Bài 57: Một nhân viên gác ở trạm hải đăng trên biển (điểm A) cách bờ biển 16,28 km, muốn vào đất liền để đến ngôi nhà bên bờ biện (điểm B) bằng phương tiện ca nô với vận tốc 8 km/h cập bờ sau đó đi tiếp bằng xe đạp với vận tốc 12 km/h. Hỏi ca nô phải cập bờ tại điểm M cách B một khoảng là bao nhiêu để thời gian dành cho lộ trình di chuyển là nhỏ nhất? (giả thiết rằng thời tiết tốt, độ dạt của ca nô khi di chuyển là không đáng kể).



Lời giải

Đặt HM = x (km)(0 < x < 25,86)
=> MB = 25,86 – x (km)
AM = $\sqrt{AH^2 + HM^2} = \sqrt{16{,}26^2 + x^2}$ (km)
Thời gian nhân viên đi bằng ca nô là: $\frac{\sqrt{16{,}26^2 + x^2}}{8}$ (h)
Thời gian nhân viên đạp xe là: $\frac{25{,}86 - x}{12}$ (h)
Tổng thời gian là: $\frac{\sqrt{16{,}26^2 + x^2}}{8} + \frac{25{,}86 - x}{12}$ (h)
Xét $\sqrt{16{,}26^2 + x^2} = \sqrt{(16{,}26^2 + x^2)\left(\frac{4}{9} + \frac{5}{9}\right)} \geq \frac{2x}{3} + \frac{271\sqrt{5}}{50}$
=> $\frac{\sqrt{16{,}26^2 + x^2}}{8} + \frac{25{,}86 - x}{12} \geq \frac{\frac{2x}{3} + \frac{271\sqrt{5}}{50}}{8} + \frac{25{,}86 - x}{12} = \frac{271\sqrt{5}}{400} + \frac{107}{50}$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: x = $\sqrt{211{,}51008} \approx 14{,}54$
=> MB = 25,68 – 14,54 = 11,14 (km)
Vậy ca nô phải cập bờ tại điểm M cách B khoảng 14,54km để thời gian dành cho lộ trình di chuyển là nhỏ nhất

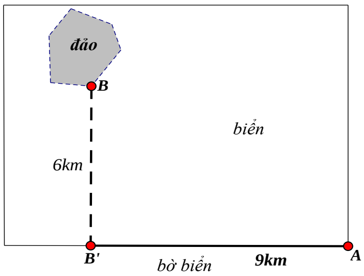
Bài 58: Cô An đang ở khách sạn A bên bờ biển, cô cần đi du lịch đến hòn đảo C. Biết rằng khoảng cách từ đảo C đến bờ biển là 10 km , khoảng cách từ khách sạn A đến điểm B trên bờ gần đảo C là 50 km . Từ khách sạn A, cô An có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đi đường thủy để đến hòn đảo C (như hình vẽ bên). Biết rằng chi phí đi đường thủy là 5 USD/km, chi phí đi đường bộ là 3 USD/km. Hỏi cô An phải đi đường bộ một khoảng bao nhiêu km để chi phí là nhỏ nhất.



Lời giải

Gọi quãng đường cô An đi bộ là: AD
Đặt DB = x (km)(0 ≤ x ≤ 50)
=> AD = 50 – x (km)
CD = $\sqrt{BC^2 + DB^2} = \sqrt{x^2 + 10^2}$ (km)
Chi phí của cô An là: 3(50 – x) + $5\sqrt{x^2 + 10^2}$ (USD)
Xét $5\sqrt{x^2 + 10^2} = \sqrt{25(x^2 + 10^2)} = \sqrt{(3^2 + 4^2)(x^2 + 10^2)} \geq 3x + 40$
=> 3(50 – x) + $5\sqrt{x^2 + 10^2} \geq$ 150 – 3x + 3x +40 = 190
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: x = 7,5
AD = 50 – 7,5 = 42,5 (km)
Vậy cô An phải đi đường bộ một khoảng 42,5 km để chi phí là nhỏ nhất

Bài 59: Công ty XDPL muốn làm một đường ống dẫn khí từ một địa điểm A trên bờ biển đến một điểm B trên một hòn đảo. Khoảng cách ngắn nhất từ điểm B đến bờ biển là 6 km . Giá để xây lắp mỗi km đường ống trên bờ là 50.000 USD , còn xây lắp dưới nước là 130.000 USD . B' là điểm trên bờ biển sao cho BB' vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B' là 9 km. Hỏi vị trí điểm M trên bờ cách A bao xa để chi phí xây lắp đường ống từ A qua M rồi đến B là ít tốn kém nhất?



Lời giải

Đặt B'M = x (km)

=> AM = 9 – x (km)

BM = $\sqrt{BB'^2 + B'M^2} = \sqrt{x^2 + 6^2}$ (km)

Chi phí xây dựng đường ống là: $130000\sqrt{x^2 + 6^2}$ + 50000(9 – x) (USD)

Xét $\sqrt{x^2 + 6^2} = \sqrt{(x^2 + 6^2)\left(\frac{25}{169} + \frac{144}{169}\right)} \geq \frac{5x}{13} + \frac{72}{13}$

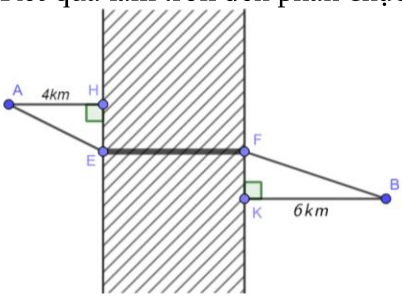
=> $130000\sqrt{x^2 + 6^2} + 50000(9 - x) \geq 130000\left(\frac{5x}{13} + \frac{72}{13}\right) + 50000(9 - x) = 1170000$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: x = 2,5

AM = 9 – 2,5 = 6,5

Vậy điểm M trên bờ cách A một khoảng 6,5km thì chi phí xây lắp đường ống từ A qua M rồi đến B là ít tốn kém nhất

Bài 60: Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là 4km và thành phố B cách con sông một khoảng 6km (hình vẽ), biết HE + KF = 20km và độ dài EF không đổi. Hỏi cây cầu cách thành phố A là bao nhiêu km để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (Đi theo đường AEFB)? (Kết quả làm tròn đến phần chục)



Lời giải

Đặt HE = x (km)(x > 0)

=> KF = 20 – x (km)

AE = $\sqrt{AH^2 + HE^2} = \sqrt{x^2 + 4^2}$ (km)

BF = $\sqrt{BK^2 + FK^2} = \sqrt{(20 - x)^2 + 6^2}$ (km)

Vì EF không đổi nên AB ngắn nhất khi AE + BF nhỏ nhất

AE + BF = $\sqrt{x^2 + 4^2} + \sqrt{(20 - x)^2 + 6^2}$ (km)

Áp dụng bất đẳng thức Mincopxki:

$\sqrt{x^2 + 4^2} + \sqrt{(20 - x)^2 + 6^2} \geq \sqrt{(x + 20 - x)^2 + (4 + 6)^2} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: 6x = 4(20 – x) => x = 8

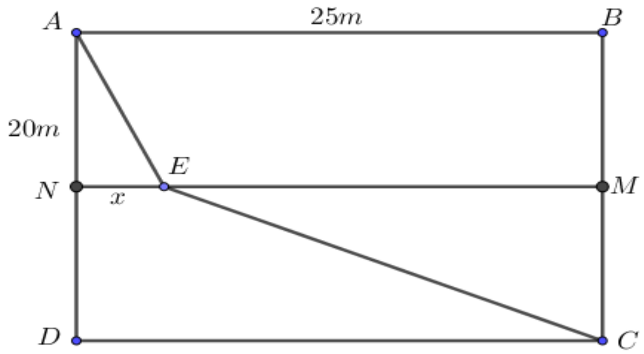
AE = $\sqrt{8^2 + 4^2} \approx 8{,}95$ (km)

Vậy xây cây cầu cách thành phố A khoảng 8,95 km thì đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất

Bài 61: Một mảnh đất hình chữ nhật ABCD có chiều dài AB = 25m, chiều rộng AD = 20m được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M, N lần lượt là trung điểm BC và AD). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ A đến C qua vạch chắn MN, biết khi làm đường trên khu vực

ABMN mỗi giờ làm được 15m và khi làm trong khu vực CDNM mỗi giờ làm được 30m. Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C

Lời giải



Do cần thời gian xây ngắn nhất nên con đường làm trên mỗi miền phải là những đường thẳng

Gọi AE và EC lần lượt là đoạn đường cần làm

Đặt NE = x (m)($0 \le x \le 25$)

=> EM = 25 – x (m)

AE = $\sqrt{AN^2 + EN^2} = \sqrt{10^2 + x^2}$ (m)

EC = $\sqrt{MC^2 + EM^2} = \sqrt{(25 - x)^2 + 10^2}$ (m)

Thời gian để làm đoạn đường từ A đến C là:

$\frac{AE}{15} + \frac{EC}{30} = \frac{\sqrt{10^2 + x^2}}{15} + \frac{\sqrt{(25 - x)^2 + 10^2}}{30}$ (h)

Xét $\frac{\sqrt{10^2 + x^2}}{15} + \frac{\sqrt{(25 - x)^2 + 10^2}}{30} = \frac{\sqrt{20^2 + (2x)^2} + \sqrt{(25 - x)^2 + 10^2}}{30}$

Áp dụng bất đẳng thức Mincopxki:

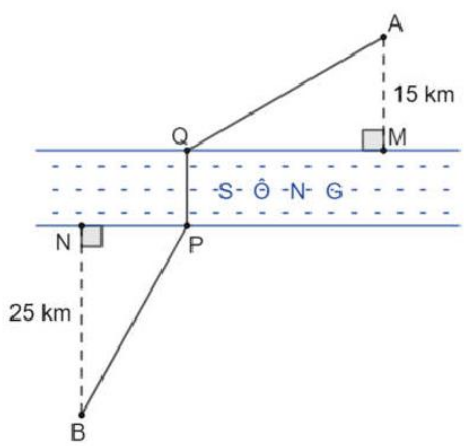
$\sqrt{20^2 + (2x)^2} + \sqrt{(25 - x)^2 + 10^2} \ge \sqrt{(45 - x)^2 + (2x + 10)^2} =$
$\sqrt{5(x - 5)^2 + 2000}$

=> $\frac{\sqrt{20^2 + (2x)^2} + \sqrt{(25 - x)^2 + 10^2}}{30} \ge \frac{\sqrt{5(x - 5)^2 + 2000}}{30} \ge \frac{\sqrt{2000}}{30} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} 20.10 = 2x(25 - x) \\ x - 5 = 0 \end{cases}$ => x = 5

Vậy thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C là $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ h

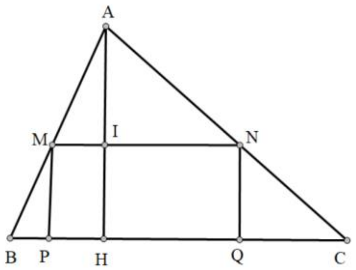
Bài 62: Hai khu dân cư A và B nằm ở hai bờ đối diện của một con sông. Khu A cách bờ sông 15km, khu B cách bờ sông 25km. Chính quyền muốn xây dựng một cây cầu PQ bắc ngang qua sông để thuận tiện đi lại (hình vẽ minh họa). Biết rằng QM + NP = 30 km và độ dài cây cầu PQ là không đổi. Hỏi đầu cầu Q cách thành phố A là bao nhiêu km để quãng đường đi từ thành phố A đến thành phố B theo đường gấp khúc AQPB là ngắn nhất?



Lời giải

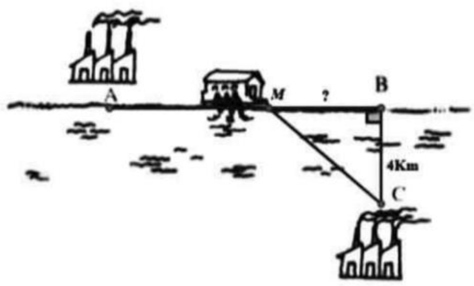
Đặt QM = x (km)
=> NP = 30 – x (km)
AQ = $\sqrt{AM^2 + QM^2} = \sqrt{15^2 + x^2}$ (km)
BP = $\sqrt{BN^2 + NP^2} = \sqrt{25^2 + (30 - x)^2}$ (km)
Vì PQ không đổi nên AB ngắn nhất khi AQ + BP nhỏ nhất
AQ + BP = $\sqrt{15^2 + x^2} + \sqrt{25^2 + (30 - x)^2}$ (km)
Áp dụng bất đẳng thức Mincopxki:
$\sqrt{15^2 + x^2} + \sqrt{25^2 + (30 - x)^2} \geq \sqrt{(15 + 25)^2 + (x + 30 - x)^2} = 50$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: 25x = 15(30 – x) => x = 11,25
AQ = $\sqrt{15^2 + 11{,}25^2}$ = 18,75 (km)
Vậy Q cách thành phố A một khoảng là 18,75 km để quãng đường AQPB ngắn nhất

Bài 63: Trên mảnh đất hình ΔABC nhọn. Người ta muốn lấy một phần đất hình chữ nhật MNQP để làm vườn hoa sao cho điểm M ∈ AB ; N ∈ AC ; P, Q ∈ BC (như hình vẽ). Hãy tìm vị trí của điểm M, N sao cho diện tích phần đất hình chữ nhật MNQP là lớn nhất?



Ta có: AI = AH – IH = AH – MQ
Ta có: ΔAMN ~ ΔABC => $\frac{MN}{BC} = \frac{AI}{AH} = \frac{AH - HI}{AH}$ nên MN = BC. $\frac{AH - HI}{AH}$
S_{MNQP} = MN.MP = MN.HI = BC. $\frac{AH - HI}{AH}$.HI = $\frac{BC}{AH}$.(AH – HI).HI
Vì BC và AH không đổi nên diện tích MNQP lớn nhất khi (AH – HI).HI lớn nhất khi: AH – HI = HI hay AH = 2HI
Hay I là trung điểm của AH. Khi đó M, N là trung điểm của AB, AC

Bài 67: Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện gió ở vị trí A, nằm sát bờ biển, đến một hòn đảo ở vị trí C. Khoảng cách từ vị trí C đến bờ biển là đoạn thẳng BC bằng 4km như hình vẽ. Bờ biển chạy thẳng từ vị trí A đến vị trí B với khoảng cách là 10km. Chi phí lắp đặt cho 1km dây điện trên biển là 5 tỷ đồng, còn lắp đặt 1km trên đất liền chỉ là 3 tỷ đồng. Xác định vị trí điểm M (điểm bắt đầu nối dây từ đất liền ra đảo) trên đoạn thẳng AB để tổng chi phí lắp đặt là nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất đó



Lời giải

Đặt MC = x (km)(x > 4)
=> MB = $\sqrt{MC^2 - BC^2} = \sqrt{x^2 - 16}$ (km)
=> AM = 10 – $\sqrt{x^2 - 16}$ (km)
Tổng số tiền lắp cáp là: 3(10 – $\sqrt{x^2 - 16}$) + 5x (tỷ đồng)

Xét $3(10 - \sqrt{x^2 - 16}) + 5x = 5x - 3\sqrt{x^2 - 16} + 30$

Đặt $P = 5x - 3\sqrt{x^2 - 16} + 30 = 5x - \sqrt{9(x - 4)(x + 4)} + 30$

$\Rightarrow 2P = 10x - 2\sqrt{9(x - 4)(x + 4)} + 60$

$= 9(x - 4) - 2\sqrt{9(x - 4)(x + 4)} + x + 4 + 92$

$= (3\sqrt{x - 4} - \sqrt{x + 4})^2 + 92 \geq 92$

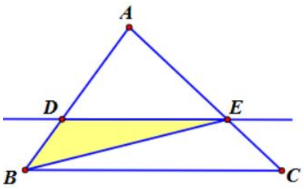
$\Rightarrow 2P \geq 92 \Rightarrow P \geq 46$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $3\sqrt{x - 4} = \sqrt{x + 4} \Rightarrow x = 5$

$MB = \sqrt{5^2 - 16} = 3$ (km)

Vậy M nằm trên đoạn AB cách B 3km thì tổng chi phí lắp đặt nhỏ nhất là 46 tỷ đồng

Bài 64: Bạn An có một tấm bìa hình tam giác ABC có diện tích $300cm^2$. Bạn An cắt tấm bìa bằng một đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại D, E sao cho diện tích tam giác BDE lớn nhất. Tính diện tích có thể đạt được của tam giác BDE



Lời giải

Đặt $\frac{AD}{AB} = x$ $(0 < x < 1)$

DE // BC $\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = x$

Do ΔABE và ΔABC có cùng chung đường cao hạ từ B xuống AC nên

$\Rightarrow \frac{S_{ABE}}{S_{ABC}} = \frac{AE}{AC} = x \Rightarrow S_{ABE} = x.S_{ABC}$ (cm^2)

Do ΔBDE và ΔBAE có cùng chung đường cao hạ từ E xuống AB nên

$\Rightarrow \frac{S_{BDE}}{S_{ABE}} = \frac{BD}{AB}$ (1)

Ta có: $BD = AB - AD \Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{AB - BD}{AB} = 1 - \frac{AD}{AB} = 1 - x$ (2)

(1)(2) $\Rightarrow S_{BDE} = (1 - x).S_{ABE} = (1 - x).(x.S_{ABC})$ (cm^2)

Xét $1 - x).(x.S_{ABC}) = 300x(1 - x)$

Áp dụng bất đẳng thức phụ Cô-si 2 số:

$x(1 - x) \leq \left(\frac{x + 1 - x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow S_{BDE} \leq 300.\frac{1}{4} = 75$

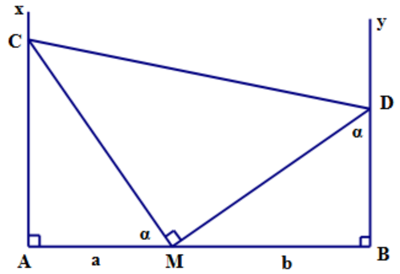
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x = 1 - x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ D là trung điểm của AB => E đồng thời là trung điểm của AC

Vậy diện tích lớn nhất của tam giác BDE là $75cm^2$

Bài 65: Cho điểm M thuộc đoạn thẳng AB. Vẽ về cùng một phía các tai Ax, By vuông góc với AB. Lấy C thuộc Ax, D thuộc By sao cho $\angle CMD = 90°$. Xác định vị trí của C và D để diện tích tam giác CMD nhỏ nhất

Lời giải



Ta có: ∠AMC = ∠BDM

Đặt ∠AMC = ∠BDM = α; MA = a; MB = b

MC = $\frac{a}{Cos\alpha}$; MD = $\frac{b}{Sin\alpha}$

$S_{CMD} = \frac{MC.MD}{2} = \frac{ab}{2Sin\alpha.Cos\alpha}$

Ta có: $(Sin\alpha - Cos\alpha)^2 \geq 0 \Rightarrow Sin^2\alpha + Cos^2\alpha \geq 2Sin\alpha.Cos\alpha$

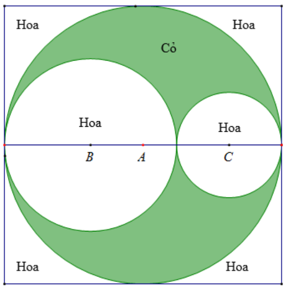
$\Rightarrow 2Sin\alpha.Cos\alpha \leq 1 \Rightarrow S_{CMD} \geq a.b$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: Sinα = Cosα => Sinα = Sin(90° - α)

=> α = 90° - α => α = 45° => AC = AM; BD = BM

Vậy khi AC = AM và BD = BM thì S_{CMD} đạt giá trị nhỏ nhất bằng AM.MB

Bài 66: Để thiết kế khu vườn hình vuông cạnh 10 mét như hình vẽ. Phần được tô đậm dùng để trồng cỏ, phần còn lại trồng Hoa Hồng. Biết mỗi mét vuông trồng cỏ chi phí mất 100.000 đồng, mỗi mét vuông trồng Hoa thì mất 300.000 đồng. Tính tổng chi phí (đồng) của vườn trong trường hợp diện tích trồng hoa là nhỏ nhất (làm tròn đến hàng nghìn)



Lời giải

Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính hai đường tròn tâm B và tâm C

Ta có $R_1 + R_2 = 5$ (m)

Diện tích trồng hoa là: $S_1 = 100 - 25\pi + (R^2_1 + R^2_2)\pi = 100 - 2R_1.R_2 - \frac{(R_1 + R_2)^2}{2}\pi = 100 - \frac{25}{2}\pi$

Diện tích trồng hoa nhỏ nhất là: $S_1 = 100 - \frac{25}{2}\pi$ (m^2)

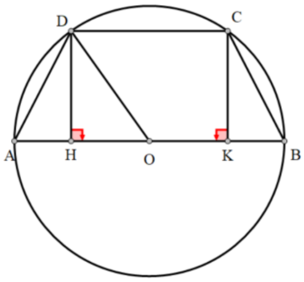
Diện tích trồng cỏ là: $S_2 = 100 - S_1 = \frac{25}{2}\pi$ (m^2)

Tổng chi phí là: $T = 100S_2 + 300S_1 \approx 22146$ (nghìn đồng)

Vậy tổng chi phí của vường trong trường hợp diện tích trồng hoa nhỏ nhất là 22146 nghìn đồng

Bài 67: Ông Khải dùng một tấm tôn phẳng có dạng nửa hình tròn đường kính 4m để tạo thành một hình thang như sau: Hình thang có bốn đỉnh đều thuộc nửa đường tròn, trong đó đáy lớn là đường kính của nửa hình tròn. Tính diện tích lớn nhất của hình thang mà ông Khải có thể tạo được.

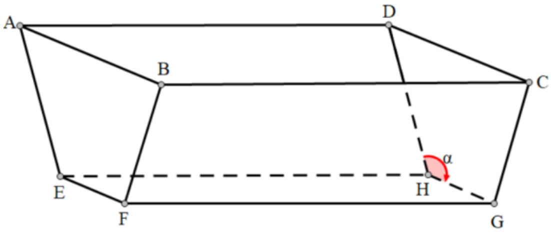
Lời giải



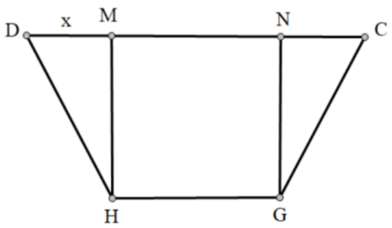
Giả sử ông Khải tạo ra hình thang ABCD nội tiếp đường tròn (O) đường kính AB = 4m

Khi đó: OA = OB = OC =OD = 2m
Kẻ đường cao DH và CK
Đặt CD = 2x (0 < x < 2)
=> HK = 2x; OH = x
HD = $\sqrt{OD^2 - HO^2} = \sqrt{4 - x^2}$ (m)
$S_{ABCD} = \frac{(AB + CD).OH}{2} = (x + 2)\sqrt{4 - x^2}$ (m^2)
Xét $(x + 2)\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{(x + 2)^2(4 - x^2)} = \sqrt{(x + 2)^3(2 - x)}$
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:
$$\left[\frac{\frac{x+2}{3} + \frac{x+2}{3} + \frac{x+2}{3} + 2 - x}{4}\right]^4 \geq \frac{(x + 2)^3(2 - x)}{27}$$
$1 \geq \frac{(x + 2)^3(2 - x)}{27}$ hay $(x + 2)^3(2 – x) \leq 27$
=> $S_{BCD} \leq 3\sqrt{3}$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{x + 2}{3} = 2 – x$ => x = 1
Vậy diện tích lớn nhất hình thang mà ông Khải có thể tạo được là $3\sqrt{3}$ m^2

Bài 68: Một bác nông dân dùng 3 tấm gỗ hình chữ nhật có cùng kích thước để làm thành một chiếc máng đựng hình lăng trụ đứng rồi đóng hai đáy lại như hình minh họa ở trên (mặt ba tấm gỗ là 3 hình chữ nhật AEHD, EFGH, BFGC). Tìm số đo góc α (tạo bởi tia HD và tia HG) để thể tích máng hình trụ lớn nhất (bỏ qua các mối ghép)



Lời giải



Đặt DM = x, DH = a, AD = b
=> HM = $\sqrt{DH^2 - DM^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$, MN = a, NC = x
Diện tích đáy lăng trụ là: S = (x + a) $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{(x + a)^3(a - x)}$
Áp dụng bất đẳng thức phụ Cô-si 2 số dạng ab $\leq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$:
$(a + x)^3(a – x) = \frac{1}{3}(a + x)^3(a – x)(3a – 3x) \leq \frac{1}{3}(a + x)^2.(2a – x)^2 \leq \frac{1}{3}\left(\frac{3a}{2}\right)^4$
Do đó thể tích lăng trụ V = S_{DCGH}.AD $\leq b\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{3a}{2}\right)^4} = \frac{3a^2b\sqrt{3}}{4}$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: x = $\frac{a}{2}$ => sinDHM = $\frac{1}{2}$ => ∠DHM = 30°
Vậy α = 120° thì thể tích máng là lớn nhất

TÀI LIỆU THAM KHẢO:

1. Các Đề Kiểm Tra, Thi Thử, Tuyển Sinh Của Các Trường, Phường/ Xã, Tỉnh Thành Phố Trên Cả Nước
2. Tài Liệu Ôn Thi THPTQG 2025
3. TOÁN MATH: https://thcs.toanmath.com/
4. Tài Liệu Giảng Dạy Lớp 9, Cấp 3